

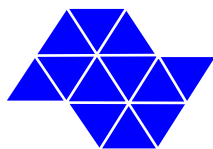
unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS UTILIZANDO
APENAS AS RESPOSTAS DA ESTRUTURA
- IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO -**

ODAIR ANTÔNIO NUNES JÚNIOR

Ilha Solteira, Maio de 2006.



unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS UTILIZANDO
APENAS AS RESPOSTAS DA ESTRUTURA
- IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO -**

ODAIR ANTÔNIO NUNES JÚNIOR

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. João Antônio Pereira

Ilha Solteira, Maio de 2006.

Dedico este trabalho

Aos meus pais, Odair Antonio Nunes e Carmen de Almeida Nunes, que sempre estiveram presentes em todas as etapas da minha vida e à Thaisa, minha noiva, pelo constante incentivo para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por iluminar meus caminhos, meus pensamentos e pela proteção recebida ao longo de minha vida.

Ao Prof. Dr. João Antonio Pereira e Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo, pelo apoio, incentivo e orientação quanto à realização deste curso de mestrado.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Antonio Pereira pela excelente orientação, discussões enriquecedoras, consideração, paciência e pela amizade construída durante a realização deste trabalho.

Aos amigos Adailton Silva Borges e Tobias Souza Moraes, alunos de pós-graduação em engenharia Mecânica do Campus de Ilha Solteira pela amizade e pelas valiosas discussões e sugestões.

Em especial, aos meus pais Odair Antonio Nunes e Carmen de Almeida Nunes, e à minha irmã Aline Cristina Nunes, que em todos os momentos estiveram presentes com incentivo, apoio, confiança e carinho.

À minha noiva Thaisa Pedrosa Silva, que com certeza contribuiu muito para a realização desse trabalho de mestrado, sempre esteve ao meu lado com seu amor, carinho, alegria e paciência, incentivando e apoiando e aos seus pais Oidelar e Alexandrina, e à sua irmã Thiesia, pelo carinho e pela amizade.

Aos meus amigos e companheiros de república Ricardo, Reginaldo, Gustavo e Paulo, pelos momentos de descontração.

À CAPES, instituição patrocinadora, que concedeu bolsa durante todo o tempo necessário para o desenvolvimento do trabalho e conclusão do curso de Mestrado.

NUNES JUNIOR, O. A. **Identificação dos Parâmetros Modais utilizando apenas as Respostas da Estrutura** - Identificação no Domínio do Tempo. Ilha Solteira, 2006. 111 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

RESUMO

A Análise Modal envolvendo apenas as respostas da estrutura é ainda um desafio que requer o uso de técnicas de identificação especiais. Este trabalho discute a identificação baseada apenas na resposta utilizando um método de identificação no tempo, mais especificamente, o método Identificação Estocástica de Subespaço. É mostrado que uma estrutura vibrando excitada por forças não conhecidas, pode ser modelada como um modelo de espaço de estado estocástico. A partir da aplicação de técnicas numéricas robustas como fatorização QR e Decomposição em Valores Singulares para a matriz bloco de Hankel semi-infinita, contendo os dados de resposta, é obtida a estimativa dos estados do modelo. Uma vez que os estados são conhecidos, o sistema de matrizes é encontrado através da solução de um problema de mínimos quadrados. Encontrado o modelo matemático da estrutura, os parâmetros modais são estimados diretamente através da decomposição em autovalores. O trabalho apresenta ainda uma metodologia que utiliza a função densidade de probabilidade para identificar possíveis componentes harmônicos contidos nos sinais de respostas. Os sinais são filtrados em uma faixa de frequência contendo um provável modo e é verificado se este corresponde a um modo natural ou operacional. A metodologia é avaliada com dados simulados e experimentais e os resultados obtidos mostraram-se promissores para identificação dos parâmetros modais de sistemas estocásticos lineares e invariantes no tempo, utilizando apenas as respostas.

Palavras-chave: Análise Modal Operacional, Identificação Estocástica, Componentes Harmônicos.

NUNES JUNIOR, O. A. **Modal Parameters Identification using only the responses data of the structure** – Time Domain Identification. Ilha Solteira, 2006. 111 p. Thesis (Master in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

ABSTRACT

Modal analysis using output-only measurements is still a challenge in the experimental modal analysis community. It requires the use of special modal identification techniques. This work discusses the concepts involved in the output-only modal analysis and the implementation of the Stochastic Subspace Identification time domain method. It is shown that a vibrating structure excited by an unknown force can be modelled as a stochastic state space model. In this approach, the SSI method estimates the state sequences directly from the response data and the modal parameters are estimated by using the eigenvalues decomposition of the state matrix. The steps of the procedure are implemented using the well-known numerical linear algebra algorithms, Singular Value Decomposition and the QR decomposition. It also includes a methodology based on the Probability Density Function to identify harmonic components of the response signals. The signals are filtering in a range of frequency containing a mode, to verify if it is a natural or operational mode. The approach is evaluated with simulated and experimental data and the results have shown to be promising to identify the modal parameters of stochastic linear time-invariant systems, based only on the output data.

Key-words: Operational Modal Analysis, Stochastic Identification, Harmonics Components.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS

1. INTRODUÇÃO	01
1.1. ANÁLISE MODAL OPERACIONAL	03
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	05
2.1. IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA.....	08
3. JUSTIFICATIVA	10
4. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	13
4.1. ANÁLISE MODAL	13
4.1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	14
4.1.2. ANÁLISE MODAL TEÓRICA DE SISTEMAS DE VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE.....	19
4.1.3. ORTOGONALIDADE DOS AUTOVETORES	21
4.1.4. ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL	24
4.2. EXCITAÇÕES RANDÔMICAS	26
4.3. DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES	28
4.3.1. O RANK DE UMA MATRIZ	28
4.4. MODELOS DE ESPAÇO DE ESTADO	31
4.5. MODELO DE ESPAÇO DE ESTADO DISCRETO	39
5. IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA DE SUBESPAÇOS (SSI)	41
5.1. MODELO DE ESPAÇO DE ESTADO.....	42
5.2. PROPRIEDADES DOS SISTEMAS ESTOCÁSTICOS	46
5.3. ALGORITMOS DA IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA DE SUBESPAÇOS.....	51
5.4. VARIANTES DO ALGORITMO DE IDENTIFICAÇÃO	56
5.5. OBTENÇÃO DAS MATRIZES DO SISTEMA	56
5.5.1. ALGORITMO 1 – UTILIZANDO OS ESTADOS	57
5.5.2. ALGORITMO 2 – UTILIZANDO AS MATRIZES	59
5.5.3. ALGORITMO 3	60
5.6. IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS.....	61
5.7. IDENTIFICAÇÃO DE COMPONENTES HARMÔNICOS.....	62
5.8. VALIDAÇÃO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS.....	65
5.8.1. CORRELAÇÃO NUMÉRICA (MAC).....	65

5.8.2. AUTO – MAC	66
5.8.3. MODAL PHASE COLLINEARITY (MPC).....	66
6. IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO DADOS SIMULADOS	68
6.1. DETERMINAÇÃO DA ORDEM DO SISTEMA.....	68
6.2. MODELO DE 48 GRAUS DE LIBERDADE	69
6.3. IDENTIFICAÇÃO DE MODOS NATURAIS E MODOS OPERACIONAIS.....	75
6.3.1. SINAL HARMÔNICO ADICIONADO À ENTRADA DO SISTEMA...	76
6.3.2. ANÁLISE DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE.....	79
6.4. PARÂMETROS MODAIS OBTIDOS PELO ALGORITMO SSI APLICADO NO SINAL FILTRADO	83
7. AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL	87
7.1. TESTES EXPERIMENTAIS.....	87
7.2. MODELO ANALÍTICO	91
7.3. COMPARAÇÃO E AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS.....	93
8. CONCLUSÕES	101
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	104
APENDICE	108
LISTA DE PUBLICAÇÕES	110

LISTA DE SÍMBOLOS

n_{gl}	número de graus de liberdade
$[M]$	matriz de massa, $n_{gl} \times n_{gl}$
$[C]$	matriz de amortecimento, $n_{gl} \times n_{gl}$
$[K]$	matriz de rigidez, $n_{gl} \times n_{gl}$
$\ddot{q}(t)$	vetor de aceleração, $n_{gl} \times 1$
$\dot{q}(t)$	vetor de velocidade, $n_{gl} \times 1$
$q(t)$	vetor deslocamento, $n_{gl} \times 1$
$y(t)$	vetor de resposta
$u(t)$	sinal aleatório
$F(t)$	vetor de forças externas, $n_{gl} \times 1$
C_c	constante de amortecimento crítico
ω_n	frequência natural [rad/s]
ζ	razão de amortecimento
$[\lambda]$	matriz de autovalores, $n_{gl} \times n_{gl}$
$[\Psi]$	matriz de autovetores, $n_{gl} \times n_{gl}$
$[\psi]$	matriz modal contendo os vetores modais, $n_{gl} \times n_{gl}$
$[m]$	matriz de massa modal, $n_{gl} \times n_{gl}$
$[k]$	matriz de rigidez modal, $n_{gl} \times n_{gl}$
$[I]$	matriz identidade
$H(s)$	função de transferência
ω_d	frequência natural amortecida
$H(i\omega)$	Função de Resposta em Frequência
$h(t)$	Função de Resposta ao Impulso

$[B_f]$	matriz de influência de entrada, $n \times l$
n	ordem do sistema que é igual a $2 \times n \times l$
m	número de entradas
l	número de respostas medidas ou número de sensores utilizados na medição
i	número de blocos de linhas na matriz Hankel
j	número de colunas da matriz bloco de Hankel
$[A_c]$	matriz de estado contínua, $n \times n$
$[B_c]$	matriz de entrada contínua, $n \times m$
$[C]$	matriz de saída, $l \times n$
$[D]$	matriz de transmissão direta, $l \times m$
$x(t)$	vetor de estado contínuo, $n \times 1$
x_k	vetor de estado discreto, $n \times 1$
$[A]$	matriz de estado discreta ou matriz dinâmica, $n \times n$
$[B]$	matriz de entrada discreta, $n \times m$
Δt	intervalo de discretização
w_k	ruído de entrada
v_k	ruído de saída
$E [\]$	operador esperança
$[\Sigma]$	matriz de covariância do estado
$[G]$	matriz de correlação estado-saída, $n \times l$
$[A_i]$	matriz de correlação de saída, $l \times l$
$[H]$	matriz bloco de Hankel, $2li \times j$
$[Y_p]$	saídas “passadas” da matriz bloco de Hankel, $li \times j$
$[Y_f]$	saídas “futuras” da matriz bloco de Hankel, $li \times j$
$[\Gamma_i]$	matriz de observabilidade, $li \times n$
$[\Gamma_{i-1}]$	é a matriz Γ_i com as últimas l linhas deletadas
$[\Gamma_{i-1}^{-1}]$	pseudo-inversa de Γ_{i-1}

$[A_i^c]$ matriz de controlabilidade, $n \times li$

$[\hat{X}_i]$ seqüência de estados estimados, $n \times j$

$[P_i]$ projeção do bloco das saídas futuras no bloco das saídas passadas, $li \times j$

$W_1 W_2$ determinam a base do espaço de estado na qual o modelo será identificado

$[C_i]$ matriz de covariância cruzada, $li \times li$

$\{\hat{x}_{i+1}\}$ estado estimado

$[Y_{i/i}]$ matriz de Hankel com somente um bloco de linha, $l \times j$

$\rho_w \rho_v$ resíduos

$\overline{\Gamma}_i$ é a matriz Γ_i sem as primeiras l linhas,

$\underline{\Gamma}_i^{-1}$ é a matriz Γ_i^{-1} sem as últimas l linhas.

$\Psi \in C^{n \times n}$ matriz cujas colunas são os autovetores do sistema discreto

$\Lambda \in C^{n \times n}$ matriz diagonal que contém os autovalores do sistema discreto

μ_i autovalores contínuos

ξ_i amortecimento modal

$\Phi \in C^{l \times n}$ modos de vibrar

$\{y_f\}$ vetor de resposta contendo apenas um modo

$\{\Phi_x\}$ modo de vibrar medido, $l \times 1$

$\{\Phi_A\}$ modo de vibrar obtido teoricamente, $l \times 1$

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O objetivo do monitoramento de vibrações de estruturas de engenharia é observar o comportamento da estrutura nas diferentes condições de funcionamento e no caso da Análise Dinâmica identificar os seus principais parâmetros de vibração (parâmetros próprios). Os métodos de identificação dos parâmetros de vibração tanto para o desenvolvimento de modelos dinâmicos confiáveis como para entender o comportamento de modelos já existentes são objetos de estudo da análise modal. Os parâmetros modais (frequências naturais, fatores de amortecimento e resíduos modais) e eventualmente os parâmetros estruturais (matrizes de inércia, rigidez e amortecimento) da estrutura são utilizados em diversas aplicações na área da Engenharia Mecânica, como por exemplo: análise dinâmica de peças estruturais de difícil modelagem analítica, refinamento ou verificação de um modelo analítico, predição de cargas dinâmicas ou níveis de resposta que uma estrutura pode experimentar durante sua operação, controle de vibrações em estruturas flexíveis, identificação incipiente de falhas, ajuste de modelos, monitoramento da integridade estrutural, dentre outras.

Os métodos de identificação em análise modal podem ser separados em duas categorias básicas, os que operam no domínio do tempo e os que operam no domínio da frequência. Os métodos no domínio da frequência tiveram um desenvolvimento muito mais acelerado do que os outros. Talvez o fato de, desde a metade da década de setenta, poder-se contar com equipamentos capazes de proceder a análise de Fourier, tenha influenciado significativamente para o desenvolvimento de técnicas no domínio da frequência. Os métodos no domínio do tempo despontaram como alternativa promissora aos métodos na frequência, visto que podem ser aplicados em estruturas que apresentam características especiais, como por exemplo, modos

acoplados, frequências naturais muito próximas. Hoje já se sabe que os métodos de identificação não se aplicam de forma universal a quaisquer tipos de situações encontradas na prática. Assim, dependendo do problema a ser resolvido, escolhe-se o método que apresente o melhor desempenho possível naquele contexto específico.

Os métodos de identificação na sua maioria utilizam as informações de ambas as medidas, medidas de entrada (forças) e de saídas (aceleração). Entretanto, existe uma demanda para que os métodos de identificação não sejam usados somente para dados obtidos sob condições de laboratório bem controladas, mas também para a reposta dinâmica de estruturas reais de engenharia como prédios, pontes e torres (Peeters e Roeck, 1999; Wei-Xin e Zhou-Hong, 2004).

De forma geral, a identificação das características dinâmicas de uma estrutura é feita a partir dos sinais provenientes da resposta da estrutura causada por uma determinada excitação. Esta excitação, por sua vez, pode ser produzida a partir de testes de vibração forçada utilizando excitadores eletromecânicos, eletromagnéticos e/ou hidráulicos que produzem o carregamento da estrutura, ou ainda a partir de excitações ambientes produzidas pela própria condição de operação da estrutura, por exemplo, tráfego de veículos, movimento de pessoas, vento e outros.

Entretanto, a excitação de determinados tipos de estruturas é geralmente cara e difícil. Por outro lado, a excitação natural devida às próprias condições de operação parece ser mais natural para este tipo de estrutura (difícil de ser excitada artificialmente) e pode ser utilizada com vantagens, lembrando sempre que excitações ambientes (vento, tráfego) geralmente são de natureza estocástica e ainda difíceis, se não impossíveis, de serem medidas. A excitação ambiente é geralmente utilizada no caso de estruturas de grande porte, pois permite realizar um monitoramento contínuo ou intermitente sem a interrupção das condições de operação, além de ser, muitas vezes, uma alternativa técnica e economicamente mais viável. A literatura mostra que existe uma grande quantidade de trabalhos que tratam da identificação de sistemas submetidos à excitação ambiente. Dentre estes, pode-se citar Jones et al. (1995), Saito e Yokota (1996), Farrar e James III (1997), Hermans e Van der Auweraer (1999), Peeters e De Roeck (1999), Ndambi et al. (2000), Huang (2001), Peeters e Ventura (2003), Cremona et al. (2003), Amani et al. (2004) e Brasiliano (2005).

Estas técnicas de identificação dos parâmetros do modelo são conhecidas por Análise Modal Operacional (AMO), devido ao fato de utilizarem as próprias forças geradas pela operação do sistema como fonte de excitação. Contudo, as técnicas de análise modal operacional costumam

considerar as forças de excitação como sendo um ruído branco estacionário o que pode trazer problemas, caso existam componentes harmônicos inseridos nas forças geradas pela operação do sistema. Este problema não é difícil ocorrer principalmente em se tratando da utilização de excitações operacionais em sistemas rotativos (Mohanty and Rixen, 2004). Nestes casos, o gráfico da função de densidade espectral da resposta apresentará picos correspondendo a modos naturais e picos correspondendo a modos operacionais (respostas às excitações harmônicas). Desta forma, os métodos tradicionais de AMO podem em determinadas condições considerar erroneamente tais picos de modos operacionais como sendo modos naturais. Portanto, a utilização de um algoritmo capaz de identificar os picos correspondentes aos modos operacionais seria importante neste caso (Matos e Amarante, 2005).

O trabalho discute a implementação e aplicação do método de Identificação Estocástica de Subespaços para a análise modal baseada apenas na resposta. Numa primeira etapa são utilizados dados simulados obtidos pela análise de Elementos Finitos e, posteriormente, é estudada a eficiência do método para identificação de parâmetros modais a partir de dados experimentais de uma estrutura tipo *Frame*. Adicionalmente, o trabalho discute o efeito de modos operacionais (respostas às excitações harmônicas) na identificação dos parâmetros do modelo.

A metodologia aplicada utiliza a função densidade de probabilidade para analisar este efeito (Brincker *et al.*, 2000). Os sinais são separados (filtrados) em uma faixa de frequência contendo um modo para a verificação se este corresponde a um modo natural ou operacional. Efetuando a identificação e a filtragem dos modos operacionais, é aplicado o método de análise modal operacional (Identificação Estocástica de Subespaços) nos sinais tratados e então os modos naturais são estimados. Serão apresentados casos em que a frequência da excitação senoidal é próxima a um dos modos. Desta forma, pode-se avaliar a influência da filtragem nos resultados. Também é discutida a distinção entre modos reais e componentes harmônicos no sinal de resposta medido.

1.1. ANÁLISE MODAL OPERACIONAL

Na análise modal tradicional os parâmetros modais são obtidos a partir das funções de resposta em frequência (FRFs), que relacionam a saída (resposta) com a entrada (excitação). Para este tipo de análise é necessário medir a entrada e a saída do sistema.

A análise modal operacional se baseia na medida da resposta da estrutura em condições de operação e para isso utiliza como excitação as forças de serviço que atuam sobre a mesma. Como essas forças de entrada não são medidas, não é possível obter as FRFs do sistema.

A análise modal operacional é utilizada quando não é conveniente excitar as estruturas por meio de um martelo ou um excitador, algumas porque são difíceis de excitar artificialmente devido ao seu tamanho, forma ou localização. Para muitas estruturas grandes pode ser complicado excitá-las artificialmente a um nível tal que a resposta devida a fatores ambientais (não controláveis) seja pequena em comparação com a outra artificial. Há outros casos nos quais surgem problemas devido a não linearidades introduzidas por um nível de resposta muito elevado por empregar métodos artificiais de excitação. Além do mais, todas as estruturas podem estar submetidas às forças ambientais, como por exemplo, o vento, as ondas, o tráfego, ou ainda, seu próprio maquinário.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os vários aspectos da Análise Modal bem como suas aplicações têm sido amplamente pesquisadas nas últimas décadas e, atualmente, existe uma vasta literatura cobrindo os principais aspectos teóricos, bem como aspectos práticos relacionados com os testes experimentais. Vários levantamentos bibliográficos (Ewins et al., 1981; Allemang, 1982) foram publicados já na década de oitenta e a literatura atual contempla, além de um número incontável de artigos, vários livros englobando os aspectos matemáticos e tecnológicos envolvidos na análise modal (Ewins, 1984; Maia et al., 1997; Allemang, 1999). Esses autores colocam, de uma forma clara e sistemática, a maioria dos conhecimentos disponíveis nesta área associados às suas respectivas experiências.

Nos métodos do domínio da frequência, os parâmetros de vibração são extraídos a partir dos dados de resposta em frequência, utilizando, na sua grande maioria, ajuste de modelos (curve fitting), mínimos quadrados, Decomposição em Valores Singulares, etc. (Brincker et al., 2001).

Vários métodos que operam no domínio do tempo derivam de uma técnica baseada na teoria desenvolvida por Prony (1795), na qual a identificação é realizada a partir da função resposta ao impulso.

Alguns métodos do domínio do tempo trabalham com a formulação contínua das equações de movimento: ITD – *Ibrahim Time Domain Method*, método das exponenciais complexas, PTD – *Polyreference Time Domain Method*, método de identificação baseado na série de Fourier; outros utilizam a formulação discretizada das equações de movimento: ERA – *Eigensystem Realization Algorithm* e ARMA – *Autoregressive-Moving Average Model*. Alguns destes métodos utilizam modelos matemáticos superdeterminados para aumentar a acuracidade da estimação.

Os primeiros sistemas lineares estocásticos envolviam modelos de sistemas com média móvel (MA) e autoregressivos (AR) e eram utilizados para explicar ciclos “quase periódicos”. Um pouco depois, surgiram teorias de processos estacionários. Foi na década de 60 que foram

desenvolvidas as teorias de estruturas para sistemas MIMO em espaço de estados e sistemas ARMA.

Num contexto mais atual, os pesquisadores que trabalham com teoria de controle preferem, em geral, uma formulação de primeira ordem para os modelos, então, propõem um método de identificação direta para identificação de parâmetros de vibração. Já Ewins (1984) apresenta métodos de identificação de parâmetros modais tanto no domínio do tempo quanto no da frequência. Juang e Pappa (1985) conceberam o método de identificação *ERA* bastante conveniente para Engenharia de Controle, que tornou possível obter a representação do sistema em variáveis de estado.

Ibrahim desenvolveu um método para identificação dos parâmetros modais de vibração de estruturas, a partir da resposta livre do sistema (Ibrahim e Mikulcik, 1973). A teoria da técnica é baseada numa reformulação das equações diferenciais ordinárias de movimento de um sistema de vários graus de liberdade com amortecimento viscoso. Estas equações, escritas no espaço de estado, dão origem ao modelo matemático usado para a identificação. Utilizam-se as respostas de deslocamento e de velocidade calculadas através da integração das respostas de aceleração do sistema livre. Esta técnica não possui restrições quanto ao grau de amortecimento do sistema ou quanto ao espaçamento das frequências naturais, diferentemente dos métodos do domínio da frequência então utilizados.

O segundo método apresentado por Ibrahim (Ibrahim, 1977) difere do que foi descrito nos trabalhos anteriores, já que neste o modelo matemático ou a equação diferencial representativa do comportamento dinâmico da estrutura não é desenvolvido. A resposta livre (aceleração) é usada diretamente para a identificação dos parâmetros de vibração.

Uma das grandes vantagens dos métodos do domínio do tempo é que eles não necessitam de estimativas iniciais para os parâmetros. No método das exponenciais complexas o ponto de partida é a expressão da função resposta ao impulso cujo cálculo era feito através da transformada inversa de Fourier da receptância (Ewins, 1984). Este era um inconveniente deste método, pois colhiam-se os dados no domínio do tempo, passava-se para o domínio da frequência para o cálculo da receptância, para depois retornar ao domínio do tempo. Atualmente existem novas técnicas que permitem calcular a função resposta ao impulso a partir dos próprios dados no domínio do tempo (Clarkson e Mercer, 1965).

Vold desenvolveu um método denominado PTD – *Polyreference Time Domain Method*, no qual a identificação é feita a partir dos dados de resposta livre ou da função resposta ao impulso, em duas etapas. Na primeira etapa, as frequências naturais amortecidas e os fatores de amortecimento são extraídos. Os coeficientes modais ou resíduos são depois calculados numa segunda etapa. Embora a primeira etapa utilize uma técnica do domínio do tempo, o cálculo dos resíduos pode ser feito ou no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Quando os dados utilizados para estimar os parâmetros são adquiridos apenas a partir de uma referência simples, o método PTD é igual ao método das exponenciais complexas.

Juang e Pappa (1985) desenvolveram um algoritmo, denominado ERA, para a realização de sistemas. Entende-se por realização de sistemas o processo de construir uma representação no espaço de estado, a partir de dados experimentais. O problema de realização mínima é equivalente ao problema de representação envolvendo uma sequência de matrizes reais conhecidas como parâmetros de Markov (funções de resposta ao pulso). Realização mínima consiste em um modelo com a menor dimensão no espaço de estado entre os sistemas realizados, que têm as mesmas relações de entrada-saída dentro de um grau de acuracidade especificado. Neste algoritmo, a matriz de Hankel, que representa a estrutura de dados para o algoritmo, é generalizada para permitir uma distribuição aleatória dos parâmetros de Markov, gerados por respostas livres. Uma abordagem unificada baseada nesta generalização é desenvolvida para estender sua aplicação em conjunto com a técnica da decomposição em valores singulares.

O modelo ARMA permite uma identificação precisa das frequências modais e dos fatores de amortecimento. A formulação teórica é baseada na equação de diferenças do sistema, no espaço de estado. Nesta equação, duas parcelas do modelo são definidas: a parte autoregressiva (AR) e a parte de média-móvel (MA). Obtém-se, então, um sistema de equações lineares que fornecem os coeficientes da função de transferência no domínio “Z”, na forma de uma razão polinomial. As raízes complexas do denominador definem as frequências modais e os fatores de amortecimento, enquanto que as raízes complexas do numerador definem as frequências de anti-ressonância. Modelos super-dimensionados são utilizados e, juntamente com os modos e os zeros naturais, obtém-se um grande número de “modos espúrios”, os quais devem ser eliminados.

A literatura, conforme discutido anteriormente, mostra vários textos que fornecem uma completa descrição dos métodos de estimação de parâmetros modais utilizando a relação entrada/saída. Os métodos utilizando apenas as respostas, de forma geral, são mais recentes e,

apesar da existência de vários artigos (Brincker, 2000; Brincker, 2001; Peeters and Roeck, 1995) nesta linha, ainda não estão bem consolidados. Peeters and Roeck (1995) discutem estes aspectos e apresentam um dos primeiros *reviews* dos métodos baseados apenas na resposta.

2.1. IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA

Dentre as técnicas baseadas apenas nas respostas cita-se a Decomposição no Domínio da Frequência FDD (Brincker, 2001) e a Identificação Estocástica de Subespaços SSI (Peeters and Roeck, 1999). O método Identificação Estocástica de Subespaços é baseado na construção da matriz de Hankel, que é a base para a realização do modelo em espaço de estado discreto.

A área de engenharia civil contribuiu com grande quantidade de trabalhos relativos à aplicação das técnicas multicanal no domínio do tempo de análise modal operacional. Isto deve-se ao fato que em ensaios de vibração em estruturas civis é frequentemente impraticável e de custo elevado utilizar excitação artificial, como martelo ou excitador. A excitação ambiente como vento, tráfego ou mesmo pequenos tremores, ao contrário, está disponível livremente.

As técnicas de identificação estocástica provaram ser muito úteis na engenharia mecânica, por exemplo, para obter os parâmetros modais de uma aeronave durante testes de voo. Pappa e Juang (1988) utilizaram dados de sistemas naturalmente excitados diretamente no algoritmo *ERA*.

Clarkson e Mercer (1965) estudaram a aplicação das funções de correlação cruzada entre a excitação (ruído branco) e a resposta para determinação das características da função de resposta em frequência (FRF) de uma estrutura ligeiramente amortecida. Embora assuma o conhecimento das forças de excitação, o procedimento merece destaque pela contribuição na disseminação da idéia de utilizar funções de correlação em lugar das tradicionais funções de resposta ao impulso, quando a excitação não pode ser medida.

