UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Laura Rezzieri Gambera

Soluções quase automórficas para equações diferenciais abstratas de segunda ordem

São José do Rio Preto

2016

Laura Rezzieri Gambera

Soluções quase automórficas para equações diferenciais abstratas de segunda ordem

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita

São José do Rio Preto

2016

Gambera, Laura Rezzieri.
Soluções quase automórficas para equações diferenciais abstratas de segunda ordem / Laura Rezzieri Gambera. -- São José do Rio Preto, 2016
84 f. : il.

Orientador: Andréa Cristina Prokopczyk Arita
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Família cosseno. 4. Família seno. 5. Funções automórficas. 6. Operadores lineares. 7. Banach, Espaços de. I. Arita, Andréa Cristina Prokopczyk. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.91

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Laura Rezzieri Gambera

Soluções quase automórficas para equações diferenciais abstratas de segunda ordem

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
Professora Assistente Doutora
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

Profa. Dra. Márcia Cristina Anderson Braz Federson
Professora Titular
USP - São Carlos

São José do Rio Preto, 29 de março de 2016.

Dedico à minha
família.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Silma e Agostinho, meus irmãos Artur e José Leonardo por todo o amor, apoio, exemplo, incentivo e ensinamentos durante cada etapa de minha vida.

Ao Eric Busatto Santiago, por toda a constância, tolerância e paciência comigo, pelo companheirismo, carinho e sugestões presentes em todos os nossos dias.

À Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita, por me orientar não apenas neste trabalho, mas durante toda a minha vida acadêmica até agora, com muita paciência, dedicação e afeto.

Aos meus professores de graduação e pós-graduação, pelos ensinamentos e experiências compartilhadas durante esses anos. Em especial, à Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues que, além de professora, foi uma grande amiga nesse período.

Aos professores Márcia e Sérgio por aceitarem compor a banca examinadora.

A todos os meus amigos de graduação e pós-graduação, em particular, à Rafaela Carvalho, David Rahd, Wellington Bergamini, Marcelo Bongarti, Daniele Gazetta, Taisa Quemel, José Antônio Camargo, Carlos Vicente, Luan Medeiros, Luiz Fernando Barberá, entre outros, por me proporcionarem muita simpatia, tolerância e respeito.

Às minhas queridas amigas de humanas Millena Grigoleti e Cibele Frahm, vocês me inspiram a tornar a matemática acessível e compreensível a todos.

À minha amiga Juliana Medeiros, pela força, conselhos e brincadeirinhas nos momentos de desabafo.

À FAPESP pelo apoio financeiro no processo 2013/22813-3.

"O que se quer com o coração permanece na vida, e não somente tem valor antes de alcançar sua posse, senão que esse valor aumenta à medida que se chega à sua realização."

(Carlos Bernardo González Pecotche)

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de solução fraca quase automórfica para equações diferenciais abstratas de segunda ordem descritas na forma

$$x''(t) = Ax(t) + f(t, x(t)),\ t \in \mathbb{R},$$

onde $x(t) \in X$ para todo $t \in \mathbb{R}$, X é um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de uma família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados em X e $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é uma função apropriada.

Palavras-chave: Família cosseno, família seno, funções quase automórficas, equações diferenciais de segunda ordem.

Abstract

In this work we study the existence of an almost automorphic mild solution to second order abstract differential equations given by

$$x''(t) = Ax(t) + f(t, x(t)),\ t \in \mathbb{R},$$

where $x(t) \in X$ *for all* $t \in \mathbb{R}$*,* X *is a Banach space,* $A : D(A) \subset X \to X$ *is the infinitesimal generator of a strongly continuous cosine family of bounded linear operators on* X *and* $f : \mathbb{R} \times X \to X$ *is an appropriate function.*

Keywords: Cosine family, sine family, almost automorphic functions, second order differential equations.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A existência de soluções com algum tipo de periodicidade para equações diferenciais tem sido um tema muito desenvolvido durante os últimos anos. Podemos citar, por exemplo, os trabalhos [15, 19, 21, 30] para soluções periódicas, [1, 11, 16, 18, 36] para soluções quase periódicas, [14, 22, 23] para soluções assintoticamente quase periódicas e [37] para soluções pseudo quase periódicas.

Outro tipo de solução encontrada na literatura é a solução quase automórfica, introduzida por Bochner no ano de 1964 em [4] e que, desde então, passou por várias generalizações. Por exemplo, N'Guérékata introduziu em [26] o conceito de soluções assintoticamente quase automórficas, Liang, Xiao e Zhang apresentaram em [35] as soluções pseudo quase automórficas e Blot, Cieutat e Ezzinbi introduziram, mais recentemente, o conceito de soluções μ-pseudo quase automórficas em [3].

Após isso, muitos outros trabalhos foram publicados referentes a existência de algum tipo de solução quase automórfica para equações diferenciais, veja por exemplo [5, 6, 7, 8, 9, 12] e as referências neles contidas. Essa crescente atividade nessa área de pesquisa se deve, em grande parte, às suas possíveis aplicações em áreas como física, economia, engenharia etc.

Contudo, a maioria dos trabalhos existentes na literatura aborda somente equações de primeira ordem, enquanto que os que se referem às equações de segunda ordem tratam o problema transformando a equação em um sistema de primeira ordem, veja por exemplo [28]. Em ambos os casos, a ferramenta usada é a mesma, pois a abordagem envolve o uso da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados.

Por outro lado, é conhecida na literatura, pelos trabalhos de Travis e Web [32, 33, 34] e Fattorini [10], uma abordagem para as equações de segunda ordem através do uso de famílias seno e cosseno de operadores lineares limitados. Inclusive, esta abordagem é usada no estudo de existência de soluções quase e assintoticamente quase periódicas, como podemos ver em [17, 18, 20]. Porém, pelo que é de nosso conhecimento até o momento, nada foi desenvolvido nesse sentido para o estudo de existência de soluções quase automórficas.

Dessa forma, motivados pelo que foi dito acima, nos propusemos a estudar o problema de existência de soluções quase automórficas para equações de segunda ordem tendo como ferramenta a teoria das famílias seno e cosseno de operadores lineares limitados.

Mais especificamente, dividimos esta dissertação em três capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos os principais resultados da teoria das famílias seno e cosseno de operadores lineares limitados.

No capítulo 2, estudamos a existência de soluções para três tipos de equações diferenciais abstratas de segunda ordem. Primeiramente, na seção 2.1, consideramos a equação linear homogênea e, nas seções 2.2 e 2.3, consideramos as equações linear não homogênea e semilinear, respectivamente. Nos três casos, apresentamos o conceito de solução para um problema de valor inicial e procuramos relacionar essa solução com as famílias seno e cosseno. Em particular, nas duas últimas seções, consideramos também o conceito de solução fraca.

No último capítulo, exibimos condições para a existência de soluções fracas quase automórficas para duas classes de equações diferenciais abstratas. Para isso, na seção 3.1, apresentamos as funções quase automórficas e estudamos suas propriedades básicas. Já na seção 3.2, provamos a existência e a unicidade de solução fraca quase automórfica para a equação diferencial não homogênea dada por

$$x''(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde A é o gerador infinitesimal de uma família cosseno de operadores lineares limitados exponencialmente estável e f é quase automórfica. Por fim, na seção 3.3, consideramos a equação semilinear descrita na forma

$$x''(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde A tem a mesma propriedade acima, e provamos, sob certas propriedades de f, a existência e a unicidade de solução fraca quase automórfica para esta equação.

Finalizamos esta dissertação com um Apêndice, onde apresentamos alguns resultados importantes que utilizamos no decorrer deste trabalho, tais como, o Princípio da Limitação Uniforme, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, o Teorema do Ponto Fixo de Banach, dentre outros.

CAPÍTULO

1

Famílias seno e cosseno fortemente contínuas

Neste capítulo, estudaremos os principais resultados da teoria das famílias seno e cosseno de operadores lineares limitados, nos baseando nos artigos [10, 32, 33, 34]. Essa teoria servirá de ferramenta para o estudo dos problemas de valor inicial linear de segunda ordem homogêneo e não-homogêneo e também das equações semilineares de segunda ordem, apresentados no capítulo 2.

No que segue, X representa um espaço de Banach munido da norma $\|\cdot\|$, $\mathcal{L}(X)$ é o espaço de todas as transformações lineares limitadas de X em X, $\mathcal{C}(\mathbb{R};X)$ é o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em X, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};X)$ é o conjunto das funções continuamente diferenciáveis de $\mathbb{R}$ em X e $\mathcal{C}^2(\mathbb{R};X)$ é o conjunto das funções duas vezes continuamente diferenciáveis, também de $\mathbb{R}$ em X.

Iniciaremos nosso estudo com as definições de família cosseno e seno.

Definição 1.1. *Uma família a um parâmetro $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$, de operadores lineares limitados de X em X, é chamada de família cosseno fortemente contínua se:*

(i) $C(0) = I$, *onde I denota o operador identidade em X;*

(ii) $C(s+t) + C(s-t) = 2C(s)C(t)$ *para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$;*

(iii) A função $t \mapsto C(t)x$ é contínua em $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$ fixo.

Definição 1.2. *Seja $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ uma família cosseno fortemente contínua em X. A família de operadores lineares limitados $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$, definida por*

$$S(t)x = \int_0^t C(s)xds, \;\; x \in X, t \in \mathbb{R},$$

é chamada família seno associada à família cosseno fortemente contínua $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$.

Observação 1.3. *Mostremos que, de fato,* $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *A linearidade de* $S(t)$ *segue da linearidade de* $C(s)$, *para todo* $s \in \mathbb{R}$, *e da linearidade da integral. Para provarmos a limitação, sejam* $t \in \mathbb{R}$ *e* $x \in X$. *Como a função* $s \mapsto C(s)x$ *é contínua, ela é limitada no compacto* $[0,t]$, *ou seja,* $\sup_{s\in[0,t]} \|C(s)x\| < +\infty$. *Mais ainda, visto que isso ocorre para todo* $x \in X$, *do Princípio da Limitação Uniforme (Teorema A.4), obtemos que* $\sup_{s\in[0,t]} \|C(s)\| < +\infty$.

Seja $M = \sup_{s\in[0,t]} \|C(s)\|$. *Assim,*

$$\|S(t)x\| \leq \int_0^t \|C(s)x\|ds \leq \int_0^t \|C(s)\|\|x\| = Mt\|x\|,$$

isto é, existe uma constante $K_t = Mt > 0$ *de modo que* $\|S(t)x\| \leq K_t\|x\|$, *para todo* $x \in X$. *Portanto,* $S(t)$ *é um operador linear limitado.*

Apresentaremos, na sequência, algumas propriedades básicas destas famílias de operadores.

Proposição 1.4. *Seja* $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *uma família cosseno fortemente contínua em* X. *Então:*

(a) $C(t) = C(-t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(b) $C(s), S(s), C(t), S(t)$ *comutam entre si para quaisquqer* $s, t \in \mathbb{R}$;

(c) $t \mapsto S(t)x$ *é contínua em* $\mathbb{R}$ *para todo* $x \in X$ *fixo;*

(d) $S(s+t) + S(s-t) = 2S(s)C(t)$ *para quaisquer* $s, t \in \mathbb{R}$;

(e) $S(t) = -S(-t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(f) $S(t+s) = S(s)C(t) + S(t)C(s)$ *para quaisquer* $s, t \in \mathbb{R}$;

(g) Existem constantes $K \geq 1$ *e* $w \geq 0$ *tais que* $\|C(t)\| \leq Ke^{w|t|}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(h) $\|S(t) - S(\hat{t})\| \leq K \left| \int_{\hat{t}}^t e^{w|s|} ds \right|$ *para quaisquer* $t, \hat{t} \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Faremos a demonstração de cada item separadamente.

(a) Seja $t \in \mathbb{R}$. Então, da Definição 1.1, temos $C(0+t) + C(0-t) = 2C(0)C(t)$, e assim,

$$C(t) + C(-t) = 2C(t).$$

Portanto, $C(-t) = C(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) Observemos que, para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$:

(i) $C(s)C(t) = \dfrac{C(s+t)}{2} + \dfrac{C(s-t)}{2} = \dfrac{C(t+s)}{2} + \dfrac{C(t-s)}{2} = C(t)C(s)$, pois, do item *(a)*, $C(s-t) = C(-(t-s)) = C(t-s)$.

(ii) Dado $x \in X$ e usando o item (i), temos

$$C(t)S(s)x = C(t)\int_0^s C(u)xdu = \int_0^s C(t)C(u)xdu = \int_0^s C(u)C(t)xdu = S(s)C(t)x,$$

pois $C(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $C(t)S(s) = S(s)C(t)$.

(iii) Para $x \in X$,

$$S(t)S(s)x = S(t)\int_0^s C(u)xdu = \int_0^s S(t)C(u)xdu = \int_0^s C(u)S(t)xdu = S(s)S(t)x,$$

visto que $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e $C(t)$ comuta com $S(s)$. Desse modo, segue que $S(t)S(s) = S(s)S(t)$.

Portanto, $C(s), C(t), S(s), S(t)$ comutam entre si para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$.

(c) Seja $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Como a função $s \mapsto C(s)x$ é contínua, ela é limitada em $[-T, T]$, e assim $\sup\limits_{s\in[-T,T]} \|C(s)x\| < +\infty$ para todo $x \in X$. Logo, pelo Princípio da Limitação Uniforme (Teorema A.4), obtemos que $\sup\limits_{s\in[-T,T]} \|C(s)\| < +\infty$.

Agora, considere $M = \sup\limits_{s\in[-T,T]} \|C(s)\|$ e $t \in (-T, T)$. Para todo $h \in \mathbb{R}$ tal que $t+h \in (-T, T)$ e todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned}
\|S(t+h)x - S(t)x\| &= \left\|\int_t^{t+h} C(s)xds\right\| \\
&\leq \left|\int_t^{t+h} \|C(s)\|\|x\|ds\right| \\
&\leq M|t+h-t|\|x\| \\
&= Mh\|x\|.
\end{aligned}$$

Desse modo, quando $h \to 0$, $\|S(t+h)x - S(t)x\| \to 0$, para qualquer que seja $x \in X$.

Portanto, $s \mapsto S(t)x$ é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in X$ fixo.

(d) Da definição de família cosseno sabemos que $C(u+t) + C(u-t) = 2C(u)C(t)$ para quaisquer $t, u \in \mathbb{R}$. Assim, integrando esta igualdade em u no intervalo $[0, s]$, para algum $s \in \mathbb{R}$, e somando

e subtraindo um determinado termo, obtemos

$$\int_0^s C(u+t)du + \int_0^s C(u-t)du + \int_0^t C(u-t)du - \int_0^t C(u-t)du = 2\int_0^s C(u)C(t)du,$$

ou ainda,

$$\int_0^s C(u+t)du + \int_0^t C(u-t)du + \int_t^s C(u-t)du = 2\int_0^s C(u)C(t)du. \tag{1.1}$$

Além disso, fazendo a mudança de variável $v = -u$ na segunda integral do lado esquerdo de (1.1), temos

$$\int_0^t C(u-t)du = \int_0^{-t} -C(-v-t)dv = \int_{-t}^0 C(-v-t)dv = \int_{-t}^0 C(t+v)dv,$$

pois $C(t) = C(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e então, substituindo esta última igualdade em (1.1), concluímos que

$$\int_0^s C(u+t)du + \int_{-t}^0 C(t+v)dv + \int_t^s C(u-t)du = 2\int_0^s C(u)C(t)du,$$

isto é,

$$\int_{-t}^s C(u+t)du + \int_t^s C(u-t)du = 2\int_0^s C(u)C(t)du.$$

Agora, fazendo a mudança de variável $v = u+t$ e $w = u-t$, respectivamente na primeira e na segunda integral do lado esquerdo da igualdade acima, e usando que $C(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$\int_0^{s+t} C(v)dv + \int_0^{s-t} C(w)dw = 2\left(\int_0^s C(u)du\right)C(t),$$

ou seja,

$$S(t+s) + S(s-t) = 2S(s)C(t), \text{ para quaisquer } t, s \in \mathbb{R}.$$

(e) Dado $t \in \mathbb{R}$, do item (d), temos $S(0+t) + S(0-t) = 2S(0)C(t)$. Então, $S(t) + S(-t) = 0$ e portanto, $S(t) = -S(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(f) Sejam $s, t \in \mathbb{R}$. Então, pelo item (d),

$$S(s+t) + S(s-t) = 2S(s)C(t)$$

e

$$S(t+s) + S(t-s) = 2S(t)C(s).$$

Assim, somando as igualdades anteriores, obtemos

$$2S(t+s) + S(s-t) + S(-(s-t)) = 2S(s)C(t) + 2S(t)C(s).$$

Além disso, pelo item (e), sabemos que

$$S(s-t) = -S(-(s-t)),$$

o que nos permite concluir que $2S(s+t) = 2S(s)C(t) + 2S(t)C(s)$.

Portanto, segue que $S(s+t) = S(s)C(t) + S(t)C(s)$ para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$.

(g) Como $t \mapsto C(t)x$ é uma função contínua para todo $x \in X$ e $[0,1]$ é um conjunto compacto, $\sup\limits_{t\in[0,1]} \{\|C(t)x\|\} < +\infty$ para todo $x \in X$. Dessa forma, pelo Princípio da Limitação Uniforme (Teorema A.4), obtemos que $\sup\limits_{t\in[0,1]} \{\|C(t)\|\} < +\infty$.

Seja $K = \sup\limits_{t\in[0,1]} \{\|C(t)\|\}$. Notemos, primeiramente, que $K \geq \|C(0)\| = \|I\| = 1$. Além disso, $\|C(t)\| \leq K$ para todo $0 \leq t \leq 1$.

Em particular, se $t \in [0,1]$, então $t = 1 - \delta$, com $\delta \in [0,1]$, e assim,

$$\|C(t)\| \leq K = K^{t+\delta} \leq K^t K = Ke^{w_1 t},$$

onde $w_1 = \ln K$, com $w_1 \geq 0$ pois $K \geq 1$.

Agora, tomemos $w \geq 0$ tal que $w \geq w_1$ e $2\|C(1)\|+1 \leq e^w$. Observemos que $2\|C(1)\|+e^{-w} \leq 2\|C(1)\| + 1 \leq e^w$. Logo, temos $2\|C(1)\|e^{-w} + e^{-2w} \leq 1$ e $\|C(t)\| \leq Ke^{w|t|}$, para $0 \leq t \leq 1$.

Na sequência, com o intuito de utilizarmos o princípio de indução, suporemos que $\|C(t)\| \leq Ke^{w|t|}$ para $0 \leq t \leq n$, com $n > 1$. Das propriedades de norma e da definição de família cosseno, temos

$$\|C(t+1)\| - \|C(t-1)\| \leq \|C(t+1) + C(t-1)\| = \|2C(t)C(1)\|$$

e assim, se $t \in [1, n]$, então $0 \leq t - 1 \leq n$ e

$$\begin{aligned}\|C(t+1)\| &\leq 2\|C(t)C(1)\| + \|C(t-1)\| \\ &\leq 2Ke^{w|t|}\|C(1)\| + Ke^{w|t-1|}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \; Ke^{w(t+1)} - Ke^{w(t-1)} + Ke^{w(t-1)} \\ &= \; Ke^{w(t+1)} = Ke^{w|t+1|}. \end{aligned}$$

Por fim, tomemos $0 \leq t \leq n+1$. Como $[0, n+1] = [0,2] \cup [2, n+1]$, temos dois casos a considerar:

(i) se $t \in [0,2]$, $t \in [0,n]$, pois $n > 1$. Logo, pela hipótese de indução, $\|C(t)\| \leq Ke^{w|t|}$.

(ii) se $t \in [2, n+1]$, então $t = 1 + \delta$, com $\delta \in [1, n]$. Desse modo, pelo que fizemos acima,

$$\|C(t)\| = \|C(1+\delta)\| \leq Ke^{w|1+\delta|} = Ke^{w|t|}.$$

Portanto,

$$\|C(t)\| \leq Ke^{w|t|} \text{ para todo } 0 \leq t \leq n+1.$$

Consequentemente, pelo princípio de indução, concluímos que

$$\|C(t)\| \leq Ke^{w|t|} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Além disso, visto que $C(t) = C(-t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos $\|C(t)\| \leq Ke^{w|t|}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(h) Notemos que, para quaisquer $t, \hat{t} \in \mathbb{R}$,

$$S(t) - S(\hat{t}) = \int_0^t C(s)ds - \int_0^{\hat{t}} C(s)ds = \int_{\hat{t}}^t C(s)ds.$$

Então,

$$\|S(t) - S(\hat{t})\| = \left\| \int_{\hat{t}}^t C(s)ds \right\| \leq \left| \int_{\hat{t}}^t \|C(s)\|ds \right| \leq \left| \int_{\hat{t}}^t Ke^{w|s|}ds \right| = K \left| \int_{\hat{t}}^t e^{w|s|}ds \right|,$$

para quaisquer $t, \hat{t} \in \mathbb{R}$.

