

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

Estudos sobre bacias de atração e crises

Lucas de Lazari e Ferreira

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

LUCAS DE LAZARI E FERREIRA

Estudos sobre bacias de atração e crises

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Rene Orlando Medrano
Torricos

Rio Claro - SP
2026

F383e Ferreira, Lucas de Lazari e
Estudos sobre bacias de atração e crises / Lucas de
Lazari e Ferreira. -- Rio Claro, 2026
77 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro
Orientador: Rene Orlando Medrano Torricos

1. Dinâmica Não Linear. 2. Caos. 3. Atratores. 4. Bacias
de Atração. 5. Fractais. I. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

LUCAS DE LAZARI E FERREIRA

Estudos sobre bacias de atração e crises

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Instituto de Geociências e Ciências
Exatas do Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”, como parte dos
requisitos para obtenção do título de
Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. RENE ORLANDO MEDRANO Torricos
UNIFESP/ Diadema (SP)

Prof. Dr. EDSON DENIS LEONEL
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. SÍLVIO LUIZ THOMAZ DE SOUZA
CCO / UFSJ/ Divinópolis (MG)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 19 de junho de 2026.

Dedico este trabalho aos meus primeiros professores.
Denise, Nivaldo e Priscila.

Agradecimentos

Gostaria primeiramente de agradecer ao Professor Dr. Rene Orlando Medrano Torricos por minha orientação durante a minha segunda iniciação científica e neste presente trabalho. Sua orientação moldou muito minha visão de sistemas dinâmicos e sobre a própria ciência, além de ter me ajudado muito nos momentos de maior dificuldade durante esse período. Claro, quero agradecer muito também pela pessoa que o professor é, descontraída, sonhadora e carinhosa. Foram momentos incríveis durante esses mais de 2 anos de trabalho.

Agradeço muito a todo o Grupo de Investigação Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear que me encontro desde minha primeira IC, sendo a base de minha carreira científica. Agradeço principalmente ao Professor Dr. Edson Denis Leonel e ao Professor Dr. Juliano Antonio de Oliveira por aceitarem ser parte da banca da minha qualificação. Já por minha banca de defesa agradeço novamente ao Dr. Edson Denis Leonel e ao Dr. Silvio Luiz Thomaz de Souza. Além disso, agradeço pelas trocas de ideias, piadas e brincadeiras dentro do nosso laboratório neste período à Anne, Fabinho, João, Mayla, Patrícia, Punk e Vitor.

Não posso esquecer de agradecer a todos da minha esfera pessoal. Minha família sempre será minha base e minhas raízes, agradeço principalmente ao meu pai e minha mãe por terem me ensinado o que é o mundo e que deveria vivê-lo com sua maior intensidade, espero que meu pai veja, onde quer que ele esteja agora, o quanto dele ainda está em mim e toda sua importância neste trabalho e em meu ser. Meus amigos não passam distantes, durante esse trabalho Franca, Talita, Juliana, Lou, Roberta, Comuna, Irmão e Polyana foram um grupo muito importante em Rio Claro. Já de Grass, Vitor e Pedro que estão comigo desde que nem sabia o que era uma função.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - código de financiamento 001.

Resumo

O conjunto formado pelos pontos sucessivos gerados por um sistema dinâmico a partir de uma condição inicial específica é denominado órbita. O conjunto de todas as órbitas possíveis define o espaço de fase do sistema, que pode apresentar comportamentos periódicos, quase-periódicos ou caóticos. Entre as órbitas de destaque estão as homoclínicas e heteroclínicas. A primeira corresponde a uma trajetória que converge para um mesmo ponto fixo instável tanto no sentido positivo quanto negativo do tempo, a segunda conecta dois ou mais pontos fixos distintos. Essas órbitas indicam a presença de comportamentos complexos em uma ampla variedade de sistemas dinâmicos. Neste trabalho, exploramos seus efeitos em mapeamentos unidimensionais, analisando especialmente bacias de atração, fenômenos de *Leaking* e crises.

PALAVRAS-CHAVE: Dinâmica Não Linear, Caos, Atratores, Bacias de Atração, Fractais.

Abstract

The set of successive points generated by a dynamical system from a specific initial condition is called an orbit. The collection of all possible orbits defines the phase space of the system, which may display periodic, quasi-periodic, or chaotic behavior. Among the most relevant orbits are the homoclinic and heteroclinic ones: the former corresponds to a trajectory that converges to the same unstable fixed point in both forward and backward time directions, while the latter connects two or more distinct fixed points. These orbits indicate the presence of complex behaviors in a wide range of dynamical systems. In this work, we investigate their effects on one-dimensional maps, with special attention to basins of attraction, leaking phenomena, and crises.

KEYWORDS: Nonlinear Dynamics, Chaos, Attractors, Basins of Attraction, Fractals.

Lista de Figuras

1.1	Atrator de Lorenz.	15
2.1	Variação dos espaços de fases por meio da alteração do parâmetro K com a) $K = 0,5$ b) $K = 1,0$ c) $K = 2,5$ d) $K = 4,0$	18
2.2	Representação de um fluxo de soluções interceptando uma seção de Poincaré.	19
2.3	Comparação entre dois tipos de bacias de atração a) Representa uma bacia com fronteira suave b) Representa uma bacia com fronteira fractal	21
2.4	Figura representando uma bacia de entrelaçamento	22
2.5	Figuras representando uma bacia de Wada (a) Uma ampliação total mos- trando as bacias (b) Ampliação de (a) entre $0 > x > 1$ e $0 > \dot{x} > 1$ (c) Ampliação de (b) entre $0 > x > 0,1$ e $0 > \dot{x} > 0,1$ (d) Ampliação de (b) entre $0,04 > x > 0,05$ e $0,04 > \dot{x} > 0,05$	23
2.6	Exemplo visual do método para teste de complexidade de bacias e/ou teste de bacias de Wada.	25
2.7	Figura mostrando a estrutura de uma bacia crivada.	26
2.8	Figura mostrando um exemplo de estrutura de uma bacia esporadicamente fractal	26
3.1	Diagrama de bifurcação mapa logístico para $0 \leq R \leq 4$	29
3.2	A figura mostra uma ampliação da Fig. 3.1 na região em que ocorre uma bifurcação transcítica, mostrando a inversão de atratividade dos pontos fixos.	31
3.3	A figura mostra outra ampliação da Fig. 3.1 mostrando uma sequência de duplicações de período, representando o cenário de Feigenbaum.	32
3.4	A figura mostra uma ampliação da Fig. 3.1 mostrando uma bifurcação tangente, em que o atrator caótico é destruído dando lugar a um atrator de período 3.	33
3.5	Representações das bacias de atração das bacias de Wada do mapa do círculo. (a) Figura representa apenas o eixo Θ do modelo. (b) Aplicação do Método de visualização de bacias unidimensionais.	33
3.6	A figura mostra o diagrama de bifurcação com os parâmetros R destacados em que as bacias de atração do mapeamento serão construídas a seguir. . .	34

3.7	A figura mostra as bacias de atração do mapa logístico para $R = 3.3$, com os atratores em que os pontos de cada bacia convergem em vermelho. . . .	35
3.8	A figura mostra uma bacia de Wada no mapa logístico para $R = 3.84$. Com os atratores destacados em vermelhos e os repulsores que formam a fronteira das bacias.	35
3.9	A figura mostra o mapa de retorno do mapa logístico para $R = 3,83$ para $f^3(X_t)$. São destacados os atratores para este parâmetro em vermelho, bem como sua bacia imediata segmentada pelos repulsores de sua fronteira em laranja. A bacia azul é destacada na parte superior da figura ampliada para melhor visualização.	36
3.10	Mapas de retorno para o mapa logístico de período 3. (a) Órbita homoclínica que conecta o repulsor na fronteira de $B(X_1)$ a ele mesmo, destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_1)$ acompanhando essa órbita (b) Órbita heteroclínica conectando os repulsores de $B(X_1)$ e $B(X_2)$ destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_2)$ acompanhando essa órbita. (c) Órbita heteroclínica conectando os repulsores de $B(X_1)$ e $B(X_3)$, destacada pela linha tracejada Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_3)$ acompanhando essa órbita. .	37
3.11	Mapas de retorno para o mapa logístico de período 3. (a) Órbita heteroclínica conectando os repulsores de $B(X_1)$ e $B(X_2)$, destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_1)$ acompanhando essa órbita (b) Órbita homoclínica que conecta o repulsor na fronteira de $B(X_2)$ a ele mesmo destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_2)$ acompanhando essa órbita. (c) Órbita heteroclínica conectando os repulsores de $B(X_2)$ e $B(X_3)$, destacada pela linha tracejada Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_3)$ acompanhando essa órbita. .	38
3.12	Mapas de retorno para o mapa logístico de período 3. (a) Órbita heteroclínica conectando os repulsores de $B(X_1)$ e $B(X_3)$ destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_1)$ acompanhando essa órbita (b) Órbita heteroclínica conectando os repulsores de $B(X_2)$ e $B(X_3)$ destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_2)$ acompanhando essa órbita. (c) Órbita homoclínica que conecta o repulsor na fronteira de $B(X_3)$ a ele mesmo destacada pela linha tracejada, destacada pela linha tracejada Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_3)$ acompanhando essa órbita.	39
3.13	Bacias de atração do mapa logístico para $R = 3.845$ com os atratores em vermelho destacados.	40
3.14	Ampliação nas bacias da Fig. 3.13 formando uma fronteira suave, destacando as regiões bem definidas de fronteira entre a bacia laranja e azul. . .	41

3.15	Mapa de retorno do mapa logístico para $R = 3,83$ para $f^3(X_t)$ com uma órbita homoclínica	41
3.16	Mapa de retorno do mapa logístico para $R = 3.845$ para $f^6(X_t)$ com a formação de um órbita homoclínica e todas as bacias imediatas retornando para um ponto fixo repulsivo.	42
4.1	Espaço de fase do modelo com os parâmetros $\delta = 0,95$ e $e = 10^{-3}$	45
4.2	Bacias de atração dos atratores da Fig. 4.1.	49
4.3	Ampliação de uma bacia suave da Fig. 4.2.	50
4.4	Ampliação de uma bacia fractal da Fig. 4.2.	50
4.5	O gráfico mostra a fração de pontos incertos ($f(\epsilon)$) versus ϵ . Foram considerados 10^5 condições aleatórias em toda a região da fronteira, resultado em $\alpha \approx 0,331$	51
4.6	Ampliação de uma bacia de Wada da Fig. 4.2.	52
4.7	Número de pontos que formam bacias de Wada pelas iterações do método de teste de Wada para a região que se espera ser uma bacia deste tipo. . .	52
4.8	Espaço de fase do modelo com os parâmetros $\delta = 0,95$ e $e = 1,3 \times 10^{-3}$, com um surgimento de novos atratores com período maiores, mas com uma estrutura similar ao caso com $e = 10^{-3}$	53
4.9	Bacias geradas com $e = 1,3 \times 10^{-3}$, região ampliada em que se formam a fronteira bacias amarelas, ciano, marrom e pretas.	53
4.10	Ampliação das bacias da Fig. 4.9 em que está destacada uma fronteira formada apenas belas bacias do atrator ciano e o atrator marrom.	54
4.11	Número de pontos que formam bacias de Wada pelas iterações do método de teste de Wada para a bacia parcialmente Wada.	54
5.1	Bacias de escape gerada por <i>Leaking</i> no mapa logístico.	56
5.2	Imagem adaptada mostrando o comportamento de um ponto de sela. . . .	57
5.3	Estrutura similar a uma sela caótica para o espaço com os <i>Leakings</i> $0,1 < X < 0,2$ e $0,25 < X < 0,35$	58
5.4	Bacias de escape e estrutura da Fig. 5.3 para <i>Leakings</i> $0,1 < X < 0,2$ e $0,25 < X < 0,35$ destacados em vermelho.	58
5.5	Separação das estruturas formadas pelos escapes de $0,1 < X < 0,2$ e $0,25 < X < 0,35$. a) Espaço com apenas o escape $0,1 < X < 0,2$ b) espaço com apenas o escape $0,25 < X < 0,35$	59
6.1	Crises de união de período do mapa de Hénon. a) Crises formadas pelo cruzamento de pontos fixos de período 1 e 2, destacados na figura. b) Ampliação na estrutura das bifurcações com cruzamentos destacados de repulsores de período 4 e 8.	61

6.2	Diagrama de bifurcação do mapa logístico. Cada cor representa a enésima iteração de $X_0 = 0,5$ (<i>Supertracks</i>). Sendo $s_1(R)$ roxo, $s_2(R)$ azul, $s_3(R)$ ciano, $s_4(R)$ verde claro, $s_5(R)$ verde, $s_6(R) \dots, s_7(R)$ laranja e $s_8(R)$ vermelho. R_1 e R_2 representam crises de união de bandas caóticas.	62
6.3	Mapa de retorno do mapa logístico com a formação de órbitas homoclínicas, em que a rota vermelha representa o sentido negativo de iteração do mapa e o azul, o sentido positivo. a) Órbita formada com $R = R_1$ pela órbita de período 1. b) $R = R_2$ representando a órbita de período 2.	63
6.4	Mapa de retorno do mapa logístico em pontos que não formam órbitas homoclínicas com uma pequena alteração em R_1 : a) $R = 3,66$, b) $R = 3,68$	64
6.5	a) Curvas $s_3(R)$ e $s_4(R)$. b) Curvas $s_5(R)$ e $s_6(R)$. c) Curvas $s_8(R)$ e $s_9(R)$. d) Pontos de homoclinicidade formados pelos cruzamentos das curvas $s_{10}(R)$ e $s_{11}(R)$	65
6.6	Progresso do tamanho das órbitas homoclínicas até o colapso em $R = 4,0$, em que o ponto fixo se torna a origem: a) $R \approx 3,7$; b) $R \approx 3,925$; c) $R \approx 4,0$	65
6.7	a) Curvas $s_3(R)$ e $s_5(R)$. b) Curvas $s_5(R)$ e $s_7(R)$. c) Curvas $s_7(R)$ e $s_9(R)$. d) Pontos de homoclinicidade formados pelos cruzamentos das curvas $s_{11}(R)$ e $s_{13}(R)$	66
6.8	Pontos de homoclinicidade formados pelo cruzamento de curvas de $n = 4$	66
6.9	Pontos de homoclinicidade formados pelo cruzamento de curvas de $n = 8$	67

Lista de Tabelas

4.1 A tabela mostra os atratores encontrados para $\delta = 0,95$ e $e = 10^{-3}$, sendo os três primeiros de período 1 o quarto de período 2 e o último de período 4. Além disso, cada um destes é denominado por meio de uma cor que será utilizada no restante do trabalho para o apresentar visualmente, bem como sua bacia de atração. 45

4.2 Autovalores dos atratores da tabela 4.1. 47

Conteúdo

1	Introdução	14
2	Definições	17
2.1	Mapeamentos dinâmicos	17
2.2	Pontos fixos e atratores	19
2.3	Bacias de atração	21
2.3.1	Bacia de entrelaçamento	22
2.3.2	Bacia de Wada	23
2.3.3	Bacia Crivada	25
2.3.4	Bacia esporadicamente fractal	26
2.4	Órbitas homoclínicas e heteroclínicas	27
3	Bacias de atração em sistemas unidimensionais	28
3.1	O mapa logístico	28
3.2	Método de visualização de bacias unidimensionais	31
3.3	Bacias de atração do Mapa Logístico	32
4	Bacias de atração do modelo Fermi-Ulam	43
4.1	Cálculo dos autovalores e expoente de Lyapunov	45
4.2	Construção das bacias de atração	48
5	<i>Leaking</i> no mapa logístico	55
5.1	Pontos de sela e selas caóticas	56
6	Crises e órbitas homoclínicas no mapa logístico via <i>Supertracks</i>	60
7	Conclusões e Perspectivas	68

Capítulo 1

Introdução

O conceito de tempo é tratado desde os filósofos gregos. Os filósofos chamados de pré-socráticos, por exemplo, Heráclito [1] e Parmênides [2], já realizavam embates sobre o tempo e a ideia por trás deste conceito. Posteriormente, Platão [3] e Aristóteles [4] debruçaram-se novamente sobre este tema, mantendo suas diferenciações de entendimento da filosofia.

Contudo, Isaac Newton [5] desenvolveu o cálculo diferencial, que implementou uma forma de se estruturar o universo analiticamente por meio da variação temporal, fugindo de conceitos puramente filosóficos. Por meio do cálculo, no século XVII, Newton desenvolveu o conceito das chamadas equações diferenciais, que constituem hoje a base da física e da matemática, balizando os livros de física introdutórios [6, 7]. Sendo assim, Newton criou a base do estudo dos fenômenos pela variação do tempo: a dinâmica.

Newton, em seus trabalhos, resolveu o chamado problema de dois corpos, base para os estudos de dinâmica celeste. Porém, ele deixou em aberto o chamado problema de três corpos, que posteriormente mostrou-se não ter solução geral [8]. Poincaré foi um dos matemáticos que trataram profundamente desse problema, com estudos do sistema solar e questionamentos quanto à sua manutenção. O matemático elaborou uma abordagem complexa, que se tornou essencial para os estudos modernos de dinâmica [8].

Com o avanço da computação, novos estudos de sistemas dinâmicos começaram a gerar uma grande revolução na ciência. Destacam-se os estudos de 1963 do matemático Edward N. Lorenz [9]. Neste trabalho, com um sistema teórico voltado para o entendimento da meteorologia, ele encontrou uma estrutura hoje conhecida como atrator caótico. Um atrator caótico é um conjunto de infinitas órbitas periódicas para as quais trajetórias se aproximam assintoticamente, apresentando sensibilidade às condições iniciais e dimensão fractal.

Este atrator, em sua homenagem, é conhecido hoje como atrator de Lorenz. A Fig. 1.1 mostra a evolução do sistema que Lorenz estudou.

Atualmente, vários sistemas com a presença de caos e atratores caóticos têm sido estudados [10, 11, 12], gerando livros-texto muito robustos sobre a dinâmica caótica [8, 13],

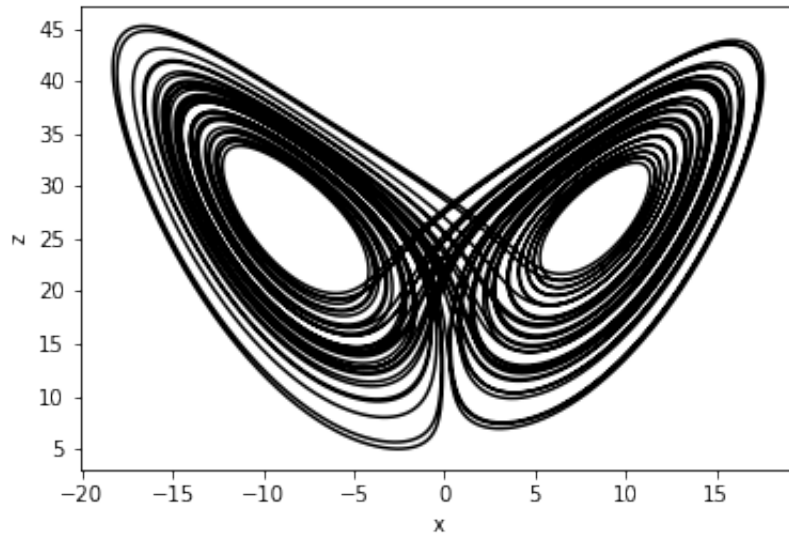


Figura 1.1: Atrator de Lorenz.

além de diversos estudos de dinâmica de populações [14, 15], ciência de materiais [16] e neurociência [17, 18].

Até sistemas dinâmicos simples e discretos podem apresentar caos e formam bases importantes de estudos dinâmicos [19]. Estes sistemas podem mudar bruscamente com a alteração de seus parâmetros, fenômeno conhecido como bifurcações [20, 21]. Além disso, esses sistemas são bem descritos pela teoria de transições de fase [22]. Os estudos de transições de fase em sistemas discretos muitas vezes são regidos por expoentes críticos, que formam classes de universalidade e invariância de escala [23, 20, 24].

Por outro lado, sistemas dinâmicos discretos permitem a exploração de espaços de parâmetros multidimensionais, nos quais emergem estruturas complexas frequentemente caracterizadas por dimensões não inteiras, ou fractais [25, 26, 27, 28]. Nesse contexto, destacam-se as chamadas curvas extremas. Elas constroem algumas estruturas no espaço de parâmetros e possuem uma dimensão fractal crítica [29, 30, 31].

Neste trabalho, investigaremos estes sistemas simples e discretos. Inicialmente, iremos estudar regimes em que mais de um atrator coexiste por meio das bacias de atração [32, 33], tanto em sistemas com apenas uma dimensão quanto com duas. A fronteira das regiões que convergem para cada um destes atratores é muitas vezes denominada fractal [34]; um tipo que será muito estudado são as bacias de Wada [35], quando três ou mais bacias de atração compartilham todas as suas fronteiras. Além disso, adicionaremos em um destes sistemas um escape de partículas, conhecido como *leaking* [36], e estudaremos suas fractalidades. Por fim, faremos um estudo da variação dos parâmetros por meio de uma curva conhecida como *supertracks* [37, 38] para o estudo da variação dos atratores caóticos, as crises, mais especificamente uma crise chamada de crise de união de bandas caóticas.

Outro tópico central são as órbitas homoclínicas e heteroclínicas [39, 40], órbitas que serão formalmente definidas no próximo capítulo devido ao seu rigor técnico. Estas órbitas serão importantes para a explicação do surgimento das bacias de Wada e dos pontos formados pelo cruzamento das *supertracks*.

Capítulo 2

Definições

Neste capítulo, apresentamos uma revisão da literatura a fim de balizarmos o conhecimento desenvolvido ao longo do trabalho. Tratando inicialmente do conceito de fluxos que geram os mapeamentos dinâmicos, depois pontos fixos, atratores e por fim bacias de atração. Destacamos a definição das fronteiras de bacias de atração, tópico central utilizado ao longo do trabalho.

2.1 Mapeamentos dinâmicos

As equações diferenciais representam um formalismo fundamental para a modelagem de fenômenos dinâmicos desde sua implementação com a teoria newtoniana [5]. Sua grande aplicação em sistemas dinâmicos é uma maneira de gerar um contínuo de valores das variáveis do sistema em relação ao tempo. No contexto de sistemas dinâmicos esse contínuo de valores é chamado de fluxo, de maneira geral um fluxo pode ser dado como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_N) \\ &\vdots \\ \dot{x}_N &= f_N(x_1, \dots, x_N)\end{aligned}\tag{2.1}$$

sendo $(x_1, \dots, x_N)$ as variáveis dinâmicas. Já a porção esquerda da equação representa a derivada da variável em relação ao tempo t , ou seja, $\dot{x}_N \equiv \frac{dx_N}{dt}$. Quando as funções dinâmicas $(f_1, \dots, f_N)$ são descritas por meio de potências de primeira ordem são chamados de sistemas lineares, qualquer outro sistema diferente é chamado de não-linear.

Sistemas não lineares carregam uma dificuldade superior em sua resolução. Além disso, em geral, os sistemas não lineares não podem ser resolvidos analiticamente, sendo necessários métodos numéricos.

Uma outra maneira de descrever sistemas dinâmicos são os chamados mapeamentos discretos ou equações de diferenças. Estes mapeamentos, ao invés de gerarem um contínuo de valores, criam valores discretos de variáveis, assim como uma sequência na matemática.

Um mapeamento descreve o passo seguinte de uma variável em relação a uma função do passo anterior, ou seja:

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (2.2)$$

o conjunto formado pelos sucessivos pontos partindo de uma condição inicial (x_0) é conhecido como órbita. As órbitas podem exibir uma diversidade de comportamentos. Todo o conjunto de órbitas no sistema é chamado de retrato de fases. Este retrato pode exibir comportamento periódico, quase-periódico ou caótico.

A fim de exemplificar melhor a complexidade presente em espaços de fase vamos analisar o mapa padrão ou mapa de Chirikov–Taylor [41, 42, 43]. Neste mapa bidimensional, que consiste em um rotor forçado, θ é a fase de oscilação deste rotor e p é o momento de oscilação, formando um par canônico (θ, p) . O Mapa é descrito por:

$$T_c : \begin{cases} \theta_{n+1} = (\theta_n + p_{n+1}) \mod 2\pi \\ p_{n+1} = p_n + K \sin(\theta_n) \end{cases}, \quad (2.3)$$

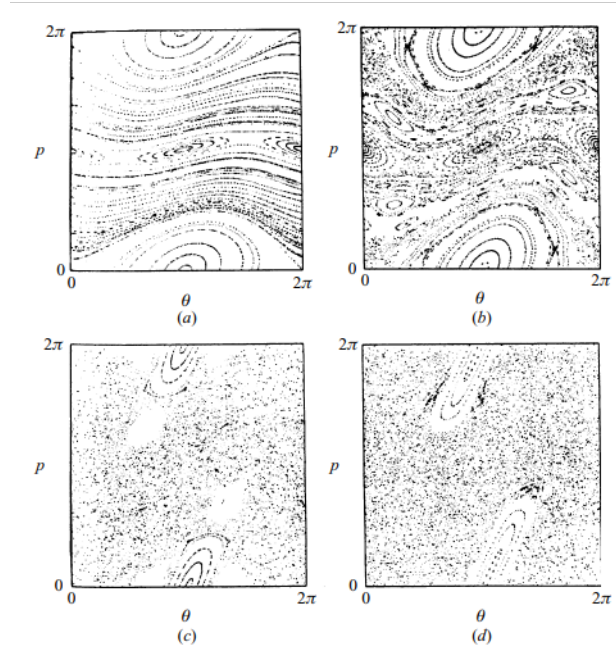


Figura 2.1: Variação dos espaços de fases por meio da alteração do parâmetro K com a) $K = 0,5$ b) $K = 1,0$ c) $K = 2,5$ d) $K = 4,0$.

Para exemplificar o comportamento deste mapa analisemos a figura 2.1, retirada de [44]. Inicialmente, na figura 2.1a) existe um espaço bem comportado em que existem ilhas de estabilidade, algumas curvas quase-periódicas e pequenas regiões caóticas. Entretanto, com a mudança adequada do parâmetro K , como mostra a sequência de a) a d) na 2.1 este espaço apresenta cada vez mais regiões maiores de caos e menos periodicidade. Até que as ilhas são bem reduzidas envoltas em um grande mar caótico.

Uma maneira de se visualizar a formação dos mapeamentos é por meio da chamada seção de Poincaré. A interseção do fluxo com a superfície da seção de Poincaré produz uma sequência de pontos que geram justamente o conjunto de pontos que descrevem um mapeamento dinâmico.

