



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTIMAÇÃO DE RIGIDEZES DE MANCAIS DE ROTORES POR ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Leonardo Caldiron 

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**

Orientador: PROF. DR. Luiz de Paula do Nascimento

Ilha Solteira, Setembro de 2004

ESTIMAÇÃO DE RIGIDEZES DE MANCAIS DE ROTORES POR ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

LEONARDO CALDIRON

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA** na área de concentração **MECÂNICA DOS SÓLIDOS** e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo / Coordenador do Curso .

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Luiz de Paula do Nascimento / Orientador

Prof. Dr. Kátia Lucchesi Calvaca

Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo

OFERECIMENTO

A minha família, por todo apoio e paciência

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Luiz de Paula do Nascimento pelo apoio em todos os momentos deste trabalho e pelos ensinamentos transmitidos.

Agradeço a FEIS UNESP, corpo docente e funcionários que de alguma forma contribuíram para que esse trabalho fosse realizado.

Agradeço aos meus colegas de mestrado Marcelo Braz de Aquino, Gilson Lemos e os demais pelo companheirismo e apoio.

Agradeço a minha irmã Silvia Marina Caldiron Rezende pelo apoio e pela consultoria.

SUMÁRIO

	Página
CAPÍTULO 1	1
1. INTRODUÇÃO	1
 CAPÍTULO 2	5
2. ASPECTOS GERAIS EM DINÂMICA DE ROTORES	5
2.1 – Introdução	5
2.2 – Velocidades críticas	6
2.3 – Influência do Efeito Giroscópio com o Modelo por Elementos Finitos	9
2.4 – Sistema Rotor-Estrutura Suporte-Fundação	11
 CAPÍTULO 3	14
3. MODELAGEM MATEMÁTICA DE ROTORES	14
3.1 – Introdução	14
3.2 – Equações de movimento de rotores pelo método dos elementos finitos	14
 CAPÍTULO 4	19
4. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE PARÂMETROS	19
4.1 – Introdução	19
4.2 – Análise de sensibilidade da resposta em frequência dos sistemas	19
4.2.1 – Determinação de $\partial_m \left\{ y(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c}, \bar{f}) \right\}$	20
4.3 – Análise de sensibilidade da resposta modal	22
4.3.1 – Sensibilidade da resposta modal de sistemas não amortecidos	22
4.3.2 – Sensibilidade da resposta modal de sistemas amortecidos	29

CAPÍTULO 5	36
5. MÉTODO DE AJUSTE DE RIGIDEZ DE MANCAIS	36
5.1 – Introdução	36
5.2 – Método de Ajuste	36
5.3 – Considerações Sobre o Programa Computacional	40
 CAPÍTULO 6	 42
6. PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS	42
6.1 – Introdução	42
6.2 – Rotor de Ensaios Experimentais	42
6.3 – Aquisição e processamento de sinais	44
6.4 – Equipamentos e Instrumentação utilizados	44
6.5 – Método de obtenção dos modos de vibração experimentais	45
6.6 – Consideração sobre a massa das lâminas	48
6.7 – Correlação dos modos experimentais (MAC)	49
 CAPÍTULO 7	 50
7. ANÁLISE DO MÉTODO – SIMULAÇÃO TEÓRICA	50
7.1 – Introdução	50
7.2 – Análise do rotor com dois mancais	50
7.2.1 – Modelagem matemática	50
7.2.2 – Rigidez equivalente do eixo	52
7.2.3 – Frequências naturais de referência	53
7.2.4 – Resultados das simulações	54
7.3 – Análise do rotor com três mancais	57
7.3.1 – Modelagem Matemática	57
7.3.2 – Rigidez equivalente do eixo	57
7.3.3 – Frequências naturais de referência	58
7.3.4 – Resultados das simulações	58

CAPÍTULO 8	62
8. ANÁLISE DO MÉTODO COM DADOS EXPERIMENTAIS	62
8.1 – Introdução	62
8.2 – Dados experimentais do rotor	62
8.3 – Modelo matemático de ajuste dos mancais	69
8.4 – Ajuste das rigidezes do rotor com dois mancais	72
8.5 – Ajuste das rigidezes do rotor com três mancais	75
 CAPÍTULO 9	 77
CONCLUSÕES	77
9.1 Conclusões Gerais	77
9.2 – Sugestões para trabalhos futuros	78
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 79
 APÊNDICE I - Matrizes das equações de movimento – MEF	 A - 1

LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1 – Discretização do rotor com dois mancais	51
Tabela 7.2 – Frequências naturais x rigidez dos mancais	54
Tabela 7.3 – Resultados da estimação de rigidez baixa – mancal dependente (1×10^2 N/m) ...	55
Tabela 7.4 – Resultados da estimação de rigidez na zona de transição (1×10^5 N/m)	55
Tabela 7.5 – Resultados da estimação de rigidez elevada – eixo dependente (1×10^8 N/m)	56
Tabela 7.6 – Resultados da estimação de rigidezes distintas (1×10^5 N/m e 1×10^3 N/m)	56
Tabela 7.7 – Dados adicionais da discretização do rotor de três mancais	57
Tabela 7.8 – Frequências naturais x rigidez dos mancais	58
Tabela 7.9 – Resultados da estimação de rigidez baixa – mancal dependente (1×10^2 N/m)	59
Tabela 7.10 – Resultados da estimação de rigidez na zona de transição (1×10^5 N/m)	59
Tabela 7.11 – Resultados da estimação de rigidezes distintas (1×10^5 , 1×10^4 e 1×10^3 N/m)	60
Tabela 7.12 – Resultados da estimação de rigidezes distintas (1×10^3 , 1×10^4 e 1×10^5 N/m)	60
 Tabela 8.1 – Frequências naturais experimentais do rotor com dois mancais, parado	 65
Tabela 8.2 – Frequências naturais experimentais do rotor com dois mancais, em movimento	66
Tabela 8.3 – Frequências naturais experimentais do rotor com três mancais, parado	69
Tabela 8.4 – Frequências naturais experimentais do rotor com três mancais, em movimento .	69
Tabela 8.5 – Elementos de eixo e de disco do rotor	70
Tabela 8.6 – Massas das lâminas representativas dos mancais	71
Tabela 8.7 – Elementos adicionais do rotor de dois mancais	72
Tabela 8.8 – Elementos adicionais do rotor de três mancais	72
Tabela 8.9 – Resultado do ajuste do rotor com dois mancais sem rotação	73
Tabela 8.10 – Influência do efeito giroscópio para o rotor de dois mancais	74
Tabela 8.11 – Resultado do ajuste do rotor com três mancais sem rotação	75
Tabela 8.12 – Influência do efeito giroscópio para o rotor de três mancais	76

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diagrama de Campbell Típico	9
Figura 2.2 – Rotor de um disco e dois mancais	10
Figura 3.1 – Sistema deformado composto por eixo, discos e mancais	15
Figura 5.1 – Fluxograma do algoritmo de ajuste do modelo	39
Figura 6.1 – Desenho do rotor com medidas em milímetros	43
Figura 6.2 – Rotor de laboratório	43
Figura 6.3 – Instrumentação para medidas experimentais	45
Figura 6.4 – Resíduo e Pólo	46
Figura 6.5 – Ilustração do método “Quadrature Picking”	48
Figura 7.1 – Discretização do sistema com 2 mancais	52
Figura 8.1 – FRF do rotor de dois mancais com lâminas de 5mm, parado	63
Figura 8.2 – Parte Real e Imaginária da FRF (Figura 8.1)	64
Figura 8.3 – Primeiro e segundo modos experimentais (Figura 8.1)	64
Figura 8.4 – FRF do rotor com dois mancais, a 500 rpm e lâminas de 7,9 mm	66
Figura 8.5 – FRF do rotor de três mancais com lâminas de 9,5 mm, parado	67
Figura 8.6 – Parte Real e Imaginária da FRF (Figura 8.5)	68
Figura 8.7 – Primeiro, segundo e terceiro modos experimentais (Figura 8.5)	68
Figura 8.8 – Discretização básica do rotor em 11 nós	70

LISTA DE SÍMBOLOS

λ = autovalor

$\lambda = \Omega/\omega$ = denominado relação de “*whirl*” ou “*spin*”.

Ω = velocidade de rotação do rotor

ω = frequência natural do sistema

ϕ = deslocamento modal

y_i = termo i de um autovetor

$S\lambda$ = termo de sensibilidade em relação aos autovalores

μ = densidade por unidade de área

(X,Y,Z) = eixo fixo de coordenadas

(x,y,z) = eixo móvel de coordenadas

$(Y_s, Z_s, \theta Y_s, \theta Z_s)$ = deslocamentos relativos do eixo de um ponto qualquer do sistema a uma distância S relativa ao sistema de referência fixo

$(y_s, z_s, \theta y_s, \theta z_s)$ = deslocamentos relativos do eixo de um ponto qualquer do sistema a uma distância S relativa ao sistema de referência móvel

$*$ = conjugado complexo

q_1, q_2 = coordenadas generalizadas

$[C]$ = matriz de amortecimento

$[G]$ = matriz giroscópica

$[I]$ = matriz identidade

$[K]$ = matriz de rigidez

$[L]$ = matriz de transformação ortogonal

$[M]$ = matriz de massa

$[\Lambda]$ = matriz dos autovalores

$[\Phi]$ = matriz dos autovetores

$\{f(\omega)\}$ = vetor excitação

$\{f(t)\}$ = vetor força

$\{y(\omega)\}$ = vetor resposta

a = parâmetro característico da inércia do rotor

ACE = “Software” de aquisição de dados

ASCII = “American Standard Code for Information Interchange” – formato de armazenamento de dados baseado em 128 tipos de caracteres

CI = número de iterações do algoritmo de ajuste

$C2$ = número de passos variando de 1 a p

D = diâmetro do disco

d = referente ao elemento de disco

d = variável de diâmetro

e = distância da massa desbalanceada em relação ao centro geométrico do disco

E = módulo de elasticidade

e = variável de espessura

$esp.$ = espessura

f = influência dinâmica do conjunto filme de óleo

FRF = Função de Resposta em Frequência

$H(\omega)$ = função de resposta em frequência

I = momento de inércia transversal

i e j = índices de referência matricial

i e j = índices referentes a resposta e a excitação respectivamente

i e j = número complexo $\sqrt{-1}$

K ou k = variável de rigidez

l = comprimento dos elementos de viga

L = variável de comprimento

m = massa total do sistema

MAC = “Modal Assurance Criterion” – Critério de correlação dos modos de vibração teóricos e experimentais

MatLab = “Software” de programação do tipo linguagem interpretada.

m_d = massa desbalanceada

md = massa do disco

M_{ID} = momento de inércia de massa diametral do disco

M_{IP} = momento de inércia de massa polar do disco

$\varnothing$ = diâmetro

p = números de partes da divisão de passos

p = posição do pólo

r = influência dinâmica do rotor

r = modo de vibração em particular

R = movimentos de rotação

R = resíduo

T = translação

$tol1$ = tolerância para autovalores

$tol2$ = valor de referencia para a execução da divisão de passos

σ = parte real do pólo p = razão na qual uma vibração amortecida decai em amplitude

RESUMO

Neste trabalho são otimizadas rotinas computacionais de um método de estimação de rigidez de mancais de máquinas através de um processo de ajuste de modelo, utilizando a análise de sensibilidade. Este método consiste em utilizar a análise de sensibilidade dos autovalores com relação à variação da rigidez dos mancais de um rotor. A eficácia e a robustez do método são analisadas através de simulações teóricas, bem como através de dados experimentais obtidos de um rotor de rotação variável e rigidezes dos mancais ajustáveis. O modelo matemático de ajuste do sistema é desenvolvido pelo método dos elementos finitos e o método de ajuste converge empregando-se um processo iterativo. Este método de ajuste baseia-se na minimização da diferença entre autovalores experimentais e autovalores obtidos com o modelo matemático de ajuste a partir de valores de rigidez dos mancais previamente adotados. A análise é feita com o rotor em diversas velocidades de rotação para verificar a influência do efeito giroscópio, e em diversas condições de valores da rigidez dos mancais para analisar o método quando aplicado em rotores flexíveis e em rotores rígidos. O desempenho do método é analisado com resultados teóricos e experimentais.

ABSTRACT

In this work, computational routines of estimation method of stiffness bearing of machine via a model updating process are optimized, using the sensitivity analysis. This method consists of using the eigenvalue sensitivity analysis, relating to the stiffness bearing variation of a rotor. The efficacy and the robustness of the method are analyzed through the theoretical simulations, as well as, based on the experimental data obtained of a test rotor with variable rotating speeds and adjustable bearing stiffness values. The mathematical model system is developed by the finite element method and the method of adjustment should converge employing an iterative process. The method of adjustment is based on the minimization of the difference between experimental eigenvalues and eigenvalues obtained via mathematical model from previously adopted stiffness bearing values. The analysis is made by using the rotor in different rotating speeds in order to check the influence of the gyroscopic effect, and in several conditions of the stiffness bearing values to analyze the method when applied on flexible and rigid rotors. The performance of the method is analyzed through theoretical and experimental results.

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

Os modelos matemáticos são utilizados para simular e fazer previsões do comportamento vibratório dos sistemas dinâmicos. Quando os modelos são empregados na otimização de sistemas, na detecção de falhas ou mesmo durante o processo de ajuste de um modelo, existe um particular interesse em se obter relações entre as variações dos parâmetros do sistema (massa, rigidez e amortecimento) e seu comportamento modal ou sua resposta devido às várias excitações. Neste momento, a análise de sensibilidade tem sido utilizada com grande interesse para prever a tendência do comportamento do sistema com as variações de seus parâmetros, ZIMOCH (1987).

Para realizar simulações confiáveis é necessário desenvolver modelos bem ajustados para representar dinamicamente os sistemas reais e muitos pesquisadores têm demandado esforços para desenvolver métodos robustos de ajuste de modelos (*model updating*). Em geral, os ajustes de modelos são feitos em termos de parâmetros representativos da massa, e principalmente, da rigidez do sistema. Na recente publicação de ZHANG *et al* (2000), é apresentado um método de ajuste com o objetivo de reduzir a diferença entre as frequências naturais calculadas e as medidas. O método baseia-se no primeiro termo da série de Taylor de autovalores com respeito à sensibilidade de alguns parâmetros estruturais a ser ajustado, e produziu resultados muito satisfatórios. SUN *et al* (2000) também apresentam um método de ajuste de modelos empregando a análise de sensibilidade, e a diferença entre o modelo analítico e o experimental é minimizado automaticamente pelo algoritmo dos mínimos quadrados.

O ajuste de modelos também tem despertado grande interesse no processo de detecção e localização de falhas em sistemas, e neste caso, a rigidez desempenha um papel muito importante visto que muitas falhas resultam em uma variação da rigidez do sistema. Neste sentido, pode-se citar os trabalhos de SHEINMAN (1996), de KOSMATKA e RICLES (1999) e de DEMS e MRÓZ (2001), cujos métodos de detecção de falhas utilizam a análise de sensibilidade dos parâmetros modais do sistema com relação à variação de rigidez e de massa.

A identificação de rigidez e o ajuste de modelos tem sido empregados, em grande parte, em estruturas metálicas, como, por exemplo, no trabalho de CUNHA *et al* (1999), que aplicam um algoritmo de identificação das propriedades de rigidez de materiais compostos utilizados em

placas metálicas. Um outro trabalho interessante de identificação de rigidez de reforços aplicados em estruturas é apresentado por GEA e LUO (1999), onde a identificação é feita através de um processo de otimização de múltiplos autovalores. Em ambos artigos, os autores também utilizaram a análise de sensibilidade de parâmetros nos algoritmos de ajustes.

Uma outra aplicação de grande interesse no ajuste de modelo é a identificação de rigidez de mancais de sistemas rotativos. Nas máquinas rotativas, os valores da rigidez dos mancais são difíceis de serem determinados e não são encontrados diretamente na literatura, visto que são função do tipo de mancal, da velocidade de rotação da máquina, das características do lubrificante ou do rolamento empregado, da estrutura suporte do mancal e da fundação. Entretanto, os outros parâmetros dinâmicos da máquina podem ser estimados com uma precisão satisfatória a partir de seu projeto (desenho) e de informações do usuário ou do construtor. A estimação da rigidez dos mancais é muito importante quando se pretende desenvolver um modelo matemático com uma boa precisão para representar dinamicamente o sistema, e sabe-se que isso somente é possível com a quantificação precisa de todos os parâmetros dinâmicos, SMART *et al* (2000), SINHA *et al* (2002) e CAVALCA e TADEO (2003).

Alguns trabalhos de identificação de rigidez de mancais têm sido publicados, mas, em geral, a comprovação dos métodos de ajuste é feita através de simulações teóricas, outros não incluem o efeito giroscópico no modelo a ser ajustado e utilizam dados experimentais com o sistema sem rotação. Além disso, os exemplos numéricos apresentados normalmente são aplicados a sistemas com mancais flexíveis. Sabe-se que quando os valores de rigidez dos mancais são elevados, suas sensibilidades com relação à resposta modal do sistema são muito pequenas e acarretam uma instabilidade no método de ajuste, dificultando a convergência para a solução. Um trabalho interessante de identificação de rigidez dos suportes dos mancais de um rotor é apresentado por SU e HUANG (1997), cujo ajuste do modelo é feito de forma iterativa e empregando a análise de sensibilidade da matriz de “receptância”. Apresentam resultados importantes, mas não utilizam dados experimentais como base para o ajuste. Outros artigos similares também já haviam sido publicados por RAJAN *et al* (1986), CASINI *et al* (1987) e KRAUS *et al* (1987).

Neste trabalho foi realizada uma otimização nas rotinas computacionais de um método de estimação de rigidez de mancais de máquinas rotativas e de ajuste de modelos matemáticos. Para analisar o funcionamento e a robustez do método de ajuste foram obtidos resultados através de simulações teóricas e resultados com base em dados experimentais de um rotor de laboratório. Analisou-se a robustez do método para estimar rigidez de mancais flexíveis e de mancais

extremamente rígidos, onde a convergência para a solução é sempre mais difícil. Além disso, analisou-se a convergência do método com a introdução do efeito giroscópio no modelo de ajuste, isso para verificar a importância desse fenômeno quando se busca estimar as rigidezes dos mancais de rotores em operação, situação em que todos os efeitos dinâmicos sobre o rotor e sobre seus mancais estão presentes, portanto, conduzindo a uma estimativa mais realista. Neste contexto, a análise do método com o rotor girando foi realizada considerando várias velocidades de rotação. Para obter dados que pudessem conduzir a conclusões mais criteriosas, analisou-se o método de ajuste tomando o rotor com dois e com três mancais com rigidezes variadas.

No capítulo 2 deste trabalho é apresentada a fundamentação teórica da dinâmica de rotores. A abordagem foi apenas introdutória, com ênfase no efeito giroscópio e suas implicações sobre a dinâmica dos rotores, mostrando como esse efeito pode ser introduzido em um modelo de rotor. A teoria para a obtenção das equações de movimento para o desenvolvimento de modelos matemáticos de rotores é apresentada no capítulo 3, onde utilizou-se o método dos elementos finitos considerando o sistema axissimétrico com mancais isotrópicos. Uma atenção especial foi dada à solução do problema de autovalor e autovetor quando o efeito giroscópio é introduzido no modelo devido à grande importância desse efeito na análise do comportamento do método de ajuste para o sistema em movimento.

O capítulo 4 apresenta a análise de sensibilidade de parâmetros de sistemas utilizando uma aproximação pelo primeiro termo da série de Taylor. Tem como ponto de partida a abordagem feita por ZIMOCH (1987) e procede ao desenvolvimento das equações das derivadas para se chegar às sensibilidades quando se tem pequenas variações nos termos das matrizes das equações de movimento do sistema. Além da análise de sensibilidade das características modais em relação à variação de rigidez, também é apresentado o desenvolvimento da sensibilidade da resposta em frequência considerando a variação de outros parâmetros além da rigidez.

O método de ajuste de modelos e de estimativa de rigidez de mancais é apresentado no capítulo 5, onde o algoritmo de ajuste consiste na solução de um sistema de equações lineares que é resolvido de forma iterativa. O fluxograma do algoritmo de ajuste e os detalhes das rotinas computacionais implementadas também são discutidos neste capítulo.

O rotor de laboratório para a aquisição dos dados experimentais, os equipamentos, os sensores e os condicionadores para aquisição e análise de sinais de vibração são detalhados no capítulo 6. Além disso, apresenta-se o método utilizado para a extração dos modos de vibração experimentais do rotor a partir do levantamento das funções de resposta em frequência, e o

critério MAC para comparar os modos de vibração experimentais com os modos teóricos do modelo ajustado.

No capítulo 7 é feita uma análise do funcionamento e da robustez do método de ajuste através de simulações teóricas. O enfoque principal foi na avaliação do método para estimar rigidezes dos mancais em condições extremas, isto é, para estimar mancais bem flexível, onde as variações nas frequências naturais do rotor são basicamente relacionadas com as variações das rigidezes dos mancais (sistema mancal dependente), e para estimar mancais altamente rígidos, onde as variações nas frequências naturais do rotor ficam praticamente dependentes das características do eixo (sistema eixo dependente). Além disso, é feita uma verificação do processo de convergência do método para diversas condições iniciais de rigidez dos mancais.

A análise do método de ajuste utilizando os dados experimentais do rotor de laboratório é discutida no capítulo 8, onde é feita, adicionalmente, uma avaliação do método para estimar rigidezes do rotor em operação através da introdução do efeito giroscópio no modelo de ajuste. Finalmente, no capítulo 9, são apresentadas as conclusões gerais do trabalho realizado e algumas propostas para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

2. ASPECTOS GERAIS EM DINÂMICA DE ROTORES

2.1 – Introdução

No estudo de vibrações e dinâmica de sistemas mecânicos, a dinâmica de rotores normalmente é tratada em um capítulo à parte. Isto ocorre devido à grande importância dos rotores e sua vasta aplicação na indústria e às certas particularidades que a dinâmica de rotores apresenta. O termo rotor é aplicado, de forma geral, aos sistemas mecânicos rotativos compostos por um ou mais discos e um eixo que os suportam, apoiado em mancais. Os discos podem assumir diferentes formas dependendo do sistema analisado, podendo ser desde o conjunto de pás de uma turbina até um disco maciço. Os tipos de rotores mais encontrados nas indústrias são rotores de bombas centrífugas de um ou de múltiplos estágios, de turbinas a gás ou hidráulicas, de ventiladores, de trem de engrenagens, etc.

A atual tendência de construção de máquinas rotativas com maior concentração de potência e com velocidades de operação mais elevadas vem tendo como consequência um aumento considerável das forças dinâmicas atuando sobre os sistemas. Essa tendência vem demandando um aumento nos requisitos dos projetos para o desenvolvimento de máquinas mais eficientes, que funcionem livres de problemas de vibrações indesejáveis e que alcancem uma estabilidade dinâmica satisfatória. Devido a isso, aos avanços das técnicas de análise de vibrações e dos métodos analíticos, foram motivadas muitas pesquisas sobre dinâmica de rotores. Procura-se, sobretudo, melhorar a confiabilidade dos modelos matemáticos e as técnicas computacionais para a simulação dos fenômenos dinâmicos com uma maior precisão, ESHLEMAN (1984) e CHILDS (1993).

A análise da dinâmica de rotores se concentra, sobretudo, na identificação das características dinâmicas próprias dos sistemas. Uma vez que os sistemas podem estar submetidos a uma grande variedade de forças de excitação, inclusive atuando em bandas largas de frequência, a determinação das frequências naturais é de grande interesse. Por sua vez, os modos naturais de vibração teóricos são importantes para prever as deformações relativas que ocorrem no eixo nas frequências naturais e aonde estas deformações têm maiores amplitudes. Outra aplicação importante da dinâmica de rotores é obter a amplitude da resposta devida à ação

das principais forças que atuam no sistema. A predição da amplitude da resposta com precisão requer uma correta discretização matemática do sistema, a determinação exata das características dinâmicas dos mancais e seus suportes e um conhecimento das características das forças atuantes e os pontos de aplicação das mesmas.

