



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

“Mancais Magnéticos Ativos para Atenuação de Vibrações em Eixos Rotativos”

Victor Suman Guirao

Orientador: Prof. Dr. Vicente Lopes Junior

Co-orientador: Prof. Dr. Luiz de Paula do Nascimento

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP – Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Conhecimento: Mecânica dos Sólidos.

Ilha Solteira – SP
Agosto de 2012

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

G965m	Guirao, Victor Suman. Mancais magnéticos ativos para atenuação de vibrações em eixos rotativos / Victor Suman Guirao. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2012 136 f. : il. Dissertação (mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2012 Orientador: Vicente Lopes Junior Co-orientador: Luiz de Paula do Nascimento 1. Controle ativo de vibrações. 2. Controle ótimo. 3. Mancais magnéticos ativos. 4. Mancais. 5. Posicionamento ótimo de atuadores. 6. Rotores flexíveis. 7. Rotores.
-------	--



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

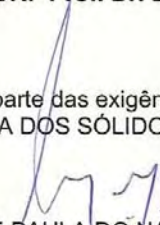
TÍTULO: Mancais Magnéticos Ativos para Atenuação de Vibrações em Eixos Rotativos

AUTOR: VICTOR SUMAN GUIRÃO

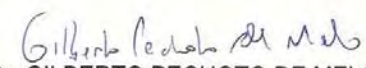
ORIENTADOR: Prof. Dr. VICENTE LOPES JUNIOR

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. LUIZ DE PAULA DO NASCIMENTO

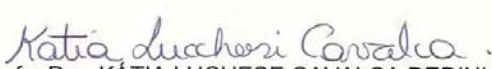
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica ,
Área: MECANICA DOS SÓLIDOS, pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. LUIZ DE PAULA DO NASCIMENTO

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. GILBERTO PECHOTO DE MELO

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Profa. Dra. KÁTIA LUCHESE CAVALCA DEDINI

Departamento de Projeto Mecânico / Universidade Estadual de Campinas

Data da realização: 14 de agosto de 2012.

Agradecimentos

A Deus.

A minha família, principalmente meus pais, Antonio e Ana Maria, e meu irmão Renato, que sempre me apoiaram em todos os momentos de minha vida.

A minha noiva, Alessandra, pelo apoio e compreensão.

Ao meu orientador, Vicente Lopes Junior.

Ao meu co-orientador e amigo desde o início da graduação, Luiz de Paula do Nascimento, que sempre esteve disposto a me ajudar e me encorajar em meus trabalhos, desde os projetos de iniciação científica.

A todos os amigos alunos do mestrado.

A toda equipe do Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, em especial aos professores Gilberto Pechoto de Melo, Antônio Eduardo Turra, Adyles Arato Júnior, Marcio Antônio Bazani, João Antônio Pereira, Michael John Brennan, Samuel da Silva, Gustavo Luis Chagas Manhães de Abreu e ao técnico Carlos José Santana.

A FAPESP pelo financiamento durante a realização do mestrado.

RESUMO

Este trabalho trata do controle de vibrações em rotores utilizando mancais magnéticos ativos. Foram apresentadas simulações numéricas para o posicionamento ótimo de um atuador magnético utilizado para atenuar vibrações em rotor apoiado por mancais convencionais. O posicionamento ótimo do atuador foi implementado utilizando como função objetivo as normas H_2 e H_∞ . Para modelar o rotor foi utilizado o método de elementos finitos (MEF) e a técnica de redução pseudo-modal para diminuir o esforço computacional durante o controle. As simulações mostraram que um bom posicionamento do atuador aliado ao controle LQR proporcionam grandes reduções dos níveis de vibração no rotor, quando comparado aos níveis de vibração do rotor original. Para a bancada de testes foram realizadas simulações adicionais, tendo em vista que o rotor experimental utiliza dois mancais magnéticos para levitar e controlar as vibrações. Foram apresentados os resultados de simulações de dois controladores LQR projetados com os dados da bancada de testes utilizada nos experimentos. O primeiro controlador considera modelo de rotor flexível modelado pelo método de elementos finitos e reduzido com a técnica de redução pseudo-modal. O segundo controlador foi modelado considerando o rotor como sendo um corpo rígido. Os resultados experimentais foram confrontados com os resultados de simulação e com os resultados obtidos do controlador do fabricante que forneceu a bancada.

Palavras-chave: Controle ativo de vibrações. Controle ótimo. Mancais magnéticos ativos. Posicionamento ótimo de atuadores. Rotores flexíveis.

ABSTRACT

This paper deals with vibration control of rotors using active magnetic bearings. Numerical simulations were presented for the optimal positioning of a magnetic actuator used to attenuate vibrations in rotor supported by conventional bearings. The optimal positioning of the actuator was implemented using as objective function the norm H_2 e H_∞ . To model the rotor was used finite element method (FEM) and the pseudo-modal reduction technique to reduce computational effort during the control. The simulations showed that a good positioning actuator combined to the control LQR provide great reductions in the levels of vibration in the rotor, compared the vibration of the original rotor. For the test rig were realized additional simulations, in view of the rotor experimental uses two magnetic bearings for levitating and control the vibrations. Were present the results of two simulations designed LQR controllers with data from the test rig used in the experiments. The first controller model considers flexible rotor modeled by finite element method and reduced with the pseudo-modal reduction technique. The second controller is modeled considering the rotor as a rigid body. The experimental results were compared with simulation results and the results obtained from the controller manufacturer who supplied the test rig.

Keywords: Active vibration control. Optimal control. Active magnetic bearings. Optimal positioning of actuators. Flexible rotors.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Geometria típica de um MMA radial	21
Figura 2 - Geometria básica da ação de um atuador magnético	25
Figura 3 - Densidade de fluxo magnético (B) vs. Intensidade de campo magnético (H) para o aço silício.....	26
Figura 4 - Mecanismo de dupla ação em um MMA em uma direção de controle.....	29
Figura 5 - Relação entre Campo Magnético e Força de Lorentz	33
Figura 6 - Esquema de conrolador por realimentação de estados.....	39
Figura 7 - Esquema de um controlador com retorno integral	43
Figura 8 - Esquema de montagem do rotor idealizado	45
Figura 9 - Primeiro modo de vibrar para o rotor estacionário (67,7 Hz)	47
Figura 10 - Segundo modo de vibrar para o rotor estacionário (257,0 Hz)	47
Figura 11 - Diagrama de Campbell do rotor	48
Figura 12 - Resposta a 250 mm para um impulso no disco, sem MMA.....	49
Figura 13 - Espectro da resposta para a entrada impulsiva no disco, sem MMA.....	49
Figura 14 - Norma H2 para diferentes posições ao longo do rotor.....	50
Figura 15 - Norma H ∞ para diferentes posições ao longo do rotor.....	51
Figura 16 - Deslocamento do rotor na posição do MMA devido ao impulso na direção x ...	54
Figura 17 - Corrente elétrica de controle devido ao impulso.....	54
Figura 18 - Deslocamentos para excitação transiente na direção x.	55
Figura 19 - Corrente elétrica de controle na direção x para a excitação transiente.	56
Figura 20 - Força de controle na direção x para a excitação transiente.	56

Figura 21 - Deslocamentos para excitação permanente na direção x.	57
Figura 22 - Corrente elétrica de controle na direção x para a excitação permanente.	57
Figura 23 - Força de controle na direção x para a excitação permanente.	58
Figura 24 - Esquema de montagem da bancada (rotor, MMAs e motor de acionamento)	60
Figura 25 - Dimensões do rotor simulado (em milímetros).....	60
Figura 26 - Discretização para o modelo de rotor flexível (elementos finitos)	62
Figura 27 - Primeiro modo de vibrar para o rotor estacionário (109 Hz)	62
Figura 28 - Segundo modo de vibrar para o rotor estacionário (430 Hz)	63
Figura 29 - Diagrama de Campbell do rotor levitado	64
Figura 30 - Identificação das direções de controle	65
Figura 31 - Resposta ao impulso para o modelo de rotor flexível	69
Figura 32 - Corrente de controle devido ao impulso	69
Figura 33 - Transformada de Fourier da resposta ao impulso para a direção V13.....	70
Figura 34 - Excitação tipo ruído branco no rotor flexível.....	71
Figura 35 - Resposta do rotor flexível ao ruído	71
Figura 36 - Corrente de controle devido ao ruído no rotor flexível	72
Figura 37 - Deslocamento para o rotor flexível em regime permanente	73
Figura 38 - Corrente para o rotor flexível em regime permanente	73
Figura 39 - Deslocamento para o rotor flexível acelerando.....	74
Figura 40 - Corrente para o rotor flexível acelerando.....	75
Figura 41 - Resposta ao impulso para o modelo de rotor rígido.....	78
Figura 42 - Corrente de controle devido ao impulso para o rotor rígido	78
Figura 43 - Transformada de Fourier do impulso - modelo de rotor rígido.....	79

Figura 44 -	Excitação tipo ruído branco aplicado ao rotor rígido	80
Figura 45 -	Resposta do rotor rígido ao ruído	80
Figura 46 -	Corrente de controle devido ao ruído no rotor rígido.....	81
Figura 47 -	Deslocamento para o rotor rígido em regime permanente	82
Figura 48 -	Corrente de controle para o rotor rígido em regime permanente	82
Figura 49 -	Deslocamento para o rotor rígido acelerando	83
Figura 50 -	Corrente para o rotor rígido acelerando	84
Figura 51 -	Bancada contendo mancais magnéticos, eixo e rotor com acionamento	87
Figura 52 -	Folga de operação e mancal passivo de auxílio em caso de perda de levitação .	87
Figura 53 -	Módulo controlador MB340g4-ERX e placa MB-Research (acima).....	88
Figura 54 -	Placa DSpace e microcomputador utilizado.....	89
Figura 55 -	Ambiente de trabalho Simulink.....	90
Figura 56 -	Fluxograma de controle utilizado.....	92
Figura 57 -	Resposta experimental devido ao impulso no rotor - 1º controlador	94
Figura 58 -	Transformada de Fourier do sinal de aquisição da Dspace, antes de iniciar o controle.....	94
Figura 59 -	Ampliação da resposta devido ao impulso no rotor - 1º controlador	95
Figura 60 -	Transformada de Fourier da resposta ao impulso no rotor - 1º controlador.....	96
Figura 61 -	Corrente elétrica de controle devido ao impulso no rotor - 1º controlador.....	96
Figura 62 -	Resposta devido a excitação do tipo ruído branco - 1º controlador	97
Figura 63 -	Corrente de excitação devido ao ruído - 1º controlador.....	98
Figura 64 -	Rotação do rotor durante teste de aceleração do rotor - 1º controlador	99
Figura 65 -	Deslocamentos durante a aceleração do rotor - 1º controlador	100

Figura 66 - Corrente de controle durante aceleração do rotor – 1º controlador.....	101
Figura 67 - Resposta ao impulso - 2º controlador.....	102
Figura 68 - Transformada de Fourier da resposta ao impulso - 2º controlador	103
Figura 69 - Corrente elétrica de controle devido ao impulso no rotor - 2º controlador	103
Figura 70 - Resposta devido a excitação do tipo ruído branco - 2º controlador	104
Figura 71 - Corrente de excitação devido ao ruído - 2º controlador.....	105
Figura 72 - Rotação do rotor durante teste de aceleração do rotor - 2º controlador	106
Figura 73 - Deslocamentos durante a aceleração do rotor - 2º controlador	107
Figura 74 - Corrente elétrica de controle durante a aceleração do rotor - 2º controlador....	108
Figura 75 - Deslocamentos do rotor operando a 6000 rpm – 2º controlador	109
Figura 76 - Corrente elétrica de controle para o rotor operando a 6000 rpm – 2º controlador	110
Figura 77 - Deslocamentos do rotor em regime permanente para o controlador PID do módulo MBcontroller	111
Figura 78 - Sistema de coordenadas	121
Figura 79 - Graus de liberdade dos pontos nodais que delimitam o elemento finito de eixo	124
Figura 80 - Coordenadas inerciais e móveis do centro geométrico C e coordenadas móveis do ponto arbitrário B no eixo.	128

LISTA DE SÍMBOLOS

A_g	Área da face do polo
g	Espessura da folga
B	Densidade de fluxo magnético
H	Intensidade de campo magnético
μ	Permeabilidade Magnética
ϕ	Fluxo Magnético
L	Comprimento do caminho magnético
L_{fe}	Comprimento do caminho magnético no material ferromagnético
N	Número de espiras
V_g	Volume do <i>air gap</i>
W_g	Energia Magnética
i_b	Corrente de <i>bias</i>
i_p	Corrente de controle
F_N	Força líquida produzida pelo atuador
K_i	Rigidez de corrente
K_x	Rigidez de posição
$\mathbf{M}_s$	Matriz de massa do sistema
$\mathbf{D}_s$	Matriz de amortecimento do sistema
$\mathbf{G}$	Matriz giroscópica do sistema
$\mathbf{K}_s$	Matriz de rigidez do sistema
$\mathbf{K}_2$	Matriz de rigidez devido ao movimento transiente do rotor
$\dot{\phi}(t)$	Velocidade de rotação do rotor

$\mathbf{F_p}$	Vetor de forças de perturbação
$\mathbf{F_c}$	Vetor de forças de controle devido ao MMA
$\mathbf{K_s^*}$	Matriz de rigidez simétrica sem elementos de rigidez cruzada
Φ	Matriz de transformação de coordenadas modais
δ	Coordenadas generalizadas do sistema
$\mathbf{q}$	Coordenadas generalizadas do sistema no espaço modal
$\tilde{\mathbf{M}}_s$	Matriz de massa modal do sistema
$\tilde{\mathbf{D}}_s$	Matriz de amortecimento modal do sistema
$\tilde{\mathbf{G}}$	Matriz giroscópica modal do sistema
$\tilde{\mathbf{K}}_s$	Matriz de rigidez modal do sistema
$\tilde{\mathbf{K}}_2$	Matriz de rigidez modal devido ao movimento transiente do rotor
$\mathbf{P}_s$	Matriz de posicionamento dos sensores
$\tilde{\mathbf{F}}_p$	Vetor de forças de perturbação em coordenadas modais
$\tilde{\mathbf{F}}_c$	Vetor de forças de controle devido ao MMA coordenadas modais
$\mathbf{x}$	Vetor de estado
$\mathbf{u}$	Vetor de entradas
$\mathbf{A}$	Matriz dinâmica
$\mathbf{B}$	Matriz de entrada
$\mathbf{C}$	Matriz de saída
$\mathbf{G}$	Função de transferência
$\mathbf{W}_c$	Graminiano de controlabilidade
$\mathbf{W}_o$	Graminiano de observabilidade
$\mathbf{Q}$	Matriz de ponderação do vetor de estados
$\mathbf{R}$	Matriz de ponderação do sinal de controle
J	Índice de desempenho quadrático

K	Vetor de ganho sobre os estados do sistema
T	Matriz não singular
$\tilde{\mathbf{x}}$	Vetor de estados observados
e	Vetor de erro de estimação de estados
B_p	Matriz de entrada da perturbação do sistema
K_{int}	Ganho sobre o retorno integral
$\mathbf{y}_{ref}$	Sinal de referência desejado para controle

SUMÁRIO

1	DINÂMICA DE ROTORES E CONTROLE DE VIBRAÇÕES	14
2	MANCAIS MAGNÉTICOS ATIVOS (MMAS).....	20
2.1	APLICAÇÕES	21
2.2	TEORIA BÁSICA DO ATUADOR MAGNÉTICO	24
2.3	PERDAS E EFEITO DE ARRASTO MAGNÉTICO.....	32
3	MODELAGEM MATEMÁTICA.....	34
3.1	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO ROTOR	34
3.2	REDUÇÃO PSEUDO-MODAL	35
3.3	POSICIONAMENTO ÓTIMO DE SENSORES E ATUADORES.....	37
3.3.1	<i>Norma H_2</i>	37
3.3.2	<i>Norma H_∞</i>	38
3.4	CONTROLE ÓTIMO.....	39
3.4.1	<i>Regulador Quadrático Linear (LQR)</i>	39
3.4.2	<i>Observador de estados</i>	42
3.4.3	<i>Retorno intergral</i>	43
4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	44
4.1	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS - POSICIONAMENTO ÓTIMO	44
4.1.1	<i>Modelo do rotor</i>	44
4.1.2	<i>Posicionamento Ótimo do atuador magnético</i>	50
4.1.3	<i>Parâmetros construtivos e geométricos do MMA</i>	51
4.1.4	<i>Projeto do Controlador LQR</i>	52
4.1.4.1	Resposta ao Impulso	53
4.1.4.2	Resposta ao Desbalanceamento	54
4.1.5	<i>Análise dos resultados</i>	58
4.2	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO ROTOR LEVITADO	59
4.2.1	<i>Características do rotor</i>	59
4.2.2	<i>Características dos MMAs</i>	65
4.2.3	<i>Modelo de rotor flexível</i>	66
4.2.3.1	Resposta ao impulso	68
4.2.3.2	Resposta ao ruído.....	70
4.2.3.3	Regime permanente	72
4.2.3.4	Regime transiente	73
4.2.4	<i>Modelo de rotor rígido</i>	75
4.2.4.1	Resposta ao impulso	77
4.2.4.2	Resposta ao ruído.....	79
4.2.4.3	Regime permanente	81

4.2.4.4	Regime transiente	82
4.2.5	<i>Análise dos resultados</i>	84
5	PARTE EXPERIMENTAL	86
5.1	A BANCADA	86
5.2	RESULTADOS – PRIMEIRO CONTROLADOR	93
5.2.1	<i>Resposta ao impulso</i>	93
5.2.2	<i>Resposta ao ruído</i>	97
5.2.3	<i>Aceleração do rotor</i>	98
5.3	RESULTADOS – SEGUNDO CONTROLADOR	102
5.3.1	<i>Resposta ao impulso</i>	102
5.3.2	<i>Resposta ao ruído</i>	104
5.3.3	<i>Aceleração do rotor</i>	105
5.3.4	<i>Regime permanente</i>	109
5.3.5	<i>Comparação com os resultados do controle pid SKF</i>	110
5.4	ANÁLISE DE RESULTADOS	111
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	113
6.1	CONCLUSÕES	113
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	114
	REFERÊNCIAS	116
	ANEXO A	120
	ANEXO B	133

1 DINÂMICA DE ROTORES E CONTROLE DE VIBRAÇÕES

Com o desenvolvimento da máquina a vapor surgiu a necessidade de se estudar profundamente o comportamento dinâmico das máquinas rotativas. Alguns nomes muito bem conhecidos como Rankine, De Laval, Dunkerley, Jeffcof e outros foram de extrema importância para o desenvolvimento das máquinas rotativas, principalmente na descoberta de que um rotor pode operar de maneira estável acima da primeira velocidade crítica. O aparecimento dos rotores supercríticos, que operam bem acima de uma velocidade crítica, desencadeou uma nova geração de equipamentos muitos mais leves e com uma maior relação potência gerada ou consumida em relação ao peso próprio.

O aumento na flexibilidade dos rotores implica em um aumento do nível de vibrações quando o rotor opera próximo a uma de suas velocidades críticas ou ainda quando o sistema passa por um regime transitório, colocando o equipamento em funcionamento ou desligando o mesmo. Os níveis excessivos de vibração, além de prejudicar o rendimento da máquina, aumentam os esforços mecânicos no rotor e nos mancais de apoio. Com isto o equipamento tem mais suscetibilidade a falhas bem como uma redução da vida útil. Através da aplicação de técnicas de controle podem-se reduzir os níveis de vibração a valores preestabelecidos ou aceitáveis.

Uma alternativa simples e barata de reduzir o nível de vibrações é através do controle passivo de vibrações. A redução de vibração em uma máquina pode ser realizada utilizando absorvedores dinâmicos de vibração, circuitos shunts com cerâmicas piezelétricas, transdutores eletromagnéticos, adição de materiais viscoelásticos e algumas combinações destes dispositivos. Neste sentido Bavastri et al (2007) apresentam uma análise dos principais tipos neutralizadores dinâmicos para controle passivo de vibrações, como neutralizadores eletromecânicos, viscosos e viscoelásticos. Os circuitos shunt com cerâmicas piezelétricas do tipo resistivo proporcionam um amortecimento através da dissipação elétrica devido à vibração mecânica. Já a adição de um circuito shunt resistivo-indutivo em série com o material piezelétrico produz um circuito resistivo-capacitivo-indutivo (RLC), criando eletronicamente um absorvedor do tipo massa-mola-amortecedor (LEO, 2007). O controle passivo de vibrações apresenta-se como uma solução simples e reduz satisfatoriamente os níveis de vibração, no entanto, ele é projetado apenas para uma determinada condição de

operação da máquina. Isto porque as propriedades do sistema de controle passivo são pouco versáteis, dificultando o controle de vibração diante de perturbações ou transientes.

O desenvolvimento da tecnologia digital e dos materiais inteligentes como fluido eletro-reológico, magneto-reológico e cerâmicas piezelétricas proporcionou a realização de sistemas de controle semi-ativo de vibrações. Neste tipo de controle as propriedades mecânicas dos atuadores, rigidez e amortecimento adicionados ao sistema mecânico, podem ser alteradas proporcionando uma melhor redução do nível de vibrações em uma máquina. Zhu (2004) apresenta em seu trabalho um amortecedor magneto-reológico do tipo disco aplicado em um rotor. O amortecedor do tipo disco envolve um rolamento de esferas em seu interior, este sistema é testado à malha aberta a fim de se estudar a efetividade do controle de vibrações para diferentes frequências de operação da máquina e diferentes correntes de magnetização no amortecedor. Galavotti (2010) apresentou uma análise da aplicação de um amortecedor de vibração por fricção em uma máquina rotativa. Neste caso a variação do amortecimento por atrito é obtido pela ação de uma cerâmica piezelétrica, e que se mostrou bastante eficaz no controle de vibrações em um rotor quando este opera próximo a uma de suas velocidades críticas.

O controle ativo de vibrações permite reduzir o nível de vibrações através de adição de energia ao sistema mecânico. Os dispositivos mais comuns utilizados no controle ativo de vibração em máquinas rotativas são os atuadores hidráulicos, atuadores piezelétricos e os mancais magnéticos ativos (MMAs). Os atuadores hidráulicos são encontrados geralmente em máquinas de grande porte por terem uma alta capacidade de carga. Althaus e Feldkamp (1994) desenvolveram um atuador para uma centrífuga com um rotor de aproximadamente três toneladas no qual foram aplicados algoritmos de controle com duas ênfases, para maximizar o amortecimento dos primeiros modos de vibração e para reduzir o nível de vibrações forçadas devido a um desbalanceamento residual no rotor.

A utilização de mancais magnéticos ativos como atuador de sistemas de controle ativo de vibrações continua sendo um tema de grande interesse na atualidade e as pesquisas neste sentido vêm sendo desenvolvidas buscando avançar nas técnicas que produzem os melhores desempenhos desse tipo de atuador. Neste sentido, Furtado (2008) desenvolveu um atuador magnético para aplicação na geração de forças eletromagnéticas utilizadas no processo de identificação modal e diagnóstico de falhas. Este atuador magnético, embora mais simples que um mancal magnético, pode ser utilizado no controle de vibrações de um rotor em uma direção ou também como uma fonte geradora de excitações externas. Abreu (1998) construiu

um atuador magnético para reduzir os níveis de vibrações de um rotor decorrente de forças de desbalanceamento. Este atuador é capaz de controlar os deslocamentos laterais do rotor em todas as direções no plano de controle. O sistema de controle proporcional-derivativo foi projetado para atuação em duas direções perpendiculares de forma independente, modelando o rotor como um sistema equivalente de um grau de liberdade. Silva (2005) construiu um protótipo de mancal magnético híbrido, o qual possui uma parte passiva composta por imã permanente e outra parte ativa composta por um eletroímã no qual o controle é aplicado. Este dispositivo tem a vantagem de consumir menos energia elétrica, pois os imãs permanentes fazem o papel da corrente permanente de magnetização, utilizada para dar mais estabilidade ao atuador magnético.

Um dos grandes problemas que os mancais magnéticos incorrem está na resposta à questão do que acontece quando a energia elétrica que mantém este tipo de mancal acaba subitamente. Quando isto acontece o eixo, antes submetido à levitação, entra em colapso e apóia-se nos mancais passivos de auxílio. Casos como estes são analisados no trabalho de Ishida e Inoue (2008), que apresentam uma análise das características de vibração do rotor quando este entra em contato com os mancais de auxílio (rolamento de esferas). São consideradas na modelagem do sistema as forças de contato e de fricção existentes entre o rotor e o mancal passivo, bem como, a rotação do anel interno do rolamento a fim de se estudar as características de vibração ocasionadas pela falha.

Várias aplicações de mancais magnéticos ativos também estão sendo pesquisadas, como o trabalho de Kern et al. (2006), bem como sistema de controle de estruturas com aplicação de forças eletromagnética (SODANO; INMAN, 2007). Quinn et al. (2005) apresentam em seu trabalho técnicas de identificação de trincas em eixos utilizando mancais magnéticos através da análise da variação da rigidez do eixo em função do tempo. Também neste sentido, os trabalhos de Mani et al. (2006) e Pesch (2006) apresentam resultados interessantes com o uso de um sistema de aplicação de forças dependente do tempo sobre um rotor com falha. Essas forças, se apropriadamente escolhidas, induzem modos ressonantes que são usados para identificar a magnitude da rigidez dependente do tempo devido à fissura. Nordman (2002) apresenta uma metodologia de detecção de falhas baseada no modelo de uma bomba centrífuga de simples estágio. Para encontrar as prováveis falhas no sistema foi utilizado algoritmos de lógica *fuzzy*.

Os bons resultados da aplicação dos MMAs no controle ativo de vibrações em rotores são dependentes, além de um adequado dimensionamento e montagem do atuador, das

técnicas de controle empregadas. Tammi (2006) propôs um método de controle de vibrações de rotores com uma arquitetura que compreende uma malha *feedback* interna de controle juntamente com uma malha externa para compensar excitações harmônicas devido à uma massa desbalanceada e outros tipos de excitações. Para a malha externa foram testados o controle *feedforward* e um método de controle repetitivo. Tammi (2007) apresenta a identificação e uso dos métodos de controle *feedback* e *feedforward* para atenuar vibrações de rotores utilizando atuadores magnéticos. A identificação e o controle foram realizados levando em consideração as perturbações devido à rotação. A estabilidade do sistema de controle foi analisada a fim de explorar a relação entre o sistema de amortecimento e a exatidão da modelagem através da comparação teórica-experimental. Lei e Palazzolo (2008) apresentam o projeto e a análise de um sistema de suspensão magnética para um rotor flexível. A análise é feita através de um modelo desenvolvido por elementos finitos que compreende a dinâmica do rotor e um controle ativo que proporciona boa confiabilidade e rejeição das perturbações com uma operação estável do sistema sobre uma faixa determinada de velocidades de rotação. A otimização das propriedades dinâmicas da malha fechada de controle é feita via síntese da análise dos autovalores. Guirao (2006) realizou uma análise teórica do desempenho de um sistema de controle ativo em rotores onde um sistema adaptativo *feedforward* é sobreposto ao sistema de controle a malha fechada. A variação dos parâmetros do controlador PID a malha fechada é analisada a fim de se reduzir os níveis de vibração locais e globais no rotor. Koroishi et al. (2010) apresentam um controle ativo de vibrações via retroação de estados no qual o ganho é calculado com base na norma H_{∞} . Variações nos parâmetros de projeto do atuador são analisadas de forma a otimizar o desempenho do sistema. Xuan et al. (2009) apontaram vantagens no controle de vibrações com a utilização da técnica TDC (Time Delay Control) em relação ao controle do tipo PID. Esta técnica de controle é capaz de restituir as variáveis de estado acompanhando precisamente a dinâmica do sistema em pequenos períodos de amostragem. Segundo os autores, esta técnica de controle é mais robusta e, portanto, mais eficaz no controle de perturbações, instabilidades e não linearidades do sistema.

A otimização de sistemas de controle de vibrações é cada vez mais freqüente. Dentre alguns tipos de controle utilizados se encontra a teoria do regulador quadrático linear (LQR), proveniente da teoria do controle ótimo, que consiste em adotar um critério de desempenho e chegar a uma lei de controle que o minimize. Simões (2006) utiliza um controlador ótimo do tipo LQR para atenuar vibrações em um eixo utilizando atuadores piezelétricos do tipo pilha.

Neste trabalho foi empregado um método modal que gerou a necessidade de se estimar os estados modais através de um estimador de estados. Garcia (2010) apresenta alguns critérios de avaliação para comparar o desempenho de dois sistemas de controle aplicado em mancais magnéticos, um baseado em PID e outro baseado em LQR. O controlador LQR foi o que demonstrou melhor comportamento, tanto na análise no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

Neste trabalho é abordada a aplicação de um sistema de controle ativo, através da utilização de um atuador magnético, aplicado em um rotor flexível apoiado por dois mancais convencionais com a finalidade de reduzir o nível de vibração. A modelagem é desenvolvida empregando o método dos elementos finitos (MEF) considerando os efeitos de cisalhamento no eixo e também do efeito giroscópico, Lallane e Ferraris (1998). Também são implementadas estratégias para localização ótima do atuador magnético para controle ativo de vibrações usando como função objetivo as normas H_2 e H_∞ . O modelo obtido é reduzido utilizando a técnica de redução pseudo-modal, implicando em uma estratégia de controle modal para o projeto do controlador. Um sistema de controle ótimo do tipo LQR é utilizado, para atenuar as vibrações. A análise do desempenho da dinâmica do rotor sem e com o sistema de controle é desenvolvida no domínio do tempo e a equação do movimento é representada no espaço de estados (Ogata, 2005). Adicionalmente à análise do controle das respostas às excitações síncronas e sub-síncronas, outros tipos de excitações são introduzidas no rotor. Entre estas, pode-se citar, impactos e excitações transientes que ocorrem durante a partida e a parada das máquinas rotativas (Eshleman 1984) e ruídos, que normalmente agem em máquinas hidráulicas e turbo-compressores devido à circulação de fluidos (BOLLETER et al., 1899). O desempenho do sistema de controle é analisado com resultados no domínio do tempo e da frequência, incluindo forças e corrente elétrica de controle.

A parte experimental foi realizada com uma bancada adquirida com recursos do CNPq como parte do edital dos Institutos Nacionais de Ciência e Tecnologia (INCT). Esta bancada é composta por dois mancais magnéticos, um rotor, um módulo de controle dedicado, uma placa de conectores para leitura e injeção de sinais e o software de gerenciamento do sistema. A ideia inicial do projeto de mestrado visava a aplicação de um MMA como atenuador de vibrações em um rotor apoiado por mancais convencionais. No entanto, a bancada adquirida possui dois MMAs que são responsáveis por levitar o rotor, além de controlar as vibrações. Por ser a primeira utilização desta bancada e devido às complexidades nas alterações necessárias (inclusive a retirada de um MMA e a colocação de dois mancais convencionais)

para adaptar o sistema ao cenário inicial previsto no projeto, optou-se por utilizar a bancada na mesma configuração em que foi recebida. Desta forma, os experimentos foram realizados para avaliar a factibilidade do controle no domínio modal utilizando a teoria de modelagem de rotores para o rotor levitado e controlado por dois MMAs. Também foi testado um controlador projetado utilizando um modelo de corpo rígido do rotor, a fim de avaliar a robustez do controle LQR. À exceção das simulações de posicionamento ótimo, devido à impossibilidade de alteração da bancada e posicionamento dos MMAs não serem adequadas ao caso do rotor utilizado no experimento, simulações computacionais adicionais foram realizadas considerando os dados da bancada utilizada e os dois controladores projetados.

Ao longo deste trabalho são apresentados os resultados de simulações numéricas para um rotor apoiado por dois mancais convencionais que utiliza um atuador magnético para reduzir os níveis de vibração, incluindo a metodologia de posicionamento ótimo. Também serão apresentadas as simulações numéricas (para os dois controladores projetados a partir de modelos diferentes) realizadas com os dados da bancada na qual foram realizados os experimentos, que possui um rotor levitado e controlado por dois MMAs. Os resultados de todas as simulações são apresentados separadamente em um mesmo capítulo. Os resultados experimentais obtidos com a bancada estão detalhados em outro capítulo específico.

Este trabalho encontra-se organizado em seis capítulos. No capítulo 2 são apresentadas algumas aplicações, as características e formulações matemáticas dos mancais magnéticos ativos (MMAs). O capítulo 3 apresenta a modelagem matemática de um rotor flexível e as normas H_2 e H_∞ utilizadas como função objetivo no posicionamento ótimo de atuadores. Também é tratado neste capítulo o controle ótimo LQR e o observador de estados. O capítulo 4 apresenta as simulações do posicionamento ótimo de um atuador magnético, bem como as simulações numéricas utilizando os dados da bancada para os dois controladores projetados. No capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos com os controladores projetados. As conclusões e propostas para trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 6.

2 MANCAIS MAGNÉTICOS ATIVOS (MMAs)

Os mancais magnéticos ativos apresentam uma tecnologia inovadora. São dispositivos que sustentam um eixo por levitação dentro do mancal sem que haja qualquer contato. Por não haver contato entre o rotor e o mancal, não ocorre aquecimento do mancal mesmo no caso de operações com rotações elevadas, e o uso de lubrificantes não é necessário. Isso permite que essa tecnologia seja aplicada em várias situações com grandes vantagens.

Estes dispositivos também podem ser utilizados em situações adversas como vácuo, elevadas e baixas temperaturas, diferentemente dos mancais convencionais que nestas condições apresentam problemas na lubrificação, pois as propriedades dos lubrificantes são sensíveis, e o uso se torna inviável nestas situações.

Os MMAs são naturalmente instáveis, sendo necessário um sistema de controle a malha fechada para garantir uma operação estável. Tais sistemas de controle envolvem a presença de sensores de posição, filtros, controladores e amplificadores. No entanto, o desenvolvimento da eletrônica e de materiais ferromagnéticos favorece cada vez mais as aplicações industriais dos MMAs.

As vantagens econômicas com esse tipo de mancal são referentes aos custos com manutenção e vida útil, uma vez que nos mancais magnéticos não ocorre desgaste e sua manutenção é menos frequente com relação aos mancais convencionais.

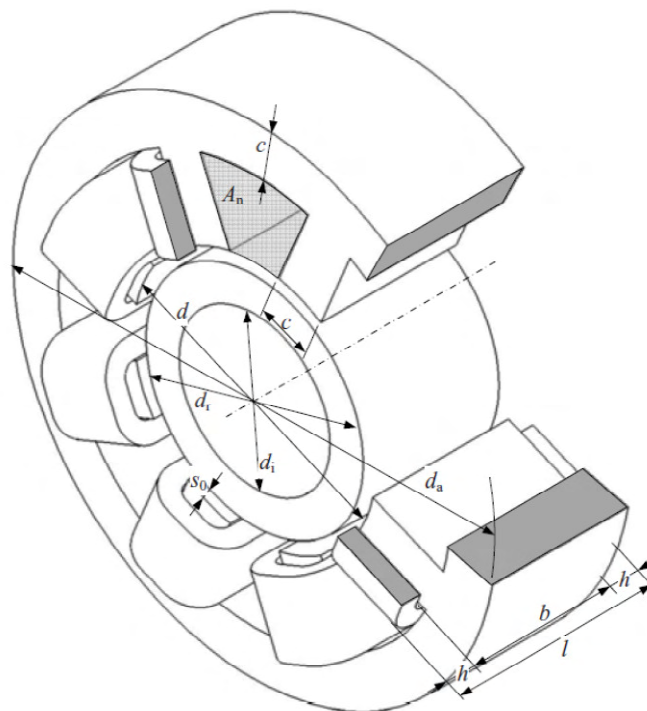
Uma das desvantagens dos MMAs são as grandes dimensões destes dispositivos. Em geral, eles têm baixa capacidade de carga quando comparados aos mancais convencionais, o que pode dificultar a aplicação em equipamentos com carga elevada.

Outra desvantagem dos MMAs está associada a necessidade de fornecimento ininterrupto de energia elétrica. Quando o fornecimento de energia é interrompido subitamente o rotor submetido à levitação sofre um colapso no mesmo instante e pode tocar o estator do mancal, danificando-o. Para prevenir esta situação alguns MMAs são equipados com mancais passivos de auxílio, que suportam os esforços momentaneamente em caso de interrupção da energia elétrica.

O investimento inicial de um sistema de controle utilizando MMAs é elevado quando comparado com outras configurações de mancal. Além disso, deve ser levada em conta a necessidade do consumo contínuo de energia elétrica. Assim, para avaliar o ganho econômico para aplicação deste tipo de mancal deve ser realizado em estudo da relação custo benefício considerando a análise dos custos de operação e manutenção destes sistemas em longo prazo.

Assim como nos mancais convencionais, existem MMAs axiais, radiais e cônicos. A Fig. 1 ilustra a configuração básica de um mancal magnético radial. Nesta ilustração d é o diâmetro interno do mancal, c é a espessura do pólo, A_n é a área superficial do espaço vazio, d_r o diâmetro do rotor, d_a o diâmetro externo do mancal, d_i o diâmetro do eixo, b é a largura ativa do mancal, l o comprimento do mancal e s_0 a folga (air gap) nominal.

Figura 1 - Geometria típica de um MMA radial



Fonte: Schweitzer et al. (2009)

2.1 APLICAÇÕES

As aplicações mais comuns para os mancais magnéticos ativos são em máquinas de rotação elevada. No entanto, ultimamente esta tecnologia vem sendo aplicada no controle ativo de vibrações e sistemas de alta precisão, devido aos avanços tecnológicos oriundos de pesquisas. Dentre algumas das aplicações dos MMA, podem ser citadas:

Aplicações em turbomáquinas: compressores e turboexpansores correspondem a uma das principais aplicações de MMA em turbomáquinas na atualidade. Neste tipo de aplicação, os MMA oferecem uma melhor eficiência, uma redução do peso global e elimina sujeiras que seriam provocadas pelos sistemas de lubrificação não existentes nesta tecnologia.

Turboexpansores equipados com MMA alcançam potência de 68 a 6.300 kW, com velocidades que variam de 7.200 a 60.000 rpm (S2M/ACTIDYNE, 1998).

Aplicações em bombas: bombas compreendem outra classe de equipamentos beneficiados pela tecnologia dos MMA. Allaire (1989) e Imlach (1990) apresentaram detalhes do projeto de uma motobomba de 20 HP e rotação de 3.600 rpm apoiada por MMA. Este tipo de bomba não requer retentores porque possui um dispositivo entre o rotor e o estator, permitindo um arranjo hermeticamente lacrado. Estas bombas são aplicadas onde o fluido de trabalho é altamente tóxico ou quando há dificuldade de contê-lo. Nestas bombas, os mancais convencionais devem ser lubrificados com óleo, e isto resulta em uma vida curta dos mancais e parada constante da bomba para que seja feita a manutenção, podendo ainda resultar na liberação do fluido altamente tóxico.

Bombas turbomoleculares: em 1999 já existiam 50.000 bombas turbomoleculares suportadas por mancais magnéticos (S2M/ACTIDYNE, 1999), elas são usadas para que se atinja um ambiente de alto vácuo para a fabricação de semicondutores. Mancais convencionais de rolamento têm se mostrados inadequados em muitas bombas deste tipo, pois podem contaminar o ambiente a vácuo com vapores provenientes do óleo de lubrificação que se aquece. Também podem apresentar baixa vida útil devido às altas velocidades de operação. Algumas bombas turbomoleculares são projetadas para trabalhar com gases corrosivos e os sistemas de MMA permitem uma maior segurança operacional do que os mancais convencionais.

Controle ativo de vibrações: os mancais magnéticos, pela sua natureza de apresentar um controle ativo, o qual proporciona a capacidade de criar forças e corrigir a posição do eixo milhares de vezes por segundo, podem ser usados com muita eficiência no controle ativo de vibrações. Isso pode ser feito através de forças adicionais atuando sobre o sistema, que irão eliminar as vibrações ao longo do rotor através dos mancais magnéticos ativos. Piper et al. (2005) estudaram um sistema de controle ativo de ruído provocado por um ventilador de fluxo axial usando mancais magnéticos ativos. A estratégia de controle ativo empregada funciona analogamente a um sistema de controle que utiliza um alto-falante para contrapor à fonte de ruído indesejado.

Motores sem mancais mecânicos: uma das mais importantes linhas de pesquisas que está em desenvolvimento atualmente é a dos motores sem mancais. Com um único esquema de controle, a rotação e a levitação podem ser comandadas em um motor sem mancal. Estudos nesta área podem ser vistos no trabalho de Rodrigues (2005), onde o controle de velocidades

de um motor mancal é analisado, com esta arquitetura de motor o torque aumenta pelo fato de não se utilizar os mancais mecânicos.