A Fig. 2.2, retirada de [13], exemplifica visualmente esta formação do mapeamento. Na imagem as curvas com setas representam o fluxo de soluções que cruza a região hachurada (seção de Poincaré). Então, estes pontos gerados nesta região representam os pontos do mapeamento.

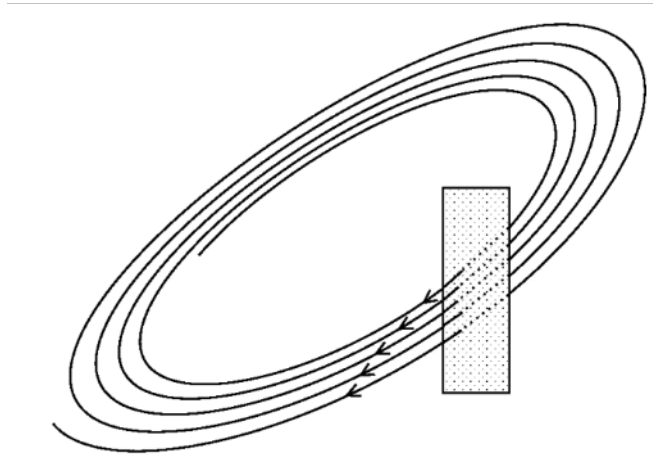


Figura 2.2: Representação de um fluxo de soluções interceptando uma seção de Poincaré.

2.2 Pontos fixos e atratores

Um ponto fixo é um ponto em que a dinâmica permanece nele, para um mapeamento podemos definir como:

$$x_{n+1} = x_n = x^* = f(x^*), \quad (2.4)$$

ou seja, aplicando um valor x^* na função do mapeamento resultará o mesmo valor aplicado. Pontos fixos podem ser classificados de 3 formas quanto à sua estabilidade, sendo: assintoticamente estável, estabilidade neutra ou instável.

De maneira simples é possível classificar estes pontos por meio da análise sucessiva das iterações do mapa $x_0, x_1, x_2, \dots$. Caso estes pontos se aproximem cada vez mais do ponto fixo ele é assintoticamente estável, se os pontos se afastam se trata de ponto fixo instável e por fim se a dinâmica nem se aproxima ou afasta do ponto fixo se trata de uma estabilidade neutra.

Podemos analisar a série de Taylor nas redondezas do ponto fixo, considerando uma pequena perturbação ϵ_n de tal forma que $x_n = x^* + \epsilon_n$. Gerando a série:

$$x_{n+1} = x^* + \epsilon_{n+1} = f(x^*) + \epsilon_n \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} + \frac{1}{2} \epsilon_n^2 \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x^*} + \dots \quad (2.5)$$

Como $x^* = f(x^*)$ e o valor de ϵ_n é significativamente pequeno, podemos desconsiderar os termos de ordem 2 e superiores, obtendo:

$$\epsilon_{n+1} \sim \epsilon_n \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} \quad (2.6)$$

Dessa forma, obtemos uma relação entre a distância anterior e a seguinte em relação ao ponto fixo. Com isso, podemos analisar a estabilidade dos pontos fixos de acordo com:

- $\left| \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} \right| < 1$: Implica em uma aproximação sucessiva do ponto fixo pelas iterações. Portanto, um ponto fixo assintoticamente estável
- $\left| \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} \right| > 1$: Neste caso com aplicação das iterações do mapa ocorrerá um afastamento do ponto fixo. Assim um ponto fixo instável
- $\left| \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} \right| = 1$: Se os demais termos da expansão de Taylor forem nulos, este cenário implica em não se afastar nem se aproximar do ponto fixo, ou seja, se trata de um ponto fixo de estabilidade neutra.

Destes pontos fixos destaca-se o ponto fixo assintoticamente estável que também pode ser chamado de atrator. De forma geral, atrator é um ponto ou conjunto de pontos que para um tempo suficientemente grande a dinâmica converge para eles. Assim, um ponto assintoticamente estável tem uma dinâmica atrativa, um atrator. O surgimento de atratores depende de um tipo específico de dinâmica, os chamados sistemas dissipativos. A dissipação faz com que a área do espaço fase contraia.

Segundo [8], um atrator é definido como um conjunto fechado A que deve satisfazer simultaneamente três propriedades fundamentais:

1. A é um conjunto invariante: Qualquer trajetória $x(t)$ que se inicie dentro de A permanecerá contida em A para todo o tempo.
2. A atrai um conjunto aberto de condições iniciais: Existe um conjunto aberto U que contém A de modo que, se a condição inicial $x(0) \in U$, a distância da trajetória $x(t)$ até A tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. Isso significa que A atrai todas as trajetórias que começam suficientemente perto dele. O maior conjunto U possível com essa característica é chamado de bacia de atração de A .
3. A é mínimo: Não existe nenhum subconjunto próprio de A que cumpra as duas condições anteriores.

Atratores podem se dividir em:

Ponto fixo: Também chamado de órbita periódica de período 1, é um atrator de dimensão nula cuja convergência se dá para um único ponto no espaço de fases.

Periódico: Corresponde a uma órbita composta de um número finito de múltiplos pontos que se repetem a intervalos fixos.

Quase-Periódico: No fluxo, este atrator resulta da combinação de duas frequências cuja razão entre elas é irracional.

Estranho: Apresenta geometria complexa de dimensão não inteira (fractal). Muitos desses atratores possuem divergência exponencial de duas condições iniciais próximas, conhecidos como atratores **Caóticos**.

2.3 Bacias de atração

Outro conceito importante derivado de atratores são as bacias de atração. Bacia de atração é um conjunto formado por pontos que convergem para um atrator específico [45, 46, 47].

A presença de mais de uma bacia de atração em um espaço de fases, multi-estabilidade, implica em fronteiras entre cada um destes conjuntos. Com isso, diferenciam-se os tipos de bacias de atração por meio dos tipos de fronteiras.

Para exemplificar como as fronteiras das bacias de atração podem se diferenciar vamos utilizar a Fig. 2.3 retirada de [32]. Neste artigo, considera-se o mapa de Hénon, em um valor inicial (x_0, y_0) é mapeado para a posição $(a - x_0^2 - by_0, x_0)$.

Na Fig. 2.3a), é exibida uma bacia cuja a fronteira é suave. A região amarela exibe uma órbita que converge ao atrator no centro da imagem a). Já a bacia laranja converge para um atrator no infinito. Bacias de atração com fronteiras suaves se destacam por serem muito bem definidas, apresentando dimensões inteiras.

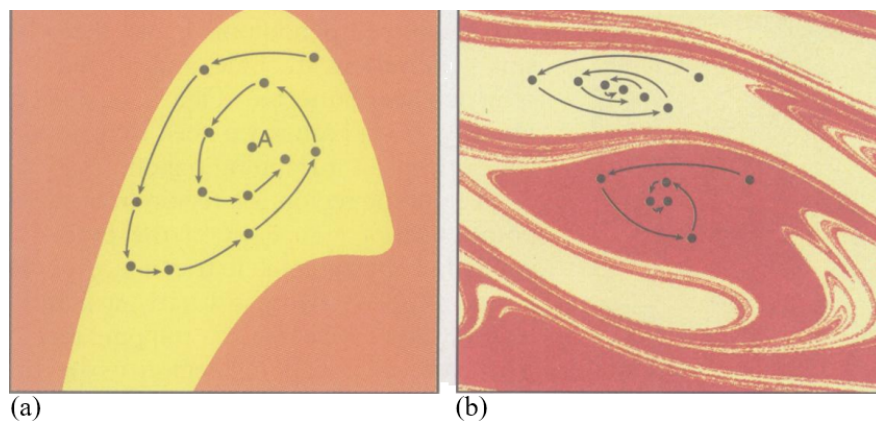


Figura 2.3: Comparação entre dois tipos de bacias de atração a) Representa uma bacia com fronteira suave b) Representa uma bacia com fronteira fractal

Por outro lado, a Fig. 2.3b) baseada em um pêndulo forçado amortecido, mostra uma fronteira de dimensão fractal separando bacias. Na imagem são exibidas duas bacias com órbitas representando a convergência para seus atratores, conforme indicam as trajetórias

nas regiões amarelas e vermelhas. Neste caso, a fronteira é mais complexa com regiões de maior dificuldade de distinguir as duas bacias.

Fractais são objetos matemáticos caracterizados por exibir estrutura em escalas arbitrariamente pequenas, manifestando propriedades de autossimilaridade ou autoafinidade. Diferente das formas euclidianas clássicas, a geometria fractal permite descrever sistemas irregulares onde a dimensão métrica frequentemente diverge da dimensão topológica. Estas estruturas foram popularizadas nos anos 1970 por Benoit Mandelbrot [48].

Além disso, as fronteiras fractais são divididas em outros tipos dependendo de sua estrutura. Podendo ser dividido em bacias de entrelaçamento, bacia de Wada, bacia crivada e bacia esporadicamente fractal [49].

2.3.1 Bacia de entrelaçamento

Bacias de entrelaçamento são fronteiras de bacias com diferentes dimensões em distintas regiões. De tal forma que cada região fractal apresenta fronteiras suaves internas, ou seja, a fractalidade se mistura com fronteiras suaves dependendo das ampliações do sistema. O modelo deste artigo é um rotor duplo pulsado, com 4 variáveis dinâmicas $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$. Todas as condições iniciais são consideradas com as velocidades angulares nulas.

As condições que convergem para o repouso $(0, 0, 0, 0)$ são apresentadas com a cor preta, já as condições iniciais em branco convergem para um atrator periódico com período 4. As bacias destes atratores formam nas regiões mais marginais fronteiras suaves. Entretanto, no meio da figura existem maiores incertezas na fronteira, denotando uma bacia do tipo de entrelaçamento. Como vemos na Fig. 2.4, retirada de [50].

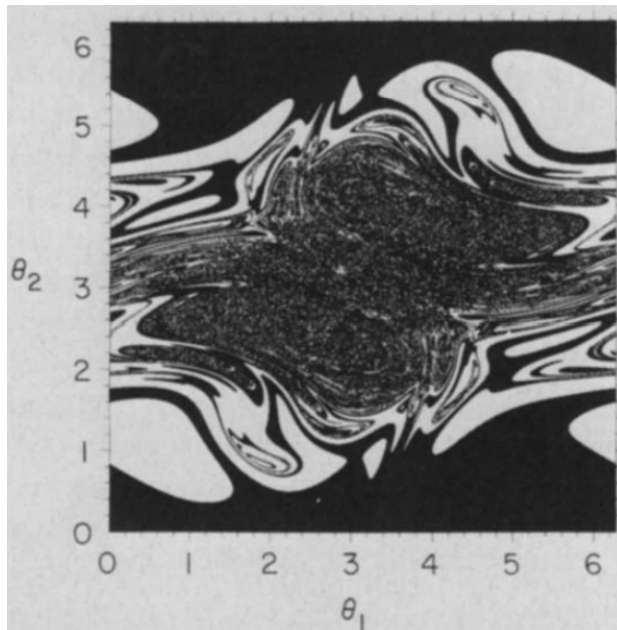


Figura 2.4: Figura representando uma bacia de entrelaçamento

2.3.2 Bacia de Wada

Estruturas formadas por 3 ou mais bacias ao longo de toda a fronteira são denominadas bacias de Wada. O primeiro sistema que apresenta essa propriedade foi apresentado por Kunizo Yoneyama [35] que atribuiu a descoberta ao seu professor Takeo Wada de homenageando-o dando seu nome ao fenômeno. Um exemplo de bacia deste tipo é a Fig. 2.5 [51].

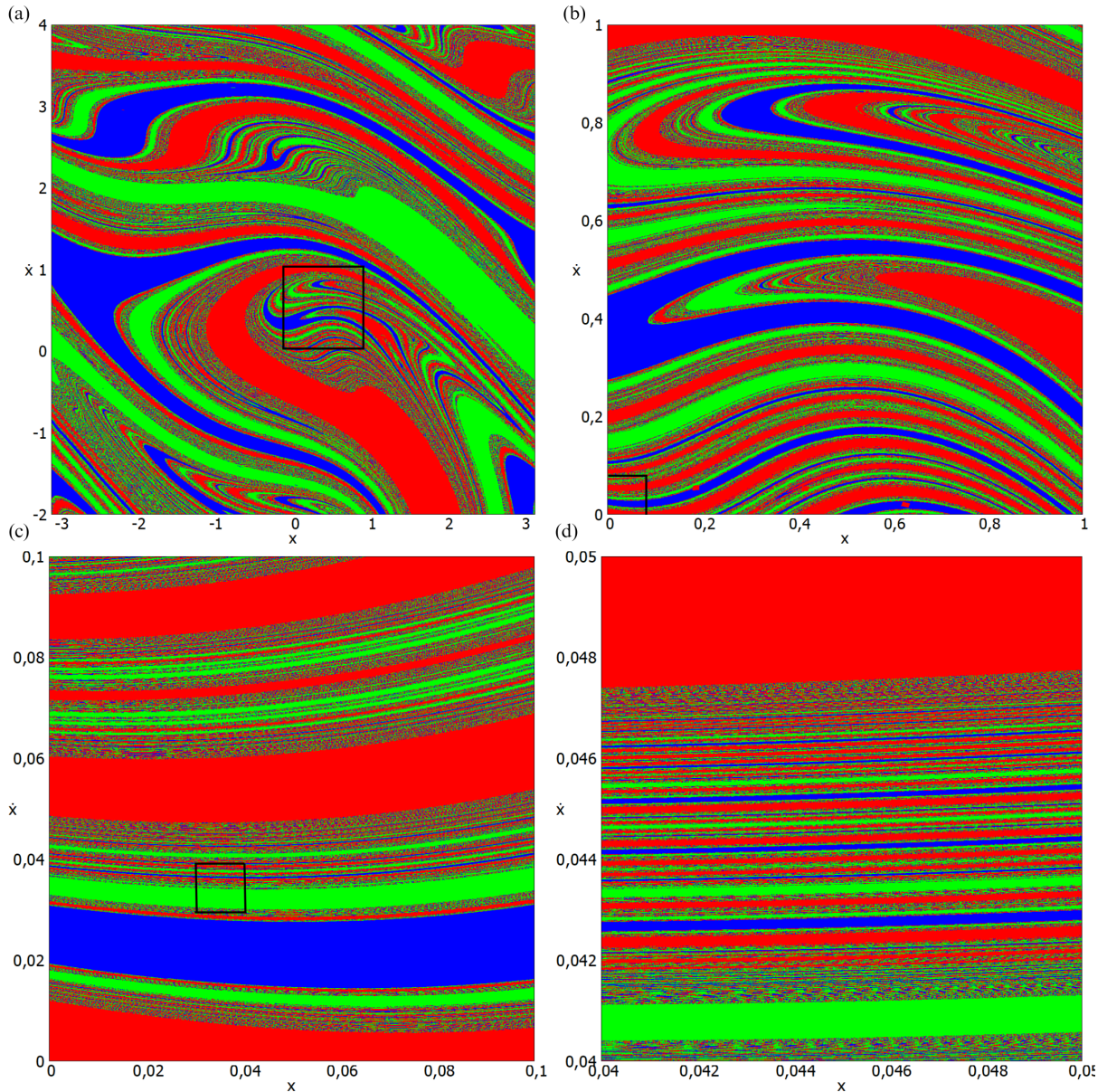


Figura 2.5: Figuras representando uma bacia de Wada (a) Uma ampliação total mostrando as bacias (b) Ampliação de (a) entre $0 > x > 1$ e $0 > \dot{x} > 1$ (c) Ampliação de (b) entre $0 > x > 0,1$ e $0 > \dot{x} > 0,1$ (d) Ampliação de (b) entre $0,04 > x > 0,05$ e $0,04 > \dot{x} > 0,05$

Esta figura é gerada a partir de uma versão do pêndulo forçado amortecido, que é criada a partir da seguinte equação diferencial ordinária (EDO):

$$\ddot{x} + 0,2\dot{x} + \sin(x) = 1,66 \cos(t), \quad (2.7)$$

com estes parâmetros específicos são encontrados 3 atratores periódicos distintos coexistindo dependendo da condição inicial. A bacia que converge para cada um destes atratores é pintada com uma das cores da figura. Em 2.5(a) vemos a fronteira se deformando e contendo as 3 cores em sua estrutura. Na figura 2.5(b) é feita uma ampliação em 2.5(a) destacada na própria figura, na imagem é vista novamente a repetição das bacias vermelha, azul e verde. Já em 2.5(c) e 2.5(d) são feitas novas ampliações destacadas, neste caso além de persistir a repetição das 3 bacias vemos também traços se repetindo com as ampliações, mostrando que a fronteira é autoafim.

Para testar se uma bacia é do tipo Wada, Daza [51] propôs um método numérico que investiga células de uma grade G cobrindo a região de interesse. Apenas para efeitos didáticos, vamos nos restringir a um número total de 3 bacias ($N_A = 3$) e a bacias bidimensionais (onde tipicamente G é de 1000×1000 , correspondendo a 10^6 caixas c_i , com $i \in [1, 10^6]$). Primeiramente, identificam-se todas as caixas que façam fronteira, em pelo menos um ponto, com a caixa c_j a ser analisada. No caso bidimensional, isso corresponde a 9 caixas, sendo c_j a caixa central (primeira coluna da Fig. 2.6). O objetivo é identificar o número m de bacias que estão envolvidas na fronteira de c_j (as bacias estão representadas pelas cores verde, laranja e azul). Em seguida, consideramos os pontos centrais das caixas (pontos em preto e laranja na Fig. 2.6) e os evoluímos para identificar a bacia a que eles pertencem. Se todos evoluírem para o mesmo atrator, consideramos que c_j é uma parte interior da bacia desse atrator, ou seja, c_j não pertence à fronteira e o número de bacias envolvidas é $m=1$. Se todos os atratores forem alcançados, consideramos que c_j pertence à bacia de Wada, portanto, $m = N_A = 3$. Em ambos os casos, a análise de c_j está finalizada.

Por outro lado, em um caso intermediário, onde nem todos os atratores foram alcançados, selecionam-se os pontos das duas caixas vizinhas mais próximas que identificaram diferentes bacias (pontos laranjas na primeira coluna da Fig. 2.6) e calcula-se o ponto médio entre eles (ponto preto na terceira coluna da Fig. 2.6). Esse ponto é evoluído na esperança de que ele identifique o terceiro atrator. Na primeira linha, a cor azul, correspondente à terceira bacia, é somente identificada após repetir 2 vezes o procedimento (dizemos que o algoritmo deu $q=2$ passos) classificando c_j como pertencente à bacia de Wada, $m = N_A$. Na segunda linha da Fig. 2.6, após $q=2$ passos a terceira bacia não foi identificada. Idealmente, o procedimento deveria ser repetido com $q \rightarrow \infty$. Na prática, q é escolhido definindo-se uma distância suficientemente pequena entre dois pontos adjacentes. No exemplo da segunda linha da Fig. 2.6, para $q=3$, apenas duas bacias ($m = 2$) foram identificadas.

Para caracterizar a presença do número $m \in [2, N_A]$ de bacias nas fronteiras das bacias de atração, identificadas após q passos, define-se [51]:

$$W_m = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\#G_m^q}{\sum_{i=2}^{N_A} \#G_i^q}, \quad (2.8)$$

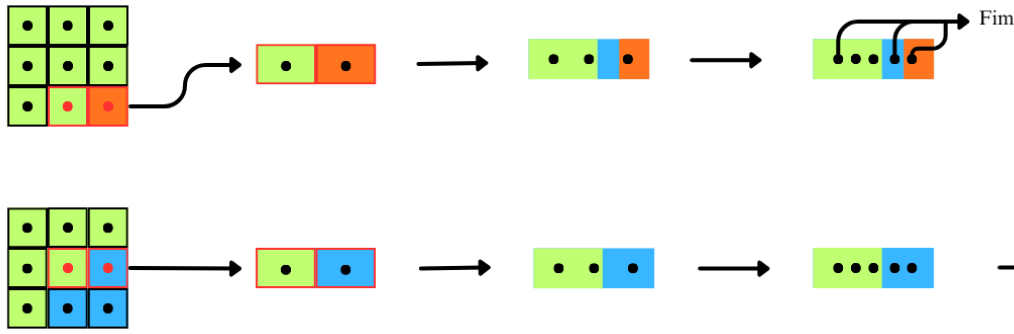


Figura 2.6: Exemplo visual do método para teste de complexidade de bacias e/ou teste de bacias de Wada.

onde $\#G_m^q$ representa o número de caixas na grade G que apresentam um total de m bacias após q iterações. O denominador da Eq. (2.8), representa a soma do número de caixas que contém fronteiras. Portanto, W_m nos dá a probabilidade de encontrarmos fronteiras compostas por um total de m bacias ao longo de toda a fronteira das bacias em G .

Analisando apenas se todas as bacias participam da fronteira, propriedade de Wada. Então, caso $W_{N_A} = 0$ este sistema não apresenta fronteiras de Wada em seu espaço, já se $W_{N_A} = 1$ todas as caixas formando fronteira possuem todas as N_A bacias, portanto, trata-se de uma bacia de Wada. Por outro lado, caso $0 < W_{N_A} < 1$ algumas fronteiras possuem todas as bacias e outras não, tratando-se de uma bacia parcialmente Wada.

2.3.3 Bacia Crivada

A bacia crivada, diferentemente das outras bacias fractais, apresenta uma incerteza muito alta em relação às bacias com fronteiras fractais tradicionais. Devido à sua estrutura topológica, em bacias crivadas cada ponto de uma bacia forma fronteira com outra bacia. Dessa forma, bacias crivadas não possuem nenhuma região interna que apenas existem pontos de uma bacia, diferente do que é observado nas outras bacias fractais. A Fig. 2.7, retirada de [52], representa uma bacia crivada.

Este nome se refere ao fato desse tipo de bacia ser composta por vários "furos", como se fosse uma peneira. Ou seja, cada bacia é formada por várias regiões pequenas de outra bacia.

Em [52] é utilizado o modelo de oscilador forçado, neste caso com uma forçante periódica, dado por:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + 4x^3 - 4x = f \sin(\phi t), \quad (2.9)$$

em que são utilizados $\gamma = 0,632$, $f = 1,0688$ e $\phi = 2,2136$. Os atratores deste caso são os dois mínimos de um potencial duplo.

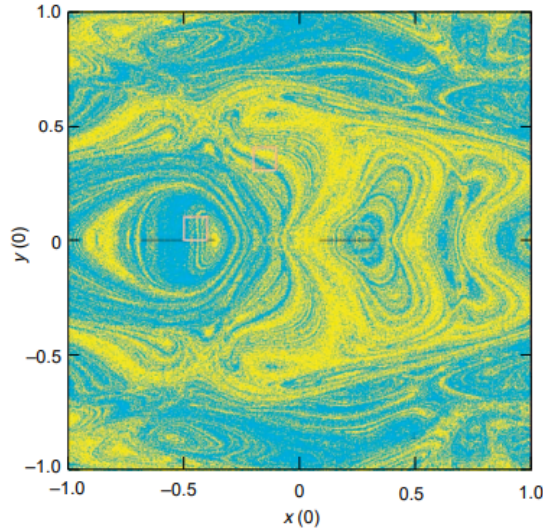


Figura 2.7: Figura mostrando a estrutura de uma bacia crivada.

2.3.4 Bacia esporadicamente fractal

Este tipo de bacia se diferencia por apresentar uma fronteira suave e contínua. Entretanto, esta estrutura apresenta dimensão fractal de tal forma que impacta em se afirmar com certeza as condições finais de certas regiões do sistema. Além disso, esta bacia também satisfaz as condições das propriedades de uma bacia de entrelaçamento.

A Fig. 2.8, mostra um deste tipo de bacia, no artigo [53] é construída em escalas reduzidas apresentando uma dimensão fractal não inteira e maiores escalas se mostram com precisão suficiente nas condições finais.

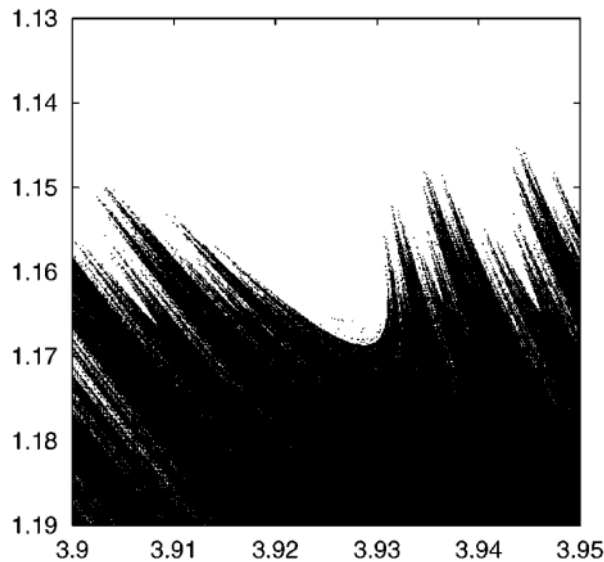


Figura 2.8: Figura mostrando um exemplo de estrutura de uma bacia esporadicamente fractal

O mapeamento usado no artigo [53] é um mapeamento bidimensional não inversível, descrito por:

$$y_{n+1} = \lambda y_n + \text{sen}(2\pi x_n), \quad (2.10)$$

$$x_{n+1} = M(x_n), \quad (2.11)$$

$M(x_n)$ é um mapeamento unidimensional com estrutura ligeiramente complicada. [Para $x \leq 0$, $M(x) = (9/4)x$; para $4/9 \leq x \leq 5/9$, $M(x) = (81/4)(x - x^2) - 4$; for $x \geq 5/9$, $M(x) = (9/4)(1 - x)$.]. Já $\lambda = 1.1$. A bacia preta se refere a condições que convergem para um atrator em $x = -1$, já o restante é um conjunto invariante que não é este atrator.

2.4 Órbitas homoclínicas e heteroclínicas

Órbitas homoclínicas são órbitas que convergem para um ponto fixo em um tempo $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow -\infty$. Já órbitas heteroclínicas conectam dois ou mais pontos fixos instáveis diferentes também considerando um tempo $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow -\infty$.

Normalmente estas órbitas estão atreladas com o conceito de variedade instáveis e estáveis. De tal forma que condições que partem da variedade estável ou instável alcançam o ponto fixo quando evoluídas em um tempo positivo ou negativo, gerando órbitas homoclínicas. Órbitas heteroclínicas emergem quando a variedade instável de um dos pontos fixos pertence à variedade estável do outro [39, 40]. Porém, neste trabalho iremos explorar como repulsores podem gerar estes fenômenos em mapeamentos unidimensionais e o impacto deles na dinâmica.