Segundo Clarkson e Mercer (1965), quando um sistema é excitado por uma força que tem densidade espectral constante, a correlação cruzada da excitação e da resposta é conhecida por fornecer o conjunto de funções de resposta ao impulso (FRIs). Tal constatação pode ser utilizada para abastecer com as funções de correlação os algoritmos clássicos de identificação no domínio do tempo, formulados originalmente para a resposta ao impulso. O procedimento proposto por Clarkson e Mercer, aliado às técnicas de extração de parâmetros modais no domínio do tempo tais como ITD, Polireferência e ERA, deram origem a uma poderosa ferramenta para a análise

modal de estruturas naturalmente excitadas, denominada técnica de excitação natural (NExT). O novo método contribuiu para popularizar, na comunidade de engenharia mecânica, a idéia de que é possível extrair os parâmetros modais de estruturas excitadas por forças desconhecidas.

A identificação dos parâmetros modais de uma estrutura sob excitação ambiente é discutida na literatura em muitos trabalhos recentes indicando que o tema é atrativo e emergente no campo da análise estrutural. Especificamente a análise modal operacional tem sido realizada em estruturas aeronáuticas (Abdelghani et al., 1999), para monitoramento em carros esportes (Hermans et al., 1999) e em plataformas oceânicas (Hoen et al., 1993).

Dentre os vários métodos para extração das frequências naturais e fatores de amortecimento de estruturas utilizando somente dados de saída, destaca-se o *algoritmo de predição linear* baseado no modelo *autoregressivo de médias móveis* (ARMA) como sendo a mais clássica das técnicas de identificação estocástica. Um modelo mais geral para sistemas multivariados invariantes no tempo é o ARMA vetorial (ARMAV) que relaciona o termo autoregressivo das saídas ao termo de médias móveis do ruído branco considerado como entrada do sistema.

Hermans e Auweraer (1999) estudam a aplicação da técnica NExT em três casos industriais, analisando suas capacidades e limitações. Tanto a técnica NExT quanto o ERA obtiveram sucesso na caracterização modal de um sistema de suspensão traseira de um carro durante testes de rodagem, na análise de “flutter” de uma aeronave comercial em voo e na identificação dos modos de uma ponte de concreto em condições normais de operação. A abordagem utilizando o algoritmo ERA se mostrou superior quando houve necessidade de um número alto de respostas devido a sua evidente eficiência computacional.

O número de publicações recentes nesta área demonstra o crescente interesse da comunidade científica na obtenção de uma base sólida para a identificação dos parâmetros modais utilizando somente a resposta do sistema. Outras aplicações desta técnica têm sido mostradas, dentre elas cita-se: a utilização da técnica para estimar os parâmetros modais em torres a partir de excitações provocadas pelo vento (Yoshida et al., 2004), a análise operacional de dutos de refrigeração de um reator nuclear (Pekka et al., 2004), estimação dos parâmetros modais do sistema de transmissão de um automóvel em funcionamento (Moller e Gade, 2004) e outros.

Acredita-se que esta é uma área de grande interesse para o país, apresentando um potencial de aplicação muito vasto, tanto em estruturas mecânicas, como em estruturas de engenharia civil (pontes, viadutos, etc.).

CAPÍTULO 3

JUSTIFICATIVA

As exigências cada vez maiores de capacidade de trabalho e desempenho das máquinas e equipamentos, aliadas à crescente competitividade e demanda comercial, exigem das empresas o desenvolvimento de projetos e modelos mais refinados, que possibilitam acessar (conferir) o real comportamento do sistema, tanto do ponto de vista estático como dinâmico. Isso leva, em muitos casos, à necessidade de um maior refinamento do projeto o que geralmente demanda técnicas de modelagem e análise mais elaboradas, envolvendo a avaliação de um número crescente de detalhes do projeto, incluindo métodos para identificação das suas principais características (estático/dinâmico) ou mesmo o acompanhamento das suas condições de operação (monitoramento das condições de saúde do sistema). Neste caso, o analista deve buscar definir um modelo válido que represente fielmente o comportamento do sistema real. Neste contexto, a análise modal tem papel muito importante, principalmente, no estudo do comportamento dinâmico estrutural dos sistemas mecânicos.

Dentre as diversas áreas da Análise Modal destaca-se a *Identificação de Sistemas Dinâmicos*, uma área de fundamental importância, pois trata da determinação de modelos matemáticos que descrevem o comportamento dinâmico de sistemas em função do tempo. Os modelos obtidos são úteis para realizar simulações, controle, monitoramento, detecção de falhas, previsões, otimizações, entre outras aplicações. Modelos matemáticos são tipicamente utilizados em situações onde a realização de um experimento com o sistema real é muito cara, muito perigosa, difícil ou mesmo impossível.

Na Análise Modal, os parâmetros modais são geralmente derivados a partir das relações *input-output* medidas, geralmente, em condições de laboratório bem controladas, sendo que a excitação da estrutura é artificial, utilizando um martelo instrumentado, um excitador eletromagnético/mecânico e outros. Entretanto, o comportamento vibro-acústico de uma estrutura

em condições de operação, por exemplo, um carro em uma pista, pode ser significativamente diferente da situação de um teste de laboratório, devido a efeitos de pré-tensão, suspensão, condições de fixação e suporte do sistema e outros. Portanto, a identificação do modelo modal da estrutura a partir das condições de operação, isto é, excitação natural, poderia ser mais adequada. Tomando novamente o carro como exemplo, o modelo modal do mesmo, utilizando a análise modal baseada apenas na resposta poderia ser obtido para o carro em operação. Neste caso, seriam utilizados apenas os dados das respostas medidas com o carro em funcionamento (trafegando) e a excitação não necessitaria ser medida como no caso clássico.

A grande maioria das rotinas e métodos de identificação modal geralmente são limitados a testes de laboratório, utilizando excitação forçada. No entanto, os testes baseados nas condições de operação, também levam em conta na avaliação do comportamento do sistema as influências ambientais, ou seja, os dados e as condições de testes para o caso de um teste modal utilizando apenas as condições reais de carregamento (excitação natural) diferem significativamente das condições de um teste de laboratório.

A utilização da própria condição de operação para estudar o comportamento e os parâmetros de interesse de um sistema é uma opção muito atraente, pois evita a necessidade da montagem de equipamentos e instrumentos para a excitação do sistema. Um outro aspecto de grande relevância neste caso seria a possibilidade da utilização de modelos de diagnose, *in situ*, para o monitoramento, detecção e localização de falha estrutural.

As principais vantagens deste tipo de ensaio são:

- É necessário menor tempo para realizar o ensaio, visto que basta conectar os equipamentos de medida.
- É mais barato, pois não necessita da aquisição de equipamentos excitadores e pode realizar-se *in situ*.
- O ensaio não interfere nem interrompe o funcionamento normal da estrutura que pode continuar em serviço enquanto se realiza.
- As respostas medidas são representativas das condições reais de funcionamento da estrutura.
- Evita-se a aplicação de cargas artificiais que podem comprometer a estrutura.

A identificação baseada apenas na resposta, assim como no caso clássico, pode ser realizada tanto no domínio do tempo como da frequência. Dentre as várias técnicas baseadas no domínio do tempo, tem-se os métodos referidos como Identificação Estocástica de Subespaços (SSI), Identificação Estocástica de Subespaços com sinal de referência (Peeters et al., 1999), NExT/ERA, método Poly referência, neste caso, a função de resposta ao impulso é substituída por funções de covariância e o método de predição de erro (PEM) (Ljung, 1999). Entre os métodos baseados no Domínio da Frequência, cita-se o método Peak-Picking (PP) da escolha dos picos de frequência e o método Decomposição no Domínio da Frequência (FDD) (Brincker e Andersen, 2000).

Tomando-se como base a análise modal a partir da resposta, o trabalho envolve o estudo, implementação e avaliação das potencialidades dos métodos de identificação baseados no domínio do tempo, mais especificamente, o método Identificação Estocástica de Subespaços (SSI) e suas variantes (Peeters e Roeck, 1999; Van Overschee e De Moor, 1996).

CAPÍTULO 4

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo serão discutidos os conceitos necessários para o bom entendimento do processo de identificação, Análise Modal, formulação de estado, algoritmo e o significado das várias variáveis que serão utilizadas neste trabalho.

4.1. ANÁLISE MODAL

Na análise modal teórica, mais especificamente, por elementos finitos, utilizam-se métodos numéricos-analíticos, e os parâmetros modais são obtidos a partir dos parâmetros espaciais do modelo (Ewins, 1984), ou seja, das matrizes de massa, rigidez, e menos freqüentemente, de amortecimento. Já na análise modal experimental, os parâmetros modais são estimados a partir das relações entrada/saída medidas diretamente na estrutura (MAIA et al., 1997). O procedimento experimental para extração dos parâmetros modais tem demonstrado ser eficiente e vem conquistando amplo campo de aplicação, como por exemplo: validação e refinamento de modelos de elementos finitos, modificação de estruturas, detecção de falhas e análise de estruturas complexas. A análise modal experimental pode ser melhor utilizada com o entendimento do princípio da análise modal teórica. Neste contexto, a seguir será abordada uma discussão sobre a análise modal teórica antes da análise modal experimental.

4.1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Um sistema de N graus de liberdade possui a mesma quantidade de freqüências naturais, sendo que para cada uma delas, existe um estado de vibração correspondente conhecido como modo de vibrar. Os termos matemáticos relacionados com essas quantidades são conhecidos

como autovalores e autovetores, respectivamente, os quais são determinados a partir de um sistema de N equações de movimento e têm certas propriedades dinâmicas associadas ao sistema.

Quando vibra em um desses modos, todos os pontos do sistema não amortecido ficam submetidos a um simples movimento harmônico que passa através de suas posições de equilíbrio simultaneamente. Para que um modo seja observado é necessário que as condições iniciais aplicadas ao sistema assim o permita. Para uma condição inicial mais genérica, como uma excitação impulsiva, a vibração livre resultante pode conter todos os modos de vibrar simultaneamente. Sob um outro enfoque, modo de vibrar é um estado de movimento em que todas as massas, em sistemas não contínuos, oscilam alcançando deslocamentos máximos simultaneamente, passando por suas posições de equilíbrio, também simultaneamente, ou ainda, é um estado onde todas as partes móveis do sistema oscilam em fase com uma dada frequência.

Na análise e desenvolvimento de sistemas mecânicos, o comportamento dinâmico estrutural do modelo pode ser descrito por seus parâmetros modais, ou seja, suas frequências naturais, modos de vibrar e razões de amortecimento. A análise modal é um procedimento bastante eficaz para determinar esses parâmetros e a literatura mostra que essa técnica vem conquistando uma ampla gama de aplicação, tanto sob o ponto de vista da análise modal teórica, quanto da análise modal experimental. Nesta seção serão apresentados os conceitos básicos de análise modal teórica e experimental. Estes conceitos serão utilizados como base teórica para introdução à análise modal utilizando somente a resposta.

A análise modal convencional empregada para investigar o comportamento dinâmico de uma estrutura é sustentada em três hipóteses básicas:

- *Linearidade do comportamento dinâmico*: a resposta da estrutura para uma combinação de forças aplicadas simultaneamente é equivalente à soma das respostas de cada força atuando individualmente;
- *Invariância no tempo*: os parâmetros físicos da estrutura são constantes;
- *Observabilidade*: a relação entrada/saída medida contém informações suficientes para determinar o comportamento dinâmico do modelo.

Estruturas lineares contínuas geralmente atendem estes requisitos e podem ser representadas por modelos matemáticos lineares obtidos a partir da discretização da estrutura em elementos

conectados entre si por um número finito de pontos denominados nós do modelo (Przemieniecki, 1968). A interação entre as forças dos vários elementos que constitui a estrutura é representada por forças resultantes dos momentos de flexão, torção e esforços de tração atuando nesses nós. Cada equação de equilíbrio associada às forças descreve o movimento de um grau de liberdade da estrutura discretizada e o resultado é um conjunto de equações acopladas. Se uma estrutura, que pode ser idealizada dessa forma, é excitada com um dado carregamento e a resposta e a própria força são medidas simultaneamente, então os parâmetros modais podem ser estimados a partir das relações entrada-saída, denominadas Funções de Resposta em Frequência (FRF(s)) ou suas equivalentes no domínio do tempo, denominadas Funções de Resposta ao Impulso (FRI(s)) (Juang e Pappa, 1985).

Para um melhor entendimento dos conceitos básicos envolvidos na análise modal, inicialmente será discutido o comportamento de um sistema simples de 1 grau de liberdade, mostrado na Figura 4.1, considerando o amortecimento viscoso na representação das forças dissipativas.

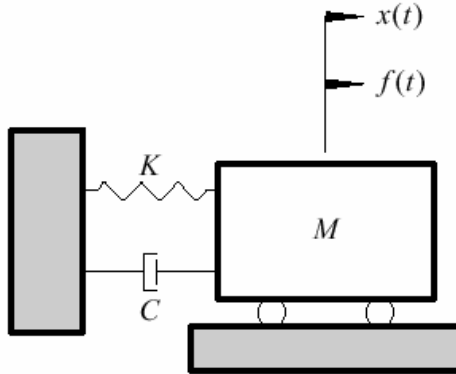


Figura 4.1: Sistema de um grau de liberdade.

A equação de movimento é obtida a partir do balanço das forças de inércia ($f_i = M \ddot{x}$), dissipativa ($f_d = C \dot{x}$), elástica ($f_e = K x$) e força externa $f(t)$:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (4.1)$$

Na qual: M – massa $[Kg]$;

C - coeficiente de amortecimento viscoso $[Ns/m]$;

K - constante de rigidez $[N/m]$;

t - variável tempo $[s]$;

$\ddot{x}, \dot{x}, x$ - aceleração $[m/s^2]$, velocidade $[m/s]$ e deslocamento $[m]$ respectivamente;

$f(t)$ - força excitadora $[N]$.

A solução geral da equação (4.1) é dada em termos da solução homogênea e da solução particular. A solução homogênea, para $f(t)=0$ é da forma:

$$x(t) = X e^{st}, \quad (4.2)$$

na qual, X e s são constantes. Substituindo a equação (4.2) na (4.1) e assumindo que a força externa é nula, tem-se:

$$(Ms^2 + Cs + K) X e^{st} = 0 \quad (4.3)$$

A solução não trivial da equação (4.3) é calculada a partir das raízes da equação característica s_1 e s_2 .

$$s_{1,2} = -\frac{C}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}} \quad (4.4)$$

O valor das raízes s_1 e s_2 são dados em função dos parâmetros do modelo e são observadas as seguintes possibilidades:

- As forças de amortecimento governam o movimento e então o sistema é conhecido como superamortecido: $\left(\frac{C}{2M}\right)^2 > \frac{K}{M}$, então as duas raízes são reais e negativas;

- As forças elásticas e de inércia prevalecem, o sistema é conhecido como subamortecido:

$$\left(\frac{C}{2M}\right)^2 < \frac{K}{M}, \text{ as duas raízes são complexas conjugadas com partes reais negativas;}$$

- O sistema é criticamente amortecido: $\left(\frac{C}{2M}\right)^2 = \frac{K}{M}$, as duas raízes são iguais, reais e negativas.

Esta análise mostra que existe um parâmetro que define um limite entre o superamortecimento e o subamortecimento. Tal parâmetro é conhecido como constante de amortecimento crítico (C_c), que é definido quando o termo dentro da raiz da equação (4.4) é igual a zero:

$$C_c = 2M\omega_n \quad (4.5)$$

Na qual:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = \text{Frequência natural não amortecida [rad/seg]}$$

Com esta definição de amortecimento crítico, uma outra quantidade adimensional chamada de razão de amortecimento (ζ) é definida pela razão entre o coeficiente de amortecimento e o amortecimento crítico do correspondente sistema:

$$\zeta = \frac{C}{C_c} \quad (4.6)$$

Agora as raízes da equação característica podem ser escritas na forma:

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \quad (4.7)$$

E o sistema pode ser classificado em função da razão de amortecimento ζ :

- Sistema superamortecido: $\zeta > 1$;
- Sistema criticamente amortecido: $\zeta = 1$;
- Sistema subamortecido: $\zeta < 1$.

No caso particular de vibrações livres, excitadas por condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$, a solução da equação (4.1) pode ser escrita no domínio do tempo em função da razão de amortecimento, da seguinte forma:

Sistema superamortecido

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[x(0) \cosh(\omega_n t \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \frac{\dot{x}(0) + \zeta\omega_n x(0)}{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh(\omega_n t \sqrt{\zeta^2 - 1}) \right] \quad (4.8)$$

Sistema criticamente amortecido

$$x(t) = e^{-\omega_n t} [x(0)(1 + \omega_n t) + \dot{x}(0)t] \quad (4.9)$$

Sistema subamortecido

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[x(0) \cos(\omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2}) + \frac{\dot{x}(0) + \zeta\omega_n x(0)}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2}) \right] \quad (4.10)$$

Estruturas mecânicas, geralmente, apresentam razões de amortecimento menores que 1. Por isso, toda discussão e formulação deste trabalho, será baseada no caso subamortecido.

4.1.2. ANÁLISE MODAL TEÓRICA DE SISTEMAS DE VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

Com o advento da computação, a modelagem por elementos finitos tem sido amplamente utilizada. O método surgiu no campo da análise estrutural e tem sido expandida a diversas aplicações da engenharia aeroespacial, arquitetura naval, mecânica dos fluidos, transferência de calor e até na medicina.

Em elementos finitos o corpo elástico contínuo é representado por um sistema discreto, formado por um conjunto de elementos estruturais unidos entre si, através de um número finito de pontos denominados nós do modelo. Um elemento estrutural é definido como uma parte do corpo elástico e o seu comportamento é definido a partir do conhecimento dos deslocamentos e forças nodais atuando neste elemento. O conhecimento do comportamento dos elementos individuais permite representar o comportamento do sistema como um todo. As matrizes globais de massa e rigidez da estrutura são montadas a partir das matrizes elementares de massa e rigidez estimada individualmente para cada elemento de acordo com a teoria de elementos finitos (Bathe & Wilson, 1976; Dhatt et al., 1984).

Tomando a equação diferencial algébrica que expressa o equilíbrio das forças de um sistema de um grau de liberdade, Eq. (4.1), é possível expandi-la para representar um sistema de ngl graus de liberdade. As matrizes globais obtidas por Elementos Finitos levam a uma representação do modelo por ngl equações diferenciais, sendo ngl o número de graus de liberdade do modelo discreto. Neste caso, o modelo é representado por um sistema linear de ngl equações diferenciais de segunda ordem acopladas. Na forma matricial tem-se:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.11)$$

Na qual: $\{\ddot{x}(t)\}$, $\{\dot{x}(t)\}$ e $\{x(t)\}$ - vetor aceleração, velocidade e deslocamento respectivamente;

$\{f(t)\}$ - vetor das forças aplicadas no sistema;

$[M]$, $[K]$ e $[C]$ - são respectivamente as matrizes de massa, rigidez e amortecimento viscoso, de ordem $ngl \times ngl$;

ngl - número de graus de liberdade.

Na análise dinâmica, o efeito do amortecimento usualmente não é considerado. Portanto a equação (4.11) torna-se:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.12)$$

Este sistema de equações expressa o equilíbrio do sistema em termos das matrizes de massa, rigidez e forças externas atuando no sistema. Ele representa um grupo de equações lineares com coeficientes constantes. Assumindo a força de excitação do tipo $\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t}$ e que a solução é da forma $\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t}$, a equação (4.12) pode ser transformada na equação (4.13).

$$(-\omega^2[M] + [K])\{X\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (4.13)$$

Na qual: ω - frequência de oscilação;

$\{F\}$ - vetor de amplitudes da força de excitação;

$\{X\}$ - vetor de amplitudes da resposta.

De qualquer forma, a solução numérica da equação (4.12) não é simples devido às dificuldades computacionais, particularmente para sistemas de alta ordem. Para certos casos especiais, uma maneira apropriada de resolver o sistema é utilizar a análise modal. Este processo requer a solução do problema de autovalor do sistema e a resposta da estrutura é expressa como uma combinação linear dos autovetores (Meirovitch, 1980).

Problema de Autovalor

Para uma estrutura não amortecida, a equação homogênea associada com a equação do movimento pode ser escrita assumindo que as forças de excitação são nulas. A resposta do sistema neste caso pode ser obtida considerando a solução homogênea a partir de um problema de autovalor (Meirovitch, 1980; Bathe e Wilson, 1976), equação (4.14).

$$(-\omega^2[M] + [K])\{X\} = 0 \quad (4.14)$$

A solução não trivial da equação (4.14) é dada por uma matriz diagonal $[\lambda]$ de ordem $n_{gl} \times n_{gl}$, chamada de matriz de autovalores associada a uma outra matriz $[\psi]$, denominada matriz de autovetores. Cada $\lambda_r = \omega_r^2$ em particular está relacionado a um vetor deslocamento $\{\psi\}_r$, (Meirovitch, 1980). Na dinâmica estrutural, os autovalores e os autovetores são interpretados respectivamente como as frequências naturais e modos próprios de vibrar da estrutura. Com esta interpretação, o problema de autovalor pode ser expresso por:

$$[K]\{\psi\}_r = \lambda_r [M]\{\psi\}_r \quad (4.15)$$

Como a matriz $[M]$ é simétrica e positiva definida e a matriz $[K]$ é simétrica e positiva semi-definida, os autovalores são reais e não negativos. Vale ressaltar que para o caso de uma estrutura na condição livre-livre, a solução admite autovalores nulos associados aos autovetores representando os modos de corpo rígido, ou seja, o corpo livre pode movimentar-se numa frequência nula sem se deformar. A solução computacional do problema de autovalor é bem conhecida e existem vários métodos de resolução (Bathe & Wilson, 1976) e não será discutida neste trabalho.

4.1.3. ORTOGONALIDADE DOS AUTOVETORES

Uma das propriedades mais importante dos modos próprios é a propriedade de ortogonalidade em relação as matrizes de massa e rigidez, cuja dedução pode ser verificada detalhadamente em Meirovitch (1975). A propriedade de ortogonalidade é de grande utilidade na resolução dos problemas de análise estrutural, é utilizada na formulação dos algoritmos para a solução de problemas de autovalor em elementos finitos, além de ser frequentemente utilizada para desacoplar as equações de movimento do sistema, transformando as matrizes de massa e rigidez da estrutura em matrizes de massa e rigidez modal. Para o caso de autovalores não múltiplos, temos:

$$[\psi]^T [M] [\psi] = [m] \quad (4.16)$$

$$[\psi]^T [K] [\psi] = [k.] \quad (4.17)$$

Nas quais : $[\psi]$ - matriz modal contendo os vetores modais;

$[m.]$ - matriz de massa modal;

$[k.]$ - matriz de rigidez modal.

Quando os modos são normalizados em relação à massa modal, as propriedades de ortogonalidade são chamadas de ortonormal e passam a satisfazer as seguintes relações:

$$[\phi]^T [M] [\phi] = [I.] \quad (4.18)$$

$$[\phi]^T [K] [\phi] = [\lambda.] \quad (4.19)$$

Nas quais : $\{\phi\}_r = \frac{\{\psi\}_r}{m_r}$ - vetor modal normalizado em relação a massa;

$[I.]$ - matriz identidade;

$[\lambda.]$ - matriz dos autovalores.

Uma observação importante é que tanto na teoria de elementos finitos quanto na análise modal experimental é possível obter as matrizes de massa e rigidez da estrutura a partir dos parâmetros modais, utilizando as relações de ortogonalidade, equações (4.16) e (4.17). Entretanto, essas matrizes são obtidas somente para algumas situações muito especiais, visto que nem sempre é possível ter acesso a todos os modos e graus de liberdade do modelo, Eq. (4.20) e (4.21).

$$[m.] = [\phi]^{-T} [\phi]^{-1} \quad (4.20)$$

$$[k.] = [\phi]^{-T} [\lambda.] [\phi]^{-1} \quad (4.21)$$

Um outro aspecto de interesse das propriedades de ortogonalidade dos autovetores é a sua utilização na transformação das coordenadas físicas em coordenadas modais, que possibilita um desacoplamento das equações diferenciais do movimento. Isto possibilita resolver as equações do movimento como se cada equação fosse um sistema de um único grau de liberdade e depois retornar ao sistema físico. Considere a equação do movimento em coordenadas físicas, equação (4.13) expressa por:

$$(-\omega^2 [M] + [K])\{X\} = \{F\} \quad (4.22)$$

Pré-multiplicando a equação (4.22) pela matriz modal transposta $[\psi]^T$ e pós-multiplicando pela identidade $[I] = [\psi][\psi]^{-1}$ o sistema de equações do movimento é desacoplado através da diagonalização da matriz de massa e de rigidez, equação (4.23).

$$-\omega^2 [m_{\cdot}] [\psi]^{-1} \{X\} + [k_{\cdot}] [\psi]^{-1} \{X\} = \{\mathfrak{T}\} \quad (4.23)$$

Reescrevendo a equação (4.23), em termos do vetor deslocamento $\{q\}$, o sistema pode ser representado por *n*gl-sistemas de 1 g.d.l.

$$-\omega^2 [m_{\cdot}] \{q\} + [k_{\cdot}] \{q\} = \{\mathfrak{T}\} \quad (4.24)$$

$\{q\} = [\psi]^{-1} \{X\}$ - deslocamento em coordenadas modais

$\{\mathfrak{T}\}$ - vetor força em coordenadas modais

O vetor deslocamento em coordenadas espaciais $\{X\}$ é obtido pré-multiplicando a equação do deslocamento em coordenadas modais pela matriz modal.

$$\{X\} = [\psi] \{q\} \quad (4.25)$$

Uma análise mais atenta da equação (4.25) mostra que os deslocamentos físicos do modelo podem ser escritos como uma combinação linear das colunas da matriz modal, escalonados pelo vetor modal, conforme discutido em (Heylen et al., 1975).

4.1.4. ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

Na análise modal experimental, as características da dinâmica estrutural são definidas pela função de transferência, que define uma relação entre entrada e saída do sistema. A relação entrada/saída é obtida a partir da excitação e das respostas medidas nos pontos previamente selecionados. A seguir será feita uma rápida revisão teórica da análise modal experimental para um sistema de um único grau de liberdade.

Tomando como referência o sistema de 1 grau de liberdade da seção 4.1.1, a relação de entrada e saída pode ser dada a partir da representação da equação (4.1) no domínio de Laplace (variável s) que permite definir a função transferência do modelo. Assumindo as condições iniciais de velocidade e deslocamento iguais à zero, a função transferência do modelo $H(s)$, dada pela relação entre a entrada e a saída, é definida por:

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K} \quad (4.26)$$

A função transferência também pode ser escrita na forma de frações parciais (Forment, 1977):

$$H(s) = \frac{Q}{s - P} + \frac{Q^*}{s - P^*} \quad (4.27)$$

Na qual: * - conjugado complexo;

P - pólo localizado no plano s , definido por: $P = \sigma + i\omega_d$;

ω_d - frequência natural amortecida;

Q - resíduo, definido como: $Q = \frac{1/M}{i2\omega}$.

A Figura 4.2 mostra a representação dos pólos (P) no plano complexo para um sistema estável.

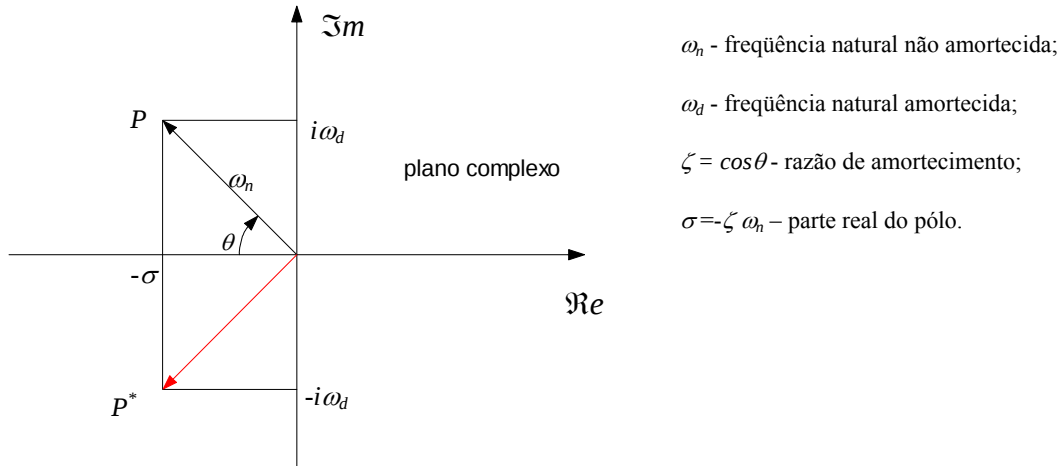


Figura 4.2: Localização dos pólos no plano complexo

No domínio de Laplace, a análise do sistema é feita em termos de pólos e resíduos. Agora, substituindo a variável s por $i\omega$ a função transferência pode ser vista no domínio da frequência, obtendo-se assim a chamada Função de Resposta em Frequência (FRF):

$$H(i\omega) = \frac{Q}{i\omega - P} + \frac{Q^*}{i\omega - P^*} \quad (4.28)$$

A aplicação da transformada inversa de Fourier na FRF resulta na chamada Função de Resposta ao Impulso FRI no domínio tempo:

$$h(t) = Qe^{P^*t} + Q^*e^{P^*t} = e^{-\zeta\omega_n t} (Qe^{i\omega_d t} + Q^*e^{-i\omega_d t}) \quad (4.29)$$

Na qual, o resíduo Q define a amplitude inicial, a parte real do pólo ($-\zeta\omega_n$) a taxa de decaimento e a parte imaginária do pólo (ω_d) define a frequência de oscilação.

