



Universidade Estadual Paulista

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Departamento de Física e Química

**Transporte quântico fracionário assistido por excitações
de quasipartícula do tipo Majorana-Ising**

José Eduardo Cardozo Sanches

Ilha Solteira - SP

Fevereiro de 2024



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Departamento de Física e Química

Programa de Pós-Graduação em Ciência dos Materiais

Transporte quântico fracionário assistido por excitações de quasipartícula do tipo Majorana-Ising

José Eduardo Cardozo Sanches

Orientador: Antonio Carlos Ferreira Seridonio

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
- UNESP - Campus de Ilha Solteira, para
obtenção do título de Doutor em Ciência dos
Materiais.

Ilha Solteira - SP

Fevereiro de 2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

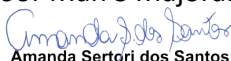
S211t Sanches, José Eduardo Cardozo.
Transporte quântico fracionário assistido por excitações de quasipartícula do tipo Majorana-Ising / José Eduardo Cardozo Sanches. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2024
85 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Física da Matéria Condensada , 2024

Orientador: Antonio Carlos Ferreira Seridonio

Inclui bibliografia

1. Excitações de quasipartícula do tipo Majorana-Ising (MIQ). 2. Modos zero de Majorana (MZM). 3. Poor Man'S Majorana.


Amanda Sertori dos Santos

Biblioteca - CRB/8-9061
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao
Usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: TRANSPORTE QUÂNTICO FRACIONÁRIO ASSISTIDO POR EXCITAÇÕES DE QUASIPARTÍCULA DO TIPO MAJORANA-ISING

AUTOR: JOSÉ EDUARDO CARDOZO SANCHES

ORIENTADOR: ANTONIO CARLOS FERREIRA SERIDONIO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em Ciência dos Materiais, área: Física da Matéria Condensada pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. ANTONIO CARLOS FERREIRA SERIDONIO (Participação Virtual)
Departamento de Física e Química / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Documento assinado digitalmente
 ANTONIO CARLOS FERREIRA SERIDONIO
Data: 05/03/2024 11:27:22-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. ERIC DE CASTRO E ANDRADE (Participação Virtual)
Instituto de Física / Universidade de São Paulo - USP



Prof. Dr. GEORGE BALSTER MARTINS (Participação Virtual)
Instituto de Física / Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Documento assinado digitalmente
 GEORGE BALSTER MARTINS
Data: 04/03/2024 15:09:56-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. LUIS GREGORIO GODOY DE VASCONCELLOS DIAS DA SILVA (Participação Virtual)
Instituto de Física / Universidade de São Paulo - USP

Documento assinado digitalmente
 LUIS GREGORIO GODOY DE VASCONCELLOS DIAS DA SILVA
Data: 04/03/2024 15:16:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. GINETOM SOUZA DINIZ (Participação Virtual)
Curso de Física / Universidade Federal de Jataí - UFJ

Documento assinado digitalmente
 GINETOM SOUZA DINIZ
Data: 04/03/2024 15:42:08-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Ilha Solteira, 29 de fevereiro de 2024

Impacto e relevância científico-social

Não é de hoje que as pesquisas envolvendo férmions de Majorana tem se destacado no ambiente científico, espera-se que a detecção e aplicação dessas quasipartículas possam ser um novo marco no desenvolvimento da ciência e tecnologia, partindo-se de sua premissa sem igual no que tange possíveis aplicações ao campo emergente e extremamente almejado da computação quântica. O estudo e aplicação dos férmions de Majorana pode abarcar uma grande revolução, pois o desenvolvimento de computadores quânticos livres do efeito de decoerência, resistentes a falhas, capazes de realizar tarefas complexas e que sejam estáveis poderiam promover uma melhora significativa na compreensão de determinadas áreas da ciência e tecnologia, bem como a criptografia/descriptografia de informações, auxiliar no desenvolvimento de simulações complexas, alavancar o progresso na construção e aplicação de inteligências artificiais, entre outras.

O entendimento e a busca por plataformas capazes de sustentar a emergência de férmions de Majorana se faz fundamental, partindo-se de suas possibilidades de aplicação. Dessa forma, nossos esforços em estudos teóricos buscam trazer um pouco de luz, por mais básica que seja a contribuição, ao entendimento do comportamento e de possíveis formas de se detectar férmions de Majorana, bem como a compreensão de sua manifestação em sistemas de matéria condensada.

Agradecimentos

Deixo aqui meus mais sinceros agradecimentos a todos que fizeram parte de minha jornada até aqui, especialmente para:

Meus pais, José e Maria, por todo o carinho, pelos ensinamentos, pelas experiências compartilhadas e por todo o apoio nos momentos mais complicados.

A meu irmão, Adriano, que sempre apoiou minha jornada das mais diferentes formas, nunca foi alguém de dizer o que eu deveria ou não fazer, mas sempre deu suporte de uma forma ímpar.

Meu orientador, Prof. Seridonio, por todo o conhecimento compartilhado, os incentivos, todas as ricas conversas e pela paciência em me orientar ao longo dessa jornada.

Aos meus amigos de pesquisa Willian e Luana por todo o companheirismo e por todas as discussões e conhecimentos construídos ao longo desse período.

Aos meus amigos Welinton (O Japa), Mizobata (Mizo), Eduardo (Kiwi) e Guilherme (Shen) pelas noites de jogos, por todas as conversas nos mais variados temas, por todo o suporte e também por todo o apoio nas crises e momentos difíceis.

A minha amiga Mariana pelas incontáveis e valiosas conversas, pelos ensinamentos e questionamentos que desempenharam um papel importante nos últimos anos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro que tornou possível a realização desta tese e de outros trabalhos.

*Não busques que os acontecimentos
sejam como queres, mas queira que os
acontecimentos sejam como são, com o
que serás feliz.*

Epicteto

Resumo

Em nosso estudo investigamos teoricamente a emergência das excitações de quasipartículas do tipo Majorana-Ising (do inglês, MIQ: Majorana-Ising-type quasiparticle) por meio das propriedades espectrais de uma impureza quântica (do inglês, QI: quantum impurity). Tais excitações emergem em um sistema composto por uma QI flanqueada por um supercondutor topológico (do inglês, TSC: topological superconductor) finito e uma ponta spin-polarizada, com spin inteiro S . O acoplamento da ponta à QI é dado por uma interação de troca do tipo Ising. Em nosso sistema os modos zero de Majorana (do inglês, MZMs: Majorana zero modes), que emergem nas bordas do TSC unidimensional, estão superpostos e nós encontramos um regime em que o termo oriundo da interação de Ising é capaz de modular a localização de um estado ressonante e fracionalizado de MZM no sítio da QI, o qual nomeamos de MIQ. A análise da condutância diferencial, decomposta nas componentes de tunelamento eletrônico e reflexões de Andreev, nos revelou a natureza fermiônica do estado MIQ como puramente eletrônica, a contribuição advinda dos processos de Andreev entre QI e os terminais metálicos se mostrou nula. Os estados de MIQ que descreveremos neste trabalho podem ser compreendidos como uma forma de manifestação dos chamados *poor man's Majoranas* [[Nature 614, 445 \(2023\)](#)].

Palavras-chave: Excitações de quasipartícula do tipo Majorana-Ising (MIQ), modos zero de Majorana (MZM) e *poor man's Majorana*.

Abstract

In our study we theoretically investigate the emergence of the Majorana-Ising-Type quasiparticle (MIQ) excitation through the spectral properties of a quantum impurity (QI). Such excitations can arise in a system composed by the coupling between a finite topological superconductor (TSC) and a spin-polarized tip, with integer spin S , flanking the QI. The coupling between the tip and the QI is given by an Ising-type exchange interaction. In our system the Majorana zero modes (MZMs), which emerge on the edges of the 1D TSC, are overlapped and we find a regime wherein the Ising term modulates the localization of a fractionalized and resonant MZM at the QI site, called by us MIQ. The analysis of the differential conductance, decomposed into the electronic tunneling and Andreev reflections components, revealed the fermionic nature of the MIQ state as purely electronic and a null contribution arising from the Andreev processes between the tip and the metallic leads. The MIQ state described in this work can be understood as a manifestation of the poor man's Majoranas [[Nature 614, 445 \(2023\)](#)].

Keywords: Majorana-Ising-type quasiparticle (MIQ) excitation, Majorana zero mode (MZM) and poor man's Majorana.

Lista de Figuras

1.1	Retrato do físico italiano Ettore Majorana. Fonte: Ramón Aguado [1].	14
2.1	Representação esquemática da receita para a criação do nanofio de Kitaev. Nanofio semiconductor (em azul), supercondutor s -wave e as designações para campo spin-órbita (B_{SO}) e campo magnético (B). Os asteriscos em vermelho indicam os MZMs [15].	17
2.2	Alexei Y. Kitaev. Professor no Instituto de Tecnologia da Califórnia (Caltech - California Institute of Technology). Fonte: caltech.edu.	18
2.3	Representação esquemática do modelo de Kitaev para: (a) Fase trivial em que os férmions de Majorana (calotas azuis e vermelhas) se acoplam no mesmo sítio [Eq. (2.7)] compondo um férmion regular. (b) Fase topológica na qual os férmions Majorana de sítios vizinhos adjacentes se acoplam [Eq. (2.8)], isolando assim dois Majoranas nas bordas do sistema. O sítio fermiônico não local [Eq. (2.9)] formado por $\gamma_{A,1}$ e $\gamma_{B,N}$, os dois Majoranas isolados na fase topológica, está representado em (c).	20
2.4	Dispersão na energia para as quasipartículas supercondutoras E_k com $\Delta = t/2$ (linhas contínuas azuis) e dispersão para os elétrons na ausência da influência supercondutora ϵ_k com $\Delta = 0$ (linhas vermelhas tracejadas), obtidas a partir da Eq. (2.27) para o modelo de Kitaev considerando diferentes valores de potencial químico μ . A dispersão de E_k e ϵ_k apresentam gap quando $\mu < -t$ (a) e também para $\mu > t$ (f), gap esse que se fecha nos pontos $k = 0$ quando $\mu = -t$ e $k = \pm\pi$ para $\mu = t$, painéis (b) e (e), respectivamente. Porém, quando $ \mu < t$ a dispersão para ϵ_k apresenta uma caráter metálico enquanto tem-se a reabertura do gap para a dispersão E_k [5].	25

2.5	Painel da esquerda: Imagem de microscópio eletrônico de varredura do dispositivo utilizado por Mourik et. al. [15] em que um nanofio semiconductor de InSb (Indium antimonide - Antimoneto de índio) está em contato com um eletrodo metálico-normal (N) e supercondutor (S). Um campo magnético B é aplicado paralelamente ao nanofio. Painel da direita: Condutância diferencial para múltiplos valores de B , as medidas foram efetuadas a uma temperatura de 50 mK. Um pico em $V = 0$ emerge para B entre ~ 100 e ~ 400 mT, correspondendo a uma amplitude de $G \sim 0.05G_0$. Adaptado da Ref. [15].	27
2.6	(a) Micrografia em cores falsas do dispositivo com um ponto quântico descrito pela circunferência tracejada. (b) o espectro do sistema em função da voltagem do ponto quântico V_{dot} para superposição finita entre os MBSs e (c) para o caso ideal, em que ambos os MBSs se encontram isolados nas bordas do nanofio. (d) condutância diferencial considerando um campo magnético $B = 1$ T que apresenta concordância com a predição estabelecida pelo painel (b). Adaptado a partir da Ref. [27].	28
2.7	(Artigo retratado) (a) Micrografia em cores falsas do aparato experimental no painel superior e seu esquema no painel inferior. (b) Condutância diferencial dI/dV em função da voltagem V e do campo magnético B , apresentando a coalescência de dois estados ligados de Andreev (ABSs) em um pico de voltagem zero (ZBP) quantizado com o aumento do valores de B , o painel inferior (com círculos vermelhos) apresenta um corte, do painel superior, para a $V = 0$. Adaptado de [29].	29

2.8	O modelo mínimo de Kitaev. (a) Representação de dois pontos quânticos (circunferências tracejadas) que podem se acoplar diretamente, por meio de um termo do tipo hopping t , e via supercondutor com uma amplitude Δ , pela reflexão cruzada de Andreev (do inglês, CAR: Crossed Andreev reflection). (b) Diagrama de energia da cadeia mínima de Kitaev, representando a ajustabilidade dos potenciais químicos nos QDs, μ_{LD} e μ_{RD} . (c) Ilustração do dispositivo e do circuito para efetuar as medições. A representação dos QDs é explicitada pelos potenciais tracejados sobre o nanofio InSb. (d) Microscopia eletrônica de varredura em cores falsas do dispositivo antes da fabricação dos terminais metálicos normais, a cor verde está indicando o nanofio semiconductor, em azul a representação do supercondutor e os QDs são representados pelas circunferências tracejadas. Adaptado da Ref. [31].	30
2.9	Condutância diferencial para $t = \Delta$ dada em função da voltagem e da variação da energia do QD da direita V_{RD} . (a) e (b) dizem respeito a assinatura experimental obtida e a prevista pela teoria, respectivamente. Os perfis verticais ressonantes em voltagem zero para G_{LL} e G_{RR} destacam a robustez dos <i>poor man's Majoranas</i> contra perturbações locais. Adaptado da Ref. [31].	31
3.1	Philip Warren Anderson (1923 - 2020) foi um físico estadunidense e recebeu o premio Nobel de Física em 1977. Fonte: nobelprize.org	33
3.2	Representação esquemática do modelo de Anderson com uma impureza magnética sob um hospedeiro metálico. A intensidade da hibridização impureza-hospedeiro é determinada pelo parâmetro V	34

4.1	(a) Representação esquemática do dispositivo proposto, composto por uma cadeia de átomos depositados sob uma matriz supercondutora do tipo s -wave capaz de induzir, por efeito de proximidade, a supercondutividade do tipo p -wave na cadeia. Uma das bordas do nanofio (cadeia de átomos) se acopla a uma impureza quântica (QI) que é lateralmente flanqueada por dois terminais metálicos e que também acopla-se a uma ponta spin-polarizada. (b) Visão lateralizada do sistema apresentado no painel (a), evidenciando o acoplamento da QI à ponta spin-polarizada, dado pela interação de troca do tipo Ising J , e aos terminais metálicos, dados por Γ . (c) Modelo efetivo do nanofio contendo MZMs nas bordas (nanofio de Kitaev) que podem se superpor com uma amplitude ε_M e em que apenas γ_1 se acopla a QI por λ_1 . (d) Modelo efetivo para o regime de estados ligados de Andreev obtido quando $ \lambda_1 \sim \lambda_2 $. (e) Descritos na base fermiônica os MZMs, γ_1 e γ_2 , se comportam como um férmion não local f , cujo o nível de energia é descrito por ε_M . O nível de energia da QI é dividido em $2S+1$ níveis que vão de $-J(S/2)$ até $+J(S/2)$, já o hopping t e emparelhamento supercondutor Δ são responsáveis pela troca de informação entre o sítio f e a QI [10].	39
7.1	Representação esquemática do sistema proposto para se estudar as operações do tipo <i>braiding</i> obtidas por meio do desenvolvimento e estudo de funções de Green. Quatro nanofios de Majorana semi-infinitos nos quais consideramos apenas os Majoranas presentes em uma suas bordas, $\gamma_{1,2,3,4}$. O acoplamento entre Majoranas adjacentes é dado por t_M	80
7.2	Representação do sistema proposto para se estudar o modelo mínimo de Kitaev sob influência de um spin S que se acopla a uma das componentes do dímero por um termo do tipo Ising J . Os sítios μ_L e μ_R podem ser decompostos nas componentes de Majorana $\gamma_{1,2}$ e $\gamma_{3,4}$, respectivamente, e se acoplam por meio de um hopping t e uma amplitude emparelhamento supercondutor Δ	81

Sumário

1	Introdução	14
2	Férmions de Majorana em Física da Matéria Condensada	16
2.1	Modelo de Kitaev	18
2.2	Propriedades de Bulk	20
2.3	Detecção experimental de férmions de Majorana	26
3	Formalismo matemático	32
3.1	Modelo de Anderson de uma Impureza	33
3.2	Funções de Green	34
3.3	Equação de Movimento	35
4	Modelo estudado	39
4.1	Hamiltoniano	40
4.2	Densidade de estados da QI	41
4.2.1	Sumário das GFs para a QI	53
4.2.2	Spin up	54
4.2.3	Spin down	56
4.3	DOS para as quasipartículas de Majorana da QI	56
4.3.1	Definindo as GFs de Majorana na QI	57
4.4	Quasipartículas de Majorana do sítio f	59
5	Fractionalization of Majorana-Ising-type quasiparticle excitations	62
5.1	Artigo publicado	63
6	Conclusões	78

Capítulo 1

Introdução

No ano de 1937 o físico italiano Ettore Majorana propôs uma solução alternativa, em termos de funções de onda reais, para a equação de Dirac. Essa representação possuía implicações profundas, pois esse tipo de função de onda descreve partículas que são suas próprias antipartículas [1–3], diferentemente de elétrons e pósitrons. Em princípio, a proposta de Ettore se restringia à Física de altas energias e tinha como premissa propor que essas novas e exóticas partículas poderiam ser/descrever os neutrinos [1, 3]. Essa proposta permanece em estudo, como é o caso do decaimento beta duplo de neutrinos [4].