Capítulo 3

Bacias de atração em sistemas unidimensionais

O estudo de bacias de atração em sistemas bidimensionais é um tópico muito bem conhecido e discutido [54, 55] abrangendo desde trabalhos em bacias de Wada até métodos complexos para seus testes [51, 46]. Entretanto, sistemas unidimensionais tendo suas bacias estudadas não são tão comuns. Principalmente bacias de Wada com apenas algumas exceções [15].

Assim, neste capítulo vamos explorar as bacias de atração de modelos unidimensionais, mais especificamente bacias de atração do mapa logístico, buscando entender, principalmente, casos de bacias de Wada a fim de compararmos com os casos bidimensionais e buscarmos entender um pouco melhor esse fenômeno.

Então, inicialmente, o modelo será descrito e serão discutidas todas suas particularidades, como bifurcações e rotas para o caos. Além de demonstrar, como Robert May descreve [19], que este "sistema simples pode possuir uma dinâmica muito complicada".

Após a contextualização, precisaremos analisar figuras de uma dimensão, porém, estruturas unidimensionais não apresentam uma direta complexidade visual em suas fronteiras, diferentemente de sistemas de duas dimensões. Para isso, foi desenvolvido um método de se visualizar essas bacias em uma figura de duas dimensões. Por fim, descreveremos as bacias de atração encontradas no mapa com foco nas bacias de Wada.

3.1 O mapa logístico

O mapa logístico é um mapeamento dinâmico proposto por Robert May em 1976. No referido trabalho, May demonstrou como um modelo matematicamente simples pode carregar uma dinâmica altamente complicada [19].

O trabalho de May busca resolver por meio do mapa a equação logística proposta por Pierre-François Verhulst [56]. Matematicamente a equação é dada por:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \alpha N^2, \quad (3.1)$$

originalmente esta equação gera a chamada de função logística que posteriormente May cria uma solução discreta para o problema. Este modelo tem como ideia modelar populações de animais porém foi aplicado em genética [57] e epidemiologia [58].

Já a solução de May é descrita matematicamente como:

$$X_{n+1} = RX_n(1 - X_n), \quad (3.2)$$

em que X_n é a variável dinâmica do sistema a ser iterada e R é o parâmetro de controle associado ao comportamento quadrático do mapeamento. Em que $0 \leq X \leq 1$ e $0 \leq R \leq 4$

Este modelo é muito importante para estudos dinâmicos devido à sua simplicidade para testar ideias e teses que seria mais complicadas com outros modelos [59], mas também impactou em estudos biológicos [60].

A riqueza do modelo advém do fato de que ele pode se comportar de formas distintas dependendo do parâmetro R podendo exibir atratores periódicos e caóticos. A fim de visualizar essa complexidade é construída a Fig. 3.1, nela são feitas 1500 divisões em $0 \leq R \leq 4$, para cada valor de R partindo de $X = 0.5$ é eliminando um transiente de 1000 passos, ou seja, mostra-se o estado estacionário. Por fim, são armazenados 200 pontos para a visualização de todos esses atratores. Este tipo de diagrama é conhecido como diagrama de bifurcação.

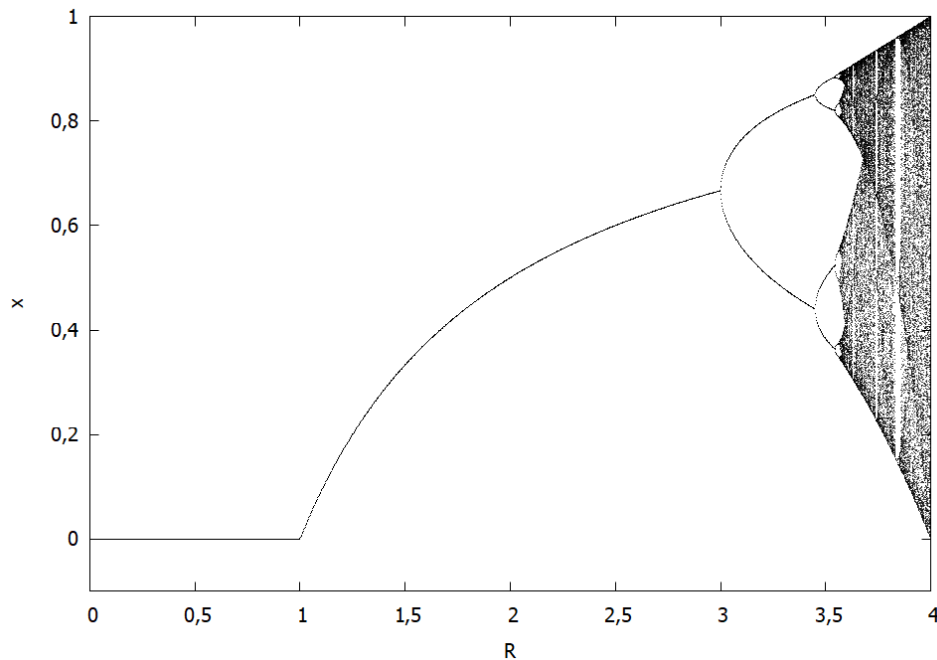


Figura 3.1: Diagrama de bifurcação mapa logístico para $0 \leq R \leq 4$.

Uma bifurcação ocorre quando há uma mudança na dinâmica antes e depois de um parâmetro crítico. No diagrama de bifurcação da Fig. 3.1 ocorrem 3 tipos distintos de

bifurcações, os quais podem ser melhor explorados.

Na Fig. 3.2 é feita uma ampliação na Fig. 3.1 em $0,9 \leq R \leq 1,1$. Nela podemos ver que antes da região destacada ($R = 1$) o sistema tinha como atrator o ponto $X = 0$ depois disso este valor deixa de ser uma solução e a solução se torna uma curva crescente para entendermos essa mudança de comportamento revisitemos a definição de ponto fixo definida pela Eq. (2.4), aplicando esta condição no mapa logístico:

$$X^* = RX^*(1 - X^*), \quad (3.3)$$

uma resposta trivial é considerar um pontos fixo $X_1^* = 0$. Porém, rearranjando a equação temos também como solução:

$$X_2^* = 1 - \frac{1}{R}, \quad (3.4)$$

em que podemos testar a estabilidade por

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{X_2^*} = R - 2R\left(1 - \frac{1}{R}\right), \quad (3.5)$$

rearranjando,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{X_2^*} = -R + 2. \quad (3.6)$$

Com este resultado, para $0 < R < 1$ a derivada será maior que um no ponto fixo X_2^* , portanto o ponto fixo será repulsivo, por isso entre zero e um o atrator do sistema é X_1^* . Já entre $1 < R < 3$ o módulo da derivada é menor que um, se tornando então um atrator.

Esta mudança qualifica uma bifurcação transcítica em que dois pontos fixos invertem sua estabilidade. Na Fig. 3.2 esta região é ampliada com destaque para $R = 1$ em que X_2^* se torna o atrator.

Para $R \approx 3$ a derivada do mapa em X_2^* tem módulo maior que 1 tornando o ponto fixo X_2^* repulsivo, surgindo um novo atrator de período 2, ou seja, em $R = 3$ ocorre uma bifurcação de duplicação de período.

Esta bifurcação ocorre repetidas vezes até ser gerado um atrator caótico, essa sequência de bifurcações é conhecida como cenário de Feigenbaum [61], como destacado na Fig. 3.3. A razão entre as distâncias de sucessivos parâmetros de bifurcação convergem para uma constante que leva o nome do próprio físico, constante de Feigenbaum $\delta = 4.669201609103$.

Após o surgimento do atrator caótico ocorrem certas janelas de periodicidade, como mostrado na Fig. 3.4. Esta janela se forma através de uma bifurcação do tipo tangente, onde o gráfico do mapa de retorno tangencia a reta identidade formando o atrator de período 3.

Esta bifurcação será retomada no seção 3.3 para estudar fenômeno de bacias Wada.

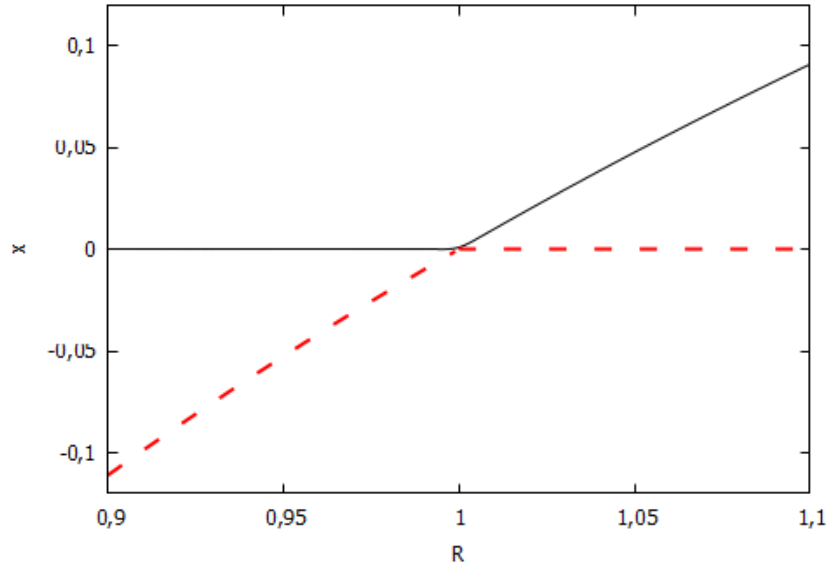


Figura 3.2: A figura mostra uma ampliação da Fig. 3.1 na região em que ocorre uma bifurcação transcritical, mostrando a inversão de atratividade dos pontos fixos.

3.2 Método de visualização de bacias unidimensionais

Antes de explorar as bacias de atração em sistemas unidimensionais vamos desenvolver uma forma mais eficiente de visualizar as fronteiras dessas bacias.

Para essa visualização vamos construir uma figura com dois eixos representando a mesma variável de condições iniciais. Quando duas condições iniciais (uma de cada eixo) convergirem para o mesmo atrator, essa coordenada é registrada com a cor atribuída à bacia de atração do atrator. Caso contrário apresentará a cor branca.

Para exemplificar este método vamos partir das bacias de Wada exploradas por Vandermeer [15]. Neste trabalho é estudado um modelo de presa predador baseado em um mapa do círculo com a estrutura da forma:

$$\Theta_{t+1} = \Omega + \Theta_t + \left(\frac{k}{2\pi b} \right) \sin(2\pi b \Theta_t), \quad (3.7)$$

onde os parâmetros utilizados são $\Omega = 0.5$, $k = 6$ e $b = 5$ formando 5 atratores de período 2. Na Fig. 3.5 cada uma das bacias de atração destes atratores é apresentada com uma cor.

Na Fig. 3.5(a) são visíveis várias regiões das distintas bacias com regiões contínuas dos 5 atratores. Porém, esta imagem dessas bacias não mostram de forma tão clara a estrutura da fronteira.

Já na 3.5(b) a existência da região branca modifica a percepção da sua fractalidade. Cada bacia apresenta-se separada das demais. Note que as colunas correspondentes à mesma bacia são identicamente fragmentadas. O que permite escolher a coluna de maior largura para estudar toda a complexidade da bacia de interesse. O mesmo se dá para as linhas. A facilidade na visualização das características de todas as bacias confere uma

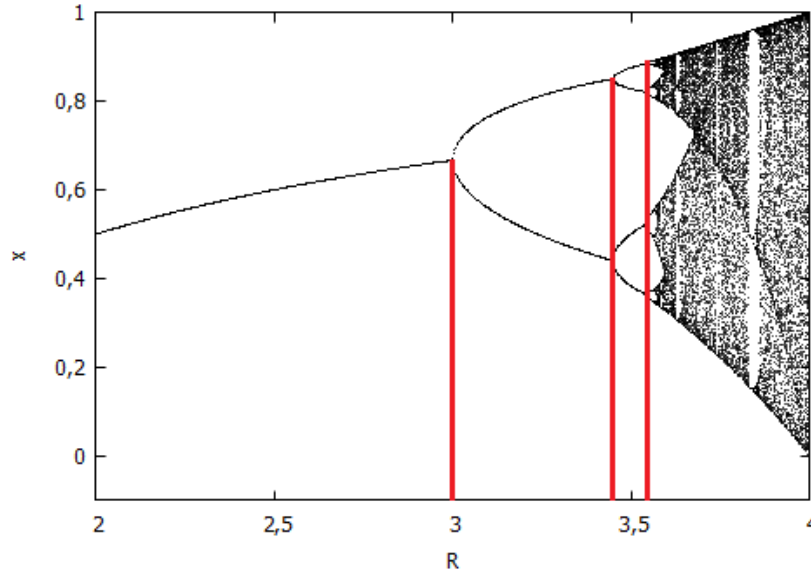


Figura 3.3: A figura mostra outra ampliação da Fig. 3.1 mostrando uma sequência de duplicações de período, representando o cenário de Feigenbaum.

vantagem deste método em relação ao apresentado na 3.5(a).

Além deste método facilitar a análise de bacias de atração em modelos unidimensionais ele pode ser aplicada para visualizar fronteiras de bacias de atração de modelos com dimensões maiores, porém os reduzindo para apenas uma dimensão. Reduzindo custos computacionais.

Na próxima seção vamos utilizar esta forma de visualização de bacias para o mapa logístico.

3.3 Bacias de atração do Mapa Logístico

Nesta seção vamos utilizar um tipo de variação já empregada por May em seu trabalho original [19], onde considera-se um novo mapa formado pelo mapa logístico iterado N vezes, ou seja,

$$X_{n+1} = f^N(X_n). \quad (3.8)$$

Portanto, para um atrator de período N , no mapa logístico, com essa variação serão gerados N atratores de período 1. Então, condições iniciais irão, agora, convergir para cada um destes novos atratores gerando N bacias de atração.

Inicialmente, estudamos casos em que ocorrem a multiestabilidade de 2 ou 3 bacias simultaneamente ($f^2(X_n)$ e $f^3(X_n)$). Neste caso foi utilizado $R = 3,3$ para 2 bacias. Já, para 3 bacias, foi utilizado $R = 3,83$. Na Fig. 3.6 estão destacados os parâmetros no diagrama de bifurcação.

Para $R = 3,3$, em $f^2(X_n)$, os atratores formados são $X_1 = 0,47942$ e $X_2 = 0,82360$.

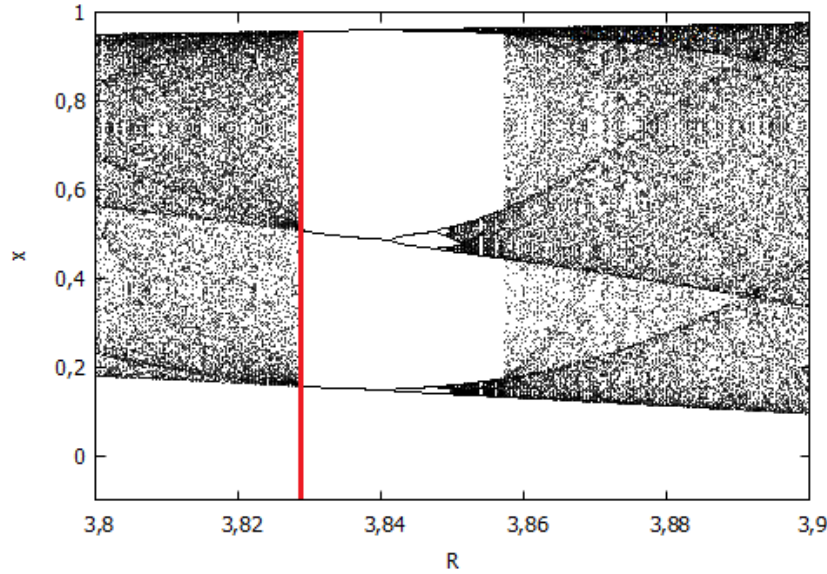


Figura 3.4: A figura mostra uma ampliação da Fig. 3.1 mostrando uma bifurcação tangente, em que o atrator caótico é destruído dando lugar a um atrator de período 3.

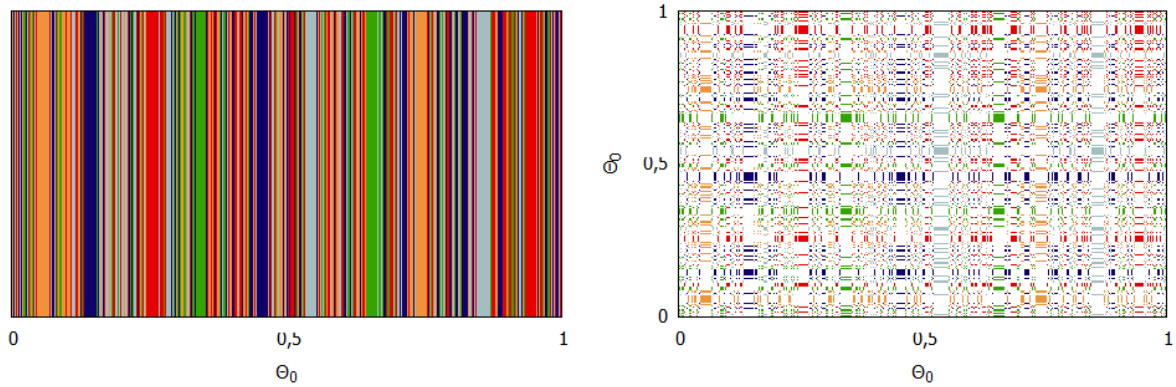


Figura 3.5: Representações das bacias de atração das bacias de Wada do mapa do círculo. (a) Figura representa apenas o eixo Θ do modelo. (b) Aplicação do Método de visualização de bacias unidimensionais.

Na Fig. 3.7, vemos regiões bem definidas de ambas as bacias. Mesmo que exista algum tipo de repetição na sua estrutura nas regiões próximas a 0 e 1, as fronteiras são muito bem definidas não gerando nenhuma incerteza comparável a uma bacia fractal. Portanto, as bacias formam uma fronteira suave.

Por outro lado, para $f^3(X_n)$ e $R = 3,84$, conforme mostra a Fig. 3.8, são gerados 3 atratores (pontos em vermelho) em $X_1 = 0,14940$ (bacia roxa), $X_2 = 0,48800$ (bacia verde) e $X_3 = 0,95944$ (bacia azul).

Para testarmos essa possibilidade da definição desta bacia ser Wada utilizamos o método apresentado na Eq. (2.8). Entretanto, neste caso, por se tratar de uma bacia unidimensional as caixas serão apenas referentes a uma divisão de segmentos.

Assim, dividimos a região $x \in [0, 1]$ em 1000 segmentos e testamos a fronteira em até $q = 8$ passos obtendo o número de $\#G^8 = 749$ de segmentos com as 3 bacias em um

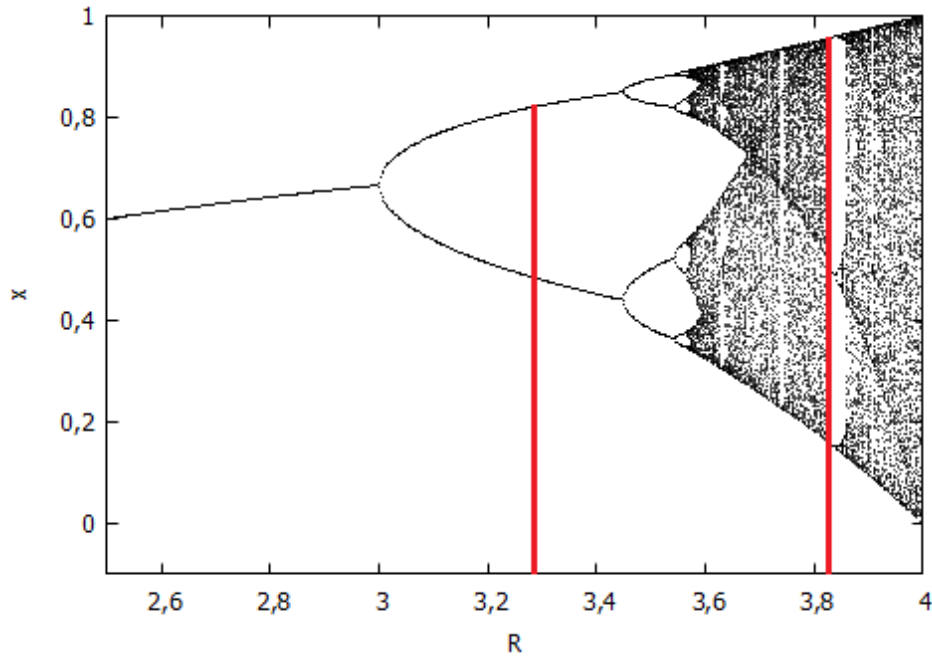


Figura 3.6: A figura mostra o diagrama de bifurcação com os parâmetros R destacados em que as bacias de atração do mapeamento serão construídas a seguir.

total de $\sum_{i=2}^3 G_i^q = 749$. Neste caso, resultou em $= 1$ mostrando que realmente esta se trata de uma bacia de Wada, todos os segmentos na fronteira apresentam as 3 bacias.

A seguir, vamos investigar as propriedades da bacia de Wada e seu impacto na dinâmica do modelo. Uma forma de fazer este estudo é a através do mapa de retorno, onde estuda-se a iteração subsequente em relação a iteração anterior.

Um mapa de retorno é dado na Fig. 3.9. Neste caso é explorada a situação da Fig. 3.8 em que é observada uma bacia de Wada. Como é estudada uma versão $f^3(X_t)$ do mapeamento, ao invés de se exibir um comportamento quadrático como o mapa logístico tradicional, este caso gera um gráfico de um polinômio do sexto grau. Além disso, na figura é exibida a reta identidade que funciona de forma a atualizar a variável X_n para X_{n+3} .

Outra vantagem de se analisar o mapa de retorno e a reta identidade é o cruzamento de ambas. Afinal, se um ponto pertencer a reta identidade e a função do mapeamento simultaneamente a dinâmica é fixa ali. Ou seja, trata-se de um ponto fixo. Em vermelho apresentamos todos os atratores para este parâmetro, os mesmos encontrados anteriormente. Já em laranja são apresentados 3 repulsores indicados por cruzamentos com a reta identidade com tangente positiva. Com posição $X = 0,15614$, $X = 0,50466$ e $X = 0,95741$. Estes repulsores formam a fronteira das bacias de atração.

O repulsor inferior forma a fronteira da bacia roxa referente ao atrator $X_1 = 0,14940$. Já o repulsor central forma da bacia verde, pontos os quais convergem para $X_2 = 0,48800$. Por fim, o repulsor superior forma a fronteira do atrator $X_3 = 0,95944$, referente a bacia azul. Destacando as regiões conectadas das bacias como podem ser vistas na Fig. 3.9.

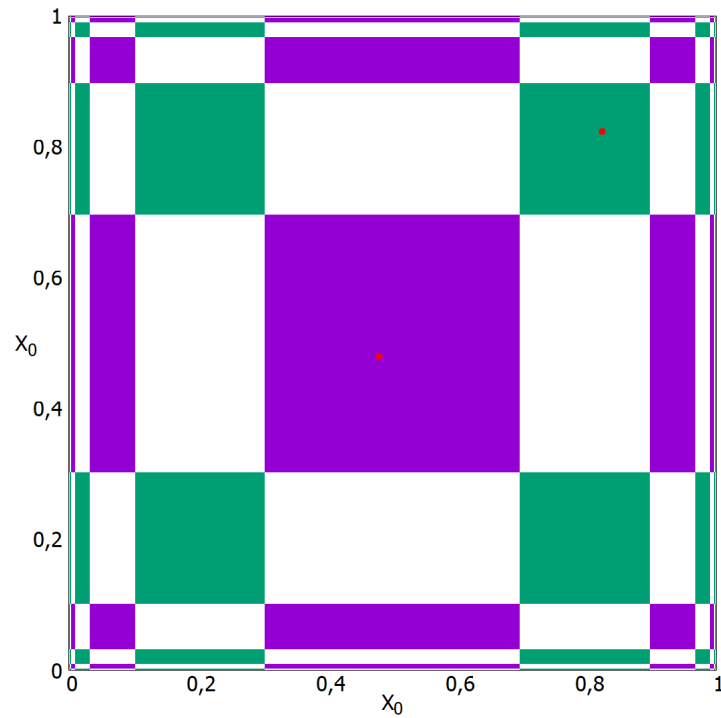


Figura 3.7: A figura mostra as bacias de atração do mapa logístico para $R = 3.3$, com os atratores em que os pontos de cada bacia convergem em vermelho.

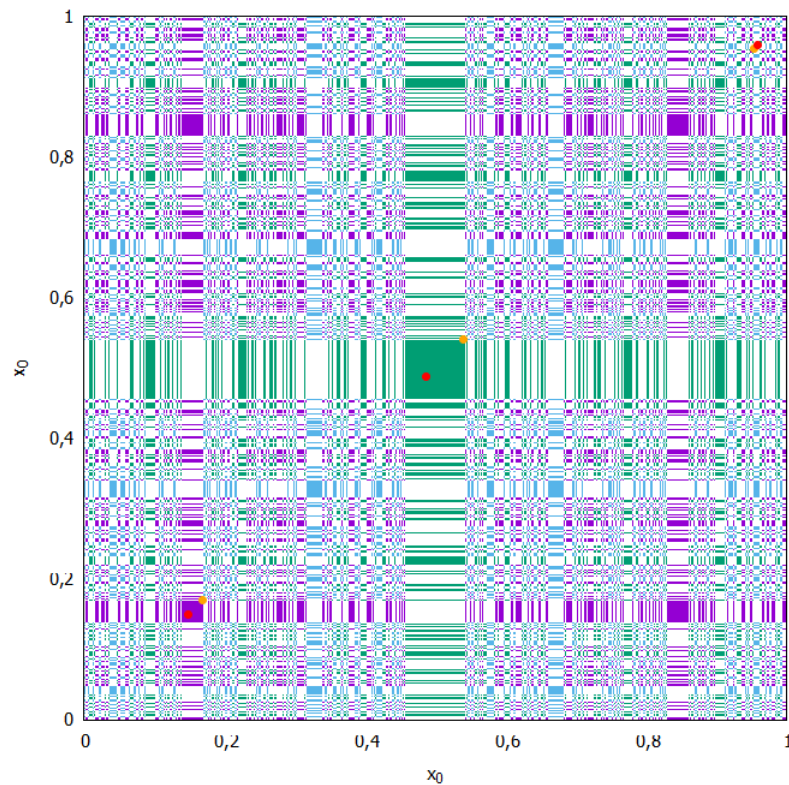


Figura 3.8: A figura mostra uma bacia de Wada no mapa logístico para $R = 3.84$. Com os atratores destacados em vermelhos e os repulsores que formam a fronteira das bacias.