Aplicações biomédicas: duas das mais promissoras aplicações dos MMAs são em bombas cardíacas e em corações artificiais projetados para pessoas que necessitam de aparelhos para manter suas funções cardíacas em pleno funcionamento. Como nas turbomáquinas apresentadas, o uso dos MMA nesta área elimina os problemas associados com a lubrificação que seria utilizada em mancais convencionais. Muitas das bombas de sangue e corações artificiais convencionais consistem basicamente em bombas centrífugas suportadas por mancais de rolamento. Frequentemente, estes mancais são lubrificados com o próprio sangue, para que não haja risco de contaminação com o uso de outros lubrificantes. Porém, além do sangue ser um pobre lubrificante, as esferas do rolamento tendem a danificar as células sanguíneas, causando problemas de coagulação para os pacientes. Muitos grupos de pesquisa estão investigando a aplicação dos MMA em dispositivos cardíacos. Akamatsu (1992) estudou um impulsor magneticamente suspenso para uma bomba de sangue. Ueno (1998) discutiu o projeto de um sistema combinado motor-mancal para uma bomba centrífuga sanguínea.

Pesquisas em máquinas ferramentas: o aumento da dureza e da força em máquinas ferramentas que poderiam utilizar os sistemas de MMAs, bem como o controle ativo de vibrações para reduzir a trepidação da ferramenta, estão também em análise em pesquisas recentes. Além disso, esforços para se obter melhores métodos para manter o sistema estável sobre uma gama de processos de corte e para a variação das ferramentas de corte são também importantes tópicos de pesquisa. Khanfir (2005) apresenta em seu trabalho melhorias na precisão e rugosidade superficial, oriundas da utilização dos MMAs em processos de usinagem.

Sistemas de armazenamento de energia: uma outra aplicação na qual a sua existência é facilitada pela tecnologia dos mancais magnéticos ativos é o armazenamento de energia em sistemas de volantes (*flywheel system*). É como se fosse uma espécie de giroscópio para armazenamento de energia. Para isso, os MMA permitem que se atinjam altas velocidades com baixa perda de potência, comparados com os mancais convencionais. Estes sistemas estão sob desenvolvimento para uso em suprimentos de energia ininterruptos em equipamentos estacionários, em aplicações móveis tais como veículos elétricos híbridos e na substituição de baterias em aplicações espaciais. Gaechter (2004) propõe alguns métodos de

redução das perdas relacionadas às correntes de controle que ocorrem em *flywheels*, aumentando a eficiência deste sistema de armazenamento de energia.

2.2 TEORIA BÁSICA DO ATUADOR MAGNÉTICO

Em um modelo teórico, para se estudar os mancais magnéticos ativos, é necessário que se considerem várias hipóteses como enumeradas a seguir:

- 1) os níveis de fluxo magnético estão sempre abaixo do nível de saturação do material;
- 2) os movimentos do eixo são pequenos comparados com o tamanho da folga do mancal;
- 3) a distribuição de fluxo magnético na seção transversal do pólo do estator é relativamente uniforme;
- 4) a perda elétrica é pequena.

Na análise de um mancal magnético, algumas ou todas estas hipóteses podem ser violadas por um projeto particular de mancal. Isso não significa que o mancal não irá operar, mas significa que uma análise mais apurada, como por exemplo, por elementos finitos, deve ser considerada em um projeto confiável de mancal magnético.

A parte magnética mostrada no circuito da Fig. 2 é constituída de um material magnético ordinário como o aço silício ou de outros materiais que apresentem elevados índices de saturação magnética, como é o caso “Vanadium Permendur”. A folga entre o rotor e o estator tem espessura g e área A_g . O fluxo magnético ϕ é produzido em cada seção do atuador (em forma de ferradura) por um enrolamento de N espiras com uma corrente i fluindo através dele. Este fluxo magnético gera forças em cada folga do atuador que correspondem à metade da força total F gerada neste, esta força é responsável pela atração do rotor. Um amplificador de potência produz a corrente elétrica necessária no enrolamento.

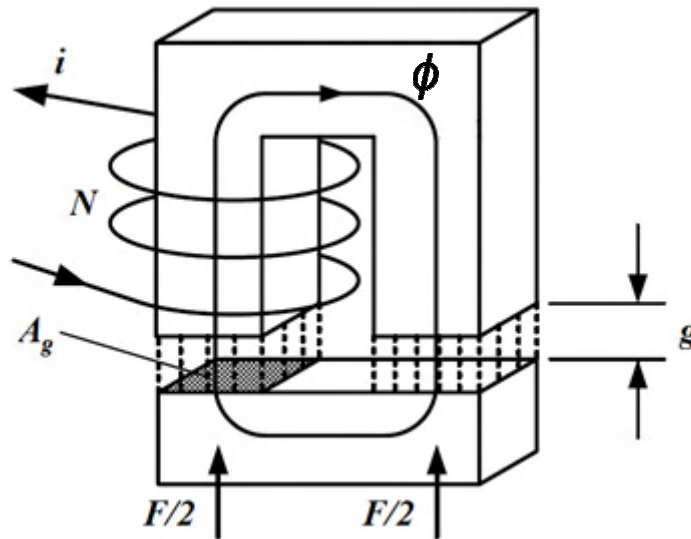
Nos circuitos magnéticos, a maioria da resistência magnética, que é chamada de relutância, se localiza nas folgas entre o atuador e o eixo. O ar e outros materiais não-ferrosos têm praticamente as mesmas propriedades magnéticas. A densidade de fluxo B em tais materiais está relacionada com a intensidade de campo magnético H por uma relação linear, que pode ser válida para muitos materiais não magnéticos,

$$B = \mu_0 H \quad (1)$$

onde a permeabilidade do espaço livre (ar), em Hm^{-1} (Henry por metro), é,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad (2)$$

Figura 2 - Geometria básica da ação de um atuador magnético



Fonte: Schweitzer et al. (2009)

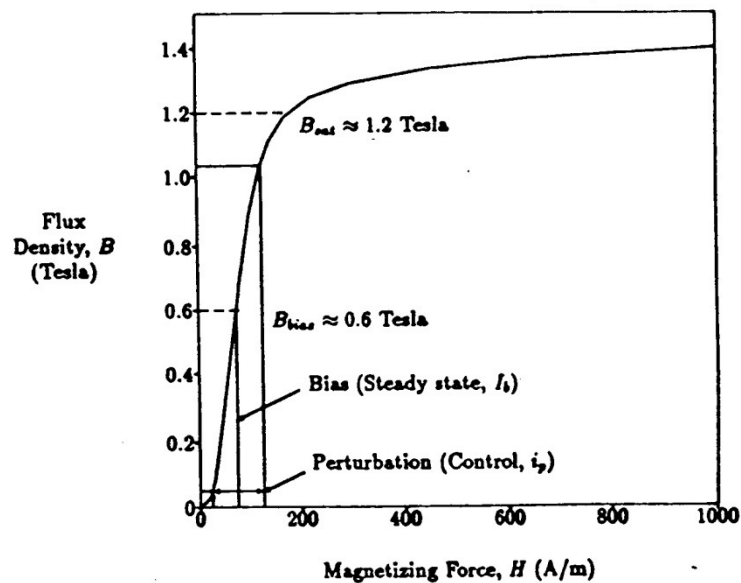
Os mancais magnéticos são geralmente construídos de um material magnético ferroso com a menor folga possível praticável para minimizar a força magnetomotiva requerida. Quase sempre, o fluxo magnético no mancal é determinado pela folga entre o mancal e o eixo, e a relutância do material magnético então pode ser desprezada, pois é pequena comparada a isto. Um típico material ferromagnético aplicado em atuador eletromagnético tem a curva de magnetização, B versus H , como mostrado na Fig.3. A curva $B-H$ é aproximadamente linear para uma ampla faixa de B . A inclinação dessa curva na faixa linear é chamada de permeabilidade do material, μ . Em geral, essa permeabilidade é expressa como produto da permeabilidade no espaço livre, μ_0 , multiplicada por uma permeabilidade relativa para o material, μ_r . Assim, temos que a relação $B-H$ fica,

$$B = \mu_r \mu_0 H \quad (3)$$

Para elevados valores da densidade de fluxo do campo magnético (B), a curva $B-H$ não é linear. A região onde a curva sofre deflexão é chamada de região de saturação. Esta região de

saturação indica que em um determinado índice de magnetização do material, a densidade de fluxo não irá aumentar mais com o aumento da intensidade de campo magnético, ou seja, o material atingiu a sua saturação magnética. Para um aço silício, a região de saturação está em torno de 1,5 a 1,7 Teslas. Com a tecnologia que permite elaborar materiais magnéticos como o Vanadium Permendur, essa região de saturação pode ocorrer em níveis bem mais elevados, atingindo 2,2 a 2,4 Tesla. Quando a operação do mancal conduz o material magnético a essa região, ele age como se tivesse um núcleo de ar. Portanto, nessa situação a requerida força magnetomotiva é muito elevada e não econômica, pois na região de saturação não vai contribuir em nada para aumentar a densidade de fluxo, apenas gastando mais energia em forma de corrente elétrica.

Figura 3 - Densidade de fluxo magnético (B) vs. Intensidade de campo magnético (H) para o aço silício



Fonte: Allaire et al. (1993).

O fluxo magnético ϕ no circuito é igual à intensidade de fluxo B multiplicada pela área transversal ao pólo A_g , a qual é também a área de uma folga no circuito magnético,

$$\phi = BA_g \quad (4)$$

O caminho do fluxo de comprimento $L = L_{fe} + 2g$ passa pela seção do atuador, através das folgas no final de cada face dos pólos do atuador e através do material do rotor. O

comprimento L_{fe} se refere ao caminho magnético percorrido no material ferromagnético. A lei de Ampere indica que a intensidade do campo magnético H induzido por N espiras enroladas ao redor de um caminho magnético de comprimento L e conduzindo uma corrente elétrica i , é dada por,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = L_{fe} H_{fe} + 2g H_g = Ni \quad (5)$$

onde H_{fe} e H_g são, respectivamente, a intensidade de campo magnético no material ferromagnético e na folga (*air gap*) do atuador. Nesta equação, assume-se que a direção da intensidade de campo magnético é paralela ao caminho magnético e que a corrente no enrolamento é perpendicular ao caminho magnético. A quantidade Ni é denominada de força magnetomotiva. A Eq. (5) pode ser reescrita em termos da densidade de fluxo

$$L_{fe} \frac{B}{\mu_0 \mu_r} + 2g \frac{B}{\mu_0} = \left(\frac{L_{fe}}{\mu_r} + 2g \right) \frac{B}{\mu_0} = Ni \quad (6)$$

Conforme já citado anteriormente, a relutância do material ferro magnético pode ser negligenciada visto que a permeabilidade relativa para os materiais ferromagnéticos é $\mu_r \gg 1$. Sendo assim, a densidade de fluxo B em cada folga do atuador é

$$B = \frac{\mu_o Ni}{2g} \quad (7)$$

A densidade de fluxo, B , é induzida por um total de N espiras que circundam o circuito magnético. Essa expressão do fluxo é linearmente proporcional à força magnetomotiva Ni e inversamente proporcional à folga g . Em cada folga, a energia magnética W_g armazenada no volume da folga (*air gap*) V_g é

$$W_g = \frac{1}{2} B H V_g = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_o Ni}{2g} \right) \left(\frac{Ni}{2g} \right) (g A_g) = \frac{\mu_o (Ni)^2 A_g}{8g} \quad (8)$$

A força F_g por folga pode ser encontrada a partir do princípio do trabalho virtual, que é a derivada parcial da energia de campo magnético com relação à folga g ,

$$F_g = -\frac{\partial W_g}{\partial g} = \frac{\mu_0 N^2 i^2 A_g}{8g^2} \quad (9)$$

Geralmente nos projetos de mancais magnéticos, há duas folgas no circuito do mancal, tal que a força é duas vezes esse valor, portanto a força em cada magneto é,

$$F = 2F_g = \frac{\mu_0 N^2 i^2 A_g}{4g^2} \quad (10)$$

A força é proporcional ao quadrado de Ni e inversamente proporcional ao quadrado da folga g . Isso pode em princípio nos dar a idéia de que os mancais magnéticos não são dispositivos lineares. Entretanto, um exame da ação dupla do mancal revela um resultado diferente que será visto posteriormente.

Um circuito magnético real possui efeitos tais como difusão das linhas de forças e fugas de corrente que em geral, são desprezadas e não consideradas na equação da força eletromagnética. Além disso, a força gerada em uma direção não possui direção paralela em relação à força gerada em cada pólo, visto que existe um ângulo aproximadamente constante que relaciona essas forças (22,5° para um mancal de oito pólos). Um fator de correção geométrico ϵ pode ser convenientemente usado para conduzir a resultados mais precisos, de forma a levar em consideração esses efeitos. Então, a força da Eq. (10), torna-se:

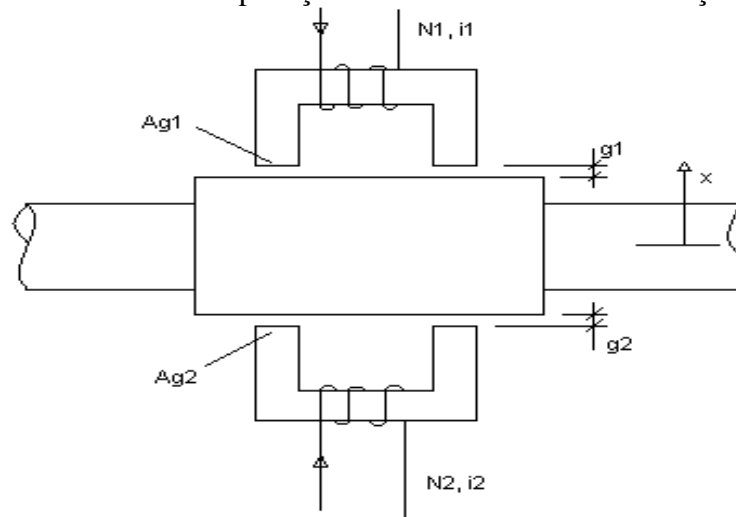
$$F = \epsilon \frac{\mu_0 N^2 i^2 A_g}{4g^2} \quad (11)$$

Segundo Allaire (1989), o valor do fator geométrico de correção é admitido ser 0,9 para mancais axiais e 0,8 para mancais radiais, aproximadamente. Uma solução mais criteriosa do campo magnético, por elementos finitos, proporcionará resultados mais precisos,

porém o fator geométrico que foi apresentado é suficiente para a análise do circuito magnético básico.

A operação do mancal magnético envolve a superposição de dois fluxos: um fluxo permanente (bias) e um fluxo de perturbação, como mostra a Fig. 4. O fluxo permanente é responsável pela levitação do eixo no mancal, enquanto o fluxo de perturbação é responsável pela força magnética que irá corrigir a posição do eixo, caso alguma força externa aja sobre ele. A densidade de fluxo permanente B_b é um fluxo com nível permanente induzido por uma corrente permanente (bias) i_b no enrolamento. A densidade de fluxo de perturbação B_p é uma densidade de fluxo de controle que deve variar com o tempo, dependendo da carga que atua no eixo levantado pelo mancal. A densidade de fluxo B_p é desenvolvida por uma corrente de perturbação (ou de controle) i_p no enrolamento.

Figura 4 - Mecanismo de dupla ação em um MMA em uma direção de controle



Fonte: Allaire et al. (1993).

O fluxo total e a corrente total no enrolamento são,

$$B = B_p + B_b \quad \text{e} \quad i = i_b + i_p \quad (12)$$

Da equação (7), as duas densidades de fluxo são,

$$B_b = \frac{\mu_0 N i_b}{2g} \quad \text{e} \quad B_p = \frac{\mu_0 N i_p}{2g} \quad (13)$$

Em geral, o nível do fluxo permanente B_b é tomado em torno da metade do nível da saturação magnética do material, mostrado na Fig. 3, permitindo uma variação relativamente maior dos níveis de fluxo de perturbação (ou de controle) para cima e para baixo do nível permanente. Essa faixa de variação é importante, e deve ser ampla, pois é dela que se obterá a força necessária para corrigir a posição do eixo no mancal. Portanto nada melhor do que tomar um valor médio entre a faixa onde a curva $B-H$ é linear. A expressão da força associada a essas densidades de fluxo, de acordo com a Eq. (11), torna-se,

$$F = \epsilon \frac{A_g (B_b + B_p)^2}{\mu_0} \quad (14)$$

Como a força é diretamente proporcional a densidade de fluxo magnético, e se o material saturado não desenvolve qualquer fluxo adicional, então a máxima capacidade de força dos mancais magnéticos ocorre quando o material magnético é saturado. Anteriormente, foi dito que os mancais geralmente atuam aos pares e em lados opostos, logo a máxima ação de um mancal de dupla ação será obtida quando em um lado a densidade de fluxo é reduzida a zero (força de atração do eixo zero) e no outro lado o valor do fluxo atinge o máximo de saturação (máxima força de atração do eixo). A expressão da força máxima torna-se,

$$F_{\max} = \epsilon \frac{B_{\text{sat}}^2 A_g}{\mu_0} \quad (15)$$

Essa é a força limite sobre os mancais magnéticos. Os mancais magnéticos não produzirão força além desse nível sem uma força magnetomotiva para conduzir o nível do fluxo a um maior valor. As forças eletromagnéticas são apenas de atração, de modo que os atuadores devem ser colocados em ambos os lados diametralmente opostos ao rotor, em um arranjo de dupla ação, como ilustrado na Fig. 4.

Da Eq. (14), a força líquida F_N em um plano do mancal é dada por,

$$F_N = F_2 - F_1 = \epsilon \frac{\mu_0 A_g N^2}{4} \left(\frac{i_2^2}{g_2^2} - \frac{i_1^2}{g_1^2} \right) \quad (16)$$

onde i_1 e i_2 são as correntes nos magnetos 1 e 2, e g_1 e g_2 são os comprimentos das folgas entre a massa do rotor e os magnetos 1 e 2, respectivamente. As espessuras das folgas em ambos os lados do mancal podem ser escritas como,

$$g_1 = g_0 - x \quad \text{e} \quad g_2 = g_0 + x \quad (17)$$

onde a espessura nominal da folga, com o rotor devidamente centrado, é g_0 , e x representa a perturbação na posição do rotor, medida do centro. A diferença no sinal entre as expressões das duas folgas é porque quando o rotor se move em direção a qualquer um dos magnetos, estará se distanciando do outro. De maneira análoga, a corrente i_1 e i_2 pode ser expressa como,

$$i_1 = i_b - i_p \quad \text{e} \quad i_2 = i_b + i_p \quad (18)$$

Substituindo as equações (17) e (18) na equação (16), resulta na seguinte expressão,

$$F_N = \frac{\epsilon\mu_0 A_g N^2}{4} \left[\frac{(i_b + i_p)^2}{(g_0 + x)^2} - \frac{(i_b - i_p)^2}{(g_0 - x)^2} \right] \quad (19)$$

O modelo linearizado da força líquida F_N assume que a corrente de perturbação i_p e a perturbação x são pequenas quando comparadas com a corrente permanente i_b e a folga nominal g_0 , respectivamente. Isso permite a exclusão dos termos de maior ordem da corrente de perturbação i_p e da perturbação x , resultando na seguinte equação,

$$F_N = \left(\frac{\epsilon\mu_0 A_g N^2 i_b}{g_0^2} \right) i_p - \left(\frac{\epsilon\mu_0 A_g N^2 i_b^2}{g_0^3} \right) x \quad (20)$$

As forças do atuador magnético variam com a corrente e com a espessura da folga. A variação devida à mudança na corrente do enrolamento, denominada de ganho de rigidez de corrente K_i , é o fator mais importante para os mancais magnéticos. Por outro lado, a variação da força devida à variação na espessura da folga (correspondendo à variação na posição do

rotor) é chamada de rigidez de posição K_x . A rigidez de corrente dentro da faixa linear, para todas as quatro folgas da ação dupla do mancal, é definida como,

$$K_i = \frac{\partial F_N}{\partial i_p} = \epsilon \frac{\mu_0 A_g N^2 i_b}{g_0^2} \quad (21)$$

A rigidez de corrente de um mancal magnético é positiva devido ao aumento da força externa aplicada ao mancal, em uma dada direção, é contraposto por um aumento da corrente de controle no outro lado do mancal, aumentando a força de atração que se opõe a essa força externa.

A expressão da rigidez de corrente, Eq. (21), é independente da corrente de perturbação, porém linearmente relacionada com a corrente permanente (bias). Assim, o atuador magnético não deve operar com uma corrente permanente muito baixa para evitar uma fraca resposta quando uma mudança na força é requerida. Se i_b é a metade do valor de saturação, então a faixa de atuação dinâmica do atuador é máxima.

O segundo parâmetro é a rigidez de posição. Esse parâmetro, para todas as quatro folgas de um mancal de ação dupla, é definido como,

$$K_x = \frac{\partial F_N}{\partial x} = -\epsilon \frac{\mu_0 A_g N^2 i_b^2}{g_0^3} \quad (22)$$

A rigidez de posição é negativa. Quando o rotor se move para um lado, a força aumenta tendendo a puxá-lo na mesma direção de seu movimento, diferentemente de uma mola mecânica, que tenderia a empurrá-lo para o centro.

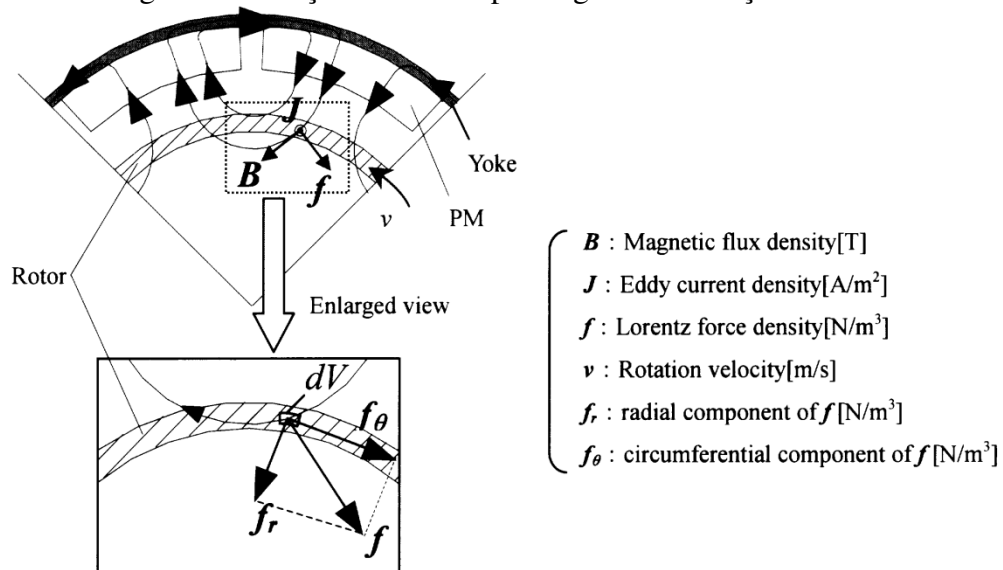
2.3 PERDAS E EFEITO DE ARRASTO MAGNÉTICO

Assim como todos os sistemas de conversão de energia, o mancal magnético também possui perdas durante operação. Parte destas perdas está relacionada ao ciclo de histerese que ocorre no núcleo do mancal magnético. Guan et al. (2009) apresenta uma análise destas perdas cujo interesse principal é obter o rendimento de um MMA aplicado a um sistema de

armazenamento de energia (*flywheel system*). Os níveis de perda no núcleo são dependentes da densidade de fluxo e também são fortemente afetados pela frequência da corrente de magnetização.

Outro problema que ocorre com os MMAs é efeito de arrasto magnético que implica em um torque de frenagem no rotor. Este efeito é causado pela indução de correntes de Foucault no entreferro que envolve o eixo. Estas correntes, imersas no campo magnético do MMA geram forças de indução, também conhecidas como forças de Lorentz, em sentidos contrários à rotação causando um torque de frenagem no rotor. A Fig. 5 ilustra este fenômeno, onde a força de Lorentz pode ser decomposta na direção radial e tangencial ao rotor.

Figura 5 - Relação entre Campo Magnético e Força de Lorentz



Fonte: Yuji et al. (2005).

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo serão apresentadas as equações de movimento de um rotor, bem como a metodologia do controle ótimo. A partir do método de elementos finitos (MEF) é possível descrever as características dinâmicas do sistema considerando a forma do rotor e as propriedades do material que constitui o rotor. Através de métodos numéricos a equação de movimento pode ser solucionada mesmo para geometrias complexas, extremamente difíceis de serem obtidas analiticamente. A discretização pelo método de elementos finitos pode ser onerosa computacionalmente dependendo do número de elementos utilizados, principalmente quando se aplica um sistema de controle em tempo real. No entanto, poucos elementos na discretização podem não conduzir a bons resultados. Sendo assim também será apresentada uma técnica de redução modal para o modelo obtido pelo MEF para reduzir a ordem do sistema. Esta técnica de redução permite um menor esforço computacional durante o controle.

3.1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO ROTOR

O modelo do rotor é construído a partir das matrizes de massa, rigidez e amortecimento de todos os elementos, conforme está detalhado no Anexo A. O modelo global, conforme descrito por Lalanne e Ferraris (1998), pode ser escrito na forma matricial, resultando em:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\boldsymbol{\delta}} + (\mathbf{D}_s + \dot{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{G}) \dot{\boldsymbol{\delta}} + (\mathbf{K}_s + \ddot{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{K}_2) \boldsymbol{\delta} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_c \quad (24)$$

onde:

$\mathbf{M}_s$: Matriz de massa do sistema.

$\mathbf{D}_s$: Matriz de amortecimento do sistema.

$\mathbf{G}$: Matriz giroscópica do sistema.

$\mathbf{K}_s$: Matriz de rigidez do sistema.

$\mathbf{K}_2$: Matriz de rigidez devido ao movimento transiente do rotor.

$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)$: Velocidade de rotação do rotor.

$\boldsymbol{\delta}$: Vetor de deslocamentos nodais.

$\mathbf{F}_p$: Vetor de forças de perturbação.

$\mathbf{F}_c$: Vetor de forças de controle devido ao MMA.

Cada nó do sistema possui quatro graus de liberdade, sendo duas de translações e duas rotações, logo, o vetor de deslocamentos nodais δ tem dimensão $4n_n$, onde n_n é o número de nós do sistema. As matrizes $\mathbf{M}_s$, $\mathbf{D}_s$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{K}_s$ e $\mathbf{K}_2$ são quadradas e de dimensão $4n_n$, os vetores de força tem a mesma dimensão do vetor de deslocamentos nodais, $4n_n \times 1$.

3.2 REDUÇÃO PSEUDO-MODAL

A redução pseudo-modal é de extrema importância na diminuição do esforço computacional exigido no sistema de controle. Antes da aplicação do controle se verificou a redução estrutural e se constatou que os resultados obtidos para o modelo reduzido se aproximaram bastante dos resultados obtidos utilizando o modelo completo. Este método de redução do modelo utiliza a base modal do sistema não giroscópico, simétrico e não amortecido. A base modal é definida pela solução da seguinte equação

$$\mathbf{M}_s \ddot{\delta} + \mathbf{K}_s^* \delta = \mathbf{0} \quad (24)$$

onde $\mathbf{K}_s^*$ é a matriz de rigidez simétrica, sem os elementos de rigidez cruzada dos mancais. Pode-se reduzir o modelo utilizando os primeiros n_m modos obtidos da Eq. (24), onde n_m é o número de modos escolhido para redução do modelo. Os n_m modos formam a matriz de transformação de coordenadas:

$$\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_{n_m}] \quad (25)$$

Esta matriz é utilizada para fazer a seguinte mudança de coordenadas:

$$\delta = \Phi \mathbf{q} \quad (26)$$

onde $\mathbf{q}$ são as coordenadas generalizadas no espaço modal. A matriz $\mathbf{D}_s$ pode ser considerada simétrica como resultado da adoção de amortecimento proporcional à matriz de massa e rigidez do sistema. Substituindo a Eq. (26) na Eq. (24) e pré-multiplicando o resultado por Φ^T obtém-se:

$$\Phi^T \mathbf{M}_s \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T (\mathbf{D}_s + \dot{\Phi} \mathbf{G}) \Phi \dot{\mathbf{q}} + \Phi^T (\mathbf{K}_s + \ddot{\Phi} \mathbf{K}_2) \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{F}_p + \Phi^T \mathbf{F}_c \quad (27)$$

Com isso, a equação do movimento do sistema escrita na base modal é:

$$\tilde{\mathbf{M}}_s \ddot{\mathbf{q}} + (\tilde{\mathbf{D}}_s + \phi \tilde{\mathbf{G}}) \dot{\mathbf{q}} + (\tilde{\mathbf{K}}_s + \phi \tilde{\mathbf{K}}_2) \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}}_p + \tilde{\mathbf{F}}_c \quad (28)$$

Para empregar as técnicas de controle ótimo propostas neste trabalho é necessário que a eq. (28) seja colocada no espaço de estado. Sendo assim, a equação de movimento pode ser reescrita como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (29)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

onde $\mathbf{x}$ representa o vetor estado modal do sistema, $\mathbf{y}$ representa o vetor de saída, $\mathbf{u}$ representa o vetor de forças de perturbação e controle. $\mathbf{A}$ é conhecida como matriz dinâmica do sistema $\mathbf{B}$ é a matriz de entrada e $\mathbf{C}$ é a matriz de saída do sistema. Este vetores e matrizes são representados por:

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\}^T \quad (30)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_s^{-1}(\tilde{\mathbf{K}}_s + \phi \tilde{\mathbf{K}}_2) & -\tilde{\mathbf{M}}_s^{-1}(\tilde{\mathbf{D}}_s + \phi \tilde{\mathbf{G}}) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_s^{-1} & -\tilde{\mathbf{M}}_s^{-1} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{P}_s \Phi, \mathbf{0}] \quad (33)$$

$$\mathbf{u} = [\tilde{\mathbf{F}}_p, \tilde{\mathbf{F}}_c] \quad (34)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade; $\tilde{\mathbf{F}}_p = \Phi^T \mathbf{F}_p$ e $\tilde{\mathbf{F}}_c = \Phi^T \mathbf{F}_c$. A matriz $\mathbf{P}_s$ é a matriz de posicionamento dos sensores nos nós onde são obtidas as respostas do sistema. A Eq. (33) já fornece os valores de saída do sistema em coordenadas físicas.

3.3 POSICIONAMENTO ÓTIMO DE SENSORES E ATUADORES

O correto posicionamento dos atuadores é imprescindível para o controle ativo de vibrações, visto que, deve-se encontrar uma posição eficaz para economizar energia de controle e permitir boas reduções nos níveis de vibração. As ferramentas utilizadas neste trabalho para o posicionamento do atuador magnético serão as normas H_2 e H_∞ . Para estruturas flexíveis e considerando um sistema SISO (single input and single output), a norma H_∞ corresponde ao maior pico da função de resposta em frequência (FRF) e a norma H_2 corresponde à área sob a curva da mesma função (GAWRONSKI, 1998).

3.3.1 NORMA H_2

A função de transferência G de um sistema no espaço de estados, representado por $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, é dada por:

$$G(\omega) = \mathbf{C}(\mathbf{j}\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (35)$$

A norma H_2 do sistema é definida por:

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(\mathbf{G}^*(\omega)\mathbf{G}(\omega))d\omega \quad (36)$$

onde tr é o traço da matriz. A norma H_2 pode ser obtida alternativamente pelas Eqs. (37) e (38) :

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{W}_c)} \quad (37)$$

ou

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{W}_o)} \quad (38)$$

onde $\mathbf{W}_c$ e $\mathbf{W}_o$ são, respectivamente, o gramiano de controlabilidade e o gramiano de observabilidade podendo ser obtidos a partir das seguintes equações de Lyapunov:

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (39)$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (40)$$

3.3.2 NORMA H_∞

Considerando um sistema linear estável invariante no tempo, a norma H_∞ é definida como:

$$\|G\|_\infty = \max_{\omega} \sigma_{\max}(G(\omega)) = \gamma \quad (41)$$

sendo $\sigma_{\max}(G(\omega))$ o maior valor singular de $G(\omega)$. A norma do sistema SISO é a magnitude do maior pico da função de transferência $G(\omega)$ em termos de valores singulares (GAWRONSKI, 1998).

Adotando $\mu = \gamma^2$, o valor da norma H_∞ pode ser obtido por otimização convexa utilizando LMIs solucionando o problema abaixo:

$$\begin{aligned} \|G(\omega)\|_\infty &= \min \sqrt{\mu} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} & \mathbf{P}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{P} & -\mu \end{bmatrix} &< \mathbf{0} \\ \mathbf{P} &> \mathbf{0} \\ \mu &> 0 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (44)$$

Defini-se então o índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^* \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (45)$$

onde o símbolo (*) define o transposto conjugado, $\mathbf{Q}$ é uma matriz hermitiana definida positiva (ou semidefinida positiva) e $\mathbf{R}$ é uma matriz hermitiana definida positiva. A matriz $\mathbf{Q}$ determina a importância relativa aos estados do sistema e a matriz $\mathbf{R}$ determina o consumo de energia para executar o controle no sistema. Substituindo a Eq. (44) na Eq. (43) tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \quad (46)$$

Substituindo-se a Eq. (44) na Eq. (45), temos

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^* \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x}) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^* (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt \quad (47)$$

A partir dos teoremas de estabilidade de Lyapunov, tem-se que a derivada da função de Lyapunov $V = \mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x}$, onde $\mathbf{P}$ é uma matriz hermitiana positiva definida, deve ter sua derivada negativa tal que:

$$\mathbf{x}^* (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = - \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x}) \quad (48)$$

Desenvolvendo obtém-se:

$$\mathbf{x}^* (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^* \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^* ((\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^* \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) \mathbf{x} \quad (49)$$

Comparando ambos os lados da Eq. (49), tem-se

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^* \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K}) \quad (50)$$

O procedimento para resolver o problema do controle ótimo é determinar os elementos da matriz $\mathbf{P}$ e verificar se ela é definida positiva.

O índice de desempenho pode ser escrito na forma

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^* (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x} \big|_0^\infty = -\mathbf{x}^*(\infty) \mathbf{P} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^*(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (51)$$

Supondo que a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ seja estável, ou seja, que todos os autovalores desta matriz tenham parte real negativa, temos que $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow \mathbf{0}$. Logo o índice de desempenho é função das condições iniciais e da matriz $\mathbf{P}$, $J = \mathbf{x}^*(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$.

Para solucionar o problema do controle ótimo quadrático, supõe-se que a matriz $\mathbf{R}$ pode ser definida como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^* \mathbf{T} \quad (52)$$

onde $\mathbf{T}$ é uma matriz não singular. A partir de algumas manipulações temos que a matriz $\mathbf{P}$ pode ser obtida através da solução da seguinte equação matricial reduzida de Riccati:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (53)$$

O ganho de realimentação de estados $\mathbf{K}$ é dado por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P} \quad (54)$$

3.4.2 OBSERVADOR DE ESTADOS

Um observador de estado estima os estados do sistema baseado no sinal de saída y e de controle do sistema u .

Considerando um sistema no espaço de estados:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}\tag{55}$$

O vetor de estados observados, denominado $\tilde{\mathbf{x}}$, pode ser escrito admitindo o seguinte modelo dinâmico que representa o observador de estados.

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}})\tag{56}$$

Os sinais de entrada do observador são y e u e o sinal de saída do observador é $\tilde{\mathbf{x}}$. O último termo desta equação representa o erro entre o sinal de saída do sistema controlado y e o valor estimado do sinal de saída. A matriz $\mathbf{L}$ funciona como uma ponderação deste erro. Subtraindo a Eq. (55) da Eq. (56), tem-se a equação do erro do observador

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{L}(\mathbf{Cx} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}})\tag{57}$$

Rearranjando a equação anterior temos,

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})\tag{58}$$

Define-se o erro como sendo,

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\tag{59}$$

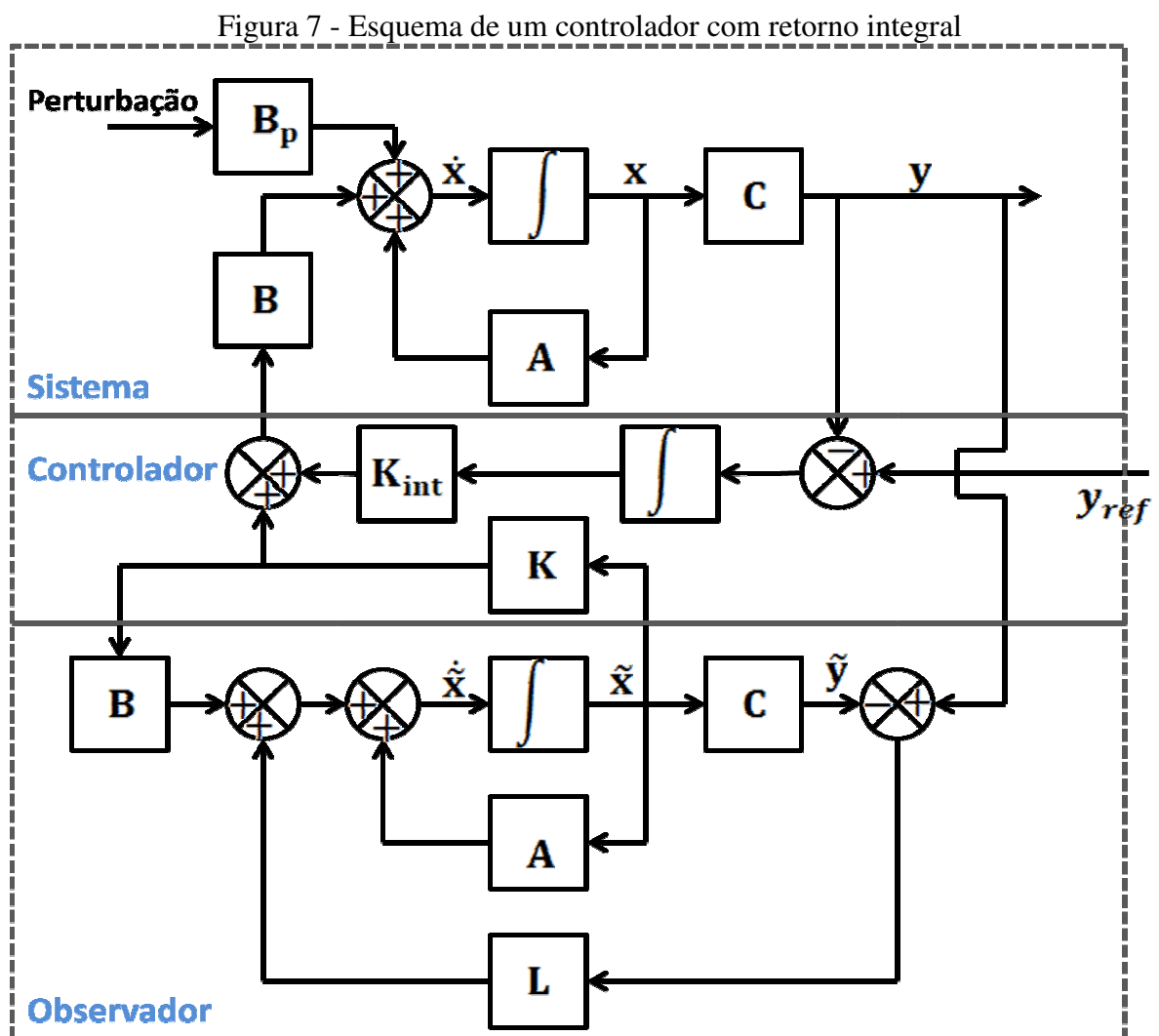
A Eq. (60) representa a variação do erro do controlador

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}\tag{60}$$

Para que o valor do erro tenda a zero a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ deve ser estável. Desta forma deve-se encontrar uma matriz $\mathbf{L}$ de forma que garanta que os autovalores da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ sejam tais que produzam a diminuição adequada do erro, em termo de rapidez e decaimento do erro.

3.4.3 RETORNO INTEGRAL

A Fig. 7 ilustra o funcionamento do controlador sobre o sistema, submetido a uma perturbação externa. A matriz $\mathbf{B}_p$ é a matriz de entrada da perturbação. O controle ótimo descrito anteriormente permite controlar o comportamento dinâmico do sistema, no entanto ele não garante a precisão estática. Para manter a precisão estática do controlador na referência y_{ref} é utilizado um ganho $\mathbf{K}_{int}$ sobre o retorno integral.



Fonte: Elaboração do próprio autor

4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo serão apresentadas as simulações numéricas desenvolvidas no projeto. A seção 4.1 apresenta as simulações para avaliar as técnicas de controle apresentadas anteriormente, bem como a metodologia de posicionamento ótimo de um MMA. Este dispositivo é utilizado como um atuador para atenuação de vibrações em um rotor, apoiado por mancais convencionais. Na seção 4.2 são apresentadas simulações com os dados da bancada de testes utilizada nos experimentos. Neste caso são utilizados dois MMAs que, além de levitar o rotor, tem a função de controlar as vibrações.