A busca por férmions de Majorana (do inglês, MFs - Majorana fermions) manteve-se restrita às áreas associadas à Física de altas energias por talvez mais de 60 anos [1]. Porém, atualmente a busca por MFs em sistemas de matéria condensada está entre os tópicos mais atrativos da Física, isso se deve ao grande potencial de aplicação dos MFs para o desenvolvimento de uma computação quântica topológica livre de decoerências e tolerante à falhas [5–9].

Em física da matéria condensada, os MFs não se manifestam como partículas fundamentais, mas sim como excitações de quasipartícula e satisfazem a propriedade de partículas iguais suas próprias antipartículas, como proposto por Ettore Majorana em 1937. Tais excitações podem



Figura 1.1: Retrato do físico italiano Ettore Majorana.

Fonte: Ramón Aguado [1].

ser descritas, em linguagem de segunda quantização, pelos operadores

$$\Psi = \Psi^\dagger. \quad (1.1)$$

Para que tal condição seja satisfeita, as excitações de Majorana não devem possuir massa, carga e sua energia é igual a zero.

Motivados pela busca e entendimento do comportamento dos MFs em sistemas de matéria condensada, nesta tese vamos apresentar nossa contribuição para o desenvolvimento da área. Este trabalho está estruturado da seguinte maneira:

1. Capítulo 2: Abordaremos uma breve introdução de como os férmions de Majorana podem emergir no contexto de física da matéria condensada, comentando sobre a engenharia de materiais necessária para dar origem a sistemas que contenham tais férmions, devido a raridade de materiais naturalmente capazes de tal feito. Apresentaremos também o modelo de Kitaev, seguido pelo cenário experimental envolvendo a busca por MFs.
2. Capítulo 3: Apresentaremos o formalismo matemático que foi utilizado no desenvolvimento de nosso artigo [10], resumizando o modelo de Anderson, uma vez que utilizamos Hamiltonianos semelhantes, as funções de Green e o formalismo da equação de movimento (EOM).
3. Capítulo 4: Abordaremos os cálculos efetuados para a obtenção das funções de Green necessárias para determinação da densidade de estados tanto da impureza quântica quanto das quasipartículas de Majorana.
4. Capítulo 5: Apresentaremos o artigo publicado *Fractionalization of Majorana-Ising-type quasiparticle excitations* [Phys. Rev. B 107, 155144 (2023)], em que investigamos a possível fracionalização de férmions de Majorana, bem como suas características espectrais e de transporte quântico em um sistema composto por um nanofio supercondutor topológico lateralmente acoplado a uma impureza quântica que é flanqueada por dois terminais metálicos e que também se acopla, por uma interação do tipo Ising, com uma ponta spin polarizada.
5. Capítulo 6: Apresentaremos as conclusões.

Capítulo 2

Férmions de Majorana em Física da Matéria Condensada

No contexto de Física da Matéria Condensada, diferentemente da física de altas energias, os férmions de Majorana não emergem como partículas fundamentais, como é o caso de elétrons em núcleos atômico, mas sim como excitações de quasipartícula [1, 3, 5, 11]. Como proposto por Ettore Majorana, tais excitações satisfazem a relação de partícula igual a sua própria antipartícula e podem ser descritas em linguagem de segunda quantização pelos operadores $\Psi = \Psi^\dagger$.

Seguindo a premissa de que tais excitações de Majorana satisfazem uma relação que estabelece a igualdade entre partícula e buraco (os buracos são o análogo das antipartículas no contexto de Matéria Condensada), os supercondutores se mostram como plataformas promissoras para a emergência de tais excitações, uma vez que as quasipartículas que descrevem esses materiais, os pares de Cooper, podem ser definidas como a superposição de elétrons e buracos [3]. A transformação de Bogoliubov é muito comum em estudos com supercondutores e estabelece uma relação entre as excitações de partícula e buraco [3, 5]. Porém, os supercondutores convencionais do tipo *s*-wave não são o suficiente para a emergência das excitações de quasipartícula de Majorana, uma vez que nestes supercondutores os pares de Cooper são formados por elétrons com spins opostos, violando assim a relação $\Psi = \Psi^\dagger$. Para fins de exemplificação, os operadores em um supercondutor *s*-wave podem ser escritos como $d = uc_\uparrow^\dagger + vc_\downarrow$ e $d^\dagger = v^*c_\downarrow^\dagger + u^*c_\uparrow$, o que deixa claro que são dois operadores distintos [3].

Como declarado anteriormente um tipo diferente de supercondutividade se faz necessária para a emergência dos férmions de Majorana. Um supercondutor “spinless”, em que apenas uma

orientação de spin está presente nos elétrons do condensado supercondutor geraria a plataforma ideal. A característica *spinless* resulta em um supercondutor *p*-wave em uma dimensão [3, 5, 7, 11–14], como é o caso do modelo do fio de Kitaev (discutiremos mais adiante).

Supercondutores *p*-wave são extremamente raros na natureza e devido a essa dificuldade, certa engenharia de materiais se faz necessária para gerar a supercondutividade *p*-wave partindo de sistemas mais simples e já conhecidos. Uma das receitas para se atingir este fim exige apenas três ingredientes simples, sendo eles: um supercondutor *s*-wave convencional, acoplamento spin-órbita (SOC - spin-orbit coupling) e a aplicação de um campo magnético externo [1, 3, 5, 11, 15]. Estes ingredientes podem ser organizados como apresenta a Fig. 2.1, onde se tem um nanofio semiconductor com forte acoplamento spin-órbita na superfície de um supercondutor *s*-wave para que, por efeito de proximidade, a supercondutividade seja induzida no nanofio.

O ingrediente final é a aplicação de um campo magnético paralelo ao nanofio e perpendicular ao SOC. A combinação desses ingredientes é capaz gerar a supercondutividade *p*-wave e de levar o sistema à fase topológica em que os modos zero de Majorana (MZMs - Majorana zero modes) emergem.

Um modelo importante para o desenvolvimento da área foi proposto em 2001, o chamado modelo de Kitaev [12]. Esse desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento do trabalho que apresentaremos nesta tese, pois partimos da premissa da existência de um nanofio de Kitaev, já na fase topológica, em que dois MZMs estão isolados em suas bordas e analisamos o comportamento dessas excitações de quasipartícula quando acopladas a diferentes sistemas, como discutiremos mais adiante. Em função da relevância do modelo de Kitaev, a próxima seção será dedicada a seu estudo.

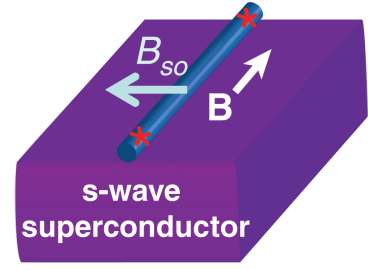


Figura 2.1: Representação esquemática da receita para a criação do nanofio de Kitaev. Nanofio semiconductor (em azul), supercondutor *s*-wave e as designações para campo spin-órbita (B_{SO}) e campo magnético (B). Os asteriscos em vermelho indicam os MZMs [15].

2.1 Modelo de Kitaev

O modelo proposto em 2001 por Alexei Kitaev, também conhecido como *Kitaev toy model* [3, 5, 12], consiste de uma cadeia linear unidimensional de sítios fermiônicos com supercondutividade do tipo p -wave. O modelo consiste na análise do chamado regime trivial, em que não há MZMs, e do regime topológico no qual os MZMs emergem como estados isolados nas bordas do sistema. O Hamiltoniano *tight-binding* para elétrons *spinless* que descreve o modelo pode ser escrito da seguinte forma

$$\mathcal{H} = -\mu \sum_x c_x^\dagger c_x - \frac{1}{2} \sum_x^{N-1} (t c_x^\dagger c_{x+1} + \Delta c_x c_{x+1} + \text{H.c.}), \quad (2.1)$$

sendo μ o potencial químico associado a ocupação de cada sítio, t é o termo de hopping entre sítios vizinhos adjacentes e Δ a amplitude de emparelhamento supercondutor do tipo p -wave. Os operadores $c_x^\dagger$ e c_x descrevem a criação e aniquilação, respectivamente, de elétrons no sítio x e obedecem as relações de anticomutação fermiônicas $[c_j, c_x]_+ = [c_j^\dagger, c_x^\dagger]_+ = 0$ e $[c_j, c_x^\dagger]_+ = \delta_{jx}$.

Para entendermos como as propriedades associadas à fase/regime não-trivial (topológica) podem emergir em um sistema como o proposto por Kitaev é fundamental reescrevermos a Eq. (2.1) na base de operadores de Majorana, em que cada operador fermiônico é decomposto em duas componentes de Majorana segundo as relações

$$c_x = \frac{1}{2}(\gamma_{B,x} + i\gamma_{A,x}) \quad (2.2)$$

e

$$c_x^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_{B,x} - i\gamma_{A,x}), \quad (2.3)$$

em que $\gamma_{A,x}$ e $\gamma_{B,x}$ obedecem a relação $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha^\dagger$, que assegura a condição de Majorana, cuja partícula é igual a sua própria antipartícula. Dessa forma, intuitivamente, os férmions de Majorana podem ser interpretados como “estados de meio férmion regular”, uma vez que cada operador fermiônico usual pode ser reformulado pela combinação de dois operadores de Majorana



Figura 2.2: Alexei Y. Kitaev. Professor no Instituto de Tecnologia da Califórnia (Caltech - California Institute of Technology). Fonte: caltech.edu.

rana [5]. Tais operadores respeitam também as relações

$$[\gamma_{\alpha x}, \gamma_{\alpha' j}]_+ = 2\delta_{xj}\delta_{\alpha\alpha'} \quad \text{e} \quad \gamma_{\alpha x}^2 = \gamma_{\alpha x}^\dagger \gamma_{\alpha x} = 1. \quad (2.4)$$

Dessa forma, tendo os operadores fermiônicos [Eqs. (2.2) e (2.3)] definidos em suas componentes de Majorana, é possível reescrever o Hamiltoniano Eq. (2.1) como:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{\mu}{4} \sum_x (\gamma_{B,x} \gamma_{B,x} + i\gamma_{B,x} \gamma_{A,x} - i\gamma_{A,x} \gamma_{B,x} + \gamma_{A,x} \gamma_{A,x}) \\ & - i\frac{t}{4} \sum_x (\gamma_{B,x} \gamma_{A,x+1} - \gamma_{A,x} \gamma_{B,x+1}) \\ & + i\frac{\Delta}{4} \sum_x (\gamma_{B,x} \gamma_{A,x+1} + \gamma_{A,x} \gamma_{B,x+1}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que podemos utilizar as relação estabelecidas pela Eq. (2.4). Assim, o Hamiltoniano assume a forma

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu}{2} \sum_{x=1}^N (1 + i\gamma_{B,x} \gamma_{A,x}) - \frac{i}{4} \sum_{x=1}^{N-1} [(t + \Delta)\gamma_{B,x} \gamma_{A,x+1} + (\Delta - t)\gamma_{A,x} \gamma_{B,x+1}]. \quad (2.6)$$

Consideremos agora dois casos limites para o Hamiltoniano Eq. (2.6), associado à proposta de Kitaev [12]. Sendo que o primeiro deles corresponde a $t = \Delta = 0$ e $\mu \neq 0$, nesse regime o segundo termo do Hamiltoniano desaparece, ou seja,

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu}{2} \sum_{x=1}^N (1 + i\gamma_{B,x} \gamma_{A,x}), \quad (2.7)$$

descrevendo assim o caso trivial. Note que apenas o termo de potencial químico se faz presente e é descrito por operadores de Majorana que emparelham-se no mesmo sítio x , como apresentado na Fig. 2.3(a), sendo que μ é a energia necessária para que tal sítio seja populado. Para descrever o segundo caso limite assumimos $\mu = 0$ e $t = \Delta \neq 0$, obtendo

$$\mathcal{H} = -\frac{it}{2} \sum_{x=1}^{N-1} \gamma_{B,x} \gamma_{A,x+1}, \quad (2.8)$$

que descreve a fase topológica do modelo. Como podemos notar os operadores de Majorana acoplam-se apenas entre sítios vizinhos adjacentes, como exibido pela Fig. 2.3(b). A carac-

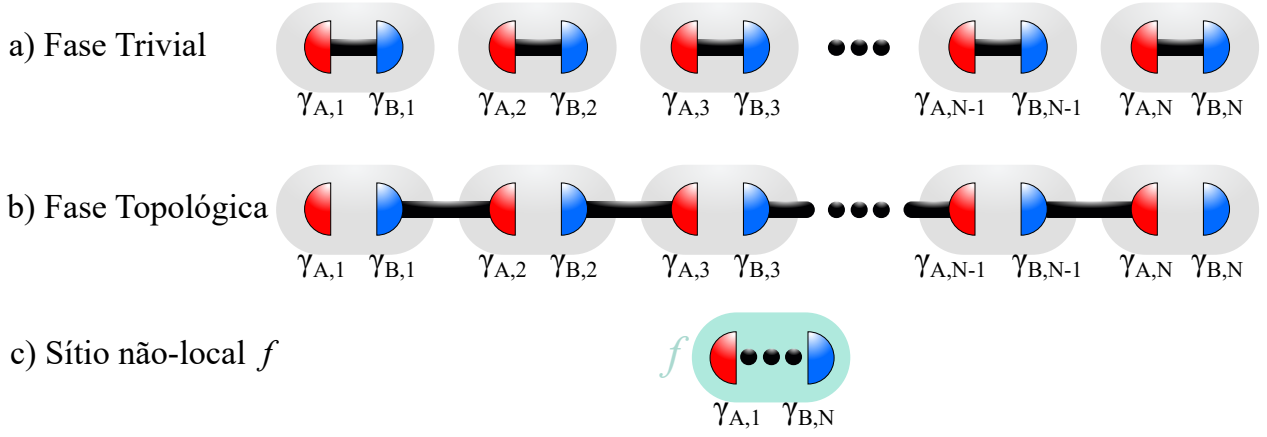


Figura 2.3: Representação esquemática do modelo de Kitaev para: (a) Fase trivial em que os férmions de Majorana (calotas azuis e vermelhas) se acoplam no mesmo sítio [Eq. (2.7)] compondo um férmion regular. (b) Fase topológica na qual os férmions Majorana de sítios vizinhos adjacentes se acoplam [Eq. (2.8)], isolando assim dois Majoranas nas bordas do sistema. O sítio fermiônico não local [Eq. (2.9)] formado por $\gamma_{A,1}$ e $\gamma_{B,N}$, os dois Majoranas isolados na fase topológica, está representado em (c).

terística principal da fase topológica se dá pelo fato de que os férmions de Majorana $\gamma_{A,1}$ e $\gamma_{B,N}$ nas bordas da cadeia de Kitaev não são descritos pelo Hamiltoniano [Eq. (2.8)], ou seja, estão isolados nas bordas do sistema e, conseqüentemente, temos as relações $[\mathcal{H}, \gamma_{A,1}] = 0$ e $[\mathcal{H}, \gamma_{B,N}] = 0$.