2.2 – Velocidades críticas

Uma velocidade crítica se caracteriza quando uma força de excitação atua com uma frequência coincidente com uma das frequências naturais do rotor. A força de excitação tem origem em alguma massa desbalanceada no rotor que atua na frequência igual à frequência de rotação. Para uma análise de velocidades críticas, considere um rotor simétrico simples composto por um eixo apoiado sobre mancais rígidos em suas extremidades, sobre o qual está fixado um disco contendo uma massa desbalanceada. Considere também que toda massa do rotor esteja concentrada no ponto onde o disco está fixado. Assim, a equação de movimento do rotor é dada pela equação, LALANNE e FERRARIS (1998),

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = m_d e \Omega^2 \sin \Omega t \quad (2.1)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = m_d e \Omega^2 \cos \Omega t \quad (2.2)$$

onde:

m = massa total do sistema,

e = distância da massa desbalanceada em relação ao centro geométrico do disco,

k = rigidez do eixo no ponto onde a massa do rotor é considerada,

m_d = massa desbalanceada,

Ω = velocidade de rotação do rotor,

q_1, q_2 = coordenadas generalizadas,

$\dot{q}_1, \dot{q}_2$ = derivada primeira das coordenadas generalizadas no tempo t ,

$\ddot{q}_1, \ddot{q}_2$ = derivada segunda das coordenadas generalizadas no tempo t ,

a = parâmetro característico da inércia do rotor.

Admitindo-se o rotor com vibração livre, as equações (2.1) e (2.2) resultam:

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = 0 \quad (2.3)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = 0 \quad (2.4)$$

Estas equações podem ser escritas na forma matricial como segue:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

O segundo termo do lado esquerdo da equação (2.5) possui uma matriz, a qual multiplicada por Ω , expressa o efeito giroscópio do rotor. Admitindo uma solução harmônica para a equação (2.5) da forma,

$$q_1 = Q_1 e^{rt} \quad ; \quad q_2 = Q_2 e^{rt} \quad (2.6 \text{ a;b})$$

e introduzindo estas equações na equação (2.5), resulta o sistema de equações homogêneas,

$$\begin{bmatrix} k + mr^2 & -a\Omega r \\ a\Omega r & k + mr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

A solução trivial, $Q_1 = Q_2 = 0$, não é de interesse. As soluções não-triviais são associadas aos valores que conduzem o determinante da matriz da equação (2.7) igual a zero. A expansão do determinante resultará na equação característica dada por,

$$(k + mr^2)^2 + a^2 \Omega^2 r^2 = 0 \quad (2.8)$$

que pode ser escrito como,

$$m^2 r^4 + (2km + a^2 \Omega^2) r^2 + k^2 = 0 \quad (2.9)$$

As raízes da equação (2.9) são dadas por:

$$r_1^2 = - \left[\omega_0^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_0^2}{a^2 \Omega^2}} \right) \right] \quad (2.10)$$

$$r_2^2 = - \left[\omega_0^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_0^2}{a^2 \Omega^2}} \right) \right] \quad (2.11)$$

onde,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.12)$$

sendo,

$$r_1 = \pm j\omega_1 \quad ; \quad r_2 = \pm j\omega_2 \quad (2.13 \text{ a;b})$$

então,

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_0^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (2.14)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_0^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (2.15)$$

Das equações (2.14) e (2.15) pode-se observar que:

$$\omega_1 < \omega_0 < \omega_2 \quad (2.16)$$

Pode-se observar pelas equações (2.14) e (2.15) que para $\Omega \neq 0$, as frequências naturais são dadas em função de $a^2 \Omega^2$, e com isso pode-se construir um diagrama de Campbell, o qual mostra a variação das frequências naturais devido ao efeito giroscópio, que por sua vez é função da rotação do rotor e do momento de inércia. A figura 2.1 mostra um diagrama de Campbell

típico de um rotor. Observa-se que quando $\Omega = 0$ tem-se a frequência natural ω_0 , que neste caso ilustrativo assume o valor de aproximadamente 46 Hz. Com a rotação do rotor, ocorre a abertura em duas curvas de frequências, e a medida em que a rotação do rotor aumenta, a frequência ω_1 diminui e a frequência ω_2 aumenta. A frequência natural ω_1 é denominada de precessão retrógrada (“*backward whirl*”), e neste caso o movimento circular do centro geométrico do rotor gira em sentido oposto ao sentido de rotação do rotor (rotação assíncrona). Por sua vez, a frequência natural ω_2 é denominada de precessão direta (“*forward whirl*”), onde o movimento circular do centro geométrico do rotor gira no mesmo sentido da rotação do rotor (rotação síncrona).

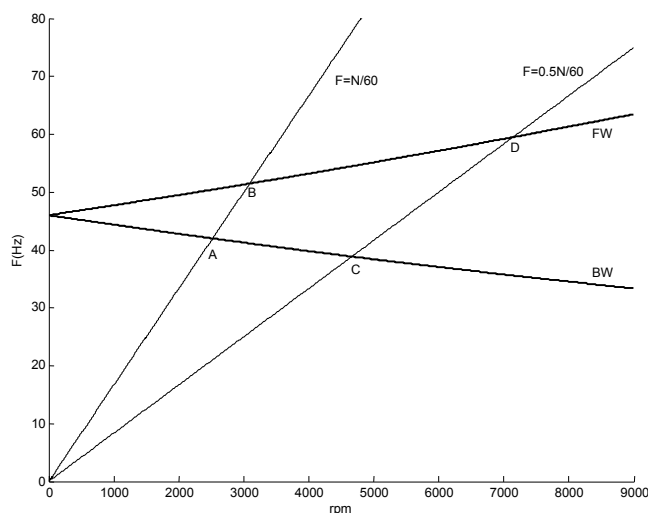


Figura 2.1 – Diagrama de Campbell Típico

Os pontos A e B correspondem aos pontos onde as frequências do rotor em precessão retrógrada e direta se igualam à frequência de rotação do rotor, caracterizando-se, assim, situações de velocidades críticas. Os pontos C e D correspondem aos pontos onde essas frequências se igualam à sub-harmônica da frequência de rotação.

2.3 – Influência do Efeito Giroscópio com o Modelo por Elementos Finitos

Considere um rotor simétrico simples constituído de um eixo e um disco suportado por dois mancais conforme mostra a figura 2.2. O eixo tem comprimento L e diâmetro d , e o disco tem diâmetro D e espessura e . As rigidezes dos mancais são representadas por k_1 e k_2 . Para esse

rotor admite-se uma modelagem por elementos finitos, onde o eixo é dividido em dois elementos de viga iguais com rigidez e massa distribuídas, e elemento de disco é conectado ao nó entre os dois elementos de viga. Nesta modelagem considera-se que o rotor possui dois graus de liberdade por nó, sendo um de deslocamento no plano da figura e o outro de rotação em torno do eixo, perpendicular ao plano da figura.

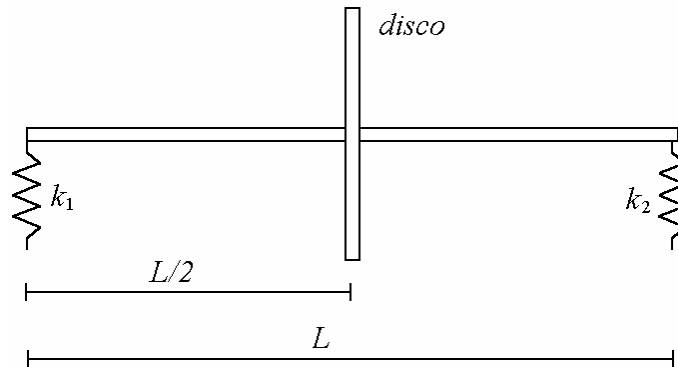


Figura 2.2 – Rotor de um disco e dois mancais.

A partir desta modelagem pode-se obter a equação para movimento livre do rotor, cujo procedimento será visto com mais detalhes no capítulo 3. A equação tem a forma:

$$[M]\ddot{q} + [K]q = 0 \quad (2.17)$$

onde q é a coordenada generalizada contendo o deslocamento e a rotação de cada nó, $\ddot{q}$ é a derivada de segunda ordem da coordenada generalizada em relação ao tempo, $[M]$ e $[K]$ são as matrizes de massa e rigidez globais do rotor, respectivamente, as quais são dadas a seguir:

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 + k_1 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & -12 + k_2 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$M = \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l & 0 & 0 \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 54 & 13l & 312 + md & 0 & 54 & -13l \\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 + M_{ID} - \lambda M_{IP} & 13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13l & 156 & -22l \\ 0 & 0 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material do eixo, I é o momento de inércia transversal do eixo, l é o comprimento dos elementos de viga que neste caso é igual a $L/2$, μ é densidade por unidade de área do material do eixo, md é a massa do disco, M_{ID} é o momento de inércia de massa diametral do disco, M_{IP} é o momento de inércia de massa polar do disco e λ é a relação de *spin*, que é a relação entre a primeira frequência natural e a frequência de rotação do sistema.

Analisando-se os elementos da matriz de massa, equação (2.19), verifica-se que o efeito giroscópio atua sobre a dinâmica do sistema em função da rotação do rotor e de seu momento de inércia de massa polar. O efeito giroscópico pode ser comparado a um enrijecimento do rotor devido à diminuição do elemento da matriz de massa global que contem o termo relacionado com a relação de *spin*. No trabalho de GREEN (1948), ele apresenta um estudo sobre a velocidade crítica de rotores flexíveis para vários níveis de efeito giroscópico. O autor cita ainda que o efeito giroscópio deve ser introduzido na modelagem de rotores quando o diâmetro do disco for consideravelmente maior que o diâmetro do eixo, porém sem citar qual a relação entre os diâmetros para tal consideração.

2.4 – Sistema Rotor-Estrutura Suporte-Fundação

A modelagem de máquinas rotativa envolve não apenas o eixo rotor, mas também os mancais, a estrutura suporte (pedestal) e a fundação, os quais são subsistemas flexíveis. Assim, na simulação do comportamento dinâmico do rotor deve-se levar em conta a interação entre todos os seus componentes. Para resolver esse problema, uma metodologia atualmente empregada é através do método das coordenadas mistas com modelos desenvolvidos pelo método das impedâncias mecânicas (BONELLO e BRENNAN, 2001; KANG et al., 2000). Neste caso chega-se à seguinte equação de movimento do sistema:

$$\begin{bmatrix} M_{rr} \\ M_{fr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{rf} \\ M_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_r \\ \ddot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{rr} \\ C_{fr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{rf} \\ C_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} \\ K_{fr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{rf} \\ K_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_r \\ x_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_r \\ F_f \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Na equação (2.20) os termos com subscrito “*r*” representam a influência dinâmica do rotor apenas, enquanto que os termos com subscrito “*f*” representam a influência dinâmica do conjunto filme de óleo, estrutura suporte e fundação referida no ponto de conexão com o eixo rotor. Os termos com subscritos cruzados representam o acoplamento entre os dois subsistemas em questão.

Para aplicar o método das coordenadas mistas é necessário obter as características modais do conjunto que compõem os componentes do mancal do rotor, e tais características podem ser difíceis de se obter dependendo do sistema analisado ou mesmo da precisão requerida. Os coeficientes de rigidez e de amortecimento do filme de óleo podem ser determinados em função da velocidade de rotação do sistema para cada mancal em particular, associado a sua geometria e à viscosidade do óleo. Para obter esses coeficientes é necessário resolver a equação de Reynolds. É uma equação diferencial parcial que, a partir do tipo de mancal e da viscosidade do lubrificante, pode ser resolvida para uma determinada carga, uma distribuição de pressão e uma espessura do filme de óleo, em função da rotação (CHILDS, 1993; LEADER, 1987). Entretanto, os métodos para a resolução da equação de Reynolds não são adequados para determinar os coeficientes de rigidez e de amortecimento de rotores com baixas velocidades de rotação.

Além das características do filme de óleo, a elasticidade das estruturas suportes dos mancais exercem uma influência considerável sobre o comportamento dinâmico dos rotores. As estruturas suportes comportam-se como elementos elásticos lineares e praticamente não possuem características de amortecimento. A determinação exata da rigidez dos suportes pode ser uma tarefa muito complicada tendo em vista que os suportes, em geral, são formados por um conjunto de elementos elásticos complexos. Além disso, deve-se ter em conta os valores de rigidez das fundações, as quais ainda dependem do tipo de solo em que estão fixadas, UTECHT (1983).

Na prática, a identificação da rigidez de mancais com estruturas complexas ou mesmo de rotores de grande envergadura envolvendo dados experimentais (por exemplo, de unidades hidrelétricas), pode ser abordada considerando uma rigidez equivalente representativa da rigidez do filme de lubrificante, da estrutura suporte e fundação (ZHANG et al., 2000; SUN et al., 2000). No método de identificação de rigidez de mancal que se apresenta neste trabalho, Capítulo 5, também se faz esta consideração, tomando uma rigidez equivalente para os mancais dos rotores.

A rigidez dos suportes dos mancais é o fator de maior influência na determinação das velocidades críticas dos rotores. Em geral, quanto maior for a rigidez dos suportes, maiores serão as velocidades críticas. Em uma curva de velocidades críticas de um rotor versus a rigidez dos seus mancais pode-se verificar três regiões. Na região onde a rigidez dos mancais é baixa (relativa à rigidez do eixo), as velocidades críticas do sistema são quase que inteiramente dependentes da rigidez dos mancais, e a curva tem uma inclinação ascendente acentuada. Na região onde a rigidez dos mancais são comparáveis à rigidez do eixo, tanto a geometria do eixo quanto a rigidez dos mancais contribuem para a determinação das velocidades críticas. Na região onde os mancais tornam-se muito rígidos, o sistema é dito ser dependente do eixo porque variações na rigidez dos mancais não influenciam as frequências naturais significativamente, apenas a geometria do eixo tem influência sobre as frequências (curva de patamar constante).

CAPÍTULO 3

3. MODELAGEM MATEMÁTICA DE ROTORES

3.1 – Introdução

Os modelos matemáticos têm sido uma ferramenta importante para o estudo do comportamento dinâmico de rotores, principalmente em situações onde há grandes dificuldades de se praticar uma análise experimental apurada. O desenvolvimento de modelos matemáticos para rotores pode ser feito utilizando diferentes métodos, como por exemplo, o método por múltiplos corpos, o método das matrizes de transferência e o método dos elementos finitos, PESTEL e LECKIE (1963) e NELSON (1979). A utilização do método dos elementos finitos para a resolução de problemas dinâmicos tem tomado posição de destaque nas últimas décadas, em virtude do avanço tecnológico dos computadores digitais. Este foi o método empregado neste trabalho para o desenvolvimento do modelo matemático do rotor para análise experimental.

O modelo matemático através do método dos elementos finitos pode reproduzir o comportamento modal do rotor com uma precisão satisfatória mesmo utilizando elementos finitos simples. Assim, neste trabalho o modelo foi desenvolvido utilizando elementos de disco rígido, elementos de viga elástica e elementos de mola (rigidez concentrada). Nos elementos de disco rígido podem ser introduzidos os efeitos das massas e dos momentos de inércia (polar e diametral), bem como o efeito giroscópio. A elasticidade e a massa distribuída do eixo são introduzidas no modelo através de elementos de viga.

3.2 – Equações de movimento de rotores pelo método dos elementos finitos

A figura 3.1 mostra um sistema composto por rotores montados em um eixo em seu estado deformado. O sistema de coordenadas (X,Y,Z) é fixo e o (x,y,z) se move segundo uma rotação ωt ao redor do eixo X , sendo ω a velocidade de “whirl”. Esta velocidade é definida como a velocidade de rotação do plano formado pela curvatura do eixo flexionado e a coordenada que passa pelo centro dos mancais, sendo que o eixo gira em torno de seu centro de rotação.

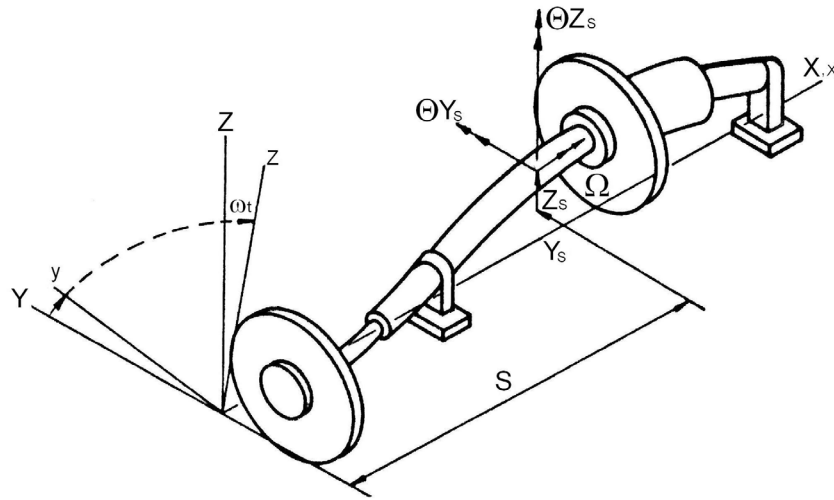


Figura 3.1 – Sistema deformado composto por eixo, discos e mancais.

Os deslocamentos (Y_s , Z_s , ΘY_s , ΘZ_s) de um ponto qualquer do sistema a uma distância S relativa ao sistema de referência fixo, podem ser transformados em seus deslocamentos correspondentes (y_s , z_s , θy_s , θz_s) do sistema móvel através de uma transformação ortogonal, NELSON e McVALGH (1976).

$$\{q\} = [L]\{p\} \quad (3.1)$$

onde,

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} Y_s \\ Z_s \\ \Theta Y_s \\ \Theta Z_s \end{Bmatrix} ; \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} y_s \\ z_s \\ \theta y_s \\ \theta z_s \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega t & -\sin \omega t \\ 0 & 0 & \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Diferenciando a equação (3.1) duas vezes, obtêm-se:

$$\{\dot{q}\} = \omega[S]\{p\} + [L]\{\dot{p}\} \quad (3.4)$$

$$\{\ddot{q}\} = [L]\{\ddot{p}\} - \omega^2\{p\} + 2\omega[S]\{\dot{p}\} \quad (3.5)$$

onde:

$$[S] = \begin{bmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t & 0 & 0 \\ \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ 0 & 0 & \cos \omega t & -\sin \omega t \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Se considerarmos apenas o efeito de um disco rígido do sistema, a equação de movimento pode ser obtida a partir do equacionamento da energia cinética deste disco. A expressão de energia quando usada na equação de LAGRANGE, MEIROVITCH (1970), resulta na seguinte equação para uma rotação constante Ω do sistema,

$$([M_T^d] + [M_R^d])\{\ddot{q}^d\} - \Omega[G^d]\{\dot{q}^d\} = \{Q^d\} \quad (3.7)$$

onde, $[M]$ e $[G]$ são as matrizes massa e giroscópio, respectivamente. Os subscritos T e R são referentes aos movimentos de translação e de rotação, respectivamente, e o sobrescrito d é referente ao elemento de disco. No vetor $\{Q^d\}$ pode-se incluir todas as forças externas atuando no disco. Introduzindo as equações (3.4) e (3.5) na equação (3.7) e pré-multiplicando por $[L]^T$, obtém-se:

$$([M_T^d] + [M_R^d])\{\ddot{p}^d\} + \omega\{2[\hat{M}_T^d] + [\hat{M}_R^d] - \lambda[G^d]\}\{\dot{p}^d\} - \omega^2\{([M_T^d] + [M_R^d]) + \lambda[\hat{G}^d]\}\{p^d\} = \{P^d\} \quad (3.8)$$

A equação (3.8) é a de movimento do disco em relação às coordenadas móveis. O termo $\lambda = \Omega/\omega$ é denominado relação de “*whirl*” ou “*spin*”.

A equação de um elemento de eixo é obtida a partir da energia cinética e potencial devida à elasticidade do elemento. Da mesma forma, introduzindo as expressões de energia na equação de Lagrange, obtêm-se:

$$([M_T^e] + [M_R^e])\{\ddot{q}^e\} - \Omega[G^e]\{\dot{q}^e\} + [K^e]\{q^e\} = \{Q^e\} \quad (3.9)$$

Substituindo as equações (3.1), (3.4) e (3.5) na equação (3.9) e pré-multiplicando por $[L]^T$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} & ([M_T^e] + [M_R^e])\{\ddot{p}^e\} + \omega\{2[\hat{M}_T^e] + (1 - \lambda)[G^e]\}\{\dot{p}^e\} + \\ & + \{[K^e] - \omega^2([M_T^e] + (1 - 2\lambda)[M_R^e])\}\{p^e\} = \{P^e\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

a qual é a equação de um elemento de eixo em relação ao sistema de coordenadas móveis.

O movimento de um mancal flexível, em sua forma mais simples, pode ser representado no sistema fixo de referência pela equação,

$$[K^m]\{q^m\} = \{Q^m\} \quad (3.11)$$

Se o mancal for considerado isotrópico e desacoplado pode ser escrita na forma, então a equação de movimento no sistema de referência móvel fica:

$$k[I]\{p^m\} = \{P^m\} \quad (3.12)$$

onde k é o coeficiente de rigidez do mancal e $[I]$ é uma matriz identidade.

A equação global de movimento do sistema desconsiderando o amortecimento, representada no sistema fixo de referência, é obtida através da composição dos termos das equações (3.7), (3.9) e (3.11) através de um arranjo matricial. Assim, pode-se escrever a equação global de movimento da seguinte forma,

$$[M]\{\ddot{q}^s\} - \Omega[G^s]\{\dot{q}^s\} + [K^s]\{q^s\} = \{Q^s\} \quad (3.13)$$

Da mesma forma, tomando as equações (3.8), (3.10) e (3.12), se obtêm a equação geral de movimento referida ao sistema de coordenadas móveis, que tem a forma:

$$[M^s]\{\ddot{p}^s\} + \omega\{2[\hat{M}_T^s] + \lambda[G^s]\}\{\dot{p}^s\} + \{[K^s] - \omega^2([M^s] + \lambda[\hat{G}^s])\}\{p^s\} = \{P^s\} \quad (3.14)$$

O problema de autovalor e autovetor pode ser resolvido a partir da forma homogênea da equação (3.14). Sendo os mancais isotrópicos, é suficiente considerar apenas um plano de movimento para a definição dos modos de vibração do sistema. Assim, assumindo uma solução constante $\{p^s\} = \{\bar{p}\}$, o problema associado ao autovalor e ao autovetor é:

$$[K^s]\{\bar{p}\} = \omega^2([M^s] + \lambda[\hat{G}^s])\{\bar{p}\} \quad (3.15)$$

A equação (3.15) permite determinar as frequências naturais e os modos de vibração relativos ao sistema móvel para cada valor da relação de “*whirl*” λ . Para a determinação dessas características modais utilizou-se, na solução da equação (3.15), o método de Jacobi generalizado, BATHE (1996). As matrizes das equações de movimento são apresentadas no apêndice 1.

CAPÍTULO 4

4. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE PARÂMETROS

4.1 – Introdução

Os sistemas mecânicos podem ser modelados por um conjunto de equações matemáticas e os modelos em geral são utilizados para simular ou fazer predição do comportamento vibratório da máquina. Um interesse particular é obter relações entre os valores dos parâmetros dos sistemas e seu comportamento. Normalmente os parâmetros ditam um comportamento, porém eles podem variar rapidamente em função do funcionamento da máquina. Neste contexto, a análise de sensibilidade de parâmetros tem grande interesse para prever a tendência deste comportamento com as variações dos parâmetros dinâmicos dos sistemas, SHARP e BROOKS (1988); NALECZ e WICHER (1988).

A análise de sensibilidade pode ser realizada sobre a resposta em frequência e sobre a resposta modal do sistema. Muitos métodos foram publicados por ADELMAN e HAFTKA (1986) e por SUTTER et al (1988). Neste trabalho será utilizado um método no qual as sensibilidades são calculadas a partir da série de Taylor, ZIMOCK (1987).