A partir de agora vamos denominar estas regiões como bacias imediata $B(X_1)$, $B(X_2)$ e

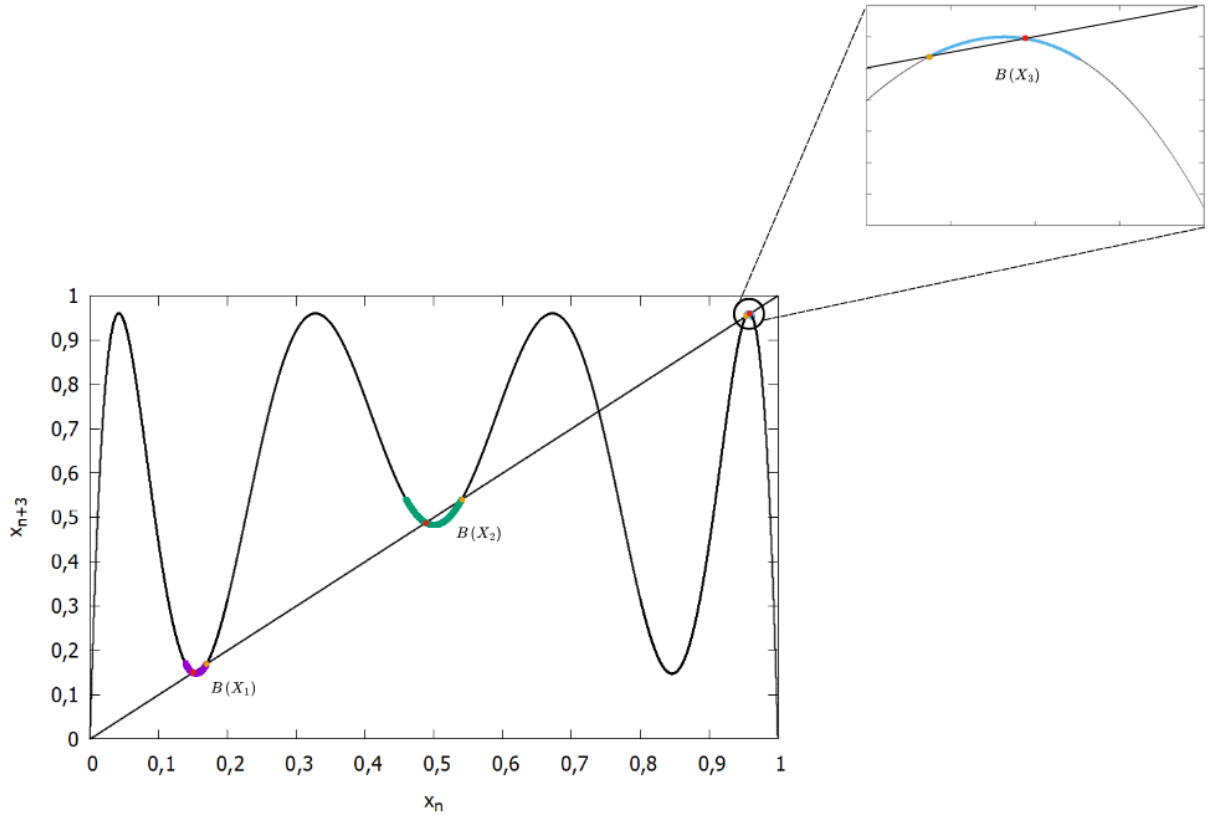


Figura 3.9: A figura mostra o mapa de retorno do mapa logístico para $R = 3,83$ para $f^3(X_t)$. São destacados os atratores para este parâmetro em vermelho, bem como sua bacia imediata segmentada pelos repulsores de sua fronteira em laranja. A bacia azul é destacada na parte superior da figura ampliada para melhor visualização.

$B(X_3)$. Definimos bacia imediata como a região conectada da bacia onde a dinâmica fica confinada pela presença do atrator.

Além disso, o mapa logístico é um mapeamento não inversível, mas, por meio do mapa de retorno, podemos analisar o comportamento no tempo negativo do mapa. Na Fig. 3.10, fizemos uma análise no tempo negativo partindo das bacias imediatas (a) $B(X_1)$, (b) $B(X_2)$ e (c) $B(X_3)$ e evoluímos negativamente no tempo. Retornando para sempre para sua pré-imagem.

Na Fig. 3.10(a) vemos que a pré-imagem da bacia imediata $B(X_1)$ forma uma órbita homoclínica. Já, as Figs. 3.10(a) e 3.10(b) mostram que as bacias $B(X_2)$ e $B(X_3)$ também se acumulam no repulsor da fronteira de $B(X_1)$ devido a formação de duas órbitas heteroclínicas. Uma conectando o repulsor da fronteira de $B(X_1)$ com o respectivo repulsor de $B(X_2)$ e outra conectando os repulsores de $B(X_1)$ e $B(X_3)$.

Este resultado também se repete para as outras bacias imediatas, nas Figs. 3.11 e 3.12 equivalentes estruturas homoclínicas e heteroclínicas presentes na Fig. 3.10.

Na Fig. 3.11(b) vemos as órbitas partindo negativamente da bacia imediata $B(X_2)$ e retornando para a sua fronteira. Da mesma forma na Fig. 3.12(c) a bacia se conecta com a sua fronteira.

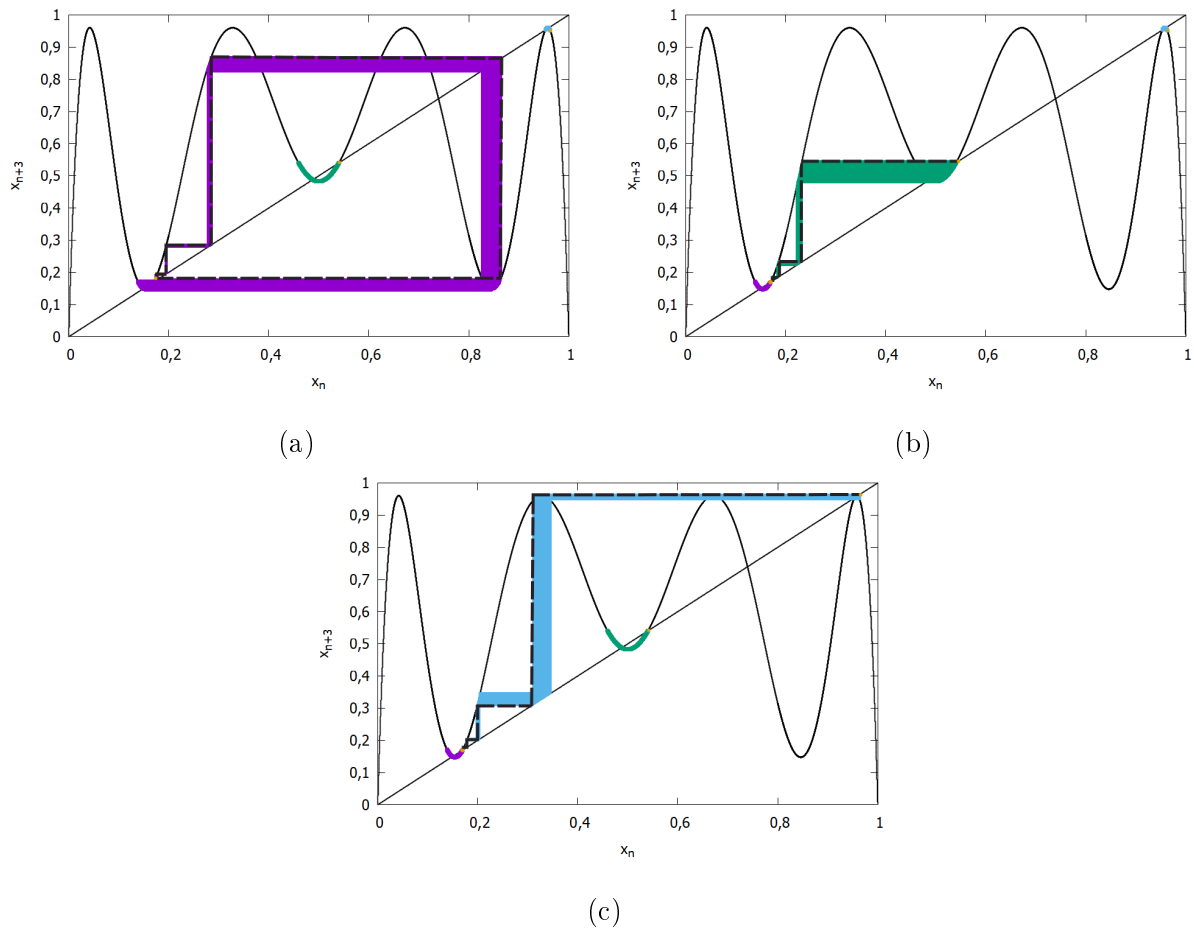


Figura 3.10: Mapas de retorno para o mapa logístico de período 3. (a) Órbita homoclínica que conecta o repulsor na fronteira de $B(X_1)$ a ele mesmo, destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_1)$ acompanhando essa órbita (b) Órbita heteroclínica conectando os repulsores de $B(X_1)$ e $B(X_2)$ destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_2)$ acompanhando essa órbita. (c) Órbita heteroclínica conectando os repulsores de $B(X_1)$ e $B(X_3)$, destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_3)$ acompanhando essa órbita.

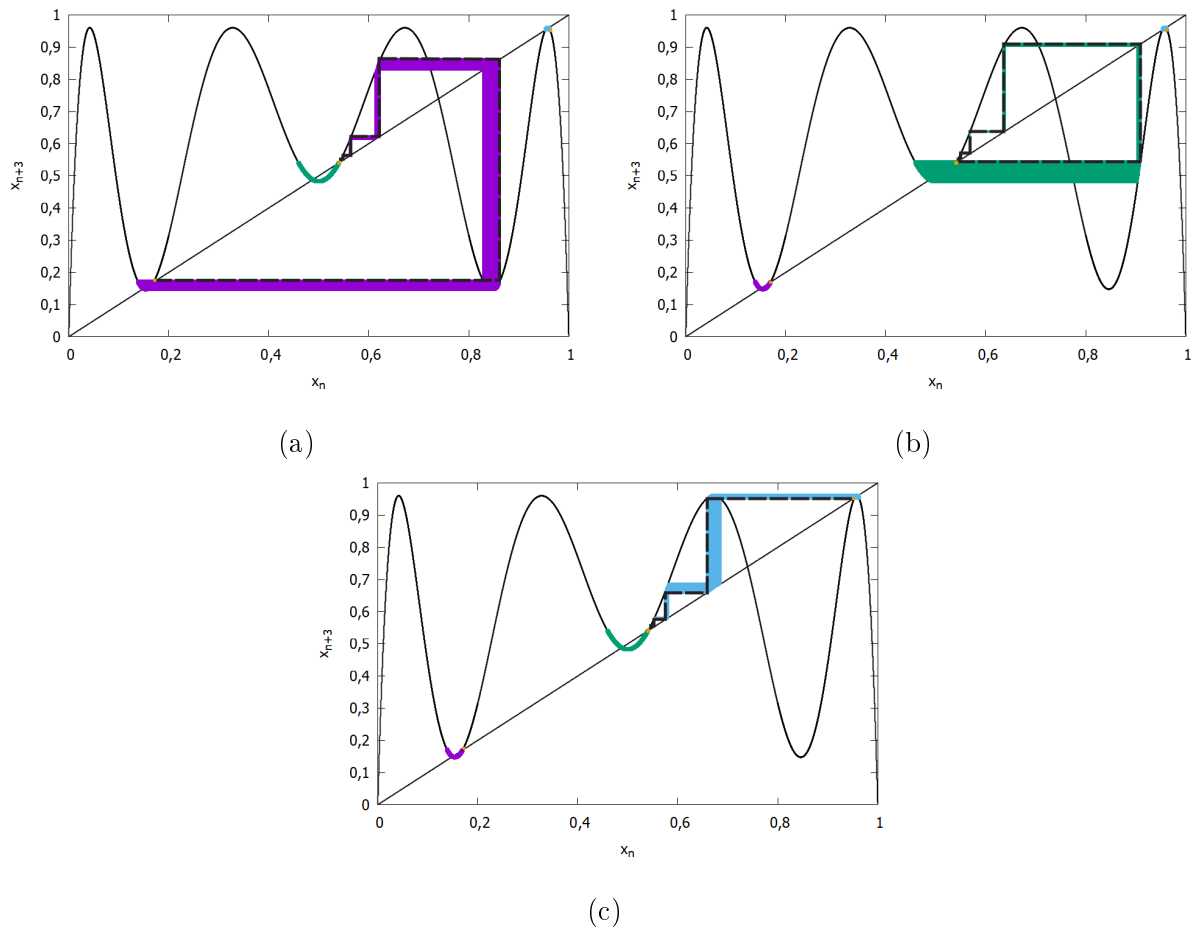


Figura 3.11: Mapas de retorno para o mapa logístico de período 3. (a) Órbita heteroclínica conectando os repulsores de $B(X_1)$ e $B(X_2)$, destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_1)$ acompanhando essa órbita (b) Órbita homoclínica que conecta o repulsor na fronteira de $B(X_2)$ a ele mesmo destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_2)$ acompanhando essa órbita. (c) Órbita heteroclínica conectando os repulsores de $B(X_2)$ e $B(X_3)$, destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_3)$ acompanhando essa órbita.

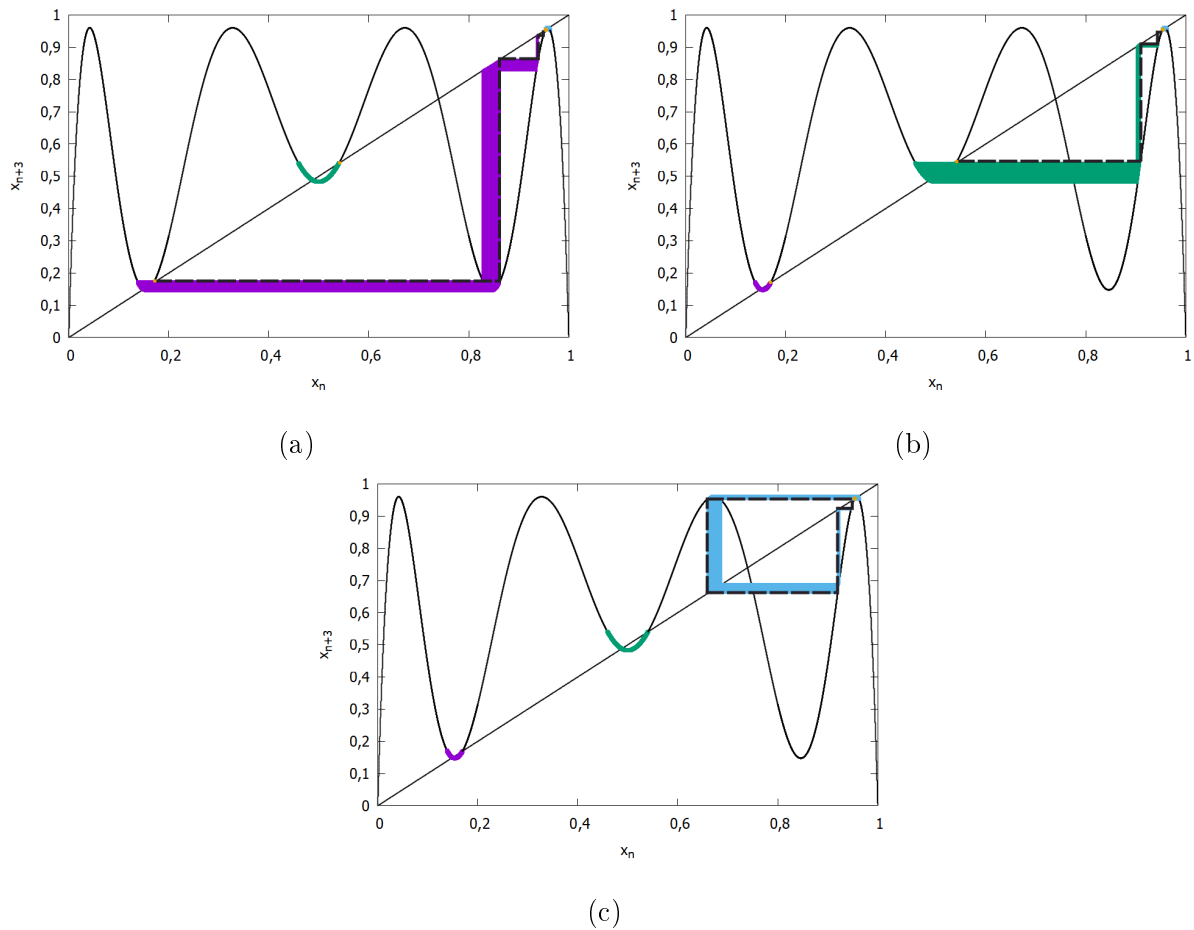


Figura 3.12: Mapas de retorno para o mapa logístico de período 3. (a) Órbita heteroclínica conectando os repulsores de $B(X_1)$ e $B(X_3)$ destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_1)$ acompanhando essa órbita (b) Órbita heteroclínica conectando os repulsores de $B(X_2)$ e $B(X_3)$ destacada pela linha tracejada. Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_2)$ acompanhando essa órbita. (c) Órbita homoclínica que conecta o repulsor na fronteira de $B(X_3)$ a ele mesmo destacada pela linha tracejada, destacada pela linha tracejada Além disso, mostra-se a bacia imediata $B(X_3)$ acompanhando essa órbita.

Além disso, nas Figs. 3.11(a) 3.11(c), 3.12(a) e 3.12(b) vemos todas as outras bacias imediatas se conectando com as fronteiras de todas as outras bacias.

Portanto, essa análise mostra a formação das fronteiras de Wada para o mapa logístico. Observamos que os pontos de fronteiras das bacias (e as próprias bacias em si) se conectam tanto consigo mesma, quanto com as outras fronteiras (e bacias). Essa análise encaminha uma explicação da formação das bacias de Wada mediante a existência de órbitas homoclínicas e heteroclínicas.

A fim de aprofundar a investigação das propriedades de Wada, alteramos o parâmetro para $R = 3.845$. Nesta região o atrator do mapa logístico passa por uma duplicação de período, se transformando em um atrator de período 6, assim ao analisarmos o mapa $f^6(X_t)$ encontramos 6 atratores, suas bacias são dadas na Fig. 3.13.

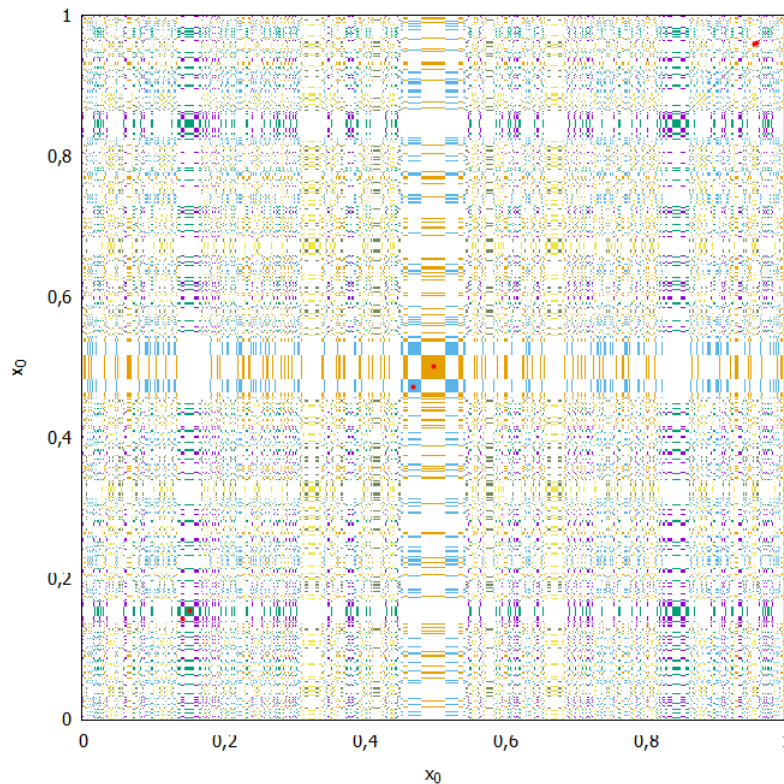


Figura 3.13: Bacias de atração do mapa logístico para $R = 3.845$ com os atratores em vermelho destacados.

Neste caso a duplicação de período forma bacias que não formam pontos de Wada. Na região próxima ao entorno de $X = 0.5$ a bacia laranja e azul formam um tipo de fronteira suave, na Fig. 3.14 esta região é ampliada mostrando esse tipo de fronteira.

Porém, parte destes pontos também possuem as propriedades de Wada. Ao aplicarmos o método da eq. (2.8) resulta em $W_6 \approx 0.82$. Portanto, esta bacia se trata de uma bacia do tipo parcialmente Wada.

Para visualizarmos o motivo da formação desse tipo de fronteira vamos analisar a estrutura das bacias imediatas ao redor de $X = 0.5$.

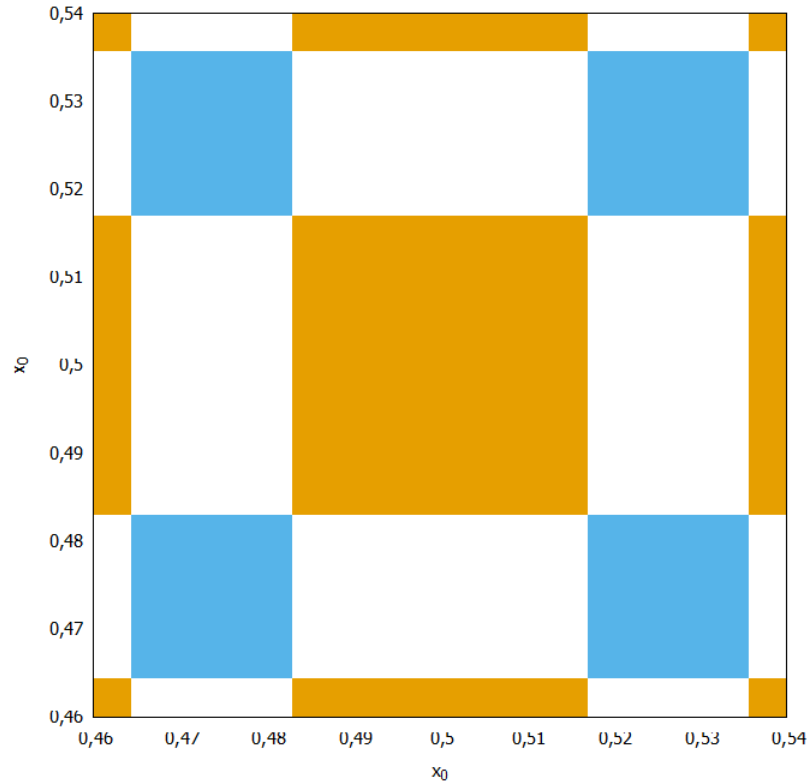


Figura 3.14: Ampliação nas bacias da Fig. 3.13 formando uma fronteira suave, destacando as regiões bem definidas de fronteira entre a bacia laranja e azul.

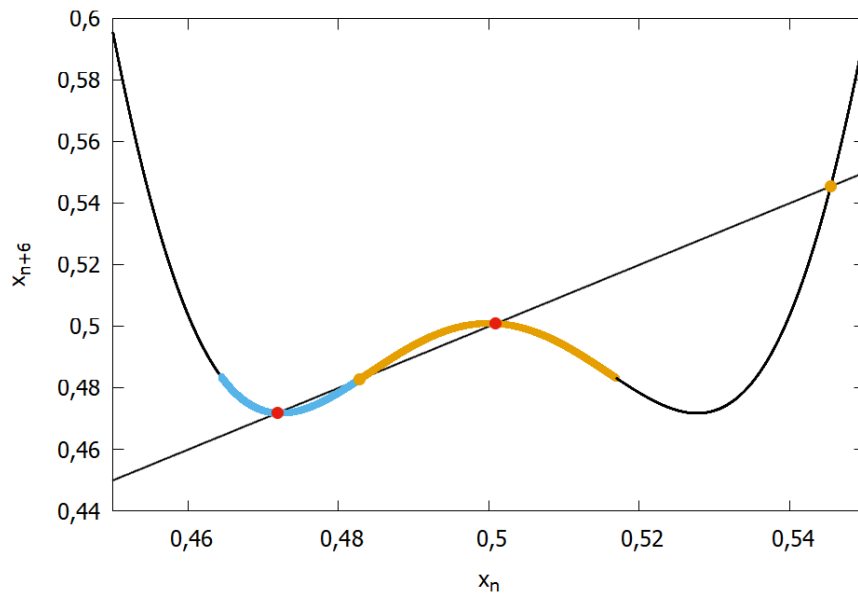


Figura 3.15: Mapa de retorno do mapa logístico para $R = 3,83$ para $f^3(X_t)$ com uma órbita homoclínica

Na Fig. 3.15 o repulsor em $X_0 = 0.48285$ é a fronteira das bacias imediatas laranja e azul. Portanto, não existe outras bacias se acumulando em x_0 . Assim, diferentemente dos casos dos repulsores anteriores este repulsor não forma nem órbitas homoclínicas, nem

heteroclínicas.

Por outro lado, outros repulsores ainda formam um cenário similar ao do caso de bacias de Wada. Em 3.16, o repulsor de $X_0 = 0.5454$ concentra todas as bacias imediatas dos seis atratores. Além disso, a linha tracejada em preto mostra uma órbita homoclínica deste mesmo repulsor.

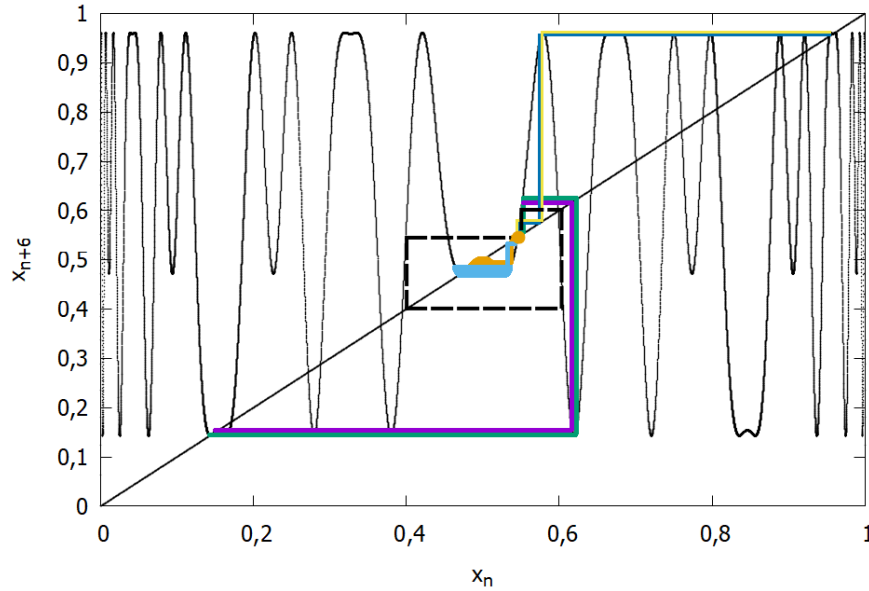


Figura 3.16: Mapa de retorno do mapa logístico para $R = 3.845$ para $f^6(X_t)$ com a formação de um órbita homoclínica e todas as bacias imediatas retornando para um ponto fixo repulsivo.