4.1 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS - POSICIONAMENTO ÓTIMO

Nesta seção serão apresentados os resultados das simulações numéricas realizadas para analisar a eficiência das técnicas de controle aplicadas, bem como a metodologia de posicionamento ótimo do atuador magnético. O controlador utilizado é um Regulador Quadrático Linear. Para modelar o rotor utilizou-se o método de elementos finitos, incluindo o modelo viga de Timoshenko, conforme apresentado no Anexo A. Este método produz bom resultados quando se aplica uma boa discretização, no entanto o custo computacional exigido para o controle é alto e pode inviabilizar a aplicação prática. Para não comprometer o tempo de resposta do controlador e o custo computacional exigido utiliza-se a técnica de redução pseudo-modal para diminuir a ordem das matrizes.

4.1.1 MODELO DO ROTOR

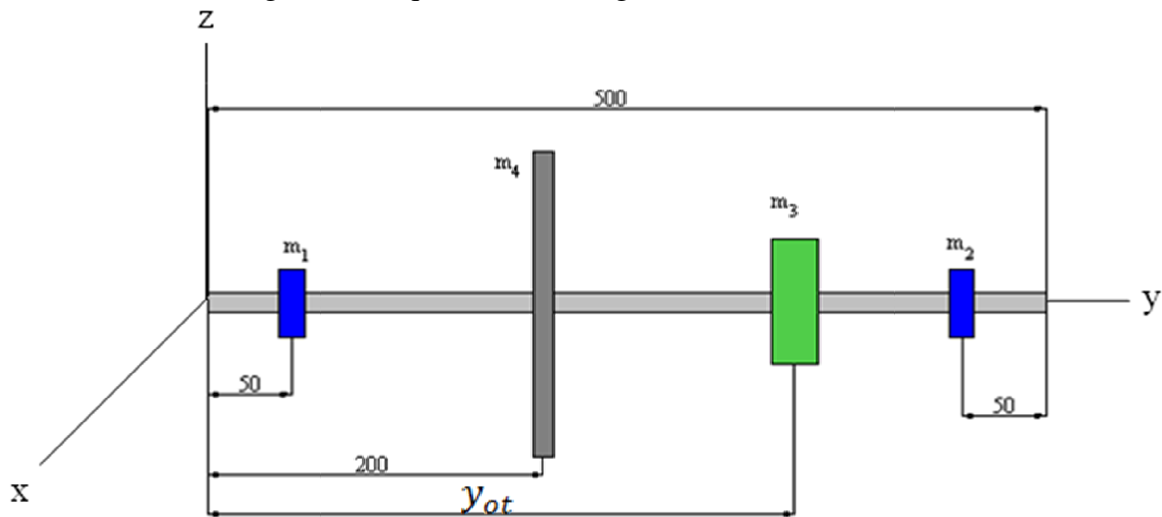
O esquema do rotor analisado é apresentado na Fig. 8. As propriedades físicas e geométricas encontram-se resumidas na Tab. 1. O rotor teórico utilizado para análise do desempenho do sistema de controle é confeccionado em aço com um comprimento total de 500 mm e o eixo com um diâmetro de $12,7\text{ mm}$, apoiado por dois mancais convencionais. O primeiro mancal localiza-se a 50 mm e o segundo a 450 mm da extremidade esquerda do rotor. Entre os mancais e posicionado a 200 mm do início do eixo (extremidade esquerda) está fixado um disco de massa m_4 igual a $1,0\text{ kg}$, no qual atuam as forças de excitação. Além da massa do disco, também são consideradas a massa m_3 do material ferromagnético do atuador

(quando se utiliza o sistema de controle) e as massas m_1 e m_2 dos mancais de apoio do rotor. O rotor opera a uma rotação de 6000 rpm e uma quantidade de desbalanceamento de $1,0 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$ foi atribuída ao disco, gerando a força de excitação síncrona.

Um mancal magnético ativo é instalado no rotor com o propósito de atenuar as vibrações. A localização do MMA em que se tem o melhor desempenho do sistema de controle é um dos fatores de interesse nesse estudo. Para isso, foram calculados os valores das normas H_2 e H_∞ para diversas posições.

Após montar as matrizes de massa, rigidez e amortecimento global do eixo foram adicionadas a massa, rigidez e amortecimento dos mancais convencionas nos nós correspondentes e também adicionou-se a massa do disco. Assim, foram montadas as matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento do sistema.

Figura 8 - Esquema de montagem do rotor idealizado



Fonte: Elaboração do próprio autor

Para o sistema eixo-mancais convencionais considerou-se um amortecimento estrutural proporcional a matriz de massa e de rigidez dado por $\mathbf{D} = 10^{-7} \mathbf{K} + 10^{-3} \mathbf{M}$, conforme sugerido em Perini et al. (2008). Vale ressaltar que adicionado a este amortecimento tem-se o amortecimento devido ao efeito giroscópico dos elementos do eixo e do disco. Posteriormente foi inserido o MMA e isso incorre em adicionar mais uma massa, rigidez e amortecimento ao sistema.

Uma vez que se conhece a matriz dinâmica do sistema podem-se encontrar facilmente as frequências críticas e os modos de vibrar do sistema. Para isso foi utilizada a função *eig* do

MATLAB, que retorna uma matriz diagonal com os autovalores e outra matriz com os autovetores para cada frequência crítica.

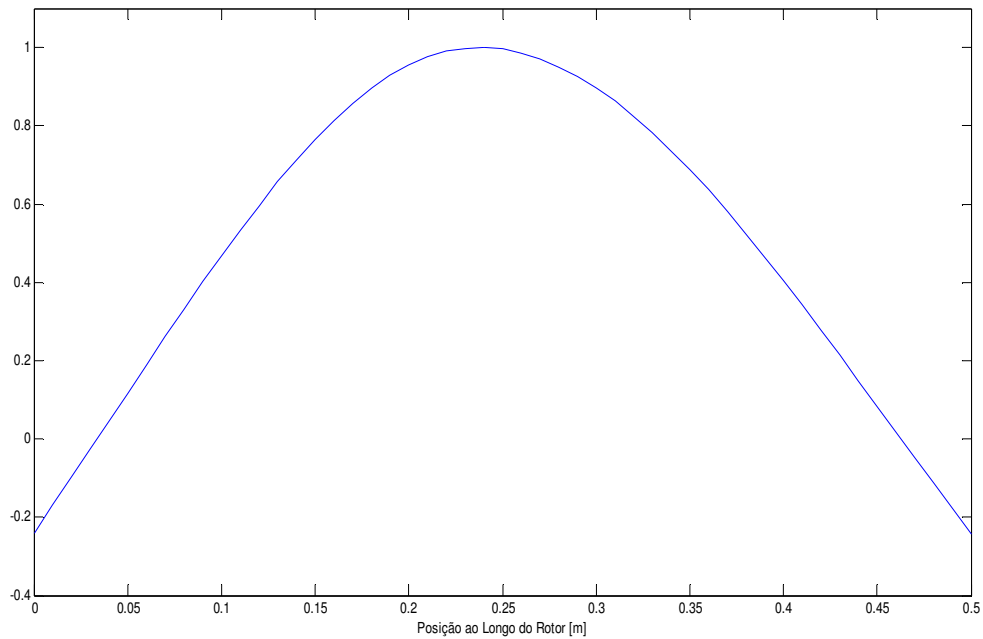
Tabela 1 - Resumo das características físicas e geométricas do rotor e seus componentes

Parâmetro	Valor
Massa dos mancais convencionais (m_1 e m_2)	0,15 kg
Massa do munhão do MMA (m_3)	0,25 kg
Rigidez dos Mancais $K_{1x}=K_{1z}=K_{2x}=K_{2z}$	1e6 kN/m
Amortecimento do Mancais $C_{1x}=C_{1z}=C_{2x}=C_{2z}$	200 N.s/m
Massa do disco (m_4)	1,0 kg
Momento de Inércia do Disco $I_x=I_z$	5814e-6 kg.m ²
Momento de Inércia Polar do Disco I_y	2946e-6 kg.m ²
Posição do MMA (variável)	y_{ot}
Comprimento do eixo	0,5 m
Diâmetro do eixo	12,7 mm
Módulo de elasticidade do material do eixo (E)	210 GPa

Fonte: Elaboração do próprio autor

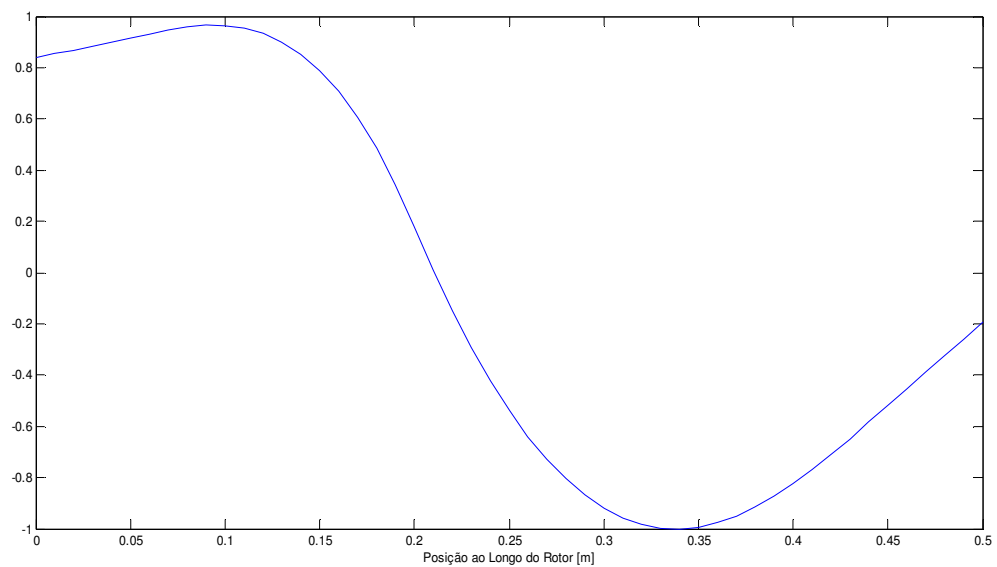
Como os valores de rigidez nos mancais são numericamente iguais, os modos de vibrar para o rotor estacionário na direção z e na direção x são iguais. As Fig.s 9 e 10 ilustram o primeiro e o terceiro modo de vibrar do sistema, correspondentes ao primeiro e segundo modo de vibrar na direção x . O segundo e o quarto modo de vibrar do sistema correspondem aos dois primeiros modos de vibrar na direção z .

Figura 9 - Primeiro modo de vibrar para o rotor estacionário (67,7 Hz)



Fonte: Elaboração do próprio autor

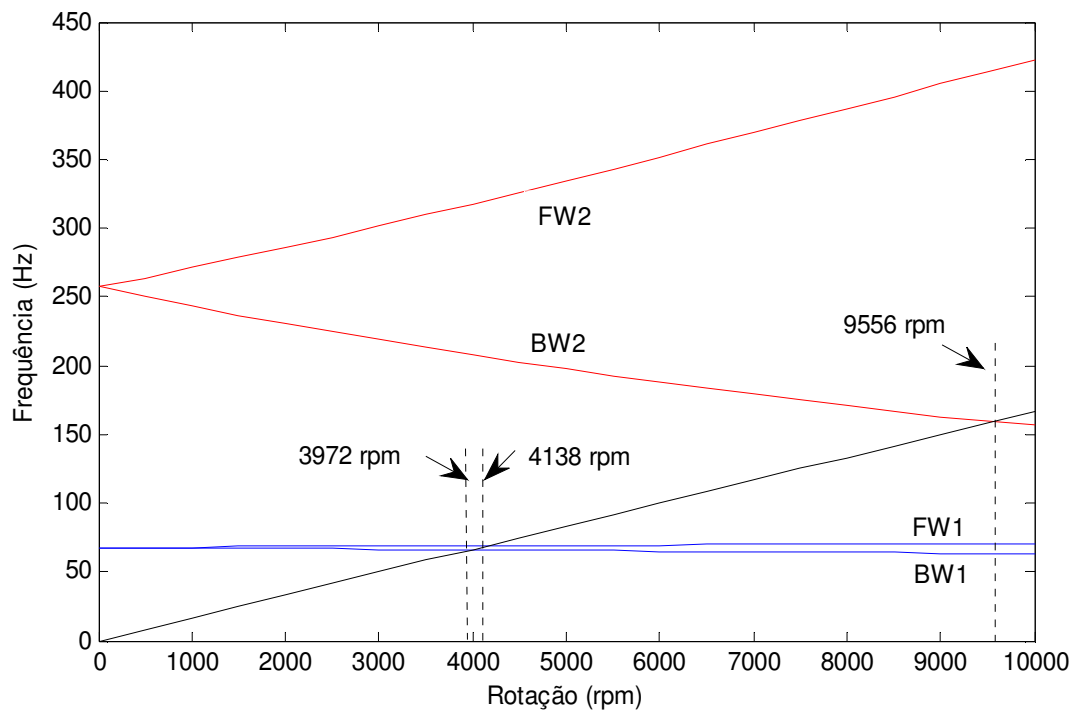
Figura 10 - Segundo modo de vibrar para o rotor estacionário (257,0 Hz)



Fonte: Elaboração do próprio autor

A Fig. 11 apresenta o diagrama de Campbell para rotor original (sem o MMA) com as velocidades críticas devidamente identificadas. A faixa de rotação analisada foi de 0 a 10000 rpm. As três primeiras velocidades críticas encontradas no diagrama são 66,2 Hz (3972 rpm), 69,0 Hz (4138 rpm) e 159,3 Hz (9556 rpm).

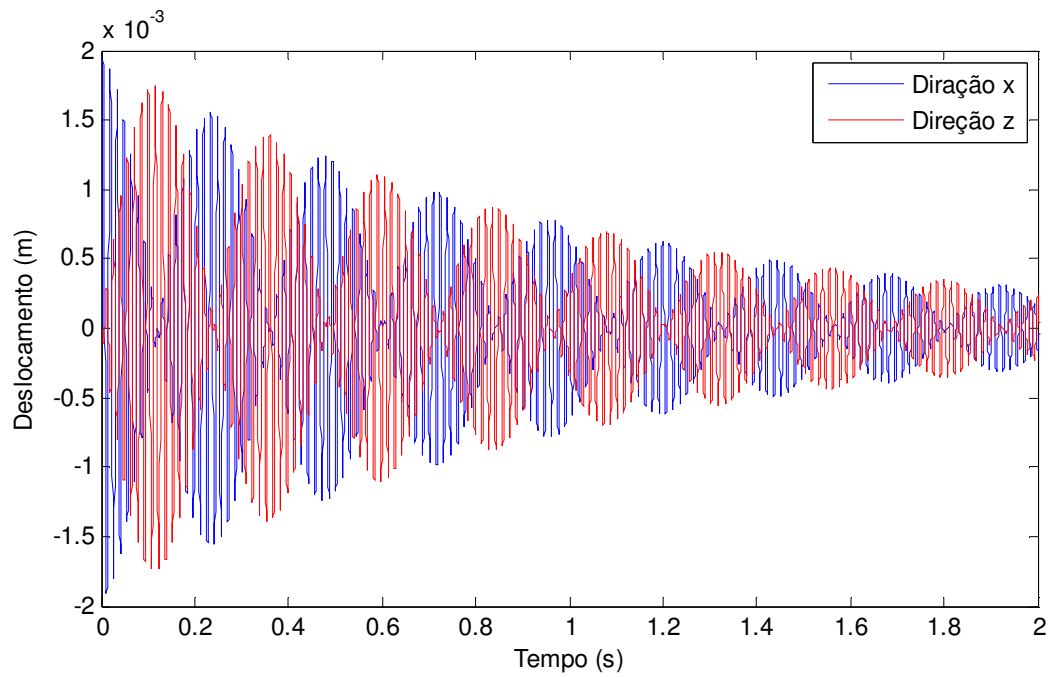
Figura 11 - Diagrama de Campbell do rotor



Fonte: Elaboração do próprio autor

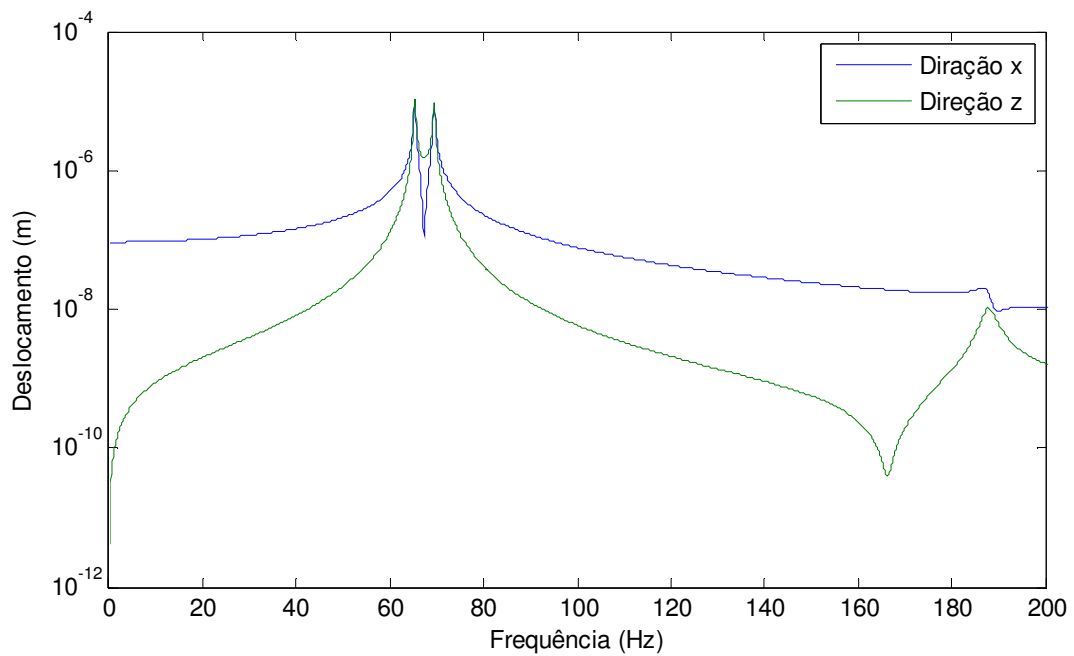
A Fig 12 ilustra a resposta vibratória na posição de 250 mm para um impulso no disco na direção x , com o rotor operando a 6000 rpm. Percebe-se que os deslocamentos obtidos são de até 2 mm aproximadamente e tem um decaimento lento ao longo do tempo. A Fig. 13 ilustra esta mesma resposta no domínio da frequência. Pode-se verificar a presença das três primeiras frequências naturais, como apresentado no diagrama de Campbell da Fig. 11.

Figura 12 - Resposta a 250 mm para um impulso no disco, sem MMA.



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 13 - Espectro da resposta para a entrada impulsiva no disco, sem MMA.

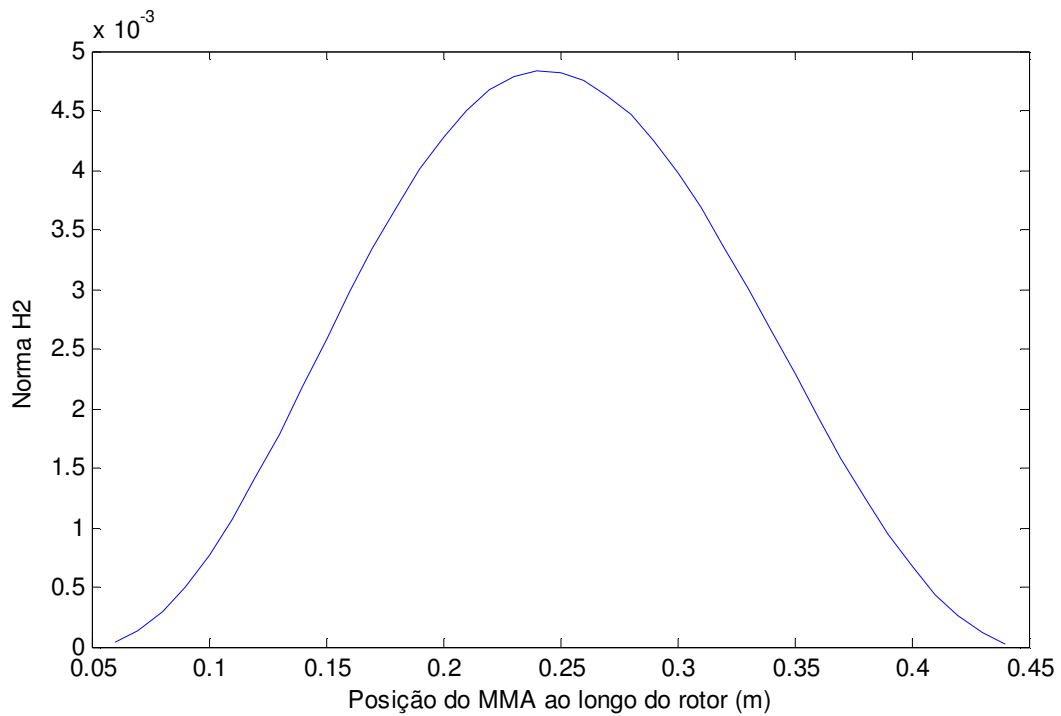


Fonte: Elaboração do próprio autor

4.1.2 POSICIONAMENTO ÓTIMO DO ATUADOR MAGNÉTICO

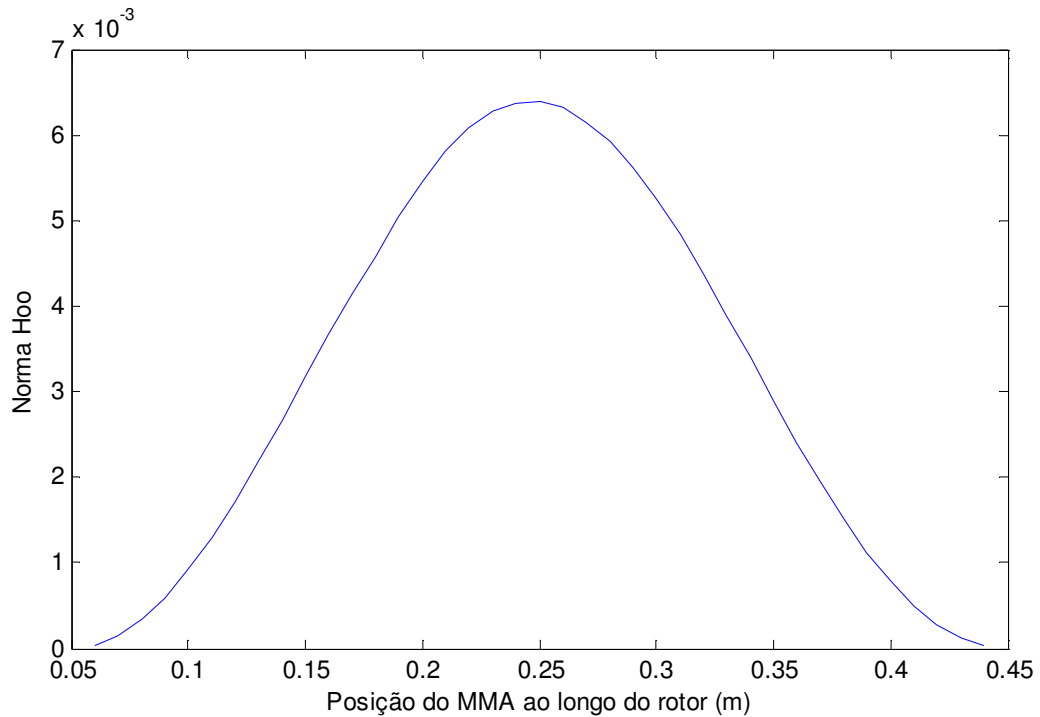
Para o posicionamento ótimo do atuador foram utilizadas as normas H_2 e H_∞ . A simulação foi realizada considerando o MMA posicionado em diversas posições entre os mancais de apoio, o que significa uma mudança nas matrizes de estado do sistema. A Fig. 14 ilustra os resultados obtidos para a norma H_2 e a Fig. 15 os resultados da norma H_∞ . A partir destas figuras percebe-se que ambas as normas produziram resultados semelhantes. Verifica-se que a posição do atuador que exerce maior efeito sobre o sistema (maior valor da norma) corresponde em ambas as normas a posição de 250 mm, aproximadamente.

Figura 14 - Norma H_2 para diferentes posições ao longo do rotor



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 15 - Norma H_{∞} para diferentes posições ao longo do rotor



Fonte: Elaboração do próprio autor

4.1.3 PARÂMETROS CONSTRUTIVOS E GEOMÉTRICOS DO MMA

A Tab. 2 apresenta os parâmetros construtivos e geométricos, bem como os parâmetros dos equipamentos do circuito de controle de um mancal magnético fabricado pela *Revolve Magnetic Bearing Inc.* Nota-se como limitação na utilização do MMA o valor máximo de deslocamento correspondente ao *air gap* (0,381 mm) e também o valor máximo de corrente que pode ser utilizado (3 A). Sabendo-se que na indução do campo magnético as correntes de *bias* e de controle se somam, o valor da máxima corrente de controle deve ser o valor da corrente de saturação (3 A) subtraído do valor da corrente de *bias* (1,5 A), que resulta em 1,5 A.

Tabela 2 - Dados característicos do mancal magnético analisado

Parâmetro	Valor
ε	0,8 (para mancais radiais)
μ_0	$4.\pi.10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$
A_g	$64,426.10^{-6} \text{ m}^2$
N	228 espiras
i_b	1,5 A
g_0	$0,381.10^{-3} \text{ m}$
i_{sat}	3 A
F_{max}	53 N

Fonte: Elaboração do próprio autor

4.1.4 PROJETO DO CONTROLADOR LQR

A partir do rotor apresentado na seção 4.1.1 foi projetado um controlador do tipo LQR utilizando de um atuador magnético para redução dos níveis de vibração. Para o projeto do controlador utilizou-se o modelo de redução pseudo-modal a partir dos oito primeiros modos de vibrar do rotor estacionário, sendo quatro modos em cada direção. A redução do modelo possibilita o projeto do controlador com menos esforço computacional e a obtenção das respostas a diferentes tipos de excitação. O controlador foi projetado considerando o MMA posicionado na posição de 250 mm com o rotor girando a 6000 rpm, que é a condição padrão de funcionamento adotada. Para o projeto do controlador e a obtenção das respostas com o rotor operando na condição padrão de funcionamento o efeito giroscópico foi contabilizado na matriz dinâmica do sistema. Já na obtenção da resposta transiente do rotor (aceleração do sistema) o efeito giroscópico foi tratado como uma força externa agindo no sistema, visto que, a variação da rotação necessitaria de uma mudança no tempo da matriz dinâmica do sistema, caso o efeito giroscópico fosse associado a esta. O ganho do controlador e as respostas para o rotor na condição de funcionamento foram obtidas a partir da construção de uma rotina

computacional no ambiente MATLAB. Já as respostas transientes foram obtidas a partir da representação do sistema no Simulink.

Para obter o ganho do controlador foi utilizada a função LQR do MATLAB, que utiliza como argumento as matriz $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ do sistema. As matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ adotadas foram:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.63 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

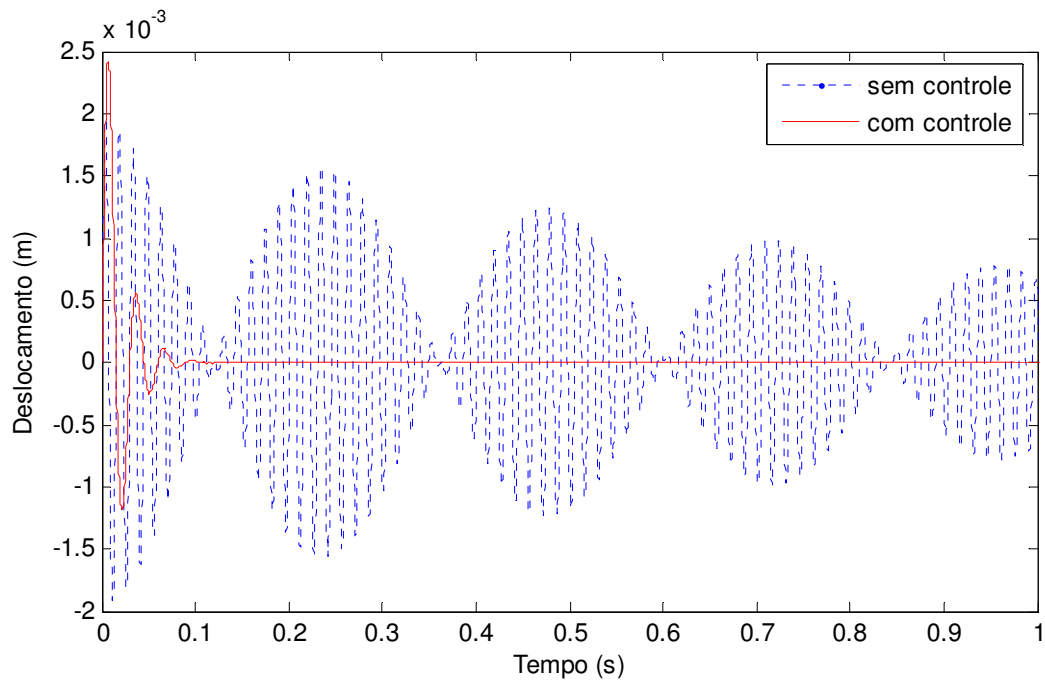
Os valores da matriz $\mathbf{Q}$ ponderam a importância dos modos de vibrar do rotor, sendo que os primeiros modos são mais relevantes. A matriz $\mathbf{R}$ pondera o custo com a corrente de controle. Para os valores de $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ apresentados foi obtido o seguinte valor do ganho:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,3 & -4,4 & 379,1 & 60,6 & -115,8 & 207,7 & -21,6 & 1,6 & 2,6 & -0,003 & 0,02 & -0,02 & 0,003 & -0,04 & 2,8e-5 \\ 0,3 & 0,6 & -379,1 & -4,4 & 115,9 & 60,6 & -21,6 & -207,7 & -2,6 & 1,6 & 0,02 & -0,003 & -0,003 & -0,02 & 2,8e-5 & 0,04 \end{bmatrix}$$

4.1.4.1 RESPOSTA AO IMPULSO

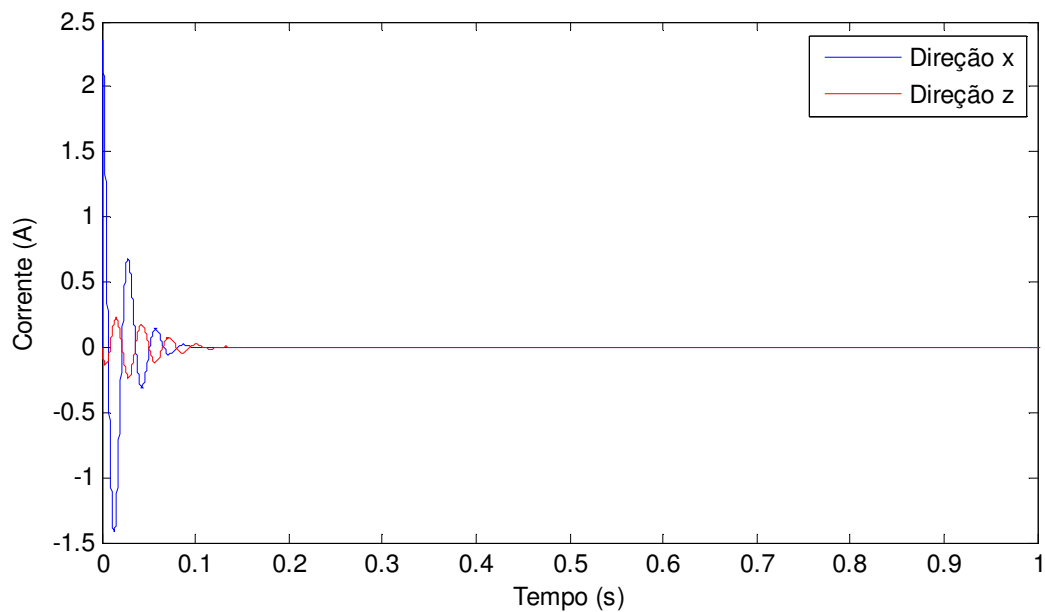
Com o rotor operando a 6000 rpm foi simulada uma entrada impulso no disco nas direção x . Este impulso constitui na aplicação de uma força de 1 kN durante um intervalo de tempo de 1 ms. A Fig. 16 ilustra a resposta ao impulso, para o sistema sem controle e com controle, na posição do MMA na direção x . Verifica-se nesta figura o fenômeno de batimento na curva de resposta ao impulso do sistema sem controle, resultante da proximidade das duas primeiras frequências naturais, conforme pode ser verificado no diagrama de Campbell na rotação de 6000 rpm. A Fig. 17 ilustra o comportamento da corrente elétrica de controle para a resposta ao impulso, nas direções x e z . Devido ao efeito de acoplamento causado pelo efeito giroscópico a direção z também sofre influência do impulso na direção x .

Figura 16 - Deslocamento do rotor na posição do MMA devido ao impulso na direção x



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 17 - Corrente elétrica de controle devido ao impulso.

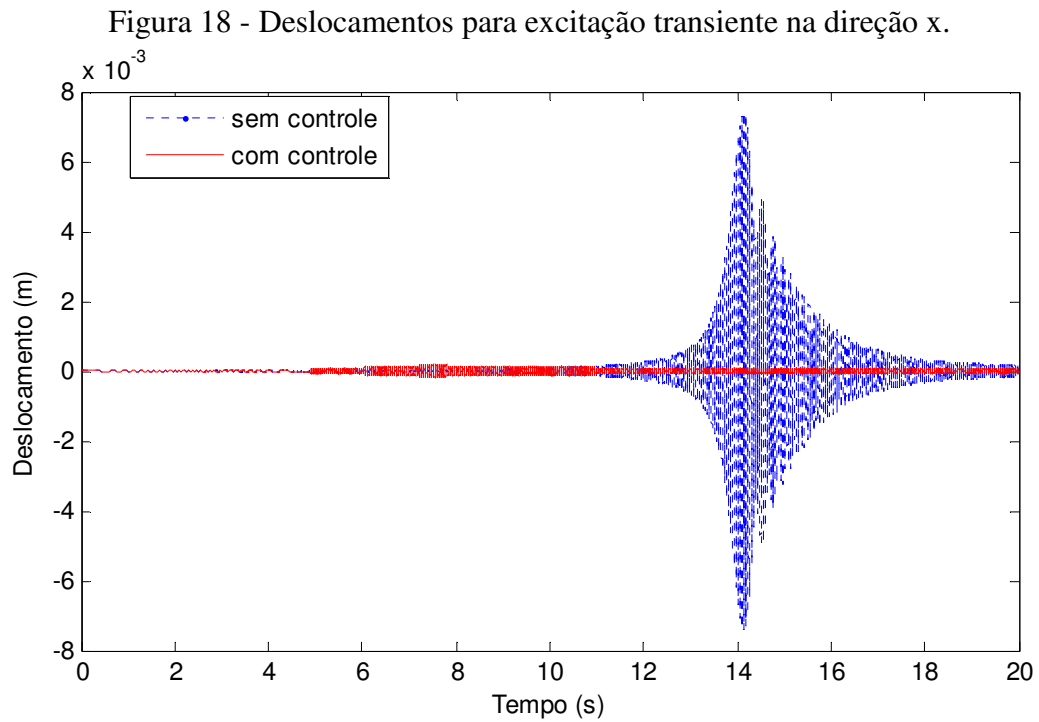


Fonte: Elaboração do próprio autor

4.1.4.2 RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO

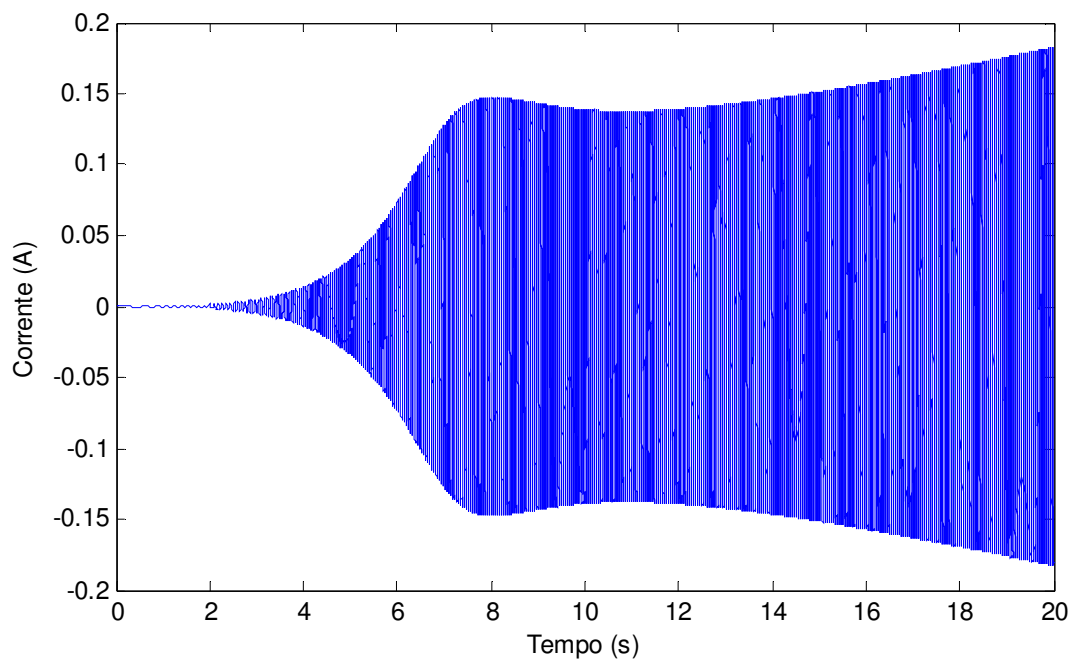
O controlador foi testado para respostas ao desbalanceamento de 10^{-4} kg.m em duas situações: em regime transiente (acelerando) e em regime permanente. A Fig. 18 ilustra o

comportamento na direção x do rotor sendo acelerado linearmente de 0 a 6000 rpm em 20 segundos. As Fig. 19 e 20 apresentam, respectivamente, a corrente elétrica de controle e a força eletromagnética gerada pelo atuador nesta condição. Para a direção z o comportamento é similar ao destas três figuras apresentadas.



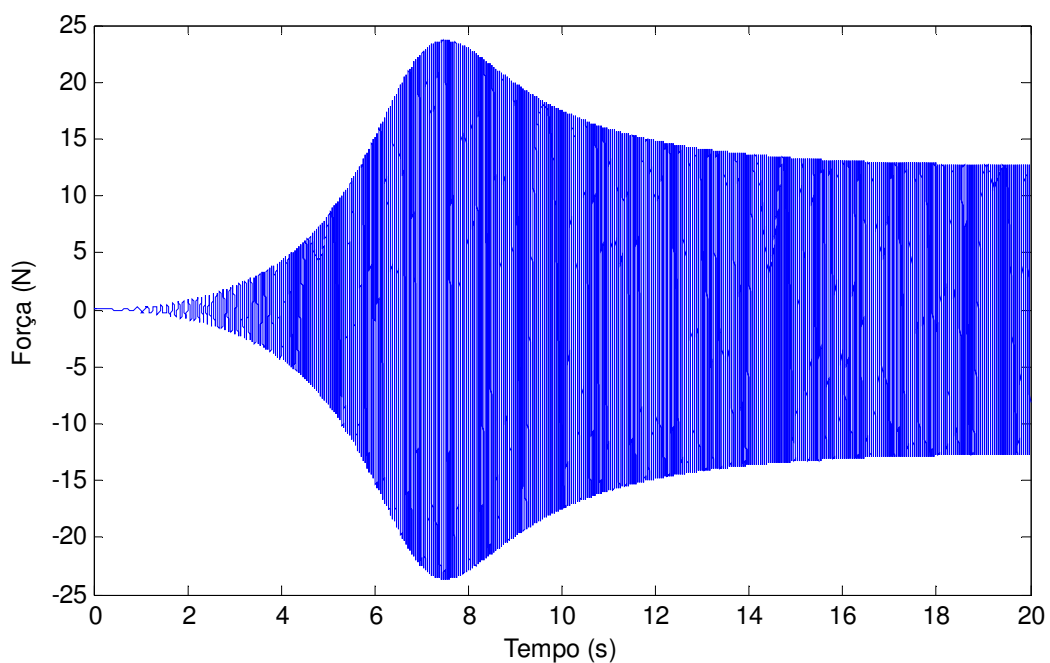
Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 19 - Corrente elétrica de controle na direção x para a excitação transiente.



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 20 - Força de controle na direção x para a excitação transiente.