4.2 – Análise de sensibilidade da resposta em frequência dos sistemas

Considere o sistema vibratório com n graus de liberdade, com amortecimento viscoso e excitado por uma força harmônica, cujo movimento é descrito pela equação (4.1). A sensibilidade da resposta em frequência indicará quanto a resposta irá variar diante das variações dos parâmetros do sistema, para cada frequência de excitação, NASCIMENTO (1995).

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{f(t)\} = \{f(\omega)\}e^{i\omega t} \quad (4.1)$$

Nesta equação $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente. O vetor $\{f(t)\}$ é o vetor força. A relação entre a resposta $\{y(\omega)\}$ e a excitação $\{f(\omega)\}$, para o sistema é dada por:

$$\{y(\omega)\} = [G(\omega)]^{-1} \{f(\omega)\} \quad (4.2)$$

onde a matriz de $[G(\omega)]$ é obtida em função das matrizes da equação de movimento do sistema, e pode ser escrita na forma:

$$[G(\omega)] = [K] - \omega^2 [M] + i\omega [C] \quad (4.3)$$

sendo ω a frequência de excitação e $i = \sqrt{-1}$.

As equações (4.2) e (4.3) mostram que a resposta do sistema é um vetor função das matrizes de massa, amortecimento, rigidez e do vetor força. Assim, escrevendo a expansão da série de Taylor, considerando somente o termo de primeira ordem, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \{y(m, k, c, f)\} = & \{y(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c}, \bar{f})\} + \partial_m \{y(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c}, \bar{f})\} (m - \bar{m}) + \partial_c \{y(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c}, \bar{f})\} (c - \bar{c}) \\ & \partial_k \{y(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c}, \bar{f})\} (k - \bar{k}) + \partial_f \{y(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c}, \bar{f})\} (f - \bar{f}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Os termos $\partial_m \{y(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c}, \bar{f})\}$, $\partial_c \{y(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c}, \bar{f})\}$, $\partial_k \{y(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c}, \bar{f})\}$ e $\partial_f \{y(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c}, \bar{f})\}$ são os vetores de sensibilidades da resposta em relação aos seus respectivos parâmetros. Os traços sobrescritos indicam valores iniciais dos parâmetros do sistema.

4.2.1 – Determinação de $\partial_m \{y(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c}, \bar{f})\}$

O vetor de sensibilidade ∂_m pode ser obtidos diferenciando-se a equação (4.2) com respeito ao parâmetro massa, resultando em:

$$\partial_m \{y(\omega)\} = \partial_m ([G(\omega)]^{-1} \{f(\omega)\}) = [G(\omega)]^{-1} \partial_m [G(\omega)] \{y(\omega)\} + [G(\omega)]^{-1} \partial_m \{f(\omega)\} \quad (4.5)$$

Introduzindo a equação (4.3) na $\partial_m [G(\omega)]$, resulta:

$$\partial_m [G(\omega)] = \partial_m ([K] - \omega^2 [M] + i\omega [C]) = -\omega^2 \partial_m [M] = -\omega^2 [J_m] \quad (4.6)$$

onde $[J_m]$ é uma matriz que possui todos os seus elementos iguais a zero, exceto o elemento da posição i, j correspondente à posição do termo da matriz de massa que está variando, assumindo o valor igual a 1. Em princípio todos os elementos da matriz $[M]$ podem variar, e a matriz $[J_m]$ contém informação de quais elementos da matriz $[M]$ estarão variando. Sabe-se, também, que neste caso a $\partial_m \{f(\omega)\} = 0$. Portanto, supondo que se deseja verificar a sensibilidade da resposta com relação à variação do termo m_{12} da matriz $[M]$, então a partir da equação (4.6) obtêm-se:

$$\partial_{m_{12}} \{y(\omega)\} = -\omega^2 [G(\omega)]^{-1} [J_{m_{12}}] \{y(\omega)\} \quad (4.7)$$

Fazendo o inverso da matriz $[G(\omega)]$ obtêm-se a matriz $[H(\omega)]$, que é normalmente denominada de matriz função de resposta em frequência. Desenvolvendo a equação (4.7), resulta:

$$\partial_{m_{12}} \{y(\omega)\} = -\omega^2 \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\partial_{m_{12}} \{y(\omega)\} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} H_{11}y_2 \\ H_{21}y_2 \\ \vdots \\ H_{n1}y_2 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

De forma geral, para um termo qualquer m_{ij} , a equação (4.9) torna-se:

$$\partial_{m_{ij}} \{y(\omega)\} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} H_{1i}y_j \\ H_{2i}y_j \\ \vdots \\ H_{ni}y_j \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Assim, os termos da sensibilidade da resposta em frequência do sistema devido a uma variação de massa, para uma coordenada nodal k , pode ser calculada pela equação:

$$Sy_k^{mij} = -\omega^2 H_{ki} y_j \quad (4.11)$$

Com um desenvolvimento algébrico análogo, pode-se, também, obter as sensibilidades da resposta em frequência do sistema com relação à variação de amortecimento, de rigidez e da excitação, de acordo com as equações,

$$Sy_k^{cij} = i\omega H_{ki} y_i \quad (4.12)$$

$$Sy_k^{kij} = H_{ki} y_i \quad (4.13)$$

$$Sy_k^{fi} = H_{ki} \quad (4.14)$$

4.3 – Análise de sensibilidade da resposta modal

4.3.1 – Sensibilidade da resposta modal de sistemas não amortecidos

Considere agora um sistema não amortecido com n graus de liberdade, cuja equação de movimento é descrita na forma:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \quad (4.15)$$

Admite-se, também, que na determinação das características próprias do sistema, os modos de vibração sejam normalizados, tais que produzam:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad ; \quad [\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Lambda] \quad (4.16 \text{ a; b})$$

onde $[\Phi]$ é a matriz dos autovetores, $[\Lambda]$ é a matriz dos autovalores e $[I]$ uma matriz identidade. Considerando que se deseja determinar as sensibilidades dos autovalores e dos autovetores do sistema com relação às variações dos parâmetros massa e rigidez, e se estas variações são

pequenas, então pode-se escrever uma expansão em série de Taylor com apenas os termos de primeira ordem, ou seja:

$$\Lambda(m, k) = \Lambda(\bar{m}, \bar{k}) + \partial_k \Lambda(\bar{m}, \bar{k})(k - \bar{k}) + \partial_m \Lambda(\bar{m}, \bar{k})(m - \bar{m}) \quad (4.17 \text{ a})$$

$$\Phi(m, k) = \Phi(\bar{m}, \bar{k}) + \partial_k \Phi(\bar{m}, \bar{k})(k - \bar{k}) + \partial_m \Phi(\bar{m}, \bar{k})(m - \bar{m}) \quad (4.17 \text{ b})$$

onde as derivada parciais em relação à Φ e Λ são matrizes de sensibilidade e os traços sobrescritos indicam valores iniciais dos parâmetros. As sensibilidades dos parâmetros modais em relação à variação de rigidez podem ser obtidas pelas seguintes expressões de derivadas:

$$\frac{\partial[\Phi]}{\partial k_{ij}} = \partial k_{ij}[\Phi] = [\Phi][S^{kij}] \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial[\Lambda]}{\partial k_{ij}} = \partial k_{ij}[\Lambda] = \text{diag}[S\lambda_1^{kij}, S\lambda_2^{kij}, \dots, S\lambda_n^{kij}] \quad (4.19)$$

Diferenciando a equação (4.16 a) em relação a um parâmetro de rigidez qualquer, obtêm-se:

$$\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial k_{ij}}[M][\Phi] + [\Phi]^T \frac{\partial[M]}{\partial k_{ij}}[\Phi] + [\Phi]^T[M] \frac{\partial[\Phi]}{\partial k_{ij}} = 0 \quad (4.20)$$

Uma vez que a derivada parcial da matriz $[M]$ com respeito à qualquer parâmetro rigidez resulta nula e introduzindo a equação (4.18) na equação (4.20), tem-se:

$$[S^{kij}]^T [\Phi]^T [M][\Phi] + [\Phi]^T [M][\Phi][S^{kij}] = 0 \quad (4.21)$$

que de acordo com a equação (4.16 a), chega-se na simplificação da equação (4.21), ou seja:

$$[S^{kij}]^T + [S^{kij}] = 0 \quad (4.22)$$

De maneira análoga, diferenciando a equação (4.16 b) em relação à rigidez, tem-se:

$$\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial k_{ij}} [K][\Phi] + [\Phi]^T \frac{\partial[K]}{\partial k_{ij}} [\Phi] + [\Phi]^T [K] \frac{\partial[\Phi]}{\partial k_{ij}} = \frac{\partial[\Lambda]}{\partial k_{ij}} \quad (4.23)$$

e introduzindo a equação (4.18), resulta em:

$$[S^{kij}]^T [\Phi]^T [K][\Phi] + [\hat{K}_{kij}] + [\Phi]^T [K][\Phi][S^{kij}] = \partial_{kij} \Lambda \quad (4.24)$$

e, finalmente, utilizando a equação (4.16 b), pode-se simplificar a equação (4.24) para:

$$[S^{kij}]^T [\Lambda] + [\hat{K}_{kij}] + [\Lambda][S^{kij}] = \partial_{kij} \Lambda \quad (4.25)$$

$$- [S^{kij}] [\Lambda] + [\Lambda][S^{kij}] + [\hat{K}_{kij}] = \partial_{kij} \Lambda \quad (4.26)$$

onde,

$$[\hat{K}_{kij}] = [\Phi]^T \frac{\partial[K]}{\partial k_{ij}} [\Phi] \quad (4.27)$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}; [\Phi]^T = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n} & y_{2n} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.28 \text{ a;b})$$

Para se determinar a sensibilidade de um elemento particular da matriz de rigidez $[K]$, onde este elemento tem índices $i=1$ e $j=2$, os termos da equação (4.25) podem ser calculados da seguinte forma:

$$[\hat{K}_{k12}] = [\Phi]^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} [\Phi] \quad (4.29)$$

$$[\hat{K}_{k12}] = \begin{bmatrix} y_{11}y_{21} & y_{11}y_{22} & \cdots & y_{11}y_{2n} \\ y_{12}y_{21} & y_{12}y_{22} & \cdots & y_{12}y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n}y_{21} & y_{1n}y_{22} & \cdots & y_{1n}y_{2n} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$[\Lambda][S^{k12}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix}^{k12} \quad (4.31)$$

$$[\Lambda][S^{k12}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 S_{11} & \lambda_1 S_{12} & \cdots & \lambda_1 S_{1n} \\ \lambda_2 S_{21} & \lambda_2 S_{22} & \cdots & \lambda_2 S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n S_{n1} & \lambda_n S_{n2} & \cdots & \lambda_n S_{nn} \end{bmatrix}^{k12} \quad (4.32)$$

$$[S^{k12}][\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 S_{11} & \lambda_2 S_{12} & \cdots & \lambda_n S_{1n} \\ \lambda_1 S_{21} & \lambda_2 S_{22} & \cdots & \lambda_n S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 S_{n1} & \lambda_2 S_{n2} & \cdots & \lambda_n S_{nn} \end{bmatrix}^{k12} \quad (4.33)$$

$$[\Lambda][S^{k12}] - [S^{k12}][\Lambda] = \begin{bmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)S_{12}^{k12} & \cdots & (\lambda_1 - \lambda_n)S_{1n}^{k12} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)S_{21}^{k12} & 0 & \cdots & (\lambda_2 - \lambda_n)S_{2n}^{k12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_n - \lambda_1)S_{n1}^{k12} & (\lambda_n - \lambda_2)S_{n2}^{k12} & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{k12} \quad (4.34)$$

A equação (4.26) é a soma das equações (4.30) e (4.34). Assim, considerando os termos que estão na diagonal da (4.26), pode-se, então, escrever as expressões:

$$\left. \begin{aligned} S\lambda_1^{k12} &= y_{11}y_{21} \\ S\lambda_2^{k12} &= y_{12}y_{22} \\ &\vdots \\ S\lambda_n^{k12} &= y_{1n}y_{2n} \end{aligned} \right\} S\lambda_k^{kij} = y_{ik}y_{jk} \quad (4.35)$$

e, tomando os termos que estão fora da diagonal da equação (4.26), obtêm-se:

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1 - \lambda_n)S_{1n}^{k12} + y_{11}y_{2n} \rightarrow S_{1n}^{k12} = -\frac{y_{11}y_{2n}}{\lambda_1 - \lambda_n} \\ 0 &= (\lambda_2 - \lambda_n)S_{2n}^{k12} + y_{12}y_{2n} \rightarrow S_{2n}^{k12} = -\frac{y_{12}y_{2n}}{\lambda_2 - \lambda_n} \\ &\vdots \\ S_{lk}^{kij} &= -\frac{y_{il}y_{jk}}{\lambda_k - \lambda_l} \quad (i, j, k, l = 1, 2, \dots, n; l \neq k) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Os termos da matriz de sensibilidade dos autovalores com respeito às rigidezes são obtidos através da equação (4.35). Por sua vez, os termos da matriz de sensibilidade dos autovetores com respeito às rigidezes são obtidos pelas equações (4.18) e (4.36).

As sensibilidades dos parâmetros modais com relação às variações de massa do sistema podem ser obtidas de maneira análoga, ou seja:

$$\frac{\partial[\Phi]}{\partial m_{ij}} = \partial m_{ij}[\Phi] = [\Phi][S^{mij}] \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial[\Lambda]}{\partial m_{ij}} = \partial m_{ij}[\Lambda] = \text{diag}[S\lambda_1^{mij}, S\lambda_2^{mij}, \dots, S\lambda_n^{mij}] \quad (4.38)$$

Diferenciando a equação (4.16 a) em relação à massa m_{ij} e utilizando a equação (4.37), tem-se:

$$[S^{mij}]^T [\Phi]^T [M][\Phi] + [\hat{M}_{mij}] + [\Phi]^T [M][\Phi][S^{mij}] = 0 \quad (4.39)$$

A partir da equação (4.16 a) pode-se simplificar a equação (4.39), resultando em:

$$[S^{mij}]^T + [S^{mij}] = -[\hat{M}_{mij}] \quad (4.40)$$

onde,

$$[\hat{M}_{mij}] = [\Phi]^T \frac{\partial [M]}{\partial m_{ij}} [\Phi] \quad (4.41)$$

Diferenciando a equação (4.16 b) em relação à massa m_{ij} e introduzindo as equações (4.37) e (4.40), tem-se:

$$[S^{mij}]^T [\Phi]^T [K] [\Phi] + [\Phi]^T [K] [\Phi] [S^{mij}] = \partial_{mij} [\Lambda] \quad (4.42)$$

$$[S^{mij}]^T [\Lambda] + [\Lambda] [S^{mij}] = \partial_{mij} [\Lambda] \quad (4.43)$$

$$-[S^{mij}] [\Lambda] + [\Lambda] [S^{mij}] - [\hat{M}_{mij}] [\Lambda] = \partial_{mij} [\Lambda] \quad (4.44)$$

Na análise de sensibilidade de um termo particular da matriz de massa $[M]$ localizado em $i = 1$ e $j = 2$, a equação (4.41) fica:

$$[\hat{M}_{m12}] = [\Phi]^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} [\Phi] \quad (4.45)$$

e, multiplicando os autovetores resulta em:

$$[\hat{M}_{m12}] = \begin{bmatrix} y_{11}y_{21} & y_{11}y_{22} & \cdots & y_{11}y_{2n} \\ y_{12}y_{21} & y_{12}y_{22} & \cdots & y_{12}y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n}y_{21} & y_{1n}y_{22} & \cdots & y_{1n}y_{2n} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

A partir dos termos que estão na diagonal das matrizes da equação (4.40) pode-se obter as seguintes expressões:

$$\left. \begin{aligned} 2S_{11}^{m12} &= -y_{11}y_{21} \\ 2S_{22}^{m12} &= -y_{12}y_{22} \\ &\vdots \\ 2S_{nn}^{m12} &= -y_{1n}y_{2n} \end{aligned} \right\} S_{nn}^{mij} = -\frac{1}{2} y_{ik} y_{jk} \quad (4.47)$$

Desenvolvendo os termos que estão na diagonal das matrizes da equação (4.44), pode-se determinar as expressões:

$$\left. \begin{aligned} S\lambda_1^{m12} &= -\lambda_1 y_{11} y_{21} \\ S\lambda_2^{m12} &= -\lambda_2 y_{12} y_{22} \\ &\vdots \\ S\lambda_n^{m12} &= -\lambda_n y_{1n} y_{2n} \end{aligned} \right\} S\lambda_k^{mij} = -\lambda_k y_{ik} y_{jk} \quad (4.48)$$

Finalmente, a partir dos termos que estão fora da diagonal das matrizes da equação (4.44), pode-se obter as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1 - \lambda_n) S_{1n}^{m12} - \lambda_n y_{11} y_{2n} \rightarrow S_{1n}^{m12} = \frac{-\lambda_n y_{11} y_{2n}}{\lambda_1 - \lambda_n} \\ 0 &= (\lambda_2 - \lambda_n) S_{2n}^{m12} - \lambda_n y_{12} y_{2n} \rightarrow S_{2n}^{m12} = \frac{-\lambda_n y_{12} y_{2n}}{\lambda_2 - \lambda_n} \\ &\vdots \\ S_{lk}^{mij} &= \frac{-\lambda_k y_{il} y_{jk}}{\lambda_l - \lambda_k}; \quad (i, j, k, l = 1, 2, \dots, n; l \neq k) \end{aligned} \quad (4.49)$$

A matriz de sensibilidade dos autovalores devido às variações de massa no sistema pode ser obtida utilizando-se a equação (4.48). Por sua vez, a matriz de sensibilidade dos autovetores devido às variações de massa pode ser obtida através das equações (4.37), (4.47) e (4.49).

4.3.2– Sensibilidade da resposta modal de sistemas amortecidos

Considere a vibração de um sistema amortecido com n graus de liberdade descrita pela seguinte equação de movimento:

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.50)$$

A solução do problema de autovalor e autovetor é obtida considerando a solução homogênea da equação (4.50), ou seja,

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = 0 \quad (4.51)$$

Considerando que a matriz $[M]$ seja positiva definida e utilizando a igualdade,

$$[M]\{\dot{y}(t)\} - [M]\{\dot{y}(t)\} = 0 \quad (4.52)$$

então, pode-se escrever a equação para o sistema amortecido na forma de espaço-estado,

$$\begin{cases} [M]\dot{y} - [M]\dot{y} = 0 \\ [M]\ddot{y} + [C]\dot{y} + [K]y = 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & 0 \\ 0 & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ y \end{Bmatrix} = 0$$

Reescrevendo a equação (4.53) em uma forma compacta, resulta,

$$[A]\{\dot{x}\} + [B]\{x\} = 0 \quad (4.54)$$

Os modos de vibração do sistema amortecido podem ser normalizados tal que:

$$[\Phi]^T [A] [\Phi] = [I] ; [\Phi]^T [B] [\Phi] = [\Lambda] \quad (4.55 \text{ a; b})$$

Considerando que se queira determinar a sensibilidade dos parâmetros modais com a variação de massa, de amortecimento e de rigidez, então para pequenas variações dos parâmetros, pode-se escrever a sensibilidade como uma expansão em série de Taylor tomando apenas os termos de primeira ordem,

$$\Lambda(m, k, c) = \Lambda(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c}) + \partial_m \Lambda(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c})(m - \bar{m}) + \partial_c \Lambda(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c})(c - \bar{c}) + \partial_k \Lambda(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c})(k - \bar{k}) \quad (4.56)$$

$$\Phi(m, k, c) = \Phi(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c}) + \partial_m \Phi(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c})(m - \bar{m}) + \partial_c \Phi(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c})(c - \bar{c}) + \partial_k \Phi(\bar{m}, \bar{k}, \bar{c})(k - \bar{k}) \quad (4.57)$$

A determinação da sensibilidade de um termo m_{ii} da matriz de massa $[M]$ pode ser realizada considerando:

$$\frac{\partial[\Phi]}{\partial m_{ii}} = \partial m_{ii}[\Phi] = [\Phi][S_{k,l}^{mii}] \quad [S_{k,l}^{mii}] \quad (k, l = 1, 2, \dots, 2n) \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial[\Lambda]}{\partial m_{ii}} = \partial m_{ii}[\Lambda] = \text{diag}[S\lambda_1^{mii}, S\lambda_2^{mii}, \dots, S\lambda_n^{mii}] \quad (4.59)$$

Por outro lado, diferenciando a equação (4.55 a) com relação à massa, tem-se:

$$\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial m_{ii}}[A][\Phi] + [\Phi]^T \frac{\partial[A]}{\partial m_{ii}}[\Phi] + [\Phi]^T[A] \frac{\partial[\Phi]}{\partial m_{ii}} = 0 \quad (4.60)$$

Substituindo as equações (4.58) na equação (4.60), tem-se:

$$[S_{mii}]^T[\Phi]^T[A][\Phi] + [\Phi]^T[A][\Phi][S_{mii}] = -[\Phi]^T \frac{\partial[A]}{\partial m_{ii}}[\Phi] \quad (4.61)$$

e, introduzindo a equação (4.55 a), resulta em:

$$[S_{mii}]^T + [S_{mii}] = -[\hat{A}_{mii}] \quad (4.62)$$

onde,

$$[\hat{A}_{mii}] = [\Phi]^T \frac{\partial [A]}{\partial m_{ii}} [\Phi] \quad (4.63)$$