Os dois férmions de Majorana isolados nas bordas do sistema, também chamados de estados ligados de Majorana (MBS - Majorana bound states), podem ser reescritos dando origem a um estado fermiônico descrito como

$$f = \frac{1}{2}(\gamma_{A,1} + i\gamma_{B,N}). \quad (2.9)$$

O operador fermiônico f é considerado não local, uma vez que os MBSs que o compõem estão espacialmente separados [Fig. 2.3(c)].

Na próxima seção analisaremos as propriedades de Bulk do modelo unidimensional de Kitaev e como esse se comporta para distintos valores de potencial químico μ , termo de hopping t e amplitude de emparelhamento supercondutor Δ (p -wave).

2.2 Propriedades de Bulk

Nesta seção vamos investigar as propriedades de Bulk do modelo de Kitaev, para isso consideraremos a análise do sistema no espaço dos momentos k com condições periódicas de contorno para a cadeia unidimensional [1, 3, 5, 11]. Para obtermos o Hamiltoniano Eq. (2.1) no espaço

dos momentos utilizaremos a transformada de Fourier, reescrevendo assim os operadores dos sítios da cadeia em operadores dependentes do momento por meio das relações [16]:

$$c_x = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-ikxa} c_k \quad (2.10)$$

e

$$c_x^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikxa} c_k^\dagger, \quad (2.11)$$

sendo a o parâmetro de rede. Seguindo tais definições reescreveremos os termos da Eq. (2.1), sendo o primeiro deles

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^N c_x^\dagger c_x &= \sum_{x=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikxa} c_k^\dagger \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} e^{-ik'xa} c_{k'} \\ &= \sum_{x=1}^N \frac{1}{N} \sum_{kk'} e^{i(k-k')xa} c_k^\dagger c_{k'} = \sum_{kk'} c_k^\dagger c_{k'} \sum_{x=1}^N \frac{1}{N} e^{i(k-k')xa} \\ &= \sum_{kk'} c_k^\dagger c_{k'} \delta_{kk'} \\ &= \sum_k c_k^\dagger c_k, \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que podemos reconhecer a definição da delta de Kronecker

$$\delta_{kk'} = \sum_{x=1}^N \frac{1}{N} e^{i(k-k')xa} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq k' \\ 1, & \text{se } k = k' \end{cases}. \quad (2.13)$$

Façamos o mesmo para os termos de hopping e emparelhamento supercondutor da Eq. (2.1), respectivamente,

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{N-1} c_x^\dagger c_{x+1} &= \sum_{x=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikxa} c_k^\dagger \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} e^{-ik'(x+1)a} c_{k'} = \sum_{x=1}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{kk'} e^{ikxa} e^{-ik'(x+1)a} c_k^\dagger c_{k'} \\ &= \sum_{kk'} e^{-ik'a} c_k^\dagger c_{k'} \sum_{x=1}^{N-1} \frac{1}{N} e^{i(k-k')xa} = \sum_{kk'} e^{-ik'a} c_k^\dagger c_{k'} \delta_{kk'} \\ &= \sum_k e^{-ika} c_k^\dagger c_k, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{N-1} c_{x+1}^\dagger c_x &= \sum_{x=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ik(x+1)a} c_k^\dagger \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} e^{-ik'xa} c_{k'} = \sum_{x=1}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{kk'} e^{ik(x+1)a} e^{-ik'xa} c_k^\dagger c_{k'} \\
&= \sum_{kk'} e^{ika} c_k^\dagger c_{k'} \sum_{x=1}^{N-1} \frac{1}{N} e^{i(k-k')xa} = \sum_{kk'} e^{ika} c_k^\dagger c_{k'} \delta_{kk'} \\
&= \sum_k e^{ika} c_k^\dagger c_k
\end{aligned} \tag{2.15}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{N-1} c_x c_{x+1} &= \sum_{x=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-ikxa} c_k \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} e^{-ik'(x+1)a} c_{k'} = \sum_{x=1}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{kk'} e^{-ikxa} e^{-ik'xa} e^{-ik'a} c_k c_{k'} \\
&= \sum_{kk'} e^{-ik'a} c_k c_{k'} \sum_{x=1}^{N-1} \frac{1}{N} e^{-i(k+k')xa} = \sum_{kk'} e^{-ik'a} c_k c_{k'} \delta_{k,-k'} \\
&= \sum_k e^{ika} c_k c_{-k} = \sum_k e^{-ika} c_{-k} c_k,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

de forma análoga obtemos o Hermitiano conjugado

$$\sum_{x=1}^{N-1} c_x^\dagger c_{x+1}^\dagger = \sum_k e^{ika} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger. \tag{2.17}$$

Dessa forma o Hamiltoniano de Kitaev no espaço dos momentos torna-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\mu \sum_k c_k^\dagger c_k - \frac{1}{2} \sum_k t(e^{-ika} c_k^\dagger c_k + e^{ika} c_k^\dagger c_k) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_k \Delta(e^{-ika} c_{-k} c_k + e^{ika} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) \\
&= \sum_k (-\mu - t \cos(ka)) c_k^\dagger c_k - \frac{\Delta}{2} \sum_k (e^{-ika} c_{-k} c_k + e^{ika} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) \\
&= \sum_k \varepsilon_k c_k^\dagger c_k - \frac{\Delta}{2} \sum_k (e^{-ika} c_{-k} c_k + e^{ika} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger),
\end{aligned} \tag{2.18}$$

sendo $\varepsilon_k = -\mu - t \cos(ka)$ o termo de energia cinética. O Hamiltoniano pode ser escrito em um formato mais compacto utilizando o formalismo de Bogoliubov-de Gennes (BdG) [3,5], que pode ser obtido fazendo-se uso das propriedades de anticomutação ($[c_\alpha, c_{\alpha'}^\dagger]_+ = c_\alpha c_{\alpha'}^\dagger + c_{\alpha'}^\dagger c_\alpha = \delta_{\alpha\alpha'}$).

Sendo assim, fazamos

$$\begin{aligned}
\sum_k \varepsilon_k c_k^\dagger c_k &= \frac{1}{2} \sum_k (\varepsilon_k c_k^\dagger c_k + \varepsilon_k c_k^\dagger c_k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_k (\varepsilon_k c_k^\dagger c_k + \varepsilon_k (1 - c_k c_k^\dagger)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_k (\varepsilon_k c_k^\dagger c_k - \varepsilon_{-k} c_{-k} c_{-k}^\dagger) + \frac{1}{2} \sum_k \varepsilon_k,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
\sum_k e^{-ika} c_{-k} c_k &= \frac{1}{2} \sum_k (e^{-ika} c_{-k} c_k + e^{-ika} c_{-k} c_k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_k (e^{-ika} c_{-k} c_k - e^{-ika} c_k c_{-k}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_k (e^{-ika} c_{-k} c_k - e^{ika} c_{-k} c_k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_k c_{-k} c_k (e^{-ika} - e^{ika}) \\
&= - \sum_k i \sin(ka) c_{-k} c_k
\end{aligned} \tag{2.20}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_k e^{ika} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger &= \frac{1}{2} \sum_k (e^{ika} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + e^{ika} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) \\
&= \frac{1}{2} \sum_k (e^{ika} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger - e^{ika} c_{-k}^\dagger c_k^\dagger) \\
&= \frac{1}{2} \sum_k (e^{ika} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger - e^{-ika} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) \\
&= \sum_k i \sin(ka) c_k^\dagger c_{-k}^\dagger.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Assim, o Hamiltoniano assume a forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{2} \sum_k (\varepsilon_k c_k^\dagger c_k - \varepsilon_{-k} c_{-k} c_{-k}^\dagger) - \frac{\Delta}{2} \sum_k i \sin(ka) c_{-k} c_k + \frac{\Delta}{2} \sum_k i \sin(ka) c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + \frac{1}{2} \sum_k \varepsilon_k \\
&= \frac{1}{2} \sum_k (\varepsilon_k c_k^\dagger c_k - \varepsilon_{-k} c_{-k} c_{-k}^\dagger) + \frac{1}{2} \sum_k \Delta_k c_{-k} c_k + \frac{1}{2} \sum_k \Delta_k^* c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + \frac{1}{2} \sum_k \varepsilon_k \\
&= \frac{1}{2} \sum_k (\varepsilon_k c_k^\dagger c_k - \varepsilon_{-k} c_{-k} c_{-k}^\dagger + \Delta_k c_{-k} c_k + \Delta_k^* c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) + \frac{1}{2} \sum_k \varepsilon_k,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

em que $\Delta_k = -i\Delta \sin(ka)$ é a energia renormalizada que descreve o emparelhamento supercondutor oriunda da transformada de Fourier. De maneira equivalente, a Eq. (2.22) pode ser descrita no formalismo matricial (omitindo o termo constante),

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_k \begin{pmatrix} c_k^\dagger & c_{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_k & \Delta_k^* \\ \Delta_k & -\varepsilon_{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_{-k}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Em sistemas supercondutores, é natural definirmos os espinores de Nambu $\Psi_k^\dagger = \begin{pmatrix} c_k^\dagger & c_{-k} \end{pmatrix}$ e $\Psi_k = \begin{pmatrix} c_k \\ c_{-k}^\dagger \end{pmatrix}$ [16]. Dessa maneira podemos escrever

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_k \Psi_k^\dagger \mathcal{H}_{BdG} \Psi_k, \quad (2.24)$$

sendo que

$$\mathcal{H}_{BdG} = \begin{pmatrix} \varepsilon_k & \Delta_k^* \\ \Delta_k & -\varepsilon_{-k} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

é o Hamiltoniano BdG.

Os níveis de energia E_k são essenciais, já que almejamos analisar as propriedades do Bulk, e são dados pela solução da equação

$$|\mathcal{H}_{BdG} - E(k)I| = 0, \quad (2.26)$$

em que I é a matriz identidade 2×2 e $E(k)$ são as autoenergias associadas ao Hamiltoniano BdG. A solução da expressão gera duas bandas de dispersão [5]

$$E(k)_\pm = \pm \sqrt{\varepsilon_k^2 + |\Delta_k|^2} = \pm \sqrt{(\mu + t \cos(ka))^2 + \Delta^2 \sin^2(ka)}, \quad (2.27)$$

em que os níveis positivos e negativos de energia correspondem os estados de partícula e buraco, respectivamente.

A Figura 2.4 mostra a dispersão na energia E_k para as quasipartículas supercondutoras (linhas contínuas azuis), com $\Delta = t/2$, e a dispersão para os elétrons sem influência da supercondutividade ϵ_k (linhas tracejadas vermelhas), quando $\Delta = 0$, para diferentes valores de

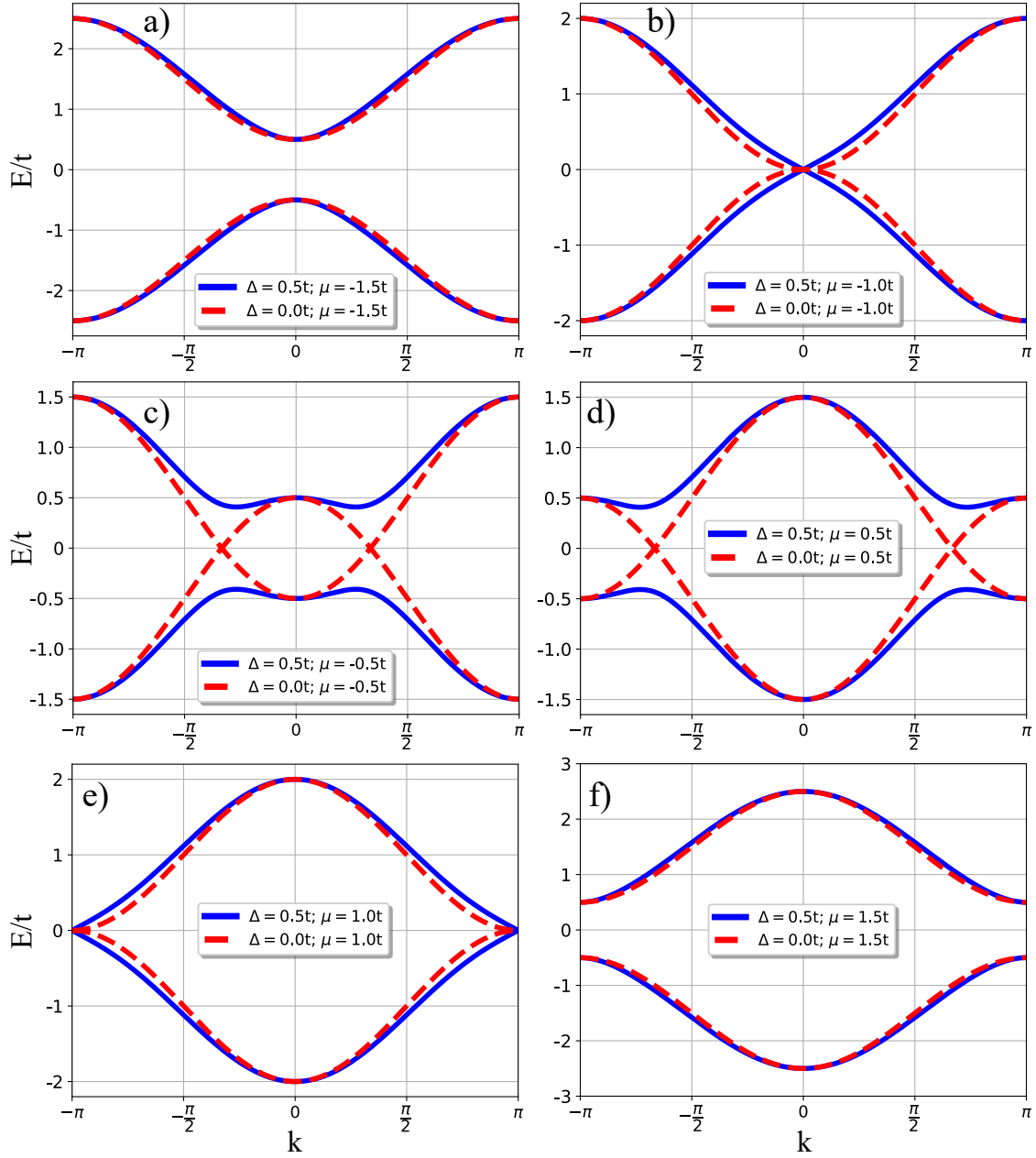


Figura 2.4: Dispersão na energia para as quasipartículas supercondutoras E_k com $\Delta = t/2$ (linhas contínuas azuis) e dispersão para os elétrons na ausência da influência supercondutora ϵ_k com $\Delta = 0$ (linhas vermelhas tracejadas), obtidas a partir da Eq. (2.27) para o modelo de Kitaev considerando diferentes valores de potencial químico μ . A dispersão de E_k e ϵ_k apresentam gap quando $\mu < -t$ (a) e também para $\mu > t$ (f), gap esse que se fecha nos pontos $k = 0$ quando $\mu = -t$ e $k = \pm\pi$ para $\mu = t$, painéis (b) e (e), respectivamente. Porém, quando $|\mu| < t$ a dispersão para ϵ_k apresenta uma caráter metálico enquanto tem-se a reabertura do gap para a dispersão E_k [5].

potencial químico μ , considerando o parâmetro de rede $a = 1$ e a amplitude de hopping $t = 1$. O painel (a) da Fig. 2.4 apresenta tanto ϵ_k quanto E_k , ambos com perfis semelhantes, exibindo gap para $\mu < -t$. A mesma semelhança se faz presente quando $\mu > t$ [Fig. 2.4(f)], em que ambas as dispersões, ϵ_k e E_k , novamente apresentam gap. Sendo assim, o sistema será dotado de gap quando $|\mu| > t$. De acordo com a Eq. (2.27), o sistema terá seu gap fechado quando os dois termos da raiz forem simultaneamente iguais a zero, sendo assim, quando $|\Delta_k| = \Delta \sin(ka) = 0$ e isso acontece para $k = 0$ e $k = \pm\pi$, já o termo de energia cinética $\epsilon_k = -\mu - t \cos(ka)$ é zero quando k coincide com o momento de Fermi k_F , $\epsilon_k(k_F) = 0$, então $-\mu - t \cos(k_F a) = 0$ [5]. Dessa forma, o gap para ambas as dispersões ϵ_k (linhas vermelhas) e E_k (linhas azuis) se fecha com $k = 0, \pm\pi$, quando $\mu = -t$ e para $\mu = t$, como mostram os painéis Fig. 2.4(b) e (e), respectivamente.