Com isso, algumas fronteiras destas bacias apresentam as propriedades de Wada, porém algumas outras formaram fronteiras entre apenas duas delas. Explicando o resultado de $W_6 \approx 0.82$.

Capítulo 4

Bacias de atração do modelo Fermi-Ulam

A fim de estudar bacias de atração, um trabalho inicial foi de entender as bacias do modelo de Fermi-Ulam simplificado dissipativo.

Este modelo surge dos estudos iniciais de 1949 do cientista ítalo-americano Enrico Fermi, a fim de explicar a aceleração de raios cósmicos, que propôs um modelo de um acelerador unidimensional, introduzindo o conceito hoje conhecido como aceleração de Fermi [62, 63, 64]. A proposta foi de modelar a interação entre as partículas dos raios cósmicos com campos magnéticos oscilantes, a fim de explicar a aceleração observada destas partículas. A ideia inicial proposta por Fermi foi se difundindo em outros contextos, resultando em modelos cada vez mais ricos do ponto de vista dinâmico.

Uma das aplicações foi introduzida pelo matemático polonês Stanisław Ulam, conhecido como modelo Fermi-Ulam. Este modelo consiste em uma partícula colidindo elasticamente entre duas paredes rígidas, uma delas imóvel e a outra oscilando periodicamente com frequência ω , onde a partícula pode sofrer múltiplas colisões antes de tornar a colidir com a parede fixa.

O chamado modelo completo é dado por:

$$T_c : \begin{cases} \phi_{n+1} = [\phi_n + \Delta T_n] \mod 2\pi \\ V_{n+1} = V_n^* - 2e \sin(\phi_{n+1}) \end{cases}, \quad (4.1)$$

em que ϕ_n e V_{n+1} são, respectivamente, a fase da oscilação da parede e a velocidade da partícula no instante em que ela se dirige para a parede fixa após colidir com a parede móvel. e é a amplitude de oscilação da parede e define a chamada zona de colisão $[-e, e]$ da partícula. Já as variáveis V_n^* e ΔT_n dependem da posição da partícula após a colisão com a parede oscilante:

$$\begin{cases} V_n^* = -V_n \\ \Delta T_n = \phi_c \end{cases}, \text{ se a partícula permanecer na zona de colisão,} \quad (4.2)$$

onde ϕ_c é o intervalo de tempo entre duas colisões sucessivas dada pela condição:

$$e[\cos(\phi_n + \phi_c) - \cos(\phi_c)] - V_n \phi_c = 0. \quad (4.3)$$

Por outro lado

$$\begin{cases} V_n^* = V_n \\ \Delta T_n = \phi_d + \phi_e + \phi_c \end{cases}, \text{ se a partícula deixar a zona de colisão,} \quad (4.4)$$

sendo que $\phi_d = [1 - e \cos(\phi_n)]V_n^{-1}$ é o tempo decorrido a partir da última colisão na zona de colisão até a colisão com a parede fixa e $\phi_e = (1 - e)V_n^{-1}$ é o tempo gasto da parede fixa até a entrada da zona de colisões. O instante de colisão ϕ_c com a parede oscilante obedece à condição

$$e[\cos(\phi_n + \phi_c + \phi_d + \phi_e) - 1] - V_n \phi_c = 0. \quad (4.5)$$

Consideramos uma versão simplificada do modelo onde a parede móvel permanece fixa durante a colisão, portanto, desconsidera as colisões múltiplas do modelo. E será introduzida um termo dissipativo δ reproduzindo colisões inelásticas com ($0 < \delta < 1$) sendo o caso conservativo $\delta = 1$. Esta versão é descrita pelo sistema:

$$T_s : \begin{cases} \phi_{n+1} = \left[\phi_n + \frac{2}{V_n} \right] \mod 2\pi \\ V_{n+1} = |\delta V_n - (1 + \delta) e \sin(\phi_{n+1})| \end{cases}. \quad (4.6)$$

Inicialmente, consideremos o parâmetro de dissipação $\delta = 0,95$ para representar um regime com uma baixa dissipação, já a amplitude de oscilação da parede móvel é $e = 10^{-3}$, parâmetro que controla a não linearidade.

Na tabela 4.1 vemos que foram encontrados 5 atratores periódicos e um atrator caótico indicando as cores como estão apresentadas na Fig. 4.1. Além disso, em preto é possível se visualizar a estrutura do atrator caótico. Na próxima seção vamos explorar o cálculo dos autovalores dos atratores periódicos bem como o cálculo do expoente de Lyapunov medido no atrator caótico comprovando a sensibilidade as condições iniciais deste atrator.

Atrator	Cor	(ϕ, V)	Período
0	Preto	caos	-x
1	Verde	(3,978; 0,029)	1
2	Azul	(4,096; 0,032)	1
3	Cinza	(4,277; 0,035)	1
4	Amarelo	(4,176; 0,027), (3,666; 0,026)	2
5	Vermelho	(4,769; 0,030), (4,359; 0,032), (3,509; 0,031), (4,463; 0,032)	4

Tabela 4.1: A tabela mostra os atratores encontrados para $\delta = 0,95$ e $e = 10^{-3}$, sendo os três primeiros de período 1 o quarto de período 2 e o último de período 4. Além disso, cada um destes é denominado por meio de uma cor que será utilizada no restante do trabalho para o apresentar visualmente, bem como sua bacia de atração.

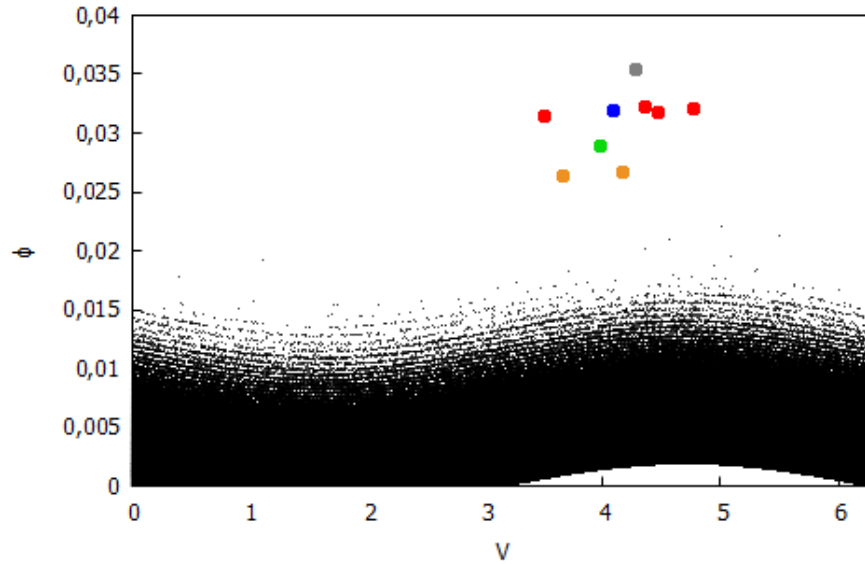


Figura 4.1: Espaço de fase do modelo com os parâmetros $\delta = 0,95$ e $e = 10^{-3}$.

4.1 Cálculo dos autovalores e expoente de Lyapunov

Inicialmente é necessário encontrarmos a matriz Jacobiana do modelo. Essa matriz é construída a partir das derivadas parciais em relação as variáveis dinâmicas, assim para o modelo de Fermi-Ulam temos a matriz Jacobiana (J):

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Partindo da Eq. (4.6) geramos as derivadas parciais [65]:

$$\mathbf{J}_{1,1} = \frac{\delta v_n - (1 + \delta)e \sin(\phi_n + \frac{2}{v_n})}{|\delta v_n - (1 + \delta)e \sin(\phi_n + \frac{2}{v_n})|} \left[\delta + \frac{2}{v_n^2} (1 + \delta)e \cos(\phi_n + \frac{2}{v_n}) \right] \quad (4.8)$$

$$\mathbf{J}_{1,2} = \frac{\delta v_n - (1 + \delta)e \sin(\phi_n + \frac{2}{v_n})}{|\delta v_n - (1 + \delta)e \sin(\phi_n + \frac{2}{v_n})|} [-(1 + \delta)e \cos(\phi_n + \frac{2}{v_n})] \quad (4.9)$$

$$\mathbf{J}_{2,1} = -\frac{2}{v_n^2} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{J}_{2,2} = 1 \quad (4.11)$$

Com estas derivadas podemos calcular o determinante da matriz Jacobiana:

$$\det(\mathbf{J}) = \text{senal}(\delta), \quad (4.12)$$

o determinante da matriz Jacobiana indica o comportamento do espaço de fase. De tal forma que, se $\delta = 1$ a área do espaço de fase se mantém. Por outro lado a área do espaço de fase contrai se $0 < \delta < 1$.

Para o calculo dos autovalores partimos de:

$$\det(\mathbf{J} - \alpha I) = 0, \quad (4.13)$$

obtendo

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\delta v_n - (1 + \delta)e \sin(\phi_n + \frac{2}{v_n})}{|\delta v_n - (1 + \delta)e \sin(\phi_n + \frac{2}{v_n})|} [\delta + \frac{2}{v_n^2} (1 + \delta)e \cos(\phi_n + \frac{2}{v_n})] - \alpha \right) (1 - \alpha) \\ &= -\frac{\delta v_n - (1 + \delta)e \sin(\phi_n + \frac{2}{v_n})}{|\delta v_n - (1 + \delta)e \sin(\phi_n + \frac{2}{v_n})|} [-(1 + \delta)e \cos(\phi_n + \frac{2}{v_n})] (-\frac{2}{v_n^2}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Definindo $k = [\frac{2}{v_n^2} (1 + \delta)e \cos(\phi_n + \frac{2}{v_n})]$ e $f = \frac{\delta v_n - (1 + \delta)e \sin(\phi_n + \frac{2}{v_n})}{|\delta v_n - (1 + \delta)e \sin(\phi_n + \frac{2}{v_n})|}$, então, chegamos em uma equação de segundo grau:

$$(f\delta + \frac{2kf}{v_n^2} - \alpha)(1 - \alpha) = (\frac{2kf}{v_n^2}), \quad (4.15)$$

simplificando:

$$\alpha^2 + (-1 - f\delta - \frac{2kf}{v_n^2})\alpha + f\delta = 0. \quad (4.16)$$

Porém, essa equação é válida apenas para os atratores 1, 2 e 3, os de período 1, para órbitas maiores é necessário aplicarmos uma regra da cadeia [66], de tal forma que:

$$\mathbf{J}(\phi^*, V^*) = \mathbf{J}(\phi_1^*, V_1^*) * \mathbf{J}(\phi_2^*, V_2^*) * \dots * \mathbf{J}(\phi_n^*, V_n^*), \quad (4.17)$$

em que n é o período do ponto fixo estudado.

Com isso ao substituirmos a matriz gerada pela Eq. (4.17) na Eq. (4.13) é possível encontramos os autovalores dos atratores de período 2 e 4, de tal forma que:

$$\det(\mathbf{J}(\phi^*, V^*) - \alpha I) = 0, \quad (4.18)$$

Assim, podemos testar os autovalores de todos os atratores periódicos encontrados, para os de período 1 usando a Eq. (4.16) e para períodos maiores aplicamos uma computacionalmente uma solução para Eq. (4.17). Com base nos atratores da tabela 4.1 encontramos os 2 autovalores α_1 e α_2 , para cada um dos atratores conforme descrito na tabela 4.2.

Atrator	α_1	α_2
0	-	-
1	0,907	0,030
2	0,927	0,033
3	0,952	0,035
4	0,806	-0,002
5	0,839	10^{-7}

Tabela 4.2: Autovalores dos atratores da tabela 4.1.

Os pontos fixos periódicos possuem ambos os autovalores com seu módulo menor que um, assim, confirmamos que todos estes pontos fixos se tratam de atratores periódicos.

A abordagem do cálculo dos autovalores funciona muito bem para a confirmação de comportamentos periódicos, agora, para testar o comportamento caótico do atrator estranho utilizamos o cálculo do expoente de Lyapunov baseado nos estudos de convergência de Aleksandr Lyapunov [67], que foi modernizado posteriormente [68] da forma:

$$\lambda(x_0) = \sum_{j=0}^N \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_i)}{dx} \right|, \quad (4.19)$$

este cálculo se baseia em estudar a iteração sucessiva entre os pontos de um mapeamento. Portanto, quando a dinâmica apresenta comportamento caótico é esperado que ocorra um afastamento exponencial entre as iterações, de tal forma que é encontrado um expoente

$\lambda > 0$.

Para o mapa Eq. (4.6) considerando a equação dos autovalores Eq. (4.19) obtemos expoentes de Lyapunov da forma:

$$\lambda_{1,2}(\phi_0, V_0) = \sum_{j=0}^N \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\alpha_{1,2}|, \quad (4.20)$$

aplicando os testes do expoente para uma região do atrator estranho $v_0 = 5 \times 10^{-3}$ e $\phi_0 = 3$, com um transiente longo o suficiente $N = 3000$ encontramos $\lambda_1 \approx 0.00551$ e $\lambda_2 \approx -0.0553$ ambos um dos expoentes retornou um valor positivo indicando a divergência exponencial entre trajetórias inicialmente próximas. Mostrando que esse atrator estranho se trata de um atrator caótico.

Dessa forma, considerando a confirmação do comportamento atrativo dos atratores periódicos e o comportamento caótico do atrator estranho, agora voltamos à construção das bacias de atração de cada referido atrator na próxima seção, em conjunto dos testes em relação a suas fronteiras.

4.2 Construção das bacias de atração

Inicialmente podemos analisar de forma geral todas as bacias de atração. Na Fig. 4.2 essas bacias foram construídas com uma grade de 1500 por 1500 pontos cada um iterado 2000 vezes para se testar a convergência. Com isso, podemos ver uma bacia bem densa do atrator caótico (preta) ao redor das outras bacias de atratores de pontos fixos.

Visualmente, podemos ver que, além de mais densa, a bacia do atrator 5 (cinza) aparenta uma fronteira suave em relação a bacia do atrator caótico, por outro lado a bacia do atrator 1 (laranja) é menos densa e possui algumas regiões com a fronteira possivelmente não inteiras.

Na Fig. 4.3 é exibida uma ampliação da Fig. 4.2 reproduzida com a mesma grade de 1500 por 1500 pontos cada um iterado 2000 vezes. Com essa ampliação é mais fácil de ver a sua fronteira bem definida formada com a bacia do atrator caótico.

Por outro lado, na Fig. 4.4 vemos a bacia do atrator laranja ampliada. Neste caso, existem estruturas mais complexas nas suas fronteiras com aparente autossimilaridade formada por curvas se repetindo nesta fronteira, indicando uma possível fractalidade.

Para confirmar essa fractalidade, vamos aplicar o método do expoente de incerteza. Este método consiste em testar a permanência em uma bacia de atração mediante a um erro ϵ . Ou seja, considerando um ponto pertencente a uma bacia B_1 , são calculadas as bacias em uma circunferência de raio ϵ deste primeiro ponto, caso quaisquer ponto da circunferência convirja para uma outra bacia B_2 este ponto é tratado como incerto. Para reduzir custos computacionais, neste caso, apenas testamos os pontos em $-\epsilon$ e $+\epsilon$ em

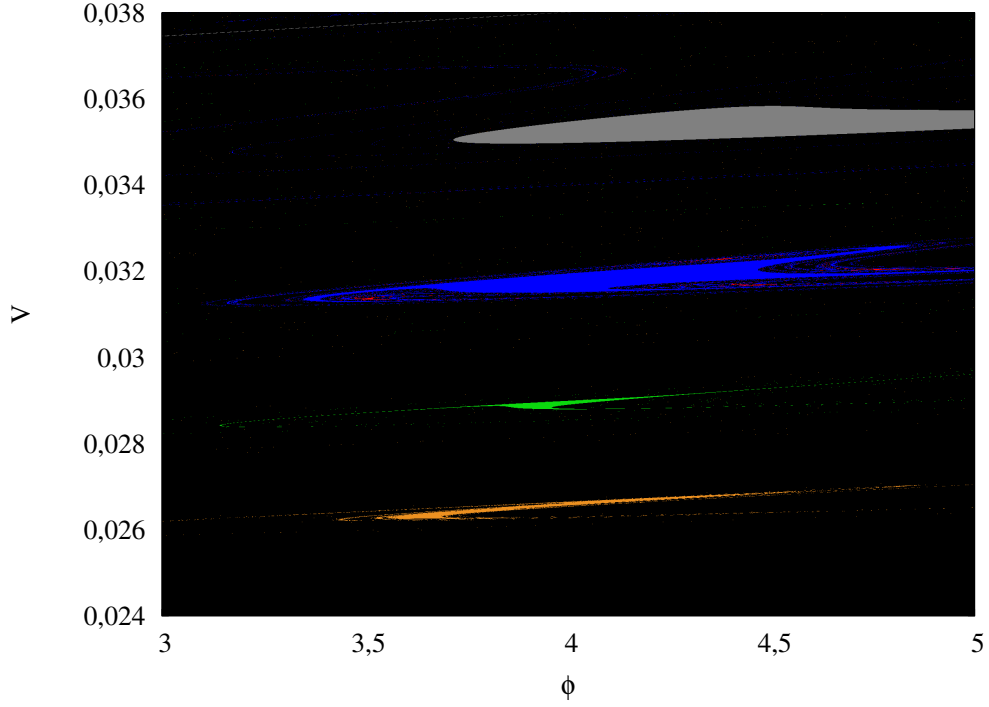


Figura 4.2: Bacias de atração dos atratores da Fig. 4.1.

ambos os eixos, caso troquem de bacias este ponto é tratado como incerto [69, 70, 45].

Para se calcular o expoente, inicialmente, é testada a incerteza em uma grade de um total de N_t pontos. Considerando o número total de ponto incertos por $N(\epsilon)$, a fração de pontos incertos ($f(\epsilon)$) é, então:

$$f(\epsilon) = \frac{N(\epsilon)}{N_t}. \quad (4.21)$$

Assim, para um ϵ específico o expoente de incerteza α é dado pela expressão:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln f(\epsilon)}{\ln \epsilon} = \alpha. \quad (4.22)$$

A dimensão fractal (d) é descrita dada por meio deste expoente de tal forma que:

$$d = D - \alpha, \quad (4.23)$$

em que, D é a dimensão do espaço de fase.

Computacionalmente, são testadas as frações de pontos incertos para alguns valores de ϵ , tipicamente uma ou duas dezenas. Então, para um gráfico $\log \times \log$ de $f(\epsilon)$ por ϵ (como esperado por Eq. (4.22)) os pontos se comportam como uma curva linear de coeficiente angular α .

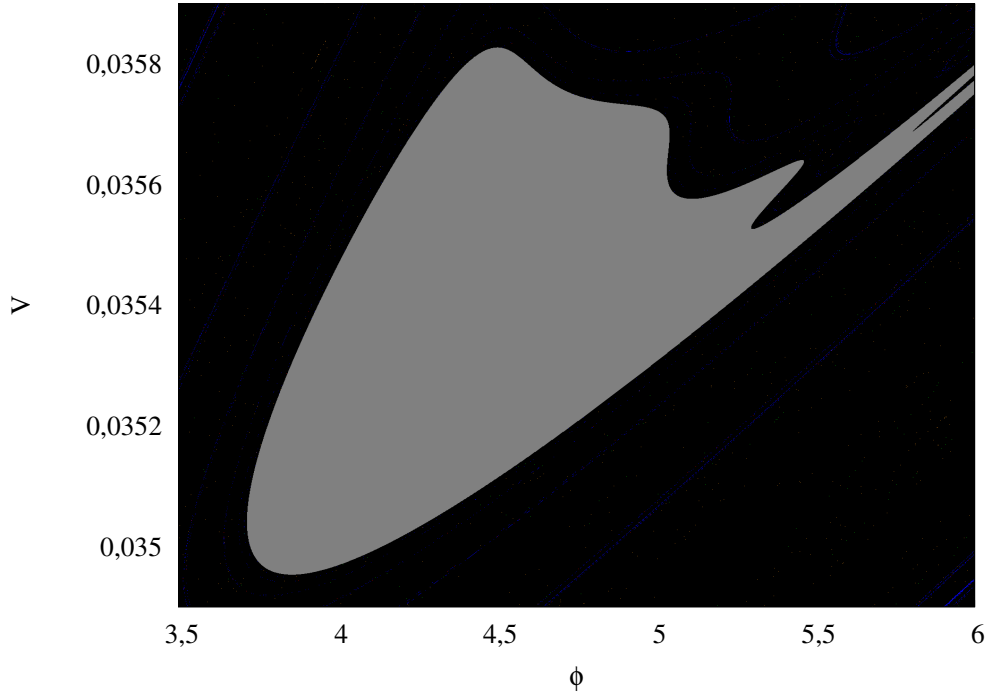


Figura 4.3: Ampliação de uma bacia suave da Fig. 4.2.

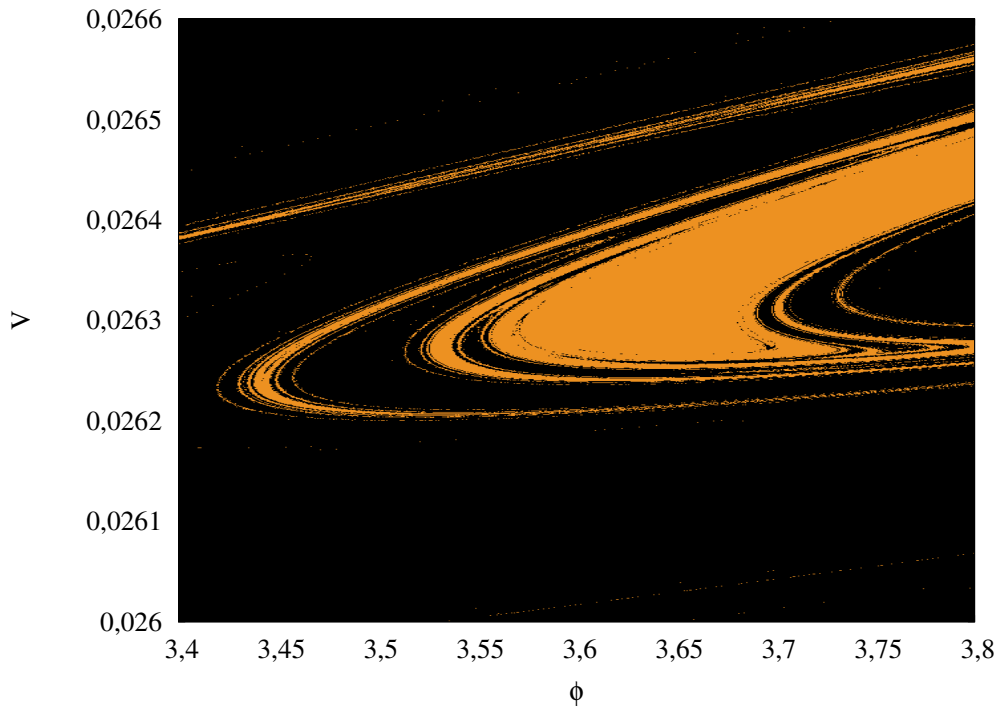


Figura 4.4: Ampliação de uma bacia fractal da Fig. 4.2.

Para o caso de 4.4 foi construído um programa que usou uma grade em $(3,4 \leq \phi_0 \leq 4,4, 0,026 \leq V_0 \leq 0,027)$. Foram feitas 10 linhas com 10^5 pontos aleatórios. Para cada um destes 10^6 pontos foi aplicado um ϵ de 10^{-11} até 10^{-4} com isso é feita uma razão de pontos incertos.

Na Fig. 4.5 são apresentados esses pontos de razões de incerteza no gráfico $\log \times \log$ de

$f(\epsilon)$ de $f(\epsilon)$ com uma regressão exponencial. A regressão gerou um valor de um coeficiente de incerteza $\alpha \approx 0,331$ indicando uma dimensão fractal $D \approx 1,669$, assim, mostrando a fractalidade na fronteira dessa bacia.

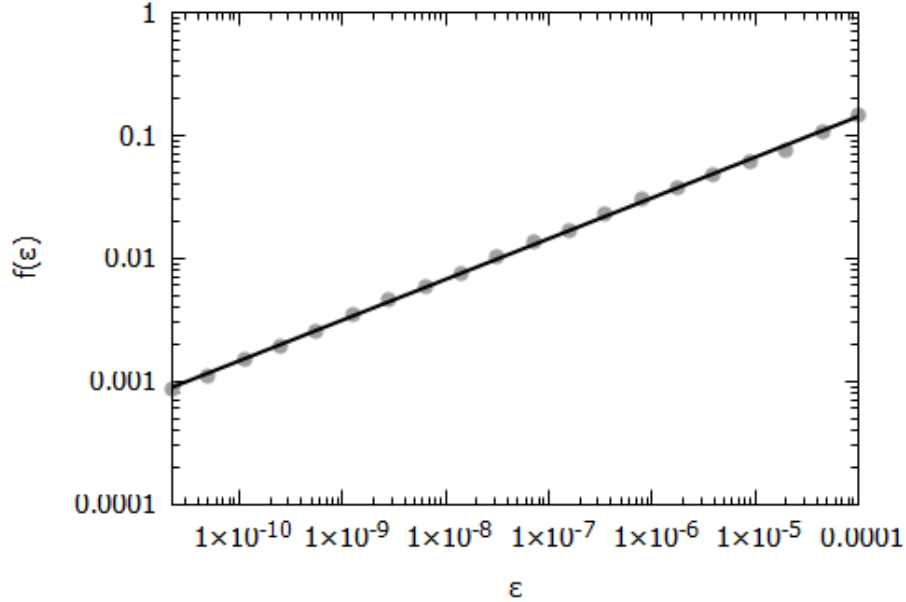


Figura 4.5: O gráfico mostra a fração de pontos incertos ($f(\epsilon)$) versus ϵ . Foram considerados 10^5 condições aleatórias em toda a região da fronteira, resultado em $\alpha \approx 0,331$.