Portanto, a demonstração da proposição está completa. □

Definição 1.5. *O gerador infinitesimal de uma família cosseno fortemente contínua $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é o operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ definido por*

$$Ax = \frac{d^2}{dt^2} C(t)x \bigg|_{t=0} = C''(0)x,$$

onde $D(A) = \{x \in X;\ t \mapsto C(t)x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; X)\}$.

Outro conjunto que utilizaremos ao longo deste trabalho é o conjunto E, dado por

$$E = \{x \in X;\ t \mapsto C(t)x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; X)\}.$$

Os próximos dois resultados se referem a algumas propriedades de derivação em espaços de Banach e serão utilizados para obtermos certas derivadas das famílias seno e cosseno.

Lema 1.6. *[25, Theorem 1.3.3, pág. 6] Se $f : [a,b] \to X$ é uma função contínua, então*

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^t f(s)ds\right) = f(t),\ t \in [a,b].$$

Lema 1.7. *[25, Theorem 1.3.4, pág. 6] Se $f : [a,b] \to X$ é continuamente diferenciável em (a,b), então, para qualquer $\alpha, \beta \in (a,b)$,*

$$\int_\alpha^\beta f'(s)ds = f(\beta) - f(\alpha).$$

Lema 1.8. *Sejam $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ uma família cosseno fortemente contínua e $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sua família seno associada. Então,*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = C(t)x,\ \textit{para quaisquer}\ t \in \mathbb{R}\ \textit{e}\ x \in X.$$

Demonstração. Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$. Por definição, $S(t)x = \int_0^t C(s)xds$ e $s \mapsto C(s)x$ é contínua em $\mathbb{R}$. Assim, pelo Lema 1.6, segue que

$$\frac{d}{dt}S(t)x = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t C(s)xds\right) = C(t)x.$$

□

Lema 1.9. *Se $g : \mathbb{R} \to X$ é dada por $g(t) = \int_a^b S(u+t)xdu$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então*

$$g'(t) = \int_a^b C(u+t)xdu,\ t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Dados $a, b, t, h \in \mathbb{R}$, seja $A = A(t) \in \mathbb{R}$, $A > 0$, tal que $t, a+t, b+t, b+t+h \in [-A, A]$.

Como, pelo Lema 1.8, temos $S'(t)x = C(t)x$, para todo $x \in X$, segue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(u+t+h)x - S(u+t)x}{h} = C(u+t)x,\ u, t \in \mathbb{R},\ x \in X.$$

Por outro lado,
$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \int_a^b \left(\frac{S(u+t+h)x - S(u+t)x}{h}\right) du$$
e, pelo item (h) da Proposição 1.4,
$$\begin{aligned}\left\|\frac{S(u+t+h)x - S(u+t)x}{h}\right\| &\leq \frac{K}{|h|}\left|\int_{u+t}^{u+t+h} e^{w|v|}dv\right| \|x\| \\ &\leq \frac{K}{|h|}\|x\| \left|\int_{u+t}^{u+t+h} e^{wA}dv\right|,\end{aligned}$$
para todo $u \in [a,b]$, pois, neste caso, temos $a+t \leq u+t \leq v \leq u+t+h \leq b+t+h$, com $a+t, b+t+h \in [-A,A]$. Além disso, e^{wA} é constante em relação a v e u, e assim
$$\left\|\frac{S(u+t+h)x - S(u+t)x}{h}\right\| \leq \frac{Ke^{wA}}{|h|}\|x\| \left|\int_{u+t}^{u+t+h} dv\right| = \frac{Ke^{wA}}{|h|}\|x\||h| = Ke^{wA}\|x\|,\ \forall u \in [a,b].$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.3), concluímos que
$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\int_a^b \left(\frac{S(u+t+h)x - S(u+t)x}{h}\right) du \\ &= \int_a^b \lim_{h\to 0}\left(\frac{S(t+h+u)x - S(u+t)x}{h}\right) du \\ &= \int_a^b C(u+t)xdu,\end{aligned}$$
como queríamos. □

O próximo resultado estabelece propriedades para o gerador infinitesimal de uma família cosseno fortemente contínua, assim como sua relação com as famílias seno e cosseno.

Proposição 1.10. *Seja $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ uma família cosseno fortemente contínua em X com gerador infinitesimal A e seja $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ a família seno associada a $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Então:*

(a) Se $x \in X$ e $r,s \in \mathbb{R}$, então $z = \int_r^s S(u)xdu \in D(A)$ e $Az = C(s)x - C(r)x$;

(b) Se $x \in X$ e $r,s \in \mathbb{R}$, então $z = \int_0^r \int_0^s C(u)C(v)xdudv \in D(A)$ e $Az = \frac{1}{2}(C(s+r)x - C(s-r)x)$;

(c) Se $x \in X$, então $S(t)x \in E$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(d) Se $x \in E$, então $S(t)x \in D(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\frac{d}{dt}C(t)x = AS(t)x$;

(e) *Se* $x \in D(A)$, *então* $C(t)x \in D(A)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e* $\dfrac{d^2}{dt^2}C(t)x = AC(t)x = C(t)Ax$;

(f) *Se* $x \in E$, *então* $\lim\limits_{t\to 0} AS(t)x = 0$;

(g) *Se* $x \in E$, *então* $S(t)x \in D(A)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e* $\dfrac{d^2}{dt^2}S(t)x = AS(t)x$;

(h) *Se* $x \in D(A)$, *então* $S(t)x \in D(A)$ *e* $AS(t)x = S(t)Ax$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$;

(i) $C(t+s) - C(t-s) = 2AS(t)S(s)$ *para quaisquer* $s, t \in \mathbb{R}$;

(j) $C(s+t) = C(t)C(s) + AS(t)S(s)$ *para quaisquer* $s, t \in \mathbb{R}$;

(k) $D(A)$ *é denso em* X *e* A *é um operador fechado.*

Demonstração. A demonstração de cada item será feita separadamente.

(a) Sejam $x \in X$ e $r, s \in \mathbb{R}$. Pelo item (d) da Proposição 1.4 e pelo fato de $C(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$C(t)z = \int_r^s C(t)S(u)xdu = \frac{1}{2}\int_r^s S(u+t)x + S(u-t)xdu,\ t \in \mathbb{R}.$$

Assim, pelo Lema 1.9 e por mudanças de variáveis, obtemos

$$\frac{d}{dt}C(t)z = \frac{1}{2}\int_r^s C(u+t)x + C(u-t)xdu = \frac{1}{2}\left[\int_{r+t}^{s+t} C(u)xdu + \int_{r-t}^{s-t} C(u)xdu\right].$$

Mais ainda, pelo Lema 1.6, concluímos que

$$\frac{d^2}{dt^2}C(t)z = \frac{1}{2}[C(s+t)x - C(r+t)x + C(s-t)x - C(r-t)x].$$

Logo, $z \in D(A)$ e $\left.\dfrac{d^2}{dt^2}C(t)z\right|_{t=0} = C(s)x - C(r)x$, isto é, $Az = C(s)x - C(r)x$.

(b) Dados $x \in X$ e $r, s \in \mathbb{R}$, pela definição de família cosseno e pelo fato de $C(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} C(t)z &= \int_0^r \int_0^s C(t)C(u)C(v)xdudv = \frac{1}{2}\int_0^r \int_0^s [C(t+u) + C(t-u)]C(v)xdudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^r \left[\int_t^{t+s} C(u)C(v)xdu + \int_{t-s}^t C(u)C(v)xdu\right]dv = \frac{1}{2}\int_0^r \int_{t-s}^{t+s} C(u)C(v)xdudv. \end{aligned}$$

Além disso, do Teorema de Fubini, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^r \int_{t-s}^{t+s} C(u)C(v)x du dv &= \int_{t-s}^{t+s} \int_0^r C(u)C(v)x dv du \\ &= \int_{t-s}^{t+s} C(u) \int_0^r C(v)x dv du.\end{aligned}$$

Dessa forma, considerando $f(u) = C(u) \displaystyle\int_0^r C(v)x dv$ e usando o Lema 1.6, obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^r \int_{t-s}^{t+s} C(u)C(v)x du dv\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} f(u) du\right) \\ &= \frac{1}{2}C(t+s)\int_0^r C(v)x dv - \frac{1}{2}C(t-s)\int_0^r C(v)x dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^r [C(t+s) - C(t-s)]C(v)x dv,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}C(t)z &= \frac{1}{2}\int_0^r [C(t+s) - C(t-s)]C(v)x dv \\ &= \frac{1}{4}\int_0^r [C(t+s+v) + C(t+s-v) - C(t-s+v) - C(t-s-v)]x dv \\ &= \frac{1}{4}\left[\int_{t+s}^{t+s+r} C(v)x dv + \int_{t+s-r}^{t+s} C(v)x dv - \int_{t-s}^{t-s+r} C(v)x dv - \int_{t-s-r}^{t-s} C(v)x dv\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\int_{t+s-r}^{t+s+r} C(v)x dv - \int_{t-s-r}^{t-s+r} C(v)x dv\right].\end{aligned}$$

Assim, usando novamente o Lema 1.6, temos

$$\frac{d^2}{dt^2}C(t)z = \frac{1}{4}[C(t+s+r)x - C(t+s-r)x - C(t-s+r)x + C(t-s-r)x],$$

o que nos permite concluir que $z \in D(A)$ e

$$Az = \frac{d^2}{dt^2}C(t)z\bigg|_{t=0} = \frac{1}{4}[C(s+r)x - C(s-r)x - C(-s+r)x + C(-s-r)x] = \frac{1}{2}[C(s+r)x - C(s-r)x],$$

pois, como $C(t) = C(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $C(s+r) = C(-s-r)$ e $C(s-r) = C(-s+r)$.

(c) Dados $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, pelo fato de $C(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e pelo item (ii) da Definição

1.1, temos

$$\begin{aligned} C(r)S(t)x &= \int_0^t C(r)C(s)xds = \frac{1}{2}\int_0^t [C(r+s)+C(r-s)]xds \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_r^{r+t} C(s)xds + \int_{r-t}^{r} C(s)xds\right] = \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} C(s)xds. \end{aligned}$$

Então, do Lema 1.6, obtemos

$$\frac{d}{dr}C(r)S(t)x = \frac{1}{2}[C(r+t)x - C(r-t)x],$$

o que garante que $S(t)x \in E$.

(d) Sejam $x \in E$ e $t \in \mathbb{R}$. Pelo item anterior, temos $S(t)x \in E$ e

$$\frac{d}{dr}C(r)S(t)x = \frac{1}{2}[C(r+t)x - C(t-r)x].$$

Assim,

$$\frac{d^2}{dr^2}C(r)S(t)x = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dr}C(r+t)x + \frac{d}{dr}C(r-t)x\right].$$

Logo, como $x \in E$, as funções $r \mapsto \frac{d}{dr}C(r+t)x$ e $r \mapsto \frac{d}{dr}C(r-t)x$ são contínuas, garantindo que $S(t)x \in D(A)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} AS(t)x &= \frac{d^2}{dr^2}C(r)S(t)x\Big|_{r=0} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dr}C(r+t)x + \frac{d}{dr}C(r-t)x\right]\Big|_{r=0} \\ &= \frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{C(0+h+t)x - C(0+t)x}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{C(0+h-t)x - C(0-t)x}{h}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{C(t+h)x - C(t)x}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{C(h-t)x - C(-t)x}{h}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}C(t)x + \lim_{h\to 0}\frac{C(t-h)x - C(t)x}{h}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2\frac{d}{dt}C(t)x\right] \\ &= \frac{d}{dt}C(t)x. \end{aligned}$$

(e) Dados $x \in D(A)$ e $t \in \mathbb{R}$, seja $y = C(t)x$. Assim, da definição de família cosseno, temos

$$C(s)y = C(s)C(t)x = \frac{1}{2}[C(s+t)x + C(s-t)x].$$

Dessa forma, como a função $u \mapsto C(u)x$ é duas vezes continuamente diferenciável, pois $x \in D(A)$, as funções compostas $s \mapsto C(s+t)x$ e $s \mapsto C(s-t)x$ também são duas vezes continuamente diferenciáveis, garantindo que $y = C(t)x \in D(A)$.

Além disso, pela fórmula da segunda derivada, temos

$$\frac{d^2}{ds^2}C(s)y = \lim_{h\to 0} \frac{[C(s+h) - 2C(s) + C(s-h)]y}{h^2},$$

e então, usando as propriedades de $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$, segue que

$$\begin{aligned}
Ay &= AC(t)x = \left.\frac{d^2}{ds^2}C(s)C(t)x\right|_{s=0} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}[C(0+h) - 2C(0) + C(0-h)]C(t)x \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}[C(h)C(t) - 2C(t) + C(-h)C(t)]x \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}[2C(h)C(t) - 2C(t)]x \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}[C(t+h) + C(t-h) - 2C(t)]x \\
&= \frac{d}{dt^2}C(t)x,
\end{aligned}$$

isto é, $AC(t)x = \dfrac{d^2}{dt^2}C(t)x$.

Por outro lado, visto que $x \in D(A)$ e $C(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
C(t)Ax &= C(t)\left[\left.\frac{d^2}{ds^2}C(s)x\right|_{s=0}\right] \\
&= C(t)\left[\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}[C(0+h) - 2C(0) + C(0-h)]x\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}[C(t)C(h) - 2C(t) + C(t)C(-h)]x \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}[2C(t)C(h) - 2C(t)]x \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}[C(t+h) + C(t-h) - 2C(t)]x \\
&= \frac{d^2}{dt^2}C(t)x.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $C(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d^2}{dt^2}C(t)x = AC(t)x = C(t)Ax.$$

(f) Seja $x \in E$. Então, do item (d), temos

$$\lim_{t\to 0} AS(t)x = \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt}C(t)x = \left.\frac{d}{dt}C(t)x\right|_{t=0},$$

pois a função $t \mapsto \dfrac{d}{dt}C(t)x$ é contínua uma vez que $x \in E$.

Assim, tomando $b = \left.\dfrac{d}{dt}C(t)x\right|_{t=0}$, temos $b = \left.\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{C(t)x - x}{h}\right|_{t=0}$.

Por outro lado,

$$\left.\frac{d}{dt}C(t)x\right|_{t=0} = \lim_{h\to 0} \frac{C(-h)x - x}{-h} = -\lim_{h\to 0} \frac{C(h)x - x}{h} = -b.$$

Logo, $b = 0$, isto é, $\lim\limits_{t\to 0} AS(t)x = 0$.

(g) Dados $x \in E$ e $t \in \mathbb{R}$, pelo item (d), sabemos que $S(t)x \in D(A)$ e, além disso, $AS(t)x = \dfrac{d}{dt}C(t)x$.

Dessa forma, como $\dfrac{d}{dt}S(t)x = C(t)x$, temos

$$\frac{d^2}{dt^2}S(t)x = \frac{d}{dt}C(t)x = AS(t)x.$$

(h) Dados $x \in D(A)$ e $t \in \mathbb{R}$, temos $S(t)x \in D(A)$ pois, em particular, $x \in E$ e podemos usar a propriedade do item (d).

Mais ainda, do item (b) da Proposição 1.4, do fato de $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e da fórmula da segunda derivada, obtemos

$$\begin{aligned} AS(t)x &= \left.\frac{d^2}{ds^2}C(s)S(t)x\right|_{s=0} = \left.\frac{d^2}{ds^2}S(t)C(s)x\right|_{s=0} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}[S(t)C(0+h)x - 2S(t)C(0)x + S(t)C(0-h)x] \\ &= S(t)\left[\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}(C(0+h)x - 2C(0)x + C(0-h)x)\right] \\ &= S(t)\left(\left.\frac{d^2}{ds^2}C(s)x\right|_{s=0}\right) \\ &= S(t)Ax. \end{aligned}$$

(i) Dados $x \in X$ e $s, t \in \mathbb{R}$, notemos que $S(t)S(s)x = \displaystyle\int_0^t \int_0^s C(v)C(u)x\,du\,dv$. Então, pelo item (b), para $z = S(t)S(s)x$, temos

$$Az = AS(t)S(s)x = \frac{1}{2}[C(t+s)x - C(t-s)x],$$

e portanto, $2AS(t)S(s) = C(t+s) - C(t-s)$ para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$.

(j) Pela definição de família cosseno e pelo item anterior, temos $C(t+s) + C(t-s) = 2C(s)C(t)$ e $C(t+s) - C(t-s) = 2AS(t)S(s)$, para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$.

Logo, somando as duas igualdades, obtemos

$$2C(t+s) = 2C(s)C(t) + 2AS(t)S(s).$$

Então, segue que $C(t+s) = C(s)C(t) + AS(t)S(s)$ para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$.

(k) Mostraremos, primeiramente, que $D(A)$ é denso em X.

Para isso, dados $x \in X$ e $b > 0$, defina

$$v_b = \int_0^b C(s)x ds = S(b)x.$$

Então, pelo item (c), temos $v_b \in E$ para todo $b > 0$.

Além disso, tomando

$$u_b = \int_0^b C(s)v_b ds = S(b)v_b,$$

pelo item (d), concluímos que $u_b \in D(A)$ para todo $b > 0$.

Mais ainda, $b^{-2}u_b \in D(A)$ para todo $b > 0$ e, como veremos a seguir, $\lim\limits_{b \to 0} b^{-2}u_b = x$.

Para provarmos o limite acima, note que $u_b = \displaystyle\int_0^b \int_0^b C(s)C(r)x dr ds$ e

$$\lim_{r,s \to 0} C(s)C(r)x = \lim_{r,s \to 0} \left[\frac{C(s+r)x}{2} + \frac{C(s-r)x}{2} \right] = x,$$

pois a função $t \mapsto C(t)x$ é contínua para todo $x \in X$ fixo. Observe ainda que este limite é uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ e assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|C(s)C(r)x - x\| < \varepsilon, \text{ para todo } r, s \in [0, b] \text{ e } 0 < b < \delta.$$

Logo, para $0 < b < \delta$, temos

$$\begin{aligned} \|b^{-2}u_b - x\| &= \left\| \frac{1}{b^2} \int_0^b \int_0^b C(s)C(r)x dr ds - \frac{1}{b^2} \int_0^b \int_0^b x dr ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{b^2} \int_0^b \int_0^b \|C(s)C(r)x - x\| dr ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{b^2}\int_0^b\int_0^b \varepsilon dr ds \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $\lim\limits_{b\to 0} b^{-2}u_b = x$.

Com isso, garantimos que, para todo $x \in X$, existe uma sequência em $D(A)$ convergindo para x, e portanto, $\overline{D(A)} = X$.

Agora, mostraremos que A é um operador fechado.

Para isso, sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $D(A)$ e $u, v \in X$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ e $\lim\limits_{n\to\infty} Au_n = v$. Queremos mostrar que $u \in D(A)$ e $Au = v$.

Como $u_n \in D(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o item (e) nos garante que

$$\frac{d^2}{dt^2}C(t)u_n = C(t)Au_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Assim, integrando ambos os lados de (1.2), obtemos

$$\frac{d}{dt}C(t)u_n = \int_0^t C(s)Au_n ds, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Além disso, pelo item (g) da Proposição 1.4, sabemos que existem constantes $K \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que $\|C(t)\| \leq Ke^{w|t|}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e dessa forma:

(i)
$$\|C(t)u_n - C(t)u\| \leq \|C(t)\|\|u_n - u\| \leq Ke^{w|t|}\|u_n - u\|, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ t \in \mathbb{R},$$

o que nos permite concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} C(t)u_n = C(t)u$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(ii)
$$\|C(t)Au_n - C(t)v\| \leq \|C(t)\|\|Au_n - v\| \leq Ke^{w|t|}\|Au_n - v\|, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ t \in \mathbb{R},$$

implicando que $\lim\limits_{n\to\infty} C(t)Au_n = C(t)v$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(iii)
$$\begin{aligned} \left\|\int_0^t C(s)Au_n ds - \int_0^t C(s)v ds\right\| &\leq \left|\int_0^t \|C(s)\|\|Au_n - v\| ds\right| \\ &\leq K\|Au_n - v\|\left|\int_0^t e^{w|s|}ds\right| \\ &\leq Ke^{w|t|}|t|\|Au_n - v\|, \ n \in \mathbb{N}, \ t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

garantindo que $\lim_{n\to\infty}\int_0^t C(s)Au_n ds = \int_0^t C(s)v ds$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observe ainda que cada uma das convergências acima é uniforme para t em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Então, por (1.3) e (iii), temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dt}C(t)u_n\right) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t C(s)Au_n ds = \int_0^t C(s)v ds$$

e assim, por (i) e pelo fato do operador derivada ser fechado, segue que

$$\frac{d}{dt}C(t)u = \int_0^t C(s)v ds,$$

isto é, a função $t \mapsto C(t)u$ é continuamente diferenciável.