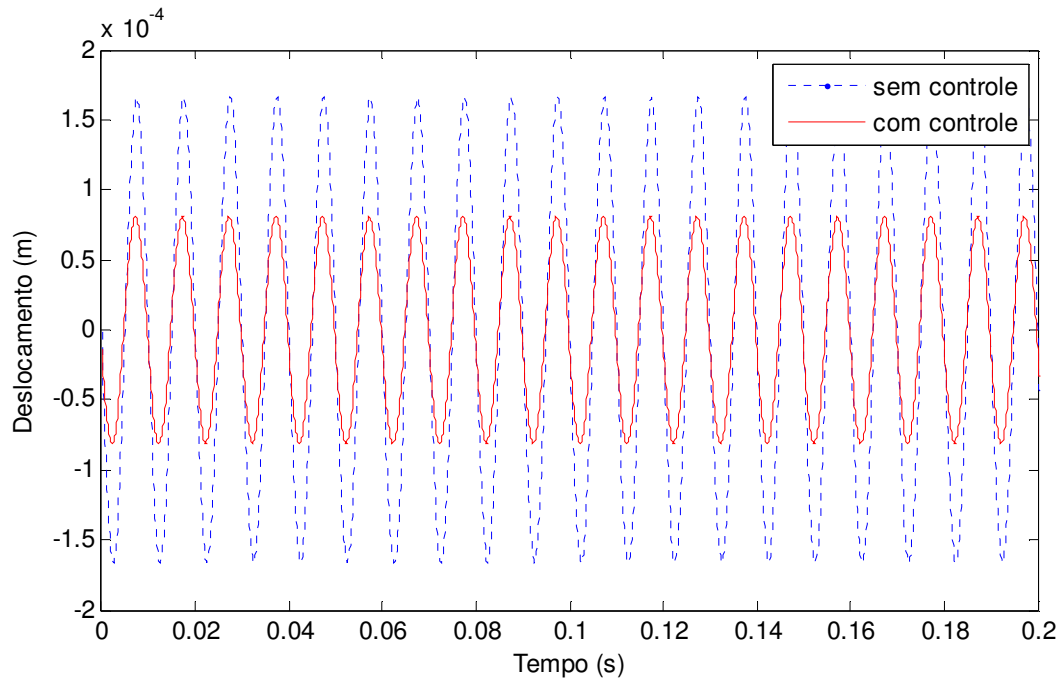


Fonte: Elaboração do próprio autor

A Fig. 21 apresenta o gráfico de deslocamento em função do tempo para o rotor em regime permanente a 6000 rpm. As Fig. 22 e 23 ilustram o comportamento da corrente de

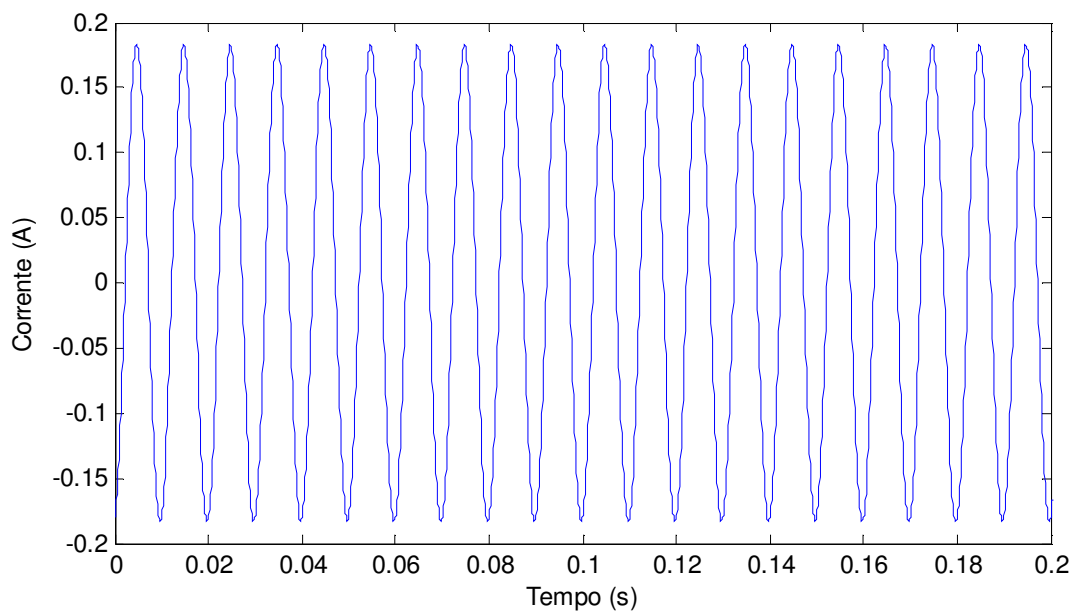
controle e força de controle, respectivamente. Para a direção z o comportamento é similar ao destas três figuras apresentadas, iguais em amplitude defasadas de noventa graus.

Figura 21 - Deslocamentos para excitação permanente na direção x.



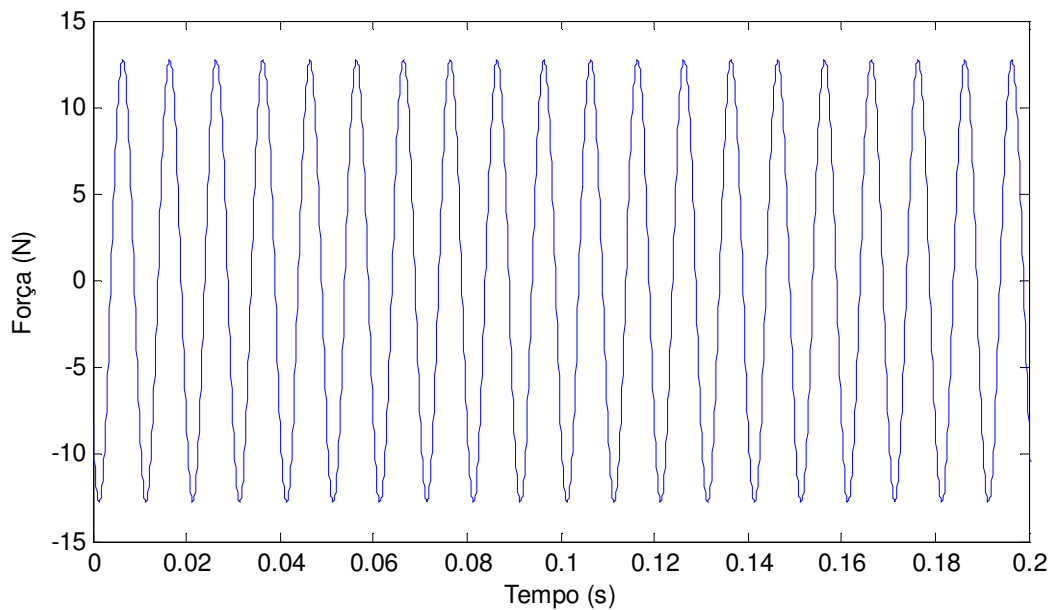
Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 22 - Corrente elétrica de controle na direção x para a excitação permanente.



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 23 - Força de controle na direção x para a excitação permanente.



Fonte: Elaboração do próprio autor

4.1.5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Analizando a resposta ao impacto na Fig. 16 verifica-se que houve uma grande redução dos valores de deslocamento utilizando o controle com o atuador magnético em comparação com resposta para o rotor sem controle. No entanto, estes valores de deslocamentos são superiores ao *air gap* nominal do MMA, ou seja, o rotor poderia entrar em contato com o estator se essa situação ocorresse na prática. Analisando a corrente elétrica da Fig. 17 percebe-se que a corrente ultrapassa o máximo valor possível, de 1,5 A. Isso significa que a corrente total no atuador, soma na corrente de controle e corrente de *bias*, é maior que 3 A. Sendo assim, uma excitação do tipo impacto (impulso) é crítica para o MMA, mas dependendo da severidade do impacto e o tempo de transmissão do impacto ao rotor pode ser absorvido pelo sistema de controle sem atingir a corrente de saturação. A análise do desbalanceamento, tanto em condição transiente como em regime permanente fornece grandes reduções no nível de vibrações sem atingir os limites de deslocamento máximo do MMA e da corrente máxima de controle. Verifica-se também que o sistema de controle elimina o problema da velocidade crítica do rotor quando este é acelerado de 0 a 6000 rpm. Em geral, o controlador projetado se mostrou eficaz na redução do nível de vibrações, podendo ser utilizado nos tipos de solicitações comuns de operação em situações práticas.

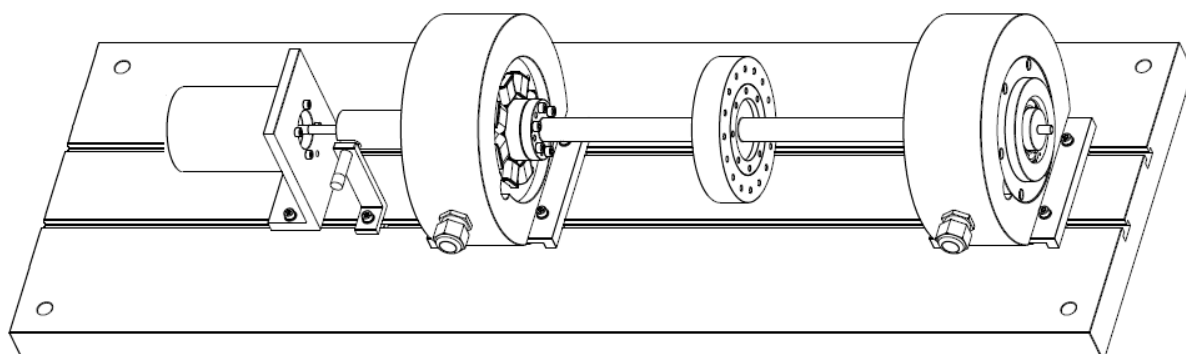
4.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO ROTOR LEVITADO

Nesta seção serão apresentados os resultados das simulações numéricas realizadas para o rotor utilizado na parte experimental do projeto. Conforme já citado anteriormente, o sistema em que foram realizados os testes experimentais utiliza dois mancais magnéticos que, além de controlar a vibração, tem a função de levitar o rotor. Por este motivo, diferentemente do rotor apresentado na seção 4.1.1, este rotor não opera sem a atuação de um sistema de controle. Serão apresentados os resultados do rotor livre, a fim de comparar os dados fornecidos pelo fabricante com os obtidos pelo modelo construído. Em seguida são apresentados os resultados de controladores e observadores projetados, considerando duas modelagens distintas. Primeiramente o rotor foi modelado pelo método de elementos finitos, considerando o rotor flexível. A técnica de redução pseudo-modal foi utilizada para diminuir a ordem das matrizes e então foi projetado o controlador e o observador a serem utilizados nos experimentos. Um segundo modelo, mais simplificado, foi proposto com o objetivo de minimizar o custo computacional e avaliar a eficácia do sistema de controle. Este modelo considera o rotor como sendo um corpo rígido. Os resultados para cada modelo serão apresentados nesta seção. Em ambos os casos o controlador utilizado foi o LQR.

4.2.1 CARACTERÍSTICAS DO ROTOR

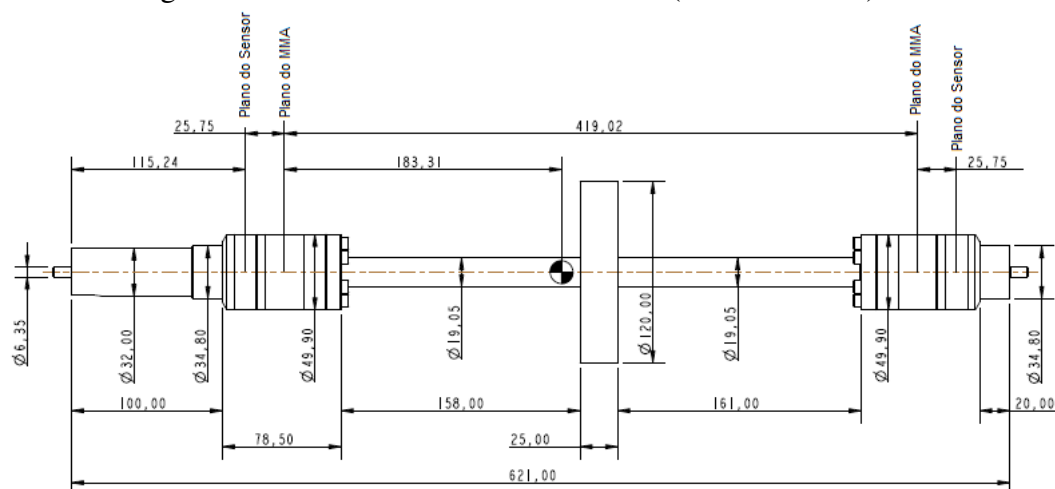
O esquema do rotor simulado e utilizado nos experimentos é apresentado Fig. 24, e as propriedades físicas e geométricas encontram-se resumidas na Tab. 3. O rotor utilizado para análise do desempenho do sistema de controle é confeccionado em aço com dimensões apresentadas na Fig. 25.

Figura 24 - Esquema de montagem da bancada (rotor, MMAs e motor de acionamento)



Fonte: Manual do fabricante

Figura 25 - Dimensões do rotor simulado (em milímetros)



Fonte: Manual do fabricante

A Tab. 3 apresenta os dados utilizados tanto no modelo de corpo rígido, quanto no modelo de rotor flexível. No modelo de rotor flexível o eixo é modelado pelo método de elementos finitos, conforme apresentado no Anexo A, sendo adicionados os elementos de disco e do MMA. No modelo de corpo rígido o disco é parte integrante do rotor, resultando em uma massa total do rotor e momentos de inércia considerando o conjunto.

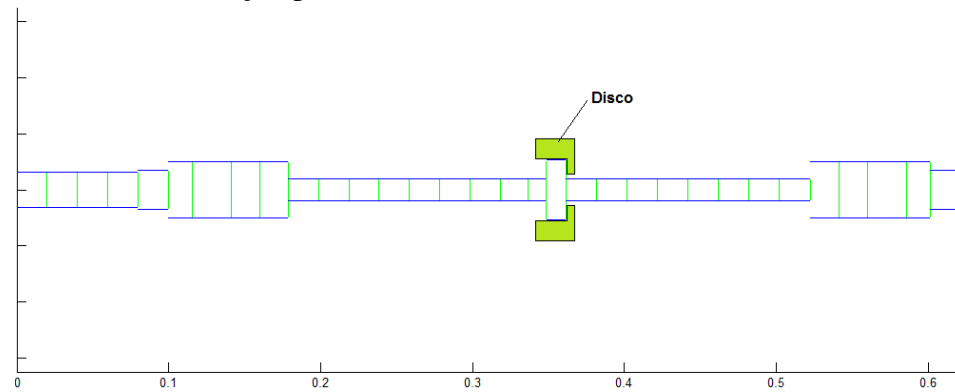
Tabela 3 - Resumo das características físicas e geométricas do rotor levitado

Parâmetro	Utiliza no modelo de rotor		Valor
	Flexível	Rígido	
Massa total do rotor (incluindo disco)		X	5,89 kg
Massa do disco	X		1,75 kg
Momento de inércia do conjunto (no centro de gravidade) $I_x=I_z$		X	0,179 kg.m ²
Momento de inércia polar do conjunto I_y		X	0,00478 kg.m ²
Momento de Inércia do Disco $I_x=I_z$	X		1995e-6 kg.m ²
Momento de Inércia Polar do Disco I_y	X		3807e-6 kg.m ²
Posição dos sensores	X	X	Conforme Figura 25
Posição dos MMAs	X	X	Conforme Figura 25
Comprimento do eixo	X	X	621 mm
Diâmetro do eixo	X		Conforme Figura 25
Massa específica do material do eixo (ρ)	X		7800 kg/m ³
Módulo de elasticidade do material do eixo (E)	X		210 GPa

Fonte: Elaboração do próprio autor

Para construir o modelo de rotor flexível o eixo foi dividido em 32 elementos, conforme a discretização apresentada na Fig. 26. Após montar as matrizes de massa, rigidez e amortecimento global do eixo foi adicionada a massa e o momento de inércia do disco. Assim, foram montadas as matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento do rotor levitado. Para o rotor levitado considerou-se um amortecimento estrutural proporcional a matriz de massa e de rigidez dado por $\mathbf{D} = 10^{-7} \mathbf{K} + 10^{-3} \mathbf{M}$. Vale ressaltar que adicionado a este amortecimento tem-se o amortecimento devido ao efeito giroscópico dos elementos de eixo e do disco. Posteriormente foram inseridos os MMAs e isso incorre em adicionar rigidez e amortecimento ao sistema. Essa rigidez e amortecimento estão presentes quando o controle é ativado e o rotor, anteriormente repousando no interior do MMA, passa a levitar no interior do mesmo (sem contato).

Figura 26 - Discretização para o modelo de rotor flexível (elementos finitos)

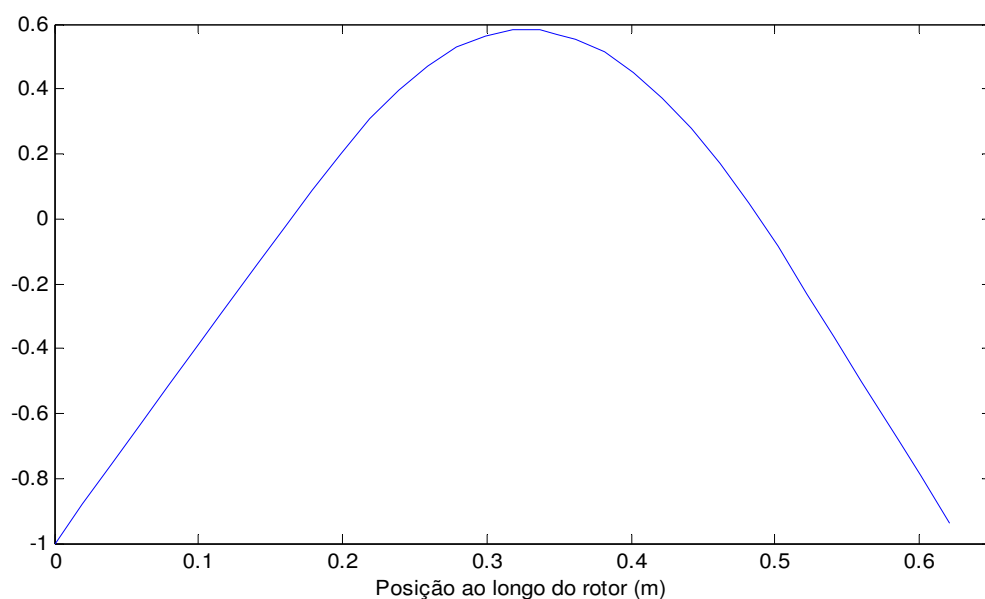


Fonte: Elaboração do próprio autor

Uma vez que se conhece a matriz dinâmica do sistema podem-se encontrar facilmente as frequências críticas e os modos de vibrar do sistema. Para isso foi utilizada a função *eig* do *MATLAB*, que retorna uma matriz diagonal com os autovalores e outra matriz com os autovetores para cada frequência crítica.

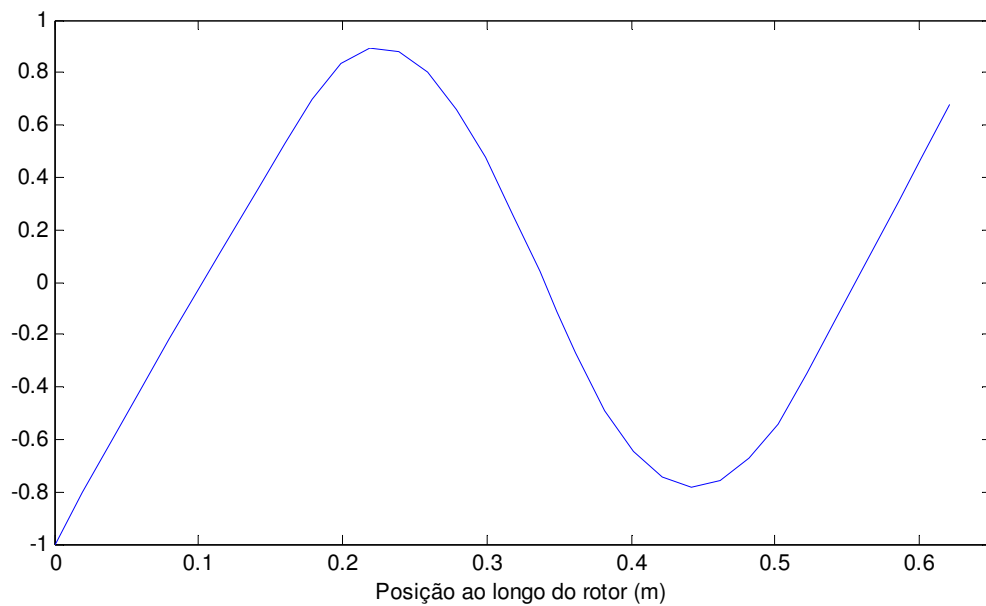
Para a redução pseudo-modal do sistema foram utilizados os modos de vibrar do rotor livre (sem influência dos MMAs), análogo a uma viga livre-livre. A Fig. 27 e a Fig. 28 ilustram o primeiro e o terceiro modo de vibrar do sistema, correspondentes ao primeiro e segundo modo de vibrar na direção x . O segundo e o quarto modo de vibrar do sistema correspondem aos dois primeiros modos de vibrar na direção z .

Figura 27 - Primeiro modo de vibrar para o rotor estacionário (109 Hz)



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 28 - Segundo modo de vibrar para o rotor estacionário (430 Hz)



Fonte: Elaboração do próprio autor

A Tab. 4 apresenta um comparativo entre as frequências naturais calculadas no modelo obtido pelo método de elementos finitos e os dados fornecidos na documentação fornecida pelo fabricante. Pode-se observar que os resultados estão relativamente próximos, confirmando que o modelo utilizado representa o rotor de forma satisfatória, razão pela qual não se fez uma atualização do modelo.

Tabela 4 - Frequências dos tres primeiros modos de flexão do rotor livre-livre

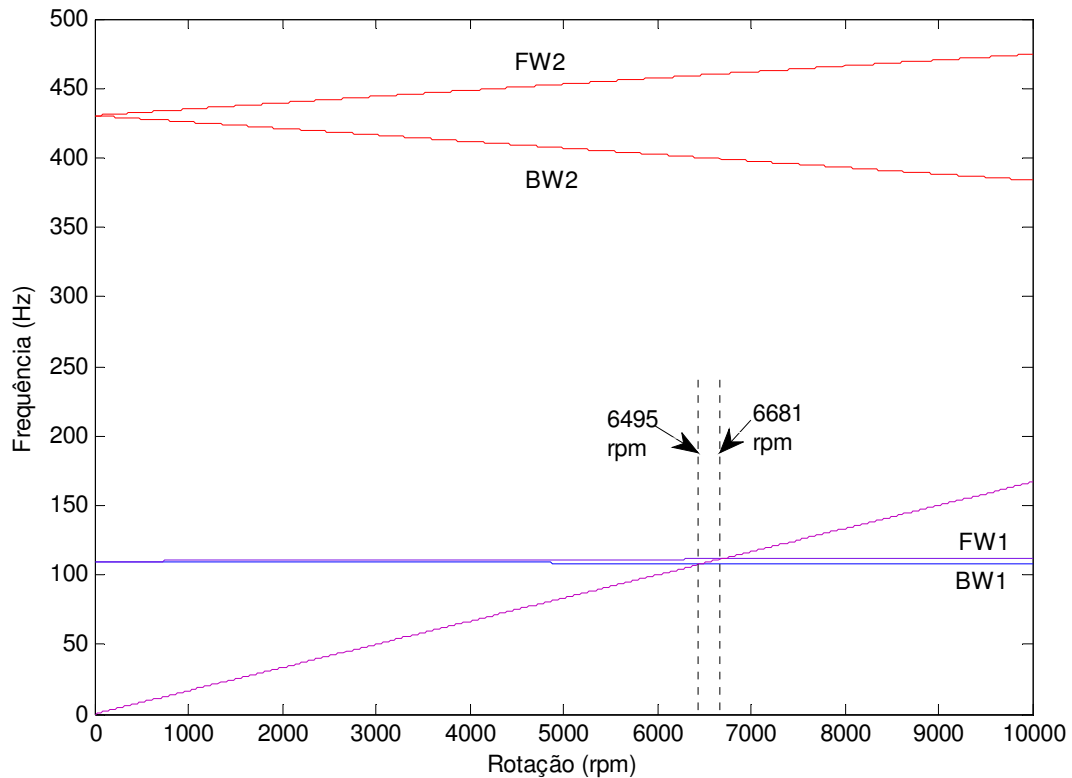
Dados	Modos de flexão (<i>bending modes</i>)		
	1º	2º	3º
Calculados	109	430	790
Estimados pelo fabricante	108	403	746
Erro em relação ao fabricante	0,9 %	6,2 %	5,6 %

Fonte: Elaboração do próprio autor

A Fig. 29 apresenta o diagrama de Campbell para rotor com as velocidades críticas devidamente identificadas. A faixa de rotação analisada foi de 0 a 10000 rpm. As duas primeiras velocidades críticas encontradas no diagrama são 6495 rpm e 6681 rpm. É importante ressaltar que este diagrama representa o rotor livre-livre. À medida que o controle é adicionado ao sistema, os modos de corpo rígido aparecem em velocidades críticas

adicionais, geralmente em rotação mais baixas. Também, à medida que o controle é inserido no sistema as frequências anteriormente apresentadas sofrem modificação.

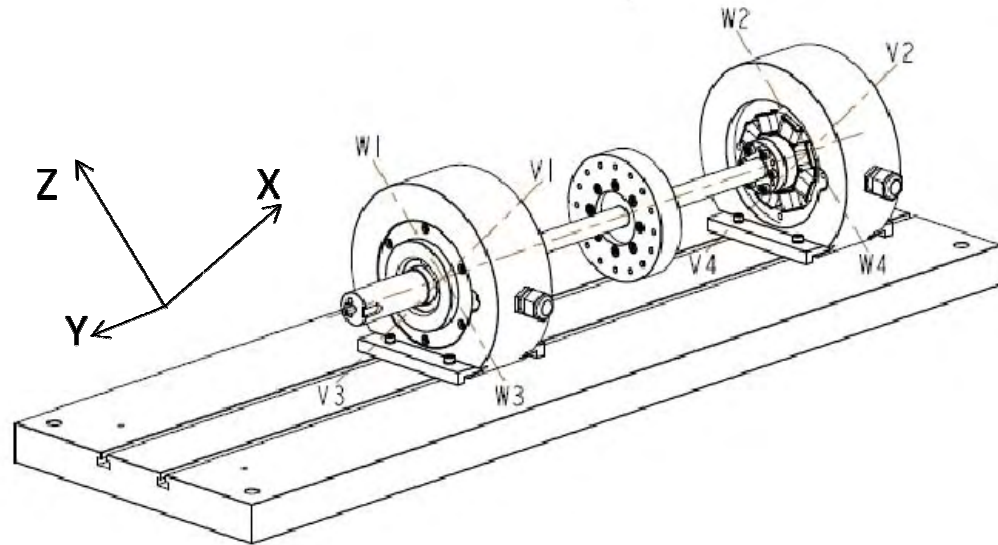
Figura 29 - Diagrama de Campbell do rotor levantado



Fonte: Elaboração do próprio autor

Na Fig. 30 é apresentada a identificação das direções de controle. Esta definição é proveniente do sistema do fabricante SKF. As direções denominadas pela letra V e W correspondem ao eixo x e z do modelo, respectivamente. Os números pertencentes ao primeiro MMA são 1 (um) e 3 (três) e no segundo MM são 2 (dois) e 4 (quatro). O sentido positivo do deslocamento é dado no sentido ascendente. Por exemplo, o deslocamento denominado V13 equivale a um deslocamento no eixo x, no MMA 1. Se o movimento for para cima, em direção ao topo do MMA, o deslocamento é positivo.

Figura 30 - Identificação das direções de controle



Fonte: Manual do fabricante

4.2.2 CARACTERÍSTICAS DOS MMAS

A bancada utilizada possui dois MMAs radiais, semelhante ao esquema da Fig. 1, fixados a uma base metálica. Esses MMAs possuem em seu interior mancais passivos de auxílio, que mantêm o rotor apoiado quando o controle está desligado. Estes mancais não entram em contato com o rotor quando o mesmo encontra-se em rotação, a menos que houver falha no sistema de controle ou interrupção da corrente elétrica que alimenta os MMAs. O posicionamento dos MMAs ao longo do rotor é fixo, impedindo qualquer tipo de alteração, inclusive pelo fato do rotor possuir diâmetro específico na região de aplicação do campo eletromagnético (folga nominal de projeto). As características dos MMAs são apresentadas na Tab. 5. Destes parâmetros, foram utilizados diretamente no modelo e projeto do controle a rigidez de corrente e de posição informadas pelo fabricante. Os dados de rigidez apresentados são referentes a corrente de *bias* de 1 A, valor que foi utilizado em todos os experimentos.

Tabela 5 - Características dos MMAs informadas pelo fabricante

Capacidade de carga	283 N
Corrente máxima	3 A
Corrente de saturação	3 A
Rigidez de corrente	143 N/A
Rigidez de posição	0,4 N/ μm
Diâmetro interno do estator	50,765 mm
Folga nominal (<i>air gap</i>)	0,432 mm
Folga do mancal auxiliar	0,100 mm
Área da face do polo	430,74 mm ²
Número de polos por eixo	2
Número de espiras por enrolamento	138
Frequência de corte do amplificador	20 kHz
Sensibilidade do sensor de posição	160 a 190 $\mu\text{m/V}$

Fonte: Manual do fabricante

4.2.3 MODELO DE ROTOR FLEXÍVEL

Para o projeto do controlador utilizou-se o método de redução pseudo-modal a partir dos seis primeiros modos de vibrar do rotor estacionário, sendo dois modos de corpo rígido e o primeiro modo de flexão do rotor. Durante o experimento constatou-se que não era possível utilizar mais de seis modos por limitação de processamento do sistema de controle. Em termos de comparação, toda a parte de simulação e projeto do controlador também faz uso de apenas seis modos de vibrar.

A redução do modelo possibilita o projeto do controlador com menos esforço computacional e a obtenção das respostas a diferentes tipos de excitação. O controlador foi projetado com o rotor girando a 6000 rpm, que é a condição padrão de funcionamento adotada. Para o projeto do controlador e a obtenção das respostas com o rotor operando na condição padrão de funcionamento o efeito giroscópico foi contabilizado na matriz dinâmica do sistema. Já na obtenção da resposta transiente do rotor (aceleração do sistema) o efeito giroscópico foi tratado como uma força externa agindo no sistema, visto que, a variação da rotação necessitaria de uma mudança no tempo da matriz dinâmica do sistema, caso o efeito giroscópico fosse associado a esta. O ganho do controlador e as respostas para o rotor na condição de funcionamento foram obtidas a partir da construção de uma rotina computacional no ambiente MATLAB. Já as respostas transientes foram obtidas a partir da representação do sistema no Simulink. Na escolha das matrizes buscou-se reduzir a resposta ao impulso e em regime permanente na rotação de 6000 rpm. No entanto, as matrizes que apresentaram

melhores resultados não foram boas nos experimentos para iniciar a levitação do rotor. Aqui serão apresentadas as matrizes que apresentaram os melhores resultados práticos. Este fato será comentado na apresentação dos resultados experimentais.

Para obter o ganho do controlador foi utilizada a função LQR do MATLAB, que utiliza como argumento as matrizes **Q** e **R** do sistema. As matrizes **Q** e **R** adotadas foram:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3,3e9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,3e9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,6e9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,6e9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1e6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,3e4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,3e4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,6e4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,6e4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Para os valores de **Q** e **R** apresentados foi obtido o seguinte valor do ganho:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2,7e3 & -1,7e3 & 2,2e4 & 798 & 2,1e4 & 3,9e3 & 11,7 & -7,25 & 65,4 & 2,4 & 0,4 & 0,1 \\ 1,7e3 & 2,7e3 & 798 & -2,2e4 & -3,9e3 & 2,2e4 & 7,3 & 11,7 & 2,4 & -65,4 & -0,1 & 0,4 \\ -2,4e4 & 1,5e4 & 1,2e4 & 452 & 6,0e4 & 1,1e4 & -62,5 & 38,6 & 34,4 & 1,27 & -12,5 & -2,2 \\ -1,5e4 & -2,4e4 & 452 & -1,2e4 & -1e4 & 6,0e4 & -38,6 & -62,5 & 1,3 & -34,35 & 2,2 & -12,5 \end{bmatrix}$$

As frequências naturais para o sistema controlado, utilizando este ganho para o controlador, resultam em frequências naturais de 50 Hz, 93 Hz e 900 Hz, aproximadamente. Os valores das razões de amortecimento modal correspondentes são 1, 0,4 e 1, respectivamente. Estes parâmetros foram obtidos a partir dos autovalores da matriz dinâmica do sistema controlado. Um ganho integral de 0,03 foi somado ao controlador ótimo com o objetivo de garantir que o sistema alcance o valor de referencia desejado, neste caso o centro do MMA.

Como não é possível obter todas as variáveis do sistema experimentalmente, foi utilizado um estimador de estados. Este estimador deve ser rápido para estimar corretamente os estados do sistema, mas ao mesmo tempo não pode ser tão rápido para não incluir ruídos na resposta de

estimação. Para obter o ganho do controlador foi utilizada a função LQE do MATLAB, que utiliza como argumento as matrizes $\mathbf{Q}_e$ e $\mathbf{R}_e$ do sistema. As matrizes $\mathbf{Q}_e$ e $\mathbf{R}_e$ adotadas foram:

$$\mathbf{Q}_e = \begin{bmatrix} 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

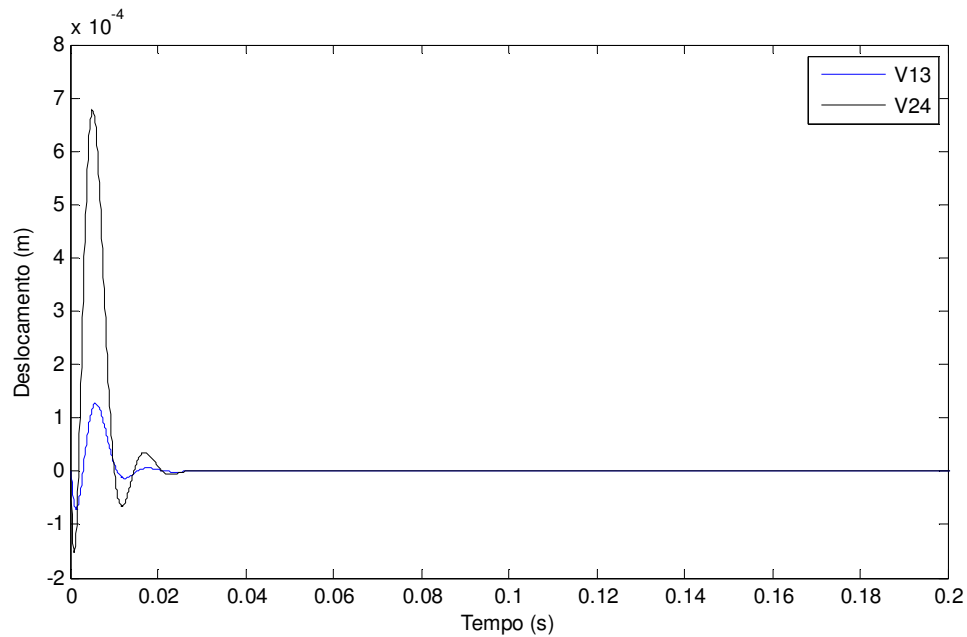
A partir destas matrizes obteve-se o seguinte ganho do estimador de estados.

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} -270,2 & 167,0 & -1135 & -42,1 & -8,9 & -1,5 & -1,3e5 & 7,7e4 & -4,2e5 & -1,5e4 & -7,9e3 & -1,4e3 \\ -167,0 & -270,2 & -42 & 1135 & 1,6 & -8,9 & -7,7e4 & -1,3e5 & -1,5e4 & 4,2e5 & 1,4e3 & -7,9e3 \\ 911,9 & -563,6 & -364 & -13,5 & -10,2 & -1,8 & 4,2e5 & -2,6e5 & -1,3e5 & -4,9e3 & -1,6e4 & -2,9e3 \\ 563,6 & 911,9 & -13 & 364 & 1,8 & -10,2 & 2,6e5 & 4,7e5 & -4,9e3 & 1,3e3 & 2,9e3 & -1,6e4 \end{bmatrix}$$

4.2.3.1 RESPOSTA AO IMPULSO

Com o rotor apenas levitando foi simulada uma entrada impulso no disco nas direção x e z . Este impulso constitui na aplicação de uma força de 1 kN durante um intervalo de tempo de 1 ms e tem o objetivo de simular um impacto no rotor. A Fig. 31 ilustra a resposta ao impulso, para o sistema na direção de controle x (V) do primeiro e segundo MMA. Pode-se notar que o sistema é bastante amortecido. A Fig. 32 ilustra o comportamento da corrente elétrica de controle para a resposta ao impulso, na direção x (V).

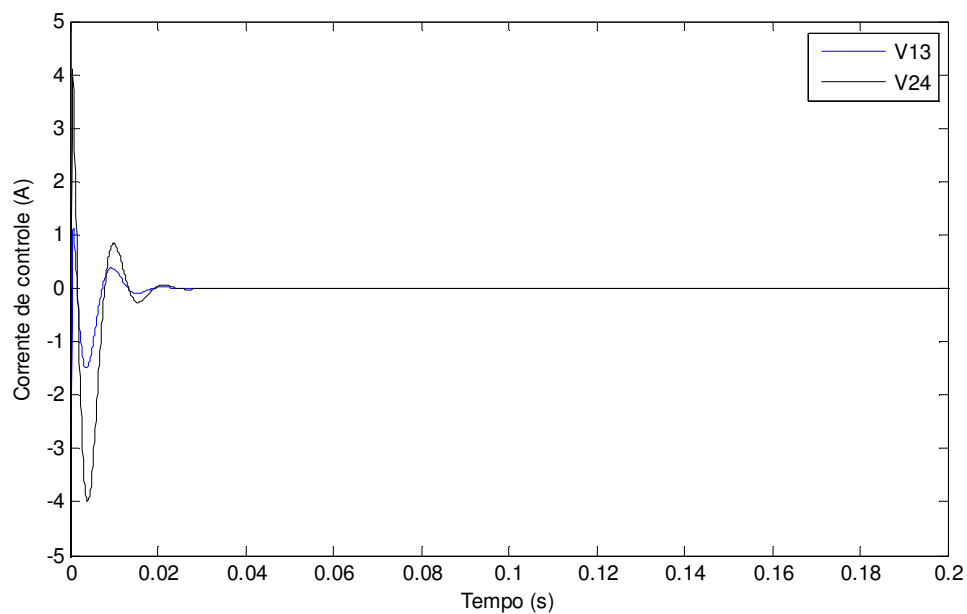
Figura 31 - Resposta ao impulso para o modelo de rotor flexível



Fonte: Elaboração do próprio autor

Observa-se na Fig. 31 que os valores de deslocamentos são superiores ao *air gap* nominal do MMA, apresentado na Tab. 5. Na Fig. 32 nota-se que a corrente de controle atinge valores consideráveis. Tais valores excedem a corrente de saturação do MMA. Isto significa que para esta severidade de impacto este sistema de controle não é adequado.

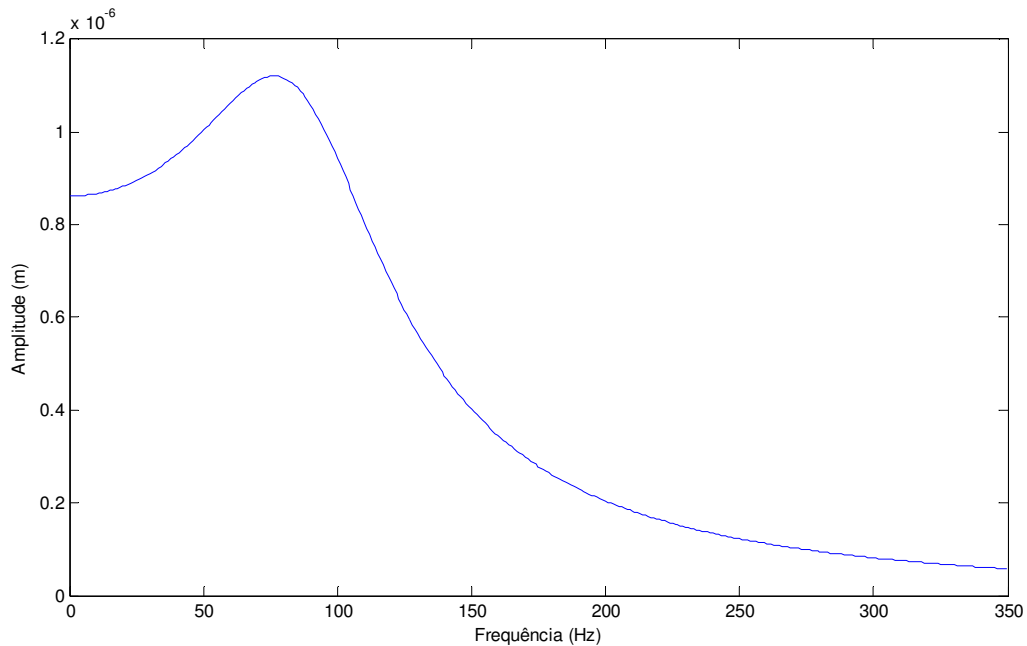
Figura 32 - Corrente de controle devido ao impulso



Fonte: Elaboração do próprio autor

Na Fig. 33 é apresentada a transformada de Fourier da resposta ao impulso. A curva é bastante suave, o que corrobora com o fato do sistema ser bastante amortecido. Nota-se claramente a contribuição da frequência de 93 Hz no comportamento do sistema.