Outra bacia interessante é a região da bacia 3 (azul). Nela é possível se ver algumas porções com bacias do atrator 4 (vermelho) ampliadas na Fig. 4.6. Nesta figura vemos novamente uma mistura de bacias ocorrendo formando curvas no espaço de fase. Entretanto, diferentemente da Fig. 4.4 nesta região se aparenta uma mistura de 3 bacias ao invés de apenas duas, indicando a possibilidade de se tratar de uma bacia do tipo Wada.

Para esta confirmação vamos utilizar o método [51] dividindo uma linha em $v_0 = 0,0353$ em 1000 pontos, de forma similar a que utilizamos no capítulo anterior. Com isso foi obtido um valor $W_3 = 1$, parâmetro de Wada baseado no trabalho de Daza e colaboradores, mostrando que esta figura se trata realmente de uma bacia de Wada. Na Fig. 4.7 é mostrado o número de ponto com outros 2 próximos em relação ao número de implementações do método. Ou seja, com ao menos 15 divisões em cada um dos quadrados das fronteiras são encontradas as 3 bacias que formam a bacia de Wada. Além disso, esta imagem mostra que a maior parte das caixas com apenas 6 a 8 passos já são regiões consideradas de Wada. Ao somarmos todas as caixas que participam da fronteira encontramos um $\#G_3^{15} = 264$, consequentemente $\#G_1 = 736$.

Entretanto, é possível encontrar outros tipos de bacias neste mesmo modelo para $e = 1.3 \times 10^{-3}$. Surgindo novos atratores no espaço de fase como mostra a Fig. 4.8. Agora, o espaço de fase contém quatro atratores de período 1, um atrator de período 3, um atrator de período 15 e um atrator caótico com geometria similar ao atrator do caso anterior.

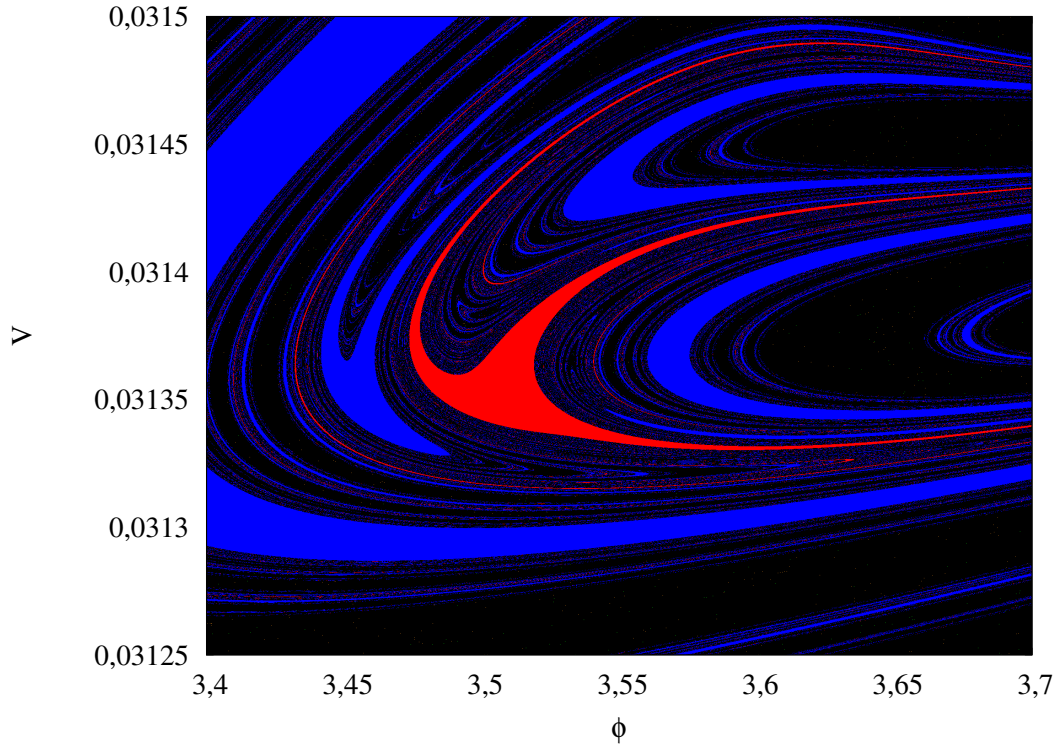


Figura 4.6: Ampliação de uma bacia de Wada da Fig. 4.2.

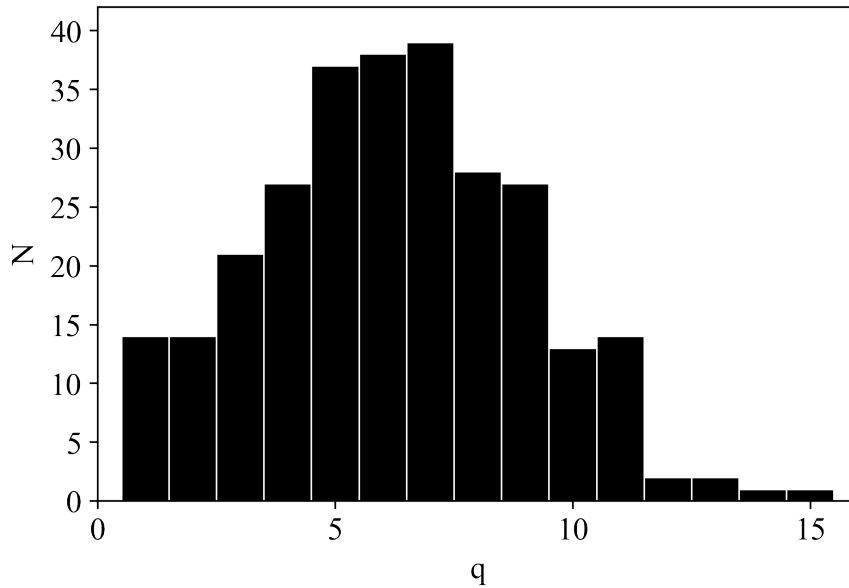


Figura 4.7: Número de pontos que formam bacias de Wada pelas iterações do método de teste de Wada para a região que se espera ser uma bacia deste tipo.

Novamente se destacam atratores muito próximos de forma similar aos atratores que formaram bacias de Wada no caso anterior. Agora, um atrator de período 1 (amarelo), o atrator de período 3 (marrom) e o atrator de período 15 (ciano). Dessa forma, na Fig. 4.9 são exploradas as bacias desta região para se buscar similaridade com o caso anterior.

A primeira análise novamente reproduz a mistura das bacias e o comportamento visualmente fractal das bacias. Porém, existem algumas estruturas que aparentam não fazer

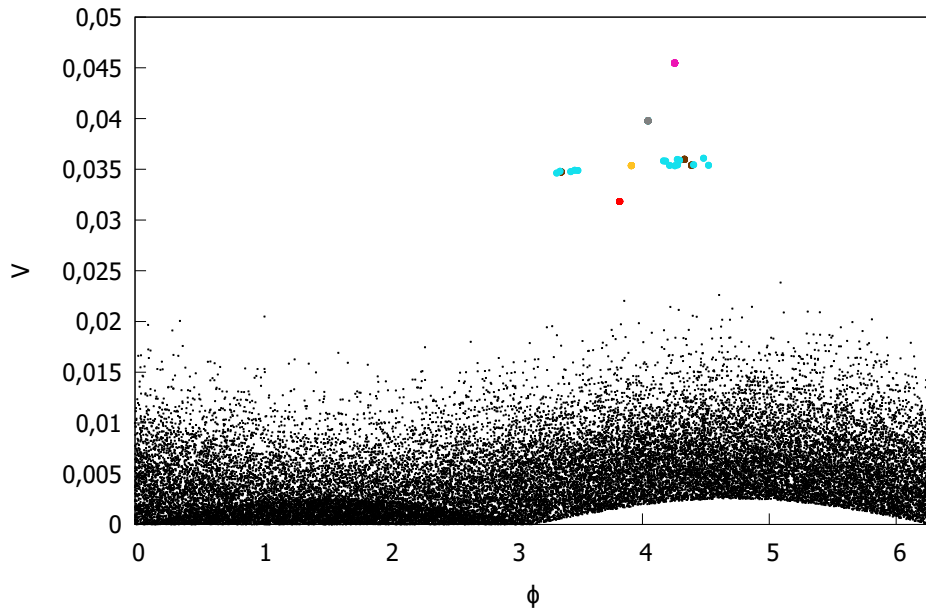


Figura 4.8: Espaço de fase do modelo com os parâmetros $\delta = 0,95$ e $e = 1,3 \times 10^{-3}$, com um surgimento de novos atratores com período maiores, mas com uma estrutura similar ao caso com $e = 10^{-3}$.

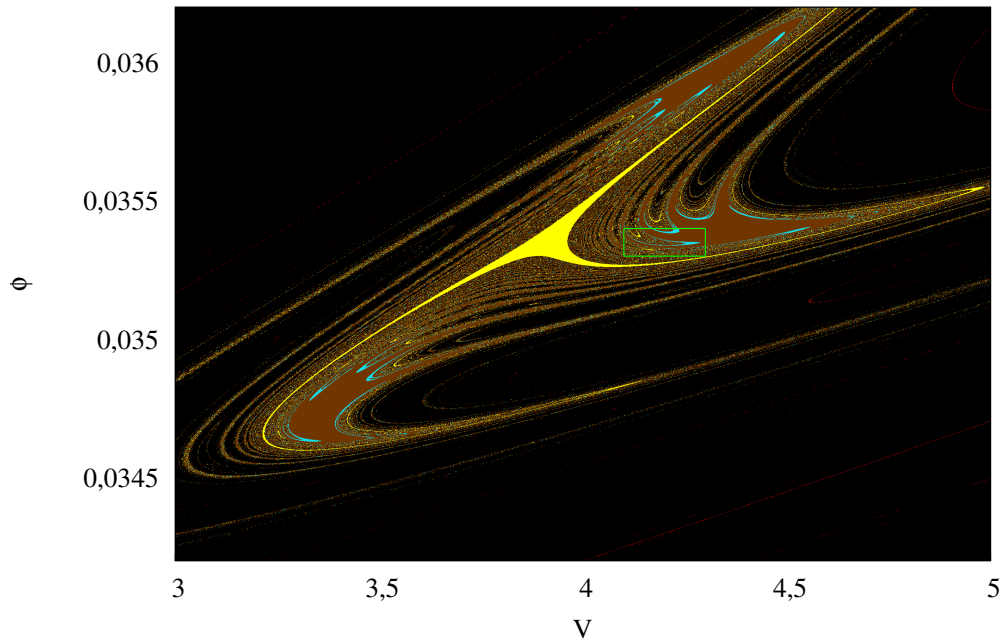


Figura 4.9: Bacias geradas com $e = 1,3 \times 10^{-3}$, região ampliada em que se formam a fronteira bacias amarelas, ciano, marrom e pretas.

fronteira com todas as bacias. Na Fig. 4.10 é exibida uma região em que a bacia azul forma uma fronteira com apenas a bacia marrom, não formando ponto de Wada.

Com isso, mesmo que próximo a região destacada existam uma mistura de bacias amarelo, marrom, ciano e preta aparentes, existem outras fronteiras que não formam

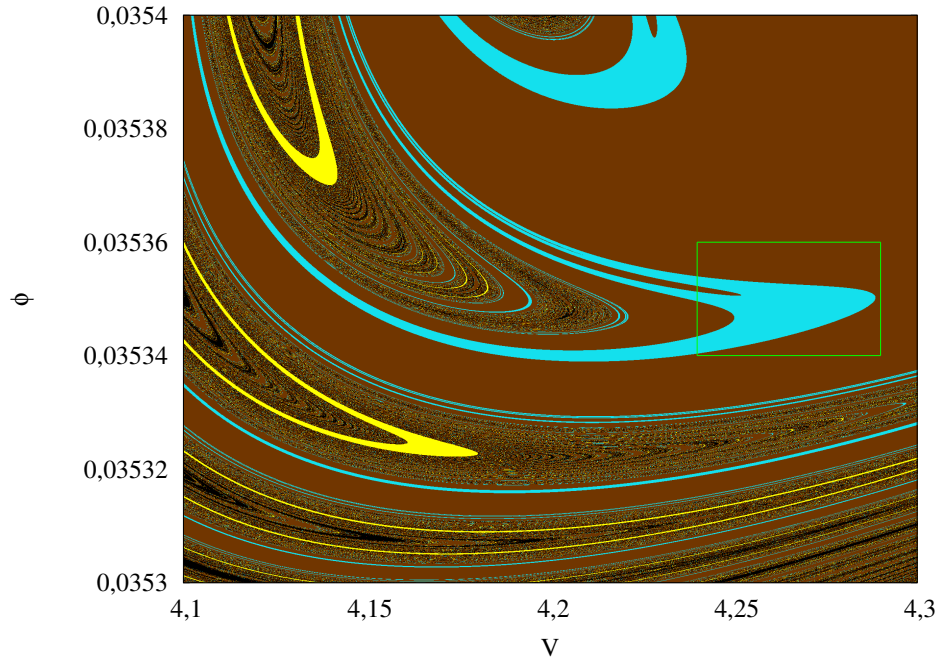


Figura 4.10: Ampliação das bacias da Fig. 4.9 em que está destacada uma fronteira formada apenas pelas bacias do atrator ciano e o atrator marrom.

bacias de Wada. Dessa forma esta bacia se qualifica como bacia parcialmente Wada.

Para reforçar este resultado podemos aplicar o método de teste de bacias de Wada. Neste caso, ao invés de obtermos $W_3 = 1$ existe cerca de 5% da região da fronteira não possui as 4 bacias fazendo fronteira, mais especificamente $W_4 \approx 0,95$, agora como $q = 12$ e $\#G_4^{12} = 399$. Na Fig. 4.11 vemos o gráfico do número de passos utilizados do método pelos pontos que formam Wada.

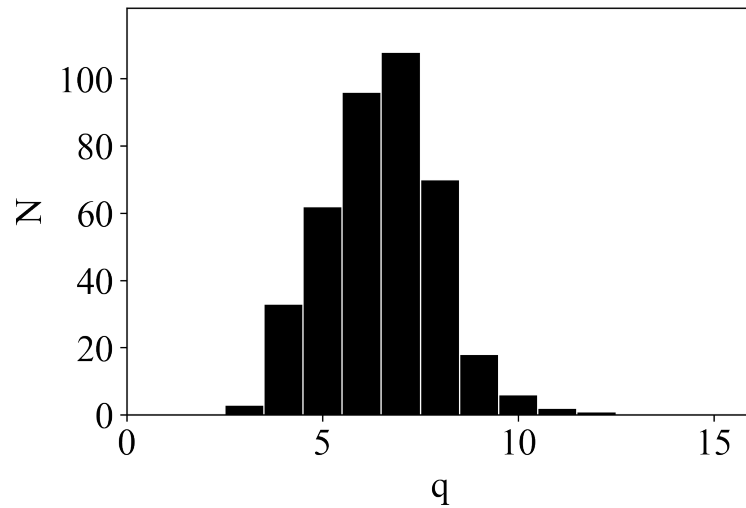


Figura 4.11: Número de pontos que formam bacias de Wada pelas iterações do método de teste de Wada para a bacia parcialmente Wada.

Capítulo 5

Leaking no mapa logístico

Em sistemas dinâmicos, podemos arbitrariamente definir regiões do espaço de fases, conhecidas como *Leaking* onde a trajetória não pode ser mais evoluida. Essa região pode ser interpretada como um buraco no espaço de fases por onde a trajetória escapa para fora desse espaço [71, 72].

Leaking é um termo em inglês que pode ser traduzido diretamente como vazamento ou escoamento e são utilizados em diversos sistemas dinâmicos. Em [36] é feita uma revisão histórica e da teoria por trás dos seus impactos na dinâmica. Um exemplo comum de utilização são em bilhares [73], estudando-se o escape destas regiões.

As regiões as que alcançam cada *Leaking* são conhecidos como bacia de escape [36] de forma similar à uma bacia de atração, porém não são consideradas convergências para atratores. *Leaking* em bilhares cria uma correlação entre pinturas clássicas e quânticas.

Nesta seção o objetivo é estudar a adição de *Leakings* no mapa logístico. Assim, com estas regiões no espaço de fases entender as chamadas bacias de escape e como as condições iniciais podem ter suas dinâmicas encerrando nas regiões de *Leakings*.

A fim de definir uma dinâmica mais rica neste caso será considerada um valor do parâmetro $R = 3,99$ assim com este valor a dinâmica será restrita a um grande atrator caótico que se estende de $0 < X < 1$. Então é possível adicionar regiões de *Leaking* por este atrator.

Os *Leaking* podem impactar de formas distintas na dinâmica do sistema. A Fig. 5.1 mostra, destacados em vermelho (note que em Fig. 5.1 os *Leaking* estão ampliados afim de ser possível visualiza-los), a coexistência de dois buracos distintos em cada uma das imagens. Na Fig. 5.1a) são formadas as bacias de escape em preto que escapam em $0,05 - 10^{-5} < X < 0,05 + 10^{-5}$ e em cinza $0,1 - 10^{-5} < X < 0,1 + 10^{-5}$. Já em 5.1b) são bacias formadas com escape em preto que escapam em $0,2 < X < 0,3$ e em cinza $0,7 < X < 0,8$.

A Fig. 5.1 exemplifica a diferença entre as dimensões fractais de acordo com as posições dos *Leakings*. As bacias formadas na Fig. 5.1b) completam regiões bem definidas de preto, cinza e branco com dimensões inteira. Já na Fig. 5.1a) existem mais regiões com pontos

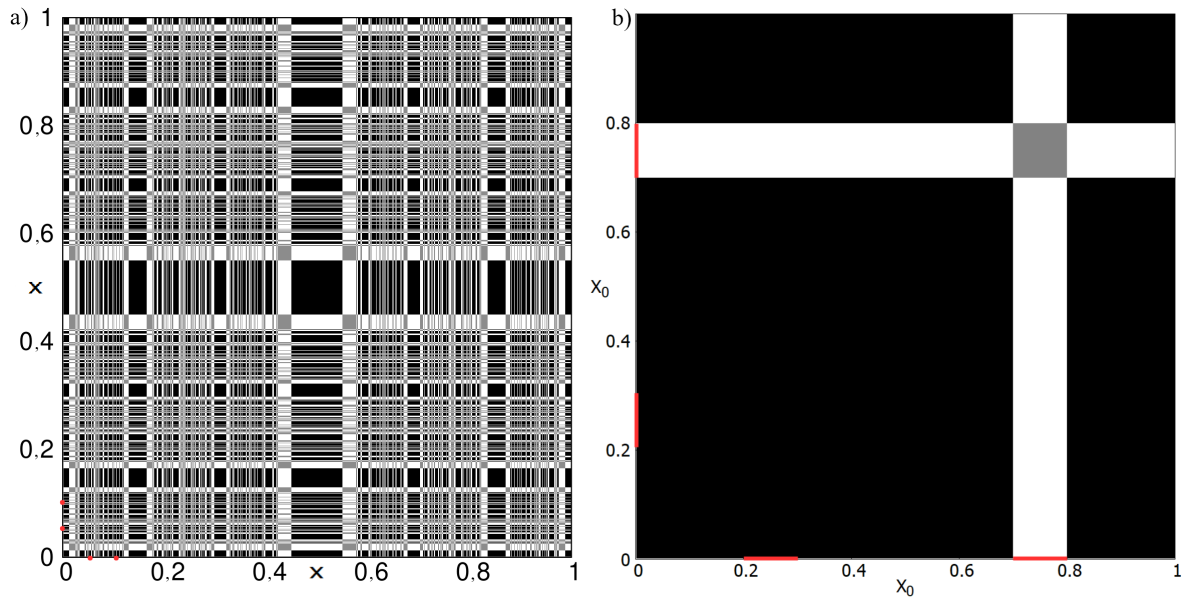


Figura 5.1: Bacias de escape gerada por *Leaking* no mapa logístico.

incertos. Porém, ainda algumas das fronteiras formadas ainda são inteiras como por exemplo as próximas de $X = 0.5$.

5.1 Pontos de sela e selas caóticas

Pontos de sela são ponto fixos em que seus autovalores $\alpha_{1,2}$ apresentam comportamento distintos, o módulo de um deles é negativo quanto o outro é positivo. De tal forma que $|\alpha_1| > 1$ e $|\alpha_2| < 1$ ou $|\alpha_1| < 1$ e $|\alpha_2| > 1$, considerando um sistema bidimensional. Implicando que parte da estabilidade se aproxime em um sentido quanto ao outro se afaste.

O conjunto de pontos que se aproxima do ponto de sela, tempo positivo, é chamado de variedade estável. Já o conjunto formado pelos pontos que se aproximam do ponto de sela, em um tempo negativo de evolução, é denominado de variedade instável.

Em um sistema com multiestabilidade é observada um conjunto como da Fig. 5.2. Estão representados dois pontos fixos assintoticamente estáveis A e B , já S é um ponto de sela. A curva que se aproxima do ponto S é a variedade estável deste ponto, a qual representa a fronteira da bacia de atração dos atratores [74]. Já a variedade instável com a variação temporal converge para os pontos A e B .

Entretanto, sistemas que apresentam fronteiras fractais em suas bacias de atração possuem sua fronteira formada por um outro tipo de sela, a sela caótica. A sela caótica é um conjunto não atrativo com uma dimensão não inteira com comportamento caótico [75, 76].

De forma similar em [36] a adição de um *Leakings* no sistema implica na aparição de um conjunto invariante que forma a fronteira entre as bacias de escape, uma sela. Ademais, a partir deste conhecimento é possível se estimar a dimensão destas estruturas.

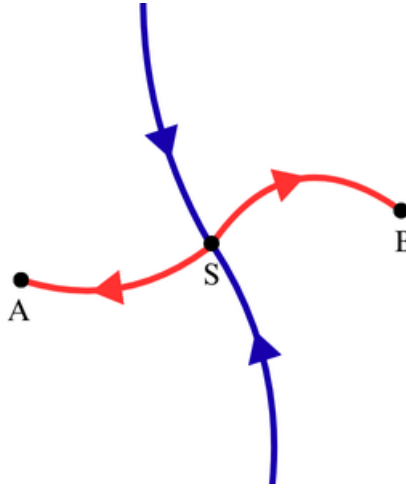


Figura 5.2: Imagem adaptada mostrando o comportamento de um ponto de sela.

Em um sistema com dois *Leakings* I_1 e I_2 esta sela deve ser dada pela interseção das selas no caso em que existem apenas um dos dois escapes no sistema. A dimensão fractal deste sistema será [77]:

$$D(I_1 + I_2) = D(I_1) + D(I_2) - D_{\text{emaranhamento}} \quad (5.1)$$

em que $D_{\text{emaranhamento}}$ é a dimensão do espaço emaranhado, espaço da .

Embora no caso do mapa logístico não é possível existir nem um ponto de sela ou uma sela caótica para se entender a fronteira destas regiões é de se esperar que exista algum tipo de conjunto não atrativo que as formem, similar a uma sela caótica.

Assim, esperando que estas regiões levem um tempo longo para alcançarem o buraco, como em uma sela caótica, podemos buscar no espaço atingem o buraco em um determinado número de iterações. Para este estudo foram utilizados 2 *Leakings* $0,1 < X < 0,2$ e $0,25 < X < 0,35$. Estes valores foram escolhidos a fim de representar regiões com tamanhos similares, além de por testes das bacias de escape exibirem dimensões com regiões distintas (estas bacias serão apresentadas posteriormente).

Foi desenvolvido, então um programa para analisar esta estrutura caótica foi feito um novo programa que iterou 1×10^7 condições iniciais que são armazenadas apenas se demorarem mais de 40 iterações para alcançar o *Leaking* e reproduzidas nos 2 eixos quando coincidem de existir, similarmente ao método de bacias unidimensionais.

Na Fig. 5.3 vemos a estrutura deste conjunto de pontos, que formam regiões sem nenhum ponto tal qual outra muito densas. Este resultado confirma a estrutura da Fig. 5.4, em que os pontos da estrutura similar a uma sela caótica se concentram nas fronteiras mais fractais (pontos em amarelo). Portanto, estes pontos encontrados representam uma estrutura semelhante aos invariantes de uma sela caótica neste sistema.

Além disso, como tratado em [36] as estrutura desses *Leakings* quando ambos estão presentes no espaço de fase deve ser a composição de quando apenas um deles existe no espaço de fase. Para isso foram construídos os conjuntos de pontos da Fig. 5.5.

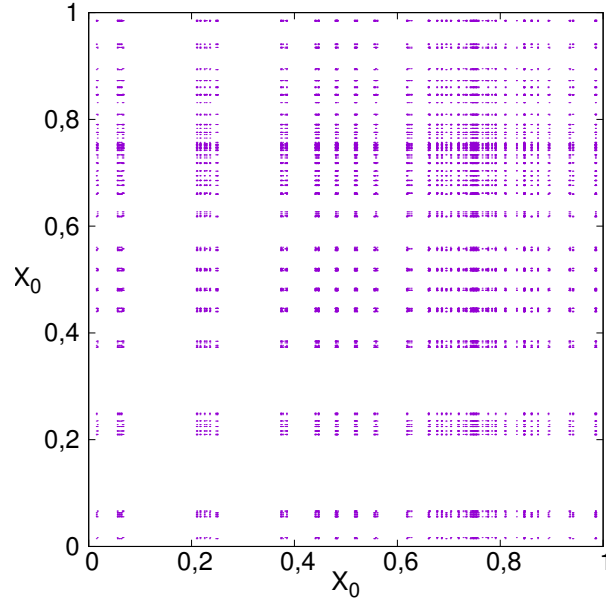


Figura 5.3: Estrutura similar a uma sela caótica para o espaço com os *Leakings* $0,1 < X < 0,2$ e $0,25 < X < 0,35$.

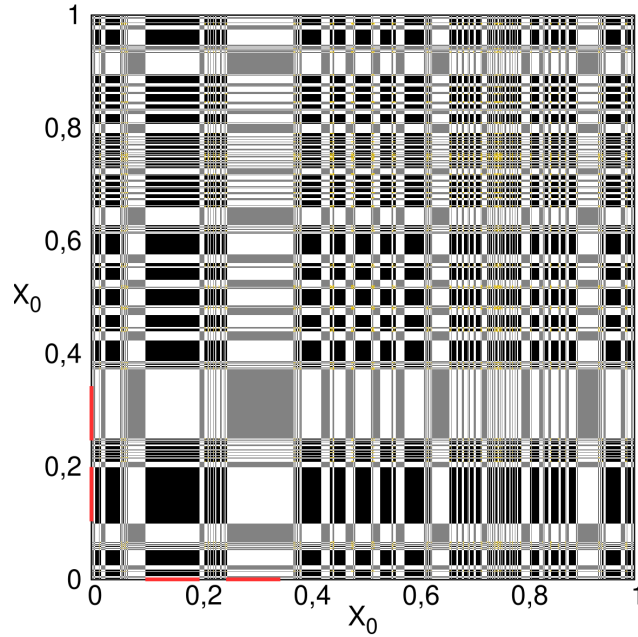


Figura 5.4: Bacias de escape e estrutura da Fig. 5.3 para *Leakings* $0,1 < X < 0,2$ e $0,25 < X < 0,35$ destacados em vermelho.