A equação de movimento na forma espaço-estado produz matrizes de ordem $2n \times 2n$, e por conseqüência, a matriz modal também deverá possuir esta ordem. Assim a matriz dos autovetores, quando se trabalha com a notação espaço-estado, pode ser escrita na forma:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \lambda_1 y_{11} & \lambda_2 y_{12} & \cdots & \lambda_{2n} y_{12n} \\ \lambda_1 y_{21} & \lambda_2 y_{22} & \cdots & \lambda_{2n} y_{22n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 y_{n1} & \lambda_2 y_{n2} & \cdots & \lambda_{2n} y_{n2n} \\ y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{12n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n2n} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$$[\Phi]^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 y_{11} & \lambda_1 y_{21} & \cdots & \lambda_1 y_{n1} & y_{11} & \cdots & y_{n1} \\ \lambda_2 y_{12} & \lambda_2 y_{22} & \cdots & \lambda_2 y_{n2} & y_{12} & \cdots & y_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n y_{1n} & \lambda_n y_{2n} & \cdots & \lambda_n y_{nn} & y_{1n} & \cdots & y_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{2n} y_{12n} & \lambda_{2n} y_{22n} & \cdots & \lambda_{2n} y_{n2n} & y_{12n} & \cdots & y_{n2n} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Desenvolvendo a equação (4.63) resulta:

$$[\hat{A}_{mii}] = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 y_{i1} y_{i1} & \lambda_2 y_{i1} y_{i2} + \lambda_1 y_{i1} y_{i2} & \cdots & \lambda_{2n} y_{i1} y_{i2n} + \lambda_1 y_{i1} y_{i2n} \\ \lambda_1 y_{i1} y_{i2} + \lambda_2 y_{i1} y_{i2} & 2\lambda_2 y_{i2} y_{i2} & \cdots & \lambda_{2n} y_{i2} y_{i2n} + \lambda_2 y_{i2} y_{i2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 y_{i1} y_{in} + \lambda_n y_{i1} y_{in} & \cdots & 2\lambda_n y_{in} y_{in} & \lambda_{2n} y_{in} y_{i2n} + \lambda_n y_{in} y_{i2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 y_{i1} y_{i2n} + \lambda_{2n} y_{i1} y_{i2n} & \cdots & \lambda_n y_{in} y_{i2n} + \lambda_{2n} y_{in} y_{i2n} & 2\lambda_{2n} y_{i2n} y_{i2n} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Desenvolvendo a equação (4.62), resulta:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} S_{11}^{mii} & S_{12}^{mii} & \cdots & S_{12n}^{mii} \\ S_{21}^{mii} & S_{22}^{mii} & \cdots & S_{22n}^{mii} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{2n1}^{mii} & S_{2n2}^{mii} & \cdots & S_{2n2n}^{mii} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11}^{mii} & S_{21}^{mii} & \cdots & S_{2n1}^{mii} \\ S_{12}^{mii} & S_{22}^{mii} & \cdots & S_{2n2}^{mii} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{12n}^{mii} & S_{22n}^{mii} & \cdots & S_{2n2n}^{mii} \end{bmatrix} \\
 & = - \begin{bmatrix} 2\lambda_1 y_{i1} y_{i1} & \lambda_2 y_{i1} y_{i2} + \lambda_1 y_{i1} y_{i2} & \cdots & \lambda_{2n} y_{i1} y_{i2n} + \lambda_1 y_{i1} y_{i2n} \\ \lambda_1 y_{i1} y_{i2} + \lambda_2 y_{i1} y_{i2} & 2\lambda_2 y_{i2} y_{i2} & \cdots & \lambda_{2n} y_{i2} y_{i2n} + \lambda_2 y_{i2} y_{i2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 y_{i1} y_{in} + \lambda_n y_{i1} y_{in} & \cdots & 2\lambda_n y_{in} y_{in} & \lambda_{2n} y_{in} y_{i2n} + \lambda_n y_{in} y_{i2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1 y_{i1} y_{i2n} + \lambda_{2n} y_{i1} y_{i2n} & \cdots & \lambda_n y_{in} y_{i2n} + \lambda_{2n} y_{in} y_{i2n} & \cdots 2\lambda_{2n} y_{i2n} y_{i2n} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Considerando os termos que estão na diagonal das matrizes da equação (4.67), obtêm-se:

$$S_{kk}^{mii} = -\lambda_k y_{ik} y_{ik} \quad (k=1, 2, \dots, 2n) \tag{4.68}$$

Diferenciando a equação (4.55 b) com respeito a um termo m_{ii} da matriz de massa, obtêm-se:

$$\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial m_{ii}} [B][\Phi] + [\Phi]^T \frac{\partial[B]}{\partial m_{ii}} [\Phi] + [\Phi]^T [B] \frac{\partial[\Phi]}{\partial m_{ii}} = \frac{\partial[\Lambda]}{\partial m_{ii}} \tag{4.69}$$

e, introduzindo as equações (4.55b) e (4.62) na equação (4.69), resulta:

$$\frac{\partial[\Lambda]}{\partial m_{ii}} = [\Lambda][S_{mii}] - [S_{mii}][\Lambda] + [\hat{B}_{mii}] - [\hat{A}_{mii}][\Lambda] \tag{4.70}$$

onde,

$$[\hat{B}_{mii}] = [\Phi]^T \frac{\partial[B]}{\partial m_{ii}} [\Phi] \tag{4.71}$$

Desenvolvendo os termos das matrizes da equação (4.70), resultam:

$$[\hat{B}_{mii}] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 y_{i1} y_{i1} & \lambda_1 \lambda_2 y_{i1} y_{i2} & \cdots & \lambda_1 \lambda_{2n} y_{i1} y_{i2n} \\ \lambda_2 \lambda_1 y_{i1} y_{i2} & \lambda_2^2 y_{i2} y_{i2} & \cdots & \lambda_2 \lambda_{2n} y_{i2} y_{i2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{2n} \lambda_1 y_{i1} y_{i2n} & \lambda_{2n} \lambda_2 y_{i2} y_{i2n} & \cdots & \lambda_{2n}^2 y_{i2n} y_{i2n} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$[\Lambda][S_{mii}] - [S_{mii}][\Lambda] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & (\lambda_1 - \lambda_n) s_{1n}^{mii} & \cdots & (\lambda_1 - \lambda_{2n}) s_{12n}^{mii} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\lambda_n - \lambda_1) s_{n1}^{mii} & \cdots & 0 & \cdots & (\lambda_n - \lambda_{2n}) s_{n2n}^{mii} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\lambda_{2n} - \lambda_1) s_{2n1}^{mii} & \cdots & (\lambda_{2n} - \lambda_n) s_{2nn}^{mii} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$[\hat{A}_{mii}][\Lambda] = \begin{bmatrix} 2\lambda_1^2 y_{i1} y_{i1} & \cdots & \lambda_n^2 y_{i1} y_{in} + \lambda_n \lambda_1 y_{i1} y_{in} & \cdots & \lambda_{2n}^2 y_{i1} y_{i2n} + \lambda_{2n} \lambda_1 y_{i1} y_{i2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^2 y_{i1} y_{in} + \lambda_1 \lambda_n y_{i1} y_{in} & \cdots & 2\lambda_n^2 y_{in} y_{in} & \cdots & \lambda_{2n}^2 y_{in} y_{i2n} + \lambda_{2n} \lambda_n y_{in} y_{i2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^2 y_{i1} y_{i2n} + \lambda_1 \lambda_{2n} y_{i1} y_{i2n} & \cdots & \lambda_n^2 y_{in} y_{i2n} + \lambda_n \lambda_{2n} y_{in} y_{i2n} & \cdots & 2\lambda_{2n}^2 y_{i2n} y_{i2n} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Considerando apenas os termos que se encontram na diagonal da equação (4.70), obtêm-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} S\lambda_1^{mii} &= 0 - \lambda_1^2 y_{i1} y_{i1} - 2\lambda_1^2 y_{i1} y_{i1} = -3\lambda_1^2 y_{i1} y_{i1} \\ S\lambda_n^{mii} &= 0 - \lambda_n^2 y_{in} y_{in} - 2\lambda_n^2 y_{in} y_{in} = -3\lambda_n^2 y_{in} y_{in} \\ &\vdots \\ S\lambda_k^{mii} &= -3\lambda_k^2 y_{ik} y_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, 2n) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Por outro lado, considerando os termos que estão fora da diagonal da equação (4.70), pode-se obter na seguinte equação:

$$0 = (\lambda_k - \lambda_l) s_{kl}^{mii} - 2\lambda_l \lambda_k y_{ik} y_{il} - \lambda_l^2 y_{ik} y_{il} \Rightarrow s_{kl}^{mii} = \frac{\lambda_l y_{ik} y_{il} (\lambda_l + 2\lambda_k)}{\lambda_k - \lambda_l} \quad (4.76)$$

$$(l, k = 1, 2, \dots, 2n, l \neq k)$$

Agora, para se determinar a sensibilidade da resposta modal em relação a um termo qualquer m_{ij} da matriz de massa $[M]$, procede-se de forma análoga, isto é:

$$\frac{\partial[\Phi]}{\partial m_{ij}} = [\Phi][S_{mij}]^T [S_{mij}], \quad (k, l = 1, 2, \dots, 2n) \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial[\Lambda]}{\partial m_{ij}} = \text{diag}(S\lambda_1^{mij}, S\lambda_2^{mij}, \dots, S\lambda_{2n}^{mij}) \quad (4.78)$$

Diferenciando a equação (4.55 a) em relação a um elemento qualquer m_{ij} da matriz de massa tem-se:

$$[S_{mij}]^T + [S_{mij}] = -[\hat{A}_{mij}] \quad (4.79)$$

onde,

$$[\hat{A}_{mij}] = [\Phi]^T \frac{\partial[A]}{\partial m_{ij}} [\Phi] \quad (4.80)$$

Desenvolvendo a matriz $[\hat{A}_{mij}]$ e substituindo-a na equação (4.79) e em seguida tomando os termos que encontra-se na diagonal, obtêm-se:

$$S_{kk}^{mij} = -2\lambda_k y_{ik} y_{jk} \quad (k = 1, 2, \dots, 2n) \quad (4.81)$$

De forma análoga, derivando a equação (4.55b) com relação ao elemento m_{ij} , têm-se:

$$\frac{\partial[\Lambda]}{\partial m_{ij}} = [\Lambda][S_{mij}] - [S_{mij}][\Lambda] + [\hat{B}_{mij}] - [\hat{A}_{mij}][\Lambda] \quad (4.82)$$

onde,

$$[\hat{B}_{mij}] = [\Phi]^T \frac{\partial[B]}{\partial m_{ij}} [\Phi] \quad (4.83)$$

Dos termos da diagonal da equação (4.79), se obtêm a equação:

$$S\lambda_k^{mij} = -6\lambda_k y_{ik} y_{jk} \quad (k = 1, 2, \dots, 2n) \quad (4.84)$$

Por outro lado, dos termos não diagonais das matrizes da equação (4.82), obtêm-se:

$$S_{kl}^{mij} = \frac{(2\lambda_k \lambda_l + \lambda_l^2)(y_{il} y_{jk} + y_{ik} y_{jl})}{(\lambda_k - \lambda_l)} \quad (k, l = 1, 2, \dots, 2n, k \neq l) \quad (4.85)$$

As sensibilidades dos parâmetros modais de um sistema amortecido em relação às variações de amortecimento ou de rigidez podem ser obtidas adotando um procedimento analítico similar ao desenvolvimento executado para a obtenção das sensibilidades com relação às variações de massa.

CAPÍTULO 5

5. MÉTODO DE AJUSTE DE RIGIDEZ DE MANCAIS

5.1 – Introdução

Na modelagem matemática dos sistemas mecânicos rotativos, os valores da rigidez dos mancais são normalmente difíceis de serem identificados e não são encontrados diretamente na literatura, uma vez que dependem do tipo de mancal, da velocidade de rotação do eixo, do lubrificante, da estrutura suporte do mancal, etc. Por outro lado, os outros parâmetros dinâmicos do modelo podem ser estimados com uma precisão satisfatória a partir do projeto do sistema e de informações adicionais do construtor ou do usuário.

Neste capítulo apresenta-se um método para ajustar os valores de rigidez dos mancais de rotores a partir de uma modelagem matemática do mesmo. Com os dados do modelo, aplica-se a análise de sensibilidade dos autovalores e o processo de ajuste ocorrerá com base em resultados experimentais obtidos do rotor. Como já comentado anteriormente, neste trabalho se adotará para cada mancal uma rigidez equivalente representativa do conjunto dos elementos que o compõem, ou seja, representativa da rigidez do filme de lubrificante (no caso de mancais hidrodinâmicos), da rigidez do suporte (pedestal) e da fundação.

5.2 – Método de Ajuste

Considere que se deseja estimar os valores de rigidez dos mancais de um sistema rotativo real. Desenvolve-se um modelo matemático para esse sistema adotando-se valores iniciais para a rigidez dos mancais. Com isso pode-se determinar os autovalores teóricos λ_k ($k = 1, 2, \dots, N$), sendo N o número de mancais do sistema que se deseja estimar e calculam-se as sensibilidades desses autovalores com relação a cada rigidez, $S\lambda_k^{k_i}$. Em outras palavras, calcula-se a sensibilidade de cada rigidez k_i sobre os autovalores λ_k utilizando a equação (4.35) do capítulo anterior. Considere também que foi realizada uma análise modal experimental no rotor e obtidas as primeiras frequências naturais de flexão do mesmo. Assim, os autovalores experimentais podem ser determinados como segue:

$$\lambda_{ek} = (2\pi\omega_{ek})^2 \quad ; \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (5.1)$$

Se considerarmos que neste sistema os únicos parâmetros que irão variar são as rigidezes, então a equação (4.17 a), relativa ao primeiro termo da expansão de Taylor para os autovalores, pode ser simplificada para:

$$\Lambda(k) = \Lambda(\bar{k}) + \partial_k \Lambda(\bar{k})(k - \bar{k}) \quad (5.2)$$

Admitindo-se pequenas variações nos elementos da matriz de rigidez do sistema, a equação (5.2), quando escrita para um particular autovalor, tem a seguinte forma:

$$\lambda_k = \bar{\lambda}_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [S\lambda_k^{ij} (k_{ij} - \bar{k}_{ij})] \quad (5.3)$$

O objetivo do método proposto é ajustar as rigidezes dos mancais, que em termos de modelo matemático, são elementos finitos de rigidez concentrada e, portanto, cada valor de rigidez fica alocado em um único elemento da diagonal da matriz de rigidez do sistema, simplificando o emprego da equação (5.3). Nesta equação, tomando os λ_k iguais aos autovalores experimentais e os $\bar{\lambda}_k$ iguais aos autovalores teóricos obtidos com os valores iniciais de rigidez dos mancais, pode-se, então, estabelecer um sistema de equações lineares dado por:

$$\begin{aligned} \lambda_{e1} - \lambda_1 &= S\lambda_1^{k1} \Delta k_1 + S\lambda_1^{k2} \Delta k_2 + \dots + S\lambda_1^{kN} \Delta k_N \\ \lambda_{e2} - \lambda_2 &= S\lambda_2^{k1} \Delta k_1 + S\lambda_2^{k2} \Delta k_2 + \dots + S\lambda_2^{kN} \Delta k_N \\ &\vdots \\ \lambda_{eN} - \lambda_N &= S\lambda_N^{k1} \Delta k_1 + S\lambda_N^{k2} \Delta k_2 + \dots + S\lambda_N^{kN} \Delta k_N \end{aligned} \quad (5.4)$$

Na forma matricial a equação (5.4) torna-se,

$$\begin{bmatrix} S\lambda_1^{k1} & S\lambda_1^{k2} & \dots & S\lambda_1^{kN} \\ S\lambda_2^{k1} & S\lambda_2^{k2} & \dots & S\lambda_2^{kN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S\lambda_N^{k1} & S\lambda_N^{k2} & \dots & S\lambda_N^{kN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \vdots \\ \Delta k_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{e1} - \lambda_1 \\ \lambda_{e2} - \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{eN} - \lambda_N \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

e na forma compacta,

$$[S\lambda^k]\{\Delta k\} = \{\Delta\lambda\} \quad (5.6)$$

Com a solução da equação (5.6), determina-se os valores de Δk que irão ajustar as rigidezes dos mancais, de maneira que os autovalores teóricos obtidos com o modelo matemático se aproximem dos autovalores obtidos experimentalmente.

Analisando a equação (5.5), verifica-se que o número de autovalores experimentais necessários deve ser igual ao número de mancais do rotor a serem estimados. Assim, se o rotor a ser ajustado possui dois mancais, então são necessários somente os dois primeiros autovalores experimentais. Se o rotor tem três mancais a serem ajustados, então serão necessários os três primeiros autovalores experimentais, e assim sucessivamente. Em teoria, é possível ajustar um rotor com um grande número de mancais, entretanto, na prática, pode-se encontrar grandes dificuldades para a obtenção de mais de três autovalores experimentais do rotor com uma precisão satisfatória.

Os elementos da matriz $[S\lambda^k]$ da equação (5.6) são valores de sensibilidades cuja precisão é garantida somente para pequenas variações de Δk , uma vez que esta equação foi determinada considerando-se apenas o primeiro termo da série de Taylor. Portanto, a solução desta equação é obtida de forma iterativa, e a convergência do método se dá pela minimização da diferença entre os autovalores teóricos e experimentais. Considera-se que o método convergiu quando essa diferença é menor que uma tolerância pré-estabelecida.

A figura 5.1 mostra o fluxograma do programa computacional implementado para ajustar as rigidezes dos mancais. Observa-se que a cada iteração os Δk_i são algebricamente somados às respectivas rigidezes k_i , e os elementos do vetor $\{\Delta\lambda\}$ vão tendendo a zero.

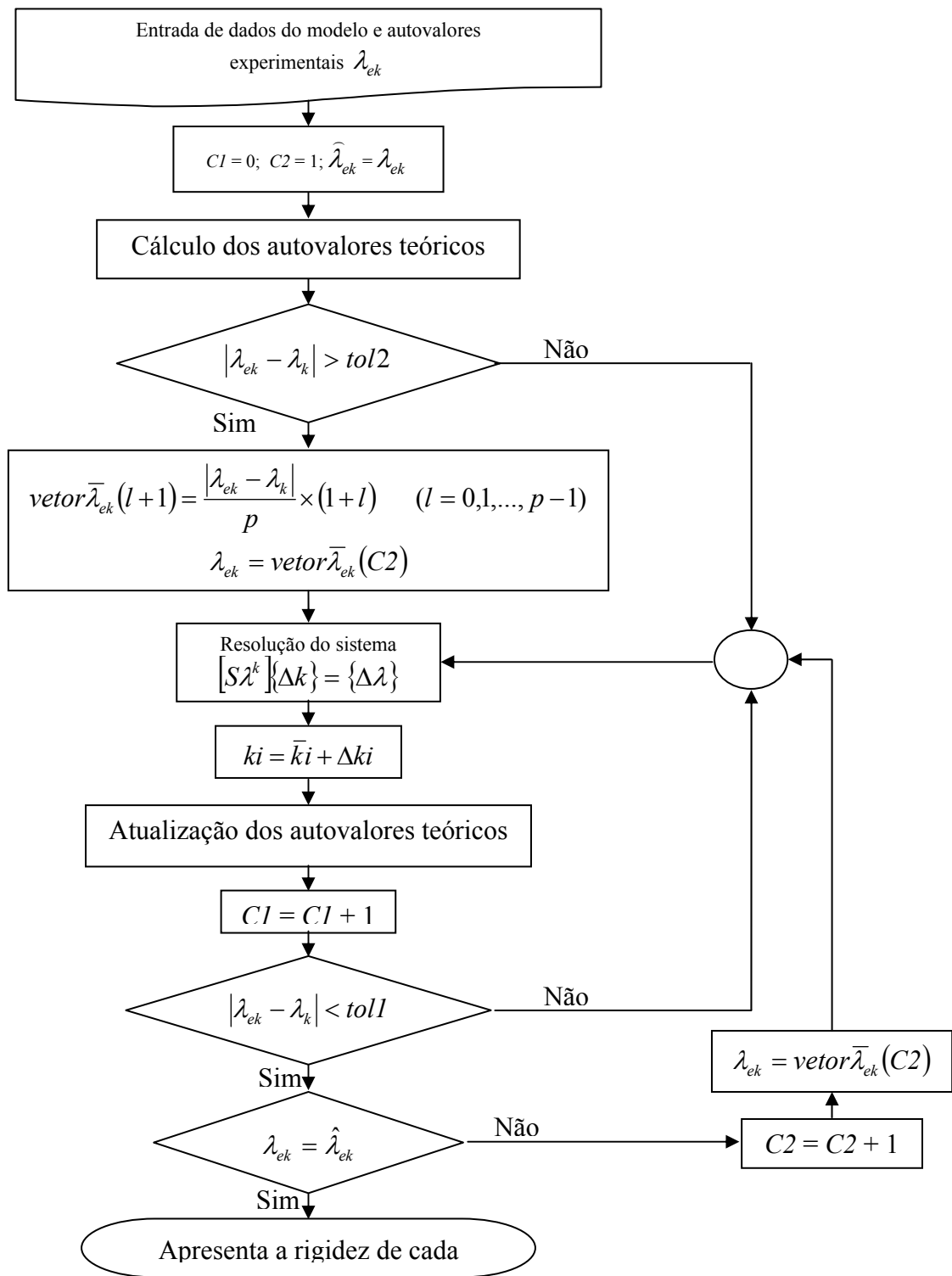


Figura 5.1 – Fluxograma do algoritmo de ajuste do modelo

A convergência do método para a solução do ajuste depende da precisão do modelo para representar dinamicamente o sistema, e nem sempre se consegue a solução para a equação (5.6). O fato de se obter a solução desta equação indica que o modelo matemático, mesmo com as hipóteses simplificadoras, tem uma precisão satisfatória para representar o sistema. Além disso, o fato de se obter a solução para a equação (5.6) nos dá maior segurança quanto a confiabilidade dos dados experimentais empregados.

5.3 – Considerações Sobre o Programa Computacional

O método de ajuste foi implementado no ambiente MatLab, evitando-se ao máximo o uso das “bibliotecas” deste software, a fim de se obter um maior controle sobre o processamento e o monitoramento de todas as operações e variáveis envolvidas. O programa principal controla cinco sub-rotinas. A primeira sub-rotina estabelece a interface para a entrada dos dados para a modelagem e o ajuste dos mancais do rotor. A segunda sub-rotina permite o desenvolvimento do modelo do rotor através do método dos elementos finitos, fornecendo como saída as matrizes de massa e rigidez globais. A terceira sub-rotina aborda a solução do problema de autovalores e autovetores. A quarta sub-rotina gera dados tais como: diagrama de Campbell e gráficos dos modos de vibração do rotor. A quinta e última sub-rotina processa o ajuste do modelo utilizando a análise de sensibilidade dos autovalores em relação à variação das rigidezes dos mancais, empregando como entrada as matrizes de massa e rigidez globais e os autovalores experimentais. Como saída esta sub-rotina fornece os valores de rigidez ajustados e o número de iterações que ocorreram para a convergência da solução.

Como já comentado anteriormente, o sistema de equações (5.5) é montado a partir do primeiro termo da série de Taylor, desprezando-se os termos de maior ordem. Assim, mesmo sendo o sistema de equações resolvido de forma iterativa, quando as diferenças entre os autovalores teóricos e experimentais são demasiadamente grandes, podem ocorrer problemas numéricos para o cálculo dos autovalores teóricos devido a um mau condicionamento da matriz de rigidez durante as primeiras iterações, quando a solução do sistema pode resultar em valores de Δk demasiadamente grandes (irreais), tanto positivos como negativos. Neste caso, para contornar o problema, quando as diferenças são maiores que uma tolerância pré-estabelecida ($tol2$), então elas são automaticamente divididas em p partes para que o algoritmo convirja em p

passos. Portanto, o processo iterativo passa a ocorrer em cada passo até quando as atuais diferenças sejam inferiores a uma tolerância pré-determinada (*toll*), quando o processo passa para o passo seguinte, sucessivamente. Esse recurso pode ser visto no diagrama da figura 5.1, onde a variável *C1* computa o número total de iterações para a convergência da solução, e a variável *C2* computa o número de passos em que as diferenças entre os autovalores teóricos e experimentais foram divididas. Esse recurso também melhora a robustez do método para estimar mancais muito rígidos, cuja sensibilidade dos autovalores é muito pequena, tornando a convergência do sistema de equações (5.6) mais difícil.

CAPÍTULO 6

6. PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

6.1 – Introdução

Neste capítulo serão apresentados os detalhes construtivos e as características geométricas básicas do rotor de laboratório empregado para a obtenção dos dados experimentais utilizados para a análise do funcionamento e da robustez do método desenvolvido para a estimação de rigidez de mancais de sistemas rotativos. Também, serão apresentadas as especificações dos equipamentos de medição e análise de vibrações do rotor, os procedimentos experimentais adotados para a obtenção dos dados e um método para a determinação experimental dos modos de vibração do rotor.

6.2 – Rotor de Ensaio Experimentais

O rotor para ensaios experimentais é constituído de um eixo de aço suportado por dois mancais em suas extremidades e alternativamente um terceiro mancal adicional também pode operar em um ponto intermediário do eixo. O eixo tem comprimento total de 605 mm e diâmetro escalonado entre 10 e 15 mm para permitir o encaixe dos mancais e a fixação de dois discos rígidos, sendo um de 100 mm e o outro de 150 mm de diâmetro. No desenho da Figura 6.1 estão indicadas as dimensões do rotor, o qual é acionado por um motor elétrico através de um acoplamento flexível para evitar a transmissibilidade de vibrações entre o motor e o rotor. O motor elétrico é conduzido por um inversor de frequência para permitir a obtenção de dados do rotor a diversas condições de rotação.