Para o regime em que $|\mu| < t$, apresentado em Fig. 2.4(c) e (d), ambas as dispersões eletrônica e supercondutora se comportam de forma diferente. Nesse intervalo a dispersão eletrônica ϵ_k não possui gap, exibindo assim um comportamento metálico, cujo momento de Fermi k_F pode ser extraído a partir da relação $t \cos(k_F a) = -\mu$ [5]. Por outro lado, a dispersão das quasipartículas supercondutoras E_k é definida por um gap finito.

No que tange a dispersão associada à E_k , o valor $\mu = \pm t$ separa dois regimes qualitativamente distintos, sendo o primeiro relativo ao chamado regime de emparelhamento forte, quando $|\mu| > t$, e o segundo ao regime de emparelhamento fraco, para $|\mu| < t$. É importante destacar que a transição de um regime para o outro envolve necessariamente o fechamento do gap (quando $\mu = \pm t$) e que é essa transição que atribui ao sistema características topológicas, em que os MBSs não locais emergem como modos de energia zero no regime de emparelhamento fraco [1, 3, 5].

2.3 Detecção experimental de férmions de Majorana

Esta seção terá como objetivo apresentar um pouco do avanço experimental no que concerne a detecção de férmions de Majorana. Daremos mais ênfase a experimentos associados a nanofios e modelos análogos ao sistema proposto por Kitaev, discutido na seção 2.1, pois estes estão mais diretamente relacionados aos trabalhos desenvolvidos ao longo de meu doutorado e ao escopo desta tese.

A primeira afirmação da observação experimental de férmions de Majorana foi realizado

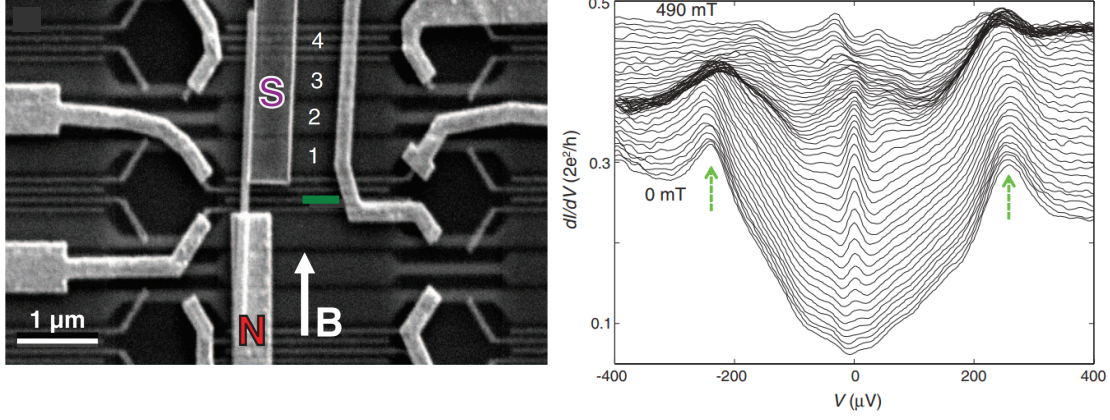


Figura 2.5: Painel da esquerda: Imagem de microscópio eletrônico de varredura do dispositivo utilizado por Mourik et. al. [15] em que um nanofio semicondutor de InSb (Índium antimonide - Antimoneto de índio) está em contato com um eletrodo metálico-normal (N) e supercondutor (S). Um campo magnético B é aplicado paralelamente ao nanofio. Painel da direita: Condutância diferencial para múltiplos valores de B , as medidas foram efetuadas a uma temperatura de 50 mK. Um pico em $V = 0$ emerge para B entre ~ 100 e ~ 400 mT, correspondendo a uma amplitude de $G \sim 0.05G_0$. Adaptado da Ref. [15].

em 2012 por Mourik et.al. [15]. O dispositivo utilizado pelos pesquisadores é apresentado pelo lado esquerdo da Fig. 2.5 em que um nanofio semicondutor de InSb (Índium antimonide - Antimoneto de índio) com forte SOC é colocado entre dois eletrodos, um metálico-normal (N) e um supercondutor (S), sob a ação de um campo magnético (B) paralelo ao nanofio. O painel direito da Fig. 2.5 fornece a condutância diferencial $dI/dV(2e^2/h)$, em unidades do quantum de condutância $G_0 = 2e^2/h$. Para um valor de $B = 0$, tem-se a emergência de dois picos em $V = \pm 250 \mu\text{eV}$ (indicados pelas setas verdes) denotando as bordas do gap supercondutor induzido no nanofio de InSb em função do efeito de proximidade com o eletrodo S. Quando o valor de B aplicado se encontra entre ~ 100 e ~ 400 mT um pico em $V = 0$ pode ser observado nos perfis de condutância, o que poderia sugerir a emergência de um MBS no nanofio. Vale destacar que outras realizações experimentais, como nas Refs. [17–20], detectaram assinaturas semelhantes.

Os resultados obtidos, embora promissores, não são congruentes com a assinatura de condutância esperada em experimentos envolvendo MFs. A amplitude obtida pelos pesquisadores no experimento foi $G \sim 0.05G_0$, que é muito menor em relação a previsão teórica de $G_0 = 2e^2/h$ [15]. Apesar de promissora, essa assinatura em energia zero não é uma evidência definitiva da detecção de um MBS, uma vez que outros fenômenos podem dar origem a assinaturas próximas ou em zero imitando os MBSs, como é o caso de desordem [21], efeito Kondo [22], estados de Andreev [23–26].

Uma segunda geração de experimentos envolveu a fabricação de sistemas híbridos [27, 28], com o crescimento epitaxial do supercondutor Al (alumínio) sobre a matriz do nanofio semicondutor de InAs (arseneto de índio), como apresentado pela Fig. 2.6(a), adaptada a partir da Ref. [27] de 2018.

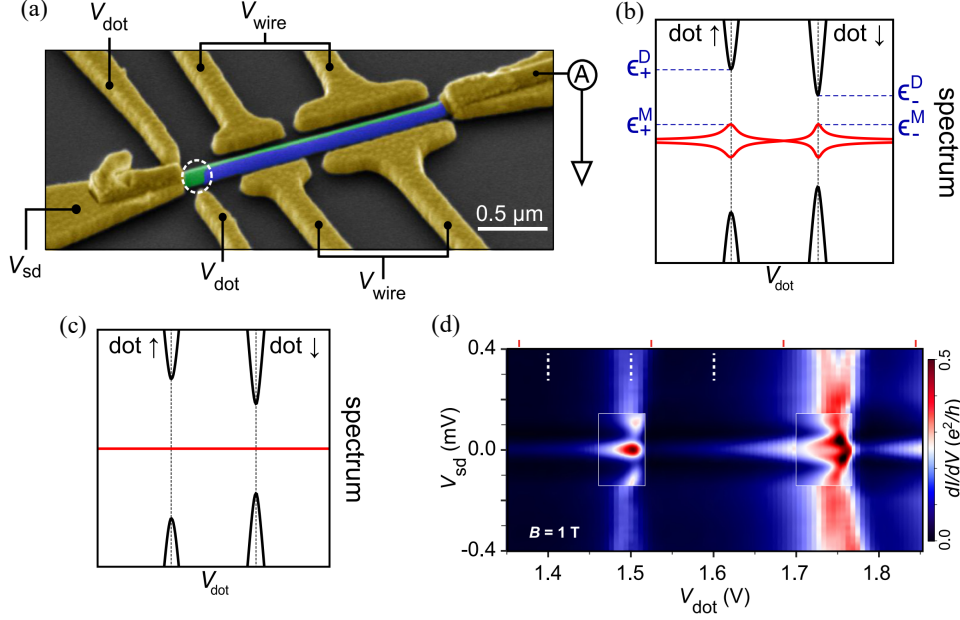


Figura 2.6: (a) Micrografia em cores falsas do dispositivo com um ponto quântico descrito pela circunferência tracejada. (b) o espectro do sistema em função da voltagem do ponto quântico V_{dot} para superposição finita entre os MBSs e (c) para o caso ideal, em que ambos os MBSs se encontram isolados nas bordas do nanofio. (d) condutância diferencial considerando um campo magnético $B = 1 \text{ T}$ que apresenta concordância com a predição estabelecida pelo painel (b). Adaptado a partir da Ref. [27].

O experimento Fig. 2.6(a) também considerou um ponto quântico (do inglês, QD: Quantum dot) nativo (descrito pela circunferência tracejada em branco) na borda do nanofio semicondutor com a finalidade de se obter características detalhadas de transporte quântico em um sistema contendo MBSs. Os painéis (b) e (c) apresentam os perfis espectrais em função da voltagem do QD para a condição em que há uma superposição finita e para o caso em que ambos os MBSs estão perfeitamente separados nas bordas do nanofio, respectivamente. Na Fig. 2.6(d) tem-se a assinatura experimental obtida da condutância diferencial para $B = 1 \text{ T}$, em que pode-se notar uma significativa concordância com a predição estabelecida pelo painel (b), havendo assim uma superposição finita entre os MBSs no nanofio.

No artigo experimental *Quantized Majorana conductance* [29], também publicado em 2018 (porém retratado), os autores afirmavam ter detectado um platô quantizado na condutância $G = 2e^2/h$ em voltagem zero, o que seria a assinatura ideal de MBSs. O arranjo experimental

é apresentado na Fig. 2.7(a), em que se tem um sistema híbrido, composto por um nanofio semiconductor de InSb parcialmente coberto com uma fina casca supercondutora de Al.

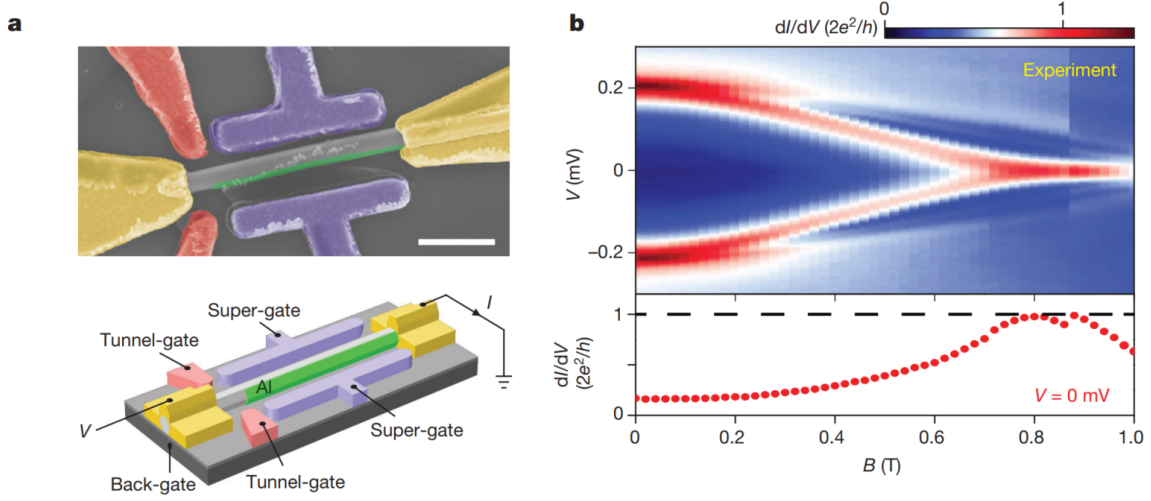


Figura 2.7: (Artigo retratado) (a) Micrografia em cores falsas do aparato experimental no painel superior e seu esquema no painel inferior. (b) Condutância diferencial dI/dV em função da voltagem V e do campo magnético B , apresentando a coalescência de dois estados ligados de Andreev (ABSs) em um pico de voltagem zero (ZBP) quantizado com o aumento dos valores de B , o painel inferior (com círculos vermelhos) apresenta um corte, do painel superior, para a $V = 0$. Adaptado de [29].

A Figura 2.7(b) apresenta a condutância diferencial dI/dV , em unidades do quantum $2e^2/h$, em função da voltagem V e do campo magnético B . É possível identificar que os dois estados ligados de Andreev (do inglês, ABS: Andreev bound state), inicialmente em $V \sim \pm 0.2$ meV para $B = 0$, se fundem com o aumento de B , dando origem a um pico de voltagem zero (do inglês, ZBP: zero-bias peak) robusto. Essa robustez do ZBP é consistente com a assinatura teórica esperada para Majoranas. O painel inferior (com círculos vermelhos) mostra que tal robustez se faz presente quando $B \sim 0.74\text{--}0.92$ T, para $V = 0$ meV, cuja altura alcança o valor quantizado $2e^2/h$. Porém, para a infelicidade da comunidade científica, o artigo foi retratado em 2021, pois varias inconsistências foram encontradas por Sergey Frolov e Vincent Mourik entre os dados “crus” obtidos a partir dos experimentos e os valores apresentados no artigo publicado, como destacado na nota de retratação [30]. Em tal nota, os autores evidenciam que a altura do platô, após a revisão, sofreu uma alteração de 8%, acima do valor $G = 2e^2/h$, não mais apresentando a assinatura ideal almejada em experimentos de detecção de MFs [29, 30].

Uma outra proposta para se explorar experimentalmente sistemas que podem manifestar excitações de Majorana, mais precisamente, neste caso, os chamados *poor man's Majoranas*, foi apresentada em 2023 pela Ref. [31], em que os autores exploraram o chamado modelo mínimo

de Kitaev.