As equações (4.28) e (4.29) formam a base para a identificação dos parâmetros modais de um sistema no domínio da frequência e no domínio do tempo, respectivamente.

Em muitos casos, o sistema não pode ser descrito através de um sistema de um grau de liberdade, como no caso anterior, pois este pode consistir na união de um número infinito de matrizes massa, rigidez e amortecimento.

A seguir serão discutidos os fundamentos básicos envolvidos na análise de sinais aleatórios, visando fornecer os subsídios necessários para o tratamento de sistemas aleatórios e posterior extração dos parâmetros modais utilizando somente a resposta no domínio do tempo.

4.2. EXCITAÇÕES RANDÔMICAS

Sinais randômicos apresentam algumas peculiaridades e não podem ser tratados do mesmo modo que sinais determinísticos. Por natureza eles não são periódicos, e mesmo que os sinais randômicos fossem tratados como sinais periódicos de período infinito, tal consideração não seria aceita, pois o sinal não obedece à condição de Dirichlet, equação (4.30).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (4.30)$$

Isso impede o uso da transformada de Fourier. Dadas as suas propriedades inerentes, a análise dos sinais randômicos, deve ser feita utilizando o conceito probabilístico. Neste caso o espectro do sinal será calculado a partir da função de autocorrelação do sinal.

A Figura 4.3 mostra um típico sinal randômico de vibrações no domínio do tempo. Assume-se que este sinal seja estacionário e ergódico, isto é, as propriedades estatísticas de qualquer amostra (média, desvio padrão e distribuição estatística) são iguais em toda população, ou seja, uma determinada amostrada pode ser suficiente para representar toda a população.

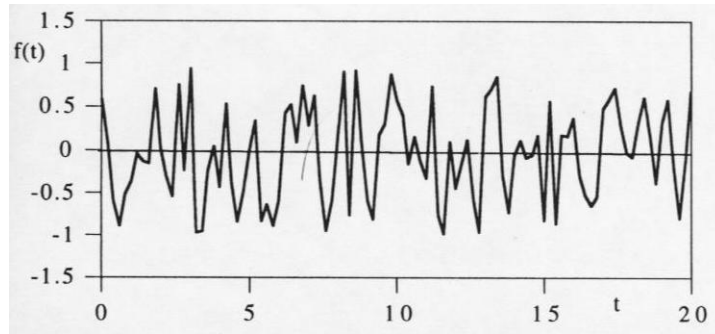


Figura 4.3: Sinal randômico no domínio do tempo.

A função de Autocorrelação $R_{ff}(\tau)$, de um sinal real ou complexo, é definida como a expectativa E ou média do produto $f(t) f(t+\tau)$ analisado ao longo do eixo do tempo, equação (4.31).

$$R_{ff}(\tau) = E[f(t) \overline{f(t + \tau)}] \quad (4.31)$$

ou seja,

$$R_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) f(t + \tau) dt \quad (4.32)$$

na qual $f(t)$ é a magnitude da função em um instante de tempo t , e $f(t + \tau)$ designa a magnitude da mesma função, observada em um tempo $t + \tau$.

A Figura 4.4 ilustra a forma que geralmente a função de autocorrelação assume. Conforme ilustrado, a função de correlação é finita e ao contrário do sinal randômico $f(t)$ satisfaz as condições de Dirichlet.

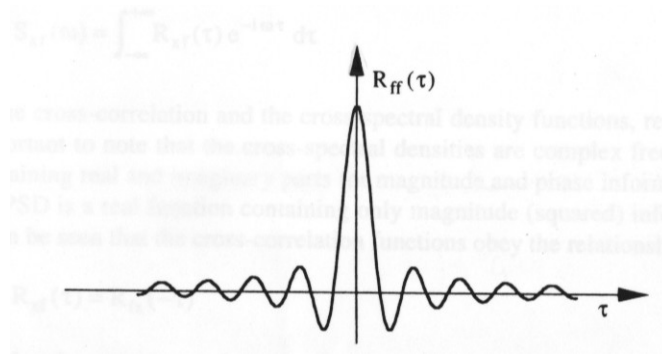


Figura 4.4: Exemplo de uma função de autocorrelação

A seguir serão discutidos os fundamentos envolvidos na decomposição matricial, visando fornecer os subsídios necessários para o entendimento do método SSI, o qual utiliza Decomposição em Valores Singulares como parte do processo de identificação.

4.3. DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES

A técnica de decomposição matricial é utilizada para reduzir uma matriz para uma forma mais simplificada ou canônica. Esta técnica tem apresentado grande importância na engenharia, principalmente na análise computacional de matrizes. Uma das mais importantes técnicas de decomposição de matrizes é a decomposição em valores singulares (SVD – Singular Value Decomposition), que é a base da formulação do algoritmo de identificação utilizado neste trabalho.

4.3.1. O POSTO DE UMA MATRIZ

O conceito de “posto” de uma matriz está diretamente relacionado com a dependência linear das linhas ou colunas da matriz. Por exemplo, se uma matriz de ordem $n \times n$, possui linhas linearmente independentes tem-se $\text{posto} = n$. Se uma linha é combinação das outras, tem-se $\text{posto} = n-1$. Em outras palavras, o *posto* de uma matriz é igual ao número de linhas (ou colunas) linearmente independentes. Uma matriz $m \times n$ com $m > n$ possui *posto* total se seu $\text{posto} = n$, ou *posto* deficiente se seu $\text{posto} < n$. Para uma matriz quadrada, *posto* deficiente implica que a matriz é singular, isto é, seu determinante é igual a zero.

Uma forma de se calcular o *posto* de uma matriz é utilizando a eliminação de Gauss. Dada uma matriz $n \times n$ com $\text{posto} = r < n$, tem-se $n-r$ linhas de zeros depois de efetuada a eliminação de Gauss. Supondo que as linhas de uma matriz sejam vetores, duas linhas são linearmente dependentes é o mesmo que dizer que os vetores são colineares.

Na prática, pode-se encontrar dois vetores não exatamente paralelos, então as duas linhas da matriz são bem próximas de serem linearmente dependentes, resultando em linhas que não são exatamente zeros, após a aplicação da eliminação de Gauss, mas elementos muito pequenos. Estas linhas de números pequenos devem ser comparadas com as outras linhas da matriz a fim de avaliar corretamente o *posto* da matriz. A comparação das linhas da matriz, ou vetores não é uma tarefa muito fácil, especialmente para matrizes grandes. O problema se torna mais complicado se os elementos das matrizes forem complexos. É preferível ter um meio para comparar estes vetores na forma escalar. A decomposição de valores singulares permite essa comparação.

Se $[A]$ é real de ordem $m \times n$, a decomposição em valores singulares é dada por:

$$[A] = [U][S][V]^T \quad (4.33)$$

onde a matriz $[U]$ é de ordem $m \times m$ e a $[V]$ é de ordem $n \times n$, e ambas as matrizes são ortogonais, de modo que:

$$[U]^T [U] = [U][U]^T = [I] \quad \text{e} \quad [V]^T [V] = [V][V]^T = [I] \quad (4.34)$$

$[S]$ é uma matriz diagonal de ordem $n \times n$. Os elementos σ_i desta matriz são chamados de valores singulares da matriz $[A]$. $[S]$ é dada por:

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

os valores singulares σ_i são reais não negativos.

O *posto* da matriz $[A]$ é dado pelo número de valores singulares que não são iguais a zero. Por exemplo, uma matriz de ordem 3×3 , com uma linha linearmente dependente das demais, teria necessariamente um valor singular igual a zero. A vantagem de se usar SVD para o cálculo do *posto* é que se as linhas da matriz não são totalmente dependentes obtêm-se valores reais de σ_n bem próximos de zero, o que facilita compará-los com os outros valores singulares e assim estabelecer um critério para considerar se este valor é linearmente dependente ou não. Se a matriz $[A]$ é complexa, a equação (4.33) torna-se:

$$[A] = [U][S][V]^H \quad (4.36)$$

onde $[U]$ e $[V]$ são matrizes unitárias, ou seja, a designação “unitária” substitui o termo “ortogonal” quando as matrizes são complexas, isto é:

$$[V]^H [V] = [V][V]^H = [I] \quad \text{e} \quad [U]^H [U] = [U][U]^H = [I] \quad (4.37)$$

E ainda,

$$[U]^H = [U]^{-1} \text{ e } [V]^H = [V]^{-1} \quad (4.38)$$

onde $[]^H$ é o transposto conjugado.

Os valores singulares σ_i são raízes positivas dos autovalores da matriz $[A]^T [A]$, se $[A]$ é real, e raízes $[A]^H [A]$, se $[A]$ é complexa. Dado que $[A]^T [A]$ é simétrica e $[A]^H [A]$ é hermitiana, seus autovalores são sempre reais, então ambas as equações resultam em valores singulares reais.

Deve-se considerar o caso onde $m \geq n$, pois é mais comum em casos de aplicações em engenharia. Se $m \leq n$, pode-se decompor A^T . As colunas de $[U]$ e $[V]$ são respectivamente os autovetores de $[A][A]^T$ e $[A]^T [A]$, e são chamados de vetores singulares. Por esta razão, os algoritmos usados para calcular a decomposição em valores singulares são similares aos usados

para calcular os autovetores e autovalores, o que possibilita o uso da SVD para o cálculo dos autovalores e autovetores de sistemas dinâmicos.

Além da Decomposição em Valores Singulares, o método SSI utiliza uma formulação baseada em modelos de espaço de estado. A seguir serão apresentados os principais fundamentos para a representação de sistemas utilizando modelos de espaço de estado.

4.4. MODELOS DE ESPAÇO DE ESTADO

Uma outra maneira de entender o comportamento dinâmico dos sistemas é utilizar a formulação de estado para escrever as equações de movimento do sistema. Na análise estrutural o comportamento dinâmico de um sistema mecânico com ngl graus de liberdade, conforme discutido anteriormente, pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais lineares de segunda-ordem com coeficientes constantes. Para o caso de um sistema de ngl graus de liberdade, com m entradas a equação de movimento, equação (4.11), pode ser rescrita da seguinte forma, equação (4.39).

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = [B_f]\{u(t)\} \quad (4.39)$$

A variável $q(t)$ representa o deslocamento, a matriz $[B_f]$ é chamada de matriz de influência de entrada, considerando que o número de entradas difere do número de graus de liberdade e, por último, o vetor $u(t)$ é a força externa aplicada no sistema. As matrizes de massa, rigidez e amortecimento são de ordem $ngl \times ngl$, a matriz $[B_f]$ é de ordem $n \times m$ e o vetor de entrada $u(t)$ é de ordem $m \times 1$.

Assumindo que a matriz $[M]$ seja inversível, isolando a variável $\ddot{q}(t)$ tem-se:

$$\ddot{q}(t) = -[M]^{-1}[C]\dot{q}(t) - [M]^{-1}[K]q(t) + [M]^{-1}[B_f]u(t) \quad (4.40)$$

A equação (4.40) pode agora ser descrita na forma de uma equação de primeira-ordem, equação (4.41).

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_f \end{bmatrix} u(t) \quad (4.41)$$

Para simplificar a equação (4.41), define-se o vetor de estado $x(t)$ como:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

A equação (4.41) pode ser escrita numa forma mais compacta em termos do vetor de estado $x(t)$, da matriz de estado $[A_c]$, da matriz de entrada $[B_c]$ e do vetor de entrada $u(t)$. Substituindo (4.42) em (4.41), tem-se:

$$\frac{dx}{dt} = [A_c]x(t) + [B_c]u(t) \quad (4.43)$$

Em que:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_f \end{bmatrix}.$$

Para descrever completamente o comportamento do sistema na representação de estado, é necessário a representação das respostas (saídas) do modelo, ou seja, os pontos de medição em que foram aquisitadas as respostas. Em geral, o vetor saída $y(t)$ é escrito em função da variável de estado $x(t)$, equação (4.44).

$$y(t) = [C_c]x(t) + [D_c]u(t) \quad (4.44)$$

$[C_c]$ é chamada de matriz de saída. As equações (4.43) e (4.44) constituem o modelo de espaço de estado (Juang, 1985).

Nota-se que o vetor de saída $y(t)$ na equação (4.44) é limitado às informações de deslocamento $q(t)$ e velocidade $\dot{q}(t)$ ou uma combinação linear dos dois. Frequentemente são

medidos também sinais de resposta do sistema em aceleração. Neste caso também é necessário incorporar as informações de aceleração na equação (4.44).

Na equação (4.40), observa-se que a aceleração $\ddot{q}(t)$ é em função do vetor deslocamento $q(t)$, da velocidade $\dot{q}(t)$, e do vetor de entrada do sistema, $u(t)$.

Para incluir a medida de aceleração na equação de saída, deve-se estabelecer a seguinte relação:

$$y(t) = [C_a] \ddot{q}(t) \quad (4.45)$$

$[C_a]$ descreve a relação entre o vetor $\ddot{q}(t)$ e o vetor de saída $y(t)$. Substituindo a equação (4.40) na equação (4.45) tem-se:

$$y(t) = [C_a] [M]^{-1} [B_f u(t) - [C] \dot{q}(t) - [K] q(t)] \quad (4.46)$$

Em uma forma mais compacta,

$$y(t) = [C_c] x(t) + [D_c] u(t) \quad (4.47)$$

onde:

$$[C_c] = \begin{bmatrix} -[C_a][M]^{-1}[K] & -[C_a][M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \quad [D] = [C_a][M]^{-1} B_f$$

$[C_c]$ é a matriz de saída do sistema para o vetor de estado $x(t)$. $[D]$ é a matriz de transmissão direta, pois transmite diretamente a entrada $u(t)$ para a saída $y(t)$ sem intermediação da equação de estado. Para maiores detalhes ver (Juang, 1985).

Para um melhor entendimento da formulação, será ilustrada a montagem do modelo de espaço de estado de um sistema massa-mola amortecido de 2 graus de liberdade, mostrado na Figura 4.5, para algumas combinações de variáveis de entrada e saída.

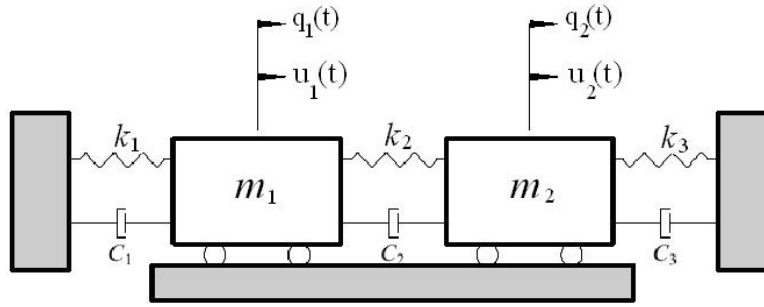


Figura 4.5: Sistema de dois graus de liberdade.

Neste exemplo o vetor deslocamento $q(t)$ será escrito em função do deslocamento das duas massas

$$q(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

A equação matricial de segunda-ordem é dada por:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 + C_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

Em uma forma mais compacta

$$[M] \ddot{q}(t) + [C] \dot{q}(t) + [K] q(t) = u(t) \quad (4.50)$$

Neste caso, o vetor e a matriz de estado para o sistema de dois graus de liberdade são definidos como:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$[A_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2)/m_1 & k_2/m_1 & -(C_1 + C_2)/m_1 & C_2/m_1 \\ k_2/m_2 & -(k_2 + k_3)/m_2 & C_2/m_2 & -(C_2 + C_3)/m_2 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Para definir a matriz de entrada do sistema $[B_c]$, é necessário conhecer o número de entradas e onde elas estão sendo aplicadas. Neste exemplo, o número máximo de forças de entrada são duas, que podem levar a três casos de carregamento: a força pode ser aplicada apenas na primeira massa, apenas na segunda, ou ainda, em ambas simultaneamente. Esses três casos são mostrados a seguir.

a) APLICAÇÃO DAS FORÇAS DE ENTRADA

Para o primeiro caso, existe apenas uma força $u_1(t)$ aplicada na massa m_1 , o que resulta em uma matriz $[B_f]$ de ordem 2×1 , dada por:

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Portanto,

$$[B_c] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1} B_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Para o segundo caso, existe apenas uma força $u_2(t)$ aplicada na massa m_2 , o que resulta em uma matriz $[B_c]$ dada por:

$$[B_c] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_2 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Por último, as forças de entrada do sistema, $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são aplicadas respectivamente de forma simultânea nas massas m_1 e m_2 . Portanto, a matriz $[B_c]$ é dada por:

$$[B_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/m_1 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

b) MEDIDAS DE SAÍDA

Como no caso anterior, a matriz de saída $[C_c]$, depende do número e localização dos sensores usados para medir a saída do sistema.

Para o caso de apenas um sensor de medida de deslocamento na massa m_1 tem-se:

$$[C_c] = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (4.57)$$

No caso da saída ser velocidade da massa m_1 , a matriz de saída do sistema é dada por:

$$[C_c] = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad (4.58)$$

Para o caso de sensores de medida de deslocamento e velocidade em ambas as massas, a matriz de saída é dada por:

$$[C_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

A matriz de saída para medidas de deslocamento e velocidade na massa m_2 é montada de modo análogo.

c) EQUAÇÃO DE ESTADO

Substituindo as matrizes de massa, rigidez e amortecimento na equação (4.40), pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_2} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{C_1+C_2}{m_1} & \frac{C_2}{m_1} \\ \frac{C_2}{m_2} & -\frac{C_2+C_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{u_1(t)}{m_1} \\ \frac{u_2(t)}{m_2} \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

Assumindo que as respostas do sistema sejam medidas em deslocamento na primeira massa, velocidade e aceleração na segunda massa, o vetor de saída é dado por:

$$y(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

A variável $y_3(t)$ corresponde à aceleração medida na segunda massa. A matriz de influência mostrada na equação (4.45) é igual a $C_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, portanto:

$$y_3(t) = \ddot{q}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

Substituindo $\ddot{q}_2(t)$ da equação (4.60) na equação (4.62), tem-se:

$$y_3(t) = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2 + k_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_2}{m_2} & -\frac{C_2 + C_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{m_2} u_2(t) \quad (4.63)$$

Agora, rearranjando e substituindo as variáveis, a equação geral para as três medidas pode ser escrita como:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2 + k_3}{m_2} & \frac{C_2}{m_2} & -\frac{C_2 + C_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Neste caso, a matriz de transmissão direta $[D_c]$ é dada por:

$$[D_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

A representação do modelo de estado pode variar dependendo das variáveis de entrada e de saída do sistema. Estas variáveis descrevem o modelo, desde as suas propriedades físicas até a excitação e resposta do sistema.

Nas situações práticas, para medir a resposta do sistema geralmente é feita uma amostragem do sinal de resposta em intervalos de tempo discretos durante o tempo de medição. Portanto, é necessário trabalhar com modelos de espaço de estado discretos.

4.5. MODELO DE ESPAÇO DE ESTADO DISCRETO

As quantidades físicas como deslocamento, velocidade e aceleração são contínuas, ou seja, elas variam continuamente com o tempo e os sensores de medidas que captam estas mudanças geralmente são analógicos. Entretanto, na prática os dados experimentais são adquiridos em instantes discretos de tempo Δt . Neste caso, o sinal analógico deve ser transformado para um sinal discreto para que possa ser manipulado computacionalmente.

A formulação detalhada da modelagem discutida é apresentada em (Juang, 2001). Nesta seção serão apresentadas apenas as equações básicas para converter um modelo de espaço de estado contínuo para discreto, em que a variável contínua tempo é substituída por $t = k\Delta t$.

De acordo com a formulação apresentada em (Juang, 2001), o modelo de espaço de estado discreto é representado pelas equações de diferenças:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + B u_k \\ y_k &= C x_k + D u_k \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde $x_k = x(k\Delta t)$ é o vetor de estado no tempo discreto.

A matriz de estado discreta A e a matriz de entrada discreta B são obtidas pelas equações (4.67a) e (4.67b) respectivamente. Já as matrizes C e D são as mesmas da representação do espaço de estado contínuo.

$$A = e^{A_c(k\Delta t)} \quad (4.67a)$$

$$B = \int_0^{\Delta t} e^{A_c \tau'} d\tau' B_c \quad \text{ou} \quad B = [A - I] A_c^{-1} B_c \quad (4.67b)$$

onde Δt é o intervalo de discretização.

Agora, utilizando os fundamentos de modelo de espaço de estado discreto, será simulada a resposta do sistema massa-mola amortecido de dois graus de liberdade mostrado na Figura 4.5. O modelo matemático obtido para o sistema em questão é excitado com uma entrada do tipo ruído branco Gaussiano. Para isso foi utilizado o comando *randn* do software MatLab.

Considerando $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 100 \text{ N/m}$ e $C_1 = C_2 = C_3 = 0.6 \text{ Ns/m}$, as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema são:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K = (10^2) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.6 \\ -0.6 & 1.2 \end{bmatrix}$$

As matrizes do modelo de espaço de estado discreto A, B, C e D são obtidas a partir das matrizes de massa, rigidez e amortecimento como mostrado nas seções 4.4 e 4.5.

A representação utilizando modelo de estado possibilita a simulação da resposta do sistema. Considerando condições iniciais nulas, as respostas do sistema para uma entrada aleatória aplicada na primeira massa são mostradas na Figura 4.6.

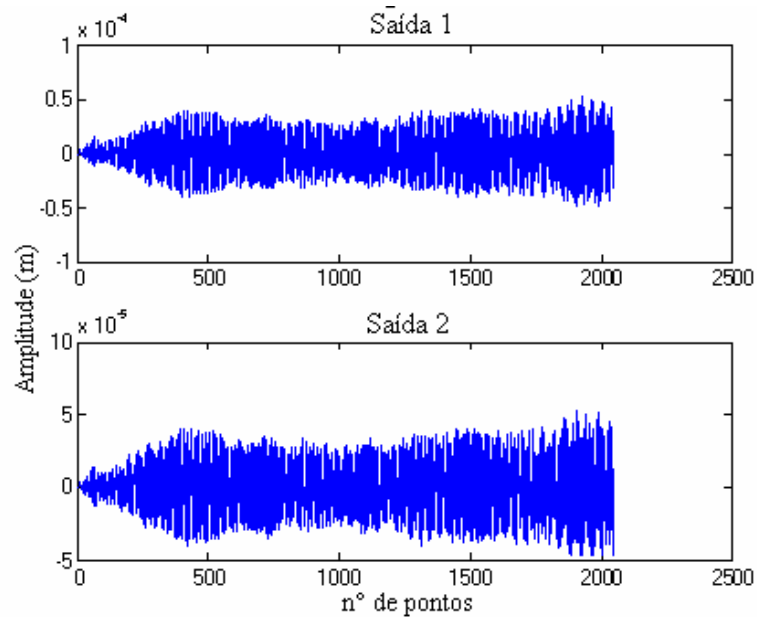


Figura 4.6: Resposta do sistema.

CAPÍTULO 5

IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA DE SUBESPAÇOS (SSI)

A identificação pode ser realizada empregando dois métodos diferentes: SSI-COV (*'Covariance-Driven SSI'*) e SSI-DATA (*'Data-Driven SSI'*), que são descritos em Peeters e De Roeck (1995 e 1997). No método SSI-COV se calculam as covariâncias entre as saídas e no método SSI-DATA o tratamento dos dados é através da projeção do espaço das saídas futuras sobre o espaço das saídas passadas. Ambos os métodos são muito parecidos, as noções de projeções e de covariância se encontram estritamente relacionadas e não são apreciáveis as diferenças entre os resultados obtidos com os dois métodos. A proposta deste trabalho é baseada na utilização do método SSI-DATA. O principal aspecto para a escolha do método é que a identificação do modelo estocástico de espaço de estado faz uso direto apenas dos dados de saída do sistema, sem a necessidade de se estimar as covariâncias das saídas. O método de identificação no domínio do tempo SSI-DATA utiliza apenas algoritmos numéricos lineares e trabalha diretamente com os dados temporais medidos, sem necessidade de convertê-los em correlações ou espectros.

O problema de identificação estocástica consiste em calcular o modelo em espaço de estado utilizando apenas os dados de saída do sistema e, a partir das matrizes A e C identificadas, obter os parâmetros modais desejados. Este problema é conhecido como *realização estocástica*.

O nome “subespaços” origina do fato que modelos lineares podem ser obtidos a partir do espaço de linhas e colunas de certas matrizes de dados de resposta. Tipicamente, o espaço de colunas de cada matriz de dados contém informação sobre o modelo, enquanto o espaço de linhas permite obter as seqüências de estados do filtro de Kalman diretamente dos dados de saída. Além disso, a terminologia “subespaço” surgiu na teoria de controle e define o grupo de métodos que compõem a classe de problemas denominada *realização estocástica*.

O desenvolvimento do modelo matemático que permitirá a identificação de sistemas inicia-se neste momento. Para isso, serão utilizados como ferramentas os conceitos previamente discutidos. Esta seção tem o objetivo de, a partir do sinal de saída y , obter a realização do sistema, ou o sistema identificado. Realização é o processo de construção da representação, em espaço de estado, de um sistema a partir dos dados medidos.

5.1. MODELO DE ESPAÇO DE ESTADO

Inicialmente, na análise estrutural o comportamento dinâmico de um sistema mecânico pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais lineares de segunda-ordem com coeficientes constantes, equação (5.1).

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = F(t) \quad (5.1)$$

onde M , C e K são as matrizes de massa, de amortecimento e rigidez da estrutura respectivamente. Essas matrizes são de ordem $n_{gl} \times n_{gl}$, sendo n_{gl} o número de coordenadas generalizadas, que compõe o vetor $q(t)$. O vetor $F(t)$, de ordem $n_{gl} \times 1$, representa as forças de entrada do sistema.

Em sistemas estruturais envolvendo parâmetros distribuídos essa equação é geralmente obtida por elementos finitos, e o sistema físico é representado por um modelo aproximado contendo n_{gl} graus de liberdade. A equação (5.1) representa de uma forma bastante adequada o comportamento estrutural de uma estrutura em vibração, mas não adequada para ser utilizada diretamente nos métodos de identificação de sistemas experimentais baseados apenas nas respostas. A equação é contínua no tempo e as medidas são obtidas em instantes discretos. Adicionalmente existe o fato de que não é possível obter as medidas em todos os graus de liberdade como implica a equação, além da necessidade de se considerar efeito do ruído devido às excitações desconhecidas ou por outras causas.

Uma forma mais adequada de representar o modelo neste caso é utilizar a Formulação de Estado (Meirovitch 1980, Ljung 1999). A equação original de segunda ordem pode agora ser rescrita como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem através de um modelo de espaço de estado, equação (5.2) e (5.3).