Figura 33 - Transformada de Fourier da resposta ao impulso para a direção V13

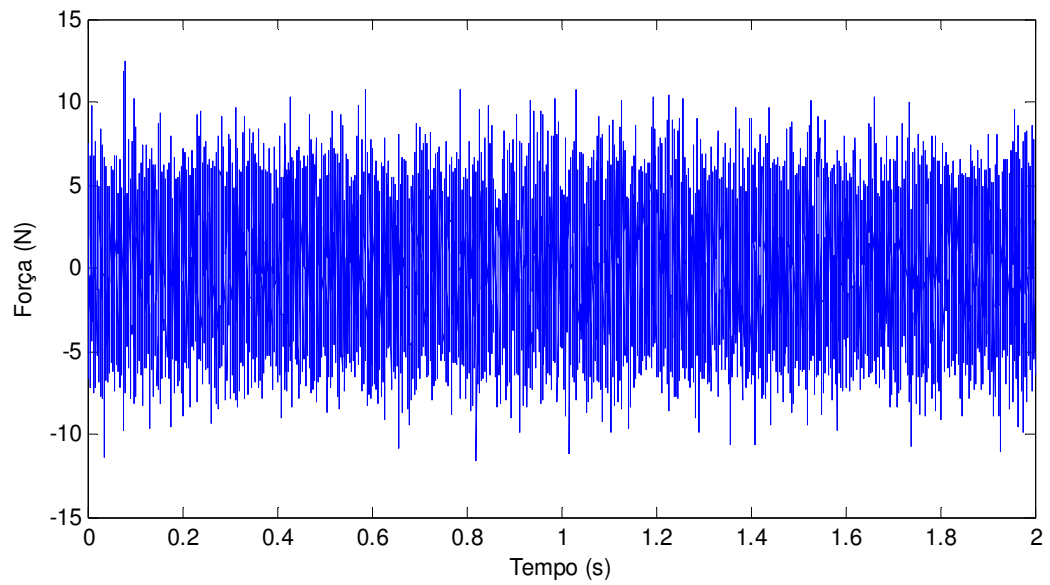


Fonte: Elaboração do próprio autor

4.2.3.2 RESPOSTA AO RUÍDO

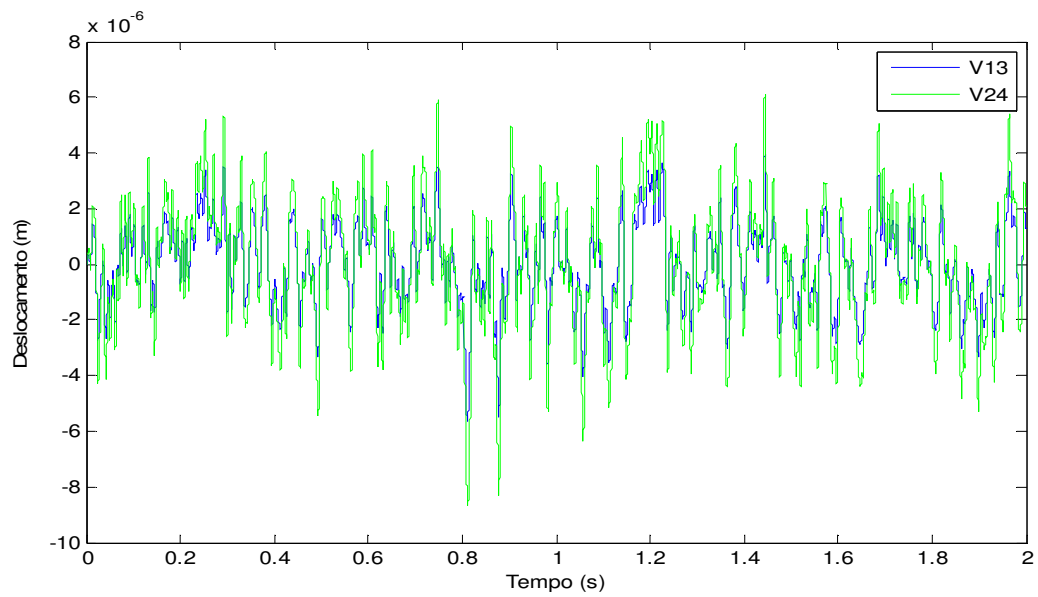
Com o rotor apenas levitando, sem rotação, foi simulada uma excitação do tipo ruído branco atuando sobre o disco, conforme Fig. 34. Percebe-se que o controle é robusto para controlar o ruído, garantindo pequenos deslocamentos do rotor, vide Fig. 35. Um bom projeto do observador é fundamental para evitar que o ruído possa afetar o sinal de saída do controlador. Na Fig. 36 é apresentada a corrente de controle, pode-se observar que esta oscila em torno de zero com pequenas amplitudes.

Figura 34 - Excitação tipo ruído branco no rotor flexível



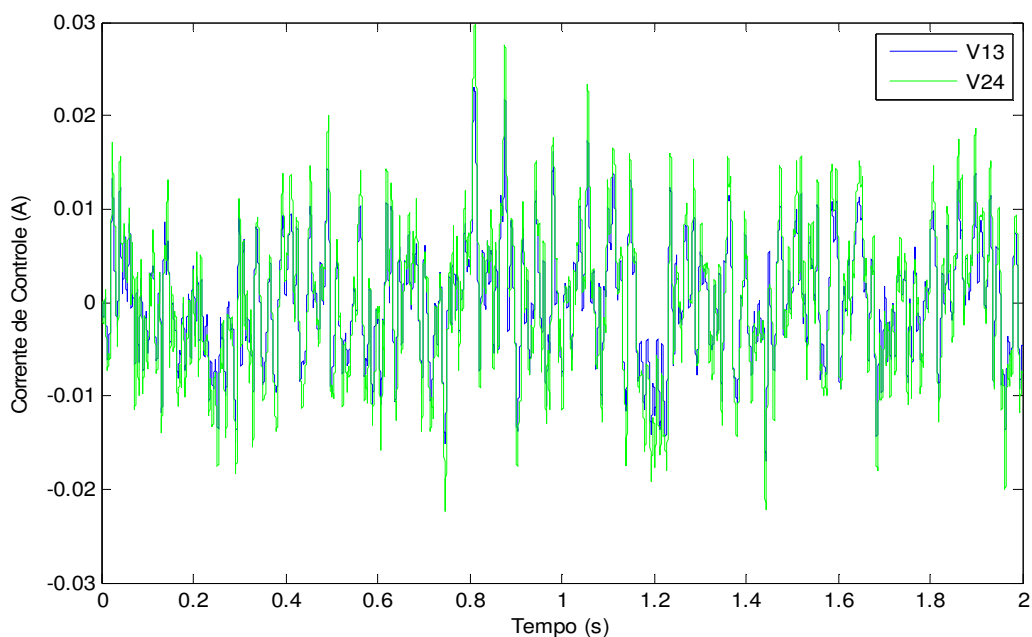
Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 35 - Resposta do rotor flexível ao ruído



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 36 - Corrente de controle devido ao ruído no rotor flexível

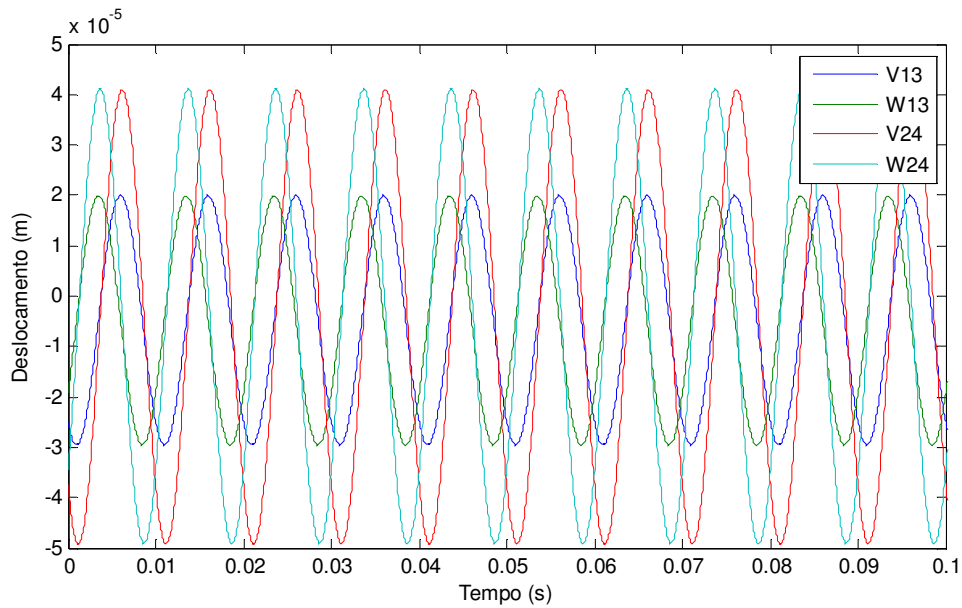


Fonte: Elaboração do próprio autor

4.2.3.3 REGIME PERMANENTE

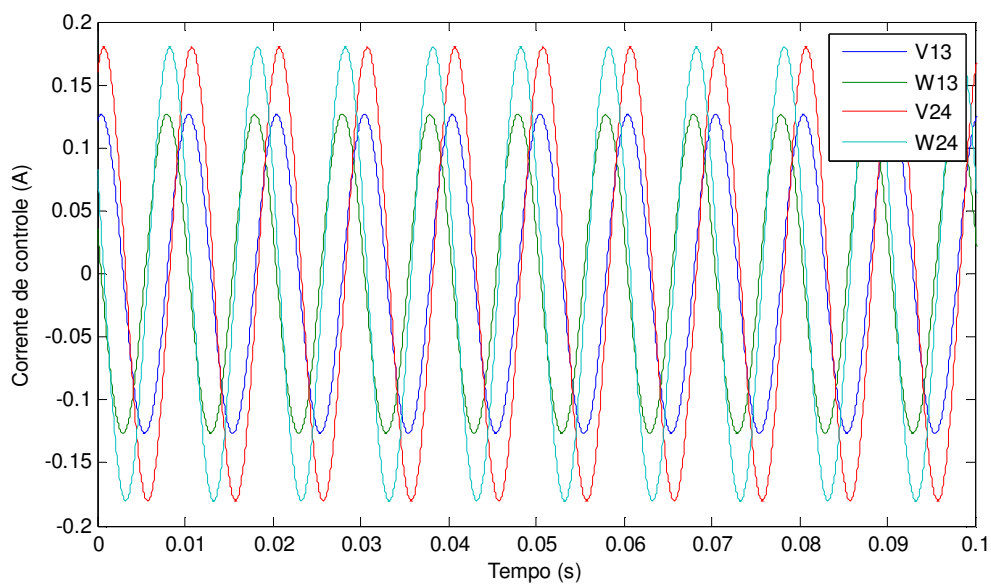
O controlador foi testado para respostas ao desbalanceamento no disco de 10^{-4} kg.m com rotor em regime permanente a 6000 rpm. A Fig. 37 apresenta o gráfico de deslocamento em função do tempo para o rotor. A Fig. 38 ilustra o comportamento da corrente de controle para as direções de controle dos dois MMAs.

Figura 37 - Deslocamento para o rotor flexível em regime permanente



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 38 - Corrente para o rotor flexível em regime permanente



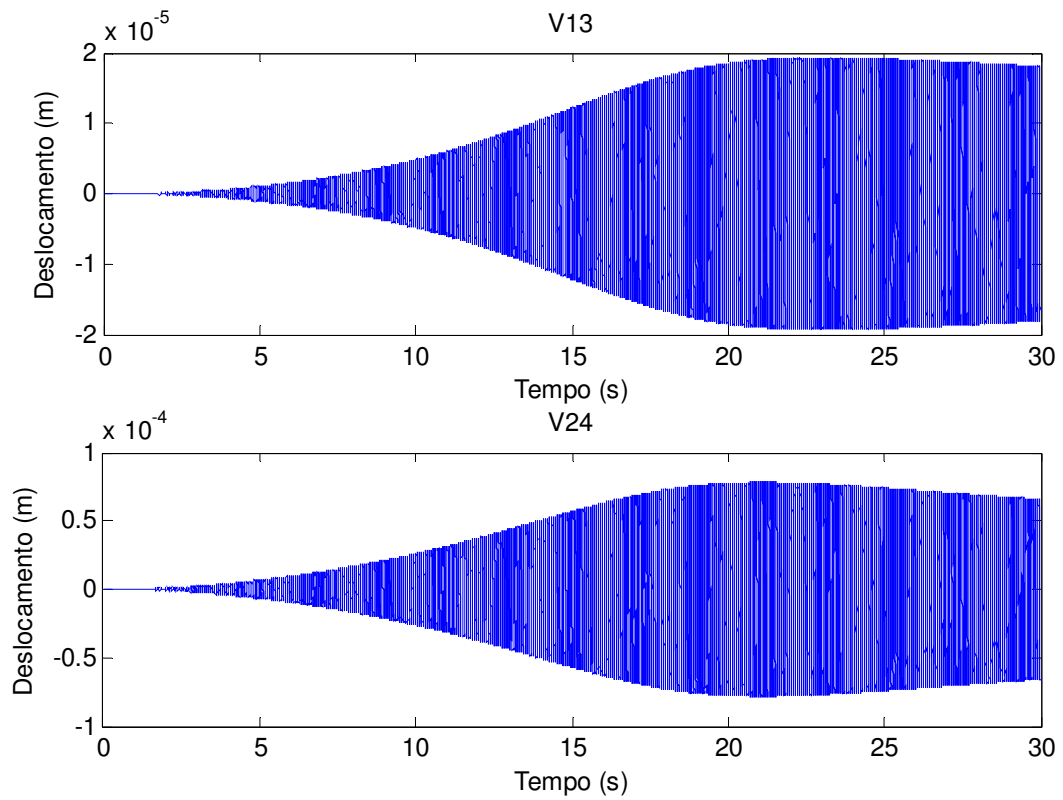
Fonte: Elaboração do próprio autor

4.2.3.4 REGIME TRANSIENTE

Para obter a resposta do rotor acelerando foi considerado um desbalanceamento no disco de 10^{-4} kg.m. A Fig. 39 ilustra o comportamento do rotor, na direção V13 e V24, sendo acelerado linearmente de 0 a 9000 rpm em 30 segundos. Pode-se observar que em torno do

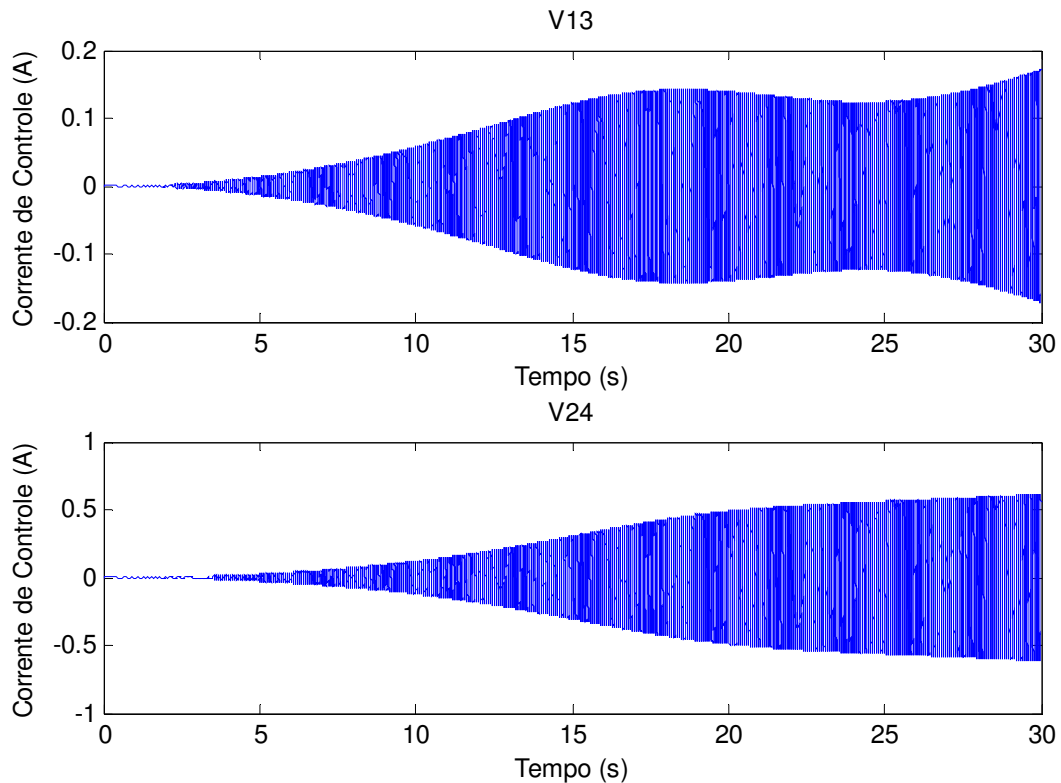
tempo de 20 segundos, no qual a rotação do rotor é de 100 Hz, as amplitudes são maiores, como já era esperado de acordo com o comportamento apresentado na Fig. 33. A Fig. 40 mostra a corrente elétrica de controle nesta condição.

Figura 39 - Deslocamento para o rotor flexível acelerando



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 40 - Corrente para o rotor flexível acelerando



Fonte: Elaboração do próprio autor

4.2.4 MODELO DE ROTOR RÍGIDO

Para o projeto do controlador a formulação de rotor rígido é apresentada no Anexo B. Esta formulação considera o rotor como sendo um corpo rígido. Esta metodologia é mais usual no projeto de controladores no espaço de estados para MMAs e a que exige menor esforço computacional, quando utilizado o controlador LQR.

Neste caso o controlador também foi projetado com o rotor girando a 6000 rpm, que é a condição padrão de funcionamento adotada. Para o projeto do controlador e a obtenção das respostas com o rotor operando na condição padrão de funcionamento o efeito giroscópico foi contabilizado na matriz dinâmica do sistema. Na obtenção da resposta transiente do rotor (aceleração do sistema) o efeito giroscópico foi tratado como uma força externa agindo no sistema. O ganho do controlador e as respostas para o rotor na condição de funcionamento foram obtidas a partir da construção de uma rotina computacional no ambiente MATLAB. Já as respostas transientes foram obtidas a partir da representação do sistema no Simulink. Na escolha das matrizes buscou-se reduzir a resposta ao impulso e em regime permanente na

rotação de 6000 rpm. No entanto, as matrizes que mostraram melhores resultados não foram boas no início da levitação do rotor. Aqui serão apresentadas as matrizes que apresentaram os melhores resultados práticos.

Para obter o ganho do controlador foi utilizada a função LQR do MATLAB, que utiliza como argumento as matrizes **Q** e **R** do sistema. As matrizes **Q** e **R** adotadas foram:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 8,7e17 & 3,7e-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,7e-6 & 9,7e17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8,7e17 & 3,7e-6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,7e-6 & 9,7e17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,9e7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8,8e7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,9e7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8,8e7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3,3e13 & 2,8e13 & 0 & 0 \\ 2,8e13 & 3,4e13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,3e13 & 2,8e13 \\ 0 & 0 & 2,8e13 & 2,3e13 \end{bmatrix}$$

Para os valores de **Q** e **R** apresentados foi obtido o seguinte valor do ganho:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1,6e3 & 3,4e3 & 0,01 & 0,01 & -8,0 & 31,1 & 2,5e-6 & -4,4e-5 \\ 1,9e3 & -4,0e3 & -0,02 & -0,01 & 9,4 & -36,3 & -3,0e-6 & 5,2e-5 \\ -0,01 & -0,01 & 1,7e3 & 3,4e3 & -2,5e-6 & 4,4e-5 & -8,0 & 31,1 \\ 0,02 & 0,01 & 1,9e3 & -4,0e3 & 3,0e-6 & -5,3e-5 & 9,4 & -36,3 \end{bmatrix}$$

As frequências naturais para o sistema controlado, utilizando este ganho para o controlador, resultam frequências naturais de 33 e 94 Hz, aproximadamente. Os valores do coeficiente de amortecimento modal correspondentes são 0,7 e 0,2, respectivamente. Estes parâmetros foram obtidos a partir dos autovalores da matriz dinâmica do sistema controlado.

Através de matrizes de transformação de coordenadas e da derivação no tempo dos sinais de deslocamento seria possível obter todos os estados do sistema (para este modelo de corpo rígido). Contudo durante os experimentos percebeu-se altos níveis de ruído que instabilizavam o controle, principalmente por conta da derivação no tempo dos sinais de deslocamento. Como as tentativas de utilizar filtros não obteve sucesso, foi então projetado um estimador de estados para amenizar o ruído e encontrar os estados de velocidade. O estimador deve ser rápido para

estimar corretamente os estados do sistema, mas ao mesmo tempo não pode ser tão rápido para não incluir ruídos na resposta de estimação. Para obter o ganho do controlador foi utilizada a função *lqe* do MATLAB, que utiliza como argumento as matrizes **Qe** e **Re** do sistema. As matrizes **Qe** e **Re** adotadas foram:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

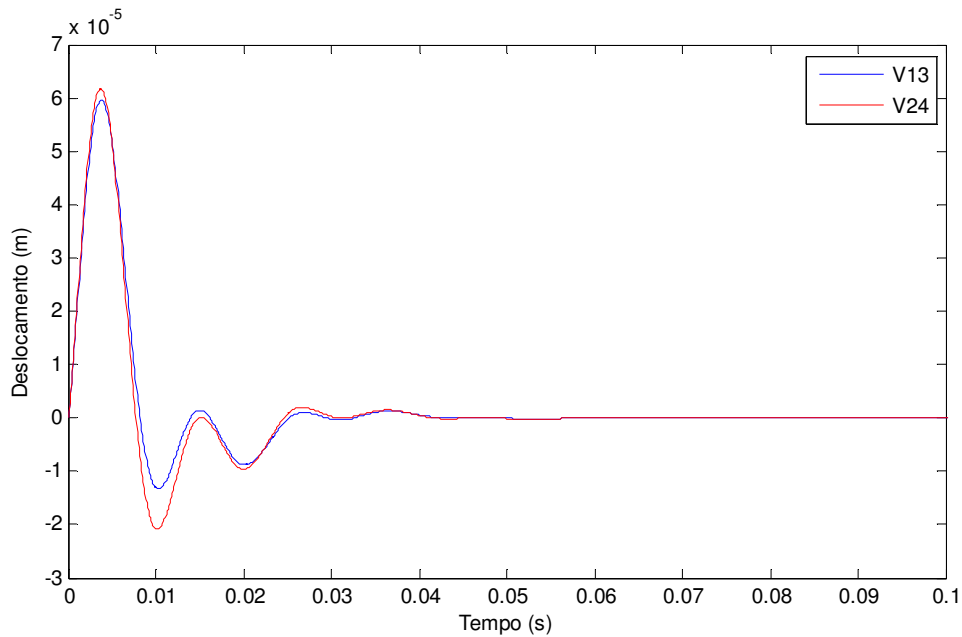
A partir destas matrizes obteve-se o seguinte ganho do estimador de estados.

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} 6,4e3 & 8,7e3 & 1,7e-11 & -2,7e-12 & -1,1e5 & -1,6e5 & -2,5e-9 & 4,3e-9 \\ 1,1e4 & 4,6e3 & -2,3e-11 & 6,4e-12 & 7,7e5 & 1,3e5 & -4,5e-9 & 1,8e-9 \\ 1,6e-11 & -2,4e-12 & -6,4e3 & 8,7e3 & 1,6e-8 & 5,1e-9 & -1,1e6 & -1,6e5 \\ -2,4e-11 & 6,8e-12 & 1,1e4 & 4,6e3 & -4,0e-9 & 1,7e-9 & 7,7e5 & 1,3e5 \end{bmatrix}$$

4.2.4.1 RESPOSTA AO IMPULSO

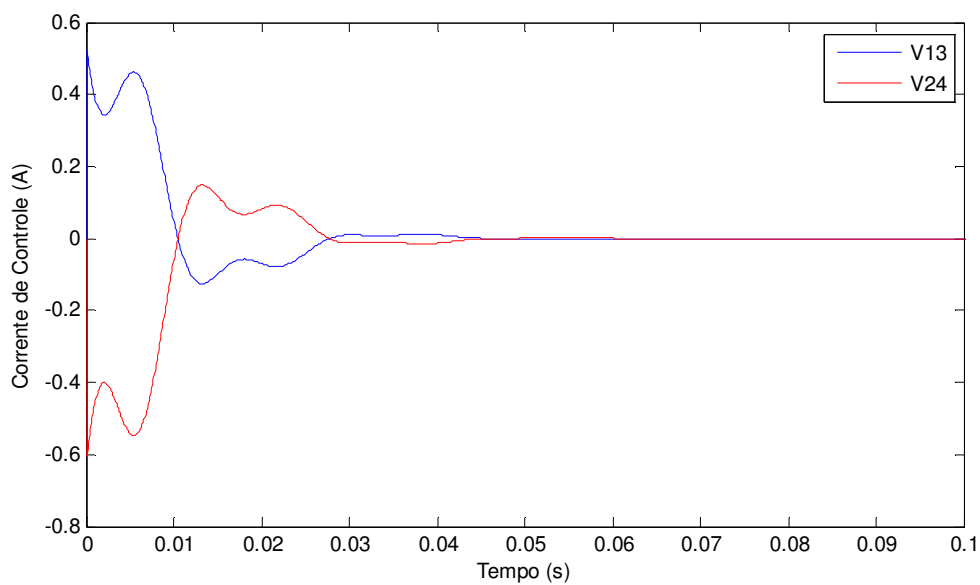
Com o rotor apenas levitando foi simulada uma entrada impulso no disco nas direção x e z . Este impulso constitui na aplicação de uma força de 1 kN durante um intervalo de tempo de 1 ms. A Fig. 41 ilustra a resposta ao impulso, para o sistema na direção de controle x (V) do primeiro e segundo MMA. Pode-se notar que o sistema é bastante amortecido. A Fig. 42 ilustra o comportamento da corrente elétrica de controle para a resposta ao impulso, na direção x (V).

Figura 41 - Resposta ao impulso para o modelo de rotor rígido



Fonte: Elaboração do próprio autor

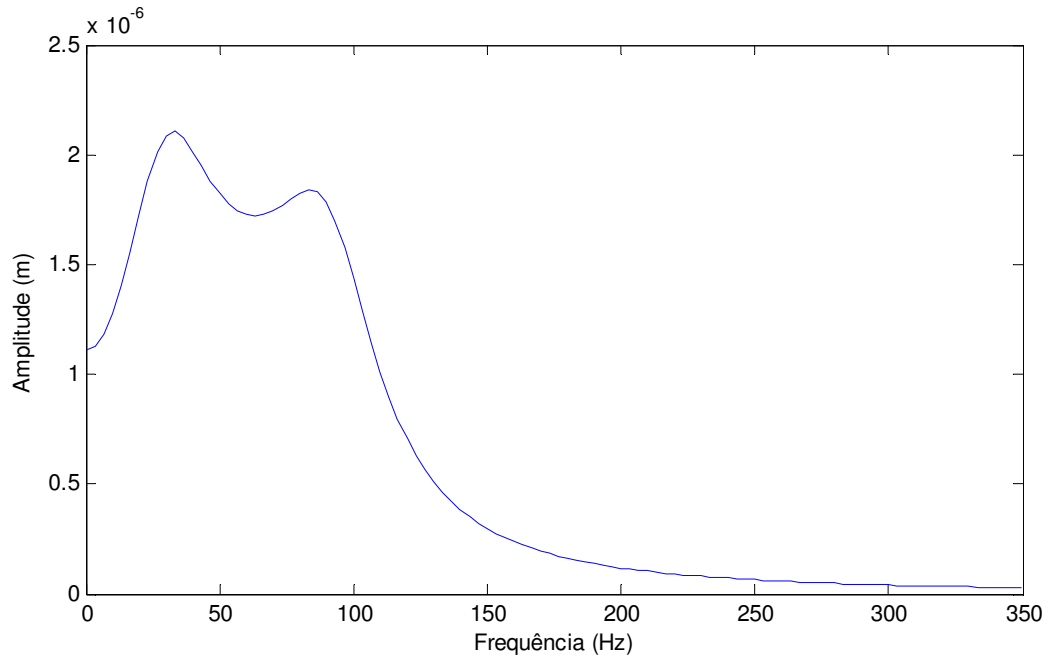
Figura 42 - Corrente de controle devido ao impulso para o rotor rígido



Fonte: Elaboração do próprio autor

Na Fig. 43 é apresentada a transformada de Fourier da resposta ao impulso. A curva é bastante suave, o que corrobora com o fato do sistema ser bastante amortecido. Nota-se claramente a contribuição das frequências críticas de 33 e 94 Hz no comportamento do sistema.

Figura 43 - Transformada de Fourier do impulso - modelo de rotor rígido

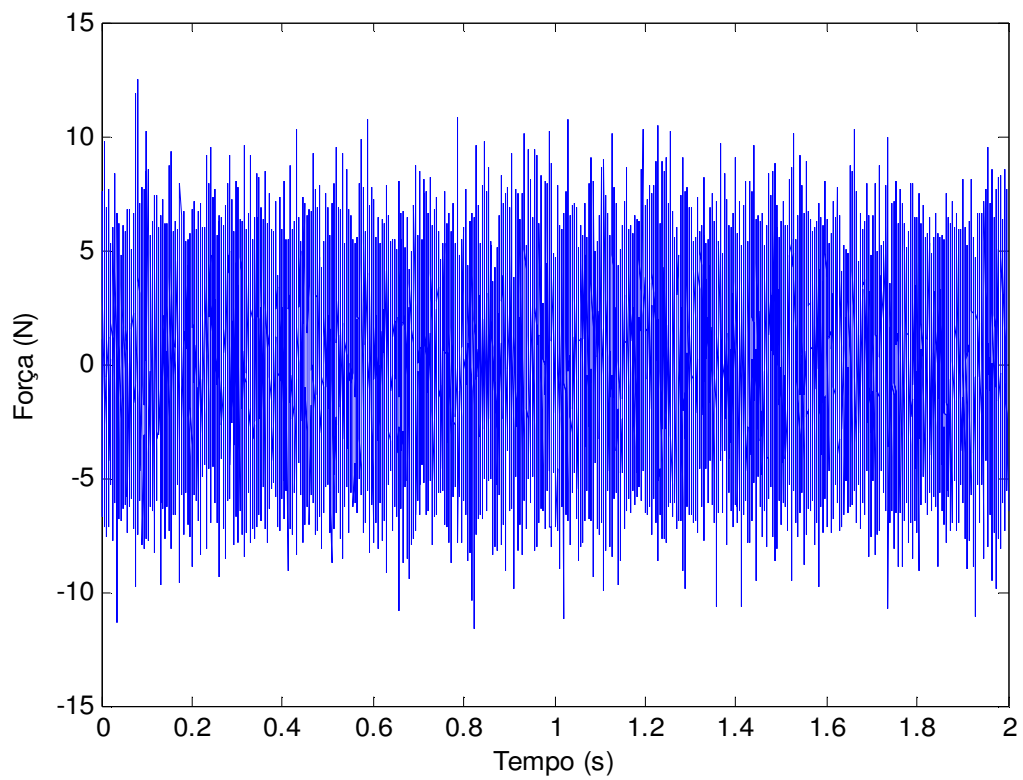


Fonte: Elaboração do próprio autor

4.2.4.2 RESPOSTA AO RUÍDO

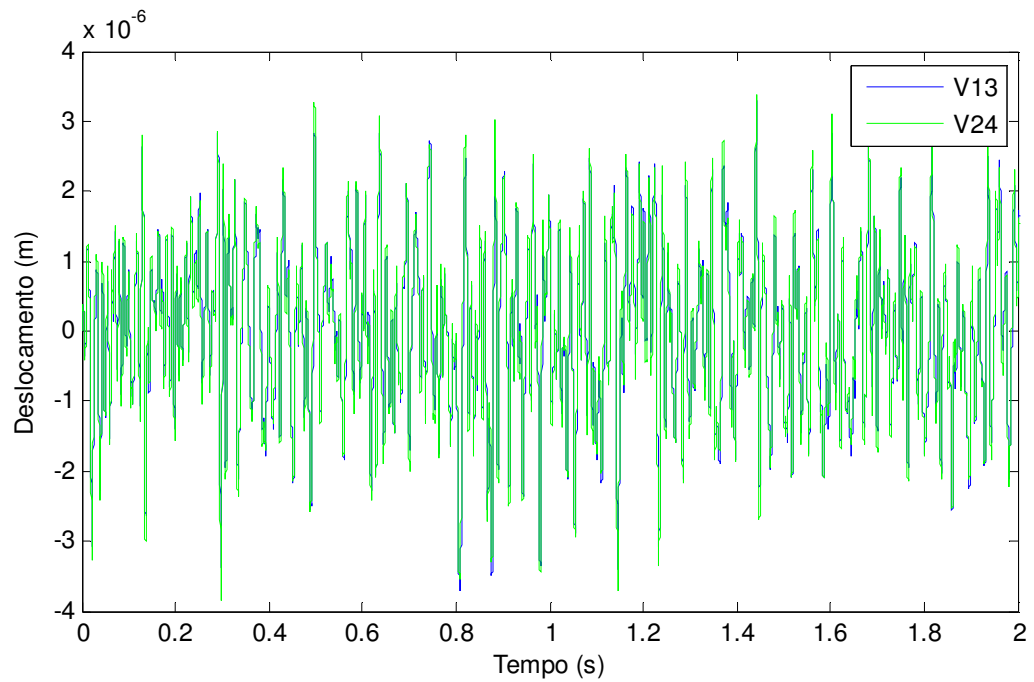
Uma excitação do tipo ruído branco atuando sobre o disco foi simulada, conforme Fig. 44. Percebe-se que o controle é robusto para controlar o ruído, garantindo pequenos deslocamentos do rotor, vide Fig. 45. Um bom projeto do observador é fundamental para evitar que o ruído possa afetar o sinal de saída do controlador. Na Fig. 4.39 é apresentada a corrente de controle; pode-se observar que esta oscila em torno de zero com pequenas amplitudes.

Figura 44 - Excitação tipo ruído branco aplicado ao rotor rígido



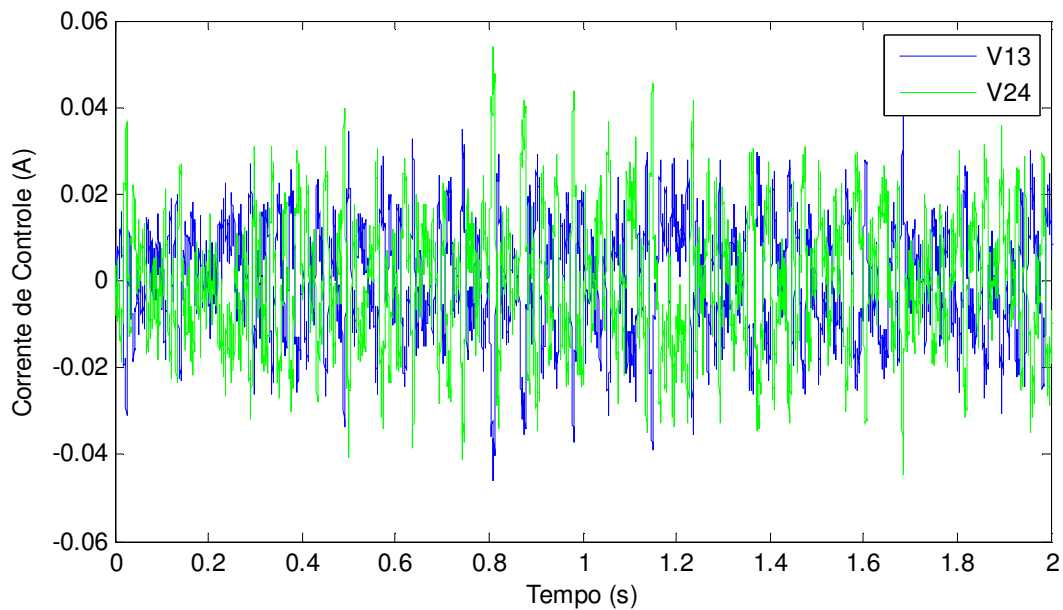
Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 45 - Resposta do rotor rígido ao ruído



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 46 - Corrente de controle devido ao ruído no rotor rígido

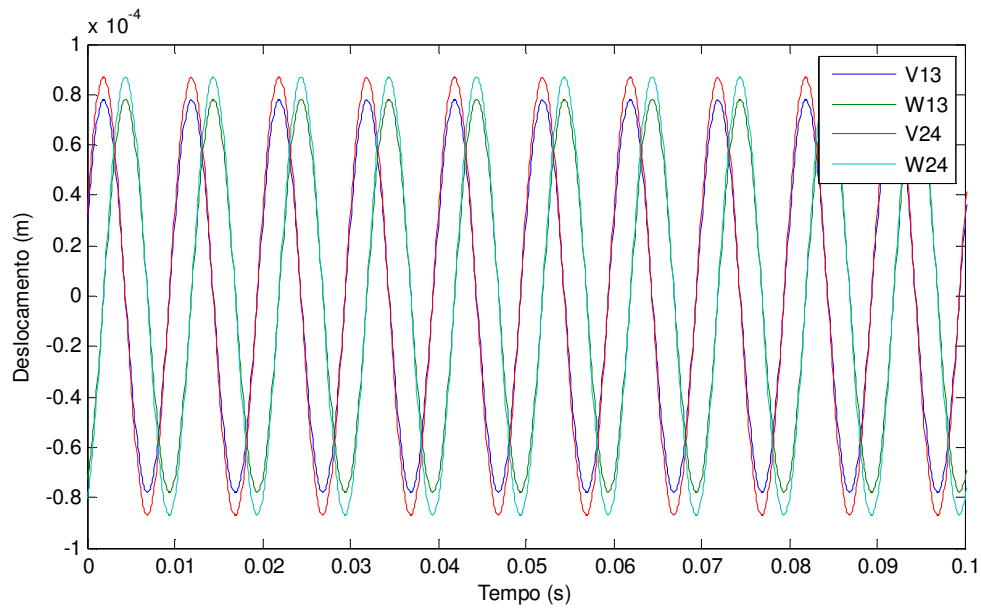


Fonte: Elaboração do próprio autor

4.2.4.3 REGIME PERMANENTE

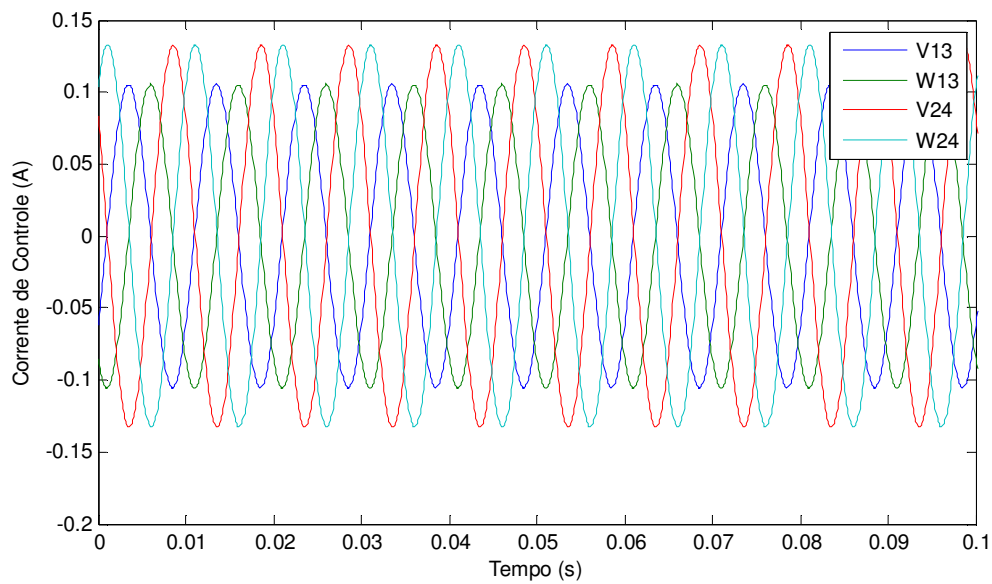
O controlador foi testado para respostas ao desbalanceamento no disco de 10^{-4} kg.m com rotor em regime permanente a 6000 rpm. A Fig. 47 apresenta o gráfico de deslocamento em função do tempo para o rotor. A Fig. 48 ilustra o comportamento da corrente de controle para as direções de controle dos dois MMAs.