Analogamente, por (1.2) e (ii), temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d^2}{dt^2}C(t)u_n\right) = \lim_{n\to\infty} C(t)Au_n = C(t)v$$

e então, por (i) e pelo fato do operador derivada segunda também ser fechado, obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2}C(t)u = C(t)v.$$

Desse modo, visto que $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família cosseno fortemente contínua, a função $t \mapsto C(t)u$ é duas vezes continuamente diferenciável e portanto, $u \in D(A)$.

Por fim, notemos que

$$Au = \left.\frac{d^2}{dt^2}C(t)u\right|_{t=0} = C(t)v|_{t=0} = C(0)v = v,$$

o que conclui a prova de que A é um operador fechado.

Isso completa a demonstração da proposição. $\square$

O próximo resultado nos fornece outra maneira de caracterizar o gerador infinitesimal de uma família cosseno fortemente contínua.

Proposição 1.11. *Seja $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ uma família cosseno fortemente contínua em X. O operador $\widehat{A}$: $\mathcal{D}(\widehat{A}) \subset X \to X$, definido por*

$$\widehat{A}x = \lim_{t\to 0}\frac{C(2t)x - x}{2t^2},$$

onde $\mathcal{D}(\widehat{A}) = \left\{ x \in X;\ o\ limite\ \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{C(2t)x - x}{2t^2}\ existe \right\}$, *é o gerador infinitesimal da família cosseno* $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$.

Demonstração. Tomemos, inicialmente, $x \in \mathcal{D}(\widehat{A})$ e mostremos que $x \in D(A)$, com $\widehat{A}x = Ax$, onde A é o gerador infinitesimal de $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Para isso, sejam $y = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{C(2t)x - x}{2t^2}$ e $x_t = \dfrac{1}{t^2}\displaystyle\int_0^t \int_0^t C(s)C(r)xdsdr$, $t \in \mathbb{R}$.

Pelo item (b) da Proposição 1.10, temos $x_t \in D(A)$ e

$$Ax_t = \frac{1}{2t^2}[C(t+t)x - C(t-t)x] = \frac{C(2t)x - x}{2t^2}, t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, pelo que foi feito na demonstração do item (k) da Proposição 1.10, $\lim\limits_{t\to 0} x_t = x$. Dessa forma, como A é fechado e $\lim\limits_{t\to 0} Ax_t = y$, concluímos que $x \in D(A)$ e

$$Ax = y = \lim_{t\to 0} \frac{C(2t)x - x}{2t^2} = \widehat{A}x.$$

Logo, temos $\mathcal{D}(\widehat{A}) \subset D(A)$ e $\widehat{A}x = Ax$ para $x \in D(A)$.

Agora, mostraremos que $D(A) \subset \mathcal{D}(\widehat{A})$. Com esse objetivo, sejam $x \in D(A)$ e $Ax = z$.

Como $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família cosseno fortemente contínua, a função $t \mapsto C(t)z$ é contínua e assim, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que, se $|u| < \delta$, então $\|C(u)z - z\| < \varepsilon$.

Além disso, pelo Lema 1.7 e o item (d) da Proposição 1.10, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2t}\int_0^s \frac{d^2}{du^2}C(u)xduds &= \int_0^{2t} \left(\frac{d}{du}C(u)x\Big|_{u=s} - \frac{d}{du}C(u)x\Big|_{u=0} \right) ds \\
&= \int_0^{2t} \left[\frac{d}{ds}C(s)x - AS(0)x \right] ds \\
&= \int_0^{2t} \frac{d}{ds}C(s)xds \\
&= C(2t)x - C(0)x \\
&= C(2t)x - x,\ t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, tomando $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |2t| < \delta$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{2t^2}[C(2t)x - x] - z \right\| &= \left\| \frac{1}{2t^2}\int_0^{2t}\int_0^s \frac{d^2}{du^2}C(u)xduds - \frac{1}{2t^2}\int_0^{2t}\int_0^s zduds \right\| \\
&\leq \frac{1}{2t^2}\int_0^{2t}\int_0^s \left\| \frac{d^2}{du^2}C(u)x - z \right\| duds \\
&= \frac{1}{2t^2}\int_0^{2t}\int_0^s \|C(u)Ax - Ax\| duds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2t^2}\int_0^{2t}\int_0^s \varepsilon \, duds \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

ou seja, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{C(2t)x - x}{2t^2} = z.$

Consequentemente, segue que $x \in \mathcal{D}(\widehat{A})$ e $\widehat{A}x = z = Ax$.

Portanto, $\mathcal{D}(\widehat{A}) = D(A)$ e $\widehat{A} = A$. $\square$

Capítulo

2

Equações diferenciais de segunda ordem

Neste capítulo, baseados nos artigos [32, 33, 34], estudaremos a existência de soluções para três tipos de equações diferenciais abstratas de segunda ordem: a equação linear homogênea, a linear não homogênea e a equação semilinear. Nos três casos usaremos como ferramenta a teoria das famílias seno e cosseno de operadores lineares limitados, que desenvolvemos no capítulo anterior.

Para isso, assumiremos que X representa um espaço de Banach munido da norma $\|\cdot\|$, $\mathcal{L}(X)$ é o espaço de todas as transformações lineares limitadas de X em X, $\mathcal{C}(\mathbb{R}; X)$ é o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em X, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; X)$ é o conjunto das funções continuamente diferenciáveis de $\mathbb{R}$ em X e $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; X)$ é o conjunto das funções duas vezes continuamente diferenciáveis, também de $\mathbb{R}$ em X.

2.1 Equação homogênea

Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear, não necessariamente limitado, com $D(A)$ subespaço vetorial de X e $\overline{D(A)} = X$. Um problema de valor inicial, PVI, para a equação homogênea de segunda ordem é dado por

$$u''(t) = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

$$u(0) = x, \tag{2.2}$$

$$u'(0) = y, \tag{2.3}$$

com $x, y \in X$ previamente fixados.

A seguir, estabeleceremos o conceito de solução para o PVI (2.1) – (2.3) e, assumindo que A é o gerador infinitesimal de uma família cosseno de operadores lineares limitados, estudaremos a relação entre a existência de solução para o PVI e a família cosseno gerada por A.

Definição 2.1. *Uma função $u : \mathbb{R} \to X$ será solução do PVI* $(2.1) - (2.3)$ *se:*

(i) $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; X)$*;*

(ii) $u(t) \in D(A)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*;*

(iii) as equações $(2.1) - (2.3)$ *estiverem satisfeitas.*

Notação: $u(\cdot) = u(\cdot, x, y)$.

Observemos que, se (2.1) e (2.2) são satisfeitas, então x deve estar necessariamente em $D(A)$. Assim, quando $D(A) \nsubseteq X$, podemos não ter solução para o PVI para todo $x \in X$.

No caso em que temos garantida a existência de uma única solução de $(2.1) - (2.3)$ para todo $x \in D(A)$, podemos considerar o conceito de problema bem posto, o que nos permite definir uma família cosseno a partir das soluções do PVI.

Definição 2.2. *Dizemos que o PVI* $(2.1) - (2.3)$ *é bem posto se:*

(i) $(2.1) - (2.3)$ *possui uma única solução* $u(\cdot, x, 0)$ *para cada* $x \in D(A)$ *e* $y = 0$*;*

(ii) para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *em* $D(A)$ *tal que* $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$*, temos* $\lim_{n \to \infty} u(t, x_n, 0) = 0$*, uniformemente para t em subconjuntos compactos de* $\mathbb{R}$*.*

Agora, usaremos as soluções do PVI para construirmos uma família cosseno de operadores lineares limitados.

Proposição 2.3. *Suponha que o PVI* $(2.1) - (2.3)$ *seja bem posto. Para cada* $t \in \mathbb{R}$*, seja* $C(t)$ *a extensão da aplicação* $x \mapsto u(t, x, 0)$*, para* $x \in D(A)$*, em* $\mathcal{L}(X)$*. Então,* $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ *será uma família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados em* X*.*

Demonstração. Mostremos, primeiramente, que a aplicação $x \mapsto u(t, x, 0)$, com $x \in D(A)$, $t \in \mathbb{R}$ fixo e $u(\cdot, x, 0)$ solução de $(2.1) - (2.3)$ com $y = 0$, pode ser estendida a um operador em $\mathcal{L}(X)$.

Para isso usaremos o Teorema A.1 e então, precisaremos mostrar que, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo, a aplicação $\widetilde{C}(t) : D(A) \to X$, definida por $\widetilde{C}(t)x = u(t, x, 0)$, pertence a $\mathcal{L}(D(A), X)$.

(a) Mostremos que $\widetilde{C}(t)$ é um operador linear.

Sejam $x, y \in D(A)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ denota o corpo de escalares de X. Assim,

$$\widetilde{C}(t)(x + y) = u(t, x + y, 0) \;\text{ e }\; \widetilde{C}(t)(\alpha x) = u(t, \alpha x, 0),$$

onde $u(\cdot, x+y, 0)$ e $u(\cdot, \alpha x, 0)$ são soluções de (2.1) − (2.3) com condição inicial (2.2) igual a $x+y$ e αx, respectivamente, e condição (2.3) nula.

Por outro lado, sejam $v : \mathbb{R} \to X$ e $w : \mathbb{R} \to X$ dadas por

$$v(t) = u(t, x, 0) + u(t, y, 0) \ \text{ e } \ w(t) = \alpha u(t, x, 0).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} v'(t) &= u'(t, x, 0) + u'(t, y, 0), \ t \in \mathbb{R}, \\ v''(t) &= u''(t, x, 0) + u''(t, y, 0) = Au(t, x, 0) + Au(t, y, 0) = Av(t), \ t \in \mathbb{R}, \\ v(0) &= u(0, x, 0) + u(0, y, 0) = x + y, \\ v'(0) &= u'(0, x, 0) + u'(0, y, 0) = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w'(t) &= \alpha u'(t, x, 0), \ t \in \mathbb{R} \\ w''(t) &= \alpha u''(t, x, 0) = \alpha A u(t, x, 0) = Aw(t), \ t \in \mathbb{R}, \\ w(0) &= \alpha u(0, x, 0) = \alpha x, \\ w'(0) &= \alpha u'(0, x, 0) = \alpha 0 = 0. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que v é solução de (2.1) com condições iniciais $v(0) = x + y$ e $v'(0) = 0$, e w é solução de (2.1) com condições iniciais $w(0) = \alpha x$ e $w'(0) = 0$. Portanto, visto que o PVI é bem posto, temos $v(t) = u(t, x+y, 0)$ e $w(t) = u(t, \alpha x, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente, segue que

$$\widetilde{C}(t)(x + y) = v(t) = u(t, x, 0) + u(t, y, 0) = \widetilde{C}(t)x + \widetilde{C}(t)y,$$

e

$$\widetilde{C}(t)(\alpha x) = w(t) = \alpha u(t, x, 0) = \alpha \widetilde{C}(t)x,$$

garantindo que $\widetilde{C}(t)$ é um operador linear.

Para que $\widetilde{C}(t) \in \mathcal{L}(D(A), X)$, falta mostrarmos que $\widetilde{C}(t)$ é contínua em $D(A)$.

(b) Mostremos que $\widetilde{C}(t)$ é contínua em $D(A)$.

Sejam $x \in D(A)$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(A)$ tais que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Defina $y_n = x_n - x$, $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $D(A)$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Logo, visto que o PVI é bem posto, temos

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{C}(t)y_n = \lim_{n\to\infty} u(t, y_n, 0) = 0,$$

sendo essa convergência uniforme para t em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Portanto, visto que $\widetilde{C}(t)$ é um operador linear e $y_n = x_n - x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{C}(t)x_n = \widetilde{C}(t)x,$$

implicando que $\widetilde{C}(t)$ é contínua em x para todo $x \in D(A)$.

Desse modo, concluímos que $\widetilde{C}(t) \in \mathcal{L}(D(A), X)$ e então, pelo Teorema A.1, obtemos que $\widetilde{C}(t)$ pode ser estendido a um operador linear limitado em X.

Denotemos a extensão de $\widetilde{C}(t)$ por $C(t)$. Assim, $C(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora, iremos mostrar que a família de operadores lineares limitados $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família cosseno fortemente contínua em X, isto é, provaremos que $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ satisfaz as três propriedades da Definição 1.1.

(i) Para $x \in D(A)$,

$$C(0)x = \widetilde{C}(0)x = u(0, x, 0) = x,$$

já que $u(\cdot, x, 0)$ é solução de $(2.1) - (2.3)$ para $y = 0$.

Além disso, como $\overline{D(A)} = X$, dado $x \in X$, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Desse modo, visto que $C(0) \in \mathcal{L}(X)$,

$$C(0)x = \lim_{n\to\infty} C(0)x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Portanto, $C(0)x = x$ para todo $x \in X$, ou seja, $C(0) = I$.

(ii) Sejam $t, s \in \mathbb{R}$ e $x \in D(A)$.

Tomemos $v_1(t) = u(-t, x, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, onde $u(\cdot, x, 0)$ é a solução de $(2.1) - (2.3)$ para $y = 0$. Então,

$$\begin{aligned}
v_1'(t) &= -u'(-t, x, 0), \ t \in \mathbb{R}, \\
v_1''(t) &= u''(-t, x, 0) = Au(-t, x, 0) = Av_1(t), \ t \in \mathbb{R}, \\
v_1(0) &= u(0, x, 0) = x,
\end{aligned}$$

$$v_1'(0) = -u'(0,x,0) = 0,$$

isto é, v_1 é solução de $(2.1)-(2.3)$ para $y=0$. Consequentemente, visto que o PVI é bem posto, concluímos que $v_1(t) = u(t,x,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou ainda, $u(-t,x,0) = u(t,x,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora, fixando $s \in \mathbb{R}$, tomemos $v_2(t) = u(t+s,x,0) + u(t-s,x,0)$, com $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
v_2'(t) &= u'(t+s,x,0) + u'(t-s,x,0),\ t \in \mathbb{R}, \\
v_2''(t) &= u''(t+s,x,0) + u''(t-s,x,0) = Au(t+s,x,0) + Au(t-s,x,0) \\
&= A[u(t+s,x,0) + u(t-s,x,0)] = Av_2(t),\ t \in \mathbb{R}, \\
v_2(0) &= u(s,x,0) + u(-s,x,0) = 2u(s,x,0), \\
v_2'(0) &= u'(s,x,0) + u'(-s,x,0) = 0,
\end{aligned}$$

sendo a última igualdade válida pois $u'(-s,x,0) = -v_1'(s) = -u'(s,x,0)$. Dessa forma, v_2 é solução da equação (2.1) com condições iniciais $v_2(0) = 2u(s,x,0)$ e $v_2'(0) = 0$.

Por fim, ainda fixando $s \in \mathbb{R}$, definamos $v_3(t) = 2u(t,u(s,x,0),0)$, $t \in \mathbb{R}$, onde $u(\cdot,u(s,x,0),0)$ é solução de (2.1) com condições iniciais $u(s,x,0)$ e 0 para $u(0)$ e $u'(0)$, respectivamente, e notemos que

$$2u(t,u(s,x,0),0) = 2C(t)[u(s,x,0)] = 2C(t)C(s)x,$$

pois $x \in D(A)$ e, como $u(\cdot,x,0)$ é solução de $(2.1)-(2.3)$ para $y=0$, $u(s,x,0) \in D(A)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
v_3'(t) &= 2u'(t,u(s,x,0),0),\ t \in \mathbb{R}, \\
v_3''(t) &= 2u''(t,u(s,x,0),0) = 2Au(t,u(s,x,0),0) = Av_3(t),\ t \in \mathbb{R}, \\
v_3(0) &= 2u(0,u(s,x,0),0) = 2u(s,x,0), \\
v_3'(0) &= 2u'(0,u(s,x,0),0) = 0,
\end{aligned}$$

o que garante que v_3 é solução de (2.1) com condições iniciais $v_3(0) = 2u(s,x,0)$ e $v_3'(0) = 0$.

Logo, pelo fato de $(2.1)-(2.3)$ ser bem posto, concluímos que $v_2(t) = v_3(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e assim,

$$\begin{aligned} C(t+s)x + C(t-s)x &= u(t+s,x,0) + u(t-s,x,0) = v_2(t) = v_3(t) \\ &= 2u(t, u(s,x,0),0) = 2C(t)C(s)x,\ t,s \in \mathbb{R},\ x \in D(A). \end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração deste item, dado $x \in X$, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $D(A)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Então, visto que $C(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} C(t+s)x + C(t-s)x &= \lim_{n\to\infty} [C(t+s)x_n + C(t-s)x_n] \\ &= \lim_{n\to\infty} 2C(t)C(s)x_n \\ &= 2C(t)C(s)x,\ t,s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s),\ t,s \in \mathbb{R}.$$

(iii) Dado $x \in D(A)$, $C(t)x = u(t,x,0)$, onde $u(\cdot,x,0)$ é solução de (2.1) $-$ (2.3) para $y = 0$. Então, $u(\cdot,x,0)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e assim, a função $t \mapsto C(t)x$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Antes de considerarmos o caso em que $x \in X$, mostraremos que $\widetilde{C}(t) : D(A) \to X$ é uniformemente limitada em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Com esse objetivo, suponhamos, por absurdo, que $\widetilde{C}(t)$ não é limitado em um compacto $J \subset \mathbb{R}$. Então, dado $M > 0$, existe $t_M \in J$ tal que $\|\widetilde{C}(t_M)\| > M$. Mais ainda, como $\|\widetilde{C}(t_M)\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\| \le 1}} \|\widetilde{C}(t_M)x\|$, existe $x_M \in D(A)$ de modo que $\|x_M\| \le 1$ e $\|\widetilde{C}(t_M)x_M\| \ge M$.

Em particular, tomando $M = n \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em J e uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A)$, com $\|x_n\| \le 1$, tais que

$$\|\widetilde{C}(t_n)x_n\| \ge n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Seja $y_n = \dfrac{x_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $D(A)$ e, como $\|y_n\| \le \dfrac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Logo, visto que (2.1) $-$ (2.3) é bem posto, temos

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{C}(t)y_n = \lim_{n\to\infty} u(t,y_n,0) = 0,$$

uniformemente em J, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\|\widetilde{C}(t)y_n\| < \varepsilon,\ n \geq n_0,\ t \in J. \tag{2.5}$$

Por outro lado, de (2.4), segue que

$$\|\widetilde{C}(t_n)y_n\| = \left\|\widetilde{C}(t_n)\frac{x_n}{n}\right\| = \frac{\|\widetilde{C}(t_n)x_n\|}{n} \geq 1,\ n \in \mathbb{N},$$

o que contraria (2.5) já que $t_n \in J$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, existe $M > 0$ tal que $\|\widetilde{C}(t)\| \leq M$, para todo $t \in J$.