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (5.2)$$

$$y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) \quad (5.3)$$

onde:

$$x(t) = \{q(t) \quad \dot{q}(t)\}^T \quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_f \end{bmatrix} \quad F(t) = B_f u(t)$$

A matriz A_c , de ordem $n \times n$, sendo n duas vezes o número de graus de liberdade do sistema é a matriz de estado que descreve a dinâmica do sistema, a matriz B_c , de ordem $n \times m$, sendo m o número de entradas, é a matriz de entrada. A matriz C_c , de ordem $l \times n$, sendo l o número de saídas, é a matriz de saída e a matriz D_c , de ordem $l \times m$, é a matriz de transmissão direta. O vetor $x(t)$, de ordem $n \times 1$, é o vetor de estado e o vetor $u(t)$ é o vetor de entrada que é assumido ser um sinal de característica aleatória. O vetor de interesse neste caso, vetor de saída $y(t)$, é um estado ou uma combinação linear dos estados do sistema. O número de elementos do vetor de estado é o número de variáveis independentes necessário para descrever o estado do sistema.

As Equações (5.2) e (5.3) constituem o Modelo de Estado de um sistema dinâmico determinístico contínuo no tempo. Contínuo neste caso significa que as expressões podem ser avaliadas a cada instante de tempo t e determinístico significa que a entrada $u(t)$ e a saída $y(t)$ são conhecidas.

A matriz de estado A_c é dada em função dos parâmetros do sistema, matriz de massa, amortecimento e rigidez. Já a matriz de entrada B_c depende também das entradas e, portanto, é necessário antes conhecer o número de entradas u e suas localizações. A matriz de saída C_c depende do número e localização dos sensores usados para medir a saída do sistema.

A identificação das matrizes A_c , B_c , C_c e D_c , como mostrado anteriormente, é apropriada para modelos contínuos e determinísticos. Na prática, os dados experimentais são definidos para instantes discretos de tempo, $t = k\Delta t$, e o sistema de equações contínuas não pode ser utilizado. Então, a matriz deve ser definida na forma discreta. Na forma discreta o modelo de estado, como mostrado anteriormente, é representado pela equação (5.4).

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + B u_k \\ y_k &= C x_k + D u_k \end{aligned} \quad (5.4)$$

Adicionalmente, existe a presença de ruído nos dados medidos e incertezas no modelo, associadas com o ruído no processo e na medição. No processo o ruído está presente devido às perturbações e erros de modelagem e nas medidas devido à influências externas não controladas. Se os componentes estocásticos, ruído do processo $\tilde{w}_k$ e da medição $\tilde{v}_k$ são incluídos na equação (5.4), o modelo do sistema discreto pode ser redefinido para incluir também as incertezas, equações (5.5) e (5.6).

$$x_{k+1} = A x_k + B u_k + \tilde{w}_k \quad (5.5)$$

$$y_k = C x_k + D u_k + \tilde{v}_k \quad (5.6)$$

A determinação correta das características de cada componente individual do ruído é difícil e, portanto, fazem-se necessárias algumas suposições. Neste caso é assumido que as componentes do ruído, embora não medidas, sejam estacionárias, com média zero e que possuam as características de um ruído branco com matrizes de covariância dadas pela equação (5.7), como mostrado em (Van Overschee e De Moor, 1996). Adicionalmente, as seqüências $\tilde{w}_k$ e $\tilde{v}_k$ são assumidas independentes uma da outra.

$$E \left[\begin{pmatrix} \tilde{w}_p \\ \tilde{v}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_q^T & \tilde{v}_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} E[\tilde{w}_p \tilde{w}_q^T] & E[\tilde{w}_p \tilde{v}_q^T] \\ E[\tilde{v}_p \tilde{w}_q^T] & E[\tilde{v}_p \tilde{v}_q^T] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \delta_{pq} \geq 0 \quad (5.7)$$

onde δ_{pq} é o delta de Kronecker, $E [\]$ é o operador esperança, $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $S \in \mathfrak{R}^{n \times l}$ e $R \in \mathfrak{R}^{l \times l}$ são as matrizes de covariância das seqüências de ruído $\tilde{w}_k$ e $\tilde{v}_k$. O operador esperança é definido por:

$$E(x) = \sum_{i=1}^N x_i p(x_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(N)}}{N} \quad (5.8)$$

A esperança de x é a média ponderada de todos os valores x_i , onde cada x_i é multiplicado pela probabilidade de x_i ocorrer.

Nos testes de vibração baseados nas condições de operação, somente as respostas da estrutura são medidas e a entrada é assumida aleatória e não é medida e, portanto, é impossível distinguir a entrada u_k dos termos de ruído $\tilde{w}_k$ e $\tilde{v}_k$ nas equações (5.5) e (5.6). Se a característica da entrada é típica de um ruído branco então, a entrada u_k pode ser modelada implicitamente pelos termos de ruído w_k e v_k , resultando em um sistema puramente aleatório, equação (5.9) e (5.10).

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k \quad (5.9)$$

$$y_k = Cx_k + v_k \quad (5.10)$$

O par de equações acima forma a base para a identificação de sistemas no domínio do tempo quando apenas as respostas do sistema são medidas, ou seja, testes de vibração ambiente. A literatura mostra a existência de vários algoritmos baseados nas equações (5.9) e (5.10), mas o algoritmo de Identificação Estocástica de Subespaços é atualmente um dos métodos mais avançados para identificação de sistemas submetidos à vibração ambiente.

O conceito fundamental da Identificação Estocástica de Subespaços é a projeção do espaço das saídas futuras no espaço das saídas passadas, e a grande vantagem é que o algoritmo é baseado nos dados (data driven) ao invés da covariância, ou seja, a formulação explícita da covariância é evitada. Desta forma, a identificação estocástica é claramente um método direto de identificação no domínio do tempo, que trabalha diretamente com dados de tempo, sem a necessidade de convertê-los em correlações ou dados espectrais.

O método identifica as matrizes de estado baseado nas medições e uma vez definido o modelo matemático (modelo de estado) que descreve a estrutura, a determinação dos parâmetros modais (decomposição de autovalores) frequências naturais, fator de amortecimento e modos de vibrar é direta.

A Figura 5.1 mostra esquematicamente um sistema estocástico linear invariante no tempo com saídas y_k e estados x_k^s , descrito pelas matrizes discretas A e C e matrizes de covariância Q ,

v_k são vetores de ruído branco de média zero não correlacionados com os estados x_k , então, $E[x_k v_k^T] = 0$ e $E[x_k w_k^T] = 0$. Então, pode-se encontrar a equação de Lyapunov para a matriz de covariância do estado Σ :

$$\begin{aligned}\Sigma &= E[x_{k+1} x_{k+1}^T] \\ \Sigma &= E[(Ax_k + w_k) \cdot (Ax_k + w_k)^T] \\ \Sigma &= AE[x_k x_k^T]A^T + E[w_k w_k^T] \\ \Sigma &= A\Sigma A^T + Q.\end{aligned}\tag{5.11}$$

Há duas matrizes particularmente importantes na realização estocástica associadas aos estados e às saídas do modelo descrito nas equações (5.9) e (5.10), denominadas matriz de correlação estado-saída G e matriz de correlação de saída Λ_i . Note-se que y_k^T representa o vetor transposto conjugado. Definindo a matriz de correlação de saída como:

$$\Lambda_i \equiv E[y_{k+i} y_k^T] \in \Re^{l \times l}$$

Encontramos para Λ_0 :

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= E[y_k y_k^T] \\ \Lambda_0 &= E[(Cx_k + v_k) \cdot (Cx_k + v_k)^T] \\ \Lambda_0 &= CE[x_k x_k^T]C^T + E[v_k v_k^T] \\ \Lambda_0 &= C\Sigma C^T + R.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Definindo a matriz de correlação estado-saída G :

$$\begin{aligned}G &\equiv E[x_{k+1} y_k^T] \in \Re^{n \times l} \\ G &= E[(Ax_k + w_k) \cdot (Cx_k + v_k)^T]\end{aligned}$$

$$G = AE[x_k x_k^T]C^T + E[w_k v_k^T]$$

$$G = A\Sigma C^T + S. \quad (5.13)$$

Quando um sistema é excitado por uma força que tem densidade espectral constante, a correlação cruzada da excitação e da resposta é conhecida por fornecer o sistema de funções de resposta ao impulso (Parâmetros de Markov). No caso onde a excitação não é medida, mas a estrutura e as forças podem ser modeladas conforme descrito acima, as funções de correlação de saída Λ_i são equivalentes à resposta livre do sistema. A demonstração desta importante propriedade para o caso particular de sistemas com amortecimento considerado proporcional é tratada por (James III et al., 1995). A maioria das técnicas de identificação estocástica de subespaços está fundamentada na seguinte propriedade de decomposição das matrizes de correlação de saída em função das matrizes A e C .

$$\Lambda_i = CA^{i-1}G \quad (5.14)$$

onde i é um número inteiro maior que 1.

A equação (5.14) é extremamente importante, pois significa que as matrizes de correlação de saída podem ser consideradas como respostas ao impulso e, portanto, podem ser aplicadas aos algoritmos clássicos de identificação determinística, que normalmente trabalham com a resposta ao impulso.

Note-se que os sinais foram considerados de média zero; então não há diferença entre as funções de correlação e as funções de covariância.

No problema de identificação estocástica de subespaços, as medidas da saída são agrupadas em uma matriz de blocos de Hankel com $2i$ blocos de linhas e j colunas. As matrizes de Hankel se caracterizam por ter cada antidiagonal formada pela repetição dos mesmos elementos. Como os sistemas estocásticos requerem certa quantidade de análise estatística, é assumido que $j \rightarrow \infty$. A matriz de Hankel pode ser dividida em uma parte “passado” e outra parte “futuro”, conforme a equação (5.15).

$$H = Y_{0/2i-1} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{j-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{i-2} & y_{i-1} & \cdots & y_{i+j-3} \\ y_{i-1} & y_i & \cdots & y_{i+j-2} \\ y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{i+j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \cdots & y_{2i+j-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Y_{0/i-1}] \\ [Y_{i/2i-1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Y_p] \\ [Y_f] \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{"passado"} \\ \text{"futuro"} \end{matrix} \quad (5.15)$$

A matriz H tem uma formação especial: seus elementos obedecem a seguinte regra:

$$y_{ij} = y_{rs} \quad \text{se} \quad i + j = r + s$$

As medidas são normalizadas com um fator $1/\sqrt{j}$. O subscrito de $Y_{0/2i-1} \in \Re^{2lixj}$ denota o subscrito do primeiro e último elemento da primeira coluna da matriz bloco de Hankel. Os subscritos p e f entendem-se por passado e futuro, respectivamente. Os termos passado e futuro se referem aos instantes de tempo em que as respostas foram obtidas, ou seja, o conjunto de todas as respostas “futuras”, representado na Eq. (5.15), foi obtido em instantes de tempo posteriores àqueles em que foram obtidas as respostas “passadas”. As matrizes Y_p e Y_f são definidas separando $Y_{0/2i-1}$ em dois blocos com número de linhas igual a i . Outra divisão é obtida pelo deslocamento da borda entre passado e futuro em um bloco de linha para baixo:

$$H = Y_{0/2i-1} = \begin{pmatrix} Y_{0/i} \\ Y_{i+1/2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_p^+ \\ Y_f^- \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Note-se que os sobrescritos $+$ e $-$ referem-se ao tamanho das matrizes. A matriz com sobrescrito “ $+$ ” tem $l(i+1)$ linhas, enquanto a matriz com sobrescrito “ $-$ ” tem $l(i-1)$ linhas, onde l é o número de respostas medidas ou número de sensores utilizados na medição.

O número de blocos de linhas i é uma variável pré-definida que deve ser suficientemente grande, isto é, $li \geq n$, onde n é a ordem do sistema a ser identificado. Como não se conhece a priori a ordem n , assume-se que $i = 2n/l$. Note que, uma vez que cada bloco de linha contém l (número de respostas) linhas, a matriz $Y_{0/2i-1}$ possui $2li$ linhas.

O número de colunas j é igual a $j = (npontos) - 2i + 1$, onde “ $npontos$ ” é o comprimento dos vetores de resposta, o que implica que todos os dados amostrados são utilizados.

Os algoritmos de identificação estocástica se aplicam bem para grandes grupos de dados. Na identificação estocástica é assumido que existem longas séries no tempo de dados avaliados ($npontos \rightarrow \infty$) e que os dados sejam ergódigos. Isso mostra porque os algoritmos estocásticos trabalham bem mesmo na presença de ruído quando um grande número de dados é avaliado.

Para identificar o sistema ou obter sua realização, faz-se necessário o conhecimento das matrizes de observabilidade e controlabilidade, as quais são usualmente utilizadas na técnica da identificação estocástica de subespaços.

A matriz de observabilidade Γ_i (onde o subscrito i denota o número de blocos de linhas) é definida como:

$$\Gamma_i^T \equiv \left[C^T (CA)^T (CA^2)^T \dots (CA^{i-1})^T \right] \in \Re^{n \times li} \quad (5.17)$$

O par de matrizes $\{A, C\}$ é assumido ser observável, o que implica que o posto de Γ_i é igual a n e todos os modos dinâmicos do sistema podem ser observados na saída, ou seja, os sensores devem estar alocados no sistema de maneira que sejam capazes de medir as grandezas físicas inerentes como: deslocamento, velocidade e aceleração. Um modo torna-se não-observável quando, por exemplo, o sensor não consegue captar, ou “observar”, movimento algum do nó no qual está conectado (ponto nodal).

A matriz de controlabilidade Δ_i^c (onde o subscrito i denota o número de blocos de colunas e o sobrescrito c entende-se por covariância) é definida como:

$$\Delta_i^c \equiv [(A^{i-1}G)(A^{i-2}G)\dots(A^1G)(G)] \in \mathfrak{R}^{n \times li} \quad (5.18)$$

O par de matrizes $\{A, Q^{1/2}\}$ é assumido ser controlável, o que implica que todos os modos dinâmicos do sistema podem ser excitados por uma entrada estocástica.

5.3. ALGORITMOS DA IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA DE SUBESPAÇOS

A seqüência de estado $\hat{X}_i$ e a matriz de observabilidade Γ_i podem ser diretamente estimadas dos dados de resposta medidos, sem o conhecimento das matrizes do sistema. Um vez que a seqüência e a matriz de observabilidade são estimadas, o sistema de matrizes pode ser extraído de $\hat{X}_i$ ou Γ_i . A Figura 5.2 mostra os três algoritmos do método de identificação.

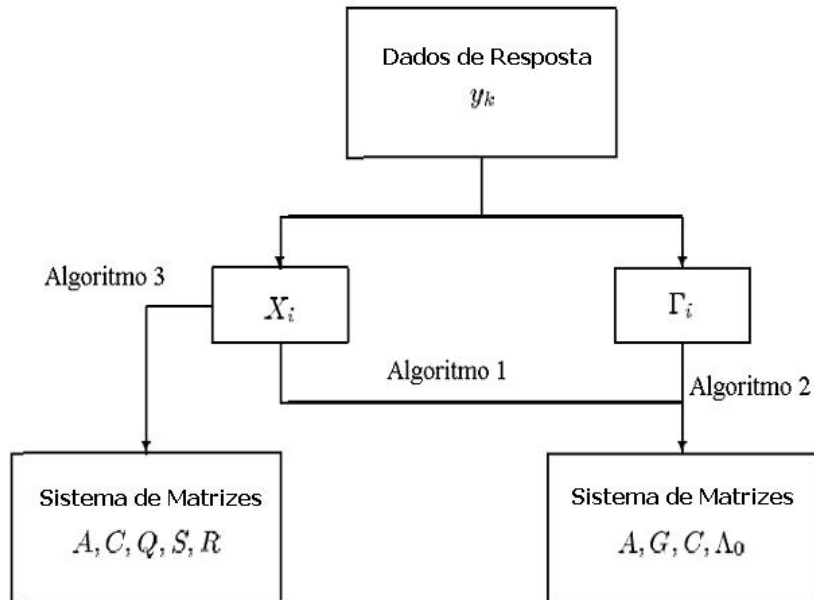


Figura 5.2: Algoritmos da identificação estocástica de subespaços.

A idéia principal deste algoritmo de identificação estocástica é a projeção do espaço das saídas futuras no espaço das saídas passadas da matriz de Hankel. O principal aspecto desta

projeção é que ela retém toda a informação do passado que é utilizada para prever o futuro, Figura 5.3.

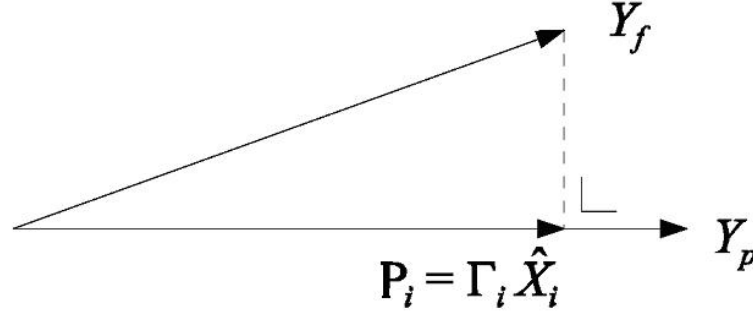


Figura 5.3: Projeção do espaço das saídas futuras no espaço das saídas passadas.

A matriz de Hankel é fatorizada utilizando a Decomposição QR.

$$H = \begin{bmatrix} Y_p \\ Y_f \end{bmatrix} = RQ^T \quad (5.19)$$

onde $Q \in \mathfrak{R}^{jxj}$ é uma matriz ortonormal ($Q^T Q = Q Q^T = I_j$) e $R \in \mathfrak{R}^{2lixj}$ é uma matriz triangular inferior.

$$H = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

onde $R_{11} \in \mathfrak{R}^{lixli}$, $R_{21} \in \mathfrak{R}^{lxli}$, $R_{22} \in \mathfrak{R}^{lxl}$, $R_{31} \in \mathfrak{R}^{l(i-1)xli}$, $R_{32} \in \mathfrak{R}^{l(i-1)xl}$, $R_{33} \in \mathfrak{R}^{l(i-1)xl(i-1)}$ e $Q_1 \in \mathfrak{R}^{jxli}$, $Q_2 \in \mathfrak{R}^{jxl}$, $Q_3 \in \mathfrak{R}^{jxl(i-1)}$. É interessante notar que no algoritmo, as matrizes Q se cancelarão devido a sua ortonormalidade. Define-se a projeção P_i como a projeção do bloco das saídas futuras, Y_f , no bloco das saídas passadas, Y_p , da matriz Hankel:

$$P_i \equiv Y_f / Y_p = Y_f Y_p^T (Y_p Y_p^T)^* Y_p \in \mathfrak{R}^{lixj} \quad (5.21)$$

onde $()^*$ significa a pseudo-inversa.

Introduzindo a fatorização QR da matriz de Hankel na equação anterior se obtém:

$$P_i \equiv Y_f / Y_p = \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{31} \end{pmatrix} Q_1^T \in \mathfrak{R}^{lixj} \quad (5.22)$$

A matriz de observabilidade Γ_i e a seqüência de estados $\hat{X}_i$ são obtidas pela Decomposição em Valores Singulares da matriz de projeção P_i , equação (5.23).

$$\begin{aligned} W_1 P_i W_2 &= (U_1 U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \\ &= (U_1 U_2) \begin{pmatrix} S_1 V_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= U_1 S_1 V_1^T \end{aligned} \quad (5.23)$$

As matrizes $W_1 \in \mathfrak{R}^{lixli}$ e $W_2 \in \mathfrak{R}^{jxj}$ determinam a base do espaço de estado na qual o modelo será identificado. A interpretação dessas matrizes se tornará mais clara na próxima seção, onde são apresentadas as variantes do algoritmo.

O principal teorema da Identificação Estocástica de Subespaços estabelece que a projeção P_i pode ser decomposta como o produto da matriz de observabilidade e a seqüência de estados estimados do filtro Kalman, conforme a equação (5.24):

$$P_i \equiv Y_f / Y_p \equiv \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_i & \hat{x}_{i+1} & \dots & \hat{x}_{i+j-1} \end{bmatrix} = \Gamma_i \hat{X}_i \quad (5.24)$$

A Figura 5.4 mostra a decomposição da projeção P_i como o produto das matrizes Γ_i e $\hat{X}_i$.

$$P_i = \Gamma_i \hat{X}_i = \begin{matrix} \xleftarrow{n} \\ \uparrow \text{li} \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \xleftarrow{j} \\ \downarrow \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow n \\ \end{matrix}$$

Figura 5.4: Decomposição da projeção P_i .

Neste ponto um exame criterioso do número de valores singulares relevantes se faz necessário, visto que este número determinará a ordem do modelo e conseqüentemente o número de modos identificados. Uma importante observação é que o posto de P_i é igual à ordem do sistema n . Conseqüentemente, a ordem do sistema de equações definido pelas expressões (5.9) e (5.10) pode ser determinada por inspeção dos valores singulares na equação (5.23), onde n é o número de valores singulares diferentes de zero. Então:

$$S_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (5.25)$$

com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$

Na prática, devido ao ruído, os menores valores singulares não são exatamente zero. Por isso se obtém a ordem do sistema determinando um intervalo entre dois valores sucessivos. O valor singular onde tem lugar a maior separação determina a ordem do sistema. Na hora de aplicar este critério deve-se ser cuidadoso, já que geralmente em estruturas reais não está claro esse intervalo.

Para encontrar a ordem correta do sistema, o número de linhas ($l.i$) de Γ_i deve ser no mínimo igual a n . Sabendo que $\text{posto}(P_i) = \text{posto}(Y_f/Y_p) = n$, tem-se que $U_1 \in \Re^{lixn}$, $S_1 \in \Re^{nxn}$, $V_1 \in \Re^{jxn}$. Igualando as equações (5.23) e (5.24) se obtém:

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2} \quad (5.26)$$

$$\hat{X}_i W_2 = S_1^{1/2} V_1^T \quad (5.27)$$

ou ainda:

$$\hat{X}_i = \Gamma_i^{-1} \cdot P_i \quad (5.28)$$

A matriz de controlabilidade estendida Δ_i^c e a matriz de covariância cruzada C_i são determinadas como:

$$\Delta_i^c = \Gamma_i^{-1} Y_f Y_p^T \quad (5.29)$$

$$C_i = Y_f \cdot Y_p^T = \Gamma_i \cdot \Delta_i^c \quad (5.30)$$

Informações mais detalhadas a respeito de filtro Kalman e dos conceitos de observabilidade e controlabilidade podem ser encontradas em Juang (1994) e Chen (1999).

Alguns valores singulares (elementos da diagonal da matriz S_1) podem ser relativamente pequenos e, portanto, desprezíveis, ou seja, eles contêm muito mais informações a respeito do ruído do que do sistema propriamente dito. Logo, o modelo reduzido após a eliminação desses valores singulares é, ainda assim, capaz de ser representativo da dinâmica do sistema. Em outras palavras, o ruído no sinal faz com que surjam modos residuais não nulos na decomposição em valores singulares da matriz de Hankel, que são chamados de modos computacionais, cujas magnitudes são bem inferiores àquelas dos modos que realmente compõem o sistema. Quanto maior for o nível de ruído presente no sinal maior é a magnitude dos modos computacionais.

5.4. VARIANTES DO ALGORITMO DE IDENTIFICAÇÃO

Existem alguns variantes para a Identificação Estocástica de Subespaços. Eles diferem entre si na ponderação das matrizes de dados antes da aplicação do SVD. Esta ponderação determina a base do espaço de estado na qual o modelo será identificado. A Tabela 5.1 mostra alguns variantes bem conhecidos: Canonical Variate Analysis (CVA), Principal Components (PC) e Unweighted Principal Components (UPC). Este último variante algumas vezes é chamado também de Balanced Realization (BR).

Tabela 5.1: Escolhas especiais de W_1 e W_2 para obter os algoritmos CVA, PC e UPC.

	W_1	W_2
CVA	$(Y_f Y_f^T)^{-1/2}$	I_j
PC	I_{li}	$Y_p^T (Y_p Y_p^T)^{-1/2} Y_p$
UPC	I_{li}	I_j

Uma interpretação física para o método CVA é que o sistema de modos é balanceado em termos da energia. Assim modos que são pouco excitados em condições operacionais podem ser melhor identificados. Portanto os métodos PC e UPC são capazes de identificar os modos dominantes sob condições operacionais com esforço computacional bem menor em relação ao método CVA que, por sua vez, considera todos os modos com igual importância.

5.5. OBTENÇÃO DAS MATRIZES DO SISTEMA

Neste momento, as matrizes do sistema A , C e Q , S , R (ou G , Λ_0) podem ser obtidas de três diferentes maneiras. Note que as primeiras etapas para todos os três algoritmos são as mesmas e coincidem com as etapas descritas anteriormente.

5.5.1. ALGORITMO 1 – UTILIZANDO OS ESTADOS

Inicialmente, temos:

- A ordem do sistema por inspeção dos valores singulares da equação (5.24).
- A matriz de observabilidade estendida Γ_i e a matriz de controlabilidade estendida Δ_i^c .
- A seqüência de estados $\hat{X}_i$.

A matriz de observabilidade Γ_i e a seqüência de estados $\hat{X}_i$ foram obtidas a partir da decomposição em valores singulares da matriz de Hankel onde se guardam as medidas. Para identificar o sistema tem-se também que calcular as matrizes A , C , Q , R e S . De maneira similar à equação (5.25), uma outra projeção P_{i-1} também pode ser definida dando um deslocamento Δt nas respostas passadas e futuras:

$$P_{i-1} \equiv Y_f^- / Y_p^+ = [R_{31} \quad R_{32}] \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} \in \Re^{l(i-1) \times j} \quad (5.31)$$

que pode ser calculada a partir da fatorização QR da matriz de Hankel. Analogamente se obtém:

$$P_{i-1} = Y_f^- / Y_p^+ = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1} & \hat{x}_{i+2} & \dots & \hat{x}_{i+j} \end{bmatrix} = \Gamma_{i-1} \hat{X}_{i+1} \quad (5.32)$$

Então, P_{i-1} pode ser calculado diretamente dos dados de resposta e Γ_{i-1} pode ser obtido a partir de Γ_i (isto é, Γ_i com as últimas l linhas deletadas):

$$\Gamma_{i-1} = \underline{\Gamma}_i = \Gamma_i(1:l(i-1),:) \quad (5.33)$$

Assim, $\hat{X}_{i+1}$ pode ser calculado como:

$$\hat{X}_{i+1} = \Gamma_{i-1}^{-1} \cdot P_{i-1} \quad (5.34)$$

onde Γ_{i-1}^{-1} é a pseudo-inversa de Γ_{i-1} .

Até este momento as seqüências de estado $\hat{X}_i$ e $\hat{X}_{i+1}$ foram calculadas usando somente dados de resposta, equações (5.28, 5.34). O objetivo final da identificação é encontrar as matrizes do sistema A , C e Q , S , R (ou G , Λ_0). Assim, o seguinte conjunto de equações lineares está formado:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i/i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

onde $Y_{i/i}$ é uma matriz de Hankel com somente um bloco de linhas e os últimos termos são os resíduos.

$$Y_{i/i} = \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{l \times j} \quad (5.36)$$

Uma vez que as seqüências de estados são conhecidas, as respostas são conhecidas e os resíduos não são correlacionados com $\hat{X}_i$, o conjunto de equações pode ser resolvido para A , C como um problema de mínimos quadrados:

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i/i} \end{bmatrix} \hat{X}_i^{-1} \quad (5.37)$$

onde $\hat{X}_i^{-1}$ é a pseudo-inversa de $\hat{X}_i$.

Quando introduzimos as expressões obtidas anteriormente para $\hat{X}_i$ e $\hat{X}_{i+1}$ na equação (5.37), as matrizes ortogonais Q se cancelam.

A matriz G pode ser determinada como as últimas l colunas de Δ_i^c . A matriz Λ_0 finalmente pode ser determinada como:

$$\Lambda_0 = Y_{i/i} \cdot Y_{i/i}^T \quad (5.38)$$

Do ponto de vista teórico, o problema está resolvido: dadas as medidas de resposta, se obtém a ordem do sistema n e as matrizes A , C , G , Λ_0 .

Com as matrizes pesos W_1 e W_2 definidas como no algoritmo CVA, este algoritmo corresponde ao algoritmo descrito por (Van Overschee e De Moor, 1991). Uma interessante implementação deste algoritmo usando Decomposição em Valores Singulares Quociente QSVD é também encontrada neste artigo.