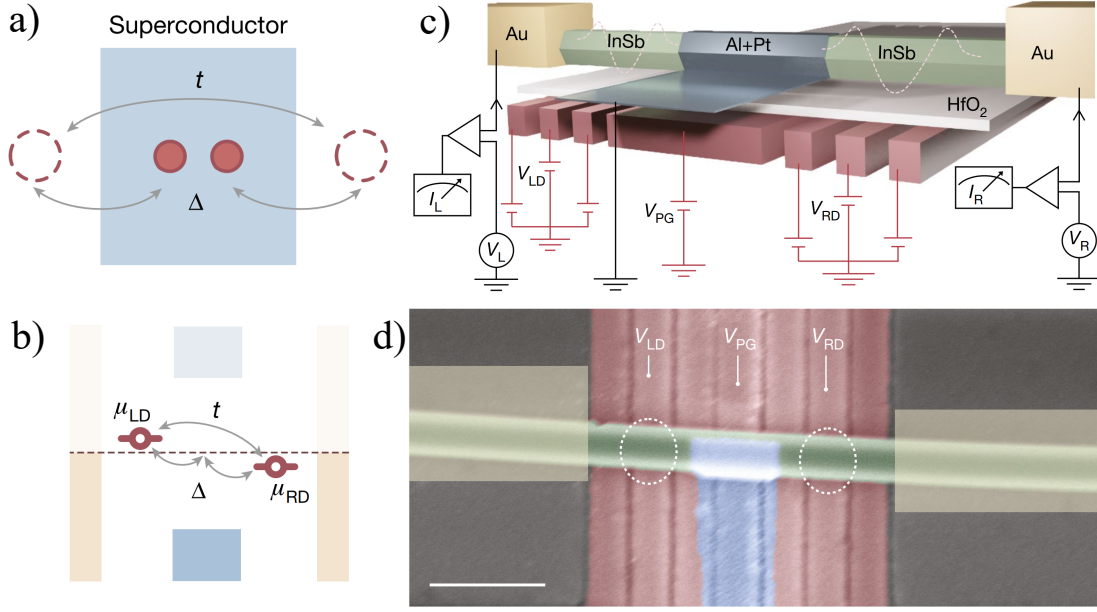


Figura 2.8: O modelo mínimo de Kitaev. (a) Representação de dois pontos quânticos (circunferências tracejadas) que podem se acoplar diretamente, por meio de um termo do tipo hopping t , e via supercondutor com uma amplitude Δ , pela reflexão cruzada de Andreev (do inglês, CAR: Crossed Andreev reflection). (b) Diagrama de energia da cadeia mínima de Kitaev, representando a ajustabilidade dos potenciais químicos nos QDs, μ_{LD} e μ_{RD} . (c) Ilustração do dispositivo e do circuito para efetuar as medições. A representação dos QDs é explicitada pelos potenciais tracejados sobre o nanofio InSb. (d) Microscopia eletrônica de varredura em cores falsas do dispositivo antes da fabricação dos terminais metálicos normais, a cor verde está indicando o nanofio semiconductor, em azul a representação do supercondutor e os QDs são representados pelas circunferências tracejadas. Adaptado da Ref. [31].

Tais excitações foram inicialmente propostas por Flensberg (2012), Ref. [9], que as nomeou de *poor man's Majorana bound states*, uma vez que esses estados não são topologicamente protegidos, porém compartilham características de MBSs que podem emergir em sistemas de supercondutividade topológica. A Figura 2.8(a) apresenta um esquema do chamado modelo mínimo de Kitaev composto por um supercondutor convencional (retângulo azul) flanqueado por dois QDS (circunferências tracejadas). Os QDs trocam informação por um termo de hopping t e um termo oriundo do acoplamento supercondutor Δ . A Fig. 2.8(b) exibe uma representação do diagrama de energia do sistema em que o potencial químico de ambos os QDs, μ_{LD} e μ_{RD} , podem ser ajustados. O painel (c), da mesma figura, apresenta uma representação esquemática do dispositivo experimental, cuja microscopia eletrônica de varredura é destacada no painel (d), em que os QD novamente são descritos pelas circunferências tracejadas [31].

Uma característica relevante de tal sistema está associada a sua montagem discreta e

ajustável, experimentalmente falando, e a concordância entre experimento e teoria [31]. Isso se deve ao fato de o modelo mínimo de Kitaev excluir problemas mais amplos [31–36], como a desordem, que se fazem presentes em elaborações experimentais que buscam desenvolver nanofios de Kitaev topológicos e longos o suficiente para se isolar os MBSs em suas bordas.

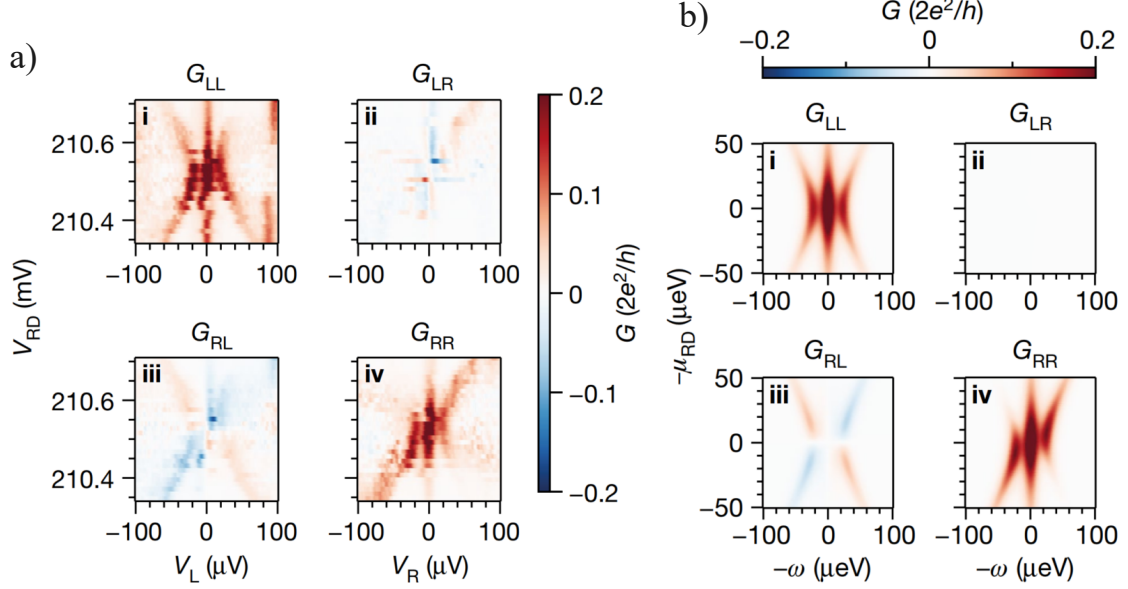


Figura 2.9: Condutância diferencial para $t = \Delta$ dada em função da voltagem e da variação da energia do QD da direita V_{RD} . (a) e (b) dizem respeito a assinatura experimental obtida e a prevista pela teoria, respectivamente. Os perfis verticais ressonantes em voltagem zero para G_{LL} e G_{RR} destacam a robustez dos *poor man's Majoranas* contra perturbações locais. Adaptado da Ref. [31].

A Fig. 2.9 mostra a coerência entre os resultados experimentais obtidos para a condutância diferencial em unidades do quantum $2e^2/h$ [painel (a)] e a análise teórica dessa mesma quantidade [painel (b)]. Os autores chamam atenção para as assinaturas verticais em voltagem zero que aparecem tanto para G_{LL} quanto na G_{RR} , sendo as assinaturas para o QD da esquerda (left) e direita (right), respectivamente, destacando que tais perfis persistem mesmo quando o potencial de um dos QDs se afasta de zero. Essa observação experimental é de grade importância e destaca a robustez dos nomeados *poor man's Majoranas* contra perturbações locais [9, 31].

Capítulo 3

Formalismo matemático

Neste capítulo apresentaremos o formalismo matemático necessário para obtenção da chamada densidade de estados (do inglês, DOS: Density of states) que pode ser extraída a partir da expressão

$$\text{DOS} = -\frac{1}{\pi} \text{Im}[\mathcal{G}_{\Psi; \Psi^\dagger}^R(\omega)] = -\frac{1}{\pi} \text{Im}[\langle \langle \Psi; \Psi^\dagger \rangle \rangle]. \quad (3.1)$$

A partir dessa quantidade analisaremos o comportamento eletrônico dos sistemas estudados e, vale destacar também que, a DOS é proporcional a condutância diferencial, $\text{DOS} \propto dI/dV$. Para obtermos a Eq. (3.1) estudaremos modelos análogos ao de Anderson, utilizando o formalismo das funções de Green, cuja evolução temporal de seus operadores será efetuada por meio da técnica da equação de movimento (do inglês, EOM: Equation of motion) [16], como apresentaremos a seguir.

3.1 Modelo de Anderson de uma Impureza

O conhecido e bem estabelecido modelo de Anderson foi desenvolvido em 1961 por Philip Warren Anderson. Esse é um dos primeiros modelos na matéria condensada a considerar sistemas físicos com correlação de muitos corpos. O modelo de Anderson de uma impureza (do inglês, *SIAM: Single Impurity Anderson Model*) está esquematizado na Fig. 3.2. Esse modelo estuda a forma com que uma impureza magnética interage com uma matriz metálica (não magnética), ou seja, a maneira com que é estabelecida a formação de momentos magnéticos em matrizes metálicas devido a sua dopagem por impurezas com momentos magnéticos bem definidos [16, 37].

A Fig. 3.2 é uma representação esquemática do modelo de Anderson de uma única impureza, cujo Hamiltoniano pode ser escrito como [37]:



Figura 3.1: Philip Warren Anderson (1923 - 2020) foi um físico estadunidense e recebeu o prêmio Nobel de Física em 1977.

Fonte: nobelprize.org

$$\mathcal{H}_{SIAM} = \mathcal{H}_{host} + \mathcal{H}_{imp} + \mathcal{H}_{hib}, \quad (3.2)$$

em que o primeiro termo representa o hospedeiro metálico, o gás de elétrons não interagente, e é dado por

$$\mathcal{H}_{host} = \sum_{\sigma k} \varepsilon_{\sigma k} c_{\sigma k}^{\dagger} c_{\sigma k}, \quad (3.3)$$

sendo $c_{\sigma k}^{\dagger}$ ($c_{\sigma k}$) o operador de criação (aniquilação) de elétrons com spin σ e número de onda k para uma dada energia $\varepsilon_{\sigma k}$. O termo da impureza é

$$\mathcal{H}_{imp} = \sum_{\sigma} \epsilon_{d\sigma} n_{d\sigma} + U n_{d\uparrow} n_{d\downarrow}, \quad (3.4)$$

em que $n_{d\sigma} = d_{\sigma}^{\dagger} d_{\sigma}$ é o operador número para elétrons com spin σ e energia $\epsilon_{d\sigma}$, descrevendo uma impureza de um único nível. A amplitude U está associada a correlação entre os elétrons

da impureza com spins contrários, $n_{d\uparrow}$ e $n_{d\downarrow}$ são os operadores número para os spins *up* e *down*, respectivamente.

Havendo uma superposição/hibridização dos estados da impureza e do hospedeiro, esses dois sistemas podem trocar elétrons e essa troca é descrita pelo último termo da Eq. (3.2),

$$\mathcal{H}_{hib} = \sum_{\sigma k} V(d_{\sigma}^{\dagger}c_{\sigma k} + \text{H.c.}), \quad (3.5)$$

com amplitude de hibridização dada por V . Apesar de sua simplicidade, o modelo de Anderson é empregado para descrever uma ampla variedade de sistemas correlacionados na Física da Matéria Condensada. Esse modelo é fundamental, pois empregamos uma versão análoga no desenvolvimento do trabalho que apresentaremos nos próximos capítulos.

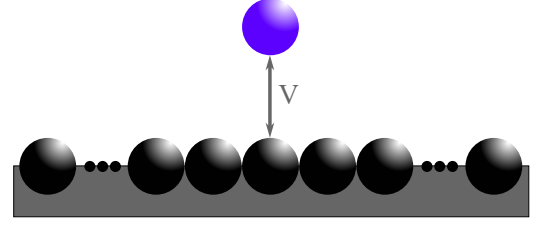


Figura 3.2: Representação esquemática do modelo de Anderson com uma impureza magnética sob um hospedeiro metálico. A intensidade da hibridização impureza-hospedeiro é determinada pelo parâmetro V .

3.2 Funções de Green

O formalismo de funções de Green (do inglês, GFs: Green's functions), desenvolvido por George Green (1793 - 1842), é amplamente utilizado no estudo de equações diferenciais ordinárias e parciais em muitos ramos da Matemática e Física. Na Mecânica Quântica, as GFs podem ser empregadas como ferramentas para se resolver equações de Schrödinger, obtendo os autovalores de um determinado Hamiltoniano sob ação de um potencial externo [16]. As GFs são também conhecidas como propagadores, uma vez que associam a evolução temporal de um operador relacionado a uma dada posição e tempo iniciais para outros valores de tempo e espaço [16, 38].

No campo da Física de Muitos Corpos as GFs possibilitam o estudo do espalhamento de partículas, sistemas fora do equilíbrio, Mecânica Estatística, entre outros. Nos estudos que apresentaremos mais adiante, as GFs desempenharão um papel fundamental, pois, por serem funções de correlação, elas permitem a obtenção de quantidades como a densidade de estados que está no cerne de nossos resultados. Existem diversos tipos de GFs, porém faremos uso

apenas da função de Green retardada no equilíbrio [16, 38], que pode ser escrita na forma

$$\mathcal{G}_\sigma^R(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -\frac{i}{\hbar} \theta(t - t') Z_e^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | [\Psi_\sigma(\mathbf{r}, t), \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}', t')]_+ | n \rangle, \quad (3.6)$$

em que $\theta(t - t')$ é a função degrau (ou Heaviside); $Z = \text{Tr}\{e^{-\beta \mathcal{H}}\}$ é a função de partição do sistema, sendo que Tr simboliza o traço e $\beta = 1/(k_B T)$ com a constante de Boltzmann k_B , $\mathcal{H}$ é o Hamiltoniano do sistema em estudo. $\langle \dots \rangle$ descreve a média térmica sobre a operação de anticomutação $[\dots, \dots]_+$ (também descrita por $\{\dots, \dots\}$) dos operadores $\Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}', t')$ e $\Psi_\sigma(\mathbf{r}, t)$, que representam, respectivamente, a criação de uma partícula com spin σ na posição $\mathbf{r}'$ no instante t' seguida de sua destruição em um ponto diferente de espaço $\mathbf{r}$ e tempo t . Nesse ponto, podemos evidenciar a característica de propagador da função de Green, descrita por meio da evolução temporal dos operadores [38].

A função de Green expressa pela Eq. (3.6) pertence ao domínio do tempo, ou seja, é função de t e t' , porém a DOS, apresentada no início deste capítulo, é obtida a partir da uma GF no domínio da energia [Eq. (3.1) - note que não há dependência espacial, pois a DOS é obtida localmente]. Sendo assim, a transformada de Fourier para transitar do domínio do tempo para o da energia torna-se fundamental e tal procedimento será abordado por meio da técnica da equação de movimento (EOM).