Além disso, como $C(t)$ é uma extensão de $\widetilde{C}(t)$, temos $\|C(t)\| = \|\widetilde{C}(t)\|$ e então, $C(t) : X \to X$ também é uniformemente limitado em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Agora, dados $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A)$, $J = [a,b] \subset \mathbb{R}$ e $M_J > 0$ tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $t \in (a,b)$ e $\|C(s)\| \leq M_J$, para todo $s \in J$. Para mostrarmos que a função $s \mapsto C(s)x$ é contínua em t, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ de modo que

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{3M_J},\ n \geq n_0, \quad \text{e} \quad \|C(t+h)x_{n_0} - C(t)x_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para} \quad |h| < \delta.$$

Dessa forma, para $h \in \mathbb{R}$ tal que $t + h \in J$ e $|h| < \delta$, segue que

$$\begin{aligned}
\|C(t+h)x - C(t)x\| &\leq \|C(t+h)x - C(t+h)x_{n_0}\| + \|C(t+h)x_{n_0} - C(t)x_{n_0}\| \\
&+ \|C(t)x_{n_0} - C(t)x\| \\
&\leq M_J\|x - x_{n_0}\| + \|C(t+h)x_{n_0} - C(t)x_{n_0}\| + M_J\|x_{n_0} - x\| \\
&< M_J\frac{\varepsilon}{3M_J} + \frac{\varepsilon}{3} + M_J\frac{\varepsilon}{3M_J} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

ou seja, a função $t \mapsto C(t)x$ é contínua em t.

Por fim, como o resultado é válido para todo $t \in \mathbb{R}$, a função $t \mapsto C(t)x$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Portanto, de (i)-(iii), concluímos que $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família cosseno fortemente contínua. $\square$

Teorema 2.4. *Sejam $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ uma família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados em X, com gerador infinitesimal A, e $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ a família seno associada a ela. Então, o PVI (2.1) $-$ (2.3) é bem posto. Mais ainda, se $x \in D(A)$ e $y \in E$, a única solução $u(\cdot, x, y)$ de*

$(2.1)-(2.3)$ *é dada por*

$$u(t,x,y)=C(t)x+S(t)y,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

Demonstração. Suponha que $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ seja uma família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados, com gerador infinitesimal A. Dados $x\in D(A)$, mostremos que a função $u:\mathbb{R}\to X$ definida por $u(t)=C(t)x$ é uma solução de $(2.1)-(2.3)$ para $y=0$.

Primeiramente, usando a definição de $D(A)$ e o fato de $x\in D(A)$, concluímos que $u\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R};X)$. Além disso, do item (e) da Proposição 1.10, $u(t)\in D(A)$ e $u''(t)=\dfrac{d^2}{dt^2}C(t)x=AC(t)x=Au(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Por fim, $u(0)=C(0)x=x$ e, do item (d) da Proposição 1.10 e do fato de $D(A)\subset E$, $u'(0)=\dfrac{d}{dt}C(t)x\Big|_{t=0}=AS(0)x=0$. Portanto, u é solução de $(2.1)-(2.3)$.

Para mostrarmos que o PVI é bem posto, precisamos garantir a unicidade de solução e também a dependência contínua da condição inicial. Para a unicidade de solução, seja $w:\mathbb{R}\to X$ outra solução de $(2.1)-(2.3)$ para $y=0$. Então, $w''(t)=Aw(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$, $w(0)=x$ e $w'(0)=0$. Mais ainda, do item (d) da Proposição 1.10 e do Lema 1.8, as funções $s\mapsto C(t-s)w(s)$ e $s\mapsto S(t-s)w'(s)$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ para todo $t\in\mathbb{R}$, com

$$\frac{d}{ds}C(t-s)w(s)=-AS(t-s)w(s)+C(t-s)w'(s) \tag{2.6}$$

e

$$\frac{d}{ds}S(t-s)w'(s)=-C(t-s)w'(s)+S(t-s)w''(s). \tag{2.7}$$

Logo, integrando (2.6) de zero até t e usando o item (h) da Proposição 1.10, a igualdade (2.7) e o Lema 1.7, temos

$$\begin{aligned}
w(t)-C(t)x &= C(0)w(t)-C(t)w(0)=\int_0^t\frac{d}{ds}C(t-s)w(s)ds\\
&= \int_0^t -AS(t-s)w(s)+C(t-s)w'(s)ds\\
&= \int_0^t -S(t-s)Aw(s)+C(t-s)w'(s)ds\\
&= \int_0^t -S(t-s)w''(s)+C(t-s)w'(s)ds\\
&= \int_0^t -\left[\frac{d}{ds}S(t-s)w'(s)\right]ds\\
&= -S(0)w'(t)+S(t)w'(0)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $w(t)=C(t)x$ para todo $t\in\mathbb{R}$, garantindo a unicidade de solução para o PVI $(2.1)-(2.3)$

com $y = 0$.

Agora, mostraremos que a solução do PVI depende continuamente da condição inicial. Para isso, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $D(A)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Dos resultados anteriores, sabemos que a solução $u_n = u_n(\cdot, x_n, 0)$ de $(2.1) - (2.3)$, em que $x = x_n$ e $y = 0$, é dada por $u_n(t) = C(t)x_n$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e é única.

Dessa forma, visto que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e $C(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} u(t, x_n, 0) = \lim_{n\to\infty} C(t)x_n = C(t)0 = 0.$$

Notemos ainda que, do item (g) da Proposição 1.4, existem constantes $K \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que $\|C(t)\| \leq Ke^{w|t|}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, se $t \in J$, com $J \subset \mathbb{R}$ compacto, então $\|C(t)\| \leq M$ para todo $t \in J$ e algum $M > 0$. Logo, visto que

$$\|u(t, x_n, 0)\| \leq \|C(t)\|\|x_n\| \leq M\|x_n\|,\ t \in J,\ n \in \mathbb{N},$$

concluímos que a convergência acima é uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Portanto, segue que o PVI $(2.1) - (2.3)$ é bem posto.

Para finalizarmos a demonstração deste teorema, sejam $x \in D(A)$ e $y \in E$, e suponha que w seja uma solução de $(2.1) - (2.3)$. Então, as expressões em (2.6) e (2.7) ainda são válidas e assim, procedendo como anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned} w(t) - C(t)x &= -S(0)w'(t) + S(t)w'(0) \\ &= S(t)y, \end{aligned}$$

pois agora $w'(0) = y$.

Consequentemente, segue que $w(t) = u(t, x, y) = C(t)x + S(t)y$ para todo $t \in \mathbb{R}$. □

2.2 Equação não homogênea

Nesta seção, estudaremos o problema de valor inicial não homogêneo dado por

$$u''(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

$$u(0) = x, \tag{2.9}$$

$$u'(0) = y, \tag{2.10}$$

onde $x, y \in X$, A é o gerador infinitesimal de uma família cosseno fortemente contínua $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ e $f : \mathbb{R} \to X$ é uma função contínua.

Neste caso, o conceito de solução para o PVI $(2.8) - (2.10)$ é dado pela próxima definição.

Definição 2.5. *Uma função $u : \mathbb{R} \to X$ é solução de $(2.8) - (2.10)$ se:*

(i) $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; X)$*;*

(ii) $u(t) \in D(A)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*;*

(iii) as equações $(2.8) - (2.10)$ *são satisfeitas.*

A seguir, semelhantemente ao que fizemos na seção 2.1, veremos um resultado que relaciona uma solução do PVI $(2.8) - (2.10)$ com as famílias cosseno e seno associadas ao operador A.

Proposição 2.6. *Se u é uma solução de $(2.8) - (2.10)$, então*

$$u(t) = C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)f(s)ds,\ \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Demonstração. Seja u uma solução de $(2.8) - (2.10)$. Assim, $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; X)$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $u''(t) = Au(t) + f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $u(0) = x$ e $u'(0) = y$. Logo, procedendo como em (2.6) e (2.7), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}C(t-s)u(s) &= -AS(t-s)u(s) + C(t-s)u'(s) \\ &= -S(t-s)Au(s) + C(t-s)u'(s), \end{aligned} \tag{2.12}$$

pois A e $S(t)$ comutam quando o elemento está em $D(A)$ (ver item (h) da Proposição 1.10) e

$$\frac{d}{ds}S(t-s)u'(s) = -C(t-s)u'(s) + S(t-s)u''(s). \tag{2.13}$$

Então, integrando (2.12) e (2.13) de zero a t e usando que u satisfaz (2.9) e (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} u(t) - C(t)x &= C(0)u(t) - C(t)u(0) = \int_0^t \frac{d}{ds}C(t-s)u(s)ds \\ &= -\int_0^t S(t-s)Au(s)ds + \int_0^t C(t-s)u'(s)ds \end{aligned}$$

e

$$-S(t)y = S(0)u'(t) - S(t)u'(0) = \int_0^t \frac{d}{ds}S(t-s)u'(s)ds$$

$$= \quad -\int_0^t C(t-s)u'(s)ds + \int_0^t S(t-s)u''(s)ds,$$

isto é,

$$u(t) - C(t)x = -\int_0^t S(t-s)Au(s)ds + \int_0^t C(t-s)u'(s)ds \tag{2.14}$$

e

$$-S(t)y = -\int_0^t C(t-s)u'(s)ds + \int_0^t S(t-s)u''(s)ds. \tag{2.15}$$

Assim, somando (2.14) e (2.15), segue que

$$\begin{aligned} u(t) - C(t)x - S(t)y &= -\int_0^t S(t-s)Au(s)ds + \int_0^t S(t-s)u''(s)ds \\ &= \int_0^t S(t-s)[u''(s) - Au(s)]ds \\ &= \int_0^t S(t-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$u(t) = C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

como queríamos. □

Esse resultado garante que toda solução de (2.8) – (2.10) satisfaz a equação (2.11). Entretanto, nem toda função da forma (2.11) é uma solução de (2.8) – (2.10). A princípio, com as propriedades de $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$, $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ e f, podemos garantir apenas a continuidade de u e não a diferenciabilidade. Isso nos motiva a definir um conceito mais fraco de solução para o PVI.

Definição 2.7. *A função $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; X)$, dada por* (2.11), *é chamada solução fraca de* (2.8) – (2.10).

Notemos que o PVI (2.8) – (2.10) sempre possui uma solução fraca, para quaisquer que sejam $x, y \in X$ e, além disso, ela é única. Nosso próximo passo é encontrar condições para que a solução fraca seja uma solução do problema.

Teorema 2.8. *Seja u a solução fraca de* (2.8) – (2.10). *Se $x \in D(A)$, $y \in E$ e $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; X)$, então u é solução de* (2.8) – (2.10).

Demonstração. Pelo fato de u ser solução fraca de (2.8) – (2.10), temos

$$u(t) = C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \ t \in \mathbb{R}.$$

Para que u seja solução de (2.8) – (2.10) precisamos mostrar que:

(i) $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; X)$;

(ii) $u(t) \in D(A)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(iii) $u''(t) = Au(t) + f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(iv) $u(0) = x$;

(v) $u'(0) = y$.

A propriedade (iv) segue facilmente pela forma como u é dada, pois $u(0) = C(0)x + S(0)y + \int_0^0 S(t-s)f(s)ds = x$. Para provarmos as outras condições, temos que relembrar alguns resultados sobre as famílias seno e cosseno.

Inicialmente, como $x \in D(A)$, o item (e) da Proposição 1.10 nos garante que $C(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d^2}{dt^2}C(t)x = AC(t)x,\ t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, visto que $D(A) \subset E$, o item (d) da mesma proposição referida acima assegura que

$$\frac{d}{dt}C(t)x = AS(t)x,\ t \in \mathbb{R}.$$

Já com relação a y, pelo fato de $y \in E$ e pelo item (g) da Proposição 1.10, obtemos que $S(t)y \in D(A)$ e

$$\frac{d^2}{dt^2}S(t)y = AS(t)y,\ t \in \mathbb{R}.$$

Mais ainda, do Lema 1.8 temos $\dfrac{d}{dt}S(t)y = C(t)y$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Desse modo, para provarmos as propriedades $(i) - (iii)$ e (v), falta analisarmos a função $\displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s)ds$.

Primeiramente, como $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; X)$, notemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t S(t-s)f(s)ds &= \int_0^t S(t-s)\left[f(0) + \int_0^s f'(u)du\right]ds \\
&= \int_0^t S(t-s)f(0)ds + \int_0^t \int_0^s S(t-s)f'(u)duds \\
&= \int_0^t S(t-s)f(0)ds + \int_0^t \int_u^t S(t-s)f'(u)dsdu \\
&= \int_0^t S(t-s)f(0)ds + \int_0^t \int_0^{t-u} S(s)f'(u)dsdu.
\end{aligned}$$

Agora, vamos considerar cada uma dessas integrais separadamente.

(1) Dos itens (a), (e) e (f) da Proposição 1.4, temos $S(t-s) = S(t)C(s) - S(s)C(t)$. Dessa forma, visto que $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_0^t S(t-s)f(0)ds &= S(t)\int_0^t C(s)f(0)ds - \int_0^t S(s)[C(t)f(0)]ds \\ &= S(t)S(t)f(0) - \int_0^t S(s)[C(t)f(0)]ds. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Assim, como $f(0) \in X$, o item (c) da Proposição 1.10 garante que $S(t)f(0) \in E$ e o item (d), que $S(t)[S(t)f(0)] \in D(A)$. Mais ainda, visto que $C(t)f(0)$ não depende de s, o item (a) da mesma proposição citada acima assegura que $\displaystyle\int_0^t S(s)[C(t)f(0)]ds \in D(A)$.

Logo, segue que $\displaystyle\int_0^t S(t-s)f(0)ds \in D(A)$.

(2) Notemos, primeiramente, que na integral $\displaystyle\int_0^{t-u} S(s)f'(u)ds$, $f'(u)$ não depende de s e então, do item (a) da Proposição 1.10, obtemos que $\displaystyle\int_0^{t-u} S(s)f'(u)ds = g(u) \in D(A)$, para todo $u \in [0,t]$. Além disso, a proposição também garante que $Ag(u) = C(t-u)f'(u) - C(0)f'(u)$.

Desse modo, pelo fato de uma integral poder ser vista como o limite de somas de Riemann, podemos pensar em $\displaystyle\int_0^t \int_0^{t-u} S(s)f'(u)dsdu = \int_0^t g(u)du$ como o limite de uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A)$. Analogamente, visto que a integral $\displaystyle\int_0^t C(t-u)f'(u) - C(0)f'(u)du$ existe, pois f' é contínua, podemos pensar nela como o limite de $(Az_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Assim, como A é um operador fechado, concluímos que $\displaystyle\int_0^t g(u)du \in D(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e mais,

$$A\left(\int_0^t g(u)du\right) = A\left(\int_0^t \int_0^{t-u} S(s)f'(u)dsdu\right) = \int_0^t C(t-s)f'(u) - f'(u)du. \tag{2.17}$$

Portanto, de (1) e (2), obtemos que $\displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s)ds \in D(A)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente,

$$u(t) = C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \in D(A),\ t \in \mathbb{R},$$

assegurando a validade da propriedade (ii).

A seguir, iremos calcular $u'(t)$ e $u''(t)$. Já vimos como são as derivadas das funções $t \mapsto C(t)x$ e $t \mapsto S(t)y$. Então, mais uma vez, falta analisarmos a função $t \mapsto \displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s)ds$. Para isso, usaremos novamente que $S(t-s) = S(t)C(s) - S(s)C(t)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Além disso, usaremos o fato de $C(t), S(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o fato de $C(t)$ e $S(s)$ comutarem para quaisquer que sejam $t, s \in \mathbb{R}$, e os Lemas 1.6 e 1.8. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\int_0^t S(t-s)f(s)ds\right] &= \frac{d}{dt}\left[\int_0^t S(t)C(s)f(s)ds - \int_0^t S(s)C(t)f(s)ds\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[S(t)\left(\int_0^t C(s)f(s)ds\right)\right] - \frac{d}{dt}\left[C(t)\left(\int_0^t S(s)f(s)ds\right)\right] \\
&= \left(\frac{d}{dt}S(t)\right)\left(\int_0^t C(s)f(s)ds\right) + S(t)\left(\frac{d}{dt}\int_0^t C(s)f(s)ds\right) \\
&\quad - \left(\frac{d}{dt}C(t)\right)\left(\int_0^t S(s)f(s)ds\right) - C(t)\left(\frac{d}{dt}\int_0^t S(s)f(s)ds\right) \\
&= C(t)\int_0^t C(s)f(s)ds + S(t)C(t)f(t) - AS(t)\int_0^t S(s)f(s)ds - C(t)S(t)f(t) \\
&= \int_0^t [C(t)C(s) - AS(t)S(s)]f(s)ds.
\end{aligned}$$

Por fim, como $C(t)C(s) - AS(t)S(s) = C(t)C(-s) + AS(t)S(-s) = C(t-s)$ (ver itens (a) e (e) da Proposição 1.4 e item (j) da Proposição 1.10), temos

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^t S(t-s)f(s)ds\right] = \int_0^t C(t-s)f(s)ds. \tag{2.18}$$

Assim, segue que

$$u'(t) = AS(t)x + C(t)y + \int_0^t C(t-s)f(s)ds.$$

Em particular,

$$u'(0) = AS(0)x + C(0)y + \int_0^0 C(0-s)f(s)ds = y,$$

assegurando a validade da propriedade (v).

Ainda falta mostrarmos que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; X)$ e $u''(t) = Au(t) + f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então, voltemos a derivar a função $t \mapsto \displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s)ds$, o que significa derivar (2.18). Antes, porém, usando a integração por partes, observe que

$$\begin{aligned}
\int_0^t C(t-s)f(s)ds &= \int_0^t C(s)f(t-s)ds = \int_0^t \left(\frac{d}{ds}S(s)\right)f(t-s)ds \\
&= S(s)f(t-s)\Big|_0^t - \int_0^t S(s)\frac{d}{ds}(f(t-s))ds \\
&= S(t)f(0) - S(0)f(t) + \int_0^t S(s)f'(t-s)ds \\
&= S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s)f'(s)ds. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Assim, para obtermos a derivada segunda de $t \mapsto \int_0^t S(t-s)f(s)ds$, basta derivarmos os dois termos que aparecem em (2.19). Para o primeiro termo, aplicando o Lema 1.8, obtemos

$$\frac{d}{dt}S(t)f(0) = C(t)f(0).$$

Já a derivada do segundo termo se comporta como a derivada de $t \mapsto \int_0^t S(t-s)f(s)ds$, mas com f' no lugar de f. Desse modo, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t S(t-s)f'(s)ds\right) = \int_0^t C(t-s)f'(s)ds.$$

Consequentemente,

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^t S(t-s)f(s)ds\right) = C(t)f(0) + \int_0^t C(t-s)f'(s)ds.$$

Portanto,

$$u''(t) = AC(t)x + AS(t)y + C(t)f(0) + \int_0^t C(t-s)f'(s)ds, \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Isso nos mostra que u'' é contínua. De fato, como $x \in D(A)$, o item (e) da Proposição 1.10 garante que $AC(t)x = C(t)Ax$ e assim, pelo fato de $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ser uma família cosseno fortemente contínua, as funções $t \mapsto C(t)Ax$ e $t \mapsto C(t)f(0)$ são contínuas. Já o fato de $y \in E$ e o item (d) da Proposição 1.10 asseguram que $AS(t)y = \frac{d}{dt}C(t)y$ e então, da definição de E, $t \mapsto AS(t)y$ é contínua. Por fim, visto que a função $s \mapsto C(t-s)f'(s)$ é integrável, a função $t \mapsto \int_0^t C(t-s)f'(s)ds$ também é contínua.

Logo, obtemos que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; X)$ e então, a propriedade (i) é válida. Para concluirmos esta demonstração, mostremos que $u''(t) = Au(t) + f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Antes, porém, lembremos que

$$\int_0^t S(t-s)f(s)ds = \int_0^t S(t-s)f(0)ds + \int_0^t \int_0^{t-u} S(s)f'(u)dsdu,$$

com cada uma das integrais da direita pertencentes a $D(A)$. Desse modo, por (2.16), (2.17), pelo item (a) da Proposição 1.10 e pelas propriedades das famílias seno, temos

$$\begin{aligned} A\left(\int_0^t S(t-s)f(s)ds\right) &= A\left(S(t)S(t)f(0) - \int_0^t S(s)[C(t)f(0)]ds + \int_0^t \int_0^{t-u} S(s)f'(u)dsdu\right) \\ &= AS(t)S(t)f(0) - C(t)C(t)f(0) + C(0)C(t)f(0) + \int_0^t C(t-u)f'(u)du \\ &\quad - \int_0^t f'(u)du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -[C(t)C(t)f(0) - AS(t)S(t)f(0)] + C(t)f(0) + \int_0^t C(t-u)f'(u)du \\
&\quad -f(t) + f(0) \\
&= -(C(t)C(-t)f(0) + AS(t)S(-t)f(0)) + C(t)f(0) + \int_0^t C(t-u)f'(u)du \\
&\quad -f(t) + f(0) \\
&= -C(t-t)f(0) + C(t)f(0) + \int_0^t C(t-u)f'(u)du - f(t) + f(0) \\
&= C(t)f(0) + \int_0^t C(t-u)f'(u)du - f(t),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$C(t)f(0) + \int_0^t C(t-u)f'(u)du = A\left(\int_0^t S(t-s)f(s)ds\right) + f(t).$$

Por fim, substituindo esta expressão em (2.20), obtemos

$$\begin{aligned}
u''(t) &= AC(t)x + AS(t)y + A\left(\int_0^t S(t-s)f(s)ds\right) + f(t) \\
&= A\left[C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)f(s)ds\right] + f(t) \\
&= Au(t) + f(t),\ \ t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Portanto, a propriedade (iii) também é válida, concluindo assim a prova de que u é solução de (2.8) – (2.10). □

2.3 Equação semilinear

Nesta seção, vamos estudar o problema de existência de solução para as equações semilineares de segunda ordem descritas por

$$u''(t) = Au(t) + f(t, u(t)),\ \ t \in \mathbb{R}, \tag{2.21}$$

$$u(0) = x, \tag{2.22}$$

$$u'(0) = y, \tag{2.23}$$

onde $x, y \in X$, A é o gerador infinitesimal de uma família cosseno fortemente contínua $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ e $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é uma função apropriada.