5.5.2. ALGORITMO 2 – UTILIZANDO AS MATRIZES Γ_i e Δ_i^c .

As matrizes estocásticas A , C , G , Λ_0 podem também ser determinadas através das matrizes de observabilidade e controlabilidade estendidas. Inicialmente, temos:

- A ordem do sistema por inspeção dos valores singulares da equação (5.23).
- A matriz de observabilidade Γ_i e a matriz de controlabilidade Δ_i^c .

A matriz C pode ser pega como as primeiras l linhas de Γ_i . A matriz dinâmica A é determinada a partir de Γ_i como:

$$A = \underline{\Gamma}_i^{-1} \cdot \overline{\Gamma}_i \quad (5.39)$$

sendo que:

$\overline{\Gamma}_i$ é a matriz Γ_i sem as primeiras l linhas,

$\underline{\Gamma}_i^{-1}$ é a matriz Γ_i^{-1} sem as últimas l linhas.

A matriz G pode ser determinada como as últimas l colunas de Δ_i^c e a matriz Λ_0 pode ser determinada como no algoritmo 1:

$$\Lambda_0 = Y_{i/i} \cdot Y_{i/i}^T \quad (5.40)$$

5.5.3. ALGORITMO 3

O cálculo de A e C é realizado como anteriormente através da resolução da equação (5.37) por mínimos quadrados. Entretanto, o cálculo de G e Λ_0 é alterado da seguinte maneira. A covariância do ruído Q, S, R , equação (5.7), é encontrada como a covariância dos resíduos ρ_w e ρ_v da equação (5.35) como:

$$\text{cov} = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} = E \left[\begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_w^T & \rho_v^T \end{pmatrix} \right] \geq 0 \quad (5.41)$$

As matrizes A, C e Q, S, R encontradas desta maneira sempre fornecem uma seqüência de covariância positiva. As matrizes G e Λ_0 podem ser extraídas pela resolução da equação de Lyapunov para Σ :

$$\Sigma = A\Sigma A^T + Q. \quad (5.42)$$

Depois G e Λ_0 podem ser obtidas como:

$$G = A\Sigma C^T + S. \quad (5.43)$$

$$\Lambda_0 = C\Sigma C^T + R. \quad (5.44)$$

Este algoritmo pode ser visto como um algoritmo que estima A e C exatamente como o algoritmo 1, mas introduz uma pequena perturbação em G e Λ_0 .

5.6. IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS

O método de identificação de sistemas descrito anteriormente pode ser utilizado para a análise modal de estruturas, para isso, basta a estrutura estar submetida à sua própria carga de serviço e medir a resposta da estrutura a essa carga.

A partir do algoritmo de identificação se obtém a matriz de estado discreta A , cuja decomposição em autovalores e autovetores caracteriza dinamicamente a estrutura:

$$A = \Psi \Lambda \Psi^{-1} \quad (5.45)$$

onde $\Psi \in C^{n \times n}$ é uma matriz cujas colunas são os autovetores do sistema discreto e $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i) \in C^{n \times n}$, com $i=1,2,\dots,n$, é uma matriz diagonal que contém os autovalores do sistema discreto $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Os autovalores discretos são relacionados com os autovalores (μ_i) da matriz de estado contínua A por:

$$\mu_i = \frac{1}{\Delta t} \ln(\lambda_i) \quad (5.46)$$

onde Δt é o intervalo de discretização. Os autovalores de A são pares de valores complexos conjugados. A razão de amortecimento modal (ξ_i) e frequência natural (ω_i) da estrutura podem ser encontrados a partir dos autovalores contínuos através da seguinte relação:

$$\mu_i, \bar{\mu}_i = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (5.47)$$

onde $j^2 = -1$. Os autovetores do sistema (colunas de $\Psi \in C^{n \times n}$) são os mesmos para a discreta como para a representação de espaço de estado contínua. Os modos de vibrar (definidos como colunas de $\Phi \in C^{l \times n}$) são a parte observável dos autovetores do sistema e são então obtidos usando a equação de observação:

$$\Phi = C \Psi \quad (5.48)$$

Dessa forma, os parâmetros modais ω_i , ξ_i e Φ_i são obtidos a partir das matrizes do sistema identificadas, A e C .

5.7. IDENTIFICAÇÃO DE COMPONENTES HARMÔNICAS

Em muitos casos práticos estão presentes excitações harmônicas adicionadas ao carregamento randômico devidas a componentes rotativos das máquinas, ou seja, muitas estruturas vibram devido à excitação harmônica adicionada ao ruído branco estacionário. Devido à presença de excitação harmônica, o processo de identificação modal pode perder sua robustez e proporcionar uma identificação insatisfatória dos parâmetros modais.

As harmônicas, às vezes, podem ser detectadas calculando a razão de amortecimento de seus modos correspondentes, já que apresentam valores deste parâmetro várias ordens de magnitude inferiores aos demais. Quando existir componentes harmônicas no processo de identificação dos parâmetros modais, estarão presentes razões de amortecimento muito pequenas associadas com aqueles harmônicos, que devem ser descartados pelo analista.

A resposta devida ao carregamento estocástico pode ser tratada utilizando as técnicas clássicas baseadas nas condições de operação. De qualquer forma, as harmônicas serão responsáveis por alguns problemas no processo de identificação e se somente as técnicas de análise modal operacional forem utilizadas, as harmônicas serão identificadas como modos estruturais, pois geralmente não existem sub-rotinas específicas para separar as respostas harmônicas das respostas estruturais.

Neste trabalho, um procedimento baseado em propriedades estatísticas é proposto para distinguir as respostas estruturais estocásticas das respostas harmônicas obtidas em testes modais baseados na condição de operação. É apresentada uma técnica baseada nas diferenças básicas

entre as propriedades estatísticas de uma resposta harmônica e uma resposta estrutural estocástica. As propriedades estatísticas de uma resposta harmônica e de uma resposta estrutural estocástica são bastante diferentes. A função densidade de probabilidade de uma resposta harmônica é uma distribuição que apresenta dois picos, enquanto que a função densidade de probabilidade de uma resposta estrutural estocástica é uma distribuição com um único pico.

A seguir é mostrado de forma simplificada a formulação utilizada no processo de identificação de componentes harmônicos. O vetor y_f , de ordem $1 \times npontos$, é o sinal no domínio do tempo contendo apenas um modo.

$$d_{\min} = \min(y_f) \quad (5.49)$$

$$d_{\max} = \max(y_f) \quad (5.50)$$

$$\delta = d_{\max} - d_{\min} \quad (5.51)$$

$$a = d_{\min} - 0.2\delta \quad (5.52)$$

$$b = d_{\max} + 0.2\delta \quad (5.53)$$

$$dm = \frac{(b - a)}{N - 1} \quad (5.54)$$

N é o número de pontos da Função Densidade de Probabilidade estimada. Neste trabalho é utilizado $N = 2048$.

$$h = \frac{1.6 \text{std}(y_f)}{1.3(npontos)^{0.2}} \quad (5.55)$$

$npontos$ é o número de pontos do vetor y_f , std é o desvio padrão.

$$S_1 = \frac{2\pi i[-N/2 : N/2]}{(b - a)} \quad (5.56)$$

$$y_1 = \frac{1}{N} \text{fft} (y_g) \quad (5.57)$$

O vetor y_g de ordem $N \times 1$ é obtido a partir de propriedades estatísticas do sinal y_f .

$$zeta = \text{fftshift} (y_1)^T \exp \left[-0.5 (h S_1)^2 \right] \quad (5.58)$$

$$pdf = \text{abs} [\text{ifft} (\text{fftshift} (zeta))] \quad (5.59)$$

E finalmente,

$$FDP = \text{fliplr} \left[\frac{pdf}{dm \left(\sum_{i=1}^N pdf(i) \right)} \right] \quad (5.60)$$

Desta forma, a Função Densidade de Probabilidade aplicada para um determinado modo, constitui um indicador natural de respostas harmônicas ou estruturais. Este indicador foi proposto também por Lago (1997).

Então, uma maneira de identificar se um pico na função densidade espectral da resposta corresponde a um modo operacional (resposta harmônica) ou a um modo natural é através da função de densidade de probabilidade do sinal contendo apenas aquele modo. Se o formato da função de densidade de probabilidade deste sinal filtrado se aproximar do formato da densidade de probabilidade de ruído branco, ou seja, uma densidade de probabilidade gaussiana ou normal, então o modo sob análise corresponde a um modo natural. Por outro lado, se o formato da função de densidade de probabilidade deste sinal filtrado se aproximar do formato da densidade de probabilidade de uma função harmônica, então o modo sob análise corresponde a um modo operacional.

5.8. VALIDAÇÃO DOS PARÂMETROS ESTIMADOS

Existem muitas técnicas para comparar os modos de vibração, como descrito por Ewins (2000). Em certos casos é interessante comparar um grupo de modos de vibração obtidos experimentalmente com outro que se havia obtido teoricamente, com o propósito de validar o modelo da estrutura que se está analisando. Em outros casos se comparam os modos de vibração obtidos com eles mesmos para ver suas correlações.

5.8.1. CORRELAÇÃO NUMÉRICA (MAC)

É o procedimento mais utilizado para correlacionar dois conjuntos de modos de vibração. As fórmulas fornecidas abaixo supõem que os modos sejam complexos. São empregadas para comparar os modos de vibração medidos $\{\Phi_X\}$ com os calculados teoricamente $\{\Phi_A\}$.

O parâmetro conhecido como *MAC* (*Modal Assurance Criterion*) é uma quantidade escalar inclusive se os modos que se está comparando são complexos.

$$MAC(A, X) = \frac{\left| \{\Phi_X\}^H \{\Phi_A\} \right|^2}{\left(\{\Phi_X\}^H \{\Phi_X\} \right) \cdot \left(\{\Phi_A\}^H \{\Phi_A\} \right)} \quad (5.61)$$

Se os modos que se está comparando são idênticos ou proporcionais, o $MAC(A, X)$ tende a um valor unitário, indicando uma alta correlação.

Dados dois conjuntos de modos, um formado por m_X modos experimentais e outro por m_A modos teóricos, pode-se representar em uma matriz de dimensões $m_X \times m_A$ os valores de *MAC* onde se vêem claramente as relações entre os modos experimentais e os teóricos. Geralmente se aceita que um valor de *MAC* acima de 0,9 indica que os modos comparados estão correlacionados e um valor abaixo de 0,1 indica que não há correlação entre ambos.

As causas pelas quais o parâmetro *MAC* não alcança exatamente o valor unitário para modos correlacionados podem ser várias:

- O modelo analítico é uma aproximação da estrutura real.
- Presença de não linearidades na realização do ensaio.

- Presença de ruído nas medidas.
- Erros no processamento dos dados medidos.
- Escolha imprópria dos graus de liberdade incluídos na correlação.

A eleição dos graus de liberdade é muito importante. Deve-se utilizar um número de graus de liberdade suficiente para que se possa distinguir bem os diferentes modos de vibração. É óbvio que se incluir todos os graus de liberdade do modelo se obtém uma medida mais precisa da correlação entre os dois vetores.

5.8.2. AUTO - MAC

É uma versão do parâmetro *MAC* em que se compara um grupo de modos de vibração obtidos com eles mesmos. A matriz obtida se caracteriza por ter a diagonal principal formada por elementos de valor unitário, além de ser quadrada e simétrica. Se todos os modos obtidos são ortogonais, os elementos que não se encontram na diagonal serão nulos. Uma das razões pela qual isso pode não ocorrer é devido ao fato que a condição de ortogonalidade só se satisfaz quando se incluem nos cálculos todos os graus de liberdade.

5.8.3. MODAL PHASE COLLINEARITY (*MPC*)

A partir do modelo identificado, deve-se realizar a seleção e diferenciação dos modos reais (modos estruturais) dos modos computacionais (modos de ruído). Para isso, foi utilizado o critério *MPC* – Modal Phase Collinearity (Pappa et al., 1993). O parâmetro *MPC* é uma quantidade escalar que varia entre 0 e 1 e mostra a qualidade e o comportamento dos modos de vibrar identificados. Modos com *MPC* abaixo de 0,7 devem ser considerados como modos espúrios. As equações abaixo fornecem o valor *MPC* para cada modo identificado Φ_i .

$$S_{xx} = \{\text{Re}(\Phi_i)\}^T \{\text{Re}(\Phi_i)\} \quad (5.62)$$

$$S_{yy} = \{\text{Im}(\Phi_i)\}^T \{\text{Im}(\Phi_i)\} \quad (5.63)$$

$$S_{xy} = \{\text{Re}(\Phi_i)\}^T \{\text{Im}(\Phi_i)\} \quad (5.64)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left[\frac{\{\text{Im}(\Phi_i)\}^T}{\{\text{Re}(\Phi_i)\}^T} - \frac{\{\text{Re}(\Phi_i)\}}{\{\text{Im}(\Phi_i)\}} \right] \quad (5.65)$$

$$MPC = 4 S_{xy}^2 \left(\frac{\sqrt{\eta^2 + 1}}{S_{xx} + S_{yy}} \right)^2 \quad (5.66)$$

MPC é a medida de colinearidade da fase dos componentes de um particular modo complexo Φ_i . Se os pontos estão perfeitamente em fase ou fora de fase uns com os outros, este modo possui amortecimento proporcional e pode ser representado completamente por um correspondente modo de vibrar real. Os modos identificados pelo método SSI são considerados estruturais quando $MPC > 0,7$. Informações mais detalhadas desse critério de determinação modal podem ser encontradas em Pappa et al. (1993).

CAPÍTULO 6

IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO DADOS SIMULADOS

A utilização de dados simulados no processo de identificação e validação da metodologia é muito importante porque o usuário tem o conhecimento exato dos dados utilizados no modelo e conseqüentemente o valor dos parâmetros que serão identificados. Isso permite estabelecer uma base de dados de referência para a avaliação da metodologia proposta, possibilitando assim uma melhor comparação dos resultados obtidos com os dados utilizados na simulação.

6.1. DETERMINAÇÃO DA ORDEM DO SISTEMA

Nesta seção, será utilizado um modelo de ordem 3 apenas para mostrar que a identificação correta da ordem do sistema depende diretamente do número de blocos de colunas j e pode ser determinada a partir dos valores singulares obtidos da decomposição em valores singulares.

Uma seqüência de resposta y de 4000 pontos foi gerada utilizando o modelo. O número de blocos de linhas i utilizado foi 10. Para cada j entre 100 e 4000, os valores singulares foram calculados. Isto é ilustrado na Figura 6.1.

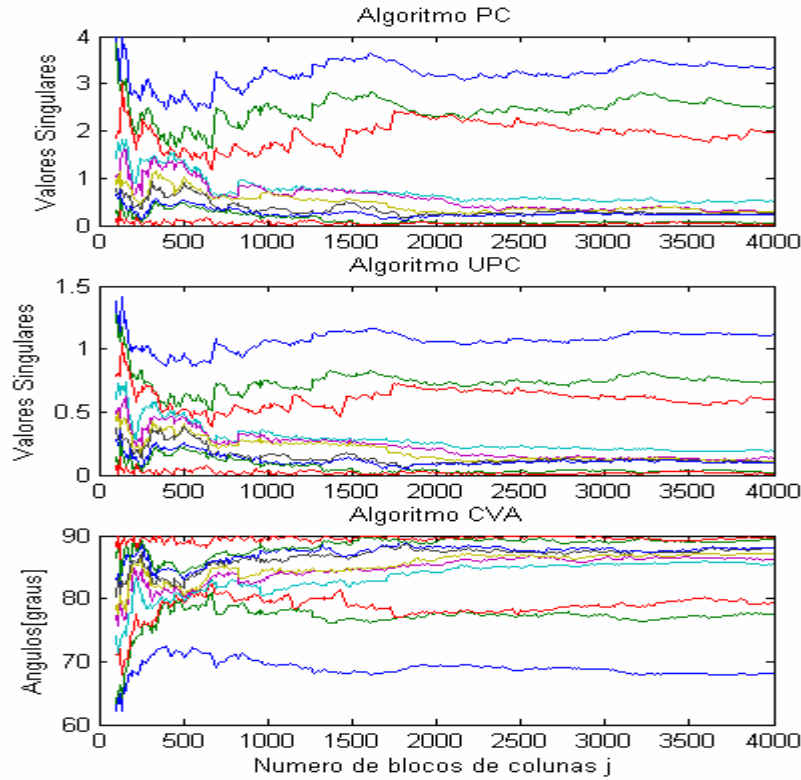


Figura 6.1: Ordem do modelo em função do número de colunas j .

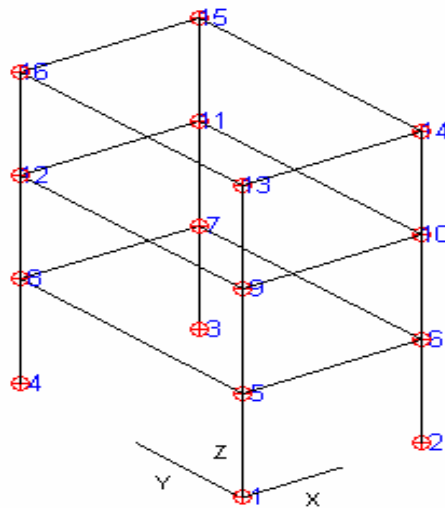
A ordem do modelo é determinada pelos valores singulares ou ângulos principais em função do número de blocos de colunas j para os três algoritmos apresentados: **PC**, **UPC** e **CVA**. Para cada um dos três gráficos, a ordem do sistema (três) pode ser facilmente determinada. A convergência dos valores singulares em função de j pode também ser observada. Para os primeiros dois gráficos todos os valores singulares vão para zero, exceto três. Para o ultimo gráfico, todos os ângulos principais vão para 90 graus, exceto três.

6.2. MODELO DE 48 GRAUS DE LIBERDADE

Esta seção discute a aplicação da metodologia proposta utilizando dados simulados obtidos a partir de uma estrutura tipo Frame ilustrada na figura 6.2.

A estrutura foi modelada por elementos finitos, com elementos do tipo viga, foram utilizados 6 graus de liberdade por nó. Na simulação, os graus de liberdade de rotação foram bloqueados, uma vez que medidas de rotação não são usuais em testes experimentais. Neste caso, o modelo

tem 16 nós e 24 elementos e os parâmetros do modelo (frequências e modos) foram calculados a partir da condição livre-livre. A matriz de amortecimento foi considerada proporcional às matrizes de massa e rigidez.



Propriedades	Valores
Módulo de Elasticidade	$2,1 \times 10^{11} \text{ [N/m}^2\text{]}$
Massa Específica	$7860 \text{ [kg/m}^3\text{]}$
Coefficiente de Poisson	0,3
Dimensão	$0,4 \times 0,3 \times 0,7 \text{ m}$
Área da Seção Transversal (barras horizontais)	$20 \times 20 \times 0,8 \text{ mm}$
Área da Seção Transversal (barras verticais)	$30 \times 20 \times 0,5 \text{ mm}$
Amortecimento $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$	$\alpha = 10^{-1}$ $\beta = 10^{-7}$

Figura 6.2: Estrutura tipo “frame”

Os parâmetros estruturais do modelo, matrizes de massa, rigidez e amortecimento foram utilizados para definir as matrizes de estado contínuas A_c , B_c , C_c e D_c . As matrizes de estado discretas A , B , C e D , foram obtidas utilizando um tempo de amostragem de $\Delta t = 10^{-3}$ segundos.

Uma vez obtidas as matrizes de estado discretas, foram simuladas as respostas do modelo $y(t)$ para os vários pontos de “medição”. Essas respostas do sistema discreto dependem exclusivamente das matrizes de estado discretas A , B , C e D e da entrada do sistema. Neste caso, a entrada considerada foi um sinal randômico (ruído branco) de média zero aplicado no nó 9, direção x .

As respostas (saídas) foram obtidas para todos os pontos (nós do modelo). Neste caso, as respostas foram simuladas com 4096 pontos. Visando uma representação mais próxima da prática, na simulação dos dados as respostas foram contaminadas com ruído não correlacionado com a entrada do sistema. O ruído foi quantificado em termos da relação sinal-ruído, denominada nível de ruído, estabelecida de acordo com a energia do ruído, isto é, de acordo com o número obtido pela raiz média quadrática *RMS* do ruído em relação à *RMS* da resposta:

$$NR = \frac{RMS(ruído)}{RMS(resposta)} \quad (6.1)$$

onde $RMS(resposta)$ representa o maior valor RMS dentre todos os sinais de resposta considerados. Neste trabalho foi considerado $NR = 2\%$.

A Figura 6.3 mostra uma resposta típica no domínio do tempo e da frequência, mais especificamente o deslocamento medido no ponto 1, direção x e a respectiva função densidade espectral de potência.

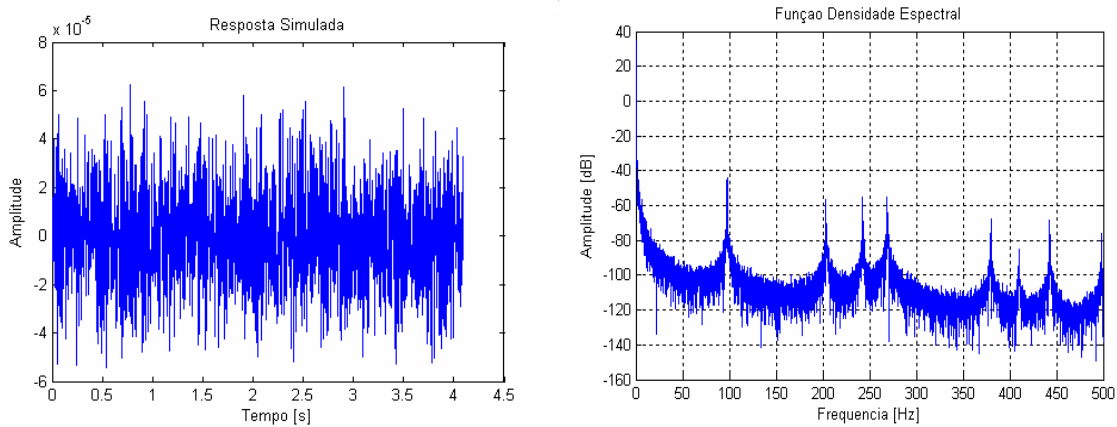


Figura 6.3: Resposta Simulada e Densidade Espectral de Potência do ponto 1

O número de sinais “medidos” é igual à dimensão l dos modos de vibrar, equação (5.48). O número de pontos do sinal de resposta ($npontos$) leva à definição do número de colunas, j , na matriz bloco de saída (matriz Hankel) (equação (5.15)).

A seleção do número de blocos de linhas, i , na matriz Hankel (equação (5.15)) e o número de valores singulares utilizados na equação (5.23) são dois importantes parâmetros. Quando j cresce, a diferença entre os valores singulares aproveitados e os rejeitados, (equação (5.23)) também cresce (teoricamente deve-se assumir que $j \rightarrow \infty$). Um grande número de dados facilita ao usuário determinar a ordem do sistema por inspeção dos valores singulares, como ilustrado na Figura 6.1. Quando i cresce, os erros nos resultados estimados decresce. Outra restrição para i já foi mencionada na seção 5.2, ($li \geq n$).

De qualquer forma, em aplicações práticas, a diferença entre os valores singulares aproveitados e rejeitados não é sempre clara. Quando a escolha da ordem é menor que o número de modos excitados e observados, nem todos os modos são identificados. Se a ordem é muito alta, modos adicionais são identificados com razão de amortecimento negativa ou muito alta e $MPC \ll 1$. Esses modos devem ser rejeitados posteriormente.

A partir da ordem do modelo que se quer identificar, que é na verdade a dimensão da matriz de espaço de estado, o número de blocos de linhas precisa ser selecionado. Através dos valores singulares obtidos da decomposição em valores singulares, o método estima a ordem do sistema. Deve-se olhar a diferença entre dois valores singulares sucessivos. O valor singular onde a máxima diferença ocorre determina a ordem do modelo. Este critério não deveria, de qualquer forma, ser aplicado isoladamente, uma vez que na maioria dos casos práticos essa diferença não está bem definida. Outros métodos estatísticos para determinar a ordem do modelo são discutidos em (Camba-Mendez e Kapetanios, 2001).

A Figura 6.4 mostra o gráfico de barras utilizado para identificar a ordem do modelo. Como esperado, a ordem do sistema, neste caso, é $n=96$.

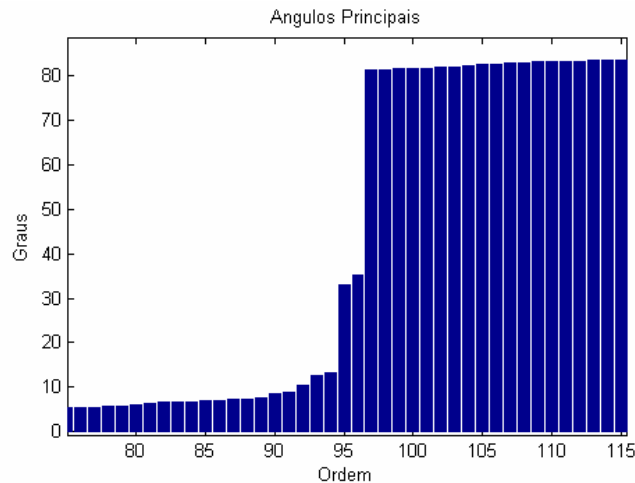


Figura 6.4: Ordem do Sistema

Então, é possível identificar a matriz dinâmica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a partir dos dados de resposta do sistema. Os parâmetros modais do modelo são obtidos através da decomposição em autovalores da matriz dinâmica, como discutido anteriormente. Vale lembrar que os resultados referidos como teóricos correspondem aos resultados obtidos com as matrizes K e M da estrutura obtidas

por Elementos Finitos. As frequências e os modos são obtidos a partir da resolução do problema de autovalores e autovetores.

A Tabela 6.1 mostra uma comparação dos resultados estimados com o algoritmo SSI e os resultados teóricos obtidos pela análise de elementos finitos. Os erros percentuais das frequências naturais e amortecimentos modais mostram uma satisfatória correspondência.

Tabela 6.1: Resultados da Identificação Modal

Modo		Análise Teórica Elementos Finitos	Método SSI	
	Amortecimento ζ (%)	Frequência ω (Hz)	Frequência ω (Hz) / Erro (%)	Amortecimento ζ (%) / Erro (%)
1	0.1122	97.7	97.7 / 0.00	0.1216 / 8.38
2	0.1102	101.7	101.8 / 0.10	0.1015 / 7.90
3	0.1026	199.9	200.2 / 0.15	0.1362 / 32.75
4	0.1030	203.4	203.7 / 0.15	0.1128 / 9.51
5	0.1056	221.8	221.8 / 0.00	0.0908 / 14.02
6	0.1090	242.7	242.6 / 0.04	0.1051 / 3.58
7	0.1141	268.9	268.6 / 0.11	0.1311 / 14.90
8	0.1135	269.5	269.5 / 0.00	0.1313 / 15.68
9	0.1144	270.6	270.7 / 0.04	0.1581 / 38.20
10	0.1159	277.8	277.8 / 0.00	0.1876 / 61.86
11	0.1361	363.4	363.2 / 0.06	0.2228 / 63.70
12	0.1365	363.5	363.7 / 0.06	0.1642 / 20.30
13	0.1403	365.0	365.0 / 0.00	0.1093 / 22.10

Os resultados mostram que a técnica é capaz de identificar os modos de vibrar da estrutura utilizando somente os dados de resposta. Os três primeiros modos apresentam uma razão de amortecimento muito alta e eles não foram considerados porque eles não são modos estruturais, são modos de corpo rígido. Então, todos os modos na faixa de frequência analisada foram identificados.

A metodologia implementada apresenta também algumas interfaces gráficas que permitem comparar os resultados. A Figura 6.5 mostra a comparação dos modos de vibrar da estrutura obtidos pela análise de elementos finitos e estimados a partir das respostas simuladas. Para ilustrar os resultados, são apresentados o *Modal Phase Collinearity (MPC)* dos modos obtidos através do algoritmo e o *Modal Assurance Criterion (MAC)* entre os vetores modais obtidos

analiticamente e os obtidos através do algoritmo com o intuito de avaliar as formas modais. Os valores do *MAC* confirmam a excelente estimativa também para os vetores modais.