3.3 Equação de Movimento

Nesta seção abordaremos a técnica da EOM a partir da qual estudaremos a evolução temporal dos operadores e consequentemente a dinâmica das GFs [38]. Consideremos então, para fins de exemplificação, uma função de Green retardada, como a apresentada na Seção 3.2. Por simplicidade a dependência espacial $\mathbf{r}'$ será omitida e vamos considerar $t' = 0$. Dessa forma, temos a GF

$$\mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(t, 0) = -\frac{i}{\hbar} \theta(t - 0) Z_e^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n} \left\langle n \left| \left[\eta_i(t), \eta_j^\dagger(0) \right]_+ \right| n \right\rangle. \quad (3.7)$$

Façamos a derivada da função $\mathcal{G}^R$ com respeito ao tempo t ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G}_{\eta_i\eta_j}^R(t,0) &= -\frac{i}{\hbar}\left[\frac{\partial}{\partial t}\theta(t-0)\right]Z_e^{-1}\sum_n e^{-\beta E_n}\left\langle n\left|\left[\eta_i(t),\eta_j^\dagger(0)\right]_+\right|n\right\rangle \\ &- \frac{i}{\hbar}\theta(t-0)Z_e^{-1}\sum_n e^{-\beta E_n}\left\langle n\left|\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\eta_i(t)\right),\eta_j^\dagger(0)\right]_+\right|n\right\rangle,\end{aligned}\quad (3.8)$$

lembrando que derivada da função degrau corresponde a uma função delta de Dirac, $\frac{\partial}{\partial t}\theta(t-0) = \delta(t-0)$. Para estudarmos a evolução temporal do operador $\eta_i(t)$ fazemos uso da equação de Heisenberg, descrita por

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\eta_i(t) &= [\eta_i,\mathcal{H}] \\ \frac{\partial}{\partial t}\eta_i(t) &= -\frac{i}{\hbar}[\eta_i,\mathcal{H}].\end{aligned}\quad (3.9)$$

Sendo assim, a Eq. (3.8) torna-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G}_{\eta_i\eta_j}^R(t,0) &= -\frac{i}{\hbar}\delta(t-0)Z_e^{-1}\sum_n e^{-\beta E_n}\left\langle n\left|\left[\eta_i(t),\eta_j^\dagger(0)\right]_+\right|n\right\rangle \\ &- \frac{i}{\hbar}\theta(t-0)Z_e^{-1}\sum_n e^{-\beta E_n}\left\langle n\left|\left[-\frac{i}{\hbar}[\eta_i,\mathcal{H}],\eta_j^\dagger(0)\right]_+\right|n\right\rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar}\delta(t-0)Z_e^{-1}\sum_n e^{-\beta E_n}\left\langle n\left|\left[\eta_i(t),\eta_j^\dagger(0)\right]_+\right|n\right\rangle \\ &- \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\frac{i}{\hbar}\theta(t-0)Z_e^{-1}\sum_n e^{-\beta E_n}\left\langle n\left|\left[[\eta_i,\mathcal{H}],\eta_j^\dagger(0)\right]_+\right|n\right\rangle,\end{aligned}\quad (3.10)$$

podemos reescrever, reconhecendo a GF descrita pelo último termo

$$\mathcal{G}_{[\eta_i,\mathcal{H}]\eta_j}^R(t,0) = -\frac{i}{\hbar}\theta(t-0)Z_e^{-1}\sum_n e^{-\beta E_n}\left\langle n\left|\left[[\eta_i,\mathcal{H}],\eta_j^\dagger(0)\right]_+\right|n\right\rangle,\quad (3.11)$$

dessa forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G}_{\eta_i\eta_j}^R(t,0) &= -\frac{i}{\hbar}\delta(t-0)Z_e^{-1}\sum_n e^{-\beta E_n}\left\langle n\left|\left[\eta_i(t),\eta_j^\dagger(0)\right]_+\right|n\right\rangle \\ &- \frac{i}{\hbar}\mathcal{G}_{[\eta_i,\mathcal{H}]\eta_j}^R(t,0).\end{aligned}\quad (3.12)$$

Vamos aplicar agora a transformada de Fourier para levar a GF do domínio do tempo para

o da energia. Tal transformada é descrita por

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\Psi_i \Psi_j}^R(\omega^+) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathcal{G}_{\Psi_i \Psi_j}^R(t) e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t}, \quad (3.13)$$

na qual a frequência espectral $\omega^+ \rightarrow (\omega + i\eta^+)$, sendo que $\eta^+ \rightarrow 0^+$ é fundamental para que a expressão convirja nos limites.

Multipliquemos agora a Eq. (3.12) por $e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t}$ e integremos no intervalo de $-\infty$ à $+\infty$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(t, 0) e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t} &= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \delta(t-0) Z_e^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n} \left\langle n \left| \left[\eta_i(t), \eta_j^\dagger(0) \right]_+ \right| n \right\rangle e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t} \\ &+ \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathcal{G}_{[\eta_i, \mathcal{H}] \eta_j}^R(t, 0) e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Vamos utilizar o método da integração por partes, considerando $u = e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t}$ implicando em $du = \frac{i}{\hbar} \omega^+ e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t} dt$ e considerando $dv = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(t, 0) dt$, o que resulta em $v = \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(t, 0)$. Assim, pelo método de integração por partes $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(t, 0) e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t} &= \left[e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t} \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(t, 0) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(t, 0) \frac{i}{\hbar} \omega^+ e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t} dt \\ &= \left[e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ (+\infty)} \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(+\infty) - e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ (-\infty)} \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(-\infty) \right] \\ &+ \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \omega^+ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(t, 0) e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t} dt \\ &= \left[e^{\frac{i}{\hbar} (\omega + i\eta)(+\infty)} \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(+\infty) - e^{\frac{i}{\hbar} (\omega + i\eta)(-\infty)} \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(-\infty) \right] \\ &+ \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \omega^+ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(t, 0) e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t} dt \\ &= -\frac{i}{\hbar} \omega^+ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(t, 0) e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t} dt. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por meio da Eq. (3.13), o resultado para a esquerda da Eq. (3.14) fica como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}_{\eta_i \eta_j}^R(t, 0) e^{\frac{i}{\hbar} \omega^+ t} = -\frac{i}{\hbar} \omega^+ \tilde{\mathcal{G}}_{\eta_i \eta_j}^R(\omega^+). \quad (3.16)$$

Dessa forma, tendo a Eq. (3.16) e utilizando a propriedade da delta de Dirac $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$, a Eq. (3.14) assume a forma

$$\omega^+ \tilde{\mathcal{G}}_{\eta_i \eta_j}^R(\omega^+) = \langle [\eta_i(0), \eta_j^\dagger(0)]_+ \rangle + \tilde{\mathcal{G}}_{[\eta_i, \mathcal{H}] \eta_j}^R(\omega^+). \quad (3.17)$$

De forma resumida, a EOM pode gerar um série de novas funções de Green. Como vimos, o cálculo da função $\tilde{\mathcal{G}}_{\eta_i\eta_j}^R(\omega)$ gera uma nova GF $\tilde{\mathcal{G}}_{[\eta_i, \mathcal{H}]\eta_j}^R(\omega)$ que ao ser calculada dará origem a novas GFs. Em alguns casos, o número de equações que surgirão a partir de uma única GF tende a ser infinito, isso se dá tipicamente quando o Hamiltoniano possui termos de ordem superior a dois, ou seja, não é quadrático. Em tais casos a utilização de aproximações, como a aproximação de Hubbard I [39], se faz necessária a fim de tornar o sistema solúvel, porém cuidados devem ser tomados para que nenhuma informação física relevante seja perdida no processo.

A Eq. (3.17) também pode ser escrita na chamada notação de Zubarev [40], assumindo a forma

$$\omega^+ \langle \langle \eta_i; \eta_j^\dagger \rangle \rangle = \langle [\eta_i, \eta_j^\dagger]_+ \rangle + \langle \langle [\eta_i, \mathcal{H}]; \eta_j^\dagger \rangle \rangle. \quad (3.18)$$

Sendo essa uma notação mais compacta, optamos por sua utilização no desenvolvimento cálculos que apresentaremos no Capítulo 4. Uma característica interessante que pode ser notada pelas Eqs. (3.17) e (3.18) é que a dinâmica das funções de Green é estabelecida pelo Hamiltoniano do sistema.

Capítulo 4

Modelo estudado

Neste capítulo apresentaremos o desenvolvimento analítico para a obtenção das funções de Green relacionadas ao sistema apresentado pela Fig. 4.1.

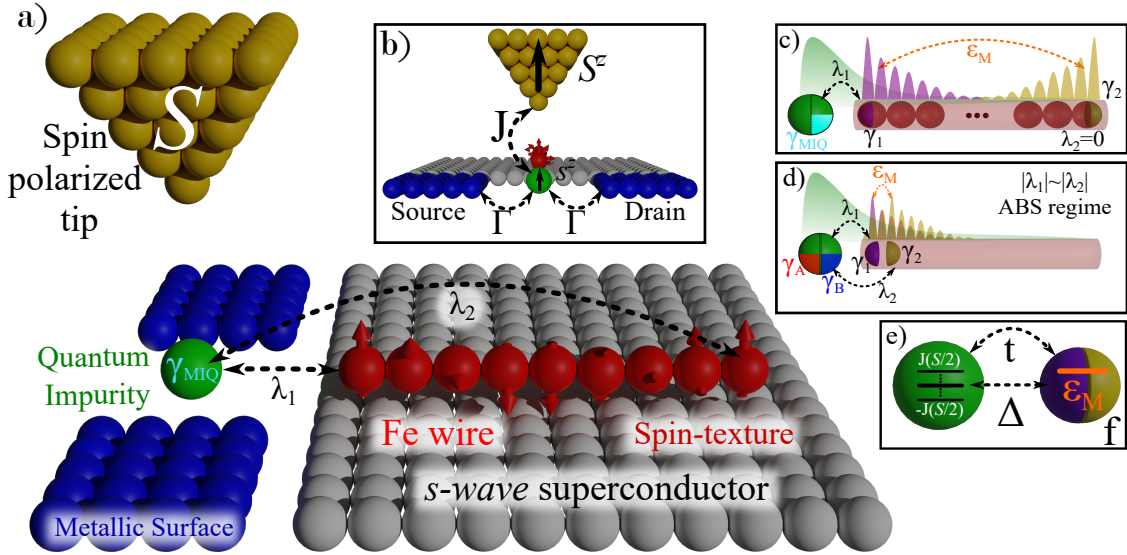


Figura 4.1: (a) Representação esquemática do dispositivo proposto, composto por uma cadeia de átomos depositados sob uma matriz supercondutora do tipo s -wave capaz de induzir, por efeito de proximidade, a supercondutividade do tipo p -wave na cadeia. Uma das bordas do nanofio (cadeia de átomos) se acopla a uma impureza quântica (QI) que é lateralmente flanqueada por dois terminais metálicos e que também acopla-se a uma ponta spin-polarizada. (b) Visão lateralizada do sistema apresentado no painel (a), evidenciando o acoplamento da QI à ponta spin-polarizada, dado pela interação de troca do tipo Ising J , e aos terminais metálicos, dados por Γ . (c) Modelo efetivo do nanofio contendo MZMs nas bordas (nanofio de Kitaev) que podem se superpor com uma amplitude ε_M e em que apenas γ_1 se acopla a QI por λ_1 . (d) Modelo efetivo para o regime de estados ligados de Andreev obtido quando $|\lambda_1| \sim |\lambda_2|$. (e) Descritos na base fermiônica os MZMs, γ_1 e γ_2 , se comportam como um férmion não local f , cujo o nível de energia é descrito por ε_M . O nível de energia da QI é dividido em $2S + 1$ níveis que vão de $-J(S/2)$ até $+J(S/2)$, já o hopping t e emparelhamento supercondutor Δ são responsáveis pela troca de informação entre o sítio f e a QI [10].

4.1 Hamiltoniano

O Hamiltoniano, análogo ao modelo de Anderson [37], associado ao sistema apresentado pela Fig. 4.1 é escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{\alpha k \sigma} \varepsilon_{\alpha k} c_{\alpha k \sigma}^\dagger c_{\alpha k \sigma} + \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} d_{\sigma}^\dagger d_{\sigma} + V \sum_{\alpha k \sigma} \left(c_{\alpha k \sigma}^\dagger d_{\sigma} + \text{H.c.} \right) + J s^z S^z \\ &+ \mathcal{H}_{MZM}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

em que o operador $c_{\alpha k \sigma}^\dagger (c_{\alpha k \sigma})$ descreve a criação (aniquilação) de um elétron com momento k , spin σ e energia $\varepsilon_{\alpha k}$ no terminal metálico $\alpha = [\text{source}, \text{drain}]$. O operador $d_{\sigma}^\dagger (d_{\sigma})$ está associado aos elétrons no sítio da impureza quântica (QI), cuja energia ε_{σ} é descrita por spin. V descreve a amplitude de acoplamento entre a QI e os terminais metálicos, enquanto que interação da QI à ponta spin-polarizada é dada por um termo de troca do tipo Ising J . O termo do Hamiltoniano, Eq. (4.1), envolvendo a interação J possui as componentes s^z e S^z , sendo a primeira referente à QI, com $s = 1/2$, e a segunda está associada a descrição da ponta spin-polarizada. Esse termo pode ser escrito considerando $s^z = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sigma n_{\sigma}$, sendo $n_{\sigma} = d_{\sigma}^\dagger d_{\sigma}$, e $S^z = \sum_m m Y^{mm} = \sum_m m |m\rangle \langle m|$ com $m = [-S, -S+1, \dots, S-1, S]$. Dessa forma, cada canal de spin na QI adquire uma estrutura de multinível, cujo número de níveis é dado por $2S+1$.

O último termo da equação Eq. (4.1) está associado à emergência dos MZMs e é escrito como

$$\mathcal{H}_{MZM} = i\varepsilon_M \gamma_1 \gamma_2 + \lambda_1 (d_{\uparrow} - d_{\uparrow}^\dagger) \gamma_1 + \lambda_2 (d_{\uparrow} + d_{\uparrow}^\dagger) \gamma_2, \quad (4.2)$$

sendo ε_M o parâmetro de superposição entre os MZMs isolados nas bordas do nanofio, γ_1 e γ_2 . Os parâmetros λ_1 e λ_2 acoplam o canal de spin up da QI aos MZMs γ_1 e γ_2 , respectivamente. Note que o canal de spin down está desacoplado do nanofio de Majorana.

Por fins de simplicidade, no desenvolvimentos dos cálculos faremos uso das relações que associam um MZM à uma combinação linear de partícula e buraco, como discutido no Capítulo 2. Sendo assim, vamos considerar $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f^\dagger + f)$ e $\gamma_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(f^\dagger - f)$. Consideremos também as parametrizações $\lambda_1 = (\Delta + t)/\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = i(\Delta - t)/\sqrt{2}$. Com esses termos, a Eq. (4.2) assume a forma

$$\mathcal{H}_{MZM} = \varepsilon_M (f^\dagger f - \frac{1}{2}) + t d_{\uparrow} f^\dagger + t f d_{\uparrow}^\dagger + \Delta f^\dagger d_{\uparrow}^\dagger + \Delta d_{\uparrow} f, \quad (4.3)$$

em que os MZMs dão origem a um férmion regular não local f , cujo nível de energia é dado por ε_M , t descreve o hopping e Δ representa a energia de formação do par de Copper, originando um sistema análogo ao apresentado pelas Refs. [9] e [31], o que possibilita o aparecimento dos *poor man's Majoranas*.

Dessa forma, a Eq. (4.1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = & \sum_{\alpha k \sigma} \varepsilon_{\alpha k} c_{\alpha k \sigma}^\dagger c_{\alpha k \sigma} + \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} d_{\sigma}^\dagger d_{\sigma} + V \sum_{\alpha k \sigma} \left(c_{\alpha k \sigma}^\dagger d_{\sigma} + \text{H.c.} \right) \\ & + \frac{J}{2} \sum_m m n_{\uparrow} Y^{mm} - \frac{J}{2} \sum_m m n_{\downarrow} Y^{mm} \\ & + \varepsilon_M (f^\dagger f - \frac{1}{2}) + (t d_{\uparrow} f^\dagger + \Delta d_{\uparrow} f + \text{H.c.}).\end{aligned}\quad (4.4)$$

Tendo a Eq. (4.4), podemos definir as densidades de estados do sistema performando a EOM sobre as funções de Green [16, 38], como discutiremos na próxima seção.