Analogamente ao que foi feito nas seções anteriores, consideraremos o conceito de solução para (2.21) – (2.23) dado pela definição a seguir.

Definição 2.9. *Uma função $u : \mathbb{R} \to X$ é solução de* (2.21) – (2.23) *se:*

(i) $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; X)$*;*

(ii) $u(t) \in D(A)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*;*

(iii) as equações $(2.21) - (2.23)$ *são satisfeitas.*

Procedendo como na demonstração da Proposição 2.6, obtemos um resultado que relaciona a solução de $(2.21) - (2.23)$ com as famílias cosseno e seno associadas ao operador A.

Proposição 2.10. *Se* u *é uma solução de* $(2.21) - (2.23)$*, então*

$$u(t) = C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds, \; t \in \mathbb{R}. \tag{2.24}$$

Observe que nem toda função que satisfaz a equação integral (2.24) será uma solução de $(2.21) - (2.23)$ pois, apesar desta função satisfazer a propriedade (i) e a equação (2.22), as outras propriedades não são garantidas. Contudo, considerar soluções que satisfazem (2.24) proporciona certas facilidades em tratar o problema, uma vez que podemos utilizar as propriedades dos operadores $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ e $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Dessa forma, assim como fizemos na seção 2.2, definiremos o conceito de solução fraca para $(2.21) - (2.23)$.

Definição 2.11. *Uma função* $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; X)$ *que satisfaz a equação integral* (2.24) *é chamada solução fraca de* $(2.21) - (2.23)$*.*

A seguir apresentaremos um resultado de existência de solução fraca para $(2.21) - (2.23)$. Para isso, iremos considerar algumas hipóteses sobre a família $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$, a função f e as condições iniciais x e y.

Teorema 2.12. *Seja* $f : \mathbb{R} \times X \to X$ *uma função contínua e suponha que exista uma função contínua* $L : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,\widehat{x})\| \leq L(t)\|x - \widehat{x}\|, \text{ para todo } x, \widehat{x} \in X \text{ e todo } t \in \mathbb{R}.$$

Então, existe uma única solução fraca para $(2.21) - (2.23)$ *em* $\mathbb{R}$*.*

Além disso, se $x \in D(A)$*, essa solução é continuamente diferenciável.*

Demonstração. Iremos provar este resultado para intervalos da forma $[-T, T]$, com $T \in [0, +\infty)$. Assim, pela unicidade de solução, poderemos estender o resultado para $\mathbb{R}$.

Seja $T \in [0, +\infty)$. Como a função $s \mapsto S(s)z$ é contínua para todo $z \in X$ fixo, segue que $s \mapsto S(s)z$ é limitada no compacto $[-T, T]$ para todo $z \in X$, isto é, $\sup_{s\in[-T,T]} \|S(s)z\| < +\infty$ para todo $z \in X$.

Assim, pelo Princípio da Limitação Uniforme (Teorema A.4), obtemos que $\sup_{s\in[-T,T]} \|S(s)\| < +\infty$ e então, seja $M = \sup_{s\in[-T,T]} \|S(s)\|$.

Analogamente, visto que L é contínua, $\sup_{s\in[-T,T]} \|L(s)\| < +\infty$ e assim, seja $L = \sup_{s\in[-T,T]} \|L(s)\|$.

Vamos dividir essa demonstração em 3 partes: primeiramente, mostraremos que (2.21) − (2.23) possui uma solução fraca em $[-T,T]$, posteriormente, provaremos que essa solução é única e por último, assumindo que $x \in D(A)$, mostraremos que a solução fraca é continuamente diferenciável.

(1) Existência de solução:

Seja $w_0 : [-T,T] \to X$ dada por

$$w_0(t) = C(t)x + S(t)y$$

e defina $w_n : [-T,T] \to X$, $n \in \mathbb{N}$, por

$$w_n(t) = C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)f(s, w_{n-1}(s))ds.$$

Dessa forma, obtemos uma sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $\mathcal{C}([-T,T];X)$.

Além disso, como w_0 e f são contínuas, a função $s \mapsto f(s, w_0(s))$ é contínua e então, limitada em $[-T,T]$. Seja $C = \sup_{s\in[-T,T]} \|f(s, w_0(s))\|$.

Logo, tomando $t \in [-T,T]$, temos

$$\begin{aligned}
\|w_1(t) - w_0(t)\| &= \left\| C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)f(s,w_0(s))ds - C(t)x - S(t)y \right\| \\
&\leq \int_0^t \|S(t-s)\| \|f(s,w_0(s))\| ds \\
&\leq \int_0^t MCds \\
&= MC|t|.
\end{aligned}$$

Semelhantemente, para w_2 e w_1, obtemos

$$\begin{aligned}
\|w_2(t) - w_1(t)\| &= \left\| C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)f(s,w_1(s)ds) - C(t)x - S(t)y \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^t S(t-s)f(s,w_0(s))ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|S(t-s)\| \|f(s,w_1(s)) - f(s,w_0(s))\| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t ML(s)\|w_1(s)-w_0(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t MLMC|s|ds \\
&= LCM^2\int_0^t |s|ds \\
&= LCM^2\frac{|t|^2}{2}.
\end{aligned}$$

Desse modo, por um processo indutivo, segue que

$$\|w_{n+1}(t)-w_n(t)\| \leq \frac{CL^nM^{n+1}|t|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{CL^nM^{n+1}T^{n+1}}{(n+1)!},\ n\in\mathbb{N},\ t\in[-T,T].$$

Mais ainda, pelo teste de D'Alembert, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{CL^nM^{n+1}T^{n+1}}{(n+1)!}$ é convergente, isto é, dado $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{CL^nM^{n+1}T^{n+1}}{(n+1)!}<\varepsilon.$

Assim, se $n,m\in\mathbb{N}$, $n>m\geq n_0$, temos

$$\begin{aligned}
\|w_n(t)-w_m(t)\| &\leq \|w_n(t)-w_{n-1}(t)\|+\ldots+\|w_{m+1}(t)-w_m(t)\| \\
&\leq \sum_{i=m}^{n-1}\frac{CL^iM^{i+1}T^{i+1}}{(i+1)!} \\
&\leq \sum_{i=n_0}^{\infty}\frac{CL^iM^{i+1}T^{i+1}}{(i+1)!} \\
&< \varepsilon,\ t\in[-T,T],
\end{aligned}$$

ou seja, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach $\mathcal{C}([-T,T];X)$, pois a limitação acima é uniforme com relação a $t\in[-T,T]$.

Portanto, existe $w\in\mathcal{C}([-T,T];X)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$ na norma $\|\cdot\|_\infty$, onde $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{s\in[-T,T]}\|\varphi(s)\|$ para $\varphi\in\mathcal{C}([-T,T];X)$.

Mostremos agora que w satisfaz a equação integral (2.24), sendo assim uma solução fraca de (2.21) – (2.23). Para todo $t\in[-T,T]$, segue que

$$\begin{aligned}
&\left\|w(t)-C(t)x-S(t)y-\int_0^t S(t-s)f(s,w(s))ds\right\| \\
&= \left\|w(t)-w_n(t)+\int_0^t S(t-s)f(s,w_{n-1}(s))ds-\int_0^t S(t-s)f(s,w(s))ds\right\| \\
&\leq \|w(t)-w_n(t)\|+\left|\int_0^t \|S(t-s)\|\|f(s,w_{n-1}(s))-f(s,w(s))\|ds\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|w-w_n\|_\infty + \left|\int_0^t ML\|w_{n-1}(s)-w(s)\|ds\right| \\
&\leq \|w-w_n\|_\infty + ML\left|\int_0^t \|w_{n-1}-w\|_\infty ds\right| \\
&\leq \|w-w_n\|_\infty + ML\|w_{n-1}-w\|_\infty T,
\end{aligned}$$

com a desigualdade sendo válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consequentemente, visto que w_n converge para w na norma $\|\cdot\|_\infty$, fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$w(t) = C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)f(s,w(s))ds,\ t \in [-T,T],$$

isto é, o problema (2.21) – (2.23) possui uma solução fraca em $[-T,T]$.

(2) Unicidade de solução:

Na verdade, mostraremos mais que a unicidade, provaremos que as soluções fracas de (2.21) – (2.23) possuem dependência contínua com relação às condições iniciais (2.22) e (2.23), uniformemente no intervalo $[-T,T]$.

Para isso, sejam w_1 e w_2 soluções fracas de (2.21) em $[-T,T]$, com $w_1(0)=x$, $w_1'(0)=y$, $w_2(0)=\widehat{x}$ e $w_2'(0)=\widehat{y}$, e $x,\widehat{x},y,\widehat{y} \in X$. Assim, para todo $t \in [-T,T]$, temos

$$\begin{aligned}
\|w_1(t)-w_2(t)\| &= \Bigg\|C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)f(s,w_1(s))ds - C(t)\widehat{x} - S(t)\widehat{y} \\
&\quad - \int_0^t S(t-s)f(s,w_2(s))ds\Bigg\| \\
&\leq \|C(t)(x-\widehat{x})\| + \|S(t)(y-\widehat{y})\| \\
&\quad + \int_0^t \|S(t-s)\|\|f(s,w_1(s))-f(s,w_2(s))\|ds.
\end{aligned}$$

Mais ainda, usando as constantes definidas previamente e o item (g) da Proposição 1.4,

$$\begin{aligned}
\|w_1(t)-w_2(t)\| &\leq Ke^{w|t|}\|x-\widehat{x}\| + M\|y-\widehat{y}\| + \int_0^t ML\|w_1(s)-w_2(s)\|ds \\
&\leq Ke^{wT}\|x-\widehat{x}\| + M\|y-\widehat{y}\| + \int_0^t ML\|w_1(s)-w_2(s)\|ds,\ t \in [-T,T].
\end{aligned}$$

Logo, pela Desigualdade de Gronwall (Teorema A.2), concluímos que

$$\|w_1(t)-w_2(t)\| \leq (Ke^{wT}\|x-\widehat{x}\| + M\|y-\widehat{y}\|)\left(e^{\int_0^t MLds}\right)$$

$$= \widehat{C}(\|x-\widehat{x}\|+\|y-\widehat{y}\|)e^{\gamma t},\ t\in[-T,T], \tag{2.25}$$

onde $\widehat{C}=\max\{Ke^{wT},M\}$ e $\gamma=ML$.

Consequentemente, se w_1 e w_2 são soluções do PVI (2.21) – (2.23), com $x=\widehat{x}$ e $y=\widehat{y}$, então, de (2.25), teremos

$$\|w_1(t)-w_2(t)\|=0,\ \forall t\in[-T,T],$$

isto é, $w_1=w_2$.

(3) Se $x\in D(A)$, a solução fraca w é continuamente diferenciável:

Para provarmos este fato, usaremos as propriedades de derivada das famílias seno e cosseno e o fato de $x\in D(A)$. Dessa forma, como $x\in D(A)$ e $D(A)\subset E$, segue dos itens (d) e (h) da Proposição 1.10 que $\dfrac{d}{dt}C(t)x=AS(t)x=S(t)Ax$. Além disso, do Lema 1.8, temos $\dfrac{d}{dt}S(t)y=C(t)y$. Já para o cálculo da derivada da função $t\mapsto\displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s,w(s))ds$, iremos proceder como na demonstração do Teorema 2.8, isto é

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\int_0^t S(t-s)f(s,w(s))ds\right]=\frac{d}{dt}\left[\int_0^t S(t)C(s)f(s,w(s))ds-\int_0^t S(s)C(t)f(s,w(s))ds\right]\\
=\ &\frac{d}{dt}\left[S(t)\int_0^t C(s)f(s,w(s))ds\right]-\frac{d}{dt}\left[C(t)\int_o^t S(s)f(s,w(s))ds\right]\\
=\ &\left(\frac{d}{dt}S(t)\right)\left(\int_0^t C(s)f(s,w(s))ds\right)+S(t)\left(\frac{d}{dt}\int_0^t C(s)f(s,w(s))ds\right)\\
&-\left(\frac{d}{dt}C(t)\right)\left(\int_0^t S(s)f(s,w(s))ds\right)-C(t)\left(\frac{d}{dt}\int_0^t S(s)f(s,w(s))ds\right)\\
=\ &\int_0^t C(t)C(s)f(s,w(s))ds+S(t)C(t)f(t,w(t))-\int_0^t AS(t)S(s)f(s,w(s))ds\\
&-C(t)S(t)f(t,w(t))\\
=\ &\int_0^t[C(t)C(s)-AS(t)S(s)]f(s,w(s))ds\\
=\ &\int_0^t[C(t)C(-s)+AS(t)S(-s)]f(s,w(s))ds\\
=\ &\int_0^t C(t-s)f(s,w(s))ds.
\end{aligned}$$

Logo, a solução fraca w é derivável e

$$w'(t)=S(t)Ax+C(t)y+\int_0^t C(t-s)f(s,w(s))ds,\ t\in[-T,T].$$

Observemos que cada uma das funções que compõe w' é contínua e, então, concluímos que w

é continuamente diferenciável.

Portanto, de (1) e (2) obtemos a existência de uma única solução fraca para o PVI (2.21) – (2.23). Além disso, de (3), obtemos que, se $x \in D(A)$, então a solução fraca é continuamente diferenciável. $\square$

Capítulo

3

Existência de solução quase automórfica

Estudaremos o problema de existência de solução fraca quase automórfica para equações diferenciais abstratas de segunda ordem, tanto para o caso linear não homogêneo como para o caso semilinear em três seções: na primeira, apresentaremos o conceito e algumas propriedades básicas das funções quase automórficas, na segunda e terceira seções, consideraremos o caso linear não homogêneo e o semilinear, respectivamente.

A primeira seção do capítulo foi baseada nos livros [27, 36] e os resultados das outras seções são inéditos.

3.1 Funções quase automórficas

As funções quase automórficas apareceram na literatura matemática no início da década de 1960, com os trabalhos de S. Bochner, e são uma generalização das funções quase periódicas, que apareceram na literatura um pouco antes, na década de 1920. Inicialmente, as funções quase periódicas foram definidas por H. Bohr apenas para funções com valores reais. Mais tarde, Bochner considerou funções com valores em espaços métricos e, além disso, enfraqueceu esse conceito para criar a classe de funções quase automórficas.

Como dito anteriormente, nesta seção vamos apresentar a definição e algumas propriedades básicas das funções quase automórficas, uma vez que esse tipo de função terá papel fundamental nas próximas seções. Além disso, para que este conceito fique claro, iremos primeiramente definir as funções quase periódicas.

Inicialmente, vamos considerar X como sendo um espaço normado e, no decorrer da seção, vamos adicionar a hipótese de X como espaço de Banach quando necessário.

Definição 3.1. *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to X$ é chamada quase periódica se, dado $\varepsilon > 0$, existe um número positivo $l = l(\varepsilon)$ tal que, em qualquer intervalo de comprimento l, existe ξ com a seguinte propriedade*

$$\|f(t+\xi) - f(t)\| \leq \varepsilon, \ t \in \mathbb{R}.$$

Observação 3.2. *O número ξ que aparece na definição acima é chamado de ε-quase período de f.*

Denotaremos por $AP(X)$ o espaço das funções quase periódicas de $\mathbb{R}$ em X e, a seguir, enunciaremos algumas propriedades básicas referentes à essas funções (para maiores detalhes citamos o livro [36]).

Teorema 3.3. *Assuma que f, f_1 e f_2 são funções quase periódicas e λ é um escalar qualquer, então:*

(i) $\lambda f, f_1 + f_2$ *são funções quase periódicas;*

(ii) *a translação f_a, $a \in \mathbb{R}$, dada por $f_a(t) = f(t+a)$, $t \in \mathbb{R}$, também é uma função quase periódica;*

(iii) *a função $\tilde{f}$, definida por $\tilde{f}(t) = f(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, é quase periódica.*

Proposição 3.4. *Se $f : \mathbb{R} \to X$ é quase periódica, então a função $t \mapsto \|f(t)\|$ é também quase periódica.*

Proposição 3.5. *Se $f : \mathbb{R} \to X$ é quase periódica, então f é limitada.*

Proposição 3.6. *Se $f : \mathbb{R} \to X$ é quase periódica, então f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.*

Proposição 3.7. *Se $f : \mathbb{R} \to X$ é quase periódica, então, dada qualquer sequência de números reais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos extrair uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} f(t + s_{n_k}) = g(t) \quad e \quad \lim_{k\to\infty} g(t - s_{n_k}) = f(t),$$

uniformemente para t em $\mathbb{R}$.

O próximo resultado apresenta condições para que a convergência de funções quase periódicas ainda seja uma função quase periódica.

Teorema 3.8. *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções quase periódicas e $f_n \to f$ uniformemente em $\mathbb{R}$, quando $n \to \infty$, então f é quase periódica.*

Já o teorema a seguir nos diz quando $AP(X)$ é um espaço de Banach.

Teorema 3.9. *Se X é um espaço de Banach e a norma do espaço $AP(X)$ é a norma do supremo, isto é, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$, então $(AP(X), \|.\|_\infty)$ é um espaço de Banach.*

Na sequência, passaremos a considerar as funções quase automórficas.

Definição 3.10. *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to X$ é chamada quase automórfica se, para qualquer sequência de números reais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos extrair uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} f(t+s_{n_k}) = g(t) \quad e \quad \lim_{k\to\infty} g(t-s_{n_k}) = f(t), \ t\in\mathbb{R}.$$

Observação 3.11. *Ao comparar as funções quase automórficas com as quase periódicas, notemos que a generalização ocorre por conta da Proposição 3.7.*

Denotaremos o conjunto das funções quase automóficas de $\mathbb{R}$ em X por $AA(X)$ e, a seguir, apresentaremos algumas de suas propriedades.

Exemplo 3.12. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(t) = sen\left(\frac{1}{2+sen(t)+sen(\sqrt{2}t)}\right)$$

é um exemplo clássico de função quase automórfica que não é quase periódica.

Seu gráfico pode ser visto a seguir.

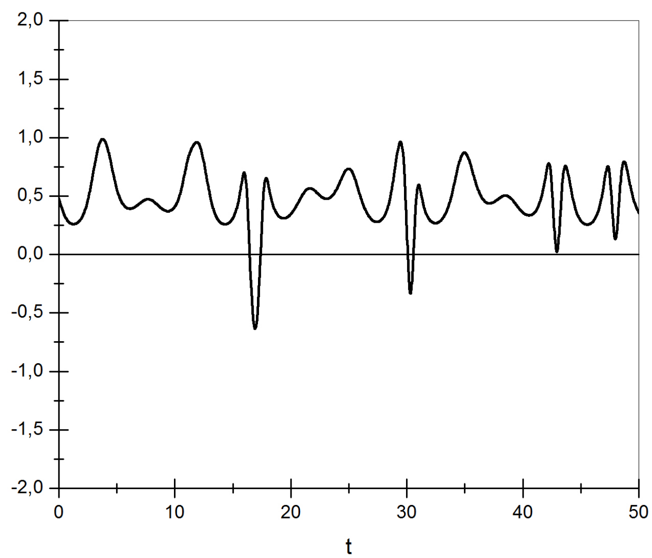

Figura 3.1: Gráfico da função $f(t) = sen\left(\frac{1}{2+sen(t)+sen(\sqrt{2}t)}\right)$.