Figura 47 - Deslocamento para o rotor rígido em regime permanente



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 48 - Corrente de controle para o rotor rígido em regime permanente



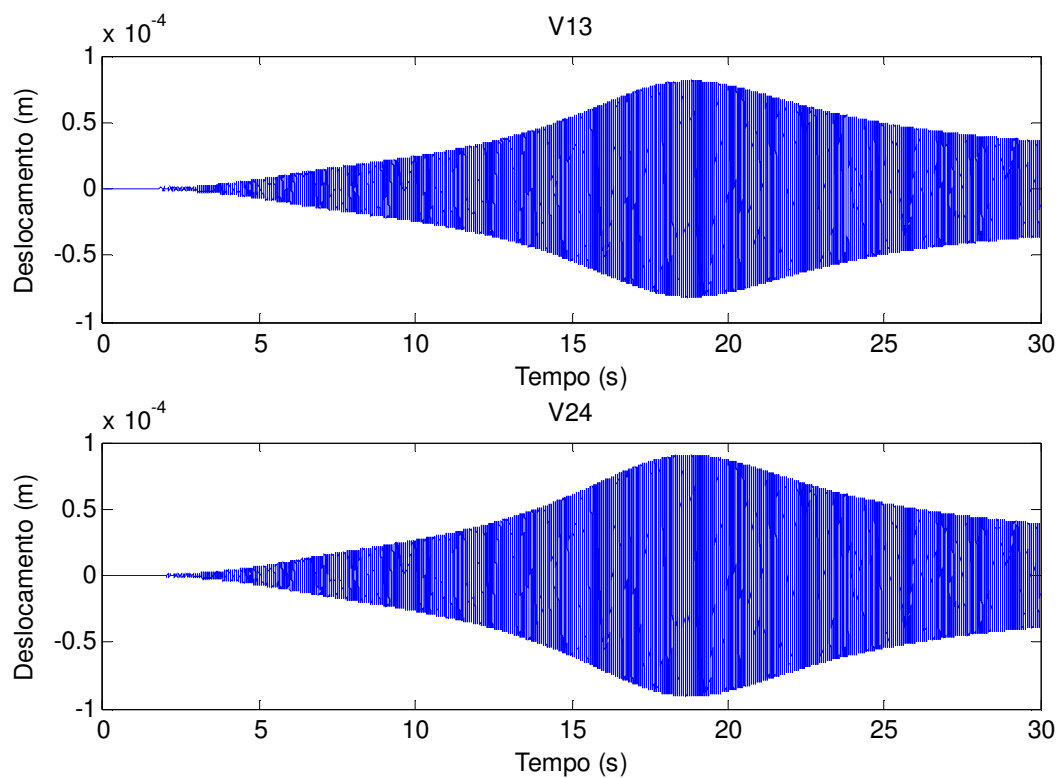
Fonte: Elaboração do próprio autor

4.2.4.4 REGIME TRANSIENTE

Para obter a resposta do rotor acelerando foi considerado um desbalanceamento no disco de 10^{-4} kg.m. A Fig. 49 ilustra o comportamento do rotor, na direção V13 e V24, sendo

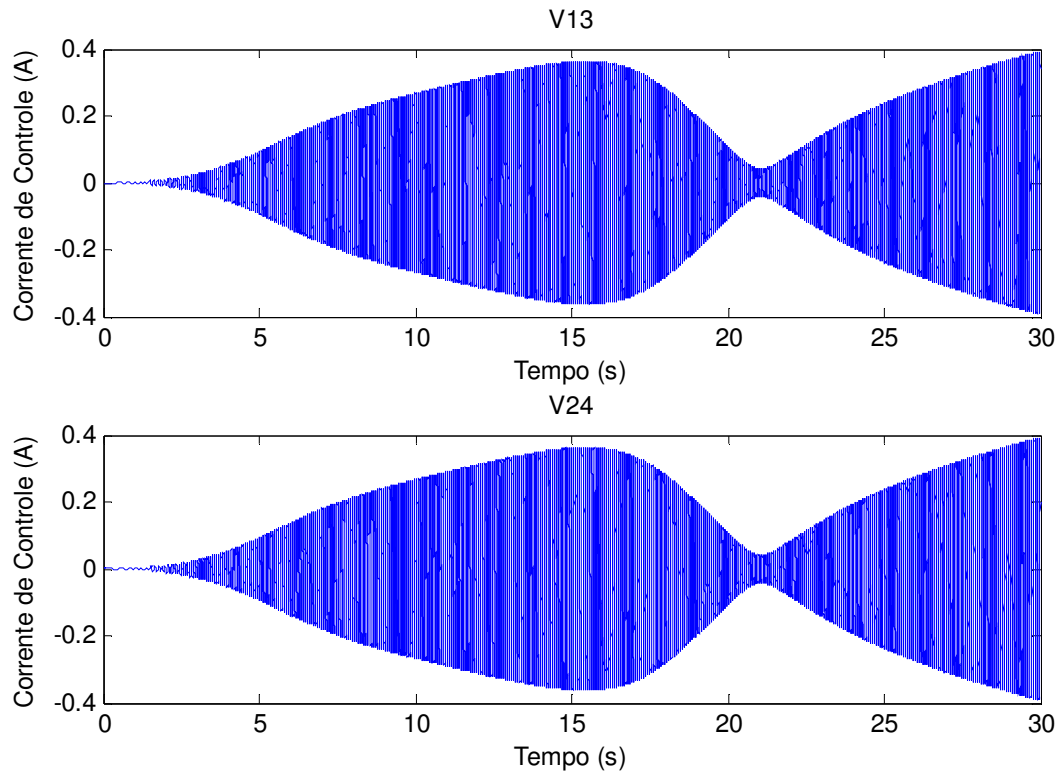
acelerado linearmente de 0 a 9000 rpm em 30 segundos. A Fig. 50 mostra a corrente elétrica de controle durante a aceleração do rotor. Nota-se, observando no tempo de 19 segundos as amplitudes são maiores, resultante da contribuição da frequência natural de 94 Hz. No entanto, não é possível identificar claramente a influência da primeira frequência natural devido ao grande amortecimento do sistema, como já era esperado de acordo com o comportamento apresentado na Fig. 43.

Figura 49 - Deslocamento para o rotor rígido acelerando



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 50 - Corrente para o rotor rígido acelerando



Fonte: Elaboração do próprio autor

4.2.5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Em geral, o primeiro controlador projetado, no domínio modal, apresentou melhor resposta quando solicitado em regime permanente e durante a aceleração do rotor. No entanto, este sistema se mostrou mais crítico quando submetido a uma excitação do tipo impulso.

Os resultados obtidos com o controlador projetado pelo segundo modelo se mostraram mais robustos quando da aplicação de uma excitação impulsiva. No entanto este sistema apresentou amplitudes maiores em regime permanente e durante a aceleração do rotor, quando comparados com os resultados obtidos com o primeiro controlador. Os controladores projetados pelos dois diferentes modelamentos apresentaram boas respostas ao ruído.

O projeto do controlador utilizando a redução pseudo-modal melhora consideravelmente o esforço computacional. No entanto, projetar o controlador no domínio modal não é uma tarefa simples. Nota-se nos resultados apresentados que os modos apresentam-se bastante amortecidos quando se utiliza o controle modal.

O projeto do controlador considerando o rotor como sendo um corpo rígido propicia um menor esforço computacional e é mais intuitivo no que tange a escolha das matrizes **Q** e **R**.

Vale ressaltar que os controladores apresentados aqui não foram os que se mostraram melhores nas simulações que antecederam a fase experimental deste trabalho, dentre os selecionados para a realização dos experimentos. No entanto estes foram os que proporcionaram melhores resultados práticos. Isso por consequência da influência de outros elementos/equipamentos característicos do sistema real.

5 PARTE EXPERIMENTAL

Neste capítulo serão apresentadas as características da bancada utilizada nos experimentos, bem como os resultados obtidos. Foram obtidos os resultados considerando dois modelos diferentes para o projeto do controlador, o primeiro considerando o rotor flexível e o segundo considerando o rotor rígido. Em ambos os casos foi utilizado a técnica de controle LQR. Foram realizados testes com diferentes tipos de excitação no rotor: impulso, ruído, regime permanente e aceleração do rotor. Alguns resultados obtidos a partir das técnicas de controle implementadas ainda foram comparadas com o controle realizado pelo módulo de controle da SKF que utiliza controlador PID.

5.1 A BANCADA

A bancada adquirida com recursos do projeto INCT é constituída de uma base de aço sobre a qual são fixados os mancais magnéticos ativos utilizados na levitação do rotor. Os dois mancais magnéticos possuem, cada um, quatro sensores de posição (que geram informação aos pares, para cada direção de controle) e oito enrolamentos responsáveis pela indução do campo eletromagnético (dois enrolamentos em cada sapata), tal como a Fig. 1. Em cada MMA existe um mancal do tipo rolamento com a função de proteger o sistema em caso de perda de levitação ou qualquer outro motivo que eventualmente possa danificar o sistema. Existe uma pequena folga nestes rolamentos que permite que o rotor seja levantado em seu interior, conforme pode ser visualizado na Fig. 52. Quando todo o sistema de controle encontra-se desligado o rotor permanece apoiado por estes mancais passivos, e quando o sistema de controle é ativado o rotor levita no interior. Um motor, também fixado na base, é acoplado ao rotor e responsável por fornecer o torque de acionamento. Este motor pode entrar em funcionamento somente se o rotor estiver levitando. A Fig. 51 apresenta a configuração descrita.

Figura 51 - Bancada contendo mancais magnéticos, eixo e rotor com acionamento



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 52 - Folga de operação e mancal passivo de auxílio em caso de perda de levitação



Fonte: Elaboração do próprio autor

Juntamente com a bancada foi adquirido um módulo controlador, denominado MB-Controller, modelo MB340g4-ERX e uma placa de conectores do tipo BNC, denominada MB-Research, ambos apresentados na Fig 53. Acompanhando o módulo controlador tem-se o software MBSCOPE que possibilita, através da comunicação com um microcomputador, uma melhor interface com o usuário.

Figura 53 - Módulo controlador MB340g4-ERX e placa MB-Research (acima)



Fonte: Elaboração do próprio autor

O módulo MB340g4-ERX é capaz de controlar o rotor utilizando um controlador tipo PID sem a necessidade de estar conectado a um microcomputador. O mesmo pode ser utilizado para comunicação com um microcomputador e ser gerenciado através do software MBScope, utilizado para alterar parâmetros do controlador e visualizar as variáveis do sistema em tempo real.

A placa MB-Research possibilita a comunicação com sistemas de controle externos. Através desta é possível obter o sinal dos sensores de posição, corrente no mancal (topo ou base) e o sinal de rotação. Também é possível injetar uma corrente de perturbação ou controle em uma dada direção de controle, seja no topo ou base.

Para a realização do controle externo, via MB-Research, foi utilizada uma placa Dspace modelo DS1103 conectada a um computador Pentium III, conforme apresentados na

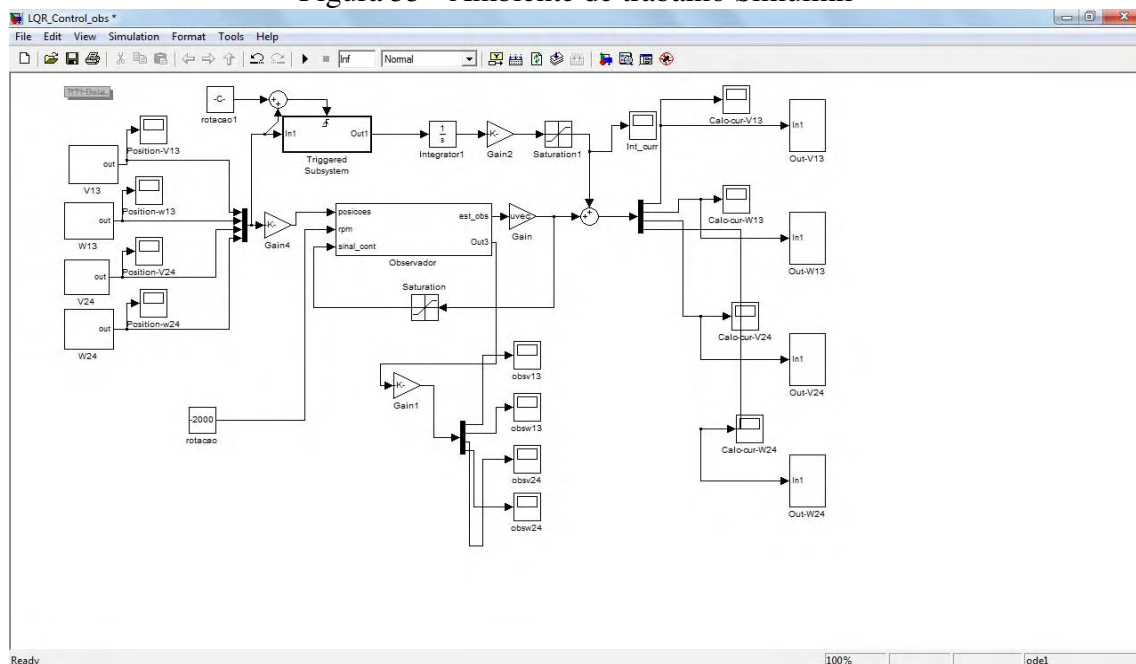
Fig. 54. O controle foi projetado no ambiente Matlab-Simulink, conforme Fig. 55. O arquivo do simulink foi compilado e carregado no programa Controldesk para realização do controle via Dspace e aquisição de sinais.

Figura 54 - Placa DSpace e microcomputador utilizado



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 55 - Ambiente de trabalho Simulink



Fonte: Elaboração do próprio autor

A Fig. 56 ilustra o fluxograma de controle original do sistema fornecido pela SKF e as conexões realizadas com a placa Dspace (controle externo). No experimento foi utilizado um microcomputador dedicado ao MB340g4-ERX para habilitar o sistema sempre que um teste era realizado. Este módulo opera em malha fechada com um controlador PID. Para permitir que um sistema de controle externo seja aplicado é necessário zerar o ganho total do controlador PID (abrir a malha) e conectar a placa MB-Research ao controlador externo (Dspace, por exemplo).

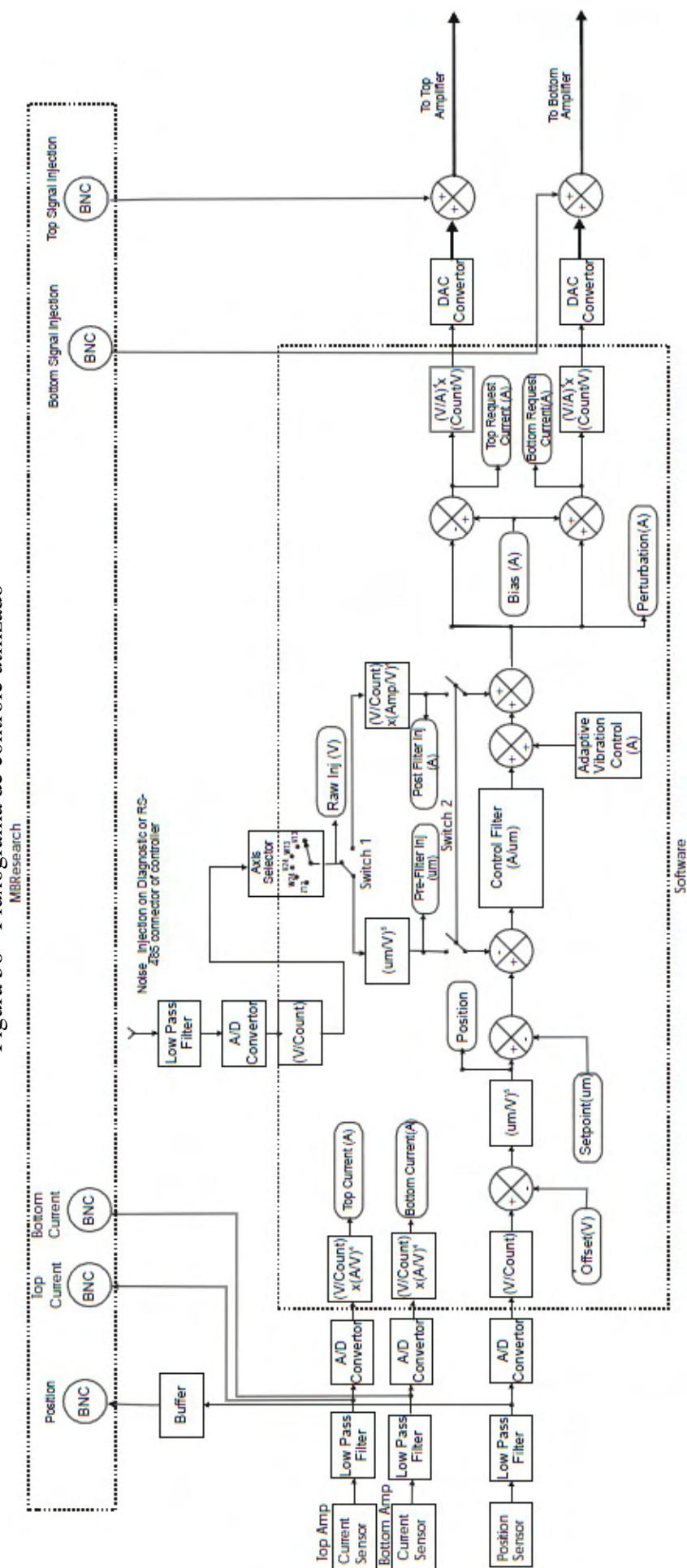
No fluxograma da Fig. 56 notam-se duas estruturas diferentes demarcadas por linhas pontilhadas. Uma delas se refere ao controlador SKF e a outra se refere a placa MB-Research. Existem duas maneiras de realizar o controle com uma malha externa neste sistema. A primeira é utilizar a injeção de sinal via conector RS-485 (sinal digital) e abrir a malha do controlador PID zerando o ganho total deste. Neste caso, o valor da corrente (previamente calculada via controlador externo) é inserido via conector RS-485 e automaticamente somada a corrente de *bias*. Posteriormente, o valor resultante desta soma é convertido em tensão para ser enviado ao amplificador de corrente. A segunda forma de aplicar uma malha de controle externa no sistema é através da placa MB-Research. Neste caso a malha do controlador PID é aberta zerando o ganho total do controlador SKF e o sinal de controle, em Voltz, é injetado via conector analógico (do tipo BNC) após o conversor A/D do controlador SKF. Este sinal é somado ao sinal da corrente de *bias* para seguir até o amplificador de corrente. Nesta

configuração de montagem, para obter corretamente a sinal injetado (em Voltz), é necessário aplicar o valor da sensibilidade de corrente no valor da corrente de controle obtida pelo controlador da malha externa.

Para a realização dos experimentos foi construída uma malha de controle externo via MB-Research utilizando, na placa Dspace, quatro canais de entrada para a leitura dos sinais de posição em cada direção de controle dos dois mancais e oito canais de saída para injeção do sinal da corrente de controle no topo e na base de cada sapata do mancal.

O sinal dos sensores de posição passa por um filtro passa-baixa e é disponibilizado na placa MB-Research, conectada a Dspace. O sinal de posição, em Volts, é recebido pela Dspace e, através da sensibilidade de cada sensor é convertido internamente em posição (m). O algoritmo de controle gera um valor de corrente que é convertido (através de um fator sensibilidade de corrente) pela Dspace em duas tensões de saída de sinais opostos. Estes sinais, injetados na placa MB-Research, são referentes às correntes de topo e base a serem injetadas em cada direção de controle no MMA. O sinal injetado na MB-Research é somado ao sinal da corrente de *bias* e então enviado ao amplificador contido no módulo MB-Controller, que converte o sinal recebido em corrente para cada sapata do MMA. Ao carregar o modelo no Controldesk, o controle externo já inicia a leitura da posição dos sensores de posição e envia o sinal de controle, no entanto o eixo começa a levitar somente quando o módulo MB-Controller é habilitado via MB-Scope. Isto acontece porque é este módulo que provê a corrente de bias e habilita ou não a entrada do sinal externo. Além disso, no sistema SKF existe um sistema de proteção que desabilita automaticamente o funcionamento do rotor caso as amplitudes de vibração atinjam um determinado valor, denominado *shutdown system*.

Figura 56 - Fluxograma de controle utilizado



Fonte: Manual do Fabricante

5.2 RESULTADOS – PRIMEIRO CONTROLADOR

O controlador e o observador implementados no experimento são o mesmos apresentados nas simulações numéricas. No projeto deste controlador se utilizou o modelo reduzido a partir do método de redução pseudo-modal com os seis primeiros modos de vibrar do rotor, sendo dois modos de corpo rígido e o primeiro modo de flexão do rotor, para cada direção. Durante o experimento constatou-se que não era possível utilizar mais de seis modos por limitação de processamento.

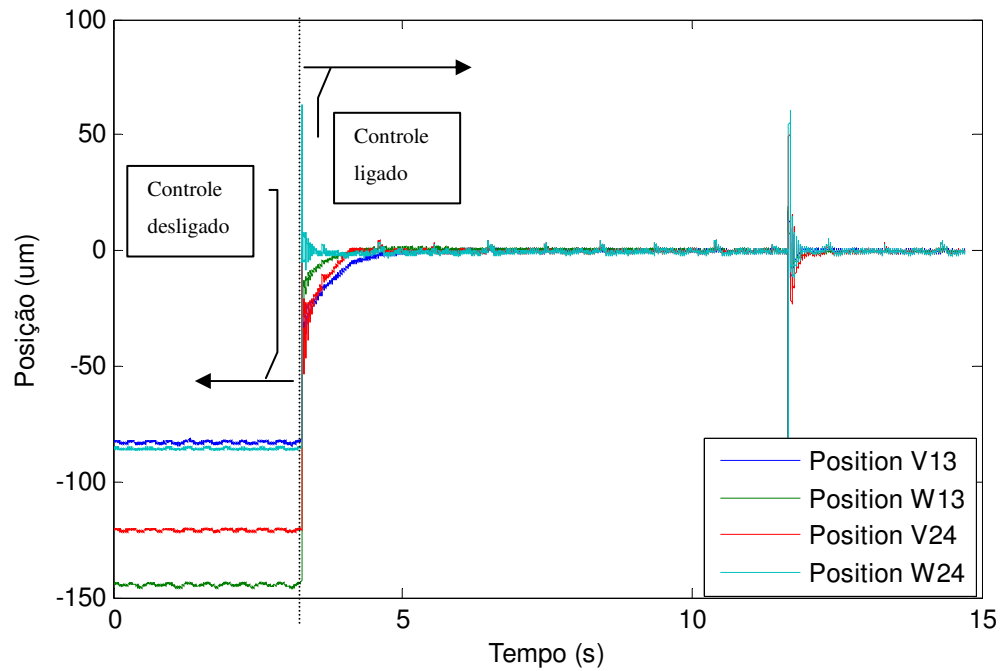
Antes de iniciar o controle o rotor se encontra apoiado nos mancais passivos de auxílio. Para iniciar o controle é necessário que o sistema de controle externo já esteja funcionando (enviando a corrente de controle necessária). A levitação só ocorre quando a corrente de *bias* é ativada no módulo MBController e a corrente enviada pelo controle externo é então utilizada por este módulo para gerar a corrente nos enrolamentos dos mancais. O tempo entre o início do funcionamento do controle externo e a ativação do controle (levitação) dificulta o uso de integradores. Até que o módulo MBController não seja ativado o controlador vai acumulando o erro de referência, pois o rotor ainda está na parte inferior do MMA. Quando o controle é ativado, o valor acumulado pelo integrador é muito grande e o controle externo informa uma corrente de controle altíssima que parte o sistema de forma descontrolada, gerando um forte impacto do rotor na parte superior dos mancais de auxílio. Para amenizar este problema a parcela de corrente calculada pelo integrador foi limitada a um valor de 0,5 A e foi colocado um trigger que inicia o integrador quando a posição do rotor fica acima de -40 μm . O uso do integrador é de extrema importância para manter o rotor no centro dos MMAs.

5.2.1 RESPOSTA AO IMPULSO

A Fig. 57 apresenta os deslocamentos do rotor antes de iniciar o controle (levitação) do mesmo em torno de 3 s e também a resposta ao impulso por volta de 11,7 s. Mesmo quando o rotor encontra-se em repouso, para um tempo menor que 3 s, percebe-se que existe um ruído presente no sistema. Este ruído é oriundo da própria placa DSpace e ocorre mesmo quando os cabos estão desconectados dos terminais. A Fig. 58 apresenta a composição de frequências

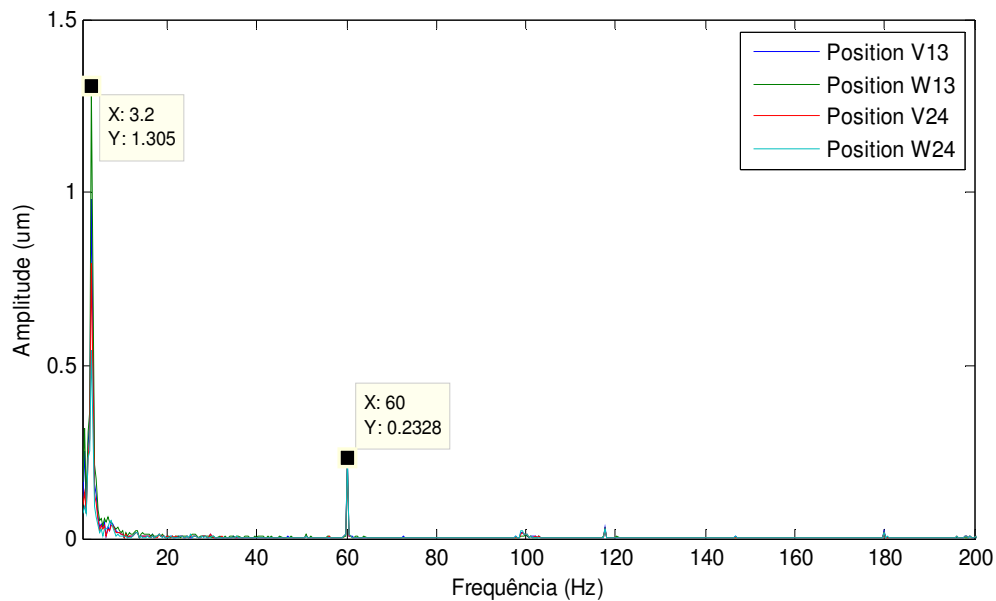
deste sinal. Percebe-se que, além de significativas amplitudes de baixa frequência, existe a influência de sinal da rede elétrica na frequência de 60 Hz.

Figura 57 - Resposta experimental devido ao impulso no rotor - 1º controlador



Fonte: Elaboração do próprio autor

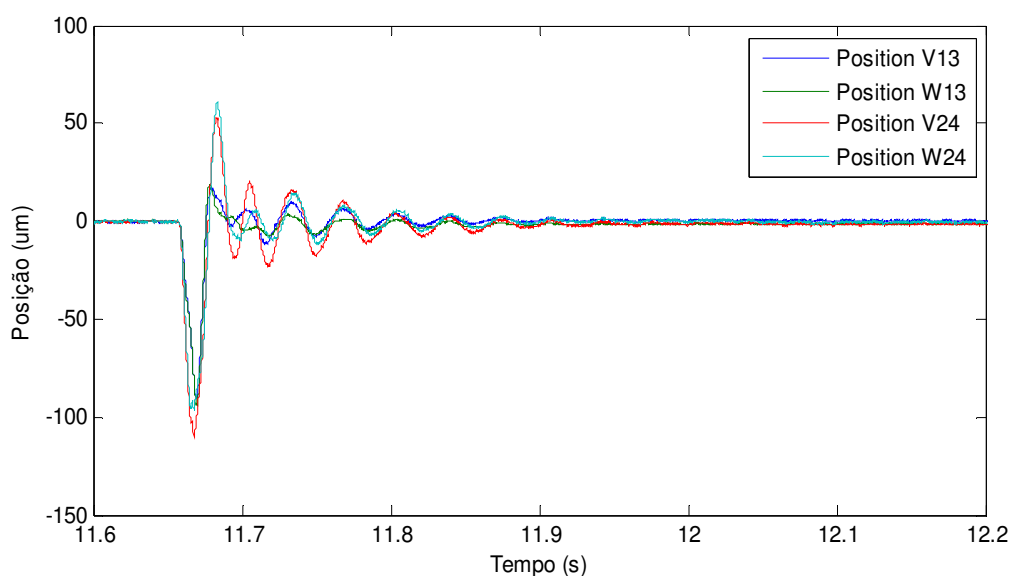
Figura 58 - Transformada de Fourier do sinal de aquisição da Dspace, antes de iniciar o controle



Fonte: Elaboração do próprio autor

Com o rotor levitando e velocidade de rotação igual a zero, foi introduzido nas correntes de controle dos dois mancais um impulso com corrente de 0,15 A com duração de 0,01 s. A Fig.59 apresenta a resposta ao impulso ampliada. Nota-se que o controlador estabilizou rapidamente o rotor. No entanto, os valores de deslocamento quase atingiram o valor do *air gap* entre o rotor e os mancais passivos.

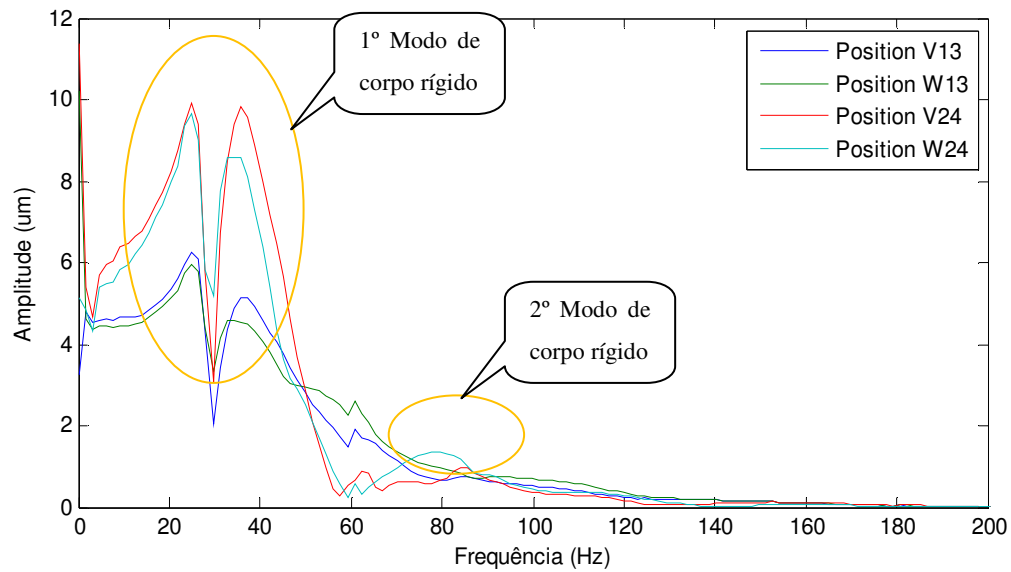
Figura 59 - Ampliação da resposta devido ao impulso no rotor - 1º controlador



Fonte: Elaboração do próprio autor

A Fig. 60 apresenta a transformada de Fourier da resposta ao impulso. Devido a variações nos parâmetros de rigidez de corrente e rigidez de posição, observados durante a realização dos testes, as frequências são diferentes em cada direção. Nota-se que os primeiros modos de corpo rígido das duas direções se apresentam nas frequências de 25 e 38 Hz, aproximadamente. Enquanto que o segundo modo de corpo rígido é percebido em torno de 80 e 90 Hz. Não é observado a presença do primeiro modo de flexão.

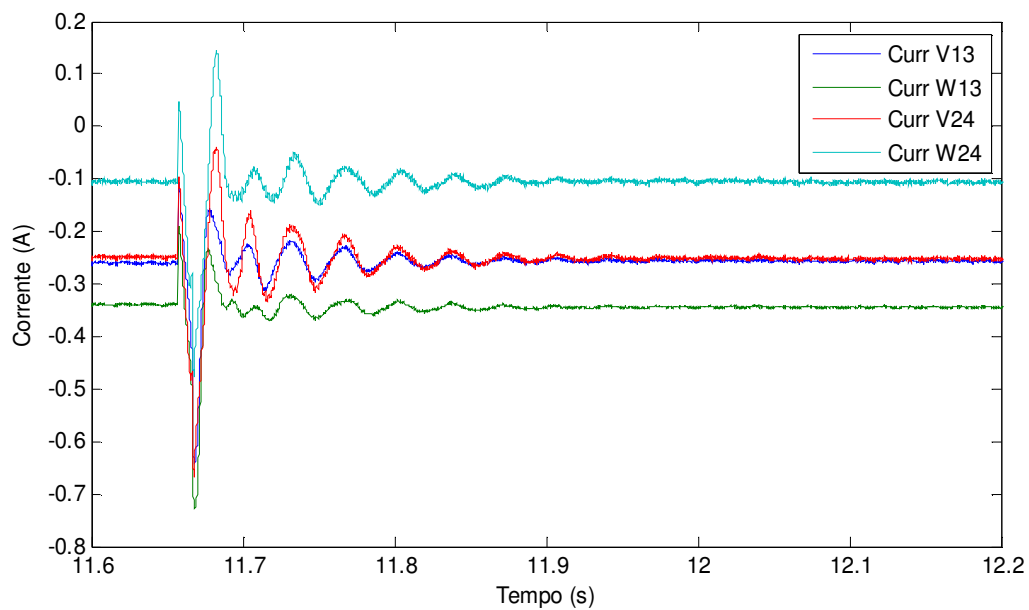
Figura 60 - Transformada de Fourier da resposta ao impulso no rotor - 1º controlador



Fonte: Elaboração do próprio autor

A Fig. 61 apresenta o comportamento da corrente de controle. Nota-se que os valores de corrente encontram-se abaixo de 1 A, sem o risco de atingir a corrente de saturação em nenhum dos dois MMAs.

Figura 61 - Corrente elétrica de controle devido ao impulso no rotor - 1º controlador

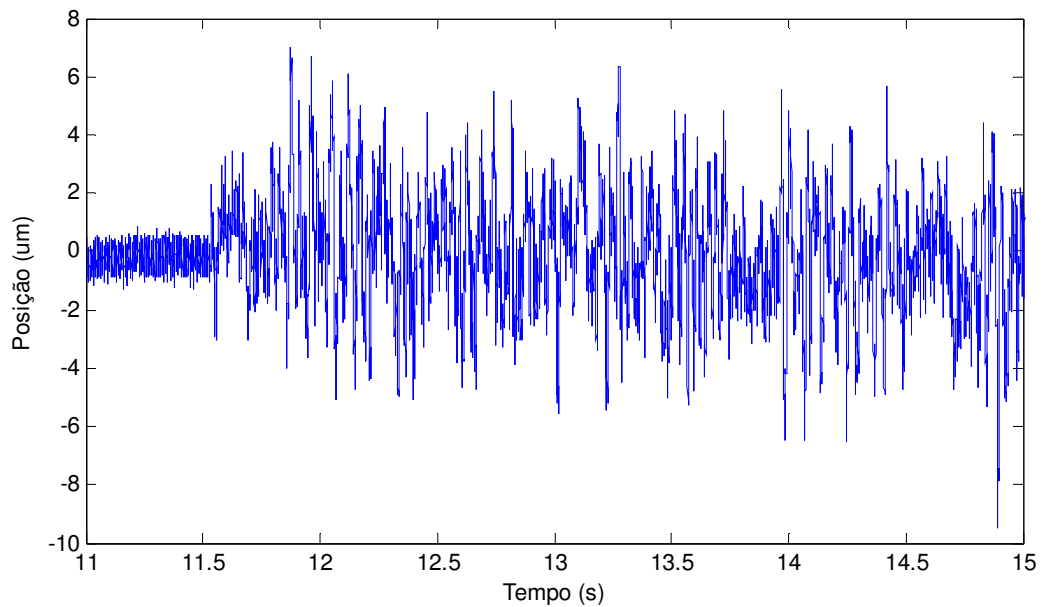


Fonte: Elaboração do próprio autor

5.2.2 RESPOSTA AO RUÍDO

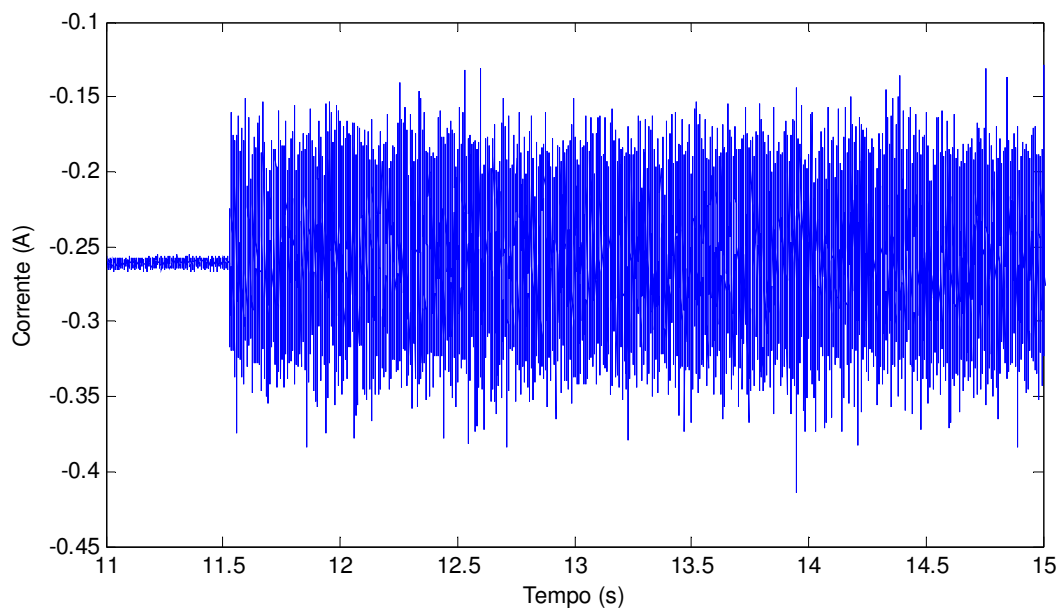
Com o rotor levantado e sem rotação um ruído branco de covariância $1e-7$ foi adicionado as correntes de controle enviadas aos dois MMAs para avaliar o comportamento do sistema. Verifica-se, a partir da Fig. 62 que o sistema de controle responde satisfatoriamente. A Fig. 63 apresenta a corrente de controle, que é a soma da corrente de saída de controlador e o ruído inserido.