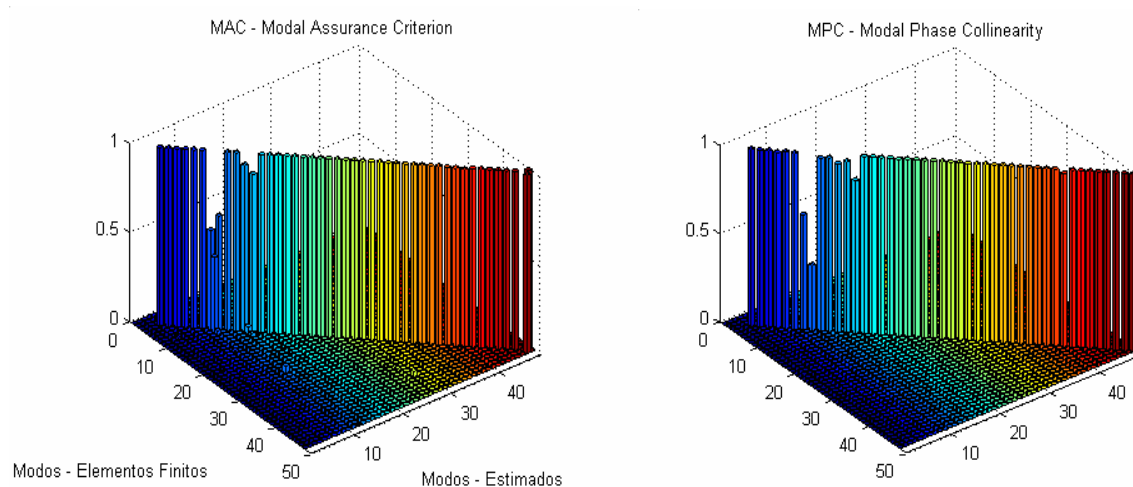


Figura 6.5: *MAC* e *MPC* dos modos identificados

Como pode ser visto, existe uma região onde os modos não estão bem correlacionados, o que indica que não foi possível excitar esses modos utilizando excitação em uma única direção, especificamente nó 9, direção x.

A interface gráfica também permite uma melhor interação do usuário com o algoritmo de identificação, proporciona a animação dos modos que permite uma visualização da estrutura deformada e não deformada, rotação da estrutura, entre outras. A Figura 6.6 mostra o quarto e quinto modos de vibrar estimados.

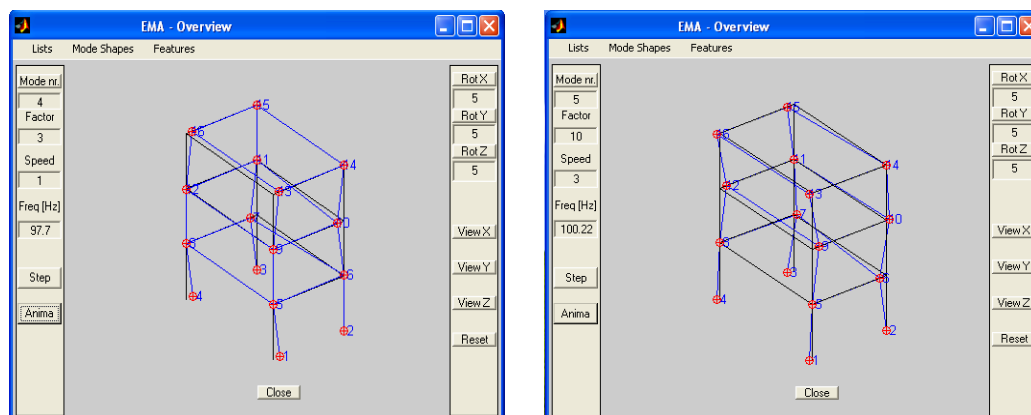


Figura 6.6: Interface de visualização dos modos

6.3. IDENTIFICAÇÃO DE MODOS NATURAIS E MODOS OPERACIONAIS

A partir deste momento, a aplicação da metodologia proposta será feita utilizando um modelo de 16 graus de liberdade obtido a partir da estrutura tipo Frame. A estrutura foi modelada por elementos finitos, elementos do tipo viga, foi utilizado 1 grau de liberdade por nó na direção x. Neste caso, o modelo tem 16 nós e 24 elementos e os parâmetros do modelo (frequências e modos) também foram calculados a partir da condição livre-livre.

A Tabela 6.2 mostra uma comparação dos resultados estimados com o algoritmo SSI e os resultados teóricos obtidos pela análise de elementos finitos. Os erros percentuais das frequências naturais e amortecimentos modais também são apresentados. A matriz de amortecimento, como no modelo anterior, foi considerada proporcional às matrizes de massa e rigidez.

Tabela 6.2: Resultados da Identificação Modal

Modo	Análise Teórica Elementos Finitos		Método SSI	
	Amortecimento ζ (%)	Frequência ω (Hz)	Frequência ω (Hz) / Erro (%)	Amortecimento ζ (%) / Erro (%)
1	0,1042	119,4	120,1 / 0,59	0,1260 / 21,0
2	0,3046	215,1	214,8 / 0,14	0,2598 / 14,7
3	0,1162	278,9	279,3 / 0,14	0,1502 / 29,3
4	0,6034	290,1	289,6 / 0,17	0,5272 / 12,3
5	0,7066	302,5	301,7 / 0,26	0,7152 / 1,2
6	0,7551	322,9	323,5 / 0,19	0,6843 / 9,4
7	0,8369	357,0	356,2 / 0,22	0,8745 / 4,5
8	1,2775	381,6	382,1 / 0,13	1,2080 / 5,4

6.3.1. SINAL HARMÔNICO ADICIONADO À ENTRADA DO SISTEMA

Neste caso, foi adicionado um componente harmônico no ruído branco de entrada com o objetivo de verificar a consequência deste na obtenção dos parâmetros modais utilizando o método SSI.

Para observar o efeito desta componente harmônica, foram simulados dois casos, o primeiro com o componente harmônico igual a 50 Hz, distante do valor da primeira frequência natural e outro com o componente harmônico igual a 215.1 Hz, coincidindo com o valor da segunda frequência natural. Os resultados são avaliados de forma semelhante para os dois casos.

A Figura 6.7 mostra a Função Densidade Espectral com o sinal harmônico de 50 Hz.

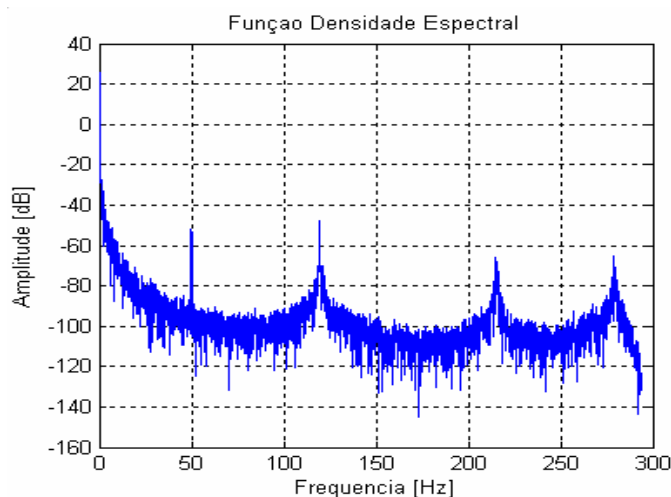


Figura 6.7: Função Densidade Espectral com o sinal harmônico de 50 Hz.

No primeiro caso, com o harmônico de 50 Hz, observa-se que o método identifica uma ordem maior que a verdadeira, como mostra a Figura 6.8, o que já era esperado devido à presença do componente harmônico.

Para dados experimentais, uma entrada harmônica deste tipo, pode contaminar os resultados se interpretada como característica própria do sistema, o que não é difícil de ocorrer. Neste caso, será apresentado nos próximos itens um algoritmo auxiliar baseado na Função Densidade de Probabilidade para identificação desses modos operacionais.

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 6.3 e a Figura 6.9 mostra o gráfico de *MAC* dos modos identificados. Os valores de *MAC* obtidos para esta estimativa apresentam bons resultados, com a diagonal bem próxima a 1, exceto para os dois primeiros modos. A Tabela 6.3 apresenta um erro de amortecimento bastante elevado para o primeiro modo, mostrando que o sinal harmônico prejudica a estimativa do amortecimento deste modo. Boas estimativas de frequência e amortecimento foram obtidas para o restante dos modos.

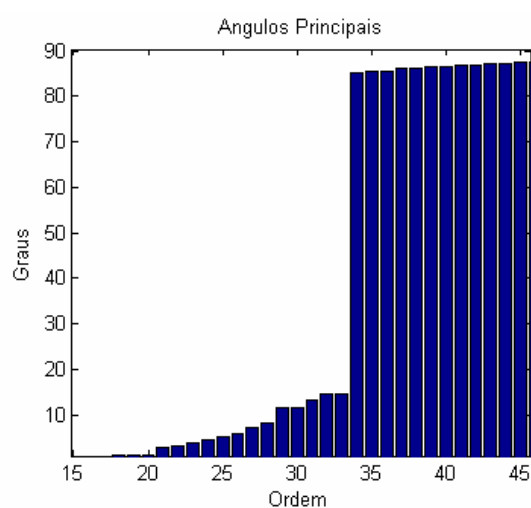


Figura 6.8: Ordem estimada

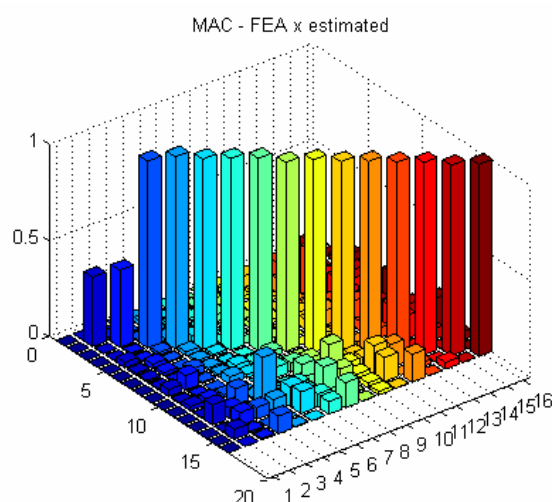


Figura 6.9: Comparação dos modos

Tabela 6.3: Resultados obtidos para um harmônico de 50 Hz adicionado.

Modo	Método SSI	
	Frequência ω (Hz) / Erro (%)	Amortecimento ζ (%) / Erro (%)
“Harmônico”	50,1 / 0,20	0,01 / ---
1	110,5 / 7,45	0,2005 / 92,4
2	210,2 / 2,28	0,3196 / 5,0
3	278,3 / 0,22	0,1507 / 29,7
4	289,5 / 0,21	0,4751 / 21,3
5	301,9 / 0,20	0,6065 / 14,2
6	323,4 / 0,15	0,6795 / 10,0
7	356,8 / 0,06	0,7464 / 10,8
8	382,2 / 0,16	1,0466 / 18,1

Como pode ser visto, a primeira frequência estimada possui valor de amortecimento bastante reduzido o que já era esperado em se tratando de um sinal harmônico com amortecimento nulo. Pode-se então perceber que o sinal harmônico de frequência 50 Hz comprometeu a identificação dos dois primeiros modos de vibrar, figura 6.9. Para o restante dos modos, os resultados apresentaram-se dentro do esperado.

No segundo caso, com o harmônico a 215,1 Hz, observa-se um aumento do pico da segunda frequência natural em relação aos demais e valor de amortecimento mais baixo que o conhecido analiticamente. Para os outros modos, os resultados obtidos estavam próximos dos valores esperados.

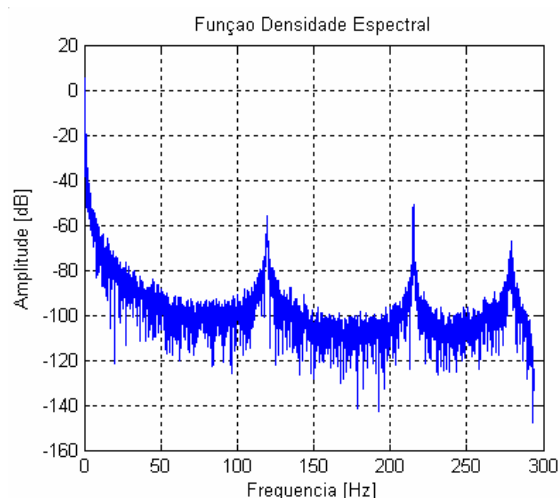


Figura 6.10: PSD com o harmônico de 215,1 Hz.

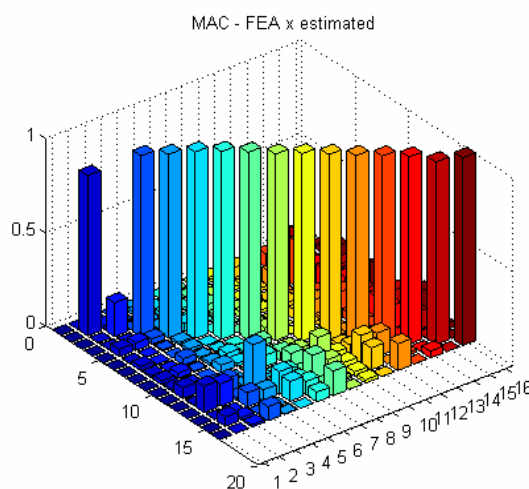


Figura 6.11: Comparação dos modos

Os resultados obtidos na Tabela 6.4 mostram os dois modos (natural e operacional) juntos, com um erro de amortecimento bastante alto. Nesta tabela ainda, percebe-se claramente a influência do modo operacional na estimativa dos parâmetros modais dos modos naturais mais próximos. Os valores de *MAC* obtidos para esta estimativa também apresentam bons resultados, com valores da diagonal próximos a 1, exceto para os dois primeiros modos.

Tabela 6.4: Resultados obtidos para um harmônico de 215,1 Hz adicionado.

Modo	Método SSI	
	Frequência ω (Hz) / Erro (%)	Amortecimento ζ (%) / Erro (%)
1	122,0 / 2,18	0,1695 / 62,7
2 + Harmônico	215,9 / 0,56	0,0985 / 68,0
3	278,1 / 0,29	0,1613 / 38,9
4	290,9 / 0,28	0,7152 / 18,5
5	302,0 / 0,17	0,5976 / 15,4
6	321,8 / 0,34	0,6286 / 16,8
7	356,2 / 0,22	0,7546 / 9,8
8	382,5 / 0,24	1,0185 / 20,2

6.3.2. ANÁLISE DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Segundo Brincker *et al.* (2000), uma maneira de se identificar se um pico na função densidade espectral da resposta corresponde a um modo operacional (resposta harmônica) ou a um modo natural é através da função de densidade de probabilidade do sinal contendo apenas aquele modo. Se o formato da função de densidade de probabilidade deste sinal filtrado se aproximar do formato da densidade de probabilidade de ruído branco, ou seja, uma densidade de probabilidade gaussiana ou normal (Bendat *et al.*, 1980), então o modo sob análise corresponde a um modo natural. Por outro lado, se o formato da função de densidade de probabilidade deste sinal filtrado se aproximar do formato da densidade de probabilidade de uma função harmônica, então o modo sob análise corresponde a um modo operacional.

A função densidade de probabilidade de uma resposta harmônica é ainda mais bem definida. Se as variáveis estocásticas X e Y com as correspondentes funções densidade de probabilidade $f(x)$, $g(y)$ são relacionadas por $y = h(x)$, então a seguinte relação bem conhecida existe:

$$g(y) = \frac{f(x)}{h'(x)} \quad (6.2)$$

onde $h'(x)$ é a derivada de $h(x)$ (Papoulis, 1990). Agora considerando a função densidade de X como uniforme chega-se à função densidade de probabilidade para uma resposta harmônica com amplitude a .

$$g(y) = \frac{1}{\pi \cos(\arcsin(y/a))} \quad (6.3)$$

A função densidade cresce quando $y \rightarrow a$ ou $y \rightarrow -a$ (região dos picos). Então, a função densidade tem dois picos distintos. Como é de se esperar, este resultado é verdadeiro para qualquer frequência, isto é, também para o caso com baixa variação de frequência. Para o caso onde a amplitude é constante e a resposta permanece harmônica, a equação (6.3) representa exatamente a função densidade de probabilidade de uma resposta harmônica de amplitude a .

Para efeito de demonstração da eficiência deste procedimento, serão utilizados dados experimentais, mais especificamente, os dados medidos na estrutura Frame. Considere que haja duas excitações harmônicas adicionadas à excitação aleatória da estrutura, uma de 20 Hz e amplitude 0,1 e outra de 70 Hz e amplitude 0,05. A Figura 6.12 mostra um gráfico com a função densidade espectral da resposta medida no primeiro nó da estrutura, direção x.

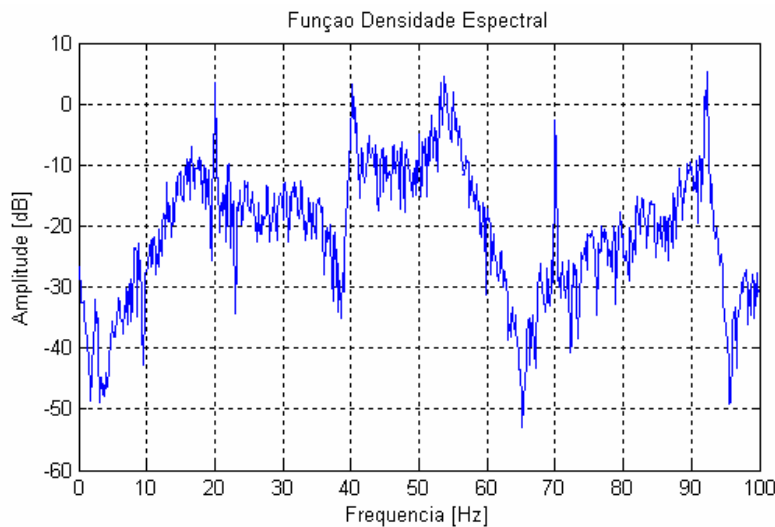


Figura 6.12: Densidade Espectral de Potência

Como pode ser visto, existem claramente 5 picos na faixa de frequência de 0 a 100 Hz, três correspondentes a modos naturais e dois correspondentes a modos operacionais. Aplicou-se um filtro passa-banda centrado em cada um dos picos apresentados e analisou-se a função densidade de probabilidade de cada sinal (domínio do tempo) filtrado. A Figura 6.13 mostra as funções densidade de probabilidade dos sinais filtrados sobre a frequência dos modos harmônicos.

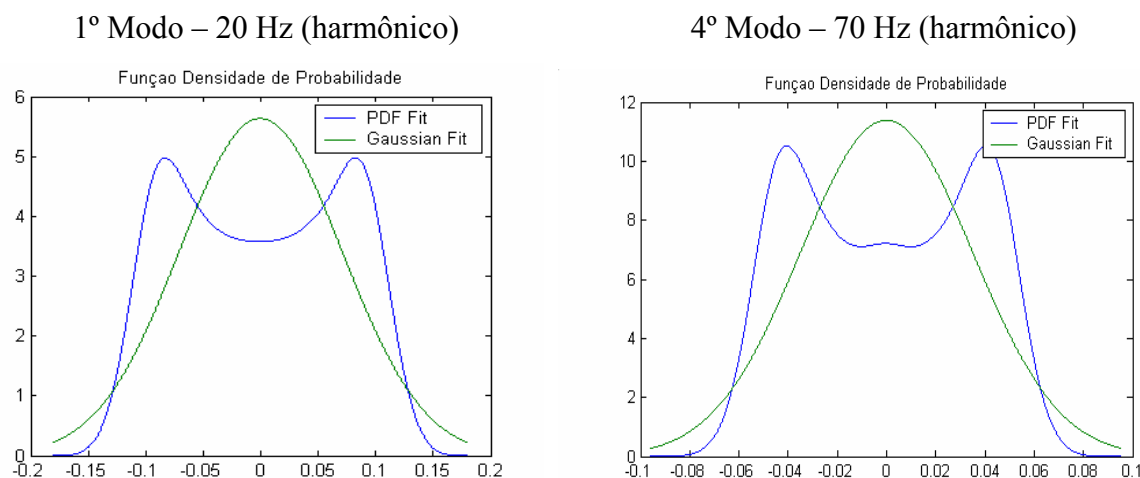


Figura 6.13: Função Densidade de Probabilidade para os modos harmônicos.

A forma das curvas apresentadas ilustra que o primeiro modo (20 Hz) e o quarto modo (70 Hz) tratam-se de modos operacionais. Pode-se perceber pelo formato das curvas que elas tendem a aproximar-se de uma função densidade de probabilidade típica de um sinal senoidal, comprovando que os modos sob análise são modos operacionais.

Analisando-se o formato da função densidade de probabilidade de cada sinal contendo cada frequência dos demais picos, comprova-se que os demais picos são de modos naturais. A Figura 6.14 mostra as funções densidade de probabilidade dos sinais filtrados sobre a frequência dos demais picos.

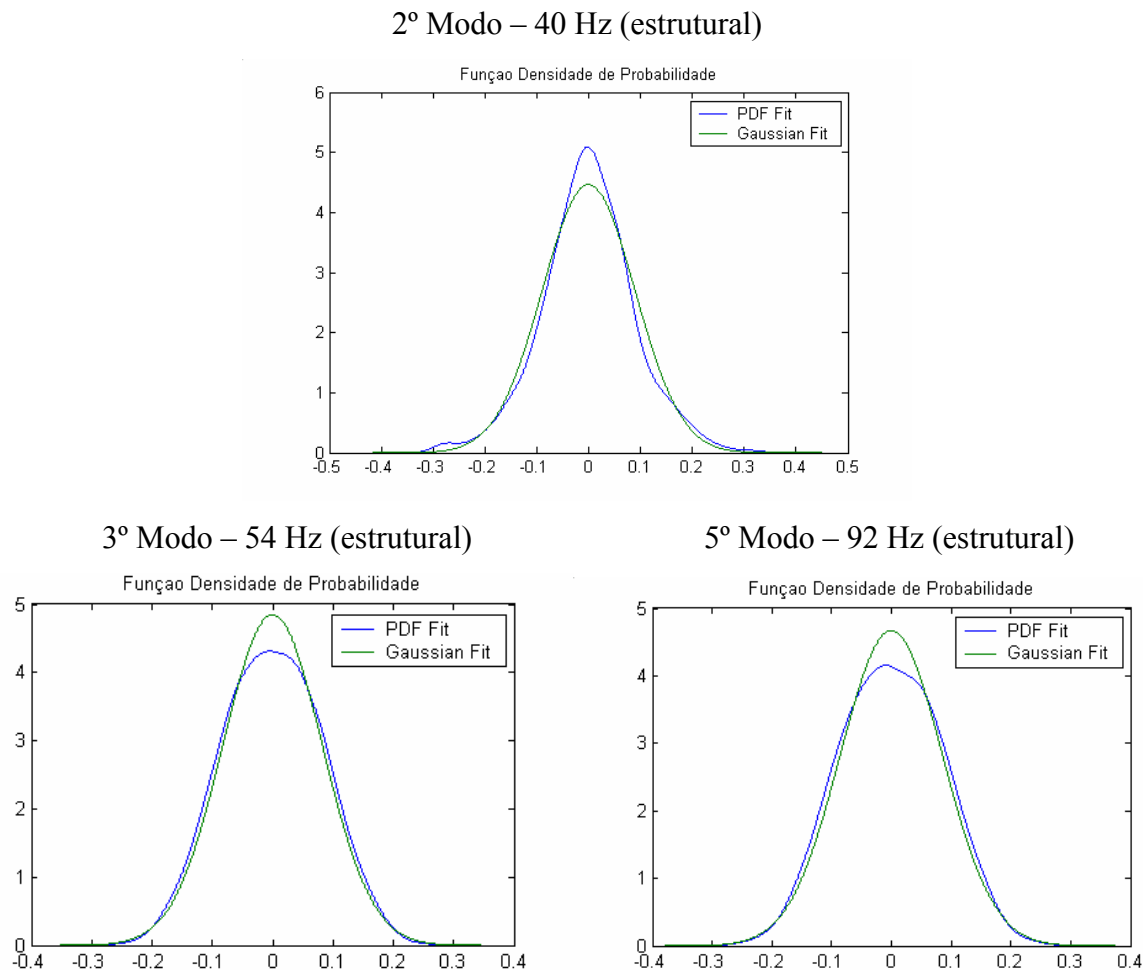


Figura 6.14: Função Densidade de Probabilidade para os modos estruturais.

As respostas modais (domínio do tempo) foram estimadas utilizando um filtro passa-banda posicionado sobre a frequência natural de cada modo. As funções densidade de probabilidade dos sinais filtrados foram então estimadas, Figuras 6.13 e 6.14.

Como pode ser visto, os resultados mostram que o primeiro modo (20 Hz) e o quarto modo (70 Hz) são claramente identificados como harmônicos. Para esses modos, a função densidade de probabilidade é uma distribuição com pico duplo. Para o restante dos modos, a distribuição possui um único pico e é muito parecida com uma distribuição Gaussiana indicando que os demais modos são modos estruturais.

6.4. PARÂMETROS MODAIS OBTIDOS PELO ALGORITMO SSI APLICADO NO SINAL FILTRADO

Utilizando o modelo de 16 g.d.l, será aplicado um filtro rejeita banda nos sinais de resposta centrado na frequência do harmônico adicionado ao ruído branco. Assim, o método de identificação SSI será aplicado agora utilizando as respostas filtradas, ou seja, sem a presença do sinal harmônico. Novamente, foram analisados dois casos, o primeiro quando o harmônico possui frequência de 150 Hz (Figura 6.15) e o segundo quando a frequência é de 215,1 Hz (Figura 6.16).

Para o primeiro caso, com o harmônico de 150 Hz, foram obtidos bons resultados. A Tabela 6.5 apresenta as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento com seus respectivos erros. Os resultados comprovam que a identificação ocorreu perfeitamente mesmo após a filtragem do componente harmônico. Os valores de *MAC* continuaram a apresentar resultados próximos a 1 na diagonal principal, como é mostrado na Figura 6.17.

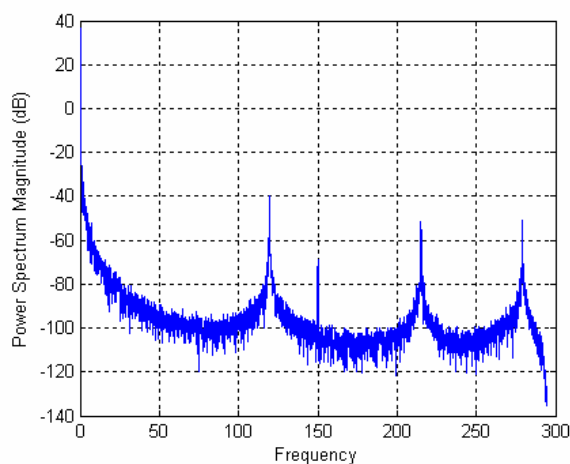


Figura 6.15: PSD do sinal de resposta

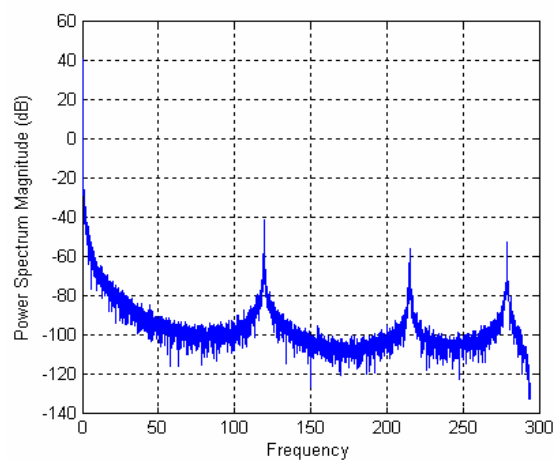
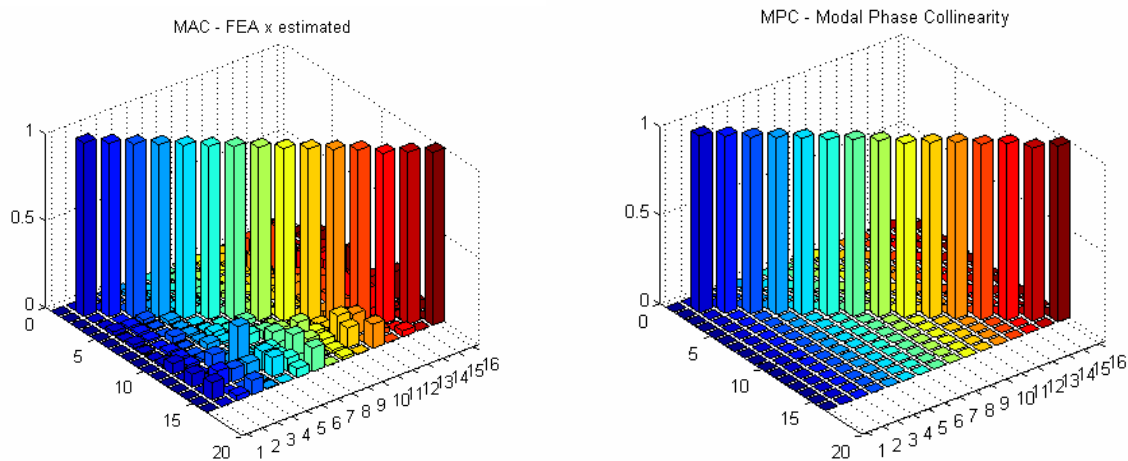


Figura 6.16: PSD do sinal filtrado em 150 Hz.