Teorema 3.13. *Sejam f, f_1, f_2 funções quase automórficas e λ um escalar qualquer, então:*

(i) λf é uma função quase automórfica;

(ii) $f_1 + f_2$ *é uma função quase automórfica;*

(iii) *para* $a \in \mathbb{R}$, *a translação* f_a, *dada por* $f_a(t) = f(t+a)$, $t \in \mathbb{R}$, *é uma função quase automórfica;*

(iv) *a função* $\tilde{f}$, *definida por* $\tilde{f}(t) = f(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, *é quase automórfica;*

(v) *A imagem de* f, Im_f, *é pré-compacta;*

(vi) f *é limitada.*

Demonstração. *(i)* Seja f uma função quase automórfica. Então, dada uma sequência de números reais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para todo t real,

$$\lim_{k\to\infty} f(t + s_{n_k}) = g(t) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} g(t - s_{n_k}) = f(t).$$

Assim, para um escalar qualquer λ, temos

$$\lim_{k\to\infty} \lambda f(t + s_{n_k}) = \lambda g(t) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \lambda g(t - s_{n_k}) = \lambda f(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, λf é uma função quase automórfica.

(ii) Sejam f_1 e f_2 funções quase automórficas e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Como f_1 é quase automórfica, existe uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f_1(t + s_{n_k}) = g_1(t) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} g_1(t - s_{n_k}) = f_1(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Agora, considerando a sequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e o fato de f_2 ser quase automórfica, podemos extrair uma subsequência $(s_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} f_2(t + s_{n_{k_i}}) = g_2(t) \quad \text{e} \quad \lim_{i\to\infty} g_2(t - s_{n_{k_i}}) = f_2(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Logo, existe uma subsequência $(s_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que

$$\lim_{i\to\infty} (f_1 + f_2)(t + s_{n_{k_i}}) = \lim_{i\to\infty} f_1(t + s_{n_{k_i}}) + \lim_{i\to\infty} f_2(t + s_{n_{k_i}}) = g_1(t) + g_2(t), \ t \in \mathbb{R},$$

e

$$\lim_{i\to\infty} (g_1 + g_2)(t - s_{n_{k_i}}) = \lim_{i\to\infty} g_1(t - s_{n_{k_i}}) + \lim_{i\to\infty} g_2(t - s_{n_{k_i}}) = f_1(t) + f_2(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, segue que $f_1 + f_2$ é uma função quase automórfica.

(iii) Dado $a \in \mathbb{R}$, considere a translação f_a dada por $f_a(t) = f(t+a)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais, como f é quase automórfica, sabemos que existe uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f(t+s_{n_k}) = g(t) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} g(t-s_{n_k}) = f(t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, tomando $t = s + a$, com $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{k\to\infty} f_a(s+s_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(a+s+s_{n_k}) = g(a+s) = g_a(s),\ \ s \in \mathbb{R},$$

e

$$\lim_{k\to\infty} g_a(s-s_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} g(a+s-s_{n_k}) = f(a+s) = f_a(s),\ \ s \in \mathbb{R},$$

o que garante que a função f_a é quase automórfica.

(iv) Dada uma sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, considere a sequência $(-s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Assim, como f é uma função quase automórfica, podemos extrair uma subsequência $(-s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(-s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f(t+(-s_{n_k})) = g(t) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} g(t-(-s_{n_k})) = f(t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, segue que

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{f}(s+s_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(-s-s_{n_k}) = g(-s) = \tilde{g}(s),\ \ s \in \mathbb{R},$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{g}(s-s_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} g(-s+s_{n_k}) = f(-s) = \tilde{f}(s),\ \ s \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\tilde{f}$ também é uma função quase automórfica.

(v) Para mostrarmos que a imagem de f é pré-compacta, considere uma sequência $(f(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ em Im_f. Então, como $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais e f é uma função quase automórfica, podemos extrair uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que

$$\lim_{k\to\infty} f(s_{n_k}) = g(0).$$

Desse modo, segue que a sequência $(f(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente, o que nos garante que a imagem de f é pré-compacta.

(vi) Seja f uma função quase automórfica e suponhamos, por absurdo, que f não seja limitada. Então, existe uma sequência de números reais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|f(s_n)\| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, como f é uma função quase automórfica, podemos extrair uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f(s_{n_k}) = g(0).$$

Logo, obtemos a limitação da sequência $(f(s_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$, o que gera uma contradição.

Portanto, segue que f é limitada.

$\square$

Proposição 3.14. *[27, Proposition 1.32, pág. 14] Para uma função f quase automórfica e g seu limite, temos:*

(i) $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$;

(ii) $Im_g \subseteq \overline{Im_f}$.

Notemos que, pela proposição acima, a função g também é limitada.

Proposição 3.15. *Sejam $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to X$ quase automórficas. Então a função $\phi f : \mathbb{R} \to X$ definida por $(\phi f)(t) = \phi(t)f(t)$ é quase automórfica.*

Demonstração. Como ϕ e f são funções quase automórficas, o item (vi) do Teorema 3.13 nos garante que ϕ e f são limitadas. Desse modo, sejam $K_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\phi(t)|$ e $K_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$.

Agora, seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Então, podemos extrair uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \phi(t + s_{n_k}) = \varphi(t) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi(t - s_{n_k}) = \phi(t), \; t \in \mathbb{R},$$

e

$$\lim_{k\to\infty} f(t + s_{n_k}) = g(t) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} g(t - s_{n_k}) = f(t), \; t \in \mathbb{R}.$$

Notemos também que, pela Proposição 3.14, $K_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\phi(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|$ e $K_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t)\|$.

Além disso, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, podemos escrever

$$\phi(t + s_{n_k})f(t + s_{n_k}) - \varphi(t)g(t) = \phi(t + s_{n_k})f(t + s_{n_k}) - \phi(t + s_{n_k})g(t) + \phi(t + s_{n_k})g(t) - \varphi(t)g(t)$$

e assim, obtemos

$$\begin{aligned}\|\phi(t+s_{n_k})f(t+s_{n_k})-\varphi(t)g(t)\| &\leq \|\phi(t+s_{n_k})f(t+s_{n_k})-\phi(t+s_{n_k})g(t)\| \\ &\quad +\|\phi(t+s_{n_k})g(t)-\varphi(t)g(t)\| \\ &\leq |\phi(t+s_{n_k})|\|f(t+s_{n_k})-g(t)\|+\|g(t)\||\phi(t+s_{n_k})-\varphi(t)| \\ &\leq K_1\|f(t+s_{n_k})-g(t)\|+K_2|\phi(t+s_{n_k})-\varphi(t)|.\end{aligned}$$

Logo, tomando o limite quando k tende ao infinito na desigualdade acima, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty}\phi(t+s_{n_k})f(t+s_{n_k})=\varphi(t)g(t),\ t\in\mathbb{R}.$$

Analogamente, mostraremos que

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(t-s_{n_k})g(t-s_{n_k})=\phi(t)f(t),\ t\in\mathbb{R}.$$

De fato, para todo $t\in\mathbb{R}$ e $k\in\mathbb{N}$, temos

$$\varphi(t-s_{n_k})g(t-s_{n_k})-\phi(t)f(t)=\varphi(t-s_{n_k})g(t-s_{n_k})-\varphi(t-s_{n_k})f(t)+\varphi(t-s_{n_k})f(t)-\phi(t)f(t).$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\|\varphi(t-s_{n_k})g(t-s_{n_k})-\phi(t)f(t)\| &\leq \|\varphi(t-s_{n_k})g(t-s_{n_k})-\varphi(t-s_{n_k})f(t)\| \\ &\quad +\|\varphi(t-s_{n_k})f(t)-\phi(t)f(t)\| \\ &\leq |\varphi(t-s_{n_k})|\|g(t-s_{n_k})-f(t)\|+|\varphi(t-s_{n_k})-\phi(t)|\|f(t)\| \\ &\leq K_1\|g(t-s_{n_k})-f(t)\|+K_2|\varphi(t-s_{n_k})-\phi(t)|,\end{aligned}$$

e assim, fazendo k tender ao infinito na desigualdade acima, obtemos

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(t-s_{n_k})g(t-s_{n_k})=\phi(t)f(t),\ t\in\mathbb{R}.$$

Portanto, a função ϕf é quase automórfica. □

Teorema 3.16. *Sejam X e Y dois espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, respectivamente, e $f:\mathbb{R}\to X$ uma função quase automórfica. Se $\phi:X\to Y$ é uma função contínua, então a função composta $\phi\circ f:\mathbb{R}\to Y$ é quase automórfica.*

Demonstração. Como f é quase automórfica, o item (v) do Teorema 3.13 nos assegura que $\overline{Im_f}$ é um subconjunto compacto em X. Assim, ao considerarmos a função ϕ restrita a $\overline{Im_f}$, temos uma função uniformemente contínua e então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\|_Y < \varepsilon \ \ x_1, x_2 \in \overline{Im_f}, \quad \text{com} \quad \|x_1 - x_2\|_X < \delta.$$

Por outro lado, dada uma sequência arbitrária $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, o fato de f ser quase automórfica garante que existe uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f(t + s_{n_k}) = g(t) \ \text{ e } \ \lim_{k\to\infty} g(t - s_{n_k}) = f(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, notemos que ϕ está bem definida em Im_g pois, pela Proposição 3.14, temos $Im_g \subseteq \overline{Im_f}$. Desse modo, para $\delta > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 = k_0(t)$ tal que, se $k > k_0$, então

$$\|f(t + s_{n_k}) - g(t)\|_X < \delta.$$

Logo, segue que

$$\|\phi(f(t + s_{n_k})) - \phi(g(t))\|_Y < \varepsilon, \ k > k_0.$$

Consequentemente, fazendo k tender ao infinito e observando que a relação acima é válida para todo $t \in \mathbb{R}$, ainda que pontualmente, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \phi(f(t + s_{n_k})) = \phi(g(t)), \ t \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, mostraremos que

$$\lim_{k\to\infty} \phi(g(t - s_{n_k})) = \phi(f(t)), \ t \in \mathbb{R}.$$

De fato, para $\delta > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 = k_1(t)$, tal que, para $k > k_1$, temos

$$\|g(t - s_{n_k}) - f(t)\|_X < \delta, \ t \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\|\phi(g(t - s_{n_k})) - \phi(f(t))\|_Y < \varepsilon, \ k > k_1,$$

o que nos permite concluir que

$$\lim_{k\to\infty} \phi(g(t - s_{n_k})) = \phi(f(t)),\ t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\phi \circ f$ é uma função quase automórfica. □

O próximo resultado apresenta condições para que o limite de funções quase automórficas ainda seja uma função quase automórfica.

Teorema 3.17. *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência de funções quase automórficas e $f_n \to f$ uniformemente em $\mathbb{R}$ quando $n \to \infty$, então f será quase automórfica.*

Demonstração. Seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência real arbitrária. Vamos utilizar o método da diagonal de Cantor para extrair uma subsequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f_i(t + s_{n_k}) = g_i(t),\ t \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

e

$$\lim_{k\to\infty} g_i(t - s_{n_k}) = f_i(t),\ t \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Nesse sentido, como, por hipótese, f_1 é uma função quase automórfica, existe uma subsequência $(s_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_1(t + s_n^{(1)}) = g_1(t) \text{ e } \lim_{n\to\infty} g_1(t - s_n^{(1)}) = f_1(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Agora, considerando a sequência $(s_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ e o fato de f_2 também ser uma função quase automórfica, podemos extrair uma subsequência $(s_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(s_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_2(t + s_n^{(2)}) = g_2(t) \text{ e } \lim_{n\to\infty} g_2(t - s_n^{(2)}) = f_2(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Prosseguindo desse modo, dada a sequência $(s_n^{(i-1)})_{n\in\mathbb{N}}$, como f_i é uma função quase automórfica, existe uma subsequência $(s_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}} \subset (s_n^{(i-1)})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_i(t + s_n^{(i)}) = g_i(t) \text{ e } \lim_{n\to\infty} g_i(t - s_n^{(i)}) = f_i(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Assim, considerando a sequência diagonal $(s_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, temos $(s_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset (s_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}} \subset (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo os limites

$$\lim_{n\to\infty} f_i(t + s_n^{(n)}) = g_i(t),\ t \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} g_i(t - s_n^{(n)}) = f_i(t),\ t \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}.$$

Por simplicidade, denotemos a sequência $(s_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ por $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Assim valem (3.1) e (3.2).

A seguir, provaremos que a sequência de funções limitadas $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy com relação a norma da convergência uniforme em $\mathbb{R}$.

De fato, dado $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\|g_i(t) - g_j(t)\| \leq \|g_i(t) - f_i(t + s_{n_k})\| + \|f_i(t + s_{n_k}) + f_j(t + s_{n_k})\| + \|f_j(t + s_{n_k}) - g_j(t)\|,\ i, j, k \in \mathbb{N}.$$

Além disso, dado $\varepsilon > 0$, pela convergência uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos encontrar $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i, j > N$,

$$\|f_i(t + s_{n_k}) - f_j(t + s_{n_k})\| < \frac{\varepsilon}{3},\ t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

Assim, quando $i, j > N$,

$$\|g_i(t) - g_j(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|g_i(t) - f_i(t + s_{n_k})\| + \|f_j(t + s_{n_k}) - g_j(t)\|,\ t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$$

Logo, tomando o limite quando $n \to \infty$ em ambos os lados da desigualdade acima obtemos

$$\|g_i(t) - g_j(t)\| \leq \varepsilon,\ i, j \geq N,$$

onde t pode ser qualquer número real e N independe de t. Dessa forma, temos a convergência uniforme da sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na reta real.

Seja $g : \mathbb{R} \to X$ o limite uniforme da sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Provaremos que

$$\lim_{k\to\infty} f(t + s_{n_k}) = g(t) \text{ e } \lim_{k\to\infty} g(t - s_{n_k}) = f(t),\ t \in \mathbb{R},$$

garantindo assim que f é uma função quase automórfica.

Para isso, dados $t \in \mathbb{R}$ e s_{n_k} na sequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, temos

$$\|f(t + s_{n_k}) - g(t)\| \leq \|f(t + s_{n_k}) - f_i(t + s_{n_k})\| + \|f_i(t + s_{n_k}) - g_i(t)\| + \|g_i(t) - g(t)\|,\ i \in \mathbb{N}.$$

Mais ainda, para $\varepsilon > 0$ arbitrário, da convergência uniforme das sequências $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos encontrar $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f(t+s_{n_k}) - f_M(t+s_{n_k})\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } \|g_M(t) - g(t)\| < \frac{\varepsilon}{3},\ t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$$

Assim, segue que

$$\|f(t+s_{n_k}) - g(t)\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|f_M(t+s_{n_k}) - g_M(t)\|,\ t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

Agora, por (3.1), para todo t real, podemos encontrar um número natural $K = K(t, M)$ tal que, para todo $k > K$, temos

$$\|f_M(t+s_{n_k}) - g_M(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo, se $k > K$, então

$$\|f(t+s_{n_k}) - g(t)\| < \varepsilon,$$

ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} f(t+s_{n_k}) = g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Analogamente, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos

$$\|g(t-s_{n_k}) - f(t)\| \leq \|g(t-s_{n_k}) - g_i(t-s_{n_k})\| + \|g_i(t-s_{n_k}) - f_i(t)\| + \|f_i(t) - f(t)\|$$

e, como visto anteriormente, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|g(t-s_{n_k}) - g_M(t-s_{n_k})\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } \|f_M(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{3},\ t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

Desse modo, segue que

$$\|g(t-s_{n_k}) - f(t)\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|g_M(t-s_{n_k}) - f_M(t)\|,\ t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

Em seguida, dado $t \in \mathbb{R}$, de (3.2), podemos encontrar um número natural $\tilde{K} = \tilde{K}(t, M)$ tal que

$$\|g_M(t-s_{n_k}) - f_M(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3},\ k > \tilde{K}.$$

Finalmente, se $k > \tilde{K}$, então

$$\|g(t-s_{n_k}) - f(t)\| < \varepsilon,$$

isto é, $\lim\limits_{k\to\infty} g(t-s_{n_k}) = f(t)$, para todo t real.

Portanto, f também é uma função quase automórfica.

$\square$

Teorema 3.18. *Se X é um espaço de Banach e $AA(X)$ é munido da norma do supremo*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|,$$

então $(AA(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $AA(X)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq n_0$, então

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Em particular, para $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\|f_n(t) - f_m(t)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f_n(t) - f_m(t)\| = \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2},\ n, m \geq n_0,$$

ou seja, $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X para cada número real t.

Desse modo, visto que, por hipótese, X é um espaço de Banach, o limite $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$ existe para cada $t \in \mathbb{R}$ e então, podemos definir a função $f : \mathbb{R} \to X$ por $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$.

A seguir mostraremos que $f_n \to f$, quando $n \to \infty$, na norma $\|\cdot\|_\infty$ e que $f \in AA(X)$. Para isso, observando o que foi feito anteriormente, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq n_0$, então

$$\|f_n(t) - f_m(t)\| < \frac{\varepsilon}{2},\ t \in \mathbb{R}.$$

Assim, fixando $n \geq n_0$ e fazendo $m \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$\|f_n(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2},\ t \in \mathbb{R}.$$

Logo, para $n \geq n_0$,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f_n(t) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

garantindo que $f_n \to f$ na norma $\|\cdot\|_\infty$.

Além disso, pela definição de $\|\cdot\|_\infty$, segue que $f_n \to f$ uniformemente em $\mathbb{R}$ e então, como f_n é quase automórfica para todo $n \in \mathbb{N}$, o Teorema 3.17 nos permite concluir que f é uma função quase automórfica.

Portanto, $(AA(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. $\square$

Na sequência, estenderemos o conceito de função quase automórfica para funções de duas variáveis.

Definição 3.19. *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é quase automórfica em $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$ se, para toda sequência de números reais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} f(t + s_{n_k}, x) = g(t, x) \text{ e } \lim_{k\to\infty} g(t - s_{n_k}, x) = f(t, x),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e cada $x \in X$.

Teorema 3.20. *Se $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é uma função quase automórfica em $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$ e se f é lipschitziana em x uniformemente em t, então a função g, limite de f, satisfaz a mesma condição de Lipschitz que a função f.*

Demonstração. Seja $L > 0$ a constante de Lipschitz da função f, isto é, para cada $x, y \in X$,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| < L\|x - y\|,$$

uniformemente para $t \in \mathbb{R}$.

Além disso, como f é quase automórfica em $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$, dados $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ e uma sequência de números reais qualquer $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos extrair uma subsequência $(s_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|g(t, x) - f(t + s_{n_k}, x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \|g(t, y) - f(t + s_{n_k}, y)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para k suficientemente grande.