Na Fig. 5.5a) é exibido em preto o caso quando existe apenas o escape de $0,1 < X < 0,2$. Já na 5.5b) em vermelho estão os pontos quando o escape ocorre em $0,25 < X < 0,35$. Estas imagens indicam como esperado a ausência para 5.5a) de pontos em $0,1 < X < 0,2$ e 5.5b) não existem pontos em $0,25 < X < 0,35$, bem como na Fig. 5.3 não se formam pontos em ambas as regiões. Porém, outras regiões menores também se comportam dessa maneira, restando assim na Fig. 5.3 a estrutura similar a uma sela para os pontos em que os conjuntos de 5.5a) e 5.5b) coincidem.

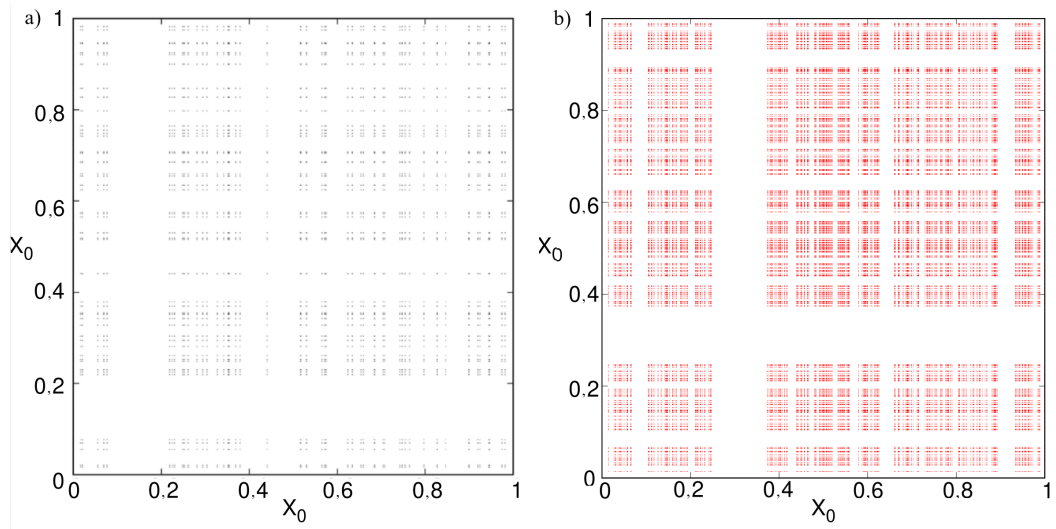


Figura 5.5: Separação das estruturas formadas pelos escapes de $0,1 < X < 0,2$ e $0,25 < X < 0,35$. a) Espaço com apenas o escape $0,1 < X < 0,2$ b) espaço com apenas o escape $0,25 < X < 0,35$.

Ademais, como perspectiva futura deste estudo é necessário, ainda, entender a relação das órbitas homoclínicas e heteroclínicas com as fronteiras destas regiões de escape, bem como estas órbitas influenciam nestas estruturas similares a selas caóticas.

Capítulo 6

Crises e órbitas homoclínicas no mapa logístico via *Supertracks*

Mudanças repentinas na estrutura dos atratores caóticos são chamadas de crises. Crises estão relacionadas com a colisão do atrator caótico com conjuntos invariantes instáveis, normalmente órbitas periódicas instáveis. Três tipos comuns de crises são:

- Crise de fronteira [78, 41]: crise relacionada com a criação ou destruição repentina de um atrator caótico, transformado em um transiente caótico.
- Crise interior [34]: crise em que ocorre uma mudança no tamanho ou no formato do atrator caótico.
- Crise de restauração ou quebra de simetria [44]: crise relacionada à união de dois ou mais atratores caóticos em um só.

Neste capítulo, vamos focar em outro tipo de crise, discutida em [34, 79]. Nesse caso, a estrutura do atrator caótico sofre uma sutil alteração, em que duas metades do atrator se unem formando uma estrutura única. Porém, diferentemente de uma crise interna, o tamanho e o formato não mudam substancialmente; apenas partes próximas do mesmo atrator se unem.

Essa crise de união de bandas caóticas diferencia-se da crise de restauração de simetria. Esta diferença deve-se ao fato de que, neste caso, duas bandas do mesmo atrator se unem, enquanto no outro são dois ou mais atratores distintos que sofrem esse tipo de união.

Esta transição acontece quando os pares de 2^m bandas caóticas se unem em uma órbita estável de período 2^{m-1} . Na Fig. 6.1, com imagens retiradas de [79], estão destacadas justamente estas crises, observando apenas a variável x e o parâmetro p . p_1, p_2, p_3 e p_4 representam quatro distintas crises em que ocorrem uniões de bandas caóticas; as linhas pontilhadas em cada região são justamente estes pontos fixos instáveis que se cruzam com o atrator caótico. Esta crise ocorre no mapeamento de Hénon [11]:

$$T_c : \begin{cases} x_{n+1} = 1 - px_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} . \quad (6.1)$$

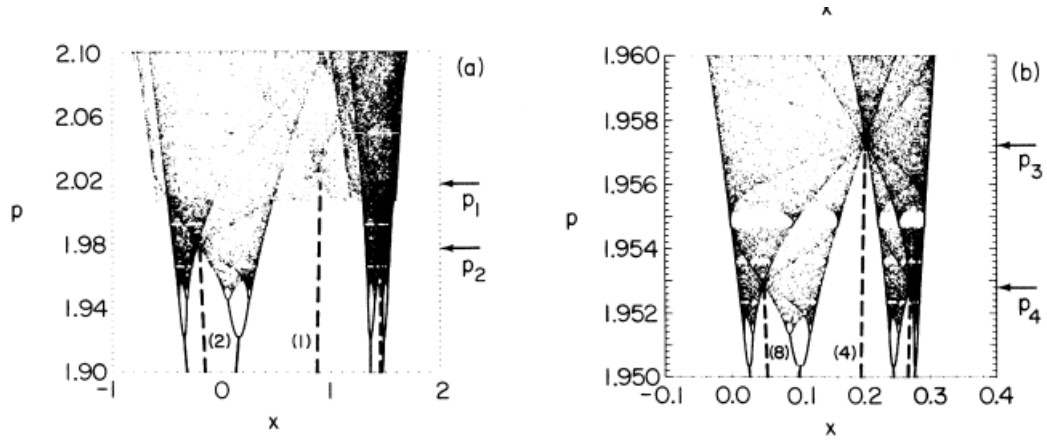


Figura 6.1: Crises de união de período do mapa de Hénon. a) Crises formadas pelo cruzamento de pontos fixos de período 1 e 2, destacados na figura. b) Ampliação na estrutura das bifurcações com cruzamentos destacados de repulsores de período 4 e 8.

Neste capítulo, vamos explorar este tipo de crise no mapa logístico, calcular o parâmetro em que cada crise acontece e buscar uma correlação. Além disso, estudaremos as órbitas homoclínicas que surgem e as relacionaremos com a formação dessas crises.

Para encontrar os parâmetros em que ocorrem as crises, utilizaremos um método similar ao utilizado em [59]. Serão estudadas órbitas que partem do ponto $X_0 = 0,5$, o ponto de máximo do mapa logístico. Para cada parâmetro R , o mapa é iterado n vezes partindo do ponto X_0 , ou seja, para cada R e n será gerado um $f^n(X_0, R)$. A construção de um diagrama desses $f^n(X_0, R)$ em função de R gera um conjunto de polinômios de grau n . Estas curvas são chamadas de *Supertracks* [37, 38].

A base computacional para a utilização desse método foi feita a partir dos trabalhos de Oblow [80]. Neste trabalho, as *Supertracks* são descritas a partir das derivadas das iteradas do mapa:

$$\frac{df^{(n+1)}(X_0)}{dX_0} = \frac{df(X_n)}{dX_0} = \frac{df(X_n)}{dX_{n-1}} \frac{dX_{n-1}}{dX_0} = \frac{df(X_n)}{dX_{n-1}} \frac{dX_{n-1}}{dX_{n-2}} \dots \frac{dX_1}{dX_0}. \quad (2.1)$$

Com isso, caso a órbita passe por $X_n = 0,5$, as derivadas resultam em:

$$\frac{df(0,5)}{dX_n} = \frac{dX_{n+1}}{dX_n} = R \left(1 - 2 \left(\frac{1}{2} \right) \right) = 0. \quad (2.2)$$

Por isso, tem-se o início de uma *Supertrack* em $X_n = 0,5$, criando curvas que não armazenam informação de possíveis pontos anteriores da órbita. As *Supertracks* mostram diferenças qualitativas entre os comportamentos caóticos e periódicos. Como nomenclatura, utilizaremos para estas curvas $s_n(R)$.

O parâmetro específico em que duas *Supertracks* distintas se interceptam significa que ambas, após n iterações, convergiram para o mesmo ponto, ocorrendo assim uma alteração na dinâmica relacionada a uma bifurcação. Este valor específico de R denota a transição de um comportamento caótico para periódico, ou vice-versa.

Dessa forma, no parâmetro onde $s_n(R)$ e $s_{n+1}(R)$ se cruzam, houve a formação de uma órbita de período 1 estável. Já com o cruzamento de $s_n(R)$ e $s_{n+2}(R)$ gerou-se uma órbita de período 2, e assim sucessivamente. Além disso, esta órbita pode ser justamente a órbita estável de período 2^{m-1} relacionada com a crise de união de bandas caóticas.

A análise visual deste fenômeno pode ser feita a partir da Fig. 6.2. No ponto R_1 existe o cruzamento de várias *Supertracks* $s_n(R_1)$. As *Supertracks* de menor iteração são para $n = 3$ (ciano) e $n = 4$ (verde claro); portanto, em R_1 existe uma órbita de período 1 para $n \geq 3$.

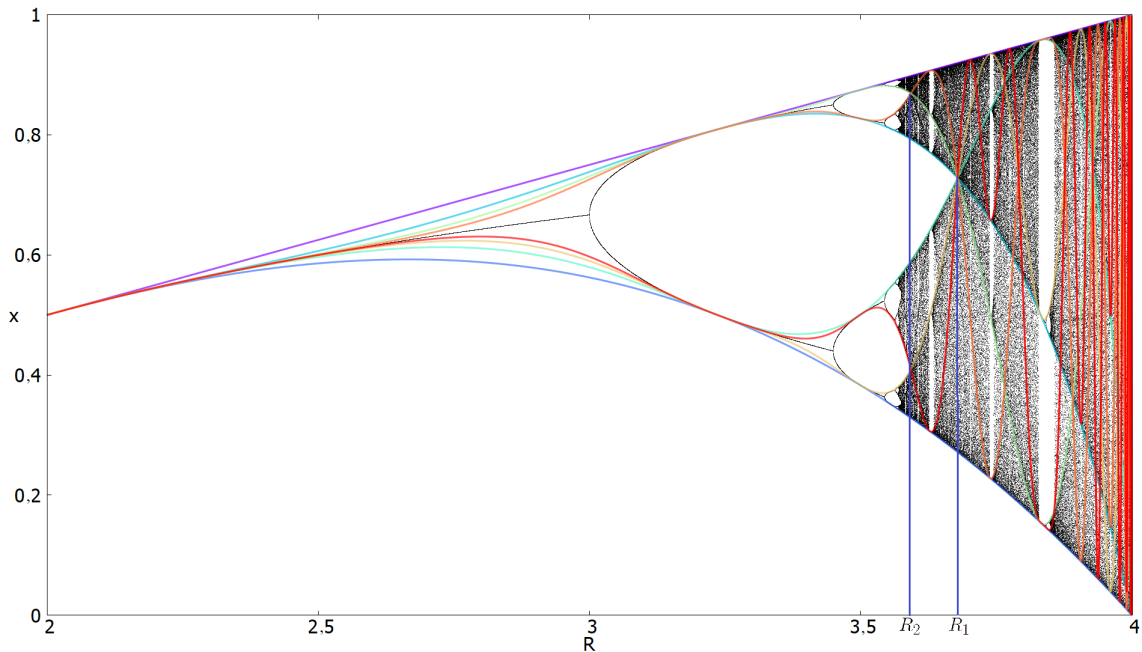


Figura 6.2: Diagrama de bifurcação do mapa logístico. Cada cor representa a enésima iteração de $X_0 = 0,5$ (*Supertracks*). Sendo $s_1(R)$ roxo, $s_2(R)$ azul, $s_3(R)$ ciano, $s_4(R)$ verde claro, $s_5(R)$ verde, $s_6(R)$..., $s_7(R)$ laranja e $s_8(R)$ vermelho. R_1 e R_2 representam crises de união de bandas caóticas.

Já o ponto R_2 apresenta cruzamentos de duas curvas: laranja ($n = 7$) e verde ($n = 5$); vermelho ($n = 8$) e amarela ($n = 6$). Assim, cada cruzamento ocorre depois de 2 iterações, indicando que se trata de uma órbita de período 2 que está relacionada à crise.

Além de formarem crises, estes pontos estão relacionados com a formação de órbitas homoclínicas. Na Fig. 6.3 é exibido o mapa de retorno para os casos de $R = R_1$ e $R = R_2$; o traço azul é dado pela iteração positiva do mapa e, em vermelho, a negativa. Esta imagem mostra, tanto em a) quanto em b), o ponto extremo central conectando-se ao ponto fixo numa evolução positiva e negativa, mostrando a formação de uma órbita homoclínica.

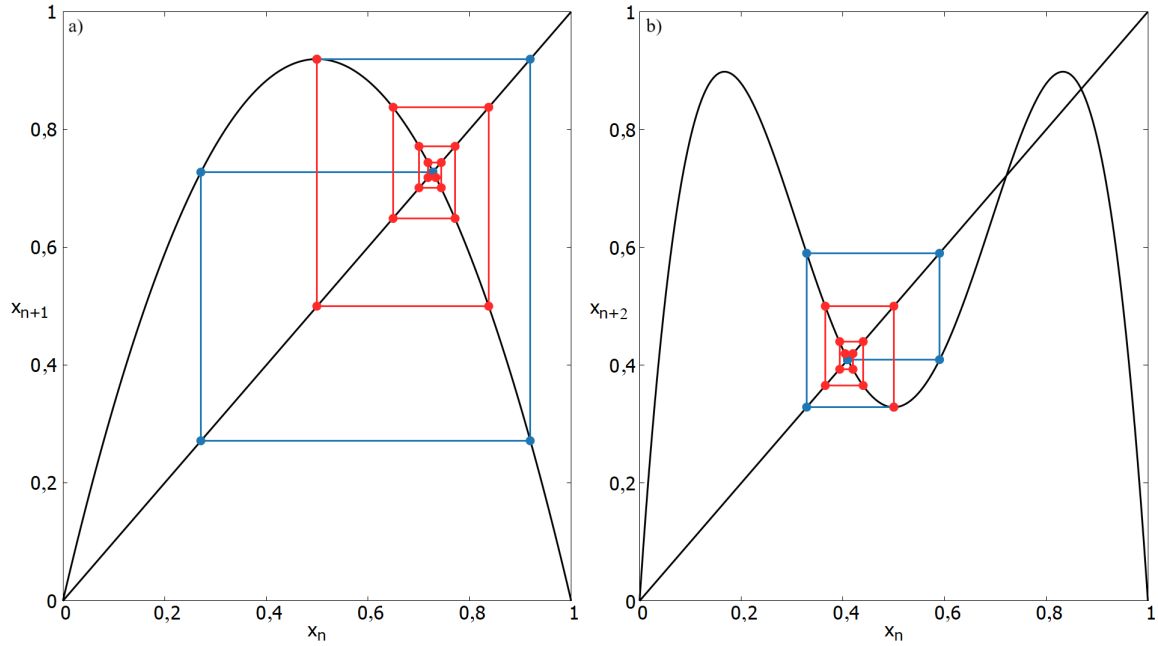


Figura 6.3: Mapa de retorno do mapa logístico com a formação de órbitas homoclínicas, em que a rota vermelha representa o sentido negativo de iteração do mapa e o azul, o sentido positivo. a) Órbita formada com $R = R_1$ pela órbita de período 1. b) $R = R_2$ representando a órbita de período 2.

A Fig. 6.3b) é o mapa de retorno referente à segunda iteração do mapa logístico, afinal o ponto repulsivo que forma a órbita homoclínica é um ponto de período 2.

Já na Fig. 6.4 é feita uma pequena alteração nos parâmetros, com a Fig. 6.4a) para $R = 3,66$ e Fig. 6.4b) para $R = 3,68$. Neste caso, no sentido negativo, ambas convergem para o ponto fixo. Entretanto, no sentido positivo, as trajetórias não convergem para o ponto repulsor, não havendo mais a órbita homoclínica.

Além dos cruzamentos das *Supertracks* onde ocorrem órbitas de períodos 1 e 2, existem outros cruzamentos associados a órbitas de períodos maiores. Por exemplo, a curva $s_{10}(R)$ intercepta a curva $s_{14}(R)$, onde se forma uma órbita instável de período 4. Com isso, é possível calcularmos computacionalmente vários destes cruzamentos a fim de buscar algum tipo de relação.

Para cada período de formação de órbita, é construído um programa em Fortran que subtrai cada ponto da curva $s_n(R)$ da curva $s_{n+m}(R)$, sendo m o período da órbita formada. A partir do momento em que o sinal desta subtração se inverte, foi encontrado um ponto de cruzamento. O ponto anterior e o posterior à inversão são armazenados. Considera-se o ponto médio entre eles, repetindo o procedimento na direção onde a inversão de sinais está ocorrendo até que o módulo da diferença seja menor que 10^{-10} . Este valor de parâmetro corresponde à formação da órbita homoclínica associada ao repulsor de período m .

As órbitas homoclínicas não estão associadas apenas à crise de união de bandas caóticas. Após o ponto de bifurcação de período 1, existem vários outros cruzamentos com

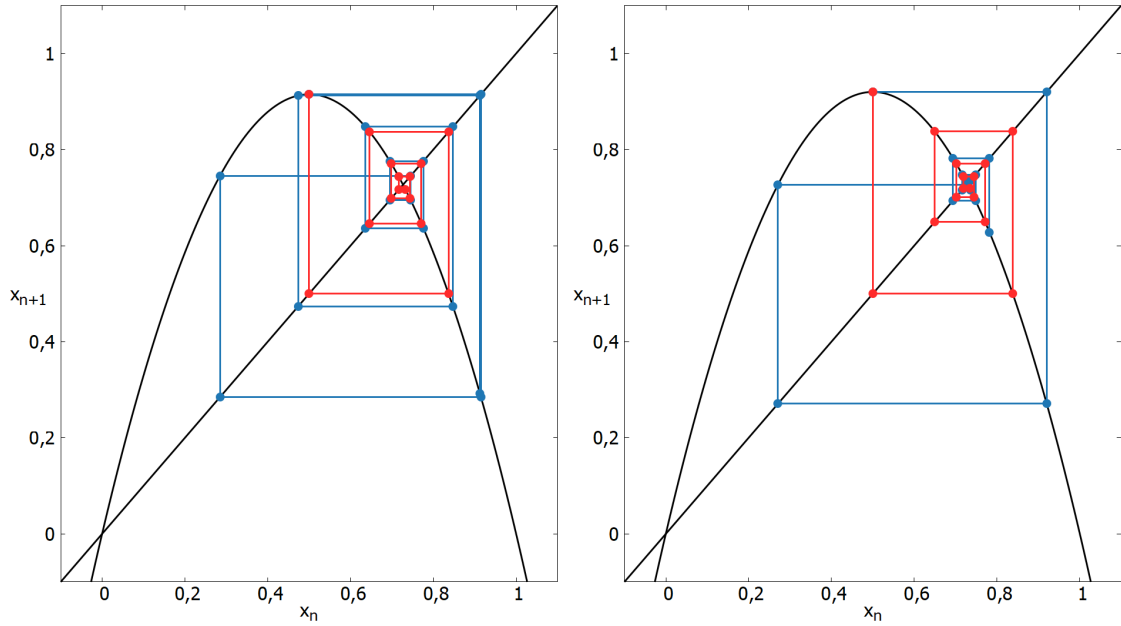


Figura 6.4: Mapa de retorno do mapa logístico em pontos que não formam órbitas homoclínicas com uma pequena alteração em R_1 : a) $R = 3,66$, b) $R = 3,68$.

período 1. Na Fig. 6.5a) são exibidas as curvas $s_3(R)$ e $s_4(R)$ que se cruzam em $R = R_1$ e $R = 4$. Porém, em períodos maiores, como $s_5(R)$ e $s_6(R)$, ocorrem mais cruzamentos após esse valor, como mostra a Fig. 6.5b).

Já na Fig. 6.5c) vemos a formação de um número ainda maior de cruzamentos depois do parâmetro R_1 , sendo grande parte deles próximos a $R = 4$. A fim de explorar melhor esses pontos, na Fig. 6.5d) são exibidos apenas os pontos de cruzamento das curvas $s_{10}(R)$ e $s_{14}(R)$ com ainda mais pontos próximos ao ponto de colapso $R = 4$.

Com isso, vemos que as órbitas homoclínicas, além de indicarem as crises de união de bandas caóticas, também aumentam nas proximidades do colapso em $R = 4$, quando o ponto fixo se torna a origem. Além disso, até esse colapso, as órbitas crescem progressivamente. Na Fig. 6.6, esse aumento das órbitas é evidenciado de a) até c), em que o sistema forma a órbita entre o máximo e a origem.

Este resultado não é restringido às órbitas formadas pelos repulsores de período 1. Ao analisarmos os pontos fixos de período 2, essas regiões homoclínicas concentram-se mais próximas de $R = 4$. Repetimos o mesmo procedimento de analisar o cruzamento entre as curvas.

Na Fig. 6.7a) são cruzadas as curvas $s_3(R)$ e $s_5(R)$; neste caso, existem dois cruzamentos, sendo um deles referente ao repulsor de período 1 e o outro à banda inferior do repulsor de período 2.

Tanto na Fig. 6.7b) quanto na c), observa-se o mesmo comportamento de predominância de órbitas homoclínicas próximo de $R = 4$. Já na Fig. 6.7d), em preto são apresentados os pontos referentes a repulsores de período 1 e, em vermelho, as órbitas homoclínicas associadas de período 2. É possível repetir este resultado para órbitas com

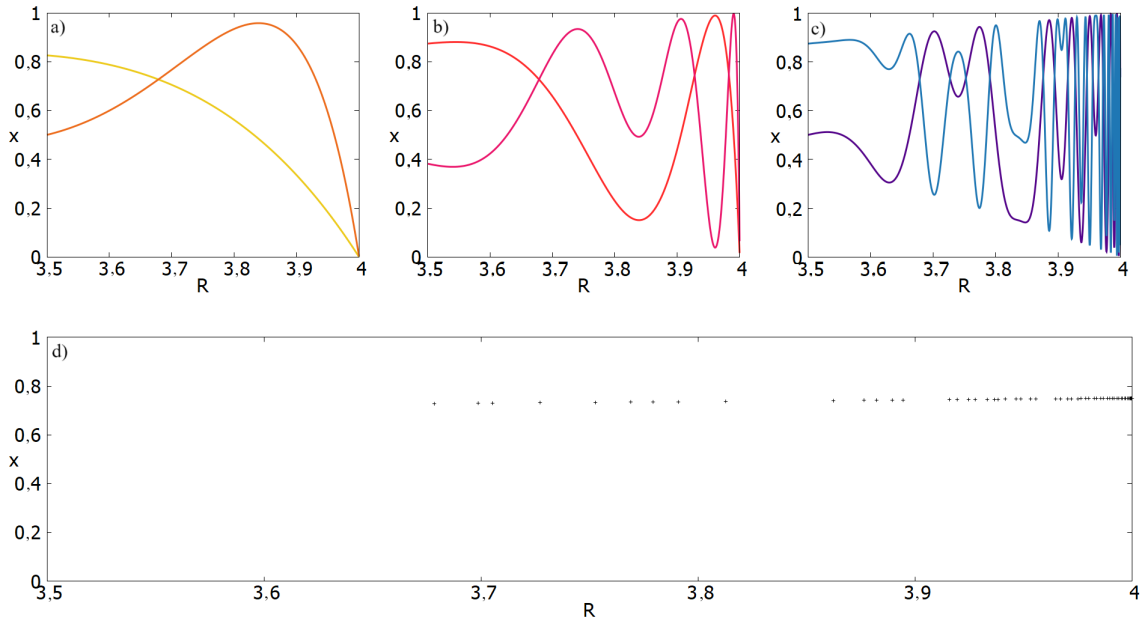


Figura 6.5: a) Curvas $s_3(R)$ e $s_4(R)$. b) Curvas $s_5(R)$ e $s_6(R)$. c) Curvas $s_8(R)$ e $s_9(R)$. d) Pontos de homoclinicidade formados pelos cruzamentos das curvas $s_{10}(R)$ e $s_{11}(R)$.

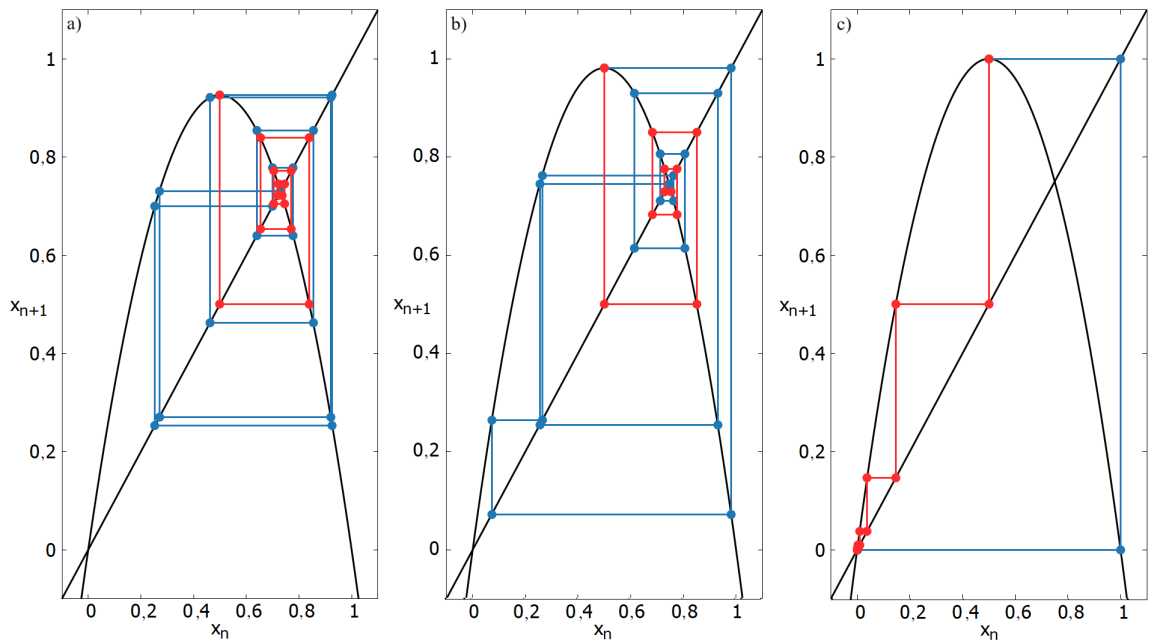


Figura 6.6: Progresso do tamanho das órbitas homoclínicas até o colapso em $R = 4, 0$, em que o ponto fixo se torna a origem: a) $R \approx 3,7$; b) $R \approx 3,925$; c) $R \approx 4,0$.

períodos ainda maiores. Para o período 4, os pontos se comportam como na Fig. 6.8.