Tabela 6.5: Resultados obtidos após a filtragem dos sinais

Modo	Método SSI	
	Frequência ω (Hz) / Erro (%)	Amortecimento ζ (%) / Erro (%)
1	120.4 / 0.84	0.1510 / 44.9
2	215.6 / 0.23	0.1822 / 40.1
3	278.6 / 0.11	0.1512 / 30.1
4	291.8 / 0.59	0.4031 / 33.2
5	303.6 / 0.36	0.5895 / 16.6
6	321.0 / 0.59	0.5902 / 21.8
7	356.1 / 0.25	0.6965 / 16.8
8	380.2 / 0.37	0.9192 / 28.1

Figura 6.17: *MAC* e *MPC* obtidos com os sinais de respostas filtrados em 150 Hz.

Para o segundo caso, com o harmônico de 215,1 Hz coincidindo com a segunda frequência natural (Figura 6.18), os resultados foram um pouco diferentes. Com a aplicação do filtro rejeita banda sobre a frequência do sinal harmônico, surgiu um pico com ponta dupla (Figura 6.19) apresentando dois resultados próximos em torno da banda rejeitada, ambos com valor de amortecimento elevado comparado com o valor analítico obtido.

A Tabela 6.6 mostra que os dois possíveis resultados para o segundo modo apresentam valores de amortecimento bem maior que o exato e se observa também que os demais modos foram estimados coerentemente.

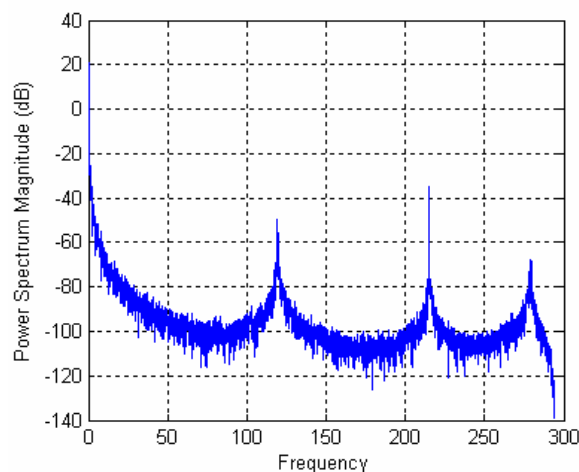


Figura 6.18: PSD do sinal de resposta

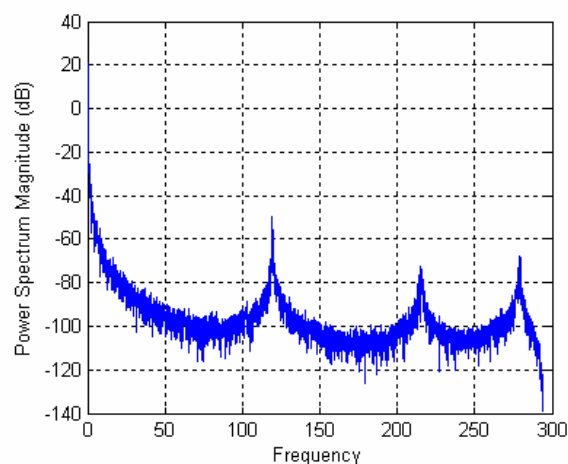


Figura 6.19: PSD do sinal filtrado em 215.1 Hz.

Tabela 6.6: Resultados obtidos após a filtragem dos sinais

Modo	Método SSI	
	Frequência ω (Hz) / Erro (%)	Amortecimento ζ (%) / Erro (%)
1	121.4 / 1.68	0.1410 / 35.3
2	214.1 / 0.46	0.2822 / 7.35
	216.1 / 0.46	0.3102 / 1.84
3	279.7 / 0.29	0.1412 / 21.5
4	292.5 / 0.83	0.4331 / 28.2
5	301.1 / 0.46	0.5523 / 21.8
6	320.5 / 0.74	0.6002 / 20.5
7	356.1 / 0.84	0.7055 / 15.7
8	380.4 / 0.31	0.8598 / 32.7

Dos resultados apresentados, neste caso, o *MAC* e o *MPC* mostraram falta de precisão principalmente na identificação do segundo modo. Os índices *MAC* e *MPC* correspondentes aos 3

primeiros modos também apresentaram valores relativamente baixos, o que indica falta de correlação dos vetores modais mais próximos da frequência filtrada.

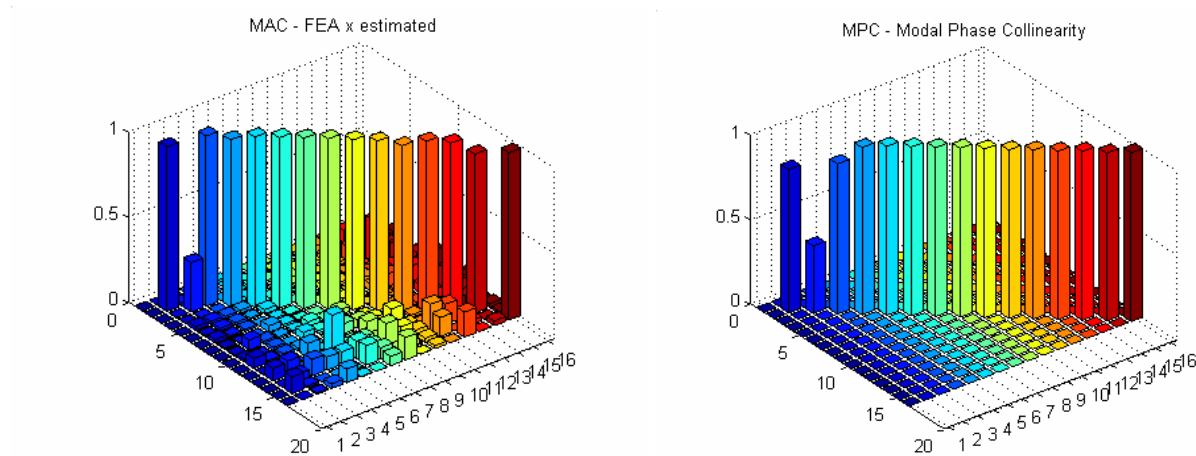


Figura 6.20: *MAC* e *MPC* obtidos com os sinais de respostas filtrados em 215,1 Hz.

Os resultados obtidos para os dois componentes harmônicos mostram que a metodologia pode ser empregada com sucesso quando estão presentes harmônicas de frequências diferentes ou mesmo próximas à alguma frequência natural do sistema. Neste caso, após a filtragem dos componentes harmônicos, o método SSI identifica corretamente todos os parâmetros modais.

Quando existe algum componente harmônico de mesma frequência que os modos próprios do sistema, a metodologia implementada encontra dificuldades para separá-los. Neste caso, principalmente em estruturas com espectro de frequência muito denso, onde há grande chance de existir harmônicas de frequências iguais a alguma frequência natural, a metodologia baseada na Função Densidade de Probabilidade não é recomendada.

CAPÍTULO 7

AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL

A metodologia proposta foi avaliada com dados simulados conforme mostrado no capítulo anterior. Vários sistemas foram estudados e as dificuldades e limitações para identificação dos parâmetros modais utilizando somente a resposta foram avaliadas. Contudo, a avaliação com modelos simulados é limitada, pois, por mais bem elaborados que os modelos sejam, a simulação é incapaz de reproduzir toda a complexidade de um experimento e, portanto, exemplos experimentais são decisivos para avaliação da potencialidade da metodologia, o que demanda a realização de teste de campo, ou em uma primeira fase, em laboratório.

A identificação dos parâmetros modais da estrutura de testes será feita utilizando análise experimental convencional, utilizando métodos clássicos, método de Ibrahim, método *ERA - Eigensystem Realization Algorithm* e análise modal baseada apenas na resposta do sistema, utilizando o método da Identificação Estocástica de Subespaços (SSI). A análise modal clássica será utilizada como base de comparação para os parâmetros modais estimados pela técnica da Identificação Estocástica.

7.1. TESTES EXPERIMENTAIS

Esse item discute a montagem de uma bancada de testes experimentais que foi utilizada para a avaliação da metodologia. Uma estrutura do tipo *frame* foi utilizada nos testes experimentais. A Figura 7.1 mostra uma vista da bancada experimental e a Tabela 7.1 apresenta uma descrição dos instrumentos e materiais utilizados.



Figura 7.1: Bancada Experimental

Tabela 7.1: Materiais e instrumentos utilizados no experimento

Itens	Especificações
Sistema de aquisição	SignalCalc Ace – 32 bits Fabricante: Data Physics Corporation Frequência máxima de operação: 20KHz 2 entradas e 2 saídas
Condicionador de sinais	Ganho: 1, 10 e 100V Banda de frequência: 0,15 Hz a 100kHz Fonte de alimentação: Baterias
Microcomputador	Processador: Pentium / 128 MB – RAM
Shaker	Frequência de operação: 15 a 5000 Hz Fator de Transmissão: 15 N/A Pico máximo: ± 3 mm
Acelerômetro axial	Fabricante: PCB Piezotronics, Inc Frequência de operação: 10 a 5000 Hz Sensibilidade: 97,8 mV/g Erro de Amplitude: 0,1% $\rightarrow$ na faixa de frequência de 30-300 Hz
Estrutura	Tipo: Frame Fabricação: aço ABNT 1010
Célula de carga	Fabricante: PCB Piezotronics, Inc Sensibilidade: 48,45 mV/lbf Erro: 0,18 lbf
Elásticos	

A montagem resume-se em colocar a estrutura suspensa por elásticos, fixar os acelerômetros nos devidos pontos, conectar os cabos do acelerômetro e do *shaker* no sistema de

aquisição/geração, e por fim configurar o sistema de aquisição e geração de sinais. O sinal de excitação é produzido pelo gerador de sinais do software *SignalCalc Ace*, e neste caso, consiste em um sinal de banda larga (ruído branco). A seguir serão discutidos alguns detalhes relevantes à montagem do experimento.

A suspensão deve representar adequadamente a condição desejada da estrutura, neste caso, a condição livre-livre. A interferência da suspensão nos resultados dos testes também é um aspecto importante a ser considerado na definição das condições do experimento. Vários testes variando o tipo de suspensão foram realizados, buscando uma que apresentasse menor interferência nas medidas.

Um outro fator a ser observado, é como o *shaker* irá excitar a estrutura, ou seja, como o shaker irá transmitir para a estrutura a força de excitação, garantindo que esta esteja no ponto e na direção desejada. O acoplamento entre a estrutura e o *shaker* foi feito por meio de uma haste flexível, de modo que o *shaker* apresentasse menor interferência nas medidas, como mostra a Figura 7.2.

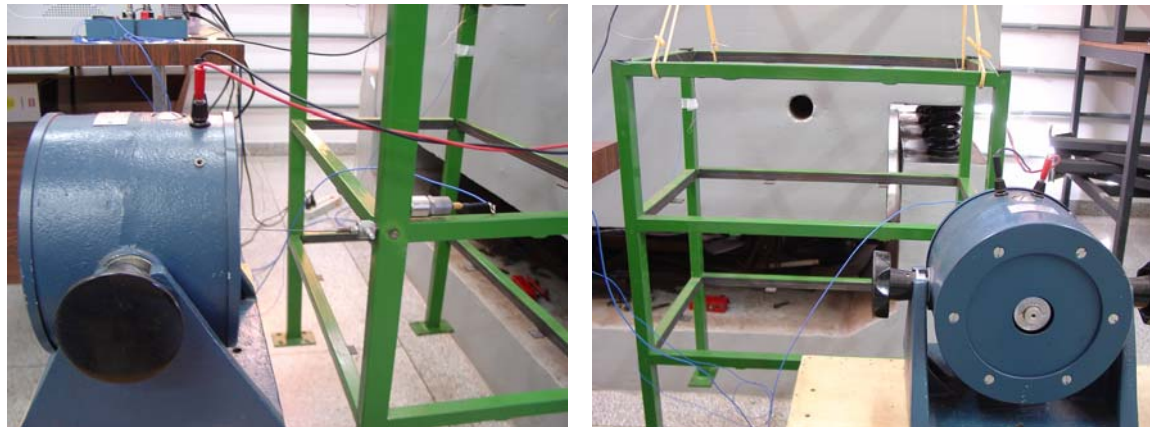


Figura 7.2: Acoplamento flexível *shaker* – estrutura.

Deve-se considerar também a fixação do acelerômetro no ponto exato de medida, pois a fixação irregular do acelerômetro pode acarretar erros na aquisição do sinal.

A definição da malha no modelo analítico e dos pontos de medida na estrutura também são muito importantes para possibilitar a comparação dos resultados obtidos experimentalmente com os fornecidos pelo modelo analítico. A escolha adequada garante a equivalência topológica

entre os modelos analítico e experimental. Além disso, o deslocamento dos pontos de medição leva aos modos, por isso é imprescindível que os sensores sejam colocados em posições adequadas de forma que os modos possam ser visualizados (condição de observabilidade).

A estrutura é feita de tubos de seção quadrada de aço ABNT 1010 e apresenta dimensões de 0,4 m de comprimento, 0,3m de largura e 0,7m de altura. A seção de área transversal das barras horizontais é 20 x 20 x 0,8 mm e a seção de área transversal das barras verticais é 30 x 20 x 0,5 mm. A massa total da estrutura é 5,5 kg.

A Figura 7.3 mostra o modelo experimental discretizado com os pontos de medidas, onde os sinais de resposta da estrutura são capturados por acelerômetros na direção. Foram medidos todos os 16 pontos.

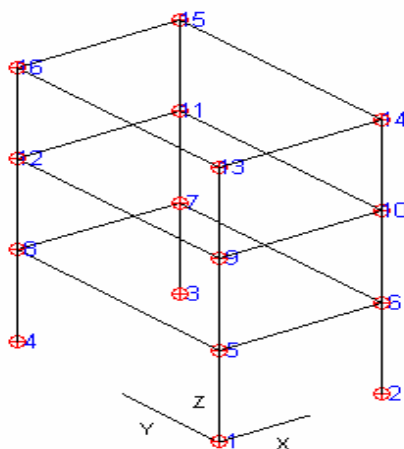


Figura 7.3: Modelo experimental discretizado

Em um primeiro momento foi medida a entrada e a saída da estrutura, a fim de realizar a análise modal convencional, ou seja, com a relação entrada-saída da estrutura foram obtidas as FRF(s), e a partir destas, foram estimados os parâmetros modais. Em uma segunda etapa, os parâmetros foram estimados sem o conhecimento da entrada, ou seja, foi realizada a análise modal baseada apenas na resposta.

A estrutura foi excitada no ponto 9, direção x, com um sinal aleatório e as respostas foram medidas na faixa de frequência 0-125 Hz. A Figura 7.4, mostra a Função Resposta em Frequência medida no ponto 13 da estrutura.

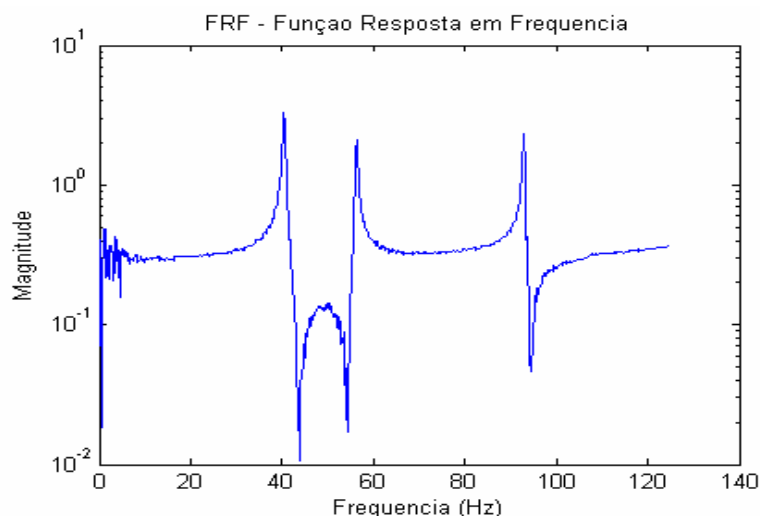


Figura 7.4: Função Resposta em Frequência do ponto 13.

Os resultados dos testes de análise modal clássica foram comparados com os fornecidos pela técnica baseada apenas nas respostas, visando uma melhor avaliação e validação da metodologia implementada comparando os resultados com uma base de dados obtida com técnicas consagradas.

Paralelamente aos testes experimentais foram desenvolvidos dois modelos de elementos finitos da estrutura, que foram utilizados na comparação com os parâmetros obtidos experimentalmente.

7.2. MODELO ANALÍTICO

A estrutura foi modelada utilizando o software comercial Ansys® versão acadêmica. Inicialmente, foram utilizados elementos de viga 3D e elementos de massa concentrada. A Figura 7.4 mostra a discretização da malha formada por 24 elementos de viga e 4 elementos de massa concentrada que representam os pés da estrutura. O modelo contém 16 nós, sendo que cada nó possui 6 graus de liberdade, translação e rotação em x,y e z, resultando em um modelo de 96 graus de liberdade.

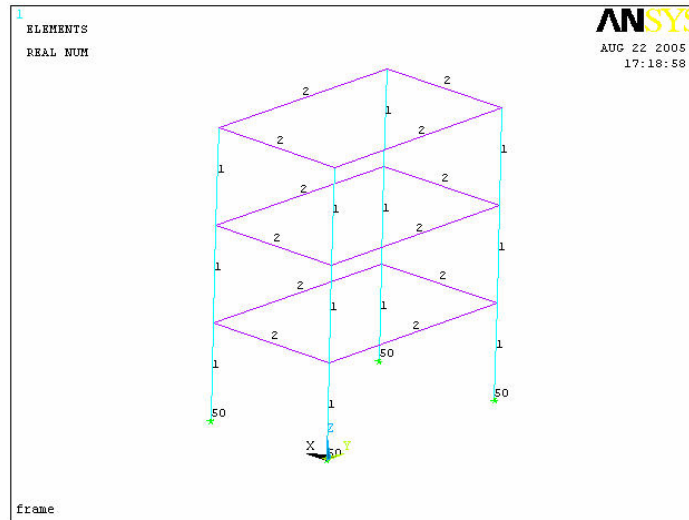


Figura 7.4: Estrutura modelada com elementos de viga.

A utilização de elementos de viga mostrou não ser adequada para a modelagem desta estrutura, pois os resultados, por mais que se refinasse a malha do modelo, apresentaram uma grande discrepância com os dados experimentais obtidos no pré-teste da estrutura. Um segundo modelo foi proposto, em que as barras foram modeladas utilizando elementos de placa (Shell), resultando em um modelo com 192 elementos de áreas, como mostrado na Figura 7.5.

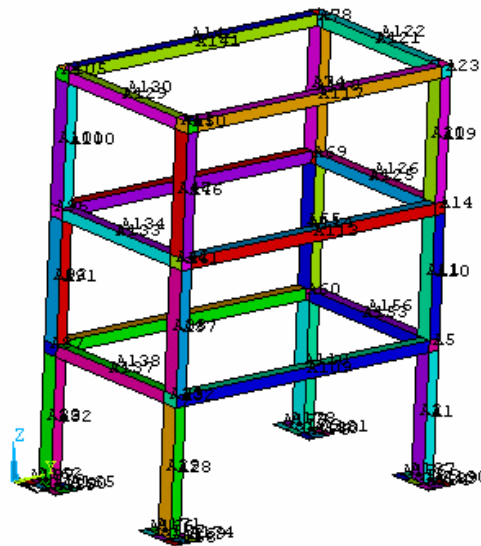


Figura 7.5: Estrutura modelada com elementos de placa (Shell).

A utilização destes elementos na modelagem da estrutura mostrou-se satisfatória para a representação do modelo espacial. Neste caso, a malha foi gerada levando em consideração a topologia dos pontos de medidas do modelo experimental, de tal forma que todos os pontos de medida tivessem um nó correspondente no modelo analítico. A Tabela 7.2 apresenta os valores das frequências naturais obtidas com o modelo de Elementos Finitos utilizando elementos de placa.

Tabela 7.2: Frequências naturais obtidas com o modelo de Elementos Finitos.

Modos	Análise Teórica Elementos Finitos
	Frequência ω (Hz)
1°	39,23
2°	56,11
3°	94,88
4°	121,10

7.3. COMPARAÇÃO E AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

Esta seção discute a identificação dos parâmetros modais utilizando métodos baseados nas relações entrada-saída e a metodologia proposta. Neste caso, os parâmetros são estimados utilizando apenas as respostas da estrutura.

Inicialmente, os parâmetros modais da estrutura foram identificados a partir das Funções de Resposta em Frequência utilizando os métodos *Ibrahim* e *ERA*, num primeiro passo são comparados com os parâmetros obtidos na modelagem analítica de elementos finitos. A Tabela 7.3 mostra as frequências naturais identificadas utilizando o método de Ibrahim e o método dos elementos finitos. A discrepância entre as frequências naturais identificadas é da ordem de 3% e os modos de vibrar da estrutura estão bem correlacionados, *MAC*-valores acima de 0,86 (Figura 7.6).

Tabela 7.3: Comparação dos métodos - Experimental (Ibrahim) e Analítico (Ansys).

Modos	Frequência (Hz)		Desvio Freq.(%)	Mac-Valor
	ω_{IB}	ω_{AN}	$\omega_{IB} \times \omega_{AN}$	IB x An.
1°	40,46	39,23	3,00	0,86
2°	56,24	56,11	0,23	0,88
3°	92,87	94,88	2,11	0,96
4°	122,98	121,10	1,53	0,87

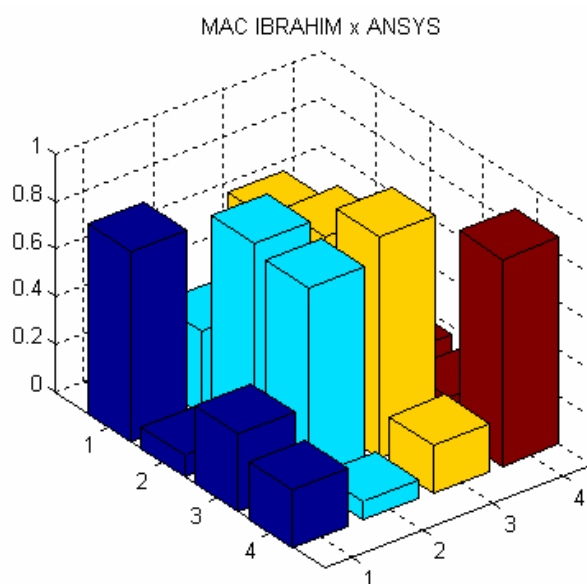


Figura 7.6: MAC Ibrahim x Ansys

A Tabela 7.4 compara as frequências naturais e os modos de vibrar estimados utilizando a técnica ERA e o modelo analítico. Percebe-se uma variação pequena nas frequências estimadas, onde os melhores resultados foram obtidos para a 2° e 4° frequência. É possível também observar um ótimo índice de correlação entre os modos, evidenciado pelos altos valores de *MAC*, especialmente o terceiro modo com *MAC* igual a 0,98. A Figura 7.7 também mostra, através do gráfico de *MAC*, o índice de correlação encontrado.

Tabela 7.4: Comparação dos métodos - Experimental (ERA) e Analítico (Ansys).

	Frequência (Hz)		Desvio Freq.(%)	Mac-Valor
Modo	ω_{ERA}	ω_{AN}	$\omega_{ERA} \times \omega_{AN}$	ERA x An.
1°	40,60	39,23	3,50	0,85
2°	56,32	56,11	0,37	0,88
3°	92,98	94,88	2,00	0,98
4°	121,97	121,10	0,72	0,87

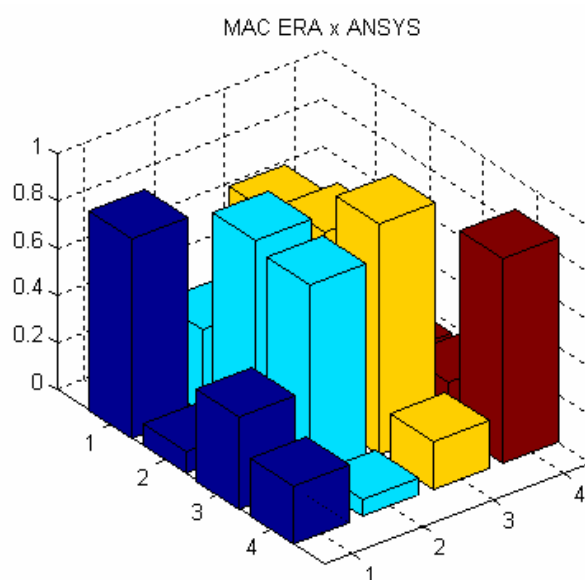


Figura 7.7: MAC - ERA x Ansys

Uma vez identificada a estrutura a partir da relação entrada-saída o próximo passo agora seria identificar a estrutura utilizando a metodologia proposta. Neste caso, a excitação não foi medida, houve apenas a aquisição dos dados de resposta.

Dados de resposta no tempo de 4096 pontos foram obtidos para os 16 pontos de medida. Utilizou-se uma taxa de amostragem (Δt) de 4,0 ms, resultando num tempo de amostragem (Ta) de 16,38 segundos. As respostas foram amostradas na faixa de 0 a 125 Hz.

A Figura 7.8 mostra uma resposta típica no domínio do tempo e sua respectiva Função Densidade Espectral, mais especificamente a resposta medida no ponto 12, direção x.

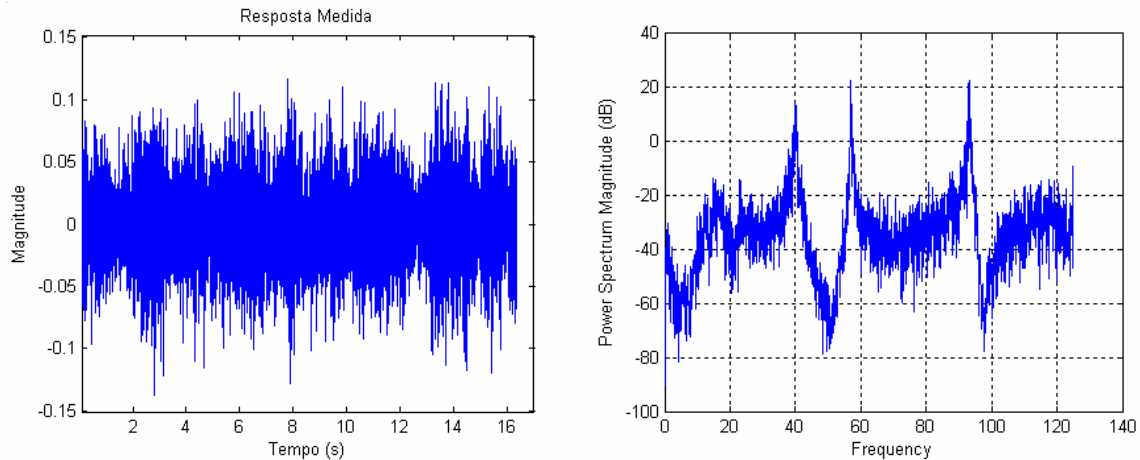


Figura 7.8: Resposta medida e Densidade Espectral de Potência do ponto 12

A Figura 7.9 mostra o gráfico de barras utilizado para identificar a ordem do sistema. A ordem identificada é $n = 8$, resultado bastante coerente, uma vez que os pré-testes experimentais mostraram a existência de 4 frequências naturais contidas na faixa de frequência analisada.