Dessa forma, como

$$g(t, x) - g(t, y) = g(t, x) - f(t + s_{n_k}, x) + f(t + s_{n_k}, x) - f(t + s_{n_k}, y) + f(t + s_{n_k}, y) - g(t, y),$$

para k suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned} \|g(t, x) - g(t, y)\| &\leq \|g(t, x) - f(t + s_{n_k}, x)\| + \|f(t + s_{n_k}, x) - f(t + s_{n_k}, y)\| \\ &\quad + \|f(t + s_{n_k}, y) - g(t, y)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + L\|x - y\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon + L\|x - y\|. \end{aligned}$$

Logo, visto que ε pode ser tomado arbitrariamente pequeno, concluímos que

$$\|g(t, x) - g(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \ x, y \in X,$$

ou seja, g é lipschitziana em x, uniformemente em t, com constante de Lipschitz $L > 0$. $\square$

Teorema 3.21. *Seja $f : \mathbb{R} \times X \to X$ uma função quase automórfica em t para cada $x \in X$ e suponha que f é lipschitziana em x uniformemente em $t \in \mathbb{R}$. Se $\varphi : \mathbb{R} \to X$ é quase automórfica, então a função $F : \mathbb{R} \to X$, definida por $F(t) = f(t, \varphi(t))$, é quase automórfica.*

Demonstração. Seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Então, visto que f e φ são quase automórficas, podemos extrair uma subsequência $(s_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $\lim_{k\to\infty} f(t + s_{n_k}, x) = g(t, x)$, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$;

(ii) $\lim_{k\to\infty} \varphi(t + s_{n_k}) = \phi(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$;

(iii) $\lim_{k\to\infty} g(t - s_{n_k}, x) = f(t, x)$, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$;

(iv) $\lim_{k\to\infty} \phi(t - s_{n_k}) = \varphi(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Consideremos agora a função $G : \mathbb{R} \to X$ definida por $G(t) = g(t, \phi(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Mostraremos que $\lim_{k\to\infty} F(t + s_{n_k}) = G(t)$ e $\lim_{k\to\infty} G(t - s_{n_k}) = F(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para isso, observamos inicialmente que, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$

$$F(t + s_{n_k}) - G(t) = f(t + s_{n_k}, \varphi(t + s_{n_k})) - f(t + s_{n_k}, \phi(t)) + f(t + s_{n_k}, \phi(t)) - g(t, \phi(t)).$$

Mais ainda, como f é lipschitziana, suponhamos que com constante de Lipschitz $L > 0$, temos

$$\|F(t + s_{n_k}) - G(t)\| \quad \leq \quad L\|\varphi(t + s_{n_k}) - \phi(t)\| + \|f(t + s_{n_k}, \phi(t)) - g(t, \phi(t))\|, \; t \in \mathbb{R}, \; k \in \mathbb{N}.$$

Assim, visto que valem os limites (i) e (ii), fixando $t \in \mathbb{R}$ e fazendo k tender ao infinito na desigualdade acima, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \|F(t + s_{n_k}) - G(t)\| = 0,$$

isto é,

$$\lim_{k\to\infty} F(t + s_{n_k}) = G(t), \; t \in \mathbb{R}.$$

Similarmente, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, temos

$$G(t - s_{n_k}) - F(t) = g(t - s_{n_k}, \phi(t - s_{n_k})) - g(t - s_{n_k}, \varphi(t)) + g(t - s_{n_k}, \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)).$$

Além disso, como g é limite de f e f é lipschitziana, segue do Teorema 3.20 que g também é lipschitziana, com a mesma constante de Lipschitz que f e então,

$$\|G(t-s_{n_k})-F(t)\| \leq L\|\phi(t-s_{n_k})-\varphi(t)\| + \|g(t-s_{n_k},\varphi(t))-f(t,\varphi(t))\|.$$

Logo, fixando $t \in \mathbb{R}$ e fazendo k tender ao infinito na desigualdade acima, pelos limites (iii) e (iv), obremos que

$$\lim_{k\to\infty} \|G(t-s_{n_k})-F(t)\| = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} G(t-s_{n_k}) = F(t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, F é quase automórfica. □

3.2 Soluções fracas quase automórficas para equações diferenciais de segunda ordem não homogêneas

Ao longo desta seção vamos considerar um espaço de Banach X e a seguinte equação diferencial

$$x''(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

onde $x(t) \in X$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de uma família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados em X e $f : \mathbb{R} \to X$ é uma função apropriada.

Nosso objetivo é garantir a existência e a unicidade de soluções fracas quase automórficas para esta equação. Para isso, iremos assumir que a família cosseno $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$, gerada por A, e a família seno $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$, associada a ela, sejam exponencialmente estáveis, conforme a hipótese **(H)** dada a seguir.

(H) As famílias $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ e $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ são exponencialmente estáveis, isto é, existem $K > 1$ e $w > 0$ tais que $\|C(t)\| \leq Ke^{-wt}$ e $\|S(t)\| \leq Ke^{-wt}$ para todo $t \geq 0$.

Esta hipótese é assumida em alguns trabalhos sobre estabilidade exponencial ou assintótica, citamos em particular [29, 31], e como exemplo de operador que satisfaz tal condição podemos considerar o operador derivada segunda, definido na interseção dos clássicos espaços de Sobolev $H_0^1(0,\pi)$ e $H^2(0,\pi)$, o que é um exemplo usual na teoria de equações diferenciais.

Antes de enunciarmos o principal resultado desta seção, vejamos qual é o conceito de solução fraca para a equação (3.3).

Definição 3.22. *Uma função diferenciável $x : \mathbb{R} \to X$ é uma solução fraca da equação diferencial (3.3) se a equação integral*

$$x(t) = C(t-a)x(a) + S(t-a)x'(a) + \int_a^t S(t-s)f(s)ds$$

é satisfeita para todo $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$.

Agora, estamos prontos para apresentar um resultado de existência de solução fraca quase automórfica para a equação de segunda ordem não homogênea.

Teorema 3.23. *Se $f \in AA(X)$, então a equação (3.3) possui uma única solução fraca quase automórfica cuja derivada existe e também é uma função quase automórfica.*

Demonstração. Consideremos a função $x : \mathbb{R} \to X$ dada por

$$x(t) = \int_{-\infty}^t S(t-s)f(s)ds, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Mostraremos a seguir que x é a única solução fraca quase automórfica de (3.3) tal que x' existe e também é uma função quase automórfica. Porém, primeiramente, provaremos que x está bem definida. Para isso, notemos que, como f é uma função quase automórfica, o item (vi) do Teorema 3.13 nos garante que f é limitada, ou seja, $\|f\|_\infty < \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \int_{-\infty}^t \|S(t-s)\|\|f(s)\|ds \leq \int_{-\infty}^t Ke^{-w(t-s)}\|f\|_\infty ds \\
&= Ke^{-wt}\|f\|_\infty \int_{-\infty}^t e^{ws}ds = Ke^{-wt}\|f\|_\infty \lim_{r\to-\infty}\left(\frac{e^{ws}}{w}\bigg|_r^t \right) \\
&= \frac{Ke^{-wt}}{w}\|f\|_\infty \lim_{r\to-\infty}(e^{wt} - e^{wr}) = \frac{K}{w}\|f\|_\infty,
\end{aligned}$$

implicando que a integral que define $x(t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, a função x está bem definida.

Para provarmos que x é uma função quase automórfica, seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência qualquer de números reais. Como f é quase automórfica, existe uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f(t+s_{n_k}) = g(t) \;\text{ e }\; \lim_{k\to\infty} g(t-s_{n_k}) = f(t), \; t \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, temos

$$x(t+s_{n_k}) = \int_{-\infty}^{t+s_{n_k}} S(t+s_{n_k}-s)f(s)ds = \int_{-\infty}^t S(t-\sigma)f(\sigma+s_{n_k})d\sigma,$$

com

$$\|S(t-\sigma)f(\sigma+s_{n_k})\| \leq \|S(t-\sigma)\|\|f(\sigma+s_{n_k})\| \leq Ke^{-w(t-\sigma)}\|f\|_\infty,\ t\in\mathbb{R},\sigma\leq t,\ k\in\mathbb{N},$$

e a função $\sigma \mapsto Ke^{-w(t-\sigma)}\|f\|_\infty$ integrável em $(-\infty,t]$, visto que $w>0$.

Mais ainda, fixado $t\in\mathbb{R}$ e $\sigma\leq t$, segue que o operador $S(t-\sigma)$ é um operador linear limitado e assim,

$$\lim_{k\to\infty} S(t-\sigma)f(\sigma+s_{n_k}) = S(t-\sigma)g(\sigma).$$

Dessa forma, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.3), obtemos que

$$\lim_{k\to\infty} x(t+s_{n_k}) = \lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^t S(t-\sigma)f(\sigma+s_{n_k})d\sigma = \int_{-\infty}^t S(t-\sigma)g(\sigma)d\sigma,\ t\in\mathbb{R}.$$

Agora, consideremos a função $y:\mathbb{R}\to X$ definida por $y(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^t S(t-s)g(s)ds$. Observemos que y também está bem definida já que

$$\|y(t)\| \leq \int_{-\infty}^t \|S(t-s)\|\|g(s)\|ds \leq Ke^{-wt}\|g\|_\infty \int_{-\infty}^t e^{ws}ds = \frac{K}{w}\|g\|_\infty,$$

com $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$ e f limitada (ver Proposição 3.14).

Além disso, como acabamos de mostrar, $\lim\limits_{k\to\infty} x(t+s_{n_k}) = y(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$ e então, para que a função x seja quase automórfica, precisamos garantir que

$$\lim_{k\to\infty} y(t-s_{n_k}) = x(t),\ t\in\mathbb{R}.$$

Isso segue de modo similar ao que fizemos previamente para x pois, para todo $t\in\mathbb{R}$ e $k\in\mathbb{N}$,

$$y(t-s_{n_k}) = \int_{-\infty}^{t-s_{n_k}} S(t-s_{n_k}-s)g(s)ds = \int_{-\infty}^t S(t-\sigma)g(\sigma-s_{n_k})d\sigma,$$

$$\|S(t-\sigma)g(\sigma-s_{n_k})\| \leq Ke^{-w(t-\sigma)}\|g\|_\infty,$$

a função $\sigma\mapsto Ke^{-w(t-\sigma)}\|g\|_\infty$ é integrável em $(-\infty,t]$ e $\lim\limits_{k\to\infty} S(t-\sigma)g(\sigma-s_{n_k}) = S(t-\sigma)f(\sigma)$ para todo $t\in\mathbb{R}$ e $\sigma\leq t$ fixos. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.3), segue que

$$\lim_{k\to\infty} y(t-s_{n_k}) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^t S(t-\sigma)g(\sigma-s_{n_k})d\sigma = \int_{-\infty}^t S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma = x(t),\ t\in\mathbb{R}.$$

Portanto, x é uma função quase automórfica.

A seguir, mostraremos que x é uma solução fraca da (3.3), isto é, para todo $a \in \mathbb{R}$, x deverá satisfazer a equação integral

$$x(t) = C(t-a)x(a) + S(t-a)x'(a) + \int_a^t S(t-s)f(s)ds, \; t \geq a. \tag{3.4}$$

Para provarmos este fato, notemos inicialmente que

$$x(a) = \int_{-\infty}^{a} S(a-s)f(s)ds, \; a \in \mathbb{R},$$

e, pelas propriedades do Capítulo 1,

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)ds = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{0} S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-s)f(s)ds\right] \\
&= \int_{-\infty}^{0} C(t-s)f(s)ds + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{0} C(t-s)f(s)ds + \frac{d}{dt}\int_0^t [S(t)C(s) - S(s)C(t)]f(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{0} C(t-s)f(s)ds + \frac{d}{dt}\left(S(t)\int_0^t C(s)f(s)ds\right) - \frac{d}{dt}\left(C(t)\int_0^t S(s)f(s)ds\right) \\
&= \int_{-\infty}^{0} C(t-s)f(s)ds + C(t)\int_0^t C(s)f(s)ds + S(t)C(t)f(t) \\
&\quad -AS(t)\int_0^t S(s)f(s)ds - C(t)S(t)f(t) \\
&= \int_{-\infty}^{0} C(t-s)f(s)ds + \int_0^t C(t)C(s)f(s)ds - \int_0^t AS(t)S(s)f(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{0} C(t-s)f(s)ds + \int_0^t [C(t)C(s) - AS(t)S(s)]f(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{0} C(t-s)f(s)ds + \int_0^t C(t-s)f(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} C(t-s)f(s)ds,
\end{aligned}$$

ou seja, $x'(t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$ e

$$x'(a) = \int_{-\infty}^{a} C(a-s)f(s)ds.$$

Assim, usando novamente as propriedades das famílias seno e cosseno, obtemos que

$$C(t-a)x(a) + S(t-a)x'(a) \;=\; C(t-a)\int_{-\infty}^{a} S(a-s)f(s)ds + S(t-a)\int_{-\infty}^{a} C(a-s)f(s)ds$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{a} [C(t-a)S(a-s) + S(t-a)C(a-s)]f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{a} S(t-a+a-s)f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{a} S(t-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $t \geq a$, temos

$$\begin{aligned} \int_{a}^{t} S(t-s)f(s)ds &= \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)ds - \int_{-\infty}^{a} S(t-s)f(s)ds \\ &= x(t) - C(t-a)x(a) - S(t-a)x'(a). \end{aligned}$$

Logo, concluímos que x satisfaz a equação (3.4) para todo $t \geq a$, e portanto, x é uma solução fraca quase automórfica de (3.3).

Agora, aproveitaremos as contas acima para investigarmos as propriedades da derivada de x. Lembremos que $x'(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} C(t-s)f(s)ds$ e assim, procedendo como anteriormente, temos

$$\|x'(t)\| \leq \int_{-\infty}^{t} \|C(t-s)\|\|f(s)\|ds \leq \int_{-\infty}^{t} Ke^{-w(t-s)}\|f\|_{\infty}ds = \frac{K}{w}\|f\|_{\infty},$$

o que garante que x' está bem definida para $t \in \mathbb{R}$, e mais, dada uma sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, pelo fato de f ser uma função quase automórfica, existe uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f(t+s_{n_k}) = g(t) \;\text{ e }\; \lim_{k\to\infty} g(t-s_{n_k}) = f(t),\; t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, temos

$$x'(t+s_{n_k}) = \int_{-\infty}^{t+s_{n_k}} C(t+s_{n_k}-s)f(s)ds = \int_{-\infty}^{t} C(t-\sigma)f(\sigma+s_{n_k})d\sigma,$$

com $\|C(t-\sigma)f(\sigma+s_n)\| \leq Ke^{-w(t-\sigma)}\|f\|_{\infty}$, para todo $t \in \mathbb{R}, \sigma \leq t$ e $k \in \mathbb{N}$, e a função $\sigma \mapsto Ke^{-w(t-\sigma)}\|f\|_{\infty}$ integrável em $(-\infty, t]$.

Dessa forma, pelo fato de $C(t-\sigma)$ ser um operador linear limitado para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\sigma \leq t$ fixos, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} C(t-\sigma)f(\sigma+s_{n_k}) = C(t-\sigma)g(\sigma)$ e então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.3), obtemos que

$$\lim_{k\to\infty} x'(t+s_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{t} C(t-\sigma)f(\sigma+s_{n_k})d\sigma = \int_{-\infty}^{t} C(t-\sigma)g(\sigma),\; t \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, definindo a função $\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} C(t-\sigma)g(\sigma)$, vamos mostrar, de modo similar, que

$$\lim_{k\to\infty} \phi(t - s_{n_k}) = x'(t).$$

Observemos inicialmente que

$$\|\phi(t)\| \leq \int_{-\infty}^{t} \|C(t-s)\|\|g(s)\|ds \leq \frac{K}{w}\|f\|_\infty,$$

ou seja, ϕ está bem definida. Mais ainda, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\phi(t - s_{n_k}) = \int_{-\infty}^{t-s_{n_k}} C(t - s_{n_k} - s)g(s)ds = \int_{-\infty}^{t} C(t-\sigma)g(\sigma - s_n)d\sigma,$$

com $\|C(t-\sigma)g(\sigma - s_n)\| \leq Ke^{-w(t-\sigma)}\|g\|_\infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\sigma \leq t$ e $k \in \mathbb{N}$, e a função $\sigma \mapsto Ke^{-w(t-\sigma)}\|g\|_\infty$ integrável em $(-\infty, t]$.

Logo, visto que $C(t-\sigma)$ é um operador linear limitado para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\sigma \leq t$ fixos, temos $\lim_{k\to\infty} C(t-\sigma)g(\sigma - s_{n_k}) \to C(t-\sigma)f(\sigma)$ e consequentemente, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.3), concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \phi(t - s_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{t} C(t-\sigma)g(\sigma - s_{n_k})d\sigma = \int_{-\infty}^{t} C(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma = x'(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, x' também é uma função quase automórfica.

Observemos ainda que

$$\begin{aligned} x'(t) &= \int_{-\infty}^{t} C(t-s)f(s)ds = \int_{-\infty}^{a} C(t-s)f(s)ds + \int_{a}^{t} C(t-s)f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{a} [AS(t-a)S(a-s) + C(t-a)C(a-s)]f(s)ds + \int_{a}^{t} C(t-s)f(s)ds \\ &= AS(t-a)\int_{-\infty}^{a} S(a-s)f(s)ds + C(t-a)\int_{-\infty}^{a} C(a-s)f(s)ds + \int_{a}^{t} C(t-s)f(s)ds \\ &= AS(t-a)x(a) + C(t-a)x'(a) + \int_{a}^{t} C(t-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Finalmente, para mostrarmos a unicidade de solução, sejam x e y duas soluções fracas quase automórficas de (3.3) tais que x' e y' também são funções quase automórficas. Então, tomando $z = x - y$, pelas propriedades da seção 3.1, temos $z, z' \in AA(X)$ e assim, z e z' são funções limitadas. Mais ainda, z satisfaz a equação

$$z(t) = C(t-a)z(a) + S(t-a)z'(a),\ a \in \mathbb{R},\ t \geq a,$$

pois

$$\begin{aligned}
z(t) &= C(t-a)x(a) + S(t-a)x'(a) + \int_a^t S(t-s)f(s)ds - C(t-a)y(a) \\
&- S(t-a)y'(a) - \int_a^t S(t-s)f(s)ds \\
&= C(t-a)[x(a)-y(a)] + S(t-a)[x'(a)-y'(a)] \\
&= C(t-a)z(a) + S(t-a)z'(a).
\end{aligned}$$

Logo, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$,

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| &\leq \|C(t-a)\|\|z(a)\| + \|S(t-a)\|\|z'(a)\| \\
&\leq Ke^{-w(t-a)}[\|z\|_\infty + \|z'\|_\infty] \\
&\leq \widehat{K}e^{-w(t-a)},
\end{aligned}$$

onde $\widehat{K} = K(\|z\|_\infty + \|z'\|_\infty)$.

Em particular, consideremos uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$. Então, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ fixo, podemos obter uma subsequência $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_{n_k} < t$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e assim, como $w > 0$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \|z(t)\| \leq \lim_{k\to\infty} \hat{K}e^{-w(t-a_{n_k})} = 0.$$

Portanto, $z(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $x = y$, o que garante a unicidade da solução e completa a demonstração do teorema. □

3.3 Soluções fracas quase automórficas para equações diferenciais de segunda ordem semilineares

Nesta seção vamos estudar a existência de solução fraca quase automórfica para a equação diferencial de segunda ordem semilinear dada por

$$x''(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

onde $x(t) \in X$ para todo $t \in \mathbb{R}$, X é um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de uma família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados em X e $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é uma função apropriada.

Assim como na seção anterior, iremos assumir que a família cosseno $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$, gerada por A, e a família seno $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$, associada a ela, sejam exponencialmente estáveis, conforme a hipótese **(H)** descrita previamente. Já o conceito de solução fraca que iremos considerar está descrito na definição as seguir.

Definição 3.24. *Uma função diferenciável $x : \mathbb{R} \to X$ é uma solução fraca da equação diferencial (3.5) se a equação integral*

$$x(t) = C(t-a)x(a) + S(t-a)x'(a) + \int_a^t S(t-s)f(s,x(s))ds$$

é satisfeita para todo $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$.

Lembremos ainda que $AA(X)$ e $\mathcal{C}(\mathbb{R};X)$ representam os espaços das funções de $\mathbb{R}$ em X que são quase automórficas e contínuas, respectivamente. Além disso, para não sobrecarregar a demonstração do principal resultado desta seção, apresentaremos dois lemas.

Lema 3.25. *Seja $f : \mathbb{R}\times X \to X$ uma função quase automórfica em $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$ e assuma que f satisfaz uma condição de Lipschitz em x uniformemente em t. Se $U : AA(X) \to \mathcal{C}(\mathbb{R};X)$ é o operador não linear dado por*

$$(U\psi)(t) = \int_{-\infty}^t S(t-s)f(s,\psi(s))ds,\ t \in \mathbb{R},$$

então $U\psi \in AA(X)$.

Demonstração. Primeiramente, fixada $\phi \in AA(X)$, notemos que a função $F : \mathbb{R} \to X$, definida por $F(t) = f(t,\phi(t))$, satisfaz as condições do Teorema 3.21 e portanto, é uma função quase automórfica. Logo, F é limitada e, dada uma sequência qualquer de números reais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe uma subsequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} F(t+s_{n_k}) = G(t) \text{ e } \lim_{k\to\infty} G(t-s_{n_k}) = F(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Mais ainda, pelo que foi feito na demonstração do Teorema 3.21, sabemos que $G(t) = g(t,\varphi(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde as funções g e φ são tais que $\lim\limits_{k\to\infty} f(t+s_{n_k},x) = g(t,x)$, $\lim\limits_{k\to\infty} g(t-s_{n_k},x) = f(t,x)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \phi(t+s_{n_k}) = \varphi(t)$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(t-s_{n_k}) = \phi(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e cada $x \in X$.