Figura 62 - Resposta devido a excitação do tipo ruído branco - 1º controlador



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 63 - Corrente de excitação devido ao ruído - 1º controlador

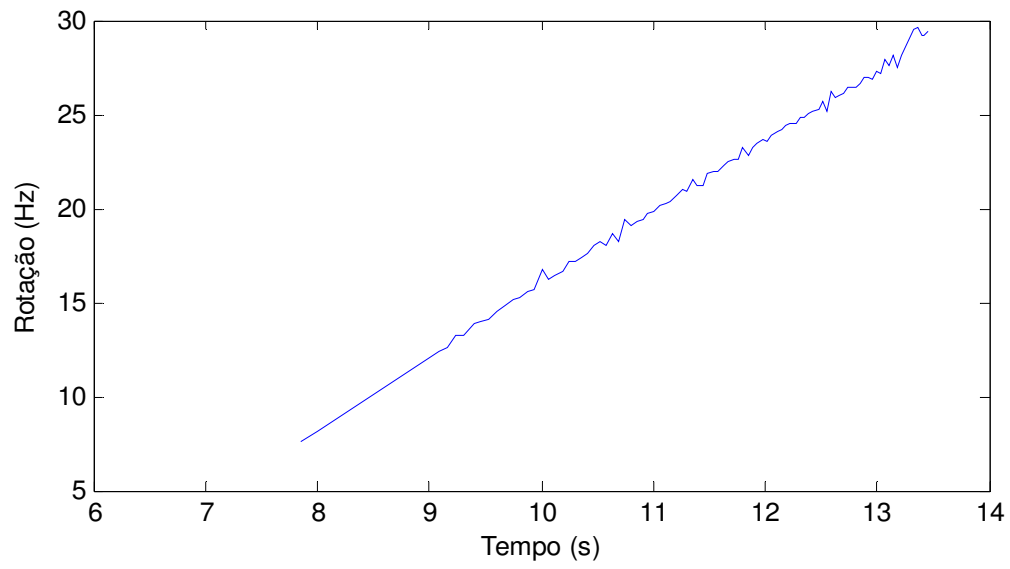


Fonte: Elaboração do próprio autor

5.2.3 ACELERAÇÃO DO ROTOR

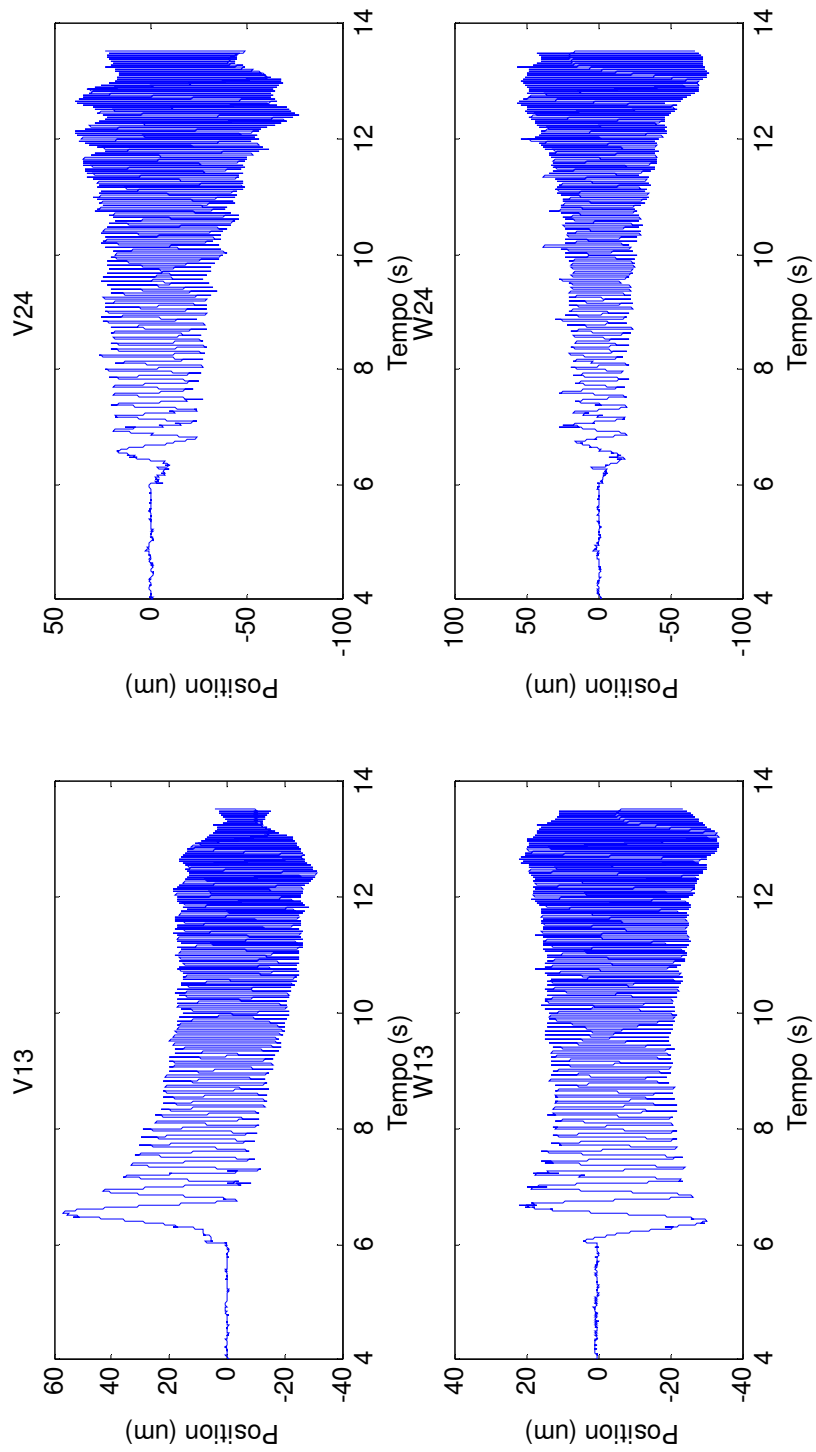
Após levitar o rotor e aguardar a estabilização do mesmo, foi inserido no software MBScope o comando de aceleração do rotor até a frequência de 100 Hz. A Fig. 64 apresenta a rotação do rotor em função do tempo. No tempo de 13 s, quando a rotação encontrava-se por volta de 1700 rpm (28 Hz), o deslocamento W24 atingiu o limite de intertravamento (shutdown) do sistema da SKF, que é de 85 μm . A partir deste instante o motor de acionamento do rotor foi desativado e o rotor continuou levitado até parar de girar. Este procedimento é parte integrante do intertravamento presente no módulo MBControler. A Fig. 65 apresenta os deslocamentos do rotor em cada direção de controle. Notam-se elevados valores de deslocamento no segundo MMA, principalmente na direção W24, onde valor limite de limite de intertravamento foi atingido, impedindo que o sistema alcançasse a rotação de operação desejada (6000 rpm). A Fig. 66 ilustra o comportamento da corrente de controle em cada direção. Verifica-se que os valores de corrente se mantiveram baixos, não ultrapassando o valor de 0,6 A.

Figura 64 - Rotação do rotor durante teste de aceleração do rotor - 1º controlador



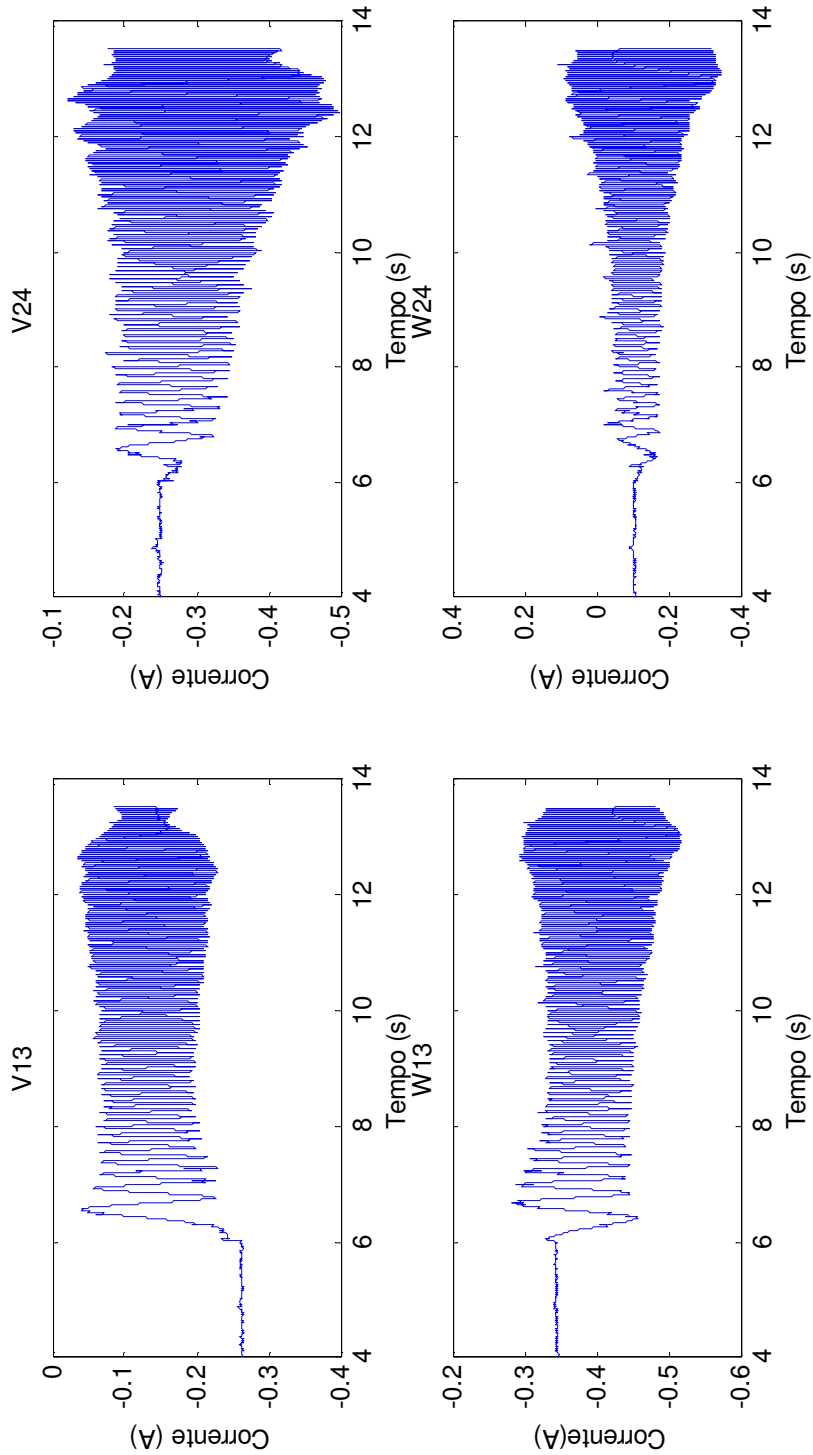
Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 65 - Deslocamentos durante a aceleração do rotor - 1º controlador



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 66 - Corrente de controle durante aceleração do rotor – 1º controlador



Fonte: Elaboração do próprio autor

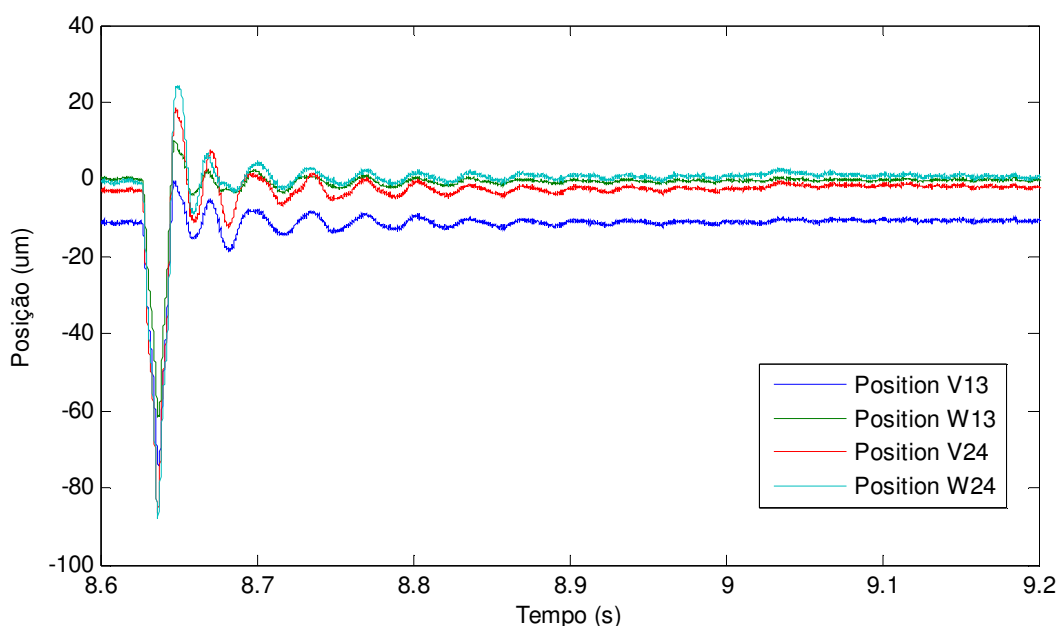
5.3 RESULTADOS – SEGUNDO CONTROLADOR

O controlador e o observador implementados no experimento são o mesmos apresentados nas simulações numéricas. No projeto deste controlador utilizou-se o modelo de rotor rígido, conforme a formulação apresentada no Anexo B.

5.3.1 RESPOSTA AO IMPULSO

Com o rotor levitando e velocidade de rotação igual a zero, foi introduzido nas correntes de controle dos dois mancais um impulso de corrente de 0,15 A com duração 0,01 s. A Fig. 67 apresenta a resposta ao impulso. Percebe-se que este sistema apresentou um valor de deslocamento máximo inferior ao controlador testado anteriormente.

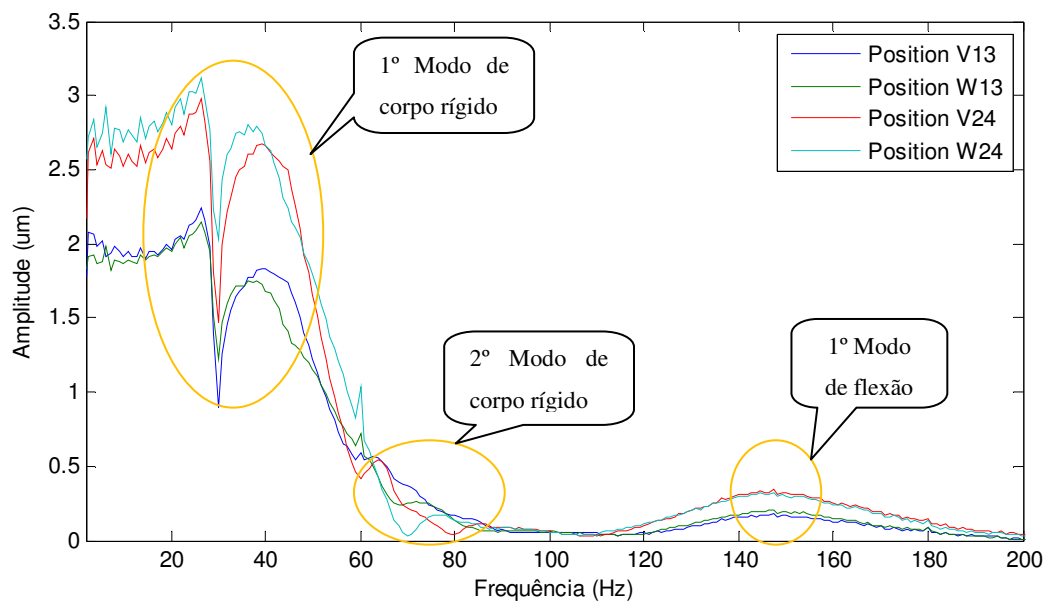
Figura 67 - Resposta ao impulso - 2º controlador



Fonte: Elaboração do próprio autor

Na Fig. 68 a resposta ao impulso é apresentada no domínio da frequência. Nota-se que os primeiros modos de corpo rígido das duas direções se apresentam nas frequências de 25 e 40 Hz, aproximadamente. Enquanto que o segundo modo de corpo rígido é percebido em torno de 75 e 90 Hz. O primeiro modo de flexão do rotor encontra-se por volta de 150 Hz nas duas direções.

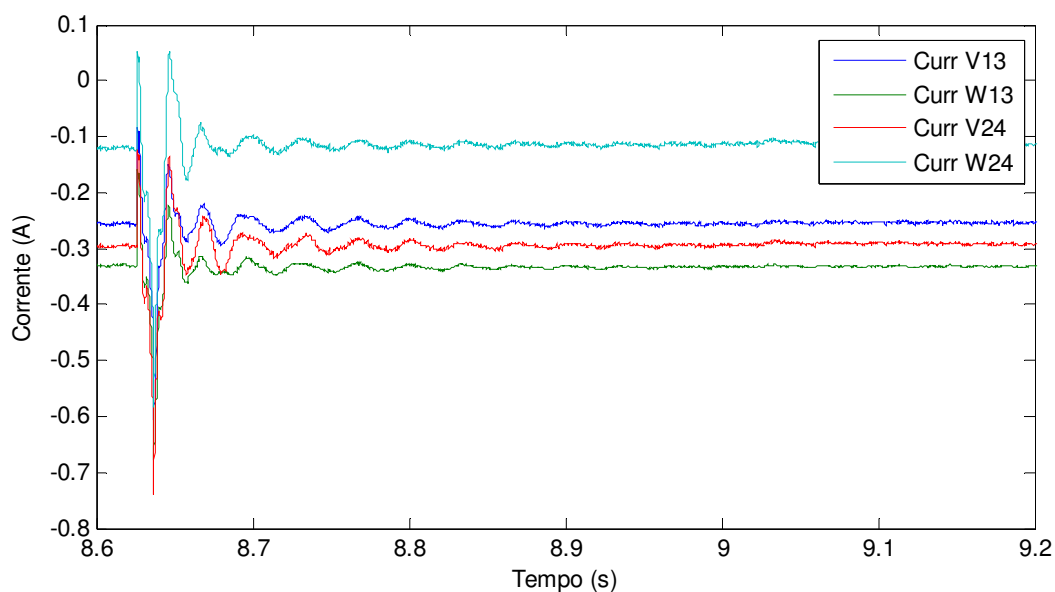
Figura 68 - Transformada de Fourier da resposta ao impulso - 2º controlador



Fonte: Elaboração do próprio autor

A Fig. 69 mostra a corrente elétrica durante o impulso. Percebe-se que os níveis de corrente para este controlador são bem semelhantes aos do primeiro controlador, no entanto os níveis de deslocamento são menores.

Figura 69 - Corrente elétrica de controle devido ao impulso no rotor - 2º controlador

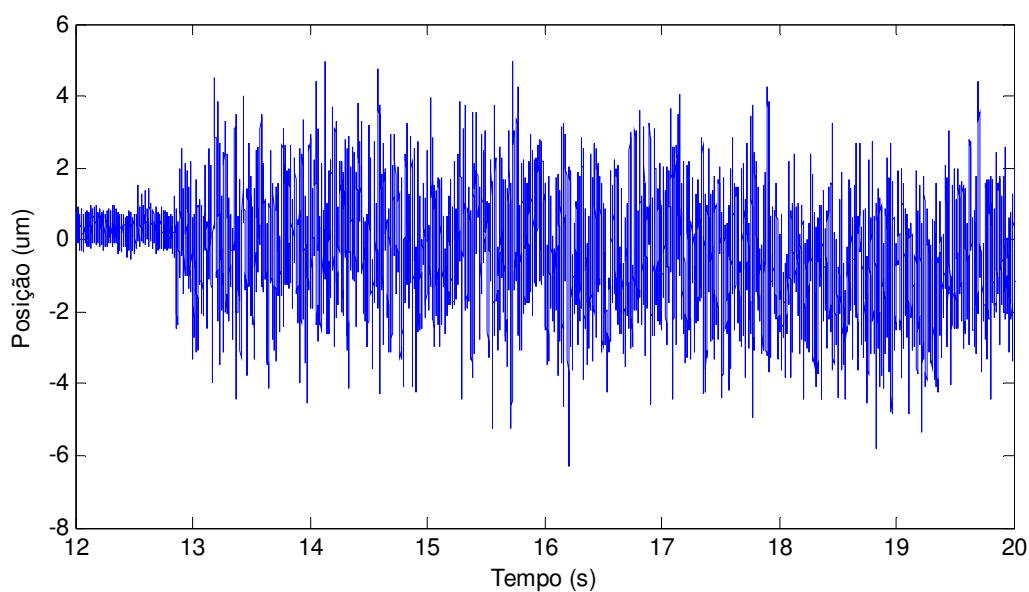


Fonte: Elaboração do próprio autor

5.3.2 RESPOSTA AO RUÍDO

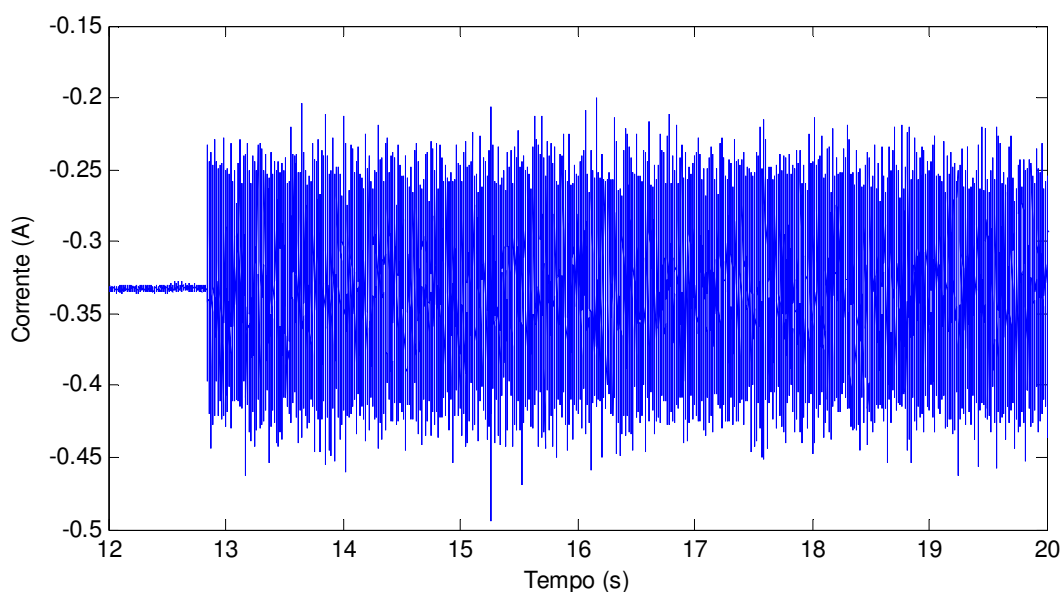
Com o rotor levantado e sem rotação um ruído branco de covariância $1e-7$ foi adicionado as correntes de controle enviadas aos dois MMAs para avaliar o comportamento do sistema. Verifica-se, a partir da Fig. 70, que o sistema de controle responde satisfatoriamente. A Fig. 71 apresenta a corrente de controle, que é a soma da corrente de saída de controlador e o ruído inserido.

Figura 70 - Resposta devido a excitação do tipo ruído branco - 2º controlador



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 71 - Corrente de excitação devido ao ruído - 2º controlador



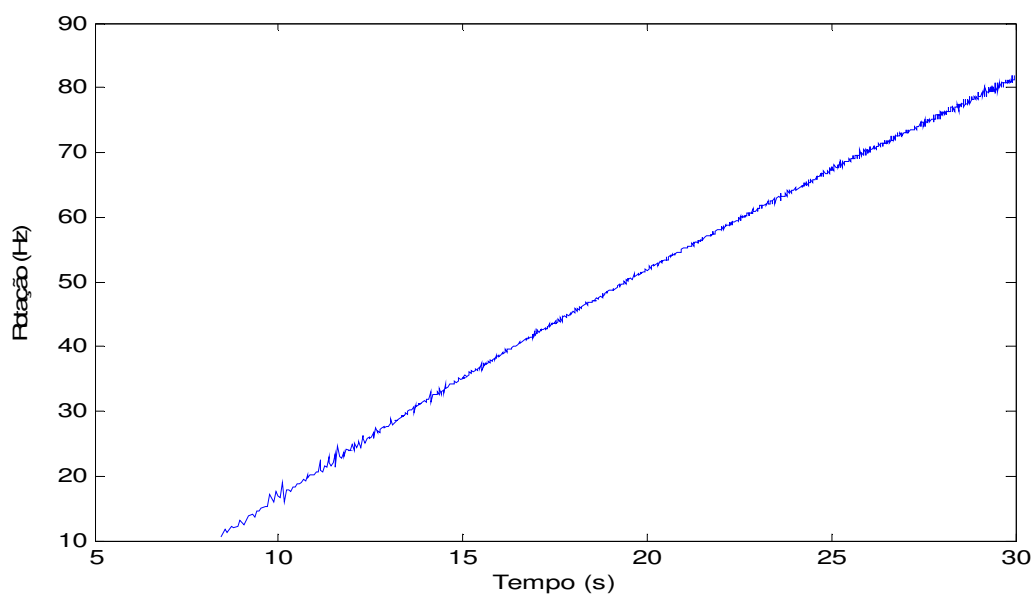
Fonte: Elaboração do próprio autor

5.3.3 ACELERAÇÃO DO ROTOR

Após levitar o rotor e aguardar a estabilização do mesmo, foi inserido no software MBScope o comando de aceleração do rotor. A Fig. 72 apresenta a rotação do rotor em função do tempo. A Fig. 73 apresenta os deslocamentos do rotor durante a aceleração do rotor. Analisando conjuntamente a Fig. 72 e Fig. 73 nota-se que as maiores amplitudes estão relacionadas as frequência identificadas na resposta ao impulso. A rotação no rotor não foi elevada até alcançar o primeiro modo de flexão por conta da proximidade do limite de rotação estipulado pelo fabricante, que é de 10000 rpm.

Na Fig. 73 é possível perceber que os valores de deslocamento não oscilam exatamente em torno de zero. Existe uma componente de baixa frequência que faz o sistema oscilar. Esta baixa frequência possivelmente é a mesma detectada no ruído da placa Dspace, conforme Fig. 58.

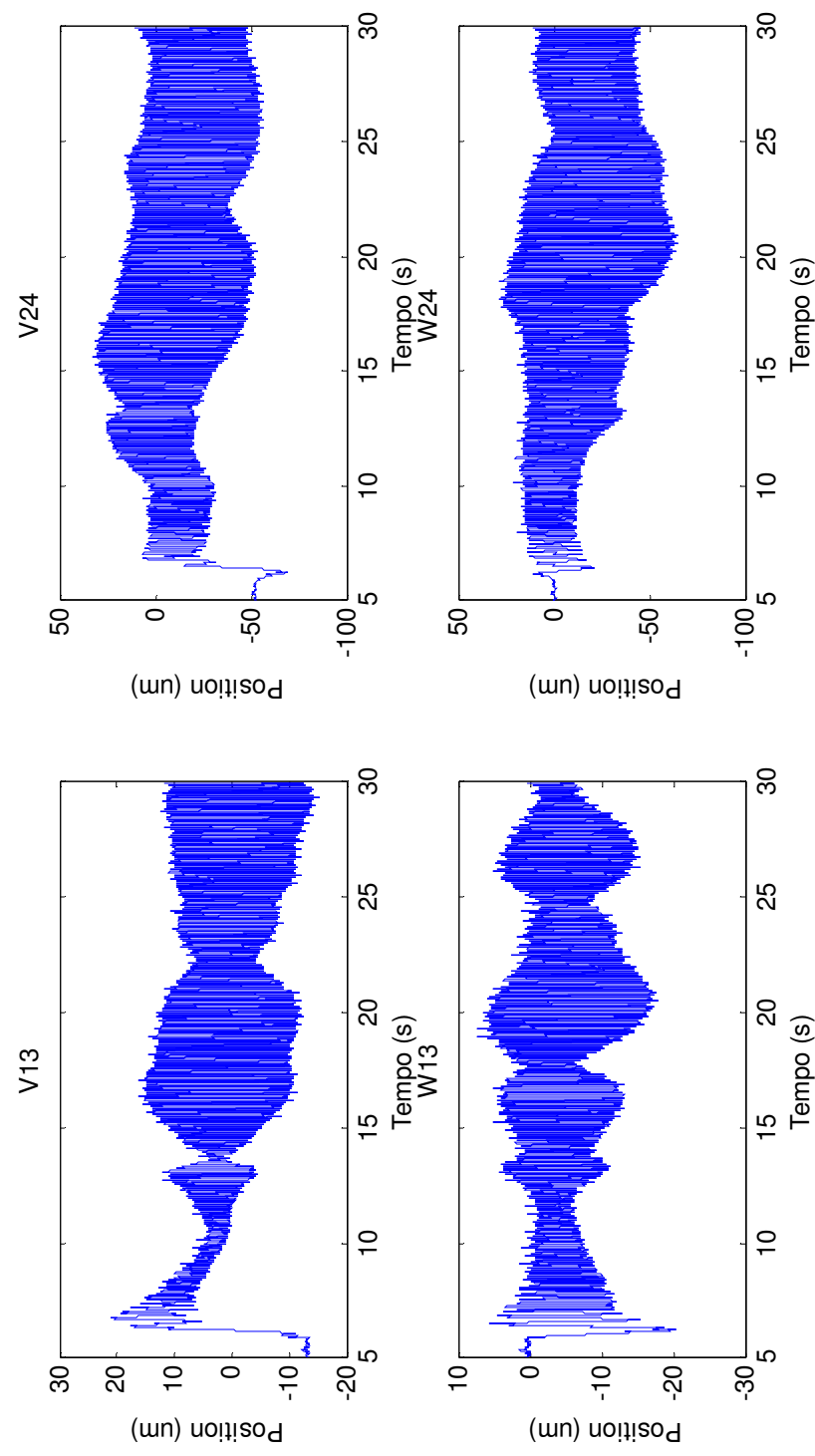
Figura 72 - Rotação do rotor durante teste de aceleração do rotor - 2º controlador



Fonte: Elaboração do próprio autor

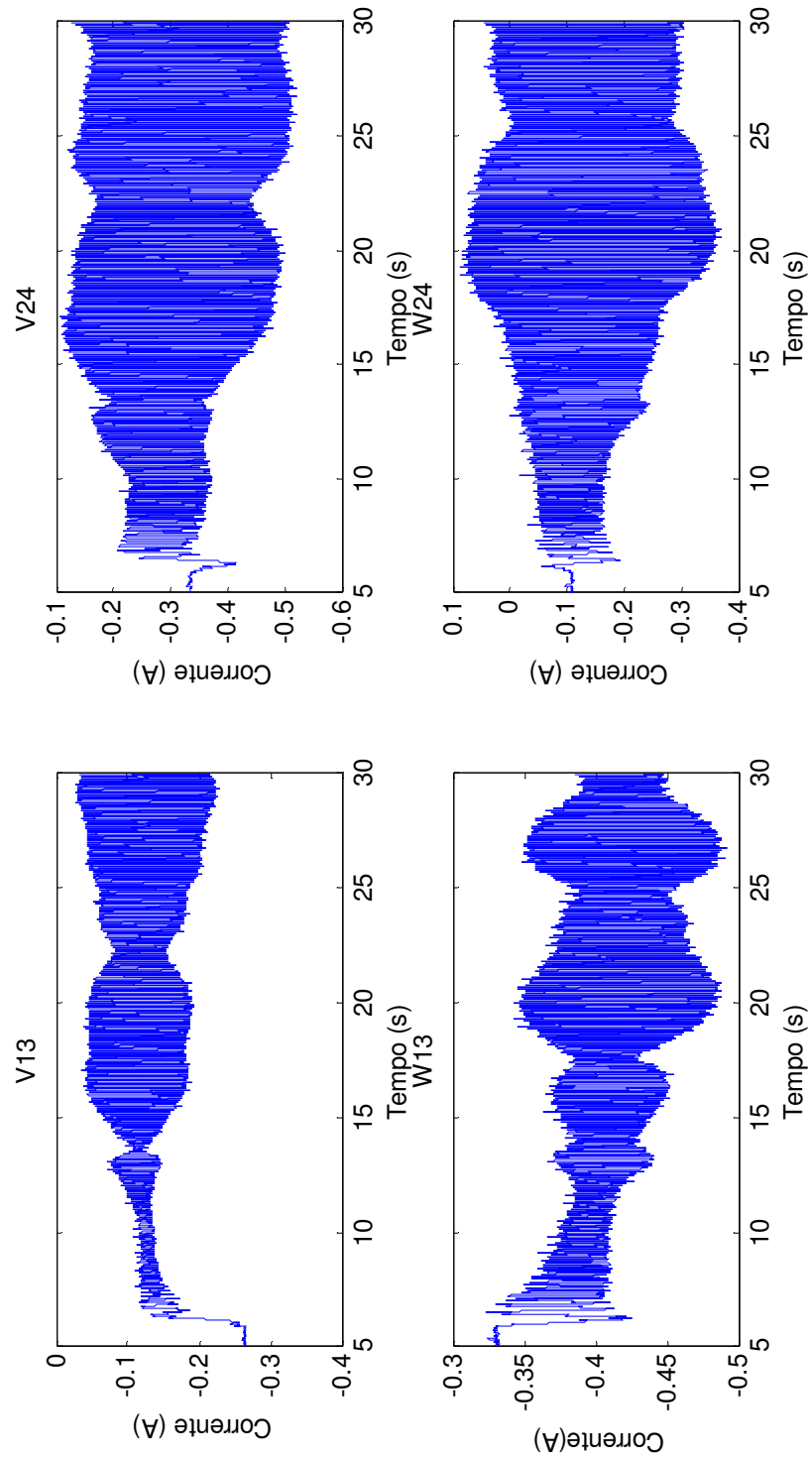
A Fig. 74 apresenta a corrente de controle durante a aceleração do rotor. Nota-se que a corrente não ultrapassou o valor de 0,5 A em nenhuma direção de controle.

Figura 73 - Deslocamentos durante a aceleração do rotor - 2º controlador



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 74 - Corrente elétrica de controle durante a aceleração do rotor - 2º controlador

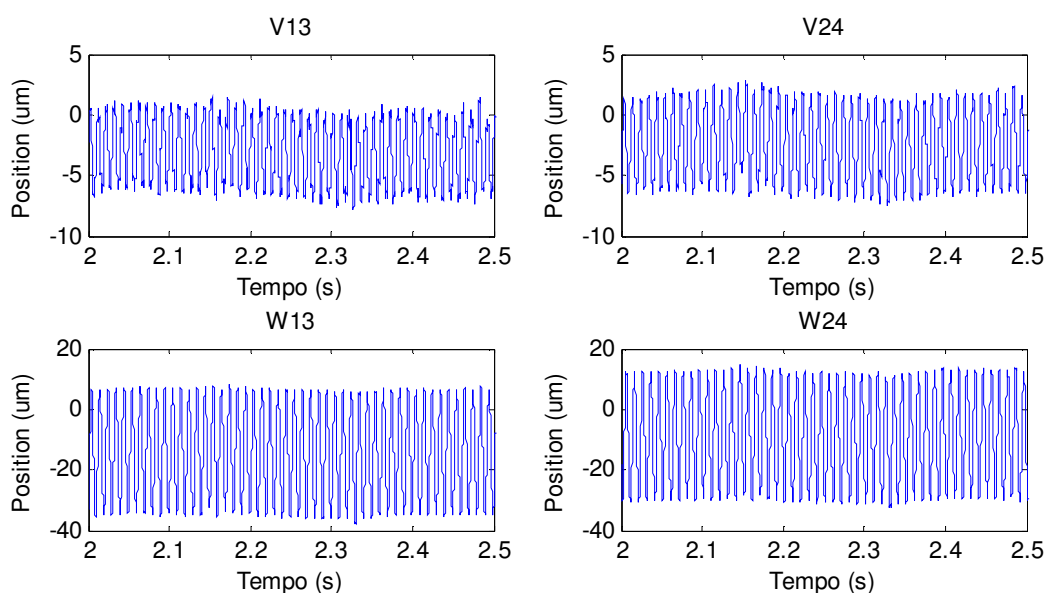


Fonte: Elaboração do próprio autor

5.3.4 REGIME PERMANENTE

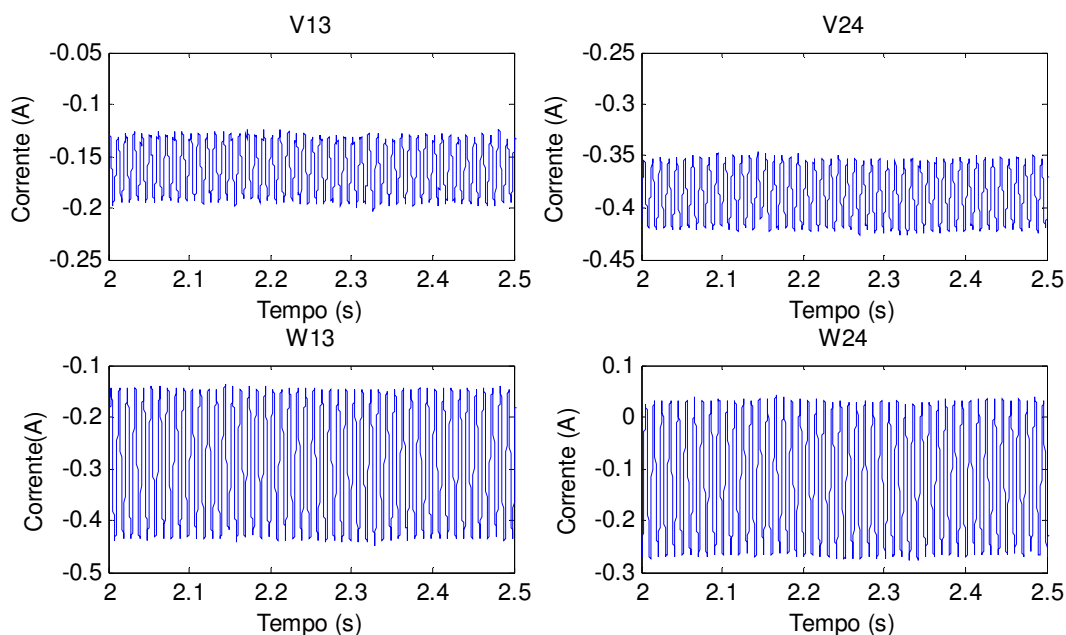
Neste teste o rotor foi colocado a operar na rotação de 6000 rpm. Fez-se então a aquisição de dados de deslocamento e corrente. A Fig. 75 apresenta os deslocamentos do rotor nas direções de controle dos dois MMAs. Nota-se bons valores de deslocamento, não ultrapassando 40 μm na direção mais crítica, W13. A Fig. 76 apresenta os valores de corrente elétrica. Estes valores não ultrapassam 0,45 A, que é um valor de corrente bem adequado considerando a rotação de operação do rotor.

Figura 75 - Deslocamentos do rotor operando a 6000 rpm – 2º controlador



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 76 - Corrente elétrica de controle para o rotor operando a 6000 rpm – 2º controlador

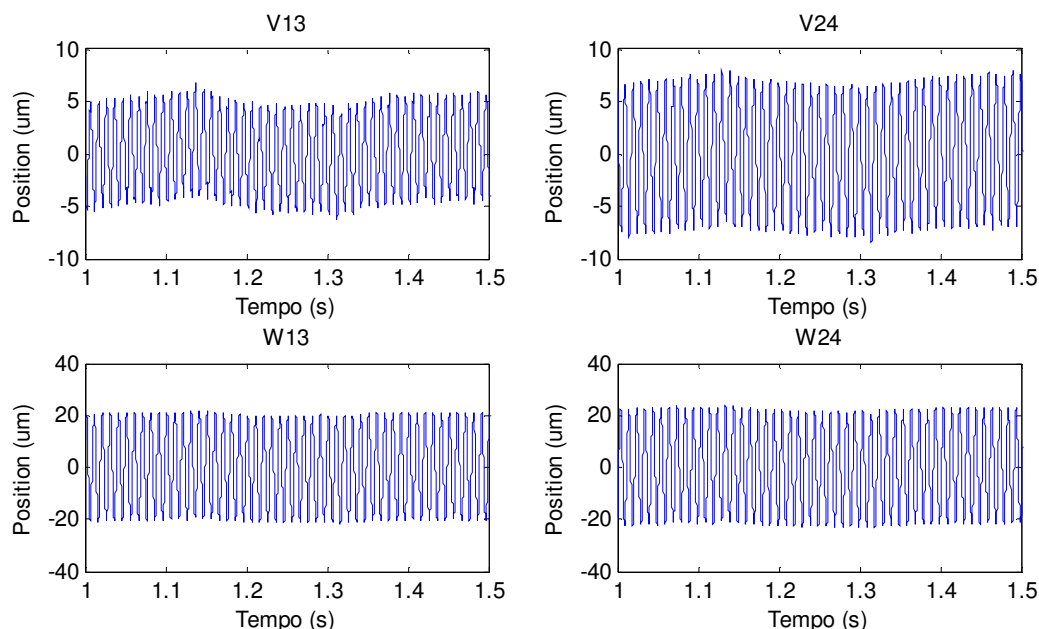


Fonte: Elaboração do próprio autor

5.3.5 COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS DO CONTROLE PID SKF

Em termos comparativos foram coletados alguns dados a partir do controlador PID executado pelo módulo MBController. É importante ressaltar que ao realizar o controle pelo sistema da SKF, a placa Dspace apenas coleta os dados, sem qualquer efeito de controle externo sobre o rotor. A Fig. 77 apresenta os deslocamentos para o rotor operando em regime permanente a 6000 rpm. Observa-se que os valores são bem semelhantes aos valores de amplitude obtidos com o segundo controlador LQR implementado, desconsiderando os efeitos desvio da referência.

Figura 77 - Deslocamentos do rotor em regime permanente para o controlador PID do módulo MBcontroller



Fonte: Elaboração do próprio autor

5.4 ANÁLISE DE RESULTADOS

Os dois controladores projetados foram capazes de levitar o rotor. No caso do controlador projetado no domínio modal não é observado o primeiro modo de flexão do rotor na faixa de frequência analisada, que representa a eficácia do controlador para o primeiro modo de flexão. No entanto, ao acelerar o rotor percebe-se que o mesmo não foi capaz de ultrapassar as primeiras frequências críticas sem atingir o valor limite 85 μm de deslocamento do rotor. Dentre as possíveis causas do baixo desempenho do controlador temos o ruído no sistema de aquisição, a influência dos equipamentos utilizados na malha de controle externo, a maior complexidade desta modelagem no processamento e a presença de um filtro passa-baixa interno a MBresearch que proporciona defasagem no sinal de deslocamento. Vale ressaltar que a tentativa de utilizar filtros no sinal de aquisição não obteve sucesso, independente da ordem do filtro utilizado.

O segundo controlador implementado apresentou bons resultados, principalmente para controlar os modos de corpo rígido. O modelo do controlador percebe apenas os modos de

corpo rígido, o que explica o aparecimento do primeiro modo de flexão na frequência de 150 Hz. Este controlador proporcionou resultados semelhantes aos dados do controlador do fabricante da bancada. Isso mostra que o segundo controlador, apesar de todas as incertezas e interferências externas, é bastante robusto para controlar o rotor.