Cada mancal do rotor é constituído de um rolamento rígido de esfera autocompensador fixado em uma das extremidades de uma lâmina de aço de seção retangular, a qual tem a outra extremidade rigidamente fixada em uma mesa inercial, conforme mostra a Figura 6.2. Sendo autocompensadores, os rolamentos dos mancais permitem que o eixo tenha deslocamentos de rotação livres no plano de deformação. As lâminas de aço induzirão uma determinada flexibilidade nos mancais, sendo que esta flexibilidade poderá ser facilmente modificada variando-se a espessura das lâminas. Para isso foram confeccionados cinco jogos de três lâminas,

com espessuras diferentes para variar as rigidezes dos mancais em conjunto ou alternadamente. As espessuras das lâminas são de 1,7; 3,0; 5,0; 7,9 e 9,5 mm e o seu comprimento desde o ponto de engaste na mesa inercial até a linha de centro do rotor é de 177 mm. A variação da rigidez dos mancais é importante dada à necessidade de se analisar o método de ajuste de rigidez de mancais para diferentes relações de rigidezes mancais/rotor. A utilização de lâminas de aço, além de permitir essa variação de rigidez dos mancais, proporciona uma vantagem adicional que é impor uma rigidez nas direções radial horizontal e axial infinitamente maior que a rigidez na direção radial vertical. Portanto, pode-se considerar que todo movimento vibratório do rotor ocorre no plano vertical, facilitando a obtenção dos dados experimentais e a modelagem matemática do rotor.

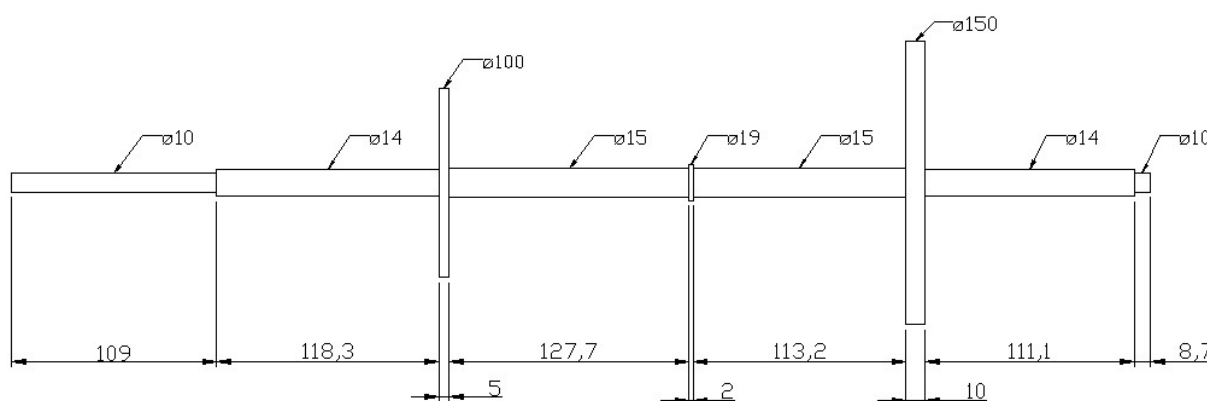


Figura 6.1 – Desenho do rotor com medidas em milímetros

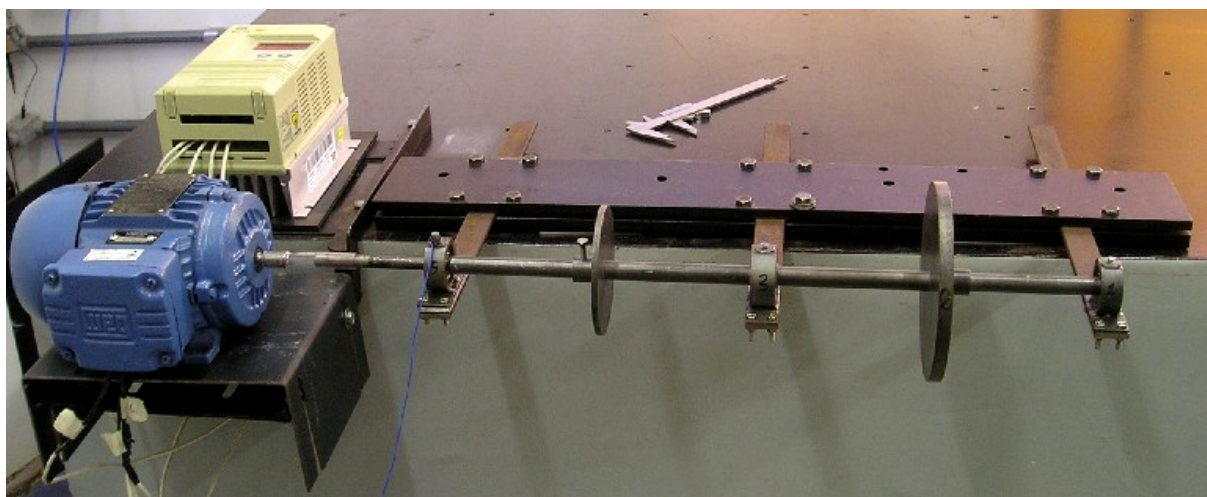


Figura 6.2 – Rotor de laboratório

6.3 – Aquisição e processamento de sinais

Para a obtenção das características próprias do rotor foram executadas análises modais experimentais, considerando as montagens com dois e três mancais, nas condições de rotor parado e rotor a diversas velocidades de rotação. Para proceder a estas análises o sistema foi excitado por impactos com um martelo e as respostas foram captadas com um acelerômetro miniatura com massa desprezível quando comparada com a massa total do rotor. Os impactos foram realizados em 6 pontos diferentes ao longo do rotor e as respostas foram captadas com o acelerômetro fixado em um dos mancais. A aquisição dos sinais foi realizada empregando-se uma placa de aquisição e o “software” comercial ACE, que fornece as funções de resposta em frequência (FRF) e os respectivos diagramas de fase. As FRFs foram obtidas a partir de uma média dos sinais de 5 impactos. Depois de adquiridas, as FRFs foram gravadas no formato ASCII para que fosse possível seu pós-processamento no ambiente do “software” MatLab, a fim de se obter os modos de vibração do rotor empregando-se o método “Quadrature Picking”, que será apresentado mais adiante neste capítulo, e para a aplicação do critério MAC apresentado na seção 6.7.

6.4 – Equipamentos e Instrumentação utilizados

- Motor elétrico WEG de 0,16 cv, rotação nominal de 3380 rpm;
- Inversor de frequência WEG, modelo CFW 07;
- Martelo de impactos PCB, modelo 086C04;
- Acelerômetro PCB Piezotronics, modelo 352 A10;
- Condicionadores de sinais PCB, modelo 480E09.

A Figura 6.3 mostra a instrumentação utilizada para a aquisição de sinais nas análises modais experimentais.

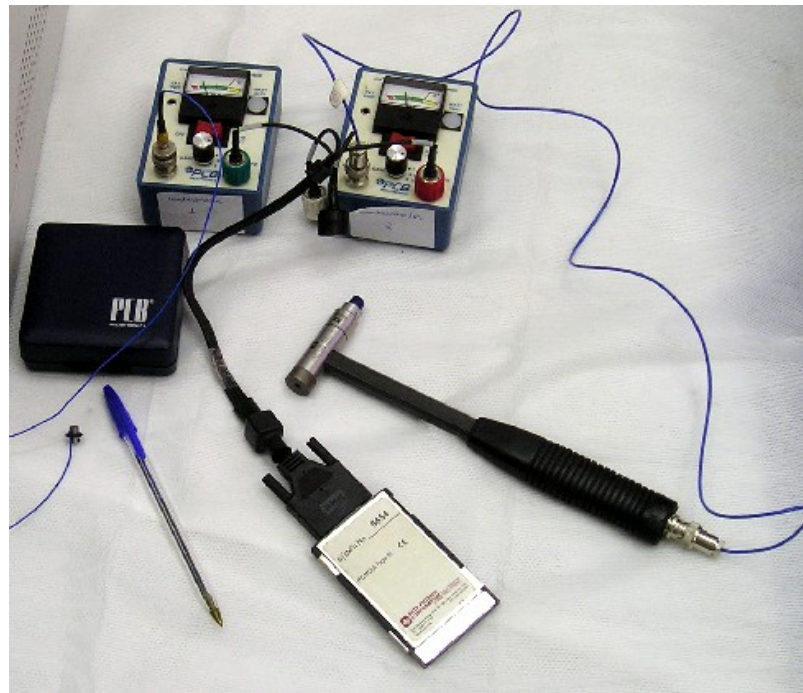


Figura 6.3 – Instrumentação para medições experimentais.

6.5 – Método de obtenção dos modos de vibração experimentais

O método adotado para a obtenção dos modos de vibração foi o “Quadrature Picking” BRÜEL & KJÆR (1988) devido a sua facilidade de aplicação com a utilização reduzida de equipamentos e dados. O método consiste em se fixar a posição do sensor para obtenção da resposta e variar os pontos de aplicação dos impactos.

O modelo de parâmetros modais é construído utilizando-se dois parâmetros os quais podem ser obtidos a partir de medidas de FRF.

A FRF ($H(\omega)$) é definida em termos da posição do pólo (p) e do resíduo (R) e de seus complexos conjugados (p^* e R^*), equação 6.1. A posição do pólo e o resíduo são por sua vez definidos em termos de parâmetros espaciais.

$$H(\omega) = \frac{R}{j\omega - p} + \frac{R^*}{j\omega - p^*} \quad (6.1)$$

A posição do pólo é um número complexo. O valor numérico da parte real (σ) é a razão na qual uma vibração amortecida decai em amplitude. A parte imaginária de p é a frequência modal, ou a frequência natural amortecida (ω_{dr}) para uma vibração livre amortecida. A

localização do pólo descreve a forma das curvas de magnitude e fase de uma FRF como mostra a figura 6.4.

O resíduo é um conceito matemático e não tem uma interpretação direta em termos físicos. Ele leva a um escalonamento absoluto da FRF e de sua magnitude. O resíduo está relacionado com os modos de vibrar de um sistema.

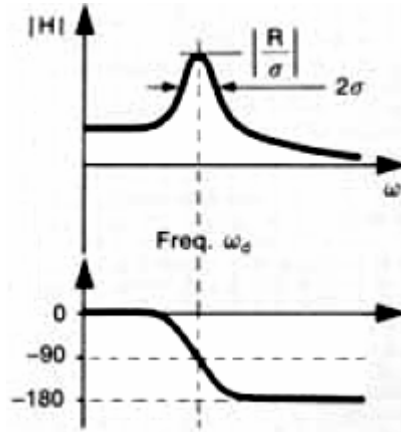


Figura 6.4 – Resíduo e pólo

A magnitude de um modo não é dada apenas pelo resíduo. Ela é a razão do resíduo pela taxa de decaimento, como na equação 6.2.

$$H_{ij}(\omega)\Big|_{\omega=\omega_{dr}} \approx \frac{R_{ijr}}{\sigma_r} \quad (6.2)$$

onde i é o índice referente a resposta, j a excitação e r a um modo em particular. Escrevendo-se o resíduo para um modo em particular, como uma proporção do produto entre o deslocamento modal ϕ_{ir} da resposta e o deslocamento modal ϕ_{jr} da excitação para um sistema de um grau de liberdade, temos:

$$R_{ijr} \propto \phi_{ir} \cdot \phi_{jr} \quad (6.3)$$

Desde que as medidas são em aceleração, é necessário fazer uma dupla diferenciação da equação (6.2), resultando:

$$A(\omega)_{dr} \approx \frac{R}{\sigma} (-\omega_{dr}^2) \quad (6.4)$$

Com mais de um grau de liberdade definido, pode-se substituir o resíduo por:

$$R = a_r \cdot \phi_{ir} \cdot \phi_{jr} = \frac{\phi_{ir} \cdot \phi_{jr}}{2j\omega_{dr}} \quad (6.5)$$

Substituindo a equação (6.5) na equação (6.4), tem-se:

$$A(\omega)_{dr} \approx j \frac{\phi_{ir} \cdot \phi_{jr}}{2\sigma} \omega_{dr} \quad (6.6)$$

Nota-se que $A(\omega)$ é um número imaginário da frequência modal. Isto é a base da técnica do “quadrature picking”, através do qual é possível obter os modos de vibração.

A FRF é puramente imaginária na frequência modal, sua amplitude é proporcional ao deslocamento modal e seu sinal é positivo se o deslocamento estiver em fase com a excitação.

Os modos de vibração podem ser determinados se fixarmos a resposta ou a excitação em um grau de liberdade como referência e realizar um conjunto de medidas. A parte imaginária das FRFs devem ser tomadas nas frequências modais que se deseja obter os modos de vibração para seus específicos graus de liberdade.

Na figura 6.5 é mostrada a fixação da resposta no grau de liberdade 2 e a obtenção de um conjunto de FRFs pela excitação nos 4 graus de liberdade considerados.

A partes imaginárias das 4 FRFs obtidas representam os modos de vibração associados a suas respectivas frequências modais.

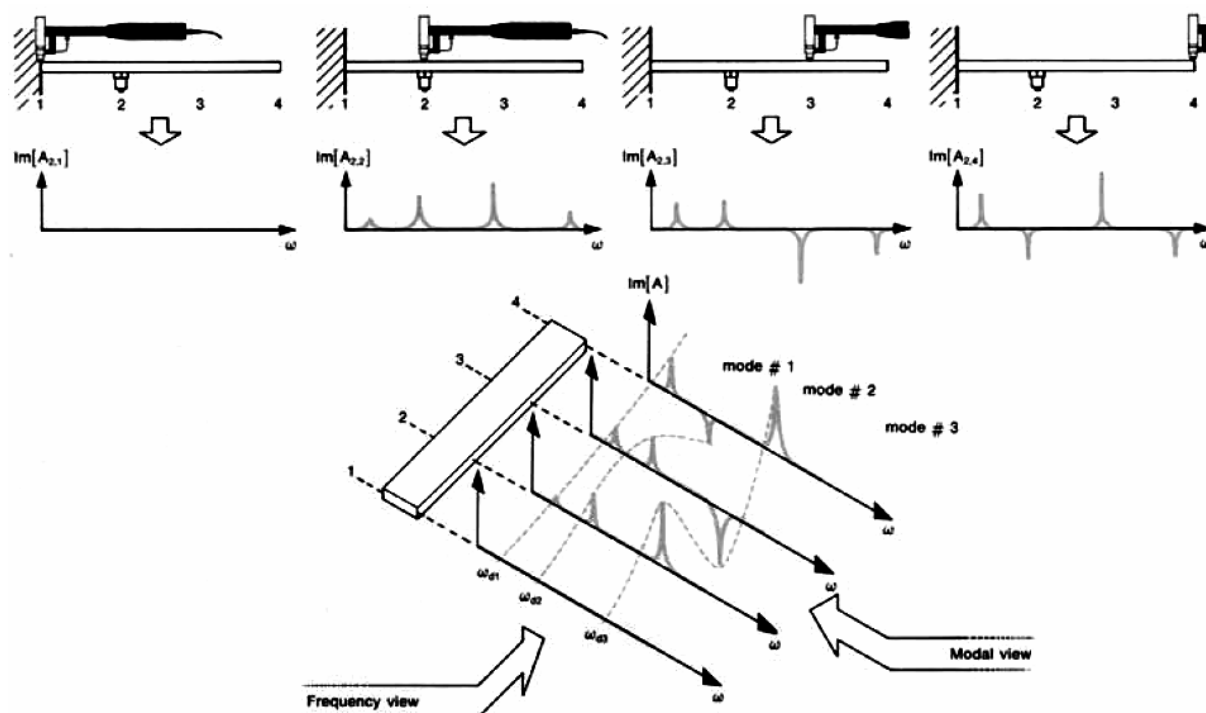


Figura 6.5 – Ilustração do método do “Quadrature Picking”

6.6 – Consideração sobre a massa das lâminas

No desenvolvimento do modelo matemático do rotor verificou-se que uma porcentagem das massas das lâminas devem ser considerada no modelo. Nos trabalhos de SAKATA, M. et al (1995) e MARANO e NASCIMENTO (2000), eles também observaram a necessidade da inclusão do efeito dessa porcentagem das massas das lâminas para se obter um modelo mais preciso e confiável. Com base nesses resultados, optou-se por modelar as lâminas por um modelo de um grau de liberdade tipo massa-mola equivalente, e a partir da frequência natural medida diretamente com a lâmina engastada sem o rotor e da rigidez medida por meio de pesos calibrados, determinou-se que a porcentagem da massa das lâminas a ser considerada no modelo deve ser de aproximadamente 45%.

6.7 – Correlação dos modos experimentais (*MAC*)

Na implementação do ajuste do modelo, é necessário um critério para indicar o quão correlacionado estão os dados gerados pelo modelo e os dados experimentais, para isso é utilizado o critério *MAC* (Modal Assurance Criterion), KOSMATKA e RICLES (1999). Este critério leva em consideração os autovetores teóricos e os autovetores experimentais,

$$MAC = \frac{\left| \sum_{l=1}^p y_{l,i}^e y_{l,j}^a \right|^2}{\left(\sum_{l=1}^p y_{l,i}^e y_{l,i}^e \right) \left(\sum_{l=1}^p y_{l,j}^a y_{l,j}^a \right)} \quad (6.7)$$

onde $y_{l,i}^e$ é a amplitude modal no ponto l do i ésimo modo experimental; $y_{l,j}^a$ é a amplitude modal na posição l do j ésimo modo calculado; e p é o comprimento do vetor modal. No critério *MAC*, aqueles elementos com um valor próximo de 1 indicam que existe uma boa correlação entre os dois modos comparados. Se for próximo de 0, então não existe qualquer correlação entre os modos comparados.

CAPÍTULO 7

7. ANÁLISE DO MÉTODO – SIMULAÇÃO TEÓRICA

7.1 – Introdução

Para analisar o funcionamento e a robustez do método de estimação de rigidez dos mancais, em uma primeira fase, procederam-se as simulações teóricas considerando o rotor com dois e três mancais, porém sem rotação. O modelo utilizado para esta análise teórica foi desenvolvido considerando um rotor com características e dimensões iguais às do rotor experimental apresentado no capítulo 6.

Para realizar a análise, as frequências naturais de referência consideradas para o sistema foram obtidas atribuindo-se um valor de rigidez para cada mancal no modelo matemático do sistema. Uma vez conhecidas as frequências naturais e os valores de rigidez dos mancais correspondentes a estas frequências, foi possível avaliar a robustez do método para diversas condições iniciais de rigidezes.

Neste capítulo também se determinou, aproximadamente, a rigidez do eixo do rotor com 2 e 3 mancais para se ter uma idéia da relação entre a rigidez dos mancais e a rigidez do eixo, e com isso, conhecer aproximadamente as regiões onde as variações das frequências naturais do rotor são dependentes das características do eixo ou dos mancais.

7.2 – Análise do rotor com dois mancais

7.2.1 – Modelagem matemática

O sistema foi discretizado em 14 elementos finitos distribuídos em 11 nós, com dois graus de liberdade por nó, sendo um de translação e outro de rotação, conforme mostra a Figura 7.1. Observou-se que com uma discretização mais refinada, isto é, com um número maior de elementos finitos, não se obtêm melhorias significativas nos resultados que compensem o custo computacional.

A precisão do modelo em representar dinamicamente o sistema é fundamental para que o ajuste ocorra corretamente. Embora a quantidade de elementos não aumente a qualidade dos

resultados significativamente, a escolha da localização dos nós do modelo é importante para se estabelecer a conectividade entre os elementos de eixo com os elementos de disco rígido e de rigidez, bem como para incluir os efeitos das mudanças na geometria do eixo. O modelo final utilizado contém nós somente nas mudanças de seção transversal do eixo e nos pontos correspondentes aos centros de massa dos discos e dos mancais sobre o eixo. A Tabela 7.1 resume os dados do rotor de dois mancais mostrado na Figura 1.

Tabela 7.1 – Discretização do rotor com dois mancais

Elemento	Descrição	Localização	Dimensões [mm]
1	Elemento de eixo	Nó 1 a 2	$\varnothing = 10,00$; $L = 101,00$
2	Elemento de eixo	Nó 2 a 3	$\varnothing = 10,00$; $L = 8,00$
3	Elemento de eixo	Nó 3 a 4	$\varnothing = 14,00$; $L = 119,84$
4	Elemento de eixo	Nó 4 a 5	$\varnothing = 14,00$; $L = 3,46$
5	Elemento de eixo	Nó 5 a 6	$\varnothing = 15,00$; $L = 118,70$
6	Elemento de eixo	Nó 6 a 7	$\varnothing = 15,00$; $L = 124,20$
7	Elemento de eixo	Nó 7 a 8	$\varnothing = 14,00$; $L = 5,27$
8	Elemento de eixo	Nó 8 a 9	$\varnothing = 14,00$; $L = 115,60$
9	Elemento de eixo	Nó 9 a 10	$\varnothing = 10,00$; $L = 7,50$
10	Elemento de eixo	Nó 10 a 11	$\varnothing = 10,00$; $L = 1,20$
11	elemento de rigidez $K1$	Nó 2	Rigidez $K1$ variável
12	elemento de disco	Nó 4	$\varnothing = 100,00$; $esp. = 5,00$
13	elemento de disco	Nó 8	$\varnothing = 150,00$; $esp. = 10,00$
14	elemento de rigidez $K2$	Nó 10	Rigidez $K2$ variável

O material considerado foi o aço com módulo de elasticidade de 200 GPa e densidade de 7850 kg/m³.

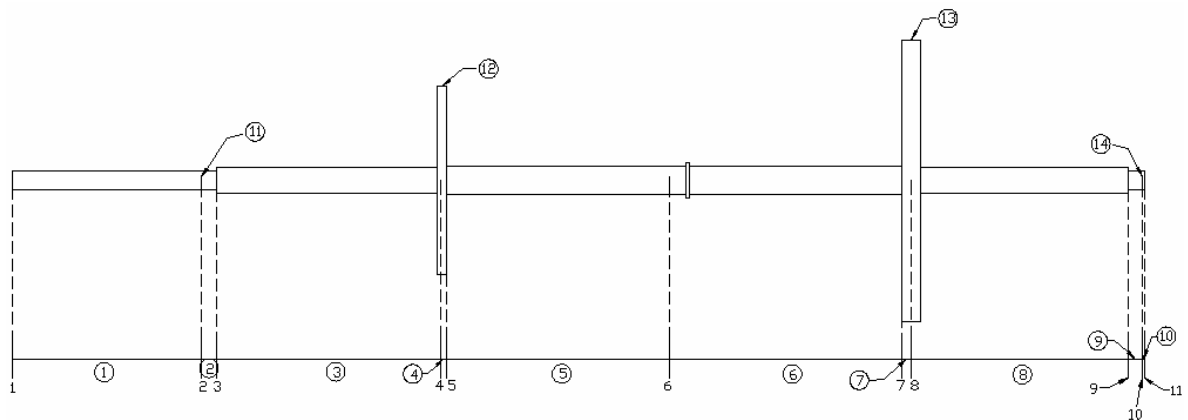


Figura 7.1 – Discretização do sistema com 2 mancais

7.2.2 – Rigidez equivalente do eixo

O método de ajuste de modelos por análise de sensibilidade implementado é aplicado somente para variações dos valores de rigidez dos mancais e não do eixo. Entretanto, é importante determinar uma rigidez de referência do eixo para compará-la, em ordem grandeza, com as rigidezes dos mancais.

A metodologia adotada para se obter a rigidez equivalente do eixo foi a de se aplicar uma força arbitrária nos pontos centrais do eixo e assim determinar as deflexões correspondentes a estes pontos. Para isso, adotou-se uma rigidez elevadíssima para os mancais (ordem de 10^{10} N/m) para eliminar a influência de sua flexibilidade. A partir da aplicação individual da força em cada ponto e utilizando a lei de Hook, estima-se uma rigidez equivalente de referência do eixo através de uma média simples utilizando a equação,

$$K_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{F_i}{x_i}}{n} \quad (7.1)$$

onde, F = Força aplicada;

x = Deflexão no ponto de aplicação da força;

n = número de pontos considerados;

K_{eq} = Rigidez equivalente do eixo.