Por outro lado, temos

$$\|(U\phi)(t)\| \;=\; \left\|\int_{-\infty}^t S(t-s)f(s,\phi(s))ds\right\| \leq \int_{-\infty}^t \|S(t-s)\|\|f(s,\phi(s))\|ds$$

$$\leq \int_{-\infty}^{t} Ke^{-w(t-s)}\|f(s,\phi(s))\|ds \leq \frac{K}{w}\|F\|_{\infty},\ t \in \mathbb{R},$$

garantindo que a integral que define U existe para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(U\phi)(t+s_{n_k}) &= \int_{-\infty}^{t+s_{n_k}} S(t+s_{n_k}-s)f(s,\phi(s))ds = \int_{-\infty}^{t+s_{n_k}} S(t+s_{n_k}-s)F(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)F(\sigma+s_{n_k})d\sigma,\end{aligned}$$

com $\|S(t-\sigma)F(\sigma+s_{n_k})\| \leq Ke^{-w(t-\sigma)}\|F\|_{\infty}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\sigma \leq t$ e $k \in \mathbb{N}$, e a função $\sigma \mapsto Ke^{-w(t-\sigma)}\|F\|_{\infty}$ integrável em $(-\infty, t]$, visto que $w > 0$.

Observemos também que, pelo fato de $S(t-\sigma)$ ser um operador linear limitado para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\sigma \leq t$ fixos, temos

$$\lim_{k\to\infty} S(t-\sigma)F(\sigma+s_{n_k}) = S(t-\sigma)G(\sigma).$$

Dessa forma, utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.3), obtemos que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}(U\phi)(t+s_{n_k}) &= \lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)F(\sigma+s_{n_k})d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)G(\sigma)d\sigma,\ t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Agora, usando que $G(t) = g(t,\varphi(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e considerando o operador não linear $V : AA(X) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}; X)$ dado por

$$(V\psi)(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)g(s,\psi(s))ds,\ t \in \mathbb{R},$$

mostraremos que

$$\lim_{k\to\infty}(U\phi)(t+s_{n_k}) = (V\varphi)(t) \ \text{ e } \lim_{k\to\infty}(V\varphi)(t-s_{n_k}) = (U\phi)(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

o que implica que $U\phi \in AA(X)$.

Antes porém, observamos que a integral que define $V\psi$ é absolutamente convergente para cada $t \in \mathbb{R}$, pois

$$\|(V\psi)(t)\| \leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\|\|g(s,\psi(s))\|ds \leq \frac{K}{w}\|G\|_{\infty},$$

com $\|G\|_{\infty} = \|F\|_{\infty}$ e F limitada.

Além disso, já temos o primeiro limite em (3.6), pois

$$\lim_{k\to\infty}(U\phi)(t+s_{n_k}) = \int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)G(\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)g(\sigma,\varphi(\sigma))d\sigma = (V\varphi)(t),\ t\in\mathbb{R}.$$

Para provarmos o outro limite, notemos que

$$\begin{aligned}(V\varphi)(t-s_{n_k}) &= \int_{\infty}^{t-s_{n_k}} S(t-s_{n_k}-s)g(s,\varphi(s))ds = \int_{\infty}^{t-s_{n_k}} S(t-s_{n_k}-s)G(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)G(\sigma-s_{n_k})d\sigma,\ t\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

com $\|S(t-\sigma)G(\sigma-s_{n_k})\| \leq Ke^{-w(t-\sigma)}\|G\|_\infty$ para todo $t\in\mathbb{R}$, $\sigma\leq t$ e $k\in\mathbb{N}$, e a função $\sigma\mapsto Ke^{-w(t-\sigma)}\|G\|_\infty$ integrável em $(-\infty,t]$.

Assim, visto que $S(t-\sigma)$ é um operador linear limitado para todo $t\in\mathbb{R}$ $\sigma\leq t$ fixos, temos $\lim_{k\to\infty} S(t-\sigma)G(\sigma-s_{n_k}) = S(t-\sigma)F(\sigma)$ e então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.3), concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}(V\varphi)(t-s_{n_k}) &= \lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)G(\sigma-s_{n_k})d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)F(\sigma)d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)f(\sigma,\phi(\sigma))d\sigma \\ &= (U\phi)(t),\ t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Portanto, segue que $U\phi$ é uma função quase automórfica. □

Lema 3.26. *Seja $f:\mathbb{R}\times X\to X$ uma função quase automórfica em t para cada $x\in X$ e assuma que f satisfaz uma condição de Lipschitz em x uniformemente em $t\in\mathbb{R}$. Se $W: AA(X)\to\mathcal{C}(\mathbb{R};X)$ é o operador não linear dado por*

$$(W\psi)(t) = \int_{-\infty}^{t} C(t-s)f(s,\psi(s))ds,\ t\in\mathbb{R},$$

então $W\psi\in AA(X)$.

Demonstração. A demonstração deste resultado é exatamente análoga à do Lema 3.25, uma vez que, valendo a hipótese **(H)**, a família cosseno $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ também é exponencialmente estável e $C(t-\sigma)$ é um operador linear limitado para todo $t\in\mathbb{R}$ e $\sigma\leq t$ fixos. □

Agora, podemos enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção, que apresenta condições para que a equação (3.5) possua uma única solução fraca quase automórfica.

Teorema 3.27. *Suponha que $f : \mathbb{R}\times X \to X$ é lipschitziana em x uniformemente em t, com constante de Lipschitz $L > 0$. Se $L < \dfrac{w}{K}$ e f é uma função quase automórfica em t para cada $x \in X$, então a equação (3.5) possui uma única solução fraca quase automórfica, cuja derivada existe e também é uma função quase automórfica.*

Demonstração. Consideremos o operador não linear $\Gamma : AA(X) \to AA(X)$ dado por

$$(\Gamma\phi)(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s,\phi(s))ds,\ t \in \mathbb{R}.$$

Primeiramente, observemos que Γ está bem definido pois, dada $\phi \in AA(X)$, as hipóteses sobre f e o Lema 3.25 garantem que $\Gamma\phi \in AA(X)$.

Além disso, para $\phi_1, \phi_2 \in AA(X)$, temos ϕ_1 e ϕ_2 limitadas e

$$\begin{aligned}
\|(\Gamma\phi_1)(t) - (\Gamma\phi_2)(t)\| &= \left\| \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[f(s,\phi_1(s)) - f(s,\phi_2(s))]ds \right\| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\| L \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\| ds \\
&\leq L\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \int_{-\infty}^{t} Ke^{-w(t-s)}ds \\
&= \frac{LK}{w}\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty,\ t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\|\Gamma\phi_1 - \Gamma\phi_2\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|(\Gamma\phi_1)(t) - (\Gamma\phi_2)(t)\| \leq \frac{LK}{w}\|\phi_2 - \phi_2\|_\infty,$$

com $\dfrac{LK}{w} < 1$, ou seja, Γ é uma contração.

Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema A.5), existe um único $x \in AA(X)$ tal que $\Gamma x = x$, isto é,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s,x(s))ds,\ t \in \mathbb{R}.$$

A seguir, mostraremos que a função quase automórfica x é uma solução fraca da equação (3.5). Para isso, observemos que

$$x(a) = \int_{-\infty}^{a} S(a-s)f(s,x(s))ds,\ a \in \mathbb{R},$$

e, das propriedades do Capítulo 1,

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s,x(s))ds\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{0} S(t-s)f(s,x(s))ds + \int_{0}^{t} S(t-s)f(s,x(s))ds\right] \\
&= \int_{-\infty}^{0} C(t-s)f(s,x(s))ds + \frac{d}{dt}\left[S(t)\int_{0}^{t} C(s)f(s,x(s))ds - C(t)\int_{0}^{t} S(s)f(s,x(s))ds\right] \\
&= \int_{-\infty}^{0} C(t-s)f(s,x(s))ds + C(t)\int_{0}^{t} C(s)f(s,x(s))ds + S(t)C(t)f(t,x(t)) \\
&\quad -AS(t)\int_{0}^{t} S(s)f(s,x(s))ds - C(t)S(t)f(t,x(t)) \\
&= \int_{-\infty}^{0} C(t-s)f(s,x(s))ds + \int_{0}^{t} C(t)C(s)f(s,x(s))ds - \int_{0}^{t} AS(t)S(s)f(s,x(s))ds \\
&= \int_{-\infty}^{0} C(t-s)f(s,x(s))ds + \int_{0}^{t} C(t-s)f(s,x(s))ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} C(t-s)f(s,x(s))ds
\end{aligned}
$$

e então, segue que $x'(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} C(a-s)f(s,x(s))ds.$

Logo, para $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$, temos

$$
\begin{aligned}
C(t-a)x(a) + S(t-a)x'(a) &= C(t-a)\int_{-\infty}^{a} S(a-s)f(s,x(s))ds \\
&\quad + S(t-a)\int_{-\infty}^{a} C(a-s)f(s,x(s))ds \\
&= \int_{-\infty}^{a} [C(t-a)S(a-s) + S(t-a)C(a-s)]f(s,x(s))ds \\
&= \int_{-\infty}^{a} S(t-a+a-s)f(s,x(s))ds \\
&= \int_{-\infty}^{a} S(t-s)f(s,x(s))ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s,x(s))ds - \int_{a}^{t} S(t-s)f(s,x(s))ds \\
&= x(t) - \int_{a}^{t} S(t-s)f(s,x(s))ds.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$x(t) = C(t-a)x(a) + S(t-a)x'(a) + \int_{a}^{t} S(t-s)f(s,x(s))ds,$$

para todo $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$, garantindo que x é uma solução fraca quase automórfica de (3.5).

Além disso, visto que $x'(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} C(t-s)f(s,x(s))ds$, $t \in \mathbb{R}$, o Lema 3.26 nos assegura que x' também é uma função quase automórfica.

Por fim, para concluirmos a demonstração deste resultado, provaremos a unicidade de solução para (3.5). Com esse intuito, sejam x e y duas soluções fracas quase automórficas de (3.5) tais que x' e y' também são funções quase automórficas.

Dessa forma, tomando $z = x - y$, segue das propriedades da seção 3.1 que $z, z' \in AA(X)$ e então, z e z' são funções limitadas. Mais ainda, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$, temos

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| &= \left\| C(t-a)[x(a)-y(a)] + S(t-a)[x'(a)-y'(a)] + \int_a^t S(t-s)[f(s,x(s)) - f(s,y(s))]ds \right\| \\
&\leq Ke^{-w(t-a)}\|z(a)\| + Ke^{-w(t-a)}\|z'(a)\| + \int_a^t Ke^{-w(t-s)}L\|x(s)-y(s)\|ds \\
&\leq Ke^{-w(t-a)}[\|z\|_\infty + \|z'\|_\infty] + \int_a^t KLe^{-w(t-s)}\|z(s)\|ds \\
&= \widehat{K}e^{-w(t-a)} + \int_a^t KLe^{-w(t-a)}e^{w(s-a)}\|z(s)\|ds,
\end{aligned}$$

onde $\widehat{K} = K[\|z\|_\infty + \|z'\|_\infty]$, ou ainda,

$$e^{w(t-a)}\|z(t)\| \leq \widehat{K} + \int_a^t KLe^{w(s-a)}\|z(s)\|ds.$$

Assim, usando a Desigualdade de Gronwall (Teorema A.2) para a função $t \mapsto e^{w(t-a)}\|z(t)\|$, obtemos que

$$e^{w(t-a)}\|z(t)\| \leq \widehat{K}e^{\int_a^t KL\,ds} = \widehat{K}e^{KL(t-a)}$$

e consequentemente, temos

$$\|z(t)\| \leq \widehat{K}e^{-w(t-a)}e^{KL(t-a)} = \widehat{K}e^{[-w+KL](t-a)}, \ a \in \mathbb{R}, \ t \geq a.$$

Em particular, consideremos uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$. Então, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ fixo, podemos obter uma subsequência $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_{n_k} < t$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Desse modo, como $KL - w < 0$, pois por hipótese $\dfrac{LK}{w} < 1$, segue que

$$\lim_{k\to\infty} \|z(t)\| \leq \lim_{k\to\infty} \widehat{K}e^{[-w+KL](t-a_{n_k})} = 0.$$

Logo, $z(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que garante a unicidade de solução para (3.5) e completa a demonstração do teorema. $\square$

Apêndice

A

Resultados Auxiliares

A seguir, temos a apresentação de resultados importantes, referências de consulta, citações e enunciados utilizados no decorrer deste trabalho.

Teorema A.1. ***(Extensão linear limitada).*** *[24, Theorem 2.7-11 pág. 100] Seja $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ um operador linear limitado, onde X é um espaço normado e Y é um espaço de Banach. Então, T tem uma extensão $\tilde{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \to Y$, onde $\tilde{T}$ é um operador linear limitado com norma $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Teorema A.2. ***(Desigualdade de Gronwall).*** *[13, Corolary 6.6 pág. 36] Seja α uma constante real. Se $\beta(t) \geq 0$ e $\phi(t)$ são funções reais contínuas para $a \leq t \leq b$ que satisfazem*

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)\phi(s)ds, \quad a \leq t \leq b,$$

então

$$\phi(t) \leq \left(e^{\int_a^t \beta(s)ds}\right)\alpha, \quad a \leq t \leq b.$$

Teorema A.3. ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue).*** *[2, Theorem 5.6, pág. 44] Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis convergindo, em quase todo ponto, para uma função real mensurável f. Se existir uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Teorema A.4. ***(Princípio da Limitação Uniforme).*** *[24, Theorem 4.7-3, pág. 249] Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de operadores lineares limitados de um espaço de Banach X em um espaço normado*

Y tal que $(\|T_n x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitado para todo $x \in X$, ou seja,

$$\|T_n x\| \leq C_x, \qquad n \in \mathbb{N},$$

onde C_x é um número real. Então a sequência $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, isto é, existe um C tal que

$$\|T_n\| \leq C, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Teorema A.5. ***(Teorema do Ponto Fixo de Banach).*** *[24, Theorem 5.1-2, pág. 300] Sejam X um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma contração em X. Então T tem um único ponto fixo.*

Referências Bibliográficas

[1] Bahaj, M.; Sidki, O. *Almost periodic solutions of semilinear equations with analytic semigroups in Banach spaces.* Electron. J. Differential Equations, Vol 2002, No. 98 (2002) 1-11.

[2] Bartle, G. *The elements of integration and Lebesgue measure.* John Wiley & Sons. Inc., 1995.

[3] Blot, J.; Cieutat, P.; Ezzinbi, K. *Measure theory and pseudo almost automorphic functions: New developments and applications.* Nonlinear Analysis, 75 (2012) 2426-2447.

[4] Bochner, S. *Continuous mappings of almost automorphic and almost periodic functions.* Proc. Ncad. Sci. USA, 52 (1964) 907-910.

[5] Diagana, T.; N'Guérékata, G. M. *Almost automorphic solutions to semilinear evolution equations.* Funct. Differ. Equ., 13 (2) (2006) 195-206.

[6] Diagana, T.; N'Guérékata, G. M. *Almost automorphic solutions to some classes of partial evolution equations.* Appl. Math. Lett., 20 (4) (2007) 462- 466.

[7] Diagana, T.; N'Guérékata, G. M.; Minh, N. V. *Almost automorphic solutions of evolution equations.* Proc. Amer. Math. Soc., 132 (11) (2004) 3289-3298.

[8] Diagana, T.; Henríquez, H.; Hernández, E. *Almost automorphic mild solutions to some partial neutral functional-differential equations and applications.* Nonlinear Anal., 69 (1) (2008) 1485-1493.

[9] Ding, H. S.; Xi, T.; Liang, J. *Asymptotically almost automorphic solutions for some integrodifferential equations with nonlocal initial conditions.* J. Math. Anal. Appl., 338 (1) (2008) 141-151.

[10] Fattorini, H. O. *Ordinary differential equations in linear topological spaces I.* J. Differential Equations 5, (1968), 72-105.

[11] Furumochi, T.; Naito, T.; Van Minh, N. *Boundedness and Almost Periodicity of Solutions of Partial Functional Differential Equations.* Journal of Differential Equations, 180 (2002) 125-152.

[12] Goldstein, J. A.; N'Guérékata, G. M. *Almost automorphic solutions of semilinear evolutions equations.* Proc. of the American Mathem. Society, vol. 133, no. 8 (2005) 2401-2408.

[13] Hale, J. K. *Ordinary Differential Equations.* Krieger Publishing Company, 1980.

[14] Henríquez, H. R. *Asymptotically almost periodic solutions of abstract differential equations.* J. Math. Anal. Appl., 160 (1991) 157-175.

[15] Henríquez, H. R. *Periodic solutions of quasi-linear partial functional differential equations with unbounded delay.* Funk. Ekvac., 37 (1994) 329-343.

[16] Henríquez, H.; Castillo, G. *Almost-periodic solutions for a second order abstract Cauchy problem.* Acta Math. Hungar., 106 (1-2) (2005) 27-39.

[17] Henríquez, H.; Pierri, M.; Prokopczyk, A. *Asymptotically almost periodic solutions for abstract second order neutral differential equations.* To appear.

[18] Henríquez, H. R.; Vásquez, C. H. *Almost Periodic Solutions of Abstract Retarded Functional Differential Equations with Unbounded Delay.* Acta Applicandae Mathematicae, 57 (1999) 105-132.

[19] Hernández, E.; Henríquez, H. *Existence of periodic solutions of partial neutral functional differential equations with unbounded delay.* J. Math. Anal. Appl., 221, no. 2, (1998) 499-522.

[20] Hernández, E.; Henríquez, H. R.; McKibben, M. A. *Existence of solutions for second order partial neutral functional differential equations.* Integral Equations Operator Theory, 62, no. 2, (2008) 191-217.

[21] Hernández, E. *A Massera type criterion for a partial neutral functional differential equation.* Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2002, No. 40 (2002) 1-17.

[22] Hernández, E.; Pelicer, M. *Asymptotically almost periodic and almost periodic solutions for partial neutral differential equations.* Applied Mathematics Letters, 18 (2005) 1265-1272.

[23] Hernandez, E.; Pelicer, M. L.; Santos, J. P. C. *Asymptotically almost periodic and almost periodic solutions for a class of evolution equations.* Electron. J. Diff. Eqns., 61 (2004) 1-15.

[24] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley & Sons. Inc., 1989.

[25] Ladas, G. E.; Lakshmikantham, V. *Differential Equations in abstract spaces*, Academic Press, 1972.

[26] N'Guérékata, G. M. *Sue les solutions presqu'automorphes d'équations diff érentielles abstraites.* Annales des Sciences Mathématquies du Québec, 51 (1981) 69-79.

[27] N'Guérékata, G. M. *Topics in almost automorphy.* Springer Science + Business Media, Inc., New York, 2005.

[28] N'Guérékata, G. M. *Almost automorphic solutions to second-order semilinear evolution equations.* Nonlinear Analysis, 71 (2009) 432-435.

[29] Maheswai, R.; Karunanithi, S. *Exponential stability of second order neutral stochastic evolution equations with infinite delays*. International Journal of Math. Archive, 5 (9), (2014), 177-182.

[30] Massera, J. L. *The existence of periodic solutions of systems of differential equations.* Duke Math. J., 17 (1950) 457-475.

[31] Sakthivel, R.; Ren Y.; Kim, H. *Asymptotic stability of second-order neutral stochastic differential equations*, Journal of Mathematical Physics, 51, (2010), 1-9.

[32] Travis, C. C.; Webb, G. F. *Compactness, regularity, and uniform continuity properties of strongly continuous cosine families.* Houston J. Math., 3 (4) (1977) 555-567.

[33] Travis, C. C.; Webb, G. F. *Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations.* Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 32 (1978) 76-96.

[34] Travis, C. C.; Webb, G. F. *Second order differential equations in Banach spaces*, Proceedings on International Sympos. on Nonlinear Equations in Abstract spaces, Academic Press, New York (1978) 331-361.

[35] Xiao, T. J.; Liang, J.; Zhang, J. *Pseudo almost automorphic solutions to semilinear differential equations in Banach spaces.* Semigroup Forum, 76 (2008) 518-524.

[36] Zaidman, S. *Almost-periodic functions in abstract spaces.* Research Notes in Mathematics, 126. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, 1985.

[37] Zhang, C. *Pseudo almost periodic solutions of some differential equation.* J. Math. Anal. Appl., 181 (1994) 67-76.

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, _____/_____/____

____

Assinatura do autor