4.2 Densidade de estados da QI

Podemos expressar as funções de Green da QI da seguinte maneira $\tilde{\mathcal{G}}_{d_{\sigma} d_{\sigma}}^R(\omega) = \langle\langle d_{\sigma}; d_{\sigma}^\dagger \rangle\rangle$ e devido a presença da ponta spin-polarizada temos $\langle\langle d_{\sigma}; d_{\sigma}^\dagger \rangle\rangle = \sum_m \langle\langle d_{\sigma} Y^{mm}; d_{\sigma}^\dagger \rangle\rangle$, com $Y^{mm} = |m\rangle\langle m|$. Como apresentamos na Seção 3.3, utilizaremos a notação simplificada de Zubarev [Eq. (3.18)]. Dessa forma,

$$\omega^+ \langle\langle d_{\sigma} Y^{mm}; d_{\sigma}^\dagger \rangle\rangle = \langle [d_{\sigma} Y^{mm}, d_{\sigma}^\dagger]_+ \rangle + \langle\langle [d_{\sigma} Y^{mm}, \mathcal{H}]; d_{\sigma}^\dagger \rangle\rangle, \quad (4.5)$$

sendo o anticomutador $\langle [d_{\sigma} Y^{mm}, d_{\sigma}^\dagger]_+ \rangle = \langle Y^{mm} \rangle$ e o comutador

$$\begin{aligned}[d_{\sigma} Y^{mm}, \mathcal{H}] = & \left[d_{\sigma} Y^{mm}, \sum_{\alpha k \sigma'} \varepsilon_{\alpha k} c_{\alpha k \sigma'}^\dagger c_{\alpha k \sigma'} \right] + \left[d_{\sigma} Y^{mm}, V \sum_{\alpha k \sigma'} \left(c_{\alpha k \sigma'}^\dagger d_{\sigma'} + d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha k \sigma'} \right) \right] \\ & + [d_{\sigma} Y^{mm}, (\varepsilon_{\uparrow} n_{\uparrow} + \varepsilon_{\downarrow} n_{\downarrow})] + \left[d_{\sigma} Y^{mm}, \frac{J}{2} \sum_{m'} m' n_{\uparrow} Y^{m' m'} \right] \\ & + \left[d_{\sigma} Y^{mm}, \left(-\frac{J}{2} \sum_{m'} m' n_{\downarrow} Y^{m' m'} \right) \right] + [d_{\sigma} Y^{mm}, \mathcal{H}_{MZM}].\end{aligned}$$

Desenvolvendo as operações de comutação separadamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\left[d_\sigma Y^{mm}, \sum_{k\alpha\sigma'} \varepsilon_{k\alpha} c_{k\alpha\sigma'}^\dagger c_{k\alpha\sigma'} \right] &= \sum_{k\alpha\sigma'} \varepsilon_{k\alpha} \left[d_\sigma Y^{mm}, c_{k\alpha\sigma'}^\dagger c_{k\alpha\sigma'} \right] \\
&= \sum_{k\alpha\sigma'} \varepsilon_{k\alpha} \left(d_\sigma Y^{mm} c_{k\alpha\sigma'}^\dagger c_{k\alpha\sigma'} - c_{k\alpha\sigma'}^\dagger c_{k\alpha\sigma'} d_\sigma Y^{mm} \right) \\
&= \sum_{k\alpha\sigma'} \varepsilon_{k\alpha} \left(-c_{k\alpha\sigma'}^\dagger d_\sigma c_{k\alpha\sigma'} Y^{mm} - c_{k\alpha\sigma'}^\dagger c_{k\alpha\sigma'} d_\sigma Y^{mm} \right) \\
&= \sum_{k\alpha\sigma'} \varepsilon_{k\alpha} \left(c_{k\alpha\sigma'}^\dagger c_{k\alpha\sigma'} d_\sigma Y^{mm} - c_{k\alpha\sigma'}^\dagger c_{k\alpha\sigma'} d_\sigma Y^{mm} \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Para o comutador que relaciona d_σ e o termo associado à hibridização V

$$\begin{aligned}
\left[d_\sigma Y^{mm}, V \sum_{\alpha k\sigma'} \left(c_{\alpha k\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} + d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha k\sigma'} \right) \right] &= V \sum_{k\sigma'} \left[d_\sigma Y^{mm}, \left(c_{\alpha k\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} + d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha k\sigma'} \right) \right] \\
&= V \sum_{\alpha} k\sigma' \left[\left(d_\sigma Y^{mm} c_{\alpha k\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} - c_{\alpha k\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} d_\sigma Y^{mm} \right) + \left(d_\sigma Y^{mm} d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha k\sigma'} - d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha k\sigma'} d_\sigma Y^{mm} \right) \right] \\
&= V \sum_{\alpha k\sigma'} \left[\left(d_\sigma c_{\alpha k\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} Y^{mm} - c_{\alpha k\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} d_\sigma Y^{mm} \right) + \left(d_\sigma d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha k\sigma'} Y^{mm} - d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha k\sigma'} d_\sigma Y^{mm} \right) \right] \\
&= V \sum_{\alpha k\sigma'} \left[\left(c_{\alpha k\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} d_\sigma Y^{mm} - c_{\alpha k\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} d_\sigma Y^{mm} \right) + \left(\left(\delta_{\sigma\sigma'} - d_{\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} \right) c_{\alpha k\sigma'} Y^{mm} - d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha k\sigma'} d_\sigma Y^{mm} \right) \right] \\
&= V \sum_{\alpha k\sigma'} \left(\delta_{\sigma\sigma'} c_{\alpha k\sigma'} Y^{mm} - d_{\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} c_{\alpha k\sigma'} Y^{mm} - d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha k\sigma'} d_\sigma Y^{mm} \right) \\
&= V \sum_{\alpha k\sigma'} \left(\delta_{\sigma\sigma'} c_{\alpha k\sigma'} Y^{mm} + d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha k\sigma'} d_\sigma Y^{mm} - d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha k\sigma'} d_\sigma Y^{mm} \right) \\
&= V \sum_{\alpha k} c_{\alpha k\sigma} Y^{mm}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Para a comutação com os termos associados aos canais de spin da QI.

$$\left[d_\sigma Y^{mm}, (\varepsilon_\uparrow n_\uparrow + \varepsilon_\downarrow n_\downarrow) \right] = \left[d_\sigma Y^{mm}, \left(\varepsilon_\uparrow d_\uparrow^\dagger d_\uparrow + \varepsilon_\downarrow d_\downarrow^\dagger d_\downarrow \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\varepsilon_{\uparrow} \left(d_{\sigma} Y^{mm} d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} Y^{mm} \right) + \varepsilon_{\downarrow} \left(d_{\sigma} Y^{mm} d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\downarrow} - d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\downarrow} d_{\sigma} Y^{mm} \right) \right] \\
&= \left[\varepsilon_{\uparrow} \left(d_{\sigma} d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} Y^{mm} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} Y^{mm} \right) + \varepsilon_{\downarrow} \left(d_{\sigma} d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\downarrow} Y^{mm} - d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\downarrow} d_{\sigma} Y^{mm} \right) \right] \\
&= \left[\varepsilon_{\uparrow} \left(\left(\delta_{\sigma\uparrow} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\sigma} \right) d_{\uparrow} Y^{mm} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} Y^{mm} \right) + \varepsilon_{\downarrow} \left(\left(\delta_{\sigma\downarrow} - d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\sigma} \right) d_{\downarrow} Y^{mm} - d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\downarrow} d_{\sigma} Y^{mm} \right) \right] \\
&= \left[\varepsilon_{\uparrow} \left(\delta_{\sigma\uparrow} d_{\uparrow} Y^{mm} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\sigma} d_{\uparrow} Y^{mm} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} Y^{mm} \right) + \varepsilon_{\downarrow} \left(\delta_{\sigma\downarrow} d_{\downarrow} Y^{mm} - d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\sigma} d_{\downarrow} Y^{mm} - d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\downarrow} d_{\sigma} Y^{mm} \right) \right] \\
&= \left[\varepsilon_{\uparrow} \left(\delta_{\sigma\uparrow} d_{\uparrow} Y^{mm} + d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} Y^{mm} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} Y^{mm} \right) + \varepsilon_{\downarrow} \left(\delta_{\sigma\downarrow} d_{\downarrow} Y^{mm} + d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\downarrow} d_{\sigma} Y^{mm} - d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\downarrow} d_{\sigma} Y^{mm} \right) \right] \\
&= \left[\varepsilon_{\uparrow} d_{\uparrow} Y^{mm} \delta_{\sigma\uparrow} + \varepsilon_{\downarrow} d_{\downarrow} Y^{mm} \delta_{\sigma\downarrow} \right]. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

A comutação de d_{σ} com o termo vinculado a interação de troca J ,

$$\begin{aligned}
&\left[d_{\sigma} Y^{mm}, \frac{J}{2} \sum_{m'} m' n_{\uparrow} Y^{m'm'} \right] = \frac{J}{2} \sum_{m'} m' \left[d_{\sigma} Y^{mm}, d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} Y^{m'm'} \right] \\
&= \frac{J}{2} \sum_{m'} m' \left(d_{\sigma} Y^{mm} d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} Y^{m'm'} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} Y^{m'm'} d_{\sigma} Y^{mm} \right) \\
&= \frac{J}{2} \sum_{m'} m' \left(d_{\sigma} d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} \left(\delta_{mm'} Y^{mm'} \right) - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} \left(\delta_{m'm} Y^{m'm} \right) \right) \\
&= \frac{J}{2} \sum_{m'} m' \left(d_{\sigma} d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} \left(\delta_{mm'} Y^{mm'} \right) - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} \left(\delta_{m'm} Y^{mm'} \right) \right) \\
&= \frac{J}{2} \sum_{m'} m' \left(\left(\delta_{\sigma\uparrow} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\sigma} \right) d_{\uparrow} \left(\delta_{mm'} Y^{mm'} \right) - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} \left(\delta_{m'm} Y^{m'm} \right) \right) \\
&= \frac{J}{2} \sum_{m'} m' \left(\delta_{\sigma\uparrow} d_{\uparrow} \left(\delta_{mm'} Y^{mm'} \right) - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\sigma} d_{\uparrow} \left(\delta_{mm'} Y^{mm'} \right) - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} \left(\delta_{m'm} Y^{m'm} \right) \right) \\
&= \frac{J}{2} \sum_{m'} m' \left(\delta_{\sigma\uparrow} d_{\uparrow} \left(\delta_{mm'} Y^{mm'} \right) + d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} \left(\delta_{mm'} Y^{mm'} \right) - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} \left(\delta_{m'm} Y^{m'm} \right) \right) \\
&= \frac{J}{2} \left(\delta_{\sigma\uparrow} d_{\uparrow} \left(\sum_{m'} m' \delta_{mm'} Y^{mm'} \right) + d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} \left(\sum_{m'} m' \delta_{mm'} Y^{mm'} \right) - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} \left(\sum_{m'} m' \delta_{m'm} Y^{m'm} \right) \right) \\
&= \frac{J}{2} \left(\delta_{\sigma\uparrow} d_{\uparrow} m Y^{mm} + d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} (m Y^{mm}) - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\sigma} (m Y^{mm}) \right) \\
&= \frac{J}{2} d_{\uparrow} m Y^{mm} \delta_{\sigma\uparrow}, \tag{4.9}
\end{aligned}$$

de maneira análoga obtemos $\left[d_{\sigma} Y^{mm}, \left(-\frac{J}{2} \sum_{m'} m' n_{\downarrow} Y^{m'm'} \right) \right] = -\frac{J}{2} d_{\downarrow} m Y^{mm} \delta_{\sigma\downarrow}$ ¹.

¹Podemos calcular os termos associados a ponta spin-polarizada por meio da regra do produto: $Y^{ab} Y^{cd} = |a\rangle\langle b||c\rangle\langle d| = \delta_{bc} Y^{ad}$.

Agora, para os termos associados aos MZMs

$$\begin{aligned} [d_\sigma Y^{mm}, \mathcal{H}_{MZM}] &= [d_\sigma Y^{mm}, \varepsilon_M f^\dagger f] + [d_\sigma Y^{mm}, t d_\uparrow f^\dagger] + [d_\sigma Y^{mm}, \Delta f^\dagger d_\uparrow^\dagger] \\ &+ [d_\sigma Y^{mm}, t f d_\uparrow^\dagger] + [d_\sigma Y^{mm}, \Delta d_\uparrow f], \end{aligned} \quad (4.10)$$

temos: $[d_\sigma Y^{mm}, \varepsilon_M f^\dagger f] = 0$, $[d_\sigma Y^{mm}, t d_\uparrow f^\dagger] = 0$ e $[d_\sigma Y^{mm}, \Delta d_\uparrow f] = 0$. Os comutadores diferentes de zero são

$$\begin{aligned} [d_\sigma Y^{mm}, \Delta f^\dagger d_\uparrow^\dagger] &= \Delta (d_\sigma Y^{mm} f^\dagger d_\uparrow^\dagger - f^\dagger d_\uparrow^\dagger d_\sigma Y^{mm}) \\ &= \Delta (d_\sigma f^\dagger d_\uparrow^\dagger Y^{mm} - f^\dagger d_\uparrow^\dagger d_\sigma Y^{mm}) \\ &= \Delta (-f^\dagger d_\sigma d_\uparrow^\dagger Y^{mm} - f^\dagger d_\uparrow^\dagger d_\sigma Y^{mm}) \\ &= \Delta (-f^\dagger (\delta_{\sigma\uparrow} - d_\uparrow^\dagger d_\sigma) Y^{mm} - f^\dagger d_\uparrow^\dagger d_\sigma Y^{mm}) \\ &= \Delta (-f^\dagger Y^{mm} \delta_{\sigma\uparrow} + f^\dagger d_\uparrow^\dagger d_\sigma Y^{mm} - f^\dagger d_\uparrow^\dagger d_\sigma Y^{mm}) \\ &= -\Delta f^\dagger Y^{mm} \delta_{\sigma\uparrow} \end{aligned} \quad (4.11)$$

e

$$\begin{aligned} [d_\sigma Y^{mm}, t f d_\uparrow^\dagger] &= t (d_\sigma Y^{mm} f d_\uparrow^\dagger - f d_\uparrow^\dagger d_\sigma Y^{mm}) \\ &= t (d_\sigma f d_\uparrow^\dagger Y^{mm} - f d_\uparrow^\dagger d_\sigma Y^{mm}) \\ &= t (-f d_\sigma d_\uparrow^\dagger Y^{mm} - f d_\uparrow^\dagger d_\sigma Y^{mm}) \\ &= t (-f (\delta_{\sigma\uparrow} - d_\uparrow^\dagger d_\sigma) Y^{mm} - f d_\uparrow^\dagger d_\sigma Y^{mm}) \\ &= t (-f Y^{mm} \delta_{\sigma\uparrow} + f d_\uparrow^\dagger d_\sigma Y^{mm} - f d_\uparrow^\dagger d_\sigma Y^{mm}) \\ &= -t f Y^{mm} \delta_{\sigma\uparrow}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Com os comutadores calculados, a função de Green Eq. (4.5), é reescrita como

$$\begin{aligned} \omega^+ \langle \langle d_\sigma Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle &= \langle Y^{mm} \rangle + V \sum_{\alpha k} \langle \langle c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle + \varepsilon_\uparrow \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle d_\uparrow Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle \\ &+ \varepsilon_\downarrow \delta_{\sigma\downarrow} \langle \langle d_\downarrow Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle + \frac{Jm}{2} \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle d_\uparrow Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle - \frac{Jm}{2} \delta_{\sigma\downarrow} \langle \langle d_\downarrow Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle \\ &- \Delta \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle f^\dagger Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle - t \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle f Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (4.13)$$