É importante lembrar que a comparação realizada teve como base o controlador PID internamente implementado no MBcontroler. Ao tentar implementar o controlador PID, com os mesmos parâmetros utilizado no MBcontroller via controle externo (Dspace), foi possível apenas levitar o rotor. Qualquer perturbação do tipo impulso ou ruído desestabilizava o controle. Isso explica a grande influência dos equipamentos da malha de controle externo sobre a estabilidade do sistema. Vale ressaltar que os melhores ganhos obtidos por simulação não foram os que apresentaram melhores resultados práticos, outro fator que também evidencia a influência dos equipamentos da malha de controle externo. Apesar das limitações ocorridas na realização dos testes verificou-se que o controlador baseado no modelo do sistema se mostrou mais robusto que o controlador PID, quando aplicado via malha de controle externa.

A dependência do módulo de controle fornecido pelo fabricante da bancada dificultou bastante o desenvolvimento dos experimentos por conta da indisponibilidade de algumas informações. Apesar de ser o primeiro experimento utilizando uma malha de controle externa para levitar o rotor constatou-se que isso é plenamente factível. À medida que novos experimentos sejam conduzidos a qualidade tende a melhorar, visto o ganho de experiência na utilização dos equipamentos.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou a teoria de atuadores magnéticos, bem como suas principais aplicações. Foram apresentadas simulações numéricas para o posicionamento ótimo de um atuador magnético utilizado para atenuar vibrações em rotor apoiado por mancais convencionais. Para a modelar o rotor foi utilizado o método de elementos finitos (MEF) e a técnica de redução pseudo-modal para diminuir o esforço computacional durante o controle. O controlador LQR foi projetado no domínio modal, com base nos oito primeiros modos do rotor. As simulações mostraram que um bom posicionamento do atuador aliado ao controle LQR proporcionam grandes reduções dos níveis de vibração no rotor, quando comparado os níveis de vibração do rotor original.

Para a bancada de testes foram realizadas simulações adicionais, tendo em vista que o rotor experimental utiliza dois mancais magnéticos para levitar e controlar as vibrações. Foram apresentados os resultados de simulações de dois controladores LQR projetados com os dados da bancada de testes utilizada nos experimentos. O primeiro controlador considera modelo de rotor flexível modelado pelo método de elementos finitos e reduzido com a técnica de redução pseudo-modal. O segundo controlador foi modelado considerando o rotor como sendo um corpo rígido. As simulações computacionais foram realizadas considerando diferentes tipos de excitação no rotor, como impulso, ruído, desbalanceamento com o rotor acelerando e desbalanceamento com o rotor em regime permanente.

Na parte experimental foram apresentados resultados para diferentes condições de operação e excitação no rotor, tais como impulso, ruído, aceleração do rotor e operação do rotor em regime permanente. Foi possível levitar o rotor com os dois controladores projetados. O controlador modal se mostrou eficaz no controle do primeiro modo de flexão. No entanto, durante o teste de aceleração do rotor o mesmo não conseguiu atingir a velocidade de operação desejada, atingindo altos níveis de deslocamento ao passar pela primeira frequência crítica. Este controlador demanda um esforço computacional razoável. Foi utilizado o número máximo de seis modos na construção do controlador. Ao tentar colocar oito modos o sistema não foi capaz de calcular as saídas de controle. Constatou-se que

pequenas defasagens de sinal são suficientes para inviabilizar o controle, conforme observado ao tentar utilizar filtros nos sinais de entrada da Dspace.

O segundo controlador demanda menos esforço computacional e forneceu bons resultados. O rotor apresentou bom comportamento para os diferentes tipos de solitações, inclusive durante a aceleração do rotor e com o mesmo operando em regime permanente na rotação de 6000 rpm. Mesmo com todas as incertezas e interferências nos equipamentos da malha de controle externa este sistema se mostrou bastante robusto, proporcionando resultados semelhantes aos obtidos com controle PID efetuado via MBControler (controle projetado pelo fabricante da bancada). Isto mostra que o projeto do controlador baseado no modelo do sistema é mais robusto no controle do rotor.

Considerando o escopo inicial do projeto considera-se que os resultados obtidos foram satisfatórios. A utilização de um MMA simplesmente para atenuar vibrações em um rotor é bem menos complexa quando comparado com um rotor que é levitado por dois MMAs. Isso porque o rotor original já parte de uma condição estável, proporcionada pelos mancais convencionais. Um rotor levitado por dois MMAs é um sistema originalmente instável, devido a rigidez de posição ser negativa (de caráter não restaurador). A única forma de estabilizar o sistema é através do controlador.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para os próximos trabalhos, principalmente referente a parte experimental, sugere-se:

- Avaliar a possibilidade de realizar a comunicação com o módulo MBcontrolor via sinal digital pelo conector RS-485. Esta facilidade pode eliminar os problemas de ruído e incertezas quanto aos valores de sensibilidade de corrente, dispensando sua utilização;
- Aplicação de outras técnicas de controle com o intuito de comparação e determinação da técnica de controle mais adequada;
- Aplicação de outras técnicas de redução do modelo para projeto do controlador;
- Utilizar um amplificador de tensão nos sinais de deslocamento, caso seja utilizada a mesma placa de aquisição. Isso diminuirá o efeito do ruído da placa sobre o sinal de deslocamento;

- Determinação da função de transferência dos equipamentos do sistema e consideração destes dados no projeto do controlador.
- Refazer os testes com rotores de diâmetros diferentes

REFERÊNCIAS

- ABREU, G. L. C. M. **Controle ativo de vibrações laterais em rotores flexíveis**. 1998. 97 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 1998.
- AHRENS, M.; KUCERA, L.; LARSONNEUR, R. Performance of a Magnetically Suspended Flywheel Energy Storage Device. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, Piscataway, v. 4, n. 5, p. 494 - 502 , 1996.
- AKAMATSU, T.; NAKASEKI, T.; ITOH, H. Centrifugal blood pump with a magnetically suspended imp. **Artificial Organs**, Geesthacht, v. 16, p. 305-307, 1992.
- ALLAIRE, P. E. et al. Design, construction and test of magnetic bearings in an industrial canned motor pump. In: INTERNATIONAL PUMP USERS SYMPOSIUM, 6., 1989, Houston. **Proceedings...** Houston: Texas A&M, 1989. p. 67-73.
- ALLAIRE, P. E. et al. Magnetic bearings. In: BOOSER, E. R. (Ed.). **Handbook of tribology and lubrication**. Boca Raton: CRC Press, 1993. v. 3.
- ALTHAUS, J.; STELLER, P.; FELDKAMP, B. An active hydraulic bearing for a solid-bowl screw centrifuge. In: BURROWS, C. R.; KEOGH, P. S. (Eds.). **The active control of vibration**. London: Mechanical Engineering Publications, 1994. p. 61-69.
- BAVASTRI, C. A. et al. **Modelo geral de neutralizadores dinâmicos para controle passivo de vibrações e ruído: parâmetros equivalentes generalizados**. Porto, Portugal: CMNE/CILAMCE, 2007.
- BOLLETER, U.; SCHMIED, J.; ANGEHRN, R. On the rotordynamics of compressors, pumps and hydraulic hurbines. In: INTERNATIONAL FEDERATION ON THEORY OF MACHINES AND MECHANISMS - IFTOMM, 3., 1989. **Conference...** [S.l.: s.n.], 1989.
- BUENO, D. D. **Controle ativo de vibrações e localização ótima de sensores e atuadores piezelétricos**. 230 f. 2007. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2007.
- ESHLEMAN, R. L. Some recent advances in rotor dynamics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON VIBRATIONS IN ROTATING MACHINERY - IMechE, 3., 1984, York. **Proceedings...** York: [s.l.], 1984. Paper C327/84.
- FURTADO, R. M. **Desenvolvimento de um atuador magnético para excitação sem contato de sistemas rotativos**. 2008. 132 f. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

GAECHTER, S.; HIRONORI, K. Application of zero-bias current active magnetic bearings to flywheel energy storage systems. **Koyo Engineering Journal**, Cho-ku, v. 165, p. 25-31, 2004.

GALAVOTTI, T. V. **Sistemas dinâmicos com amortecedores ativos controlados por atuadores piezelétricos**. 2010. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Ilha Solteira. 2010.

GARCIA, J. D. G.; GOMES, A. C. N.; STEPHAN, R. M. Comparando técnicas de controle aplicadas a mancais magnéticos: análise de critérios de avaliação de desempenho. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, Bonito. **Anais...** Bonito: SBA, 2010. p. 1-7.

GAWRONSKI, W. K. **Advanced structural dynamics and active control of structures**. New York: Springer-Verlag, 1998. v. 1.

GUAN, R. et al. Core loss prediction and measurement in magnetic bearing. In: ELECTRIC MACHINES AND DRIVES CONFERENCE - IEMDC '09, 2009, Miami. **Proceedings...** New York: IEEE International, 2009. p. 445-450.

GUIRAO, P. H. F. **Controle ativo de vibrações de rotores com mancais magnéticos – influência dos parâmetros do controlador PID**. 2006. 114 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Ilha Solteira, 2006.

IMLACH, J. et al. Testing of a magnetic bearing equipped canned motor pump for installation in the field. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON MAGNETIC BEARINGS, 2., Tokyo. **Proceedings...** Tokyo: [s.n.], 1990.

ISHIDA, Y.; INOUE, T. Vibration characteristics of a rotor system in contact with a backup bearing: cases with various failure patterns of the active magnetic bearing. **Journal of Vibration and Control**, London, v. 14, n. 4, p. 571-589, 2008.

KERN, S. et al. Active damping of chatter vibration with an active magnetic bearing in a motor spindle using synthesis and adaptive filter. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MOTION AND VIBRATION CONTROL, 2006, Movic, Korea. **Proceedings...** Movic: [s.n.], 2006.

KHANFIR, H.; BONIS, M.; REVEL, P. Improving waviness in ultra precision turning by optimizing the dynamic behavior of a spindle with magnetic bearings. **International Journal of Machine Tools & Manufacture**, New york, v. 45, p. 841-848, 2005.

KOROISHI, E. H. et al. Controle de vibrações em máquinas rotativas utilizando norma h_{∞} otimizada via técnicas heurísticas. In: SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, 9., São João Del-Rei. **Anais...** São João Del-Rei: [s.n.], 2010. 12 p.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics prediction in engineering**. 2. ed. London: John Wiley & Sons, 1998. v. 1.

LEI, S.; PALAZZOLO, A. Control of flexible rotor systems with active magnetic bearings. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 314, p. 19-38, 2008.

LEO, D. J. **Engineering analysis of smart material systems**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007. v. 1.

MANI, G.; QUINN, D. D.; KASARDA, M. . Active health monitoring in a rotating cracked shaft using active magnetic bearings as force actuators. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 294, p. 454-465, 2006.

NORDMANN, R.; AENIS, M. . Fault diagnosis in a centrifugal pump using active magnetic bearing. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROTOR DYNAMICS – IFTOMM, 6., Sydney. **Proceedings...** Sydney, Australia: [s.n.], 2002. p. 46-55.

OGTA, K. **Engenharia de controle moderno**. 3. ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1998.

PERINI, E. A. et al. Vibration control using active magnetic actuators with the lqr control technique. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 7., 2008, Presidente Prudente. **Proceedings...** Presidente Prudente: [s.n.], 2008. CD-ROM.

PESCH, A. H. **Damage detection of rotors using magnetic force actuator: analisys and experimental verification**. 2008. 104 f. Dissertation (Master of Science) - Cleveland State University, Cleveland, 2008.

PIPER, G. E.; WATKINS, J. M.; THORP III, O. G. Active control of axial-flow fan noise using magnetic bearings. **Journal of Vibration and Control**, London, v. 11 n. 9, p. 1221-1232, 2005.

QUINN, D. D. et al. Damage detection of a rotating cracked shaft using an active magnetic bearings as force actuator. **IEEE/ASME Transactions On Mechatronics**, Piscataway, v. 10, n. 6, December 2005.

RODRIGUES, L. S. **Controle ótimo descentralizado a dois parâmetros para mancais-motores magnéticos**. 2005. 143 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa de Engenharia - COOPE, Rio de Janeiro, 2005.

S2M/ACTIDYNE. **Turbomachines reference list**. Roanoke, Virgínia: S2M America, 1998.

S2M/ACTIDYNE. **Actidyne news**. Roanoke, Virgínia: S2M America, 1999. (Manufacturer's Publication, n. 9)

SCHWEITZER, G. et al. **Magnetic bearings, theory, design, and application**. Berlin: Springer, 2009. v. 1.

SILVA, I. **Mancais magnéticos híbridos do tipo atração uniaxial**. 2005. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, São Paulo, 2005.

SIMÕES, R. C. **Controle modal ótimo de um rotor flexível utilizando atuadores piezelétricos do tipo pilha**. 2006. 133 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2006.

SODAMO, H. A.; INMAN, D. J. Non-contact vibration control system employing an active eddy current damper. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 305, p. 596-613, 2007.

TAMMI, K. Combined feedback and feedforward control of rotor vibrations. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON SOUND AND VIBRATION, 2006, Lisboa. **Proceedings...** Lisboa: [s.n.], 2006.

TAMMI, K. Identification and active feedback-feedforward control of rotor. **International Journal of Acoustics and Vibration**, St. Petersburg, v. 12, n. 1, p. 7-14, 2007.

UENO, S. et al. Design of a self-bearing slice motor for a centrifugal blood pump. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON MAGNETIC BEARINGS, 6., Cambridge, Massachusetts. **Proceedings...** Cambridge: [s.n.], 1998. p. 143-151.

XUAN, D. J. et al. Magnetic bearing application by time delay control. **Journal of Vibration and Control**, London, v. 15, n. 9, p. 1307-1324, 2009.

YUJI, M. et al. Analysis of magnetic bearing using inductive levitation by relative motion between magnet and conductor. **Papers of Technical Meeting on Rotating Machinery, Tokyo**, v. RM-05, n. 140-161, p. 111-114, 2005.

ZHU, C. A disk-type magneto-rheological fluid damper for rotor system vibration control. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 283, p. 1051-1069, 2004.

ANEXO A

A.1 MODELO MATEMÁTICO DO ROTOR FLEXÍVEL

Neste capítulo são apresentadas as equações de movimento para um rotor flexível, modelado pelo Método de Elementos Finitos. A equação de movimento de sistema rotativo é encontrada a partir das equações de movimento dos componentes básicos que compõem o sistema rotativo, descritas neste anexo. Foi utilizada a referência Lalanne e Ferraris (1998), a qual apresenta um bom detalhamento matemático.

A dinâmica de um rotor flexível pode ser escrita na forma matricial, que representa n equações diferenciais de segunda ordem. As matrizes que compõe o lado esquerdo da Eq. (61) são as matrizes globais do sistema rotativo, obtidas a partir da combinação das matrizes de cada componente e elementos do rotor.

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{D}_s + \dot{\phi} \mathbf{G}_s) \dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K}_s) \mathbf{q}(t) = \mathbf{u}(t) \quad (61)$$

Estas equações diferenciais são obtidas a partir da equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(t)}{\partial \dot{q}(t)} \right) - \frac{\partial T(t)}{\partial q(t)} + \frac{\partial U(t)}{\partial q(t)} = F_q(t) \quad (62)$$

Os deslocamentos nodais $\mathbf{q}_i$ em cada ponto do rotor compõem o vetor de deslocamento nodal $\mathbf{q}$ do sistema. Cada nó do sistema rotativo contém quatro graus de liberdade, sendo dois graus de liberdade de translação (u e w) e dois graus de liberdade de rotação (θ e Ψ). O vetor de coordenadas generalizadas do sistema é dado por

$$\mathbf{q}(t) = [\mathbf{q}_1(t) \quad \mathbf{q}_2(t) \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n(t)]^T \quad (63)$$

onde

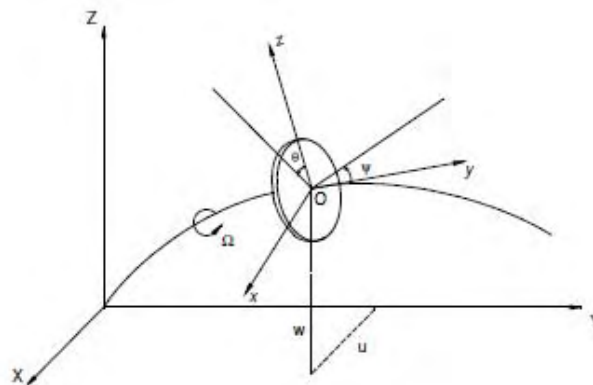
$$\mathbf{q}_i(t) = [u_i(t) \quad w_i(t) \quad \theta_i(t) \quad \psi_i(t)]^T \quad (64)$$

representa as coordenadas do i-ésimo ponto nodal.

As matrizes da Eq. (61) são ordem nxn , já os vetores de deslocamento nodal e de forças de excitação têm dimensão $1xn$. Cada ponto nodal do sistema (nó) tem quatro graus de liberdade. O número total de graus de liberdade do sistema é $n=4n_n$, onde n é o número de nós do sistema.

O sistema rotativo é representado basicamente pela combinação de um eixo flexível girante, discos rígidos e mancais. Para obter o modelo global do rotor aplica-se a equação de Lagrange nas expressões que representam as energias cinética e potencial de cada elemento que compõe o rotor. Para a dedução das equações são apresentados dois sistemas de coordenadas, conforme mostrado na Fig. 78. Sendo $R_0[X Y Z]$ o sistema inercial e $R[x y z]$ o sistema móvel. Estas coordenadas são utilizadas na obtenção das energias cinética e potencial para cada um dos componentes do modelo.

Figura 78 - Sistema de coordenadas



Fonte: Elaboração do próprio autor

A.2 Elemento de Disco

Um elemento de disco é considerado com sendo rígido, possuindo apenas energia cinética. Ele possui movimentos de translação e rotação em duas direções, além da rotação em torno de seu próprio eixo longitudinal. A rotação do referencial móvel em torno do eixo inercial Z é representada por Ψ , seguida pelo deslocamento angular θ em torno do eixo móvel

x e pelo deslocamento angular Φ em torno do eixo móvel y . A velocidade angular do disco é dada por

$$\omega_{R/R_0} = \dot{\psi}Z + \dot{\theta}x + \dot{\phi}y \quad (65)$$

As componentes de velocidade angular do disco pode ser escritas no sistema de coordenadas inercial, conforme segue

$$\omega_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi) + \dot{\theta} \cos(\phi) \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin(\theta) \\ \dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) + \dot{\theta} \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (66)$$

O movimento de translação do disco é representado pelos deslocamentos u e w do centro do disco O em R_0 . Lalanne e Ferraris (1990) fornecem a energia cinética do disco na seguinte expressão

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2(t) + \dot{w}^2(t)) + \frac{1}{2} (I_{D_x} \omega_x^2 + I_{D_y} \omega_y^2 + I_{D_z} \omega_z^2) \quad (67)$$

sendo m_D a massa do disco e I_{D_x} , I_{D_y} e I_{D_z} componentes do tensor de inércia em O no sistema de coordenadas R

$$\mathbf{I}_R = \begin{bmatrix} I_{D_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{D_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_z} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Considerando o disco simétrico ($I_{D_x} = I_{D_z}$), que os ângulos θ e ψ são pequenos e que a velocidade angular é constante ($\dot{\phi} = \Omega$), tem-se a nova expressão para a energia cinética do disco:

$$T_D(t) = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2(t) + \dot{w}^2(t)) + \frac{1}{2} I_{D_x} (\dot{\theta}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)) + \frac{1}{2} I_{D_y} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}(t)\theta(t)) \quad (69)$$

Aplicando a equação de Lagrange na equação anterior temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial q_i(t)} = \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}}_i(t) + \Omega \mathbf{G}_D \dot{\mathbf{q}}_i(t) \quad (70)$$

onde $\mathbf{M}_D$ e $\mathbf{G}_D$ representam a matriz de massa e de efeito giroscópio do disco, respectivamente. Estas matrizes são dadas por:

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{D_x} \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\mathbf{G}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{D_y} \\ 0 & 0 & I_{D_y} & 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

A.3 Elemento de Eixo

O elemento de eixo é modelado como uma viga de seção circular constante e comprimento L , que possui energia cinética e energia potencial elástica, que fornecem as matrizes de inércia. A expressão da a energia cinética para um eixo de comprimento L é dada por:

$$\begin{aligned}
T_E(t) = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2(t) + \dot{w}^2(t)) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)) dy + \\
& + \rho I L \Omega^2 + 2 \rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi}(t) \theta(t) dy
\end{aligned} \quad (73)$$

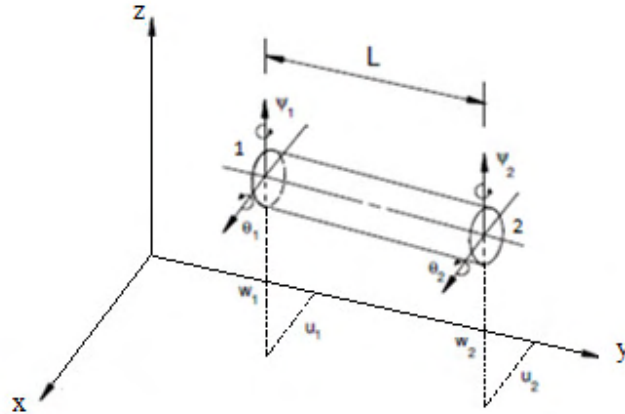
sendo ρ a densidade do material do eixo, S a área da seção transversal da viga e I o momento de inércia de área da seção transversal da viga.

Na Eq. (73) a primeira integral expressão clássica da energia cinética da viga em flexão. A segunda integral representa o efeito secundário de inércia rotacional (modelo de Timoshenko). O terceiro termo é uma constante de influência nula nas equações e, o último termo representa o efeito giroscópio.

O elemento de eixo mostrado na Fig. 79 tem o seguinte vetor de deslocamento nodal:

$$\mathbf{q}(t) = [u_1(t) \quad w_1(t) \quad \theta_1(t) \quad \psi_1(t) \quad u_2(t) \quad w_2(t) \quad \theta_2(t) \quad \psi_2(t)]^T \quad (74)$$

Figura 79 - Graus de liberdade dos pontos nodais que delimitam o elemento finito de eixo



Fonte: Elaboração do próprio autor

O vetor da Eq. (74) pode ser reorganizado em dois vetores de coordenadas correspondentes aos deslocamentos e rotações nas direções X e Z , respectivamente, nas formas

$$\mathbf{q}_x(t) = [u_1(t) \quad \psi_1(t) \quad u_2(t) \quad \psi_2(t)]^T \quad (75)$$

e

$$\mathbf{q}_z(t) = [w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2]^T \quad (76)$$

A relação entre deslocamentos e rotações nas direções Z e X são dados, respectivamente, por:

$$\theta(t) = \frac{\partial w(t)}{\partial y(t)} \quad (77)$$

e

$$\psi(t) = -\frac{\partial u(t)}{\partial y(t)} \quad (78)$$

Os deslocamentos u e w podem ser escritos através das aproximações:

$$u(t) = N_1(y)q_x(t) \quad (79)$$

e

$$w(t) = N_2(y)q_z(t) \quad (80)$$

sendo N_1 e N_2 funções de forma que representam o deslocamento entre os pontos nodais, expressas por equações polinomiais cúbicas, dadas por:

$$N_1(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} & -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} & \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} & \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$N_2(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} & -y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} & \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} & -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \end{bmatrix} \quad (82)$$

Substituindo (73) em (62), utilizando as Eqs. (74) a (80), obtém-se a expressão da energia cinética para um elemento de viga

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_E(t)}{\partial \dot{q}_e(t)} \right) - \frac{\partial T_E(t)}{\partial q_e(t)} &= [\mathbf{M}_E + \mathbf{M}_{SE}] \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Omega [\mathbf{G}_E] \dot{\mathbf{q}}(t) = \\ &\left(\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{E_1} & \mathbf{M}_{E_2} \\ \mathbf{M}_{E_2}^T & \mathbf{M}_{E_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{SE_1} & \mathbf{M}_{SE_2} \\ \mathbf{M}_{SE_2}^T & \mathbf{M}_{SE_3} \end{bmatrix} \right) \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{E_1} & \mathbf{G}_{E_2} \\ \mathbf{G}_{E_2}^T & \mathbf{G}_{E_3} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \end{aligned} \quad (83)$$

A primeira matriz do primeiro termo da Eq. (83) representa a matriz de massa clássica do elemento de eixo, sendo que M_{E_1} , M_{E_2} e M_{E_3} são

$$\mathbf{M}_{E_1} = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 156 & 22L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$\mathbf{M}_{E_2} = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -13L & 0 & 0 & -3L^2 \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\mathbf{M}_{E_3} = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (86)$$

A segunda matriz do primeiro termo da Eq. (83) representa a influência do efeito secundário de inércia rotacional do elemento de eixo, sendo que $\mathbf{M}_{SE_1}$, $\mathbf{M}_{SE_2}$ e $\mathbf{M}_{SE_3}$ são

$$\mathbf{M}_{SE_1} = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$\mathbf{M}_{SE_2} = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & -L^2 \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$\mathbf{M}_{SE_3} = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (89)$$

O terceiro termo da Eq. (83) representa o efeito giroscópio do elemento eixo, sendo que $\mathbf{G}_{E_1}$, $\mathbf{G}_{E_2}$ e $\mathbf{G}_{E_3}$ são:

$$\mathbf{G}_{E_1} = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (90)$$

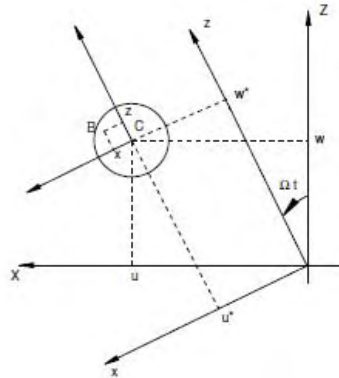
$$\mathbf{G}_{E_2} = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L \\ -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$\mathbf{G}_{E_3} = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 3L \\ -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (92)$$

A Fig. 80 mostra o deslocamento de um ponto arbitrário B da viga em relação ao centro geométrico C . Os pares (u, w) e (u^*, w^*) representam as coordenadas do centro geométrico em relação aos eixos inercial e móvel, respectivamente. A deformação transversal do ponto B pode ser representada por

$$\varepsilon(t) = -x(t) \frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial y^2(t)} - z(t) \frac{\partial^2 w^*(t)}{\partial y^2(t)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*(t)}{\partial y(t)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*(t)}{\partial y(t)} \right)^2 \quad (93)$$

Figura 80 - Coordenadas inerciais e móveis do centro geométrico C e coordenadas móveis do ponto arbitrário B no eixo.



Fonte: Elaboração do próprio autor

A expressão da energia potencial de deformação é dada por:

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon'(t) \sigma(t) d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon'(t) E \varepsilon(t) d\tau \quad (94)$$

onde ε é a deformação longitudinal específica devido à tensão aplicada σ , τ é o volume do elemento e E é o módulo de elasticidade do material.

A deformação representada na Eq. (93) possui uma parcela linear e outra não linear. Para a dedução das equações seguintes os termos não lineares são desconsiderados. Substituindo a Eq. (93) em (94) obtém-se a energia potencial de deformação elástica do elemento de eixo devida à flexão

$$U_1(t) = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 \right] dy(t) \quad (95)$$

onde I_z e I_x são os momentos de inércia de área da seção transversal em relação aos eixos z e x do sistema de coordenadas móvel, respectivamente.

Uma segunda parcela deve ser adicionada a energia de deformação elásticas quando o eixo é submetido à aplicação de uma axial F_0 :

$$U_2(t) = \int_0^L \left[\frac{F_0}{S} \varepsilon \right] d\tau = \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u^*(t)}{\partial y(t)} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*(t)}{\partial y(t)} \right)^2 \right] dy(t) \quad (96)$$

Assim, a energia total de deformação do eixo é dada por:

$$\begin{aligned} U_E(t) = U_1(t) + U_2(t) = & \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 \right] dy(t) \\ & + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u^*(t)}{\partial y(t)} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*(t)}{\partial y(t)} \right)^2 \right] dy(t) \end{aligned} \quad (97)$$

Os deslocamentos do centro geométrico C na base de coordenadas inerciais é obtido pela transformação linear da base de coordenadas móvel, na forma

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^*(t) \\ w^*(t) \end{bmatrix} \quad (98)$$

Combinando a Eq (98) e a Eq. (97) tem-se

$$\begin{aligned} U_E(t) = & \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\cos(\Omega t) \frac{\partial^2 u(t)}{\partial y^2(t)} - \sin(\Omega t) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 \right] dy(t) \\ & + \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_x \left(\sin(\Omega t) \frac{\partial^2 u(t)}{\partial y^2(t)} + \cos(\Omega t) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 \right] dy(t) \\ & + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u(t)}{\partial y(t)} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(t)}{\partial y(t)} \right)^2 \right] dy(t) \end{aligned} \quad (99)$$

Como o eixo tem seção circular, $I_z = I_x = I$. Após algumas simplificações para a expressão acima, se obtém a expressão final para a energia de deformação do eixo.

$$U_E(t) = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 \right] dy(t) + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u(t)}{\partial y(t)} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(t)}{\partial y(t)} \right)^2 \right] dy(t) \quad (100)$$

Substituindo (79) e (80) em (100), tem-se

$$U_E(t) = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\frac{\partial q_x{}'(t)}{\partial y(t)} \frac{d^2 N_1{}'(y)}{dy(t)^2} \frac{d^2 N_1(y)}{dy(t)^2} \partial q_x(t) + \frac{\partial q_z{}'(t)}{\partial y(t)} \frac{d^2 N_2{}'(y)}{dy(t)^2} \frac{d^2 N_2(y)}{dy(t)^2} \partial q_z(t) \right] dy(t) + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\frac{\partial q_x{}'(t)}{\partial y(t)} \frac{dN_1{}'(y)}{dy(t)} \frac{dN_1(y)}{dy(t)} \partial q_x(t) + \frac{\partial q_z{}'(t)}{\partial y(t)} \frac{dN_2{}'(y)}{dy(t)} \frac{dN_2(y)}{dy(t)} \partial q_z(t) \right] dy(t) \quad (101)$$

Integrando os termos da Eq. (101), obtêm-se

$$U_E(t) = \frac{1}{2} \left[\partial q_x{}'(t) K_{E1} \partial q_x(t) + \partial q_z{}'(t) K_{E2} \partial q_z(t) + \partial q_x{}'(t) K_{E3} \partial q_x(t) + \partial q_z{}'(t) K_{E4} \partial q_z(t) \right] \quad (102)$$

A Eq. (102) ainda pode ser escrita em função do vetor de coordenadas globais:

$$U_E(t) = \frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{q}}^t(t) (\mathbf{K}_{E1} + \mathbf{K}_{E2}) \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{q}}^t(t) (\mathbf{K}_{E3} + \mathbf{K}_{E4}) \dot{\mathbf{q}}(t) \right] \quad (103)$$

onde $\mathbf{K}_{E1}$ e $\mathbf{K}_{E2}$ são as matrizes de rigidez clássicas e $\mathbf{K}_{E3}$ e $\mathbf{K}_{E4}$ são as matrizes de rigidez devido à aplicação da força axial no eixo. O efeito de cisalhamento é inserido através do coeficiente α_c , tratando-se de uma viga de Timoshenko, dado por:

$$\alpha_c = \frac{12EI}{GS_r L^2} \quad (104)$$

onde S_r é a área reduzida da seção transversal e G é o módulo transversal de elasticidade do material do eixo, dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (105)$$

sendo ν o coeficiente de Poisson do material. A matriz de rigidez clássica elementar $\mathbf{K}_C$ é obtida de $\mathbf{K}_{E1}$ e $\mathbf{K}_{E2}$ e a matriz de rigidez elementar devido à aplicação da força axial $\mathbf{K}_F$ é obtida de $\mathbf{K}_{E3}$ e $\mathbf{K}_{E4}$. Aplicando a equação de Lagrange na Eq. (103), tem-se

$$\frac{\partial U(t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_e(t)} = \mathbf{K}_g \dot{\mathbf{q}}(t) = (\mathbf{K}_C + \mathbf{K}_F) \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (106)$$

A matriz $\mathbf{K}_C$ é expressa por

$$\mathbf{K}_C = \frac{EI}{(1+\alpha_c)L^3} \begin{bmatrix} K_{C1} & K_{C2} \\ K_{C2}^T & K_{C3} \end{bmatrix} \quad (107)$$

onde

$$\mathbf{K}_{c_1} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+\alpha_c)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+\alpha_c)L^2 \end{bmatrix} \quad (108)$$

$$\mathbf{K}_{c_2} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & -6L & (2+\alpha_c)L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & (2+\alpha_c)L^2 \end{bmatrix} \quad (109)$$

$$\mathbf{K}_{c_3} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & -6L & (4+\alpha_c)L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & (4+\alpha_c)L^2 \end{bmatrix} \quad (110)$$

A matriz K_F é expressa por

$$\mathbf{K}_F = \frac{F_0}{30L} \begin{bmatrix} K_{F_1} & K_{F_2} \\ K_{F_2} & K_{F_3} \end{bmatrix} \quad (111)$$

onde

$$\mathbf{K}_{F_1} = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (112)$$

$$\mathbf{K}_{F_2} = \begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & -L^2 \end{bmatrix} \quad (113)$$

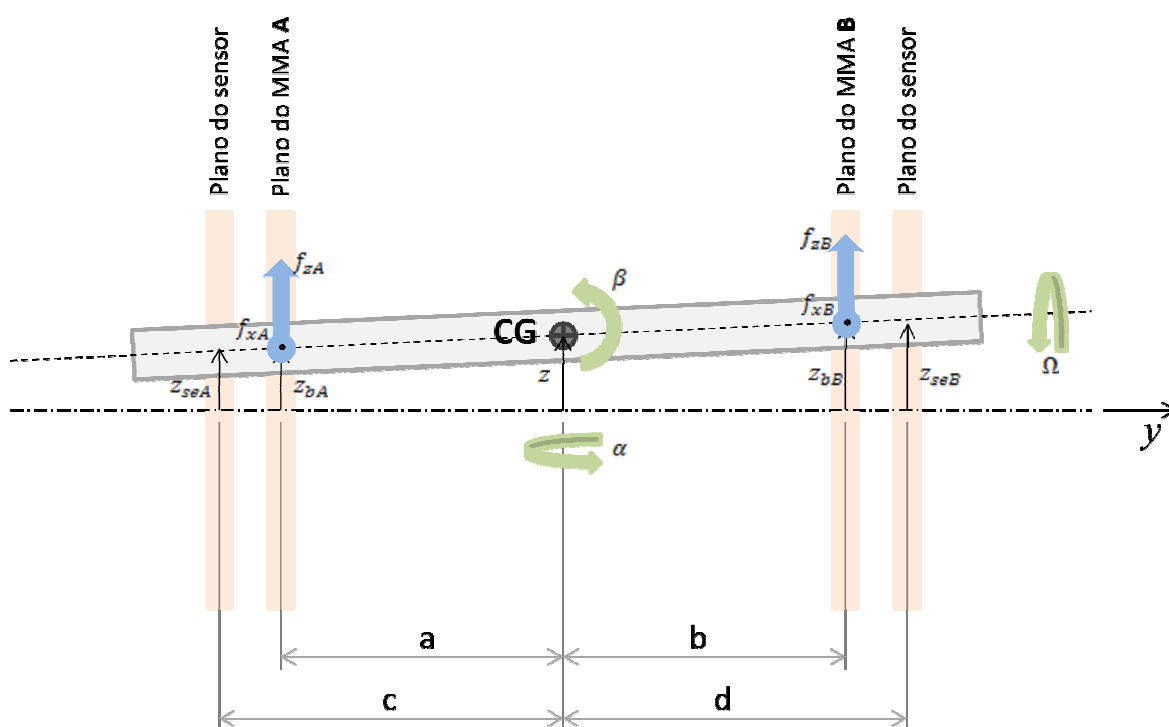
$$\mathbf{K}_{F_3} = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (114)$$

ANEXO B - MODELO MATEMÁTICO DO ROTOR RÍGIDO UTILIZANDO MANCAIS MAGNÉTICOS ATIVOS

Este capítulo apresenta a formulação matemática de rotor rígido controlado por MMAs. O modelo combina as características do rotor juntamente com as características do MMA, obtido a partir da equação de força líquida do MMA que atua sobre o rotor. O desenvolvimento das equações aqui apresentadas pode ser visto em Schweitzer et al. (2009).

A Fig. 81 ilustra um rotor rígido juntamente com dois MMAs e dois Sensores de posição. O disco possui massa m e momentos de inércia I_x, I_y e I_z em torno do centro de massa do rotor.

Figura 81: Rotor rígido equipado com mancais magnéticos ativos e sensores



Fonte: Elaboração do próprio autor

As equações são obtidas em função das coordenadas do centro de massa do rotor, dado pelos deslocamentos x e z e os ângulos de Euler β e α . Estas coordenadas são agrupadas no vetor:

$$\mathbf{q} = (\beta, z, -\alpha, x)^T \quad (115)$$

No desenvolvimento das equações os deslocamentos na direção y são omitidos. São considerados apenas os movimentos de deslocamento radiais do rotor, tendo dois graus de liberdade para a direção x e z : sendo o movimento de translação e de rotação em torno do centro de massa CG, para cada direção.

Os deslocamentos lidos nos sensores próximos aos MMAs compõem o vetor:

$$\mathbf{y} = (z_{seA}, z_{seB}, x_{seA}, x_{seB})^T \quad (116)$$

A força produzida pelos MMAs, conforme ilustrado na Fig XXX, compõem o vetor de força:

$$\mathbf{u}_f = (f_{zA}, f_{zB}, f_{xA}, f_{xB})^T \quad (117)$$

A Eq.(118) apresenta a dinâmica do sistema.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}_u\mathbf{u}_f \quad (118)$$

Onde $\mathbf{M}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{B}$ são dadas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_y\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I_y\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (119)$$

A matriz de massa $\mathbf{M}$ do sistema é composta pela massa do rotor m e os momentos de inércia em torno do centro de massa do rotor I_x e I_z , nas direções x e z . A matriz giroscópica $\mathbf{G}$ é função da velocidade de rotação do rotor Ω e do momento de inércia I_y , na direção y . A matriz $\mathbf{B}_u$ é responsável por transformar as forças radiais dos MMAs $\mathbf{u}_f$ em forças radiais e torques no centro de massa do rotor.

A matriz $\mathbf{C}_y$, apresentada na Eq. (120), realiza a transformação do vetor $\mathbf{q}$ no vetor $\mathbf{y}$, que representa os deslocamentos lidos nos sensores próximos aos MMAs.

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_y \mathbf{q} \quad (120)$$

Esta matriz é dada por:

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} c & 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & d & 1 \end{bmatrix} \quad (121)$$

Os deslocamentos do rotor no ponto onde estão instalados os MMAs compõem o vetor:

$$\mathbf{q}_b = (z_{bA}, z_{bB}, x_{bA}, x_{bB})^T \quad (122)$$

Este vetor pode ser obtido a partir das coordenadas do centro de massa do rotor, aplicando a matriz de transformação linear $\mathbf{T}_S$, conforme a Eq. (124). Comparando esta equação com a Eq. (119), percebe-se que a matriz $\mathbf{T}_S$ é igual à transposta da matriz $\mathbf{B}_u$, ou seja, $\mathbf{T}_S = \mathbf{B}_u^T$.

$$\mathbf{q}_b = \begin{bmatrix} z_{bA} \\ z_{bB} \\ x_{bA} \\ x_{bB} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_S \mathbf{q} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ z \\ -\alpha \\ x \end{bmatrix} \quad (124)$$

As correntes de controle em cada MMA, para as direções z e x são representadas no vetor:

$$\mathbf{i} = (i_{zA}, i_{zB}, i_{xA}, i_{xB})^T \quad (124)$$

Então, o vetor de força $\mathbf{u}_f$ pode ser escrito em função de $\mathbf{q}_b$ e $\mathbf{i}$, utilizando as matrizes de rigidez de posição $\mathbf{K}_s$ e de corrente $\mathbf{K}_i$, formando a seguinte equação

$$\mathbf{u}_f = \begin{bmatrix} f_{zA} \\ f_{zB} \\ f_{xA} \\ f_{xB} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{sA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{sB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{sA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{sB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{bA} \\ z_{bB} \\ x_{bA} \\ x_{bB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{iA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{iB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{iA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{iB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{zA} \\ i_{zB} \\ i_{xA} \\ i_{xB} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_f = -\mathbf{K}_s \mathbf{q}_b + \mathbf{K}_i \mathbf{i} \quad (125)$$

A Eq. (125) pode ser substituída na Eq. (118) para obter:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{q} = \mathbf{B}_u\mathbf{K}_i\mathbf{i} \quad (126)$$

onde $\mathbf{K}_{ss}$ é a matriz de rigidez de posição dos MMAs nas coordenadas do centro de massa do rotor, dada por:

$$\mathbf{K}_{ss} = \begin{bmatrix} k_{sA}a^2 + k_{sB}b^2 & k_{sA}a + k_{sB}b & 0 & 0 \\ k_{sA}a + k_{sB}b & k_{sA} + k_{sB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{sA}a^2 + k_{sB}b^2 & k_{sA}a + k_{sB}b \\ 0 & 0 & k_{sA}a + k_{sB}b & k_{sA} + k_{sB} \end{bmatrix} \quad (127)$$