No caso particular do rotor com dois mancais, aplicando-se uma força de 1000 N nos pontos 4, 6 e 8 (Figura 7.1) separadamente e medindo suas respectivas deflexões, obtêm-se, pela equação (7.1), um $K_{eq} = 2,58 \times 10^5$ N/m. Portanto, considera-se que o rotor é mancal dependente quando as rigidezes dos mancais forem menores que este valor, e que o rotor é eixo dependente quando as rigidezes dos mancais forem maiores.

7.2.3 – Frequências naturais de referência

Para proceder às simulações, determinou-se, em princípio, as duas primeiras frequências naturais do rotor utilizando-se o modelo matemático desenvolvido, atribuindo-se diversos valores de rigidez para os mancais, conforme mostra a Tabela 7.2. Essas frequências serão as frequências de referência para analisar o funcionamento e a robustez do método de ajuste. Essa análise é feita adotando-se valores iniciais de rigidez arbitrários (diferentes) para que o método processe o ajuste com base nessas frequências de referência.

É importante analisar o comportamento do método quando aplicado em condições extremas, isto é, quando se deseja ajustar valores de rigidez de mancais muito baixos ou valores muito elevados. O estabelecimento dos extremos deu-se com base nas frequências naturais do sistema. O extremo para análise de mancais com altas rigidezes foi estabelecido considerando a condição em que grandes variações nas rigidezes não são mais capazes de produzir variações significativas nas frequências naturais. Neste caso o sistema é considerado eixo dependente e praticamente não há sensibilidade dos autovalores com a variação das rigidezes, tornando o método impraticável. A Tabela 7.2 ilustra esta condição, onde pode-se observar que para os valores de rigidez acima de 1×10^8 N/m praticamente não ocorrem variações nas frequências naturais do sistema.

Esta análise está limitada ao ajuste de rigidezes de mancais na faixa entre 1×10^2 N/m a 1×10^8 N/m, e para isso foi gerada a Tabela 7.2 com as combinações de rigidezes para produzir as frequências naturais usadas como referências para o método de ajuste. As simulações foram realizadas considerando quatro situações: 1) tomando como ponto de partida para o método as frequências naturais de referencia correspondentes aos mancais com rigidez de 1×10^2 N/m, para verificar o comportamento do método quando o sistema é mancal dependente; 2) tomando como ponto de partida as frequências naturais de referência correspondentes aos mancais com rigidez de 1×10^5 N/m, isso para analisar o método quando os mancais possuem rigidezes dentro da zona

de transição entre sistema mancal dependente e eixo dependente; 3) tomando as frequências de referência correspondentes aos mancais com rigidezes de 1×10^8 N/m, para verificar a robustez do método mesmo na zona de sistema eixo dependente; 4) finalmente, adotando as frequências de referência correspondentes às rigidezes de 1×10^5 N/m e 1×10^3 N/m, para analisar o método na identificação de sistemas com mancais com diferentes rigidezes.

Tabela 7.2 – Frequências naturais x rigidez dos mancais

Rigidez K1 [N/m]	Rigidez K2 [N/m]	1ª Frequência Natural [Hz]	2ª Frequência Natural [Hz]
1×10^2	1×10^2	1,408	2,827
1×10^3	1×10^3	4,442	8,936
1×10^4	1×10^4	13,738	28,118
1×10^5	1×10^5	36,069	84,517
1×10^6	1×10^6	55,012	172,618
1×10^7	1×10^7	58,791	196,907
1×10^8	1×10^8	59,206	199,536
1×10^9	1×10^9	59,248	199,800
1×10^5	1×10^3	4,921	71,888

7.2.4 – Resultados das simulações

As Tabelas 7.3 a 7.6 apresentam os resultados da verificação da robustez do método de estimação de rigidezes de mancais de rotores com dois mancais, isso para diferentes condições de dependência da relação de rigidez eixo/mancais. Da Tabela 7.3, conclui-se que o método é bastante eficaz para estimar os valores de rigidez dos mancais quando o rotor possui mancais flexíveis, na zona onde a variação das frequências críticas é totalmente dependente das características dos mancais. Observa-se que o ajuste ocorre mesmo quando se adota rigidezes iniciais bastante elevadas (ordem acima de 10^5 N/m) como dados de partida para o processo de ajuste, porém o número de iterações para a convergência da solução aumenta ligeiramente. Particularmente, no caso 4, correspondente às rigidezes iniciais de 1×10^6 N/m, houve a necessidade de um número de iterações muito maior de iterações que os demais casos, inclusive com a utilização de passos de convergência (C2), fato este ainda inexplicável.

Tabela 7.3 – Resultados da estimação de rigidez baixa – mancal dependente (1×10^2 N/m)

Caso	Rigidez inicial [N/m]		Rigidez ajustada [N/m]		Iterações <i>C1</i>	Passos <i>C2</i>
	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K1</i>	<i>K2</i>		
1	$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^3$	$9,9980 \times 10^1$	$1,0004 \times 10^2$	3	1
2	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$9,9979 \times 10^1$	$1,0004 \times 10^2$	6	1
3	$1,00 \times 10^5$	$1,00 \times 10^5$	$9,9979 \times 10^1$	$1,0004 \times 10^2$	8	1
4	$1,00 \times 10^6$	$1,00 \times 10^6$	$9,9979 \times 10^1$	$1,0004 \times 10^2$	497	128
5	$1,00 \times 10^7$	$1,00 \times 10^7$	$9,9981 \times 10^1$	$1,0004 \times 10^2$	17	1
6	$1,00 \times 10^8$	$1,00 \times 10^8$	$1,0739 \times 10^2$	$1,0004 \times 10^2$	20	1

A Tabela 7.4 demonstra que quando o rotor possui os mancais com rigidezes próximas à zona de transição entre mancal dependente e eixo dependente, o método ainda é bastante robusto para convergir para a solução. Este resultado também mostra que a convergência irá ocorrer com certeza se adotarmos valores de rigidez iniciais bem baixos. Observa-se que para valores iniciais acima de 5×10^6 N/m, não é mais possível obter a solução, mesmo utilizando o artifício de passo de convergência.

Tabela 7.4 – Resultados da estimação de rigidez na zona de transição (1×10^5 N/m)

Caso	Rigidez inicial [N/m]		Rigidez ajustada [N/m]		Iterações <i>C1</i>	Passos <i>C2</i>
	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K1</i>	<i>K2</i>		
1	$1,00 \times 10^2$	$1,00 \times 10^2$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9993 \times 10^4$	5	1
2	$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^3$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9993 \times 10^4$	5	1
3	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9993 \times 10^4$	5	1
4	$1,00 \times 10^6$	$1,00 \times 10^6$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9993 \times 10^4$	42	8
5	$5,00 \times 10^6$	$5,00 \times 10^6$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9993 \times 10^4$	277	64
6	$5,50 \times 10^6$	$5,50 \times 10^6$	Não converge mesmo com a utilização de <i>C2</i>			
7	$1,00 \times 10^7$	$1,00 \times 10^7$	Não converge mesmo com a utilização de <i>C2</i>			
8	$1,00 \times 10^8$	$1,00 \times 10^8$	Não converge mesmo com a utilização de <i>C2</i>			

Analisando-se os resultados da Tabela 7.5, verifica-se que o método pode ainda convergir para a solução mesmo que o rotor tenha mancais bem rígidos, já dentro da zona de rotor eixo dependente. Entretanto, neste caso, para que a convergência ocorra com segurança recomenda-se

adotar valores iniciais de rigidez próximos aos valores a serem estimados. Verifica-se, na tabela, que a convergência para a solução ocorre somente para valores iniciais acima de $1,5 \times 10^5$ N/m, aproximadamente.

Tabela 7.5 – Resultados da estimação de rigidez elevada – eixo dependente (1×10^8 N/m)

Caso	Rigidez inicial [N/m]		Rigidez ajustada [N/m]		Iterações <i>C1</i>	Passos <i>C2</i>
	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K1</i>	<i>K2</i>		
1	1,00x10 ⁴	1,00x10 ⁴	Não converge mesmo com a utilização de <i>C2</i>			
2	1,00x10 ⁵	1,00x10 ⁵	Não converge mesmo com a utilização de <i>C2</i>			
3	1,50x10 ⁵	1,50x10 ⁵	1,0508x10 ⁸	9,7068x10 ⁷	13	1
4	2,00x10 ⁵	2,00x10 ⁵	1,0508x10 ⁸	9,7068x10 ⁷	13	1
5	1,00x10 ⁶	1,00x10 ⁶	1,0508x10 ⁸	9,7068x10 ⁷	11	1
6	1,00x10 ⁷	1,00x10 ⁷	1,0508x10 ⁸	9,7068x10 ⁷	8	1

A Tabela 7.6 apresenta os resultados da análise de convergência quando o rotor possui mancais com rigidezes bem distintas (uma cem vezes maior que a outra). Observa-se que o método converge normalmente. Também, neste caso, recomenda-se adotar rigidezes iniciais baixas para assegurar a convergência.

Tabela 7.6 – Resultados da estimação de rigidezes distintas (1×10^5 N/m e 1×10^3 N/m)

Caso	Rigidez inicial [N/m]		Rigidez ajustada [N/m]		Iterações <i>C1</i>	Passos <i>C2</i>
	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K1</i>	<i>K2</i>		
1	$1,00 \times 10^2$	$1,00 \times 10^2$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9996 \times 10^2$	5	1
2	$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^3$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9996 \times 10^2$	5	1
3	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9996 \times 10^2$	5	1
4	$1,00 \times 10^5$	$1,00 \times 10^5$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9996 \times 10^2$	6	1
5	$1,00 \times 10^6$	$1,00 \times 10^6$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9996 \times 10^2$	82	16

De uma forma geral, as convergências ocorreram com um número reduzido de iterações. Também, os erros relativos na estimação das rigidezes são muito pequenos, sendo ainda inferior a 3% no caso de estimação de rigidezes elevadas, (Tabela 7.5). Nos demais casos os erros foram praticamente nulos. Vale destacar que para se obter os resultados com pequenos erros, a tolerância estabelecida para as frequências naturais ajustadas em relação às frequências naturais

de referência foi de 0,01 Hz. O método também foi testado para tolerâncias de 0,1 e 1,0 Hz, resultando em uma sensível diminuição do número de iterações, porém com uma significativa perda de precisão dos resultados.

7.3 – Análise do rotor com três mancais

7.3.1 – Modelagem Matemática

O modelo do sistema rotor com três mancais possui características semelhantes ao sistema rotor com dois mancais, sendo que a diferença, neste caso, é que o rotor é modelado com um mancal adicional conectado no ponto nodal 6 do modelo. Portanto, a Tabela 7.1 também pode ser utilizada, neste caso, mas considerando-se as modificações apresentadas na Tabela 7.7.

Tabela 7.7 – Dados adicionais da discretização do rotor de três mancais

Elemento	Descrição	Localização	Dimensões [mm]
11	elemento de rigidez $K1$	Nó 2	Rigidez $K1$ variável
12	elemento de disco	Nó 4	$\varnothing = 100,00$; $esp. = 5,00$
13	elemento de rigidez $K2$	Nó 6	Rigidez $K2$ variável
14	elemento de disco	Nó 8	$\varnothing = 150,00$; $esp. = 10,00$
15	elemento de rigidez $K3$	Nó 10	Rigidez $K3$ variável

7.3.2 – Rigidez equivalente do eixo

Utilizando-se, também, a metodologia utilizada na seção 7.2.2 para este caso de rotor com três mancais, aplicando-se uma força de 1000 N nos pontos nodais 4 e 8 separadamente, e medindo suas respectivas deflexões, obtêm-se, através da equação (7.1), o valor de $Keq = 1,81 \times 10^5$ N/m. Portanto, este valor pode ser considerado para delimitar as zonas de sistema mancal dependente e sistema eixo dependente.

7.3.3 – Frequências naturais de referência

A Tabela 7.8 apresenta o conjunto das frequências naturais de referência para diversos valores de rigidez dos mancais. Também, neste caso, verifica-se que ocorrem apenas pequenas variações nas frequências naturais para grandes variações nos valores de rigidez dos mancais acima de 1×10^8 N/m. Para a análise do comportamento do método quando a sua robustez adotou-se o mesmo procedimento utilizado para o caso de rotor com dois mancais.

Tabela 7.8 – Frequências naturais x rigidez dos mancais

Rigidez $K1$ [N/m]	Rigidez $K2$ [N/m]	Rigidez $K3$ [N/m]	1ª Frequência Natural [Hz]	2ª Frequência Natural [Hz]	3ª Frequência Natural [Hz]
$1,00 \times 10^2$	$1,00 \times 10^2$	$1,00 \times 10^2$	1,690	2,885	163,004
$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^3$	5,339	9,119	163,353
$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	16,710	28,720	166,786
$1,00 \times 10^5$	$1,00 \times 10^5$	$1,00 \times 10^5$	48,804	87,196	196,559
$1,00 \times 10^6$	$1,00 \times 10^6$	$1,00 \times 10^6$	113,964	199,407	344,889
$1,00 \times 10^7$	$1,00 \times 10^7$	$1,00 \times 10^7$	156,820	298,573	485,295
$1,00 \times 10^8$	$1,00 \times 10^8$	$1,00 \times 10^8$	162,765	324,075	515,812
$1,00 \times 10^9$	$1,00 \times 10^9$	$1,00 \times 10^9$	163,367	326,831	519,143
$1,00 \times 10^{10}$	$1,00 \times 10^{10}$	$1,00 \times 10^{10}$	163,427	327,108	519,477
$1,00 \times 10^5$	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^3$	9,156	72,628	180,724
$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^5$	12,659	49,912	179,214

7.3.4 – Resultados das simulações

A Tabela 7.9 mostra o comportamento do método para estimar os valores de rigidez de mancais bem flexíveis (na ordem de 1×10^2 N/m), dentro da zona de sistema mancal dependente. Observa-se que o método converge para a solução, porém, neste caso, não se deve adotar valores de rigidez iniciais extremamente maiores que os valores a serem estimados (acima de 1000 vezes maior). Na simulação em questão, o método convergiu para uma solução distinta quando tomou-se valores de rigidez iniciais para os mancais maiores que 1×10^5 N/m.

Tabela 7.9 – Resultado da estimação de rigidez baixa – mancal dependente (1×10^2 N/m)

Caso	Rigidez inicial [N/m]			Rigidez ajustada [N/m]			Iterações <i>C1</i>	Passos <i>C2</i>
	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K3</i>	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K3</i>		
1	$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^3$	$9,9558 \times 10^1$	$9,3357 \times 10^1$	$1,0316 \times 10^2$	4	1
2	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$9,9558 \times 10^1$	$9,3355 \times 10^1$	$1,0316 \times 10^2$	6	1
3	$1,00 \times 10^5$	$1,00 \times 10^5$	$1,00 \times 10^5$	$9,9559 \times 10^1$	$9,3328 \times 10^1$	$1,0317 \times 10^2$	8	1
4	$1,00 \times 10^6$	$1,00 \times 10^6$	$1,00 \times 10^6$	Converge para outra solução mesmo utilizando C2				
5	$1,00 \times 10^7$	$1,00 \times 10^7$	$1,00 \times 10^7$	Converge para outra solução mesmo utilizando C2				

A análise do método para estimar rigidezes de mancais de rotores dentro da zona de transição pode ser feita observando-se os resultados da tabela 7.10. Verifica-se que ocorrem as convergências, porém, neste caso, também deve-se tomar o cuidado de adotar rigidezes iniciais para os mancais inferiores às rigidezes a serem estimadas. Rigidezes iniciais maiores que 1×10^6 N/m conduzem a convergência para uma solução distinta da esperada ou mesmo não é possível obter a convergência.

Tabela 7.10 – Resultado da estimação de rigidez na zona de transição (1×10^5 N/m)

Caso	Rigidez inicial [N/m]			Rigidez ajustada [N/m]			Iterações <i>C1</i>	Passos <i>C2</i>
	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K3</i>	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K3</i>		
1	$1,00 \times 10^2$	$1,00 \times 10^2$	$1,00 \times 10^2$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9994 \times 10^4$	$1,0000 \times 10^5$	6	1
2	$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^3$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9994 \times 10^4$	$1,0000 \times 10^5$	6	1
3	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9994 \times 10^4$	$1,0000 \times 10^5$	5	1
5	$1,00 \times 10^6$	$1,00 \times 10^6$	$1,00 \times 10^6$	$1,0000 \times 10^5$	$9,9994 \times 10^4$	$1,0000 \times 10^5$	22	1
6	$1,00 \times 10^7$	$1,00 \times 10^7$	$1,00 \times 10^7$	Converge para outra solução mesmo utilizando C2				
7	$1,00 \times 10^8$	$1,00 \times 10^8$	$1,00 \times 10^8$	Não converge mesmo com a utilização de C2				

As Tabelas 7.11 e 7.12 mostram os resultados quando o método é aplicado para analisar rotores cujos mancais têm rigidezes muito distintas entre si. Em ambos casos ocorreram as convergências, demonstrando a aplicabilidade do método para estes casos. Também, nestes casos, para evitar problemas de convergência, recomenda-se tomar sempre valores iniciais de rigidezes pequenos.

A análise para verificar o comportamento do método para estimar rigidezes na zona de eixo dependente, muito acima da zona de transição, foi realizada. Entretanto, não foi possível

obter qualquer convergência para estimar rigidezes no valor de 1×10^8 N/m, razão pela qual nenhum resultado é apresentado. Isso demonstra que o método não é eficaz para estimar rigidezes de mancais de rotores (com três mancais) na zona de eixo dependente, mesmo adotando valores iniciais de rigidez próximos aos valores a serem estimados.

Tabela 7.11 – Resultado da estimação de rigidezes distintas (1×10^5 , 1×10^4 e 1×10^3 N/m)

Caso	Rigidez inicial [N/m]			Rigidez ajustada [N/m]			Iterações	Passos
	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K3</i>	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K3</i>		
1	$1,00 \times 10^2$	$1,00 \times 10^2$	$1,00 \times 10^2$	$9,9997 \times 10^4$	$1,0013 \times 10^4$	$9,9727 \times 10^2$	14	1
2	$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^3$	$9,9997 \times 10^4$	$1,0013 \times 10^4$	$9,9727 \times 10^2$	11	1
3	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$9,9997 \times 10^4$	$1,0013 \times 10^4$	$9,9727 \times 10^2$	10	1
4	$1,00 \times 10^5$	$1,00 \times 10^5$	$1,00 \times 10^5$	$9,9997 \times 10^4$	$1,0013 \times 10^4$	$9,9727 \times 10^2$	8	1
5	$1,00 \times 10^6$	$1,00 \times 10^6$	$1,00 \times 10^6$	$9,9997 \times 10^4$	$1,0013 \times 10^4$	$9,9727 \times 10^2$	13	1

Tabela 7.12 – Resultado da estimação de rigidezes distintas (1×10^3 , 1×10^4 e 1×10^5 N/m)

Caso	Rigidez inicial [N/m]			Rigidez ajustada [N/m]			Iterações	Passos
	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K3</i>	<i>K1</i>	<i>K2</i>	<i>K3</i>		
1	$1,00 \times 10^2$	$1,00 \times 10^2$	$1,00 \times 10^2$	$9,9926 \times 10^2$	$1,0003 \times 10^4$	$9,9998 \times 10^4$	8	1
2	$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^3$	$1,00 \times 10^3$	$9,9926 \times 10^2$	$1,0003 \times 10^4$	$9,9998 \times 10^4$	8	1
3	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$1,00 \times 10^4$	$9,9926 \times 10^2$	$1,0003 \times 10^4$	$9,9998 \times 10^4$	7	1
4	$1,00 \times 10^5$	$1,00 \times 10^5$	$1,00 \times 10^5$	$9,9926 \times 10^2$	$1,0003 \times 10^4$	$9,9998 \times 10^4$	6	1
5	$1,00 \times 10^6$	$1,00 \times 10^6$	$1,00 \times 10^6$	Converge para outra solução mesmo utilizando C2				

Na análise de rotores com três mancais verificou-se que a aplicação do método com situações muito adversas de rigidezes iniciais ou mesmo quando se deseja estimar rigidezes muito elevadas pode ocorrer convergência para uma solução distinta da esperada. Isso comprova que para um conjunto de frequências naturais de referência (ou frequências experimentais no caso real) podem existir mais de um conjunto de rigidezes ajustadas que é solução do problema. Para minimizar esse problema, uma solução seria fornecer ao método um dado inicial adicional, como por exemplo, informação de um modo natural de referência ou experimental (autovetor) do rotor. De maneira geral, nestas condições extremas, a experiência do usuário poderá ser muito

importante para que os valores de rigidez iniciais possam ser tomados próximos aos valores de rigidez a serem estimados, minimizando o risco de uma solução indesejada.

No caso do rotor com três mancais os erros relativos na estimação das rigidezes também foram muito pequenos quando se analisa as Tabelas 7.10 a 7.12, e são inferiores a 7% no caso de estimação para sistema mancal dependente, Tabela 7.9.

Em geral, o recurso da divisão do problema de ajuste em passos de convergência (C2) nas condições muito adversas de dados iniciais, não foi tão eficaz como se esperava. Além disso, nota-se que tanto para o rotor com dois mancais como para o rotor com três mancais as convergências normalmente ocorreram com poucas iterações, menores que o esperado.

CAPÍTULO 8

8. ANÁLISE DO MÉTODO COM DADOS EXPERIMENTAIS

8.1 – Introdução

As características dinâmicas próprias dos rotores podem mudar consideravelmente quando os mesmos estão em operação comparado com as características com os rotores parados. Quando os rotores estão em movimento aparece o efeito giroscópio que é função das inércias dos discos e da velocidade de rotação, e age de forma a aumentar as frequências críticas em precessão direta e diminuir as frequências críticas em precessão retrógrada. No caso de rotores com mancais deslizantes hidrodinâmicos, as características modais também podem variar devido às mudanças que ocorrem na rigidez do filme de óleo lubrificante, que varia em função da velocidade de rotação do eixo. Portanto, para a aplicação do método de estimação de rigidez de mancais é importante obter os dados experimentais necessários com o rotor em sua condição real de operação.

Para verificar a funcionalidade do método quando aplicado em um rotor real e analisar a importância da introdução do efeito giroscópio no modelo utilizado no processo de estimação das rigidezes dos mancais, foram obtidos dados experimentais de um rotor de laboratório com o rotor parado e em diversas velocidades de rotação. Com o rotor em movimento foram analisados os erros correspondentes à estimação das rigidezes quando não se considera o efeito giroscópio no modelo de ajuste a fim de comprovar a resposta do método de ajuste nesta condição.

8.2 – Dados experimentais do rotor

Para obter os dados necessários para a aplicação do método de estimação das rigidezes dos mancais, procedeu-se a uma análise modal através de impactos sobre o rotor e obtiveram-se as funções de respostas em frequência (FRFs) com a excitação aplicada em várias posições do rotor. As FRFs foram obtidas com o rotor parado e com o rotor em rotação. Os dados com o rotor sem movimento foram realizados a fim de permitir verificar a precisão do ajuste empregando o critério MAC, uma vez que os modos de vibração experimentais foram extraídos para serem comparados com os modos teóricos do modelo ajustado com as rigidezes estimadas.

As FRFs com rotor em movimento foram levantadas para fornecer os dados que permitissem verificar a influência do efeito giroscópio na estimação das rigidezes dos mancais.

Os dados do rotor sem rotação foram obtidos de acordo com a metodologia experimental apresentada no capítulo 6, e com o motor desacoplado do rotor para facilitar as medições de vibrações, sobretudo quando o rotor encontrava-se apoiado nas lâminas mais finas.

A Figura 8.1 mostra uma FRF e o respectivo diagrama de fase do rotor com dois mancais obtidos quando utilizaram-se duas lâminas de 5 mm para produzir as rigidezes dos mancais, isso com o rotor parado. As FRFs e os diagramas de fase para os demais casos de lâminas não serão apresentados aqui, mas apresentaram a mesma clareza de informação. Nota-se perfeitamente os picos de amplitudes das frequências naturais, as quais são confirmadas pelo diagrama de fase (defasagem de 180°). A Figura 8.2 mostra a parte real e a parte imaginária dessa FRF. Utilizando a metodologia apresentada no capítulo 6, foram obtidos os modos naturais de vibração para todos os casos de conjunto de lâminas. Como ilustração, a Figura 8.3 mostra os dois primeiros modos de vibração experimentais relativos a FRF da Figura 8.1.