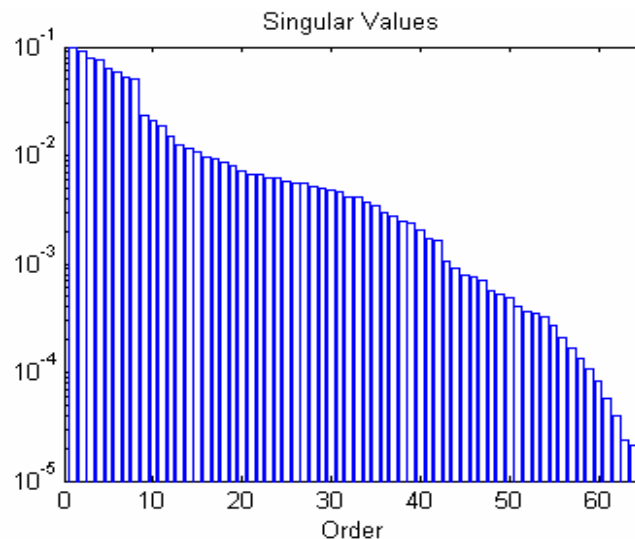


Figura 7.9: Ordem do Sistema

Então, é possível identificar a matriz dinâmica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a partir dos dados de resposta medidos. Os parâmetros modais do modelo são obtidos através da decomposição em autovalores da matriz dinâmica, como discutido nos exemplos simulados.

A Tabela 7.5 mostra os erros percentuais das frequências naturais da estrutura obtidas pelo algoritmo SSI em relação ao valor teórico obtido pela análise de elementos finitos. Para ilustrar os resultados, são apresentados o *Modal Phase Collinearity (MPC)* dos modos obtidos através do algoritmo e o *Modal Assurance Criterion (MAC)* entre os vetores modais obtidos analiticamente e os obtidos através do algoritmo com o intuito de avaliar as formas modais. Os resultados obtidos mostram uma correspondência satisfatória.

Tabela 7.5: Comparação dos métodos Experimental (SSI) e Analítico (Ansys).

	SSI	Frequência (Hz)		Desvio Freq.(%)	Mac-Valor
Modos	MPC	ω_{SSI}	ω_{AN}	$\omega_{SSI} \times \omega_{AN}$	SSI x An.
1°	0,89	40,98	39,23	4,46	0,80
2°	0,95	56,61	56,11	0,89	0,75
3°	0,86	93,56	94,88	1,39	0,85
4°	0,91	122,81	121,10	1,41	0,84

Os resultados mostram que o método SSI é capaz de identificar todos os modos de vibrar da estrutura na faixa de frequência analisada, medindo-se somente os dados de resposta.

A Figuras 7.10 mostra que os modos de vibrar da estrutura estão bem correlacionados, MAC-valores acima de 0,8, exceto para o segundo modo, que apresentou MAC igual a 0,75. Os valores de MAC confirmam uma boa estimativa também para os vetores modais.

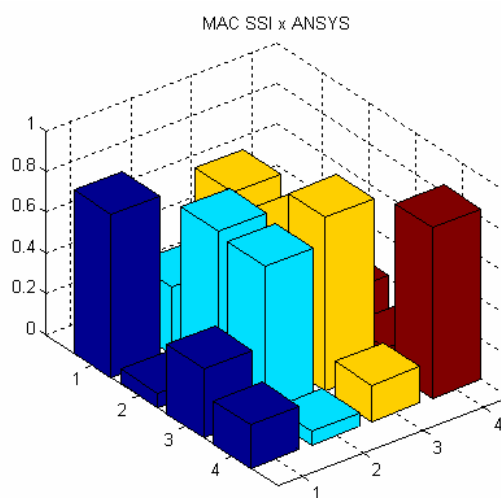


Figura 7.10: MAC SSI x Ansys

A Tabela 7.6 mostra as frequências naturais identificadas utilizando os métodos *ERA* e *SSI*. A discrepância entre as frequências naturais identificadas é da ordem de 0,95% e os modos de vibrar da estrutura estão bem correlacionados, *MAC*-valores acima de 0,87 (Figura 7.11).

Tabela 7.6: Comparação dos métodos experimentais (ERA x SSI).

Modos	Frequência (Hz)		Desvio Freq.(%)	Mac-Valor
	ω_{ERA}	ω_{SSI}	$\omega_{ERA} \times \omega_{SSI}$	ERA x SSI
1°	40,60	40,98	0,94	0,88
2°	56,32	56,61	0,51	0,87
3°	92,98	93,56	0,62	0,88
4°	121,97	122,81	0,69	0,98

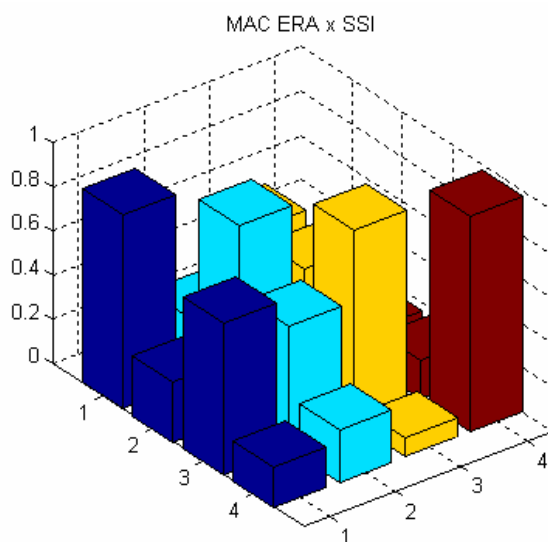


Figura 7.11: *MAC* ERA x SSI

A Tabela 7.7 compara as frequências naturais e os modos de vibrar estimados utilizando as técnicas Ibrahim e SSI. Percebe-se uma variação pequena nas frequências estimadas, algo em torno de 1%. É possível também observar um bom índice de correlação entre os modos,

evidenciado pelos valores de *MAC*. A Figura 7.12 também mostra, através do gráfico de *MAC*, o índice de correlação encontrado.

Tabela 7.7: Comparação dos métodos experimentais (Ibrahim x SSI).

Modos	Frequência (Hz)		Desvio Freq.(%)	Mac-Valor
	ω_{IB}	ω_{SSI}	$\omega_{IB} \times \omega_{SSI}$	IB x SSI
1°	40,46	40,98	1,28	0,83
2°	56,24	56,61	0,65	0,87
3°	92,87	93,56	0,74	0,86
4°	122,98	122,81	0,14	0,97

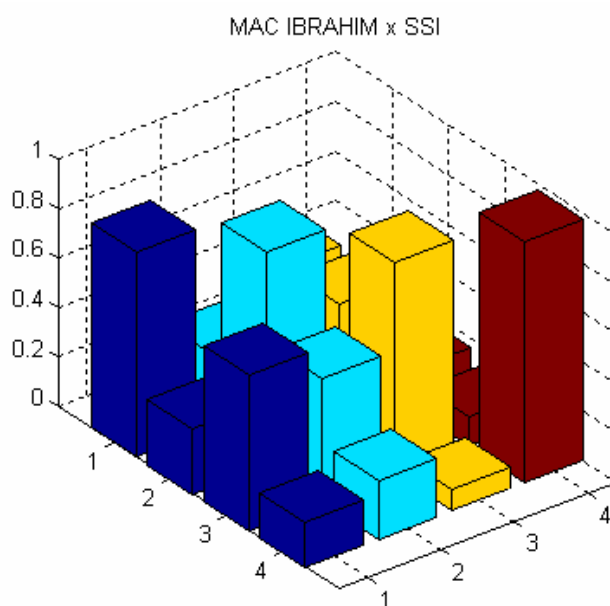


Figura 7.12: *MAC* Ibrahim x SSI

Além das frequências naturais e modos de vibrar estimados utilizando dados experimentais, o método SSI identifica também os coeficientes de amortecimento da estrutura. A Tabela 7.8 mostra a comparação direta dos coeficientes de amortecimento estimados utilizando os métodos no domínio do tempo SSI, ERA e Ibrahim.

Tabela 7.8: Fatores de Amortecimento (ζ)

Modos	Método (SSI) Amortecimento ζ (%)	Método (ERA) Amortecimento ζ (%)	Método (Ibrahim) Amortecimento ζ (%)
1°	0,34	0,43	0,24
2°	0,34	0,35	0,40
3°	0,16	0,23	0,12
4°	0,38	0,46	0,39

Como pode ser notado, os resultados apresentam erros significativos, tanto na comparação SSI x ERA como SSI x Ibrahim, o que já era esperado, pois na identificação de estruturas reais, erros de amortecimento dessa ordem são considerados aceitáveis.

Para efeito de comparação dos resultados, as vantagens da utilização dos métodos clássicos *ERA* e *Ibrahim* é a necessidade de aparato instrumental mínimo, tempo computacional reduzido e alta precisão na identificação.

O Algoritmo de Realização de Sistemas (*ERA*) e o método de Ibrahim estão entre as técnicas de identificação modal mais relevantes da atualidade. Na análise de estruturas grandes e flexíveis o algoritmo *ERA* apresenta algumas vantagens em relação aos demais métodos. O algoritmo encontra teoricamente o modelo de menor ordem que se ajusta aos dados, dada uma precisão. Portanto, reduz a complexidade da solução computacional e elimina a maioria dos modos espúrios e computacionais que ocorrem em modelos sobre-determinados. Além disso, é um método eficaz na análise de dados de estruturas com frequências próximas, com ou sem ruído nos dados.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES

Este trabalho discute a utilização do método Identificação Estocástica de Subespaços (SSI) para identificação dos parâmetros modais de estruturas mecânicas. O método avaliado é baseado nas condições de operação da estrutura, isto é, a força de excitação neste caso não é medida.

O método avaliado é baseado na projeção do espaço das saídas futuras no espaço das saídas passadas e na sequência de estados do filtro Kalman. Através do SVD da projeção da matriz Hankel quando o sistema é excitado com um sinal de banda larga, a ordem do sistema e as sequências de estados do filtro Kalman são determinadas. Posteriormente, as matrizes de estado do sistema são obtidas com a resolução de um problema de mínimos quadrados e os parâmetros modais são extraídos das matrizes do sistema.

Com relação as componentes harmônicas, o desenvolvimento do método de identificação estocástica de subespaços assume que a entrada ou excitação deva ser um ruído branco. Neste caso, verifica-se que não é possível identificar corretamente as propriedades modais numa região de frequência próxima à frequência da componente harmônica presente na excitação do sistema.

Na avaliação da metodologia proposta são utilizados dados simulados e dados experimentais. Na fase de simulação foram usados vários modelos inclusive uma estrutura do tipo *frame*. As matrizes espaciais do modelo, matriz de massa e rigidez foram obtidas através do método de elementos finitos e as respostas foram simuladas utilizando modelo de espaço de estado. A metodologia proposta apresentou também bom desempenho para dados de resposta moderadamente contaminados com ruído, sem comprometimento da qualidade da identificação.

A utilização de modelos simulados mostrou-se importante para o aprendizado e a avaliação da técnica, visto que na simulação é possível conhecer os valores exatos dos parâmetros modais do sistema e utilizá-los como referência, o que possibilitou realizar uma comparação quantitativa

com os dados estimados. Adicionalmente, adquiriu-se confiança na utilização da técnica proposta. Três situações distintas foram discutidas: quando a estrutura é excitada apenas com ruído branco, quando existe um componente harmônico bem separado das frequências naturais adicionado à excitação, e quando o componente harmônico coincide com alguma frequência natural.

Na primeira situação, o método SSI identificou corretamente os parâmetros modais utilizando somente o sinal de resposta do sistema como dado de entrada. A discrepância com relação aos dados de referência foi da ordem de 0,59% para as frequências naturais e 29,3% para os coeficientes de amortecimento.

Na segunda situação, a técnica continuou a apresentar bons resultados. Entretanto, passou a estimar um modo adicional quando o harmônico não coincidia com nenhum modo. Já na terceira situação, estimou erroneamente um modo quando este teve sua frequência coincidente com a frequência do componente harmônico.

Quando o harmônico não coincide com nenhuma frequência natural, mesmo quando a frequência dele é próxima à uma frequência natural do sistema, a extração deste com um filtro rejeita-banda, permite que os resultados obtidos voltem a estar dentro de uma faixa aceitável, mesmo alterando um pouco a precisão no cálculo do amortecimento. Já no caso em que a frequência do harmônico coincide com uma frequência natural, a estimativa desta frequência passa a ser bastante prejudicada, principalmente quanto à estimativa do modo de vibrar.

O trabalho apresenta ainda um método complementar capaz de identificar possíveis componentes harmônicos presentes no sinal de resposta, o qual é baseado na função densidade de probabilidade dos sinais filtrados contendo apenas um modo (natural ou operacional). Pelo formato da curva de densidade de probabilidade pode-se identificar se o pico sob análise corresponde a um modo natural ou operacional.

A técnica de identificação é extremamente sensível ao número de pontos do sinal de resposta. De fato, a identificação estocástica requer um grande número de instantes de tempo observados.

As medidas de aceleração são tomadas diretamente no domínio do tempo, sem a necessidade de realizar transformações para outros domínios. Com esta técnica não há necessidade de uso de analisadores espectrais.

Com relação aos testes experimentais da estrutura *Frame*, o primeiro passo realizado foi a utilização de métodos clássicos de análise modal (*ERA* e *Ibrahim*) para identificação dos parâmetros modais. Este procedimento foi usado não só para se obter parâmetros comparativos, como também para adquirir conhecimento e experiência na aquisição de dados de uma estrutura real. Esta etapa possibilitou avaliar todas as condições do experimento e apontar aquelas que comprometeriam a identificação.

Juntamente com os testes experimentais também foi criado o modelo de elementos finitos da estrutura, que foi utilizado como subsídio na montagem do aparato experimental, e posteriormente, usado na verificação e avaliação dos dados obtidos na modelagem experimental.

Os parâmetros modais identificados a partir do método de elementos finitos são utilizados como referência, o que permite estabelecer uma variação na identificação dos parâmetros modais utilizando tanto os métodos clássicos como o método proposto. Esta comparação permite estabelecer os desvios encontrados nos diferentes métodos de identificação.

Os resultados mostrados são bastante promissores, pois os parâmetros modais do sistema estimados pelo método SSI (utilizando apenas as respostas medidas) têm praticamente a mesma ordem de precisão dos resultados obtidos com a análise modal clássica *ERA* e *Ibrahim*. Isto demonstra que a metodologia poderia ser aplicada na identificação de estruturas reais, usando somente as respostas.

Os resultados obtidos e a experiência adquirida no desenvolvimento deste trabalho permitem propor algumas adaptações e aplicações relevantes para trabalhos futuros:

- 1- Avaliação da potencialidade da técnica para outros tipos de excitação como, por exemplo, a excitação utilizando um martelo (excitação impulsiva);
- 2- Aplicação da metodologia para dados obtidos em condições reais de operação (Testes de Análise Modal em campo).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEMANG, R., 1982, “*Experimental Modal Analysis Bibliography*” Proceedings of the I-IMAC.
- ALLEMANG, R. J., 1999, *Vibrations: Experimental Modal Analysis*, Course Notes, Seventh Edition, Structural Dynamics Research Laboratory, University of Cincinnati, OH.
- AMANI, M. G., RIERA, J. D. e CURADELLI, O. R., 2004. Estimación de Parámetros Modales de Estructuras Sometidas a Excitaciones Ambientales. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, 1(2), 55-73.
- ABDELGHANI, M.; GOURSAT, M.; BIOLCHINI, T. (1999). On-line modal monitoring of aircraft structures under unknown excitation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.13, n.6, p.839-853.
- BATHE, J.; WILSON, E. L., 1976. “Numerical methods in finite element analysis”. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 528p.
- BRASILIANO; ANDREA (2005). Identificação de Sistemas e Atualização de Modelos Numéricos com Vistas à Avaliação da Integridade Estrutural. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil. Universidade de Brasília / Brasil.
- BRINCKER, R., ANDERSEN, P., MOLLER, N., 2000. An Indicator for Separation of Structural and Harmonic Modes in Output-Only Modal Testing, *International Modal Analysis Conference (IMAC XVIII)* pp. 1649-1654.
- BRINCKER, B.; ZHANG, L.; ANDERSEN, P.; 2001, “*Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition*”, Proceedings of the XVIII IMAC.
- CAMBA-MENDEZ, G. KAPETANIOS: Testing the Rank of the Hankel Covariance Matrix: A Statistical Approach, *Institute of Electrical and Electronic Engineers Transactions on Automatic Control* 46(2), (2001), 331-336.
- CLARKSON, B.L.; MERCER, C.A. (1965). Use of cross-correlation in studying the response of lightly damped structures to random forces. *AIAA Journal*, v.3, n.12, p.2287-2291.
- CHEN, CHI-TSONG, 1999. *Linear System Theory and Design*. Third Edition, Oxford University Press, New York.

- CREMONA, C., BARBOSDA, F. S. e ALVANDI, A., 2003. Identification Modale sous Excitation Ambiante: Application à la Surveillance des Ponts. *Mécanique & Industries*, 4, 259- 271.
- DHATT, G.; TOUZOT, G.; CANTIN, G., 1984. "The finite element method displayed". Chichester: John Wiley & Sons, 509p.
- EWINS, D. J., 1984, "*Modal Testing: Theory and Practice*," John Wiley & Sons Inc, New York.
- EWINS, D. J., AND GRIFFIN, J., 1981. "A state-of-the-art Assessment of Mobility Measurement techniques - Results for the Mid-Range Structures", Journal of Sound and Vibration 78(8).
- FARRAR, C. R. e JAMES III, G. H., 1997. System Identification from Ambient Vibration Measurements on a Bridge. *Journal of Sound and Vibration*, 205(1), 1-18.
- FORMENTI, D., 1977. "Analytical and experimental modal analysis", University of Cincinnati.
- FRISWELL, M. I.; MONTTERSHEAD, J. E., 1995. "Finite element model updating in structural dynamics. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 286p.
- HERMANS, L.; AUWERAER, V.D. (1999). Modal Testing and Analysis of Structures under Operational Conditions: Industrial Applications. *Mechanical System and Signal Processes*, v.13, 193-216.
- HERMANS, L.; AUWERAER, V.D.; MEVEL, L. (1999). Health monitoring and detection of a fatigue problem of a sports car. *Proceedings of IMAC 17*, Kissimmee, FL, USA, p.42-48.
- HEYLEN, W. L.; LAMMENS, S.; SAS, P., 1975. "Modal Analysis theory and test. Tokyo: McGraw Hill Kogakusha, 495p.
- HUANG, C. S., 2001. Structural Identification from Ambient Vibration Measurement Using the Multivariate AR Model. *Journal of Sound and Vibration*, 241(3), 337-359.
- HOEN, C.; MOAN, T.; REMSETH, S. (1993). System identification of structures exposed to environmental loads. *Proceedings of 2nd European Conference on Structural Dynamics*, Rotterdam, Netherlands, p.835-844.
- IBRAHIM, S. R.; MIKULCIK, E. C., 1973. "A Time Domain Modal Vibration Test Technique", *The Shock and Vibration Bulletin*, Vol.43, N° 4, pp 21-37.
- IBRAHIM, S. R., 1977. "A Method for the direct Identification of Vibration Parameters from the free response", *The Shock and Vibration Bulletin*, Vol. 47, N° 4, pp 183-198.
- JAMES III, G.H.; CARNE, T.G.; LAUFFER, J.P. (1995). The natural excitation technique (NExT) for modal parameter extraction from operating structures. *Modal Analysis: the*

international journal of analytical and experimental modal analysis, v.10, n.4, p.260-277, oct.

JONES, N. P., SHI, T., ELLIS, J.H. e SCALAN, R. H., 1995. System-Identification Procedure for System and Input Parameters in Ambient Vibration Surveys. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 54/55, 91-99.

JUANG, J. N., 1994. *Applied System Identification*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, United States.

JUANG, J.N., and PAPA R. S., 1985, "An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction", *J. Guid. Control Dyn.*

LAGO, T., 1997. "The difference between harmonics and stochastic narrow band responses", oral presentation at the SVIBS symposium, Stockholm.

LJUNG, L., 1999. "System Identification: theory for the user", Second Edition, Prentice-Hall.

MATOS, S. L., AMARANTE, A. L., 2005. "Influência e Identificação de Componentes Harmônicos nos Sinais de Resposta usados na Análise Modal Operacional", Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE. Guarapari, Espírito Santo, Brasil.

MEIROVITCH, L. "Computational Methods in Structural Dynamics", Sijthoff e Noordhoof International Publisher B. V., 1980.

MAIA, S., et al., 1997, "*Theoretical and Experimental Modal Analysis*", Research Studies Press Ltd.

MOLLER, N.; GADE, S., 2004. "Operation Modal Analysis on an Automotive Transmission System", IMAC.

MOHANTY, P., and RIXEN, D. J., "Operational modal analysis in the presence of harmonic excitation", *Journal of Sound and Vibration* 270 (2004) 93-109.

NDAMBI, J. M., PEETERS, B., MAECK, J., DE VISSCHER, J., WAHAB, M. A., VANTOMME, J., DE ROECK, G. e DE WILDE, W. P., 2000. Comparison of Techniques for Modal Analysis of Concrete Structures. *Engineering Structures*, 22, 1159-1166.

PAPOULIS, A., 1990. "Probability and Statistics", Prentice Hall International Inc.

PAPPA, R.S.; JUANG, J-N. (1988). Same experiences with the eigensystem realization algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, v.120, n.1, p.30-34, jan.

PAPPA, R. S., ELLIOTT, K. B., SCHENK, A, *Consistent-Mode Indicator for the Eigensystem Realization Algorithm*, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 5, Sept. 1993, pp. 852-858.

- PEETERS, B.; ROECK, G. D., 1999. "Reference-Based Stochastic Subspace Identification for Output-only Modal Analysis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.13, pp 855-878.
- PEETERS, B.; ROECK, G. D.; "The Performance of time domain system identification methods applied to operational data", *Proceedings of DAMAS 97, Structural Damage Assessment Using Advanced Signal Processing Procedures*, Sheffield, UK, 1997.
- PEETERS, B.; ROECK, G. D.; POLLET, T.; SCHUEREMANS, L.; "Stochastic Subspace techniques applied to parameter identification of civil engineering structures", *Proceedings of New Advances in Modal Synthesis of Large Structures: Non-linear, Damped and Nondeterministic Cases*, France, 1995.
- PEETERS, B. e VENTURA, C. E., 2003. Comparative Study of Modal Analysis Techniques For Bridges Dynamic Characteristics. *Mechanical System and Signal Processing*, 17(5), 965-988.
- PEKKA, N.; HAAPANIEMI, H., 2004. "Operational Modal Analysis of a Piping System", *IMAC*.
- PRZEMIENIECKI, J. S., 1968; "Theory of structural analysis." New York: McGraw-Hill Book Company, 468p.
- PRONY, R. W., 1795, "Essai Experimental et Analytique sur les Lois de la Dilatabilité des Fluides Elastiques et sur Celles de la Force Expansive de la Vapeur de l'Eau et de la Vapeur de l'Alcool, a Différentes Temperatures", *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Paris, vol. 1, n° 2, pp. 24-76.
- SAITO, T. e YOKOTA, H., 1996. Evaluation of Dynamic Characteristics of High-Rise Buildings Using System Identification Techniques. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 59, 299-307.
- VAN OVERSCHEE P., DE MOOR B., 1991. "Subspace algorithms for the stochastic identification problem", 30 th IEEE Conference on Decision and Control, Brighton, UK, pp. 1321-1326.
- VAN OVERSCHEE P., DE MOOR B., "Subspace identification for linear systems – Theory, Implementation, Applications", Kluwer academic Publishers, ISBN 0-7923-9717-7, 1996.
- WEI-XIN, R.; ZHOU-HONG, Z., 2004. "Output-only Modal Parameter Identification of Civil Engineering Structures. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.17, n. 3-4.
- YOSHIDA, A., "System Identification of Structures for Wind-Induced Responses", *Proceedings of ISMA 2004*.

APÊNDICE

ESTADOS DO FILTRO KALMAN

O objetivo do filtro de Kalman é produzir um preditor ótimo para o vetor de estado x_{k+1} fazendo uso das observações das respostas nos tempos anteriores a $k + 1$, possibilitando assim a avaliação das matrizes do sistema e da covariância do ruído. Estes preditores ótimos são denotados por $(\hat{x}_{k+1})$. Quando o estado inicial estimado $\hat{x}_0 = 0$, a covariância inicial do estado estimado, $P_0 \equiv E[\hat{x}_0 \hat{x}_0^T] = 0$ e as medidas de resposta $(y_0, y_1, \dots, y_k)$ são conhecidas, os estados estimados do filtro de Kalman $\hat{x}_{k+1}$ são definidos pelas seguintes formulas recursivas, que expressam o sistema de matrizes, a matriz ganho do filtro de Kalman (K_k) e a matriz de covariância do estado (P_{k+1}):

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + K_k(y_k - C\hat{x}_k) \quad (1)$$

$$K_k = (G - AP_k C^T) \cdot (\Lambda_0 - CP_k C^T)^{-1} \quad (2)$$

$$P_{k+1} = APA^T + (G - AP_k C^T) \cdot (\Lambda_0 - CP_k C^T)^{-1} \cdot (G - AP_k C^T)^T \quad (3)$$

Os estados estimados do filtro de Kalman são agrupados na forma de seqüência de estados do filtro de Kalman, que será utilizada pelo algoritmo de identificação:

$$\hat{X}_i \equiv (\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_{i+j-1}) \in \mathfrak{R}^{nj} \quad (4)$$

Os algoritmos de subespaços aplicam-se somente para processos lineares e não iterativos. A partir das medidas da resposta, os estados do filtro de Kalman são obtidos usando projeções do espaço de linhas das saídas futuras no espaço de linhas das saídas passadas. Uma vez que esses estados são conhecidos, os sistemas de matrizes são determinados pela solução de um problema de mínimos quadrados linear. Isto deixa clara a importância dos estados de Kalman na Identificação Estocástica de Subespaços.

LISTA DE PUBLICAÇÕES

NUNES JR., O. A., et al., “Identificação do Amortecimento utilizando Decomposição no Domínio da Frequência” – III CONEM – Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2004, Belém – PA.

NUNES JR., O. A., et al., “Implementação de Rotinas de Interface Gráfica em um Programa geral de Ajuste de Modelos” - III CONEM – Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2004, Belém – PA.

NUNES JR., O. A., et al., “Identificação dos Parâmetros Modais utilizando Decomposição no Domínio da Frequência” – XXV CILAMCE – Iberian Latin American Congress on Computational Methods for Engineering, 2004, Recife – PE.

NUNES JR., O. A., et al., “Identificação dos Parâmetros Modais utilizando a técnica de Decomposição no Domínio da Frequência” – IV DINCON – Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações, 2005, Bauru.

NUNES JR., O. A., et al., “Identificação Estocástica do Subespaço aplicada para Estimação de Parâmetros Modais” – IV DINCON - Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações, 2005, Bauru.

NUNES JR., O. A., et al., “Modal Parameters Identification Applied to Operational Data” – XXVI CILAMCE – Iberian Latin American Congress on Computational Methods for Engineering, 2005, Guarapari – ES.

NUNES JR., O. A., et al., “Output-Only Modal Analysis using Frequency Domain Decomposition” – COBEM - 18th International Congress of Mechanical Engineering – November 6-11, 2005, Ouro Preto, MG.

Ilha Solteira-SP, 10 de abril de 2006.

Assinatura do aluno