Esta figura, da mesma maneira que as anteriores, tem a formação de cruzamentos das curvas homoclínicas na região referente ao cruzamento esperado dos repulsores. Vemos uma curva preta gerada pelo repulsor de período 1, em vermelho pelo repulsor de período 2 e em verde pelo repulsor de período 4. Entretanto, são formadas nesse caso algumas estruturas que não existem nas regiões esperadas pelos repulsores. Os quadrados

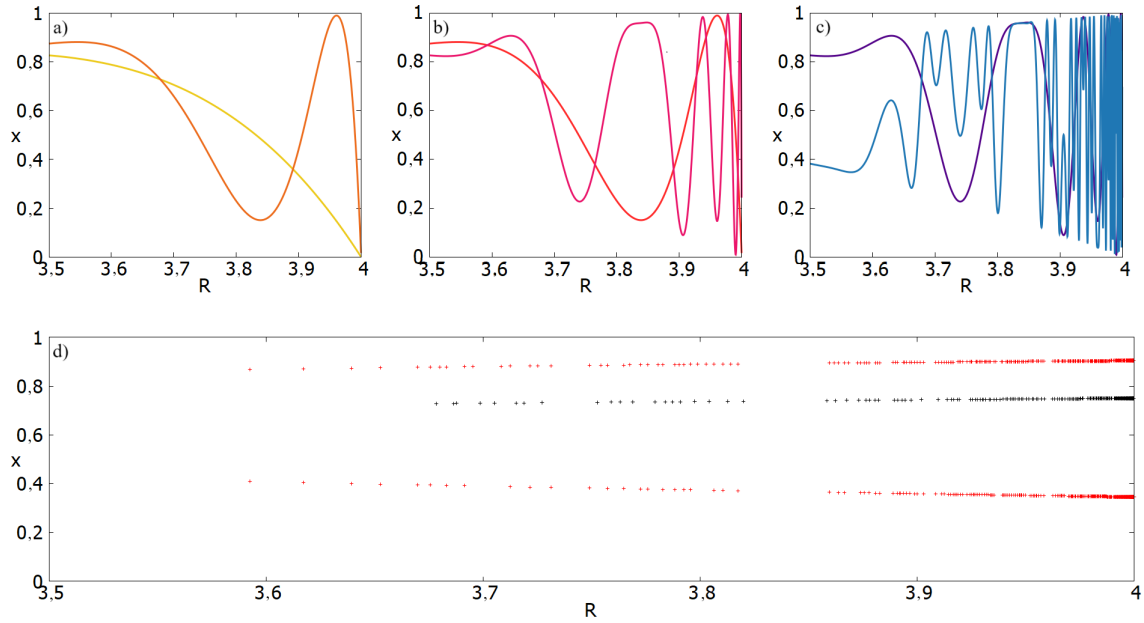


Figura 6.7: a) Curvas $s_3(R)$ e $s_5(R)$. b) Curvas $s_5(R)$ e $s_7(R)$. c) Curvas $s_7(R)$ e $s_9(R)$. d) Pontos de homoclinicidade formados pelos cruzamentos das curvas $s_{11}(R)$ e $s_{13}(R)$.

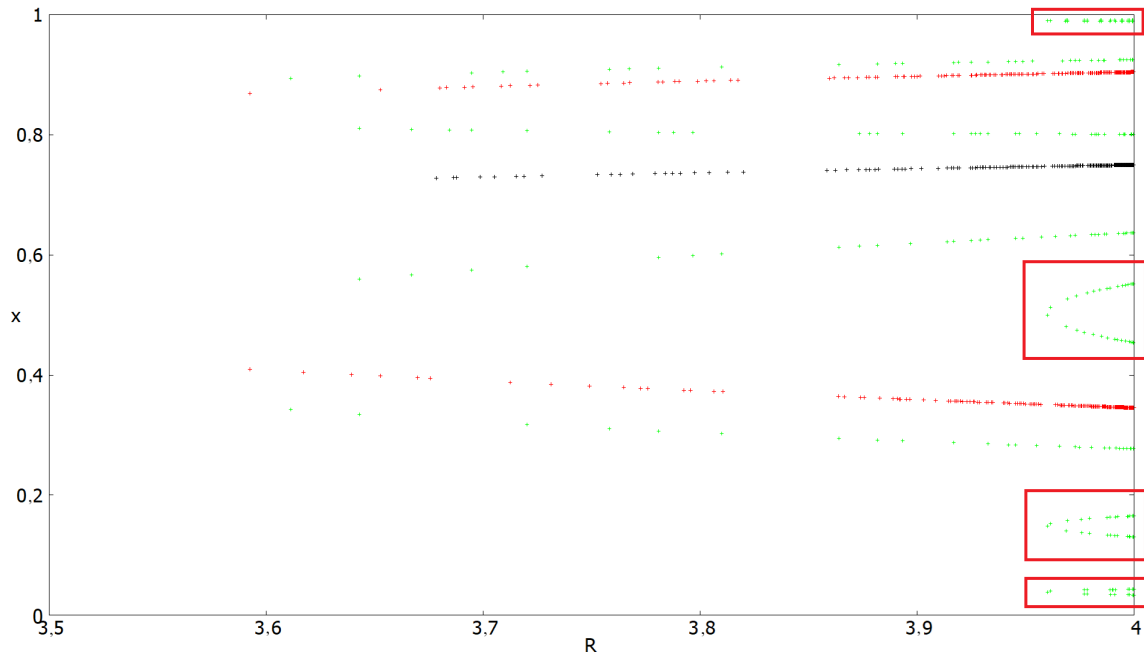


Figura 6.8: Pontos de homoclinicidade formados pelo cruzamento de curvas de $n = 4$.

destacados na Fig. 6.8 mostram uma estrutura distinta. Esta sequência de pontos de homoclinicidade forma uma estrutura similar a um atrator sofrendo um dobramento de período. Novamente, existe uma quantidade maior de pontos se aglomerando próximo de $R = 4$.

Aumentando para o período 8, as estruturas anteriores se mantêm (períodos 1, 2 e 4). Porém, neste caso, as estruturas de período 8, em azul, povoam muito mais o espaço. Estas estruturas azuis formam curvas similares às destacadas na Fig. 6.8, mas em quantidades

muito maiores.

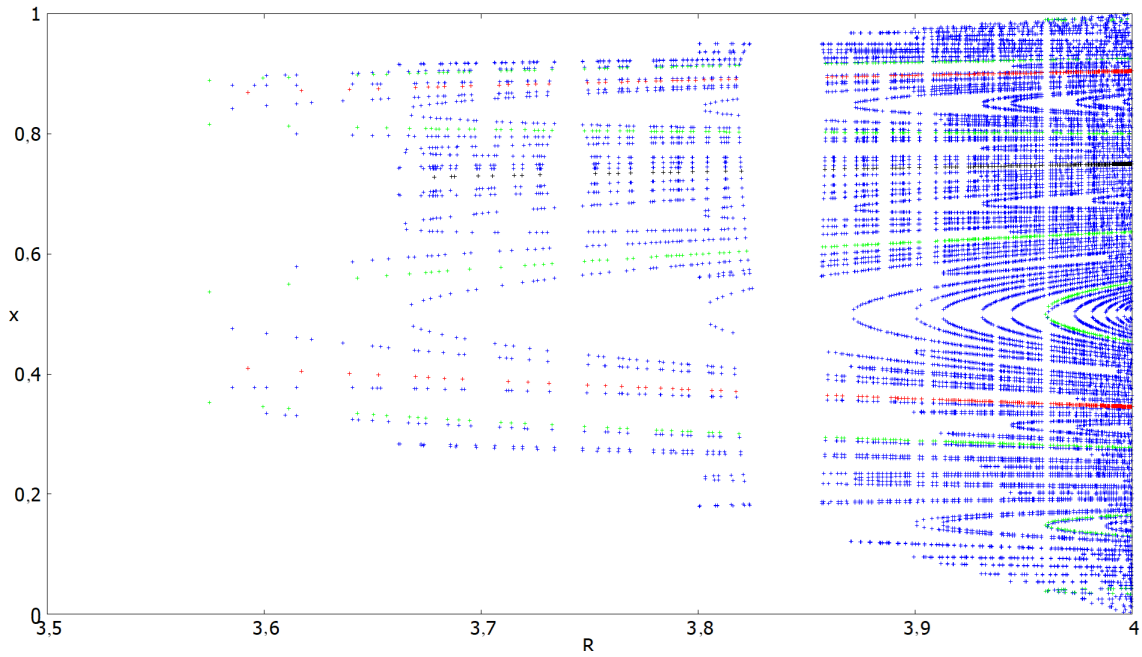


Figura 6.9: Pontos de homoclinicidade formados pelo cruzamento de curvas de $n = 8$.

Além dessa complexidade de pontos de homoclinicidade, também são destacadas as lacunas formadas pela ausência de pontos. Entre $R = 3,8$ e $R = 3,9$, existe uma destas lacunas na qual nenhum dos períodos adentra. Esta região, inclusive, coincide com a janela de periodicidade causada pela bifurcação tangente de período 3 que ocorre em $R \approx 3,83$.

Dessa forma, os pontos de homoclinicidade formam estruturas muito complexas no espaço de fase, muitas vezes ligadas aos repulsores do modelo. Porém, existem regiões que formam lacunas significativas.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

Este trabalho retoma conceitos de sistemas dinâmicos como pontos fixos, atratores, bacias de atração, órbitas homoclínicas e heteroclínicas.

Então é definido o mapa logístico em que as bacias de suas n iterações são estudadas e busca-se uma explicação para o fenômeno de Wada por meio da formação de órbitas homoclínicas e heteroclínicas.

Após isso, são retomados estudos de bacias de atração no modelo de Fermi-Ulam e sua complexidade na formação de bacias de atração complexas como bacias fractais e bacias de Wada.

As bacias de atração motivam a aplicação de *Leakings* no espaço de fase gerando bacias de escape, estas novamente podem ser estudadas por meio de órbitas homoclínicas que formam as fractalidades em suas fronteiras, estudo que tem como objetivo de perspectiva futura.

Por fim, a partir do uso das órbitas homoclínicas foi buscado entender as crises de união de bandas caóticas que ocorrem no mapa logístico.

Além disso, o estudo das órbitas homoclínicas que acontece com a variação do parâmetro R no modelo resultou em estruturas mais complexas nos pontos de homoclinicidade que se concentravam próximas a $R = 4$ e a medida que o período desses pontos gerados aumenta mais complexas são as estruturas formadas.

Como perspectivas futuras esperamos explorar melhor essas formações de órbitas homoclínicas e heteroclínicas em sistemas diversos e gerações de bacias de Wada e fractais. Além disso, o estudo das crises pode ser estendido para sistemas de dimensões maiores, buscando-se estes pontos de homoclinicidade. Além disso, é interessante entender melhor as estruturas formadas pelos pontos de homoclinicidade e a complexidade gerada por elas.

Por fim, este trabalho gerou resultados significativos no panorama científico, o resultado de bacias Wada e Parcialmente Wada do modelo de Fermi-Ulam já está nas correções finais para publicações. O método de visualização de bacias unidimensionais está sendo construído em outro artigo com outros modelos fora dos utilizados na dissertação. Já o resultado da formação das bacias de Wada esta sendo feito um artigo maior com mais

ferramentais, o que ocasiona um maior trabalho antes da publicação. Todos possuem perspectivas de publicações em periódicos internacionais.

Bibliografia

- 1 ÉFESO, H. de. **Fragmentos**. Petrópolis: Editora Vozes, 2006. Edição bilíngue grego-português.
- 2 ELEIA, P. de. **Poema**. Petrópolis: Editora Vozes, 2009. Edição bilíngue grego-português.
- 3 PLATÃO. **Timeu**. São Paulo: Editora Unesp, 2011. Tradução comentada.
- 4 ARISTÓTELES. **Física**. Petrópolis: Editora Vozes, 2011. Edição comentada.
- 5 NEWTON, I. **Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica**. London: Royal Society, 1687. First Edition.
- 6 HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física: Mecânica**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 1.
- 7 TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para Cientistas e Engenheiros: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. v. 1.
- 8 STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering**. 2. ed. Boulder, CO: Westview Press, 2015.
- 9 LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, American Meteorological Society, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.
- 10 CHUA, L. O. Chua's circuit: An overview ten years later. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 40, n. 10, p. 147–156, 1993.
- 11 HéNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. **Communications in Mathematical Physics**, v. 50, n. 1, p. 69–77, 1976.
- 12 IKEDA, K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system. **Optics Communications**, v. 30, n. 2, p. 257–261, 1979.
- 13 LEONEL, E. D. **Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2019. 278 páginas; brochura. ISBN 9788521218517.
- 14 GARAI, S. et al. Organized periodic structures and coexistence of triple attractors in a predator–prey model with fear and refuge. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 165, p. 112833, 2022. ISSN 0960-0779. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077922010128>>.

- 15 VANDERMEER, J. Wada basins and qualitative unpredictability in ecological models: a graphical interpretation. **Ecological Modelling**, v. 176, n. 1, p. 65–74, 2004. ISSN 0304-3800. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304380003005568>>.
- 16 WANG, L. et al. Investigation and application of fractal theory in cement-based materials: A review. **Fractal and Fractional**, v. 5, n. 4, 2021. ISSN 2504-3110. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2504-3110/5/4/247>>.
- 17 DAFILIS, M. et al. Extensive four-dimensional chaos in a mesoscopic model of the electroencephalogram. **Journal of Mathematical Neuroscience**, v. 5, p. 18, 2015. Open access.
- 18 SCULLY, J. et al. Widespread neuronal chaos induced by slow oscillating currents. **arXiv**, 2024. Open access preprint.
- 19 MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature**, v. 261, n. 5560, p. 459–467, 1976.
- 20 LEONEL, E. D. Defining universality classes for three different local bifurcations. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 39, p. 520–528, 2016. ISSN 1007-5704. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570416301101>>.
- 21 LEONEL, E. D.; Kamphorst Leal da Silva, J.; Oliffson Kamphorst, S. Transients in a time-dependent logistic map. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 295, n. 1, p. 280–284, 2001. ISSN 0378-4371. Proceedings of the IUPAP International Conference on New Trends in the Fractal Aspects of Complex Systems. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437101000887>>.
- 22 HERMES, J. D. V.; GRACIANO, F. H.; LEONEL, E. D. Universal behavior of the convergence to the stationary state for a tangent bifurcation in the logistic map. **Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity**, v. 9, n. 1, p. 63–70, 2020.
- 23 LEONEL, E. D.; MCCLINTOCK, P. V. E.; SILVA, J. K. L. da. Fermi-ulam accelerator model under scaling analysis. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 93, p. 014101, Jun 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.014101>>.
- 24 FONSECA, A. K. P. d.; LEONEL, E. D. Symmetry breaking in time-dependent billiards. **International Journal of Applied Physics and Mathematics**, v. 15, n. 2, p. 78–90, 2025.
- 25 DE SOUZA, S. et al. Self-similarities of periodic structures for a discrete model of a two-gene system. **Physics Letters A**, v. 376, n. 15, p. 1290–1294, 2012. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960112001715>>.
- 26 P., S. et al. Critical fractal boundary between chaos and periodicity: Exploring the devil’s staircase. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 209, p. 118529, 2026. ISSN 0960-0779. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077926006703>>.

- 27 DE OLIVEIRA, J. A. et al. An investigation of the parameter space for a family of dissipative mappings. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 29, n. 5, p. 053114, 05 2019. ISSN 1054-1500. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.5048513>>.
- 28 ALBUQUERQUE, H. A.; RUBINGER, R. M.; RECH, P. C. Self-similar structures in a 2d parameter-space of an inductorless chua's circuit. **Physics Letters A**, v. 372, n. 27, p. 4793–4798, 2008. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960108006786>>.
- 29 DA COSTA, D. R. et al. The role of extreme orbits in the global organization of periodic regions in parameter space for one dimensional maps. **Physics Letters A**, v. 380, n. 18, p. 1610–1614, 2016. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960116002024>>.
- 30 ABREU, C. E. P. et al. Extreme fractal dimension at periodicity cascades in parameter spaces. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 110, p. L032201, Sep 2024. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.110.L032201>>.
- 31 BARONI, R. S. et al. Global dynamics and asymmetric fractal dimension in a nontwist circle map. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 35, n. 2, p. 023122, 02 2025. ISSN 1054-1500. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/5.0238699>>.
- 32 NUSSE, H. E.; YORKE, J. A. Basins of attraction. **Science**, v. 271, n. 5254, p. 1376–1380, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1126/science.271.5254.1376>>.
- 33 SINHA, Y. et al. Geometric perspective of linear stability of q-states in finite kuramoto networks on circulant graphs. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 112, p. 054204, Nov 2025. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/z5v7-41g1>>.
- 34 GREBOGI, C. et al. Critical exponents for crisis-induced intermittency. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 36, p. 5365–5380, Dec 1987. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.36.5365>>.
- 35 YONEYAMA, K. Theory of continuous set of points (not finished). **Tohoku Mathematical Journal, First Series**, v. 12, p. 43–158, 1917.
- 36 ALTMANN, E. G.; PORTELA, J. S. E.; TÉL, T. Leaking chaotic systems. **Reviews of Modern Physics**, v. 85, n. 2, p. 869–918, maio 2013.
- 37 FIDÉLIS, A. J. **Dinâmica do mapa logístico via supertracks**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.udesc.br/entities/publication/c3407dc3-638d-4b52-92d1-4afda1dadd1c>>.
- 38 POLLI, J. G.; FIDÉLIS, A. J.; DA LUZ, M. G. E. Power-law behavior around bifurcation points of 1d maps: A supertracks approach. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 35, n. 4, p. 043107, 04 2025. ISSN 1054-1500. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/5.0233615>>.
- 39 MEDRANO-T., R. O.; BAPTISTA, M. S.; CALDAS, I. L. Basic structures of the shilnikov homoclinic bifurcation scenario. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of**

Nonlinear Science, v. 15, n. 3, p. 033112, 09 2005. ISSN 1054-1500. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.2031978>>.

40 MEDRANO-T., R. O.; BAPTISTA, M. S.; CALDAS, I. L. Homoclinic orbits in a piecewise system and their relation with invariant sets. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 186, n. 3, p. 133–147, 2003. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278903003099>>.

41 OLIVEIRA, D. F.; LEONEL, E. D.; ROBNIK, M. Boundary crisis and transient in a dissipative relativistic standard map. **Physics Letters A**, v. 375, n. 38, p. 3365–3369, 2011. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960111009170>>.

42 MIRANDA, L. K. A. et al. A second order phase transition characterized in the suppression of unlimited chaotic diffusion for a dissipative standard mapping. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 165, p. 112826, 2022. ISSN 0960-0779. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077922010050>>.

43 LEONEL, E. D.; KUWANA, C. M.; OLIVEIRA, D. F. Scaling invariance for the diffusion coefficient in a dissipative standard mapping. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 472, p. 134513, 2025. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278924004639>>.

44 OTT, E. **Chaos in Dynamical Systems**. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 9780521010849.

45 MEDRANO-T, R. O.; ROCHA, R. The negative side of chua's circuit parameter space: Stability analysis, period-adding, basin of attraction metamorphoses, and experimental investigation. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 24, n. 09, p. 1430025, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0218127414300250>>.

46 MIHARA, A. et al. Basin sizes depend on stable eigenvalues in the kuramoto model. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 105, p. L052202, May 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.105.L052202>>.

47 HANSEN, M. et al. Statistical properties for an open oval billiard: An investigation of the escaping basins. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 106, p. 355–362, 2018. ISSN 0960-0779. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S096007791730499X>>.

48 MANDELBROT, B. B. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. **Science**, v. 156, n. 3775, p. 636–638, 1967. Disponível em: <<https://doi.org/10.1126/science.156.3775.636>>.

49 AGUIRRE, J.; VIANA, R. L.; SANJUÁN, M. A. F. Fractal structures in nonlinear dynamics. **Reviews of Modern Physics**, v. 81, n. 1, p. 333–386, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.333>>.

50 GREBOGI, C. et al. Multi-dimensioned intertwined basin boundaries: Basin structure of the kicked double rotor. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 25, n. 1–3, p. 347–360, 1987. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0167-2789\(87\)90108-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(87)90108-4)>.

51 DAZA, A. et al. Testing for basins of wada. **Scientific Reports**, v. 5, n. 16579, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/srep16579>>.

- 52 SOMMERER, J. C. The end of classical determinism. **Johns Hopkins APL Technical Digest**, v. 16, n. 4, p. 333–347, 1995. Disponível em: <<https://secwww.jhuapl.edu/techdigest/content/techdigest/pdf/V16-N04/16-04-Sommerer.pdf>>.
- 53 HUNT, B. R.; OTT, E.; ROSA, E. Sporadically fractal basin boundaries of chaotic systems. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 82, p. 3597–3600, May 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.3597>>.
- 54 NUSSE, H. E.; OTT, E.; YORKE, J. A. Saddle-node bifurcations on fractal basin boundaries. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 75, p. 2482–2485, Sep 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.2482>>.
- 55 EPUREANU, B. I.; GREENSIDE, H. S. Fractal basins of attraction associated with a damped newton's method. **SIAM Review**, v. 40, n. 1, p. 102–109, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/S0036144596310033>>.
- 56 VERHULST, P.-F. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. **Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique**, 1847. Série de très artigos entre 1838–1847.
- 57 ASMUSSEN, M. A.; FELDMAN, M. W. Density-dependent selection i: A stable feasible equilibrium in two-locus systems. **Journal of Theoretical Biology**, v. 60, n. 2, p. 417–437, 1976.
- 58 HOPPENSTEADT, F. C. **Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1975. ISBN 978-0-89871-015-6.
- 59 COSTA, D. R. D. et al. Extreming curves and the parameter space of a generalized logistic mapping. **Journal of Vibration Testing and System Dynamics**, v. 2, n. 2, p. 109–118, 2018.
- 60 ZUBEN, C. J. von et al. Theoretical approaches to forensic entomology: I. mathematical model of postfeeding larval dispersal. **Journal of Applied Entomology**, v. 120, n. 1-5, p. 379–382, 1996. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1439-0418.1996.tb01623.x>>.
- 61 FEIGENBAUM, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. **Journal of Statistical Physics**, v. 19, n. 1, p. 25–52, 1978.
- 62 FERMI, E. On the origin of the cosmic radiation. **Physical Review**, v. 75, n. 8, p. 1169–1174, 1949.
- 63 ULAM, S. M. On some statistical properties of dynamical systems. In: CAM, L. M. L.; NEYMAN, J.; SCOTT, E. (Ed.). **Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability**. Berkeley, CA: University of California Press, 1961. v. 3, p. 315–320. Original publication; no individual DOI available.
- 64 LEONEL, E. D. Breaking down the fermi acceleration with inelastic collisions. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 40, n. 50, p. F1077–F1084, 2007.

- 65 RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1976.
- 66 WIGGINS, S. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. 2nd. ed. New York: Springer-Verlag, 2003. v. 2. (Texts in Applied Mathematics, v. 2). ISBN 978-0-387-00163-0.
- 67 LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. **Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse**, v. 9, p. 203–474, 1892. Original work in Russian.
- 68 OSELEDETS, V. I. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. **Trans. Moscow Math. Soc.**, v. 19, p. 197–231, 1968.
- 69 MCDONALD, S. W. et al. Fractal basin boundaries. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 17, n. 2, p. 125–153, 1985. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90001-6](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90001-6)>.
- 70 GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Metamorphoses of basin boundaries in nonlinear dynamical systems. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 56, p. 1011–1014, Mar 1986. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.56.1011>>.
- 71 OLIVEIRA, J. A. de et al. Leaking of orbits from the phase space of the dissipative discontinuous standard mapping. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 103, p. 012211, Jan 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.103.012211>>.
- 72 MÉNDEZ-BERMÚDEZ, J. et al. Leaking from the phase space of the riemann–liouville fractional standard map. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 172, p. 113532, 2023. ISSN 0960-0779. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077923004332>>.
- 73 BAUER, W.; BERTSCH, G. F. Decay of ordered and chaotic systems. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 65, p. 2213–2216, Oct 1990. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.65.2213>>.
- 74 BATTELINO, P. M. et al. Multiple coexisting attractors, basin boundaries and basic sets. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 32, n. 2, p. 296–305, 1988. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278988900577>>.
- 75 PÉNTEK, A. et al. Fractal boundaries in open hydrodynamical flows: Signatures of chaotic saddles. **Physical Review E**, v. 51, n. 5, p. 4076 – 4088, 1995. Cited by: 87. Disponível em: <<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0001587809&doi=10.1103%2fPhysRevE.51.4076&partnerID=40&md5=fbbca81f6d735974dc1fbacce49f8b94>>.
- 76 REMPEL, E. L. et al. Analysis of chaotic saddles in low-dimensional dynamical systems: the derivative nonlinear schrödinger equation. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 199, n. 3, p. 407–424, 2004. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016727890400394X>>.
- 77 FALCONER, K. J. **The Geometry of Fractal Sets**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1985. (Cambridge Tracts in Mathematics).

78 GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 7, n. 1, p. 181–200, 1983. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278983901264>>.

79 BROWN, R.; GREBOGI, C.; OTT, E. Broadening of spectral peaks at the merging of chaotic bands in period-doubling systems. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 34, p. 2248–2254, Sep 1986. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.34.2248>>.

80 OBLOW, E. Supertracks, supertrack functions and chaos in the quadratic map. **Physics Letters A**, v. 128, n. 8, p. 406–412, 1988. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960188901193>>.