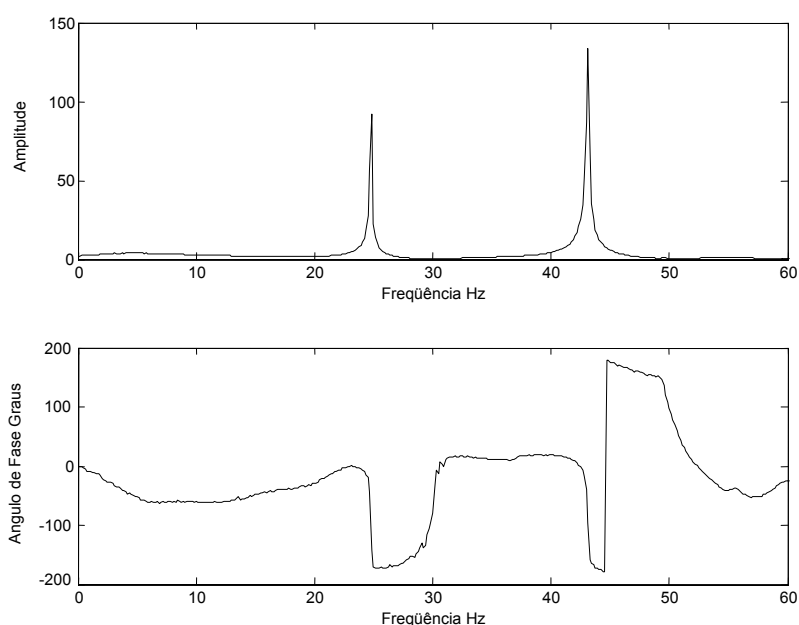


Figura 8.1 – FRF do rotor de dois mancais com lâminas de 5mm, parado

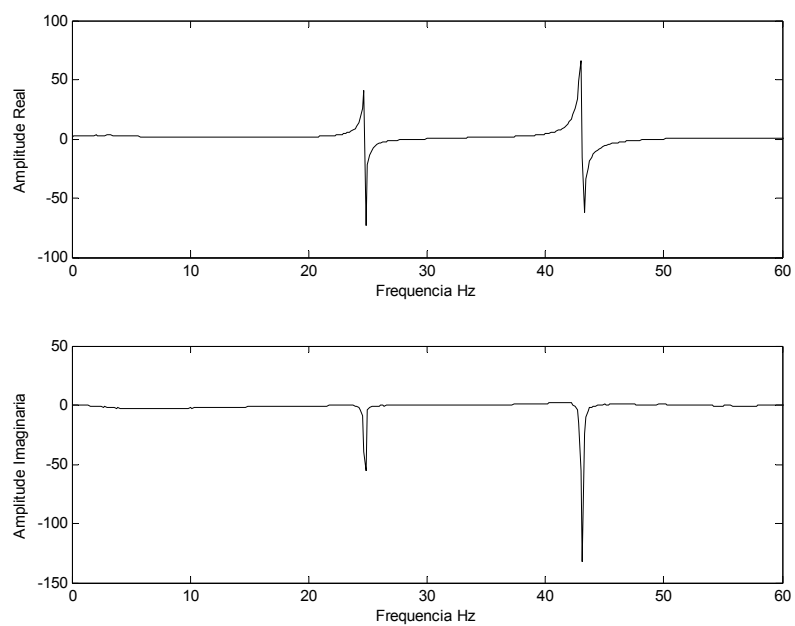


Figura 8.2 – Parte Real e Imaginária da FRF (Figura 8.1)

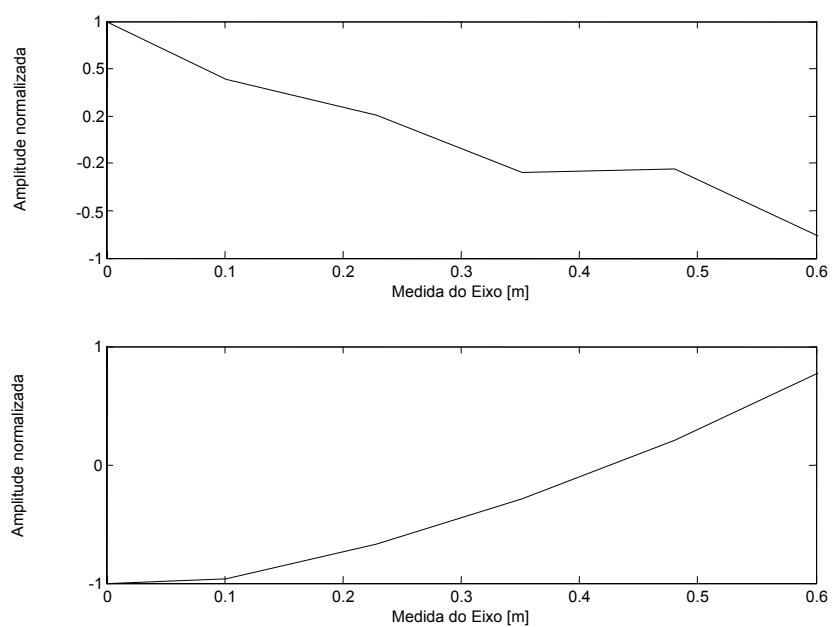


Figura 8.3 – Primeiro e segundo modos experimentais (Figura 8.1)

As FRFs, obtidas com o rotor de dois mancais utilizando diferentes conjuntos de lâminas representativas dos mancais (diferentes espessuras), forneceram as frequências naturais que estão indicadas na Tabela 8.1.

Tabela 8.1 – Frequências naturais experimentais do rotor com dois mancais, parado

Espessura das Lâminas [mm]		Frequências Naturais [Hz]	
K1	K2	F1	F2
1,7	1,7	4,922	8,516
3,0	3,0	14,258	24,805
5,0	5,0	24,844	43,125
7,9	7,9	40,000	79,688
9,5	9,5	45,625	97,500
7,9	3,0	15,703	67,600

Com o emprego do inversor de frequência, foi possível então obter as características modais do rotor em diferentes velocidades de rotação. Neste caso não foram utilizadas as lâminas de 1,7 e 3,0 mm, tendo em vista que os mancais ficavam muito flexíveis provocando grandes deslocamentos no acoplamento entre o rotor e o motor, comprometendo a precisão dos dados. Mesmo com o rotor girando foi perfeitamente possível obter as FRFs que indicasse as frequências naturais com bastante clareza. Com o rotor em movimento foram realizadas medições da resposta ao impacto com velocidades de rotação de 500, 1500 e 2500 rpm. A Figura 8.4 ilustra uma curva FRF e o respectivo diagrama de fase obtidos com o rotor a 500 rpm e um conjunto de lâminas de 7,9 mm, representativas dos mancais. As FRFs com o rotor em movimento permitiram identificar as duas primeiras frequências naturais para cada rotação, as quais estão apresentadas na Tabela 8.2. Observa-se que há um pequeno decréscimo nas frequências naturais à medida que se aumenta a rotação do rotor devido ao efeito giroscópico. Verifica-se, também, que a primeira frequência natural é pouco sensível ao efeito giroscópico.

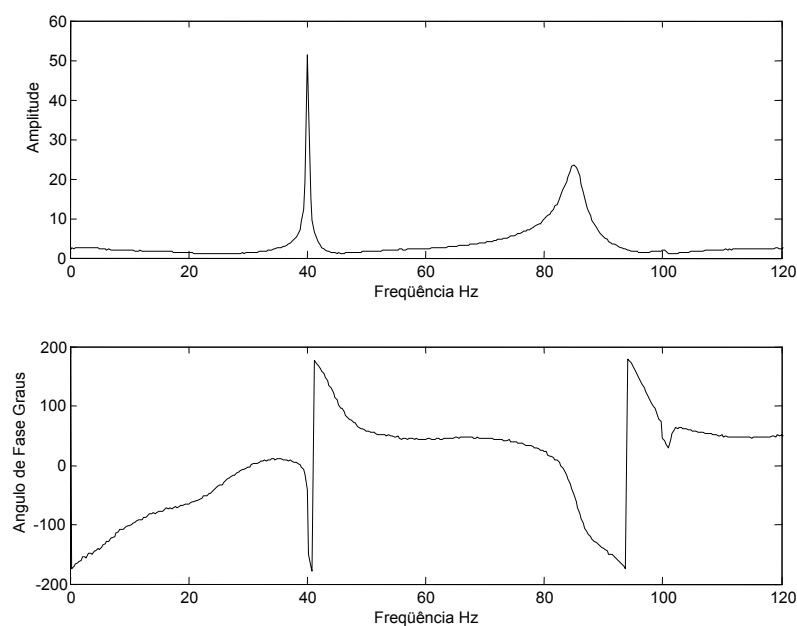


Figura 8.4 – FRF do rotor com dois mancais, a 500 rpm e lâminas de 7,9 mm

Tabela 8.2 – Frequências naturais experimentais do rotor com dois mancais, em movimento

Espessura das Lâminas [mm]	Rotação [rpm]	Frequências Naturais [Hz]	
		F1	F2
5,0	500	24,844	49,944
5,0	1500	24,844	48,392
5,0	2500	24,819	47,445
7,9	500	40,000	85,625
7,9	1500	39,841	83,585
7,9	2500	39,800	81,775
9,5	500	45,625	97,200
9,5	1500	45,415	96,071
9,5	2500	45,295	94,720

Uma análise modal experimental também foi realizada com o rotor montado sobre três mancais. Também, neste caso, foram obtidos dados com o rotor parado e com o rotor em movimento. Em ambas as condições, foram obtidas FRFs considerando o rotor apoiado sobre lâminas de 7,9 e 9,5 mm. A Figura 8.5 ilustra uma curva FRF típica desse caso e o seu respectivo diagrama de fase, com o rotor montado em três lâminas de 9,5 mm. Observam-se, também, as amplitudes das três primeiras frequências naturais do rotor bem destacadas. A Figura 8.6 mostra as curvas da parte real e da parte imaginária da FRF. Os três primeiros modos de vibração estão representados na Figura 8.7.

A partir das FRFs obtidas nesta análise modal experimental determinaram-se as frequências naturais necessárias para a entrada de dados para o método estimação das rigidezes dos mancais, tanto para o rotor parado quanto para o rotor em movimento. No caso particular do rotor parado os modos de vibração experimentais serão utilizados para comparação com os modos teóricos do modelo ajustado empregando o critério MAC já mencionado. A Tabela 8.3 indica as três primeiras frequências naturais do rotor com três mancais, e a Tabela 8.4 indicas as frequências naturais com o rotor em movimento.

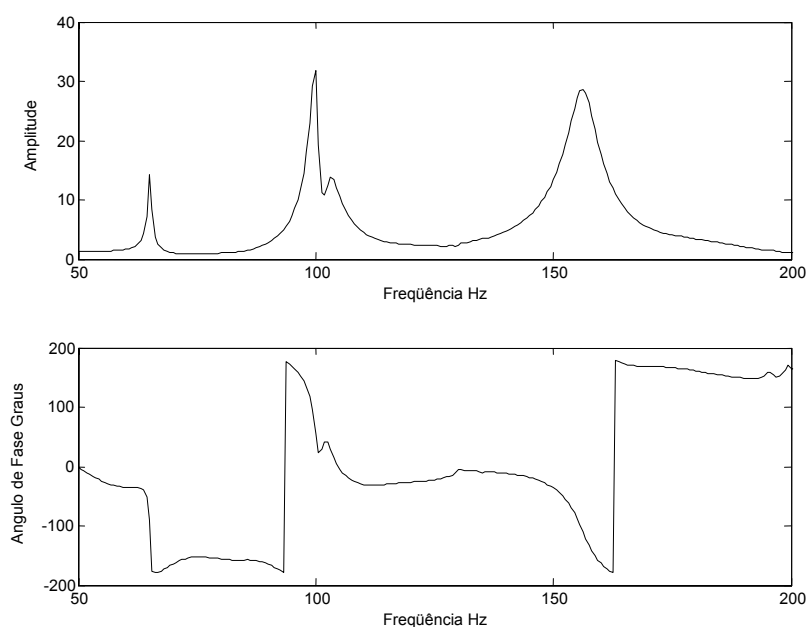


Figura 8.5 – FRF do rotor de três mancais com lâminas de 9,5 mm, parado

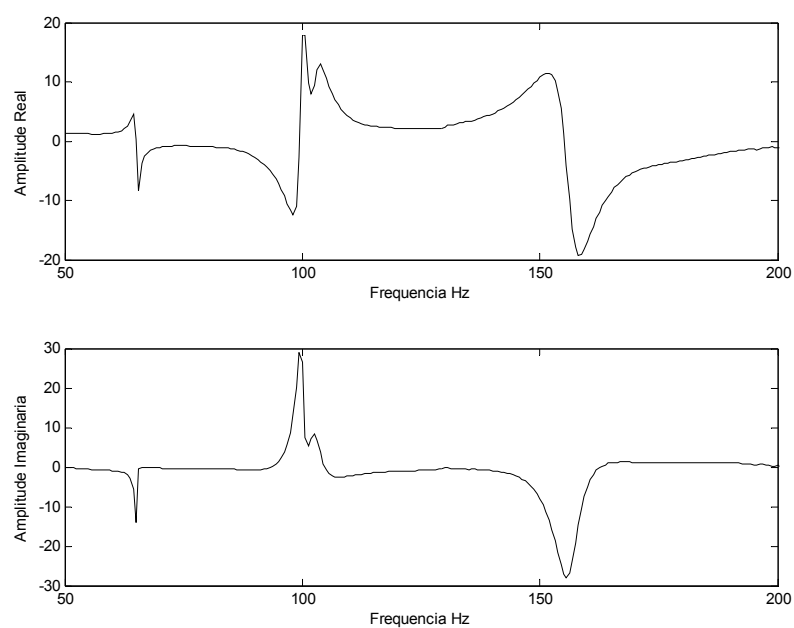


Figura 8.6 – Parte Real e Imaginária da FRF (Figura 8.5)

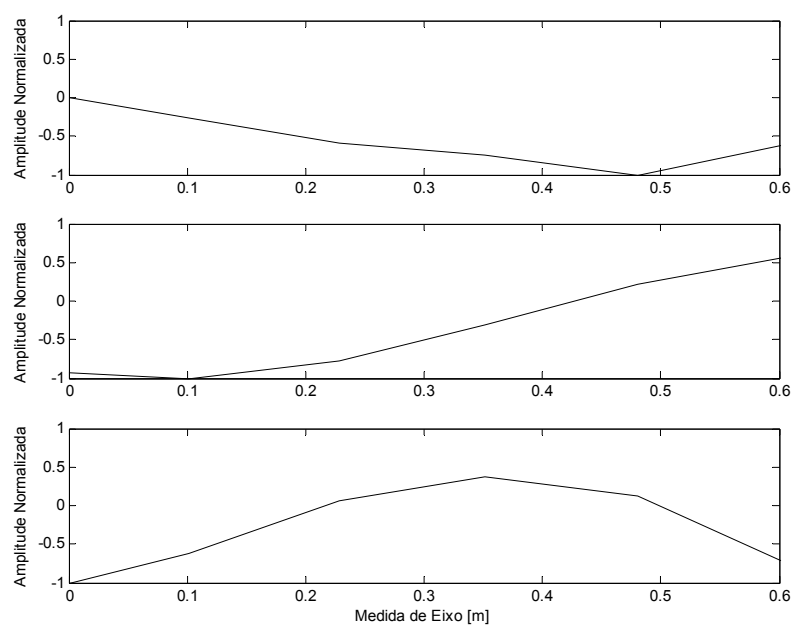


Figura 8.7 – Primeiro, segundo e terceiro modos experimentais (Figura 8.5)

Tabela 8.3 – Frequências naturais experimentais do rotor com três mancais, parado

Espessura Lâminas [mm]			Frequências Naturais [Hz]		
K1	K2	K3	F1	F2	F3
7,9	7,9	7,9	51,875	80,000	139,381
9,5	9,5	9,5	65,000	100,000	156,880

Tabela 8.4 – Frequências naturais experimentais do rotor com três mancais, em movimento

Espessura das Lâminas [mm]	Rotação [rpm]	Freq. Natural [Hz]		
		F1	F2	F3
K1, K2 e K3				
7,9	500	51,875	81,400	138,130
7,9	1500	51,875	79,825	132,472
7,9	2500	51,775	78,731	127,587
9,5	500	65,000	99,375	154,700
9,5	1500	64,915	98,975	149,305
9,5	2500	64,830	97,775	145,650

8.3 – Modelo matemático de ajuste dos mancais

Com os resultados experimentais já determinados, o passo seguinte é desenvolver o modelo matemático de ajuste. Neste modelo, os dados geométricos e características mecânicas do material do rotor estão naturalmente disponíveis. Entretanto, a rigidez dos mancais necessitam ser estimadas a partir de um ajuste desse modelo com base nos resultados experimentais (frequências naturais experimentais). O modelo matemático de ajuste, neste caso, é similar ao modelo apresentado no capítulo 7 quando se procederam as simulações teóricas para analisar o método de ajuste. A discretização básica do rotor em 11 pontos nodais é apresentada na Figura 8.8. O material utilizado na construção do rotor é o aço com densidade de 7850 kg/m^3 e módulo de elasticidade de 200 GPa. A Tabela 8.5 apresenta a localização dos elementos de eixo e dos elementos de disco e suas dimensões principais.

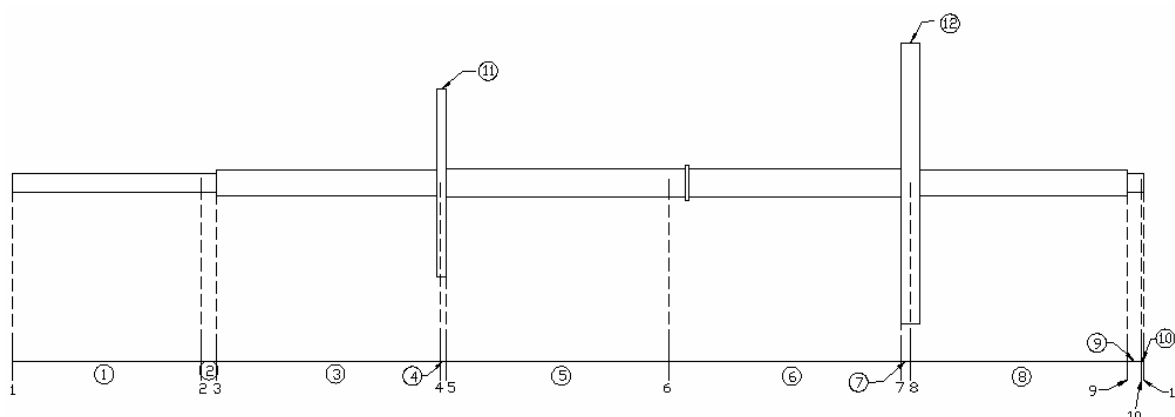


Figura 8.8 – Discretização básica do rotor em 11 nós

Tabela 8.5 – Elementos de eixo e de disco do rotor

Elemento	Descrição	Localização	Dimensões [mm]
1	elemento de eixo	Nó 1 a 2	$\varnothing = 10,00$; $L = 101,00$
2	elemento de eixo	Nó 2 a 3	$\varnothing = 10,00$; $L = 8,00$
3	elemento de eixo	Nó 3 a 4	$\varnothing = 14,00$; $L = 119,84$
4	elemento de eixo	Nó 4 a 5	$\varnothing = 14,00$; $L = 3,46$
5	elemento de eixo	Nó 5 a 6	$\varnothing = 15,00$; $L = 118,70$
6	elemento de eixo	Nó 6 a 7	$\varnothing = 15,00$; $L = 124,20$
7	elemento de eixo	Nó 7 a 8	$\varnothing = 14,00$; $L = 5,27$
8	elemento de eixo	Nó 8 a 9	$\varnothing = 14,00$; $L = 115,60$
9	elemento de eixo	Nó 9 a 10	$\varnothing = 10,00$; $L = 7,50$
10	elemento de eixo	Nó 10 a 11	$\varnothing = 10,00$; $L = 1,20$
11	elemento de disco	Nó 4	$\varnothing = 100,00$; esp. = 5,00
12	elemento de disco	Nó 8	$\varnothing = 150,00$; esp. = 10,00

Esse modelo básico com 11 nós (Figura 8.8) foi utilizado nos dois casos de rotor, isto é, rotor com dois e três mancais, bastando somente adicionar os elementos de rigidez (mancais) e os elementos de massa dos mancais em ambos casos. Como visto, foram empregadas lâminas representativas dos mancais com espessuras de 1,7; 3,0; 5,0 7,9 e 9,5 mm. Para melhorar a precisão do modelo em representar dinamicamente o rotor, uma porcentagem da massa das lâminas necessita ser considerada no ponto nodal onde a lâmina é conectada com o eixo. Para

estimar as massas das lâminas empregou-se a metodologia apresentada na seção 6.5. A segunda coluna da Tabela 8.6 mostra a massa estimada de cada lamina que efetivamente influencia na dinâmica do rotor. Essa massa foi obtida considerando a lâmina, separada do rotor, como um sistema de um grau de liberdade. A partir dessa consideração, determinou-se experimentalmente a rigidez e a primeira frequência natural da lâmina engastada na mesa inercial, e com esses dados, estimou-se, portanto, a massa. A terceira coluna da Tabela 8.6 apresenta a massa total da lâmina engastada calculada a partir de suas dimensões geométricas, e a quarta coluna mostra a porcentagem da massa total da lâmina que interfere que interfere na dinâmica do rotor.

Tabela 8.6 – Massas das lâminas representativas dos mancais

Espessura da lâmina [mm]	Massa da lâmina estimada dinamicamente [kg]	Massa total da lâmina calculada por dados geométricos [kg]	Diferença percentual [%]
1,7	0,027	0,055	49
3,0	0,048	0,104	46
5,0	0,075	0,174	43
7,9	0,115	0,276	42
9,5	0,149	0,330	45

Para garantir a precisão do modelo, além da inclusão de uma porcentagem das massas das lâminas, também foram incluídas as massas dos rolamentos e de seus suportes. Esses suportes são fixados às lâminas através de parafusos.

Para o modelo de rotor com dois mancais introduziu-se, adicionalmente aos elementos da Tabela 8.5, os elementos da Tabela 8.7. Os elementos 15 e 16 contêm a massa estimada da lâmina (Tabela 8.6) mais a massa do rolamento com seu suporte, que é de 0,150 Kg. Os elementos 13 e 14 correspondem às rigidezes dos mancais que serão estimadas através do ajuste do modelo. Da mesma forma, a Tabela 8.8 complementa a Tabela 8.5 com relação aos elementos do modelo do rotor com três mancais. Neste caso, em particular, a massa do rolamento com seu suporte do elemento 17 é de 0,200 Kg.

Tabela 8.7 – Elementos adicionais do rotor de dois mancais

Elemento	Localização	Descrição
13	Nó 2	Rigidez variável K1
14	Nó 10	Rigidez variável K2
15	Nó 2	Massa da lâmina e mancal
16	Nó 10	Massa da lâmina e mancal

Tabela 8.8 – Elementos adicionais do rotor de três mancais

Elemento	Localização	Descrição
13	Nó 2	Rigidez variável K1
14	Nó 6	Rigidez variável K2
15	Nó 10	Rigidez variável K3
16	Nó 2	Massa da lâmina e mancal
17	Nó 6	Massa da lâmina e mancal
18	Nó 10	Massa da lâmina e mancal

8.4 – Ajuste das rigidezes do rotor com dois mancais

Em uma primeira etapa da análise do método de identificação de rigidez de mancais com base em dados experimentais, avaliou-se o comportamento do método empregando o rotor com dois mancais sem movimento. Por outro lado, para a verificação da precisão do ajuste do modelo procedeu-se à correlação entre os modos naturais de vibração do modelo ajustado com os modos experimentais através do critério MAC. A Tabela 8.9 apresenta os resultados obtidos no ajuste do rotor para diversos valores de rigidez dos mancais (diferentes espessuras de lâminas). Desta tabela observa-se que as frequências naturais ajustadas são exatamente as mesmas que as frequências naturais experimentais (Tabela 8.1), indicado que o modelo é ajustado para se igualar as frequências naturais com uma precisão até a terceira casa decimal após a vírgula.

Pela tabela 8.9 pode-se também observar que há pequenas diferenças entre as rigidezes ajustadas dos dois mancais que utilizam lâminas de iguais espessuras. Isso provavelmente acontece devido às imperfeições dimensionais das lâminas, pequenas variações nas distâncias de fixação das lâminas na mesa inercial, lembrando que a rigidez das lâminas é inversamente

proporcional ao cubo do seu comprimento, o que pode facilmente produzir variações de rigidez consideráveis para pequenas diferenças na distância de fixação. Não se pode esquecer que o grau de precisão na discretização do modelo pode contribuir para essa variação nas rigidezes de mancais idênticos. Entretanto, as variações foram muito pequenas, podendo ser consideradas aceitáveis neste processo de estimação.

Tabela 8.9 – Resultado do ajuste do rotor com dois mancais sem rotação

Espessura Lâmina [mm]		Freq. Natural Ajustada [Hz]		Rigidez Ajustada [N/m]		MAC	
K1	K2	F1	F2	K1	K2	1	2
1,7	1,7	4,922	8,516	$1,42 \times 10^3$	$1,39 \times 10^3$	0,962	0,899
3,0	3,0	14,258	24,805	$1,27 \times 10^4$	$1,23 \times 10^4$	0,957	0,951
5,0	5,0	24,844	43,125	$3,92 \times 10^4$	$4,38 \times 10^4$	0,959	0,966
7,9	7,9	40,000	79,688	$1,52 \times 10^5$	$1,59 \times 10^5$	0,907	0,779
9,5	9,5	45,625	97,500	$2,43 \times 10^5$	$2,75 \times 10^5$	0,937	0,746
7,9	3,0	15,703	67,600	$1,37 \times 10^5$	$1,28 \times 10^4$	0,970	0,936

Pode-se verificar que os modelos ajustados para estimar os valores de rigidez dos mancais produziram modos naturais de vibração que possuem muito boa correlação com os modos naturais experimentais, isso comprovado pelos valores do número MAC, que em geral são bem próximos de 1,0. Isso comprova a qualidade satisfatória do modelo matemático para representar dinamicamente o rotor.

Pode-se dizer, portanto, que o método foi muito eficiente para estimar as rigidezes dos mancais com uma precisão bastante satisfatória. Mesmo quando o rotor possui mancais com diferentes valores de rigidez, o ajuste se processa naturalmente, como mostra o resultado da ultima linha da Tabela 8.9, onde temos lâminas de 7,9 e 3,0 mm, resultando em rigidezes bem distintas, sendo uma praticamente 10 vezes maior que a outra. Vale lembrar que esse fato já havia sido analisado nas simulações numéricas, capítulo 7, com semelhante conclusão.

Na Tabela 8.9 não foram apresentados os números de iterações para se conseguir a convergência do método e os valores de rigidez iniciais foram tomados na ordem de 1×10^4 N/m, pois, neste caso, o enfoque principal da análise foi verificar a eficiência da estimação das rigidezes em casos reais e não o desempenho do método para várias condições iniciais.

Com a precisão do modelo já comprovada pelo critério MAC, o próximo passo foi analisar a importância de se introduzir o efeito giroscópio no modelo de ajuste para estimar as rigidezes dos mancais dos rotores em sua condição real de operação. Neste rotor de laboratório, as variações nas frequências naturais em função da velocidade de rotação são atribuídas exclusivamente ao efeito giroscópio, uma vez que o rotor gira apoiados em rolamento.

A Tabela 8.10 apresenta os resultados do ajuste do modelo com e sem o efeito giroscópio, para diversas condições de rigidez dos mancais e com o rotor girando a 500, 1500 e 2500 rpm. Verifica-se que nas colunas referentes ao modelo com efeito giroscópio, a dispersão nos valores de rigidez, para cada caso de lâminas, é muito pequena em função da rotação. A máxima variação entre as rigidezes ajustadas para diferentes rotações não superou os 2,0%, a qual ocorreu na rigidez K1 do rotor com lâmina de 5,0 mm. Por outro lado, quando o efeito giroscópio é desconsiderado no modelo de ajuste, a dispersão nos valores de rigidez para diferentes rotações torna-se significativa, chegando a valores superiores a 15%.

Considerando que o ideal é estimar a rigidez dos mancais com o rotor em operação, então fica claramente evidenciada a importância de se introduzir o efeito giroscópio no modelo de ajuste, podendo, assim, realizar a medição experimental em qualquer velocidade de operação de trabalho. Vale destacar que os valores de rigidez dos mancais de deslizamento também podem variar ligeiramente em função da velocidade de rotação devido à variação na característica do filme de óleo lubrificante, entretanto, este não é o caso deste rotor de laboratório.

Tabela 8.10 – Influência do efeito giroscópio para o rotor de dois mancais

Lâminas [mm] K1, K2	Rotação [rpm]	Freq. Natural [Hz]		Com Efeito Giroscópio		Sem Efeito Giroscópio	
				Rigidez Ajustada [N/m]		Rigidez Ajustada [N/m]	
		F1	F2	K1	K2	K1	K2
5,0	500	24,844	49,944	$6,12 \times 10^4$	$3,92 \times 10^4$	$5,94 \times 10^4$	$3,93 \times 10^4$
5,0	1500	24,844	48,392	$6,00 \times 10^4$	$3,93 \times 10^4$	$5,47 \times 10^4$	$3,99 \times 10^4$
5,0	2500	24,819	47,445	$6,08 \times 10^4$	$3,92 \times 10^4$	$5,20 \times 10^4$	$4,02 \times 10^4$
7,9	500	40,000	85,625	$1,99 \times 10^5$	$1,48 \times 10^5$	$1,93 \times 10^5$	$1,49 \times 10^5$
7,9	1500	39,841	83,585	$1,97 \times 10^5$	$1,47 \times 10^5$	$1,79 \times 10^5$	$1,49 \times 10^5$
7,9	2500	39,800	81,775	$1,96 \times 10^5$	$1,47 \times 10^5$	$1,67 \times 10^5$	$1,51 \times 10^5$
9,5	500	45,625	97,200	$2,44 \times 10^5$	$2,77 \times 10^5$	$2,40 \times 10^5$	$2,76 \times 10^5$
9,5	1500	45,415	96,071	$2,46 \times 10^5$	$2,73 \times 10^5$	$2,33 \times 10^5$	$2,71 \times 10^5$
9,5	2500	45,295	94,720	$2,45 \times 10^5$	$2,74 \times 10^5$	$2,23 \times 10^5$	$2,72 \times 10^5$

8.5 – Ajuste das rigidezes do rotor com três mancais

Uma análise do método de ajuste com dados experimentais também foi realizada com o rotor com três mancais. A Tabela 8.11 apresenta os resultados com base nas frequências naturais experimentais com o rotor parado e com lâminas de 7,9 e 9,5 mm. Mesmo sendo o rotor apoiado em lâminas de mesma espessura, os valores de rigidez estimados apresentam pequenas diferenças, fato que já foi discutido na análise do rotor com dois mancais. Observa-se que a estimação das rigidezes, neste caso, também ocorreu com modelos que produziram modos de vibração bem correlatos com os modos experimentais, com valores MAC elevados.

Tabela 8.11 – Resultado do ajuste do rotor com três mancais sem rotação

Lâminas [mm]	Freq. Naturais [Hz]			Rigidez Ajustada [N/m]			MAC		
	F1	F2	F3	K1	K2	K3	1	2	3
7,9	51,875	80,000	139,381	$1,48 \times 10^5$	$1,30 \times 10^5$	$1,65 \times 10^5$	0,991	0,971	0,962
9,5	65,000	100,000	156,880	$2,40 \times 10^5$	$2,16 \times 10^5$	$3,33 \times 10^5$	0,942	0,812	0,617

Os resultados do ajuste do modelo considerando os dados experimentais com o rotor em movimento estão apresentados na Tabela 8.12. Neste caso de rotor com três mancais também é observada uma estabilidade nos valores das rigidezes ajustadas quando se inclui o efeito giroscópio na modelagem, nas três velocidades de rotação analisadas para cada espessura de lâminas. A máxima diferença entre as rigidezes ajustadas considerando o efeito giroscópio é de 4,5%, para as diferentes velocidades de rotação. Por outro lado, no caso de rotor com três mancais em rotação, observa-se que em alguns casos não foi possível encontrar uma solução para o ajuste quando o efeito giroscópio é desprezado no modelo de ajuste. Isso acontece porque não há solução para a resposta do modelo considerando o conjunto das três primeiras frequências naturais nestes casos, uma vez que esse conjunto de frequências distancia significativamente do conjunto que deveria ser para o sistema sem rotação. De certa forma isso evidencia a necessidade de se obter dados experimentais precisos para que se obtenha a solução do ajuste, bem como a necessidade de um modelo matemático comprovado e confiável.

Tabela 8.12 – Influência do efeito giroscópico para o rotor de três mancais

Lâmina [mm] K1, K2 e K3	rpm	Freq. Natural [Hz]			Com Efeito Giroscópico			Sem Efeito Giroscópico		
					Rigidez Ajustada [N/m]			Rigidez Ajustada [N/m]		
		F1	F2	F3	K1	K2	K3	K1	K2	K3
7,9	500	51,875	81,400	138,130	$1,55 \times 10^5$	$1,22 \times 10^5$	$1,77 \times 10^5$	$1,63 \times 10^5$	$1,62 \times 10^5$	$1,32 \times 10^5$
7,9	1500	51,875	79,825	132,472	$1,52 \times 10^5$	$1,25 \times 10^5$	$1,72 \times 10^5$	-	-	-
7,9	2500	51,775	78,731	127,587	$1,51 \times 10^5$	$1,26 \times 10^5$	$1,69 \times 10^5$	-	-	-
9,5	500	65,000	99,375	154,700	$2,37 \times 10^5$	$2,15 \times 10^5$	$3,38 \times 10^5$	$2,42 \times 10^5$	$2,28 \times 10^5$	$3,01 \times 10^5$
9,5	1500	64,915	98,975	149,305	$2,42 \times 10^5$	$2,20 \times 10^5$	$3,21 \times 10^5$	$2,54 \times 10^5$	$3,17 \times 10^5$	$1,98 \times 10^5$
9,5	2500	64,830	97,775	145,650	$2,34 \times 10^5$	$2,15 \times 10^5$	$3,38 \times 10^5$	-	-	-

Os resultados do modelo com lâminas de 9,5 mm da Tabela 8.12 permitem concluir que ocorre uma discrepância muito grande entre os valores de rigidez estimados quando comparados para cada velocidade de rotação. Por exemplo, há uma variação de 34% na rigidez K3 quando a velocidade de rotação passa de 500 para 1500 rpm. Em um sistema real uma variação grande como esta de fato não acontece. Mais uma vez fica evidenciada a necessidade de se introduzir o efeito giroscópico no modelo de ajuste para minimizar erros na estimação dos valores de rigidez ajustados, ou até mesmo para se encontrar uma solução para o problema.

De uma maneira geral o método de ajuste implementado foi bastante eficaz para estimar as rigidezes, tanto para o rotor com dois mancais quanto para o rotor com três mancais. Evidentemente, a solução para o rotor com três mancais ocorre com um maior esforço computacional, mas os resultados são igualmente confiáveis. De certa forma os resultados com dados experimentais vem a confirmar algumas conclusões obtidas com os dados de simulações, além comprovar que o método pode ser empregado para estima as rigidezes dos mancais de rotores reais com grande confiabilidade.

CAPÍTULO 9

9. CONCLUSÕES

9.1. – Conclusões gerais

A análise de sensibilidade de parâmetros mostrou-se muito interessante como ferramenta para a implementação do método de estimação das rigidezes dos mancais de rotores. Mesmo considerando apenas o primeiro termo da série de Taylor na montagem do sistema de equações lineares do método, o método converge para a solução muito rapidamente.

De uma maneira geral o método implementado mostrou-se muito eficiente e robusto para estimar as rigidezes dos mancais. Quando o método é aplicado para estimar as rigidezes de mancais mais flexíveis, onde o rotor encontra-se na zona de mancal dependente, a probabilidade de ocorrer problemas na convergência para a solução é muito pequena, mesmo adotando valores iniciais de rigidezes bem diferentes. Quando o rotor encontra-se na zona de eixo dependente, onde as rigidezes dos mancais são elevadas, a convergência para a solução pode ser mais difícil, sendo, portanto, interessante tentar adotar valores iniciais de rigidez o mais próximo possível dos valores a serem estimados. Neste caso a experiência do usuário do método, em dinâmica de sistemas, poderá ser de grande valia.

Outro fato interessante notado durante a obtenção dos resultados é que a probabilidade de ocorrer problemas de convergência fica bastante reduzida quando se adota valores iniciais de rigidez menores que os valores a serem estimados. Isso se deve pelo fato de que o método inicia o processo de convergência em um patamar onde os valores de sensibilidade das rigidezes são elevados, e por consequência, a estabilidade do método é muito maior.

A solução para um conjunto de frequências naturais experimentais pode não ser única, e em situações severas de condições iniciais ou de mancais rígidos, o método pode convergir para uma solução bem distinta daquela esperada. Neste caso, o emprego do recurso da divisão do processo de ajuste em vários passos (C2) ou mesmo modificar as condições iniciais poderá resolver o problema.

Uma característica marcante do método é a elevada velocidade de ajuste do modelo mostrada pelo baixo número de iterações para se chegar à solução. Outra característica

importante do método é a sua precisão, uma vez que o modelo de ajuste chega às frequências naturais com uma precisão quase que absoluta em relação às frequências naturais experimentais.

A precisão do modelo em representar dinamicamente o sistema deve ser assegurada para que o ajuste ocorra corretamente. Igualmente confiáveis devem ser os dados experimentais utilizados como base para o ajuste. O processo de ajuste pode não ocorrer caso estas condições não sejam satisfatórias.

Pela análise do método com dados experimentais ficou comprovada a viabilidade e a confiabilidade da aplicação do método em rotores reais, não ficando apenas em um plano teórico. É perfeitamente possível assegurar a precisão na estimação das rigidezes dos mancais de rotores em condições reais de operação tomando em consideração o efeito giroscópio. Evidentemente, o processo de ajuste ocorre com maior facilidade e com menos possibilidade de ocorrer problemas de convergência em rotores com dois mancais.

9.2 – Sugestões para trabalhos futuros

- Avaliar a funcionalidade e o desempenho do método de ajuste utilizando autovalores (frequências naturais) que não sejam necessariamente as n primeiras para n mancais;
- Para melhorar a robustez do método de ajuste, além das frequências naturais, introduzir um dado experimental adicional para efeito de comparação com os dados teóricos, como por exemplo, a informação de um modo natural de vibração;
- Implementar o método usando tanto a sensibilidade dos autovalores quanto a sensibilidade dos autovetores a fim de se estabelecer um processo de ajuste com grande estabilidade;
- Aplicar o método de ajuste em casos reais de rotores;
- Incluir o ajuste da massa dos mancais utilizando a sensibilidade dos autovalores à variação da massa dos mancais;
- Adaptar o método de ajuste para utilizá-lo em identificação de falhas de rotores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adelman, H. M.; Haftka, R. T., (1986). “Sensitivity analysis of discrete structural systems”, AIAA Journal, Vol. 24, No 5, pp. 823-831.
- Bathe, K. J., (1996), “Finite element procedures”, Prentice Hall
- Bonello, P.; Brennan, M. J., (2001). “Modeling the dynamic behavior of a supercritical rotor on a flexible foundation using the mechanical impedance technique”, Journal of sound and Vibration, Vol. 239, pp. 445-466.
- Brüel & Kjær, (1988). “Structural Testing – Part 2 – Modal Analysis and Simulation”
- Cavalca, K. L.; Tadeo, A. T., (2003). “Ajuste de parâmetros e modelos: Aplicações em dinâmica de rotores”, Anais do DINCON 2003, Série Arquimedes, Vol. 2, pp. 982-1013.
- Childs, D., (1993). “Turbomachinery rotordynamics, phenomena, modeling & analysis”, John Wiley & Sons, New York.
- Cunha, J. et al, (1999), “Application of genetic algorithms for the identification of elastic constants of composite materials from dynamic tests”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45. 891-900.
- Dems, K.; Mróz, Z., (2001), “Identification of damage in beam and plate structures using parameter-dependent frequency changes”, Journal of Engineering and Computations, Vol. 18, pp. 96-120.
- Eshleman, R. L., (1984). “Some recent advances in rotor dynamics”, IMechE – Vibrations in Rotating Machinery, pp. (C327) 11-20.

- Gea, H. C.; Luo, J., (1999), “Automated Optimal Stiffener Pattern Design, Journal of Mechanics of Structures and Machines”, Vol. 27, pp. 275-292.
- Green, R. B., (1948). “Gyroscopic effects on the critical speeds of flexible rotors”, Journal of applied mechanics, Cambridge.
- Kang, Y. et al., (2000). “An investigation in stiffness effects on dynamics of rotor-bearing-foundation systems”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 231, pp. 343-374.
- Kosmatka, J. B.; Ricles, (1999), J. M., “Damage detection in structures by modal vibration characterization”, Journal of Structural Engineering, dec/99, pp. 1384-1392.
- Kraus, J.; Blech, J. J.; Braun, S. G., (1987), “In situ determination of rolling bearings stiffness and damp by modal analysis”, Trans. ASME - Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 109, pp. 235-240.
- Lalanne, M.; Ferraris, G., (1998), “Rotordynamics prediction in engineering”, John Wiley and Sons.
- Leader, M. E., (1987). “Practical rotor dynamics for turbomachinery – a practical evolution”.
- Marano, J. H; Nascimento, L. P., (2000). “Estudo das Variações de Parâmetros por Análise de Sensibilidade”, FEIS-UNESP, Ilha Solteira
- Meirovitch, L., (1970), “Methods of analytical dynamics”, McGraw-Hill Book Company.
- Nalecz, A. G.; Wicher, J., (1988), “Design sensitivity analysis of mechanical systems in frequency domain”, Journal of Sound and Vibration, 12(3), pp. 517-526.

- Nelson, H. D. e McVaugh, J. M., (1979), “A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory”, ASME.
- Nelson, H. D. e McVaugh, J. M., (1976), “The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements”, ASME.
- Pestel, E. C. e Leckie, F. A., (1963), “Matrix methods in elastomechanics”, McGraw-Hill Book Company, Inc.
- Rajan, M.; Nelson, H. D.; Chen, W. J., (1986), “Parameter sensitivity in the dynamics of rotor-bearing systems”, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 108, pp. 197-206.
- Sakata, M. et al, (1995). “Vibration Analysis of a High Speed and Light Weight Rotor System Subjected to a Pitching or Turning Motion. I: A Rigid Rotor System on Flexible Suspensions”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 184, pp. 871-885.
- Santos, I. F., (2001), “Dinâmica de sistemas mecânicos”, Makron Books.
- Sharp, R. S.; Brooks, P. C., (1988), “Sensitivities of frequency response functions of linear dynamic systems to variations in design parameter values”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 126(1), pp. 167-172.
- Sheinman, I., (1996), “Damage detection and updating of stiffness and mass matrices using mode data”, Journal of Computers and Structures, Vol. 59, pp. 149-156.
- Sinha, J. K.; Friswell, M. I.; Lees, A. W., (2002), “The identification of the unbalance and the foundation model of a flexible rotating machine from a single run-down”, Journal of Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 12(2-3), pp. 255-271.
- Smart, M. G.; Friswell, M. I.; Less, A. W., (2000), “Estimating turbo generator foundation parameters: model selection and regularization”, Proc. of The Royal Society London, Vol. 456, pp. 1583-1607.

- Su, C.; Huang. S., (1997), "Receptance for the sensitivity analysis of critical speeds to rotor support stiffness", Transaction ASME- Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 119, pp. 736-739.
- Sun, L. Y. et al, (2000), "Finite element model updating via automatic optimization of physical parameters", Proc. Of IMAC, Vol. 2, pp. 1544-1549
- Sutter, T. R. et al., (1988), "Comparison of several methods for calculating vibration mode shape derivatives". AIAA Journal, Vol. 26, No 12, pp. 1506-1511.
- Utecht, M., (1983). "Vibration analysis for the itaipu generator turbine units", CIGRÉ Symposium, Rio de Janeiro, pp. (C210-10) 1-6.
- Zhang, Q. W.; Chang C. C.; Chang, T. Y. P., (2000), "Finite element model updating for structures with parametric constraints", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 29, pp. 927-944.
- Zimoch, Z., (1987), "Sensitivity analysis of vibrating systems". Journal of Sound and Vibration, 115(3), pp. 447-458.

APÊNDICE 1

Matrizes das equações de movimento - MEF

Matrizes de um elemento de disco rígido:

$$[M_r^d] = \begin{bmatrix} md & 0 & 0 & 0 \\ 0 & md & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M_R^d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & MI_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & MI_D \end{bmatrix}$$

$$[\hat{M}_T^d] = \begin{bmatrix} 0 & -md & 0 & 0 \\ md & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[G^d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -MI_p \\ 0 & 0 & MI_p & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{G}^d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -MI_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -MI_p \end{bmatrix}$$

onde: m_d = massa do disco rígido,

MI_D = momento de inércia de massa diametral = $\frac{1}{4}m_d r^2$

MI_p = momento de inércia de massa polar = $\frac{1}{2}m_d r^2$, SANTOS (2001)

Matrizes de um elemento de viga:

$$[M_T^e] = \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 156 & & & & & & & \\ 0 & 156 & & & & & & S \\ 0 & -22l & 4l^2 & & & & & \\ 22l & 0 & 0 & 4l^2 & & & & \\ 54 & 0 & 0 & 13l & 156 & & & \\ 0 & 54 & -13l & 0 & 0 & 156 & & \\ 0 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 22l & 4l^2 & \\ -13l & 0 & 0 & -3l^2 & -22l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$[M_R^e] = \frac{\mu r^2}{120} \begin{bmatrix} 36 & & & & & & & \\ 0 & 36 & & & & & & S \\ 0 & -3l & -4l^2 & & & & & \\ 3l & 0 & 0 & 4l^2 & & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3l & 36 & & & \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & & \\ 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 3l & 4l^2 & \\ 3l & 0 & 0 & -l^2 & -3l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{M}_T^e] = \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ 156 & 0 & & & & & & A-S \\ 22l & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & -22l & 4l^2 & 0 & & & & \\ 0 & -54 & 13l & 0 & 0 & & & \\ 54 & 0 & 0 & 13l & 156 & 0 & & \\ 13l & 0 & 0 & 3l^2 & 22l & 0 & 0 & \\ 0 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 22l & 4l^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[G^e] = \frac{2\mu r^2}{120l} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ 36 & 0 & & & & & & \\ -3l & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & -3l & 4l^2 & 0 & & & & \\ 0 & 36 & -3l & 0 & 0 & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3l & 36 & 0 & & \\ -3l & 0 & 0 & l^2 & 3l & 0 & 0 & \\ 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 3l & 4l^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & \\ 0 & 12 & & & & & & \\ 0 & -6l & 4l^2 & & & & & \\ 6l & 0 & 0 & 4l^2 & & & & \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 12 & & & \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 12 & & \\ 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 6l & 4l^2 & \\ 6l & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix}$$

onde: EI = rigidez a flexão do elemento de eixo

l = comprimento do elemento de eixo

μ = massa por unidade de comprimento

r = raio da seção transversal do eixo