A partir de agora vamos definir as funções de Green que associam a QI ao sítio fermiônico não

local f composto pelos MZMs, $\langle\langle f^\dagger Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle$ e $\langle\langle f Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle$, seguindo o mesmo procedimento. Temos então a função

$$\begin{aligned}\omega^+ \langle\langle f^\dagger Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle &= \cancel{\langle [f^\dagger Y^{mm}, d_\sigma^\dagger]_+ \rangle}^0 + \langle\langle [f^\dagger Y^{mm}, \mathcal{H}]; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle \\ &= \langle\langle [f^\dagger Y^{mm}, \mathcal{H}]; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle,\end{aligned}\quad (4.14)$$

calculemos agora os comutadores

$$\begin{aligned}[f^\dagger Y^{mm}, \mathcal{H}] &= \cancel{\left[f^\dagger Y^{mm}, \sum_{\alpha k \sigma} \epsilon_{\alpha k} c_{\alpha k \sigma}^\dagger c_{\alpha k \sigma} \right]}^0 + \cancel{\left[f^\dagger Y^{mm}, V \sum_{\alpha k \sigma} (c_{\alpha k \sigma}^\dagger d_\sigma + H.c.) \right]}^0 \\ &+ \cancel{\left[f^\dagger Y^{mm}, (\epsilon_\uparrow n_\uparrow + \epsilon_\downarrow n_\downarrow) \right]}^0 + \cancel{\left[f^\dagger Y^{mm}, \frac{J}{2} \sum_{m'} m' n_\uparrow Y^{m' m'} \right]}^0 \\ &+ \cancel{\left[f^\dagger Y^{mm}, -\frac{J}{2} \sum_{m'} m' n_\downarrow Y^{m' m'} \right]}^0 + [f^\dagger Y^{mm}, \epsilon_M f^\dagger f] + \cancel{[f^\dagger Y^{mm}, t d_\uparrow f^\dagger]}^0 \\ &+ [f^\dagger Y^{mm}, t f d_\uparrow^\dagger] + \cancel{[f^\dagger Y^{mm}, \Delta f^\dagger d_\uparrow^\dagger]}^0 + [f^\dagger Y^{mm}, \Delta d_\uparrow f].\end{aligned}\quad (4.15)$$

Temos então,

$$\begin{aligned}[f^\dagger Y^{mm}, \epsilon_M f^\dagger f] &= \epsilon_M (f^\dagger Y^{mm} f^\dagger f - f^\dagger f f^\dagger Y^{mm}) \\ &= \epsilon_M (f^\dagger f^\dagger f Y^{mm} - f^\dagger f f^\dagger Y^{mm}) \\ &= \epsilon_M (-f^\dagger f^\dagger f Y^{mm} - f^\dagger f f^\dagger Y^{mm}) \\ &= \epsilon_M (-f^\dagger (1 - f f^\dagger) Y^{mm} - f^\dagger f f^\dagger Y^{mm}) \\ &= \epsilon_M (-f^\dagger Y^{mm} + f^\dagger f f^\dagger Y^{mm} - f^\dagger f f^\dagger Y^{mm}) \\ &= -\epsilon_M f^\dagger Y^{mm},\end{aligned}\quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
[f^\dagger Y^{mm}, t f d_\uparrow^\dagger] &= t \left(f^\dagger Y^{mm} f d_\uparrow^\dagger - f d_\uparrow^\dagger f^\dagger Y^{mm} \right) \\
&= t \left(f^\dagger f d_\uparrow^\dagger Y^{mm} - f d_\uparrow^\dagger f^\dagger Y^{mm} \right) \\
&= t \left((1 - f f^\dagger) d_\uparrow^\dagger Y^{mm} - f d_\uparrow^\dagger f^\dagger Y^{mm} \right) \\
&= t \left(d_\uparrow^\dagger Y^{mm} - f f^\dagger d_\uparrow^\dagger Y^{mm} - f d_\uparrow^\dagger f^\dagger Y^{mm} \right) \\
&= t \left(d_\uparrow^\dagger Y^{mm} + f d_\uparrow^\dagger f^\dagger Y^{mm} - f d_\uparrow^\dagger f^\dagger Y^{mm} \right) \\
&= t d_\uparrow^\dagger Y^{mm}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

e

$$\begin{aligned}
[f^\dagger Y^{mm}, \Delta d_\uparrow f] &= \Delta (f^\dagger Y^{mm} d_\uparrow f - d_\uparrow f f^\dagger Y^{mm}) \\
&= \Delta (f^\dagger d_\uparrow f Y^{mm} - d_\uparrow f f^\dagger Y^{mm}) \\
&= \Delta (-d_\uparrow f^\dagger f Y^{mm} - d_\uparrow f f^\dagger Y^{mm}) \\
&= \Delta (-d_\uparrow (1 - f f^\dagger) Y^{mm} - d_\uparrow f f^\dagger Y^{mm}) \\
&= \Delta (-d_\uparrow Y^{mm} + d_\uparrow f f^\dagger Y^{mm} - d_\uparrow f f^\dagger Y^{mm}) \\
&= -\Delta d_\uparrow Y^{mm}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

A função de Green, Eq. (4.14), torna-se

$$(\omega^+ + \varepsilon_M) \langle\langle f^\dagger Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle = t \langle\langle d_\uparrow^\dagger Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle - \Delta \langle\langle d_\uparrow Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle. \tag{4.19}$$

Agora, calculemos $\langle\langle f Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle$.

$$\begin{aligned}
\omega^+ \langle\langle f Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle &= \cancel{\langle\langle [f Y^{mm}, d_\sigma^\dagger]_+ \rangle\rangle} \overset{0}{+} \langle\langle [f Y^{mm}, \mathcal{H}]; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle \\
&= \langle\langle [f Y^{mm}, \mathcal{H}]; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

em que o comutador do operador f com o Hamiltoniano $\mathcal{H}$ resulta nos termos

$$[f Y^{mm}, \mathcal{H}] = [f Y^{mm}, \varepsilon_M f^\dagger f] + [f Y^{mm}, t d_\uparrow f^\dagger] + [f Y^{mm}, \Delta f^\dagger d_\uparrow^\dagger], \tag{4.21}$$

sendo que

$$\begin{aligned}
[fY^{mm}, \varepsilon_M f^\dagger f] &= \varepsilon_M (fY^{mm} f^\dagger f - f^\dagger f fY^{mm}) \\
&= \varepsilon_M (f f^\dagger fY^{mm} - f^\dagger f fY^{mm}) \\
&= \varepsilon_M ((1 - f^\dagger f) fY^{mm} - f^\dagger f fY^{mm}) \\
&= \varepsilon_M (fY^{mm} - f^\dagger f fY^{mm} - f^\dagger f fY^{mm}) \\
&= \varepsilon_M (fY^{mm} + f^\dagger f fY^{mm} - f^\dagger f fY^{mm}) \\
&= \varepsilon_M fY^{mm},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
[fY^{mm}, t(d_\uparrow f^\dagger + f d_\uparrow^\dagger)] &= t \left[(fY^{mm} d_\uparrow f^\dagger - d_\uparrow f^\dagger fY^{mm}) + (fY^{mm} f d_\uparrow^\dagger - f d_\uparrow^\dagger fY^{mm}) \right] \\
&= t \left[(f d_\uparrow f^\dagger Y^{mm} - d_\uparrow f^\dagger fY^{mm}) + (f f d_\uparrow^\dagger Y^{mm} - f d_\uparrow^\dagger fY^{mm}) \right] \\
&= t \left[(-d_\uparrow f f^\dagger Y^{mm} - d_\uparrow f^\dagger fY^{mm}) + (f d_\uparrow^\dagger fY^{mm} - f d_\uparrow^\dagger fY^{mm}) \right] \\
&= t (-d_\uparrow (1 - f^\dagger f) Y^{mm} - d_\uparrow f^\dagger fY^{mm}) \\
&= t (-d_\uparrow Y^{mm} + d_\uparrow f^\dagger fY^{mm} - d_\uparrow f^\dagger fY^{mm}) \\
&= -t d_\uparrow Y^{mm},
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
[fY^{mm}, \Delta(f^\dagger d_\uparrow^\dagger + d_\uparrow f)] &= \Delta \left[(fY^{mm} f^\dagger d_\uparrow^\dagger - f^\dagger d_\uparrow^\dagger fY^{mm}) + (fY^{mm} d_\uparrow f - d_\uparrow f fY^{mm}) \right] \\
&= \Delta \left[(f f^\dagger d_\uparrow^\dagger Y^{mm} - f^\dagger d_\uparrow^\dagger fY^{mm}) + (f d_\uparrow fY^{mm} - d_\uparrow f fY^{mm}) \right] \\
&= \Delta \left[((1 - f^\dagger f) d_\uparrow^\dagger Y^{mm} - f^\dagger d_\uparrow^\dagger fY^{mm}) + (d_\uparrow f fY^{mm} - d_\uparrow f fY^{mm}) \right] \\
&= \Delta (d_\uparrow^\dagger Y^{mm} - f^\dagger f d_\uparrow^\dagger Y^{mm} - f^\dagger d_\uparrow^\dagger fY^{mm}) \\
&= \Delta (d_\uparrow^\dagger Y^{mm} + f^\dagger d_\uparrow^\dagger fY^{mm} - f^\dagger d_\uparrow^\dagger fY^{mm}) \\
&= \Delta d_\uparrow^\dagger Y^{mm},
\end{aligned} \tag{4.24}$$

a Eq. (4.20) torna-se

$$(\omega^+ - \varepsilon_M) \langle \langle fY^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle = -t \langle \langle d_\uparrow Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle + \Delta \langle \langle d_\uparrow^\dagger Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle. \tag{4.25}$$

Para darmos continuidade, calculemos agora a função de Green anômala da QI, $\langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger}\rangle\rangle$.

$$\begin{aligned}\omega^+ \langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger}\rangle\rangle &= \langle\langle [d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}, d_{\sigma}^{\dagger}]_+ \rangle\rangle + \langle\langle [d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}, \mathcal{H}]; d_{\sigma}^{\dagger}\rangle\rangle \\ &= \langle\langle [d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}, \mathcal{H}]; d_{\sigma}^{\dagger}\rangle\rangle\end{aligned}\quad (4.26)$$

cujo comutador, já eliminando os termos iguais a zero, é dado por:

$$\begin{aligned}[d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}, \mathcal{H}] &= \left[d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}, V \sum_{\alpha k \sigma} (c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} d_{\sigma} + H.c.) \right] + \left[d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}, \frac{J}{2} \sum_{m'} m' n_{\uparrow} Y^{m'm'} \right] \\ &+ \left[d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}, \varepsilon_{\uparrow} n_{\uparrow} + \varepsilon_{\downarrow} n_{\downarrow} \right] + \left[d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}, t d_{\uparrow} f^{\dagger} \right] + \left[d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}, \Delta d_{\uparrow} f \right].\end{aligned}\quad (4.27)$$

Calculando os comutadores, obtemos

$$\begin{aligned}\left[d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}, V \sum_{\alpha k \sigma} (c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} d_{\sigma} + \cancel{d_{\sigma}^{\dagger} c_{\alpha k \sigma}}) \right] &= V \sum_{\alpha k \sigma} [d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}, c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} d_{\sigma}] \\ &= V \sum_{\alpha k \sigma} (d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm} c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} d_{\sigma} - c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} d_{\sigma} d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}) \\ &= V \sum_{\alpha k \sigma} (d_{\uparrow}^{\dagger} c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} d_{\sigma} Y^{mm} - c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} d_{\sigma} d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}) \\ &= V \sum_{\alpha k \sigma} (-c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} (\delta_{\uparrow \sigma} - d_{\sigma} d_{\uparrow}^{\dagger}) Y^{mm} - c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} d_{\sigma} d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}) \\ &= V \sum_{\alpha k \sigma} (-c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} \delta_{\uparrow \sigma} Y^{mm} + c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} d_{\sigma} d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm} - c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} d_{\sigma} d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}) \\ &= -V \sum_{\alpha k} c_{\alpha k \uparrow}^{\dagger} Y^{mm},\end{aligned}\quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}[d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}, (\varepsilon_{\uparrow} n_{\uparrow} + \cancel{\varepsilon_{\downarrow} n_{\downarrow}})] &= \varepsilon_{\uparrow} (d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm} n_{\uparrow} - n_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}) \\ &= \varepsilon_{\uparrow} (d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm} d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}) \\ &= \varepsilon_{\uparrow} (-d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} Y^{mm} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}) \\ &= \varepsilon_{\uparrow} (-d_{\uparrow}^{\dagger} (1 - d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger}) Y^{mm} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}) \\ &= \varepsilon_{\uparrow} (-d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} + d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}) \\ &= \varepsilon_{\uparrow} (-d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} + d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger}Y^{mm}) \\ &= -\varepsilon_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm},\end{aligned}\quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
\left[d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}, \frac{J}{2} \sum_{m'} m' n_{\uparrow} Y^{m'm'} \right] &= \frac{J}{2} \sum_{m'} m' \left(d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} Y^{m'm'} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} Y^{m'm'} d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} \right) \\
&= \frac{J}{2} \sum_{m'} m' \left(d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} Y^{mm} Y^{m'm'} - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{m'm'} Y^{mm} \right) \\
&= \frac{J}{2} \sum_{m'} m' \left(-d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} \left(\delta_{mm'} Y^{mm'} \right) - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} \left(\delta_{m'm} Y^{m'm} \right) \right) \\
&= \frac{J}{2} \sum_{m'} m' \left(-d_{\uparrow}^{\dagger} \left(1 - d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} \right) \left(\delta_{mm'} Y^{mm'} \right) - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} \left(\delta_{m'm} Y^{m'm} \right) \right) \\
&= \frac{J}{2} \sum_{m'} m' \left(-d_{\uparrow}^{\dagger} \left(\delta_{mm'} Y^{mm'} \right) + d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} \left(\delta_{mm'} Y^{mm'} \right) - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} \left(\delta_{m'm} Y^{m'm} \right) \right) \\
&= \frac{J}{2} \left(-d_{\uparrow}^{\dagger} \left(\sum_{m'} m' \delta_{mm'} Y^{mm'} \right) + d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} \left(\sum_{m'} m' \delta_{mm'} Y^{mm'} \right) - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} \left(\sum_{m'} m' \delta_{m'm} Y^{m'm} \right) \right) \\
&= \frac{J}{2} \left(-d_{\uparrow}^{\dagger} (m Y^{mm}) + d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} (m Y^{mm}) - d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} (m Y^{mm}) \right) \\
&= -\frac{J}{2} m d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}, \tag{4.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}, t \left(d_{\uparrow} f^{\dagger} + \cancel{f d_{\uparrow}^{\dagger}} \right) \right] &= t \left[\left(d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} d_{\uparrow} f^{\dagger} - d_{\uparrow} f^{\dagger} d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} \right) \right] \\
&= t \left[\left(d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} f^{\dagger} Y^{mm} - d_{\uparrow} f^{\dagger} d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} \right) \right] \\
&= t \left[\left(\left(1 - d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} \right) f^{\dagger} Y^{mm} - d_{\uparrow} f^{\dagger} d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} \right) \right] \\
&= t \left(f^{\dagger} Y^{mm} - d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} f^{\dagger} Y^{mm} - d_{\uparrow} f^{\dagger} d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} \right) \\
&= t \left(f^{\dagger} Y^{mm} + d_{\uparrow} f^{\dagger} d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} - d_{\uparrow} f^{\dagger} d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} \right) \\
&= t f^{\dagger} Y^{mm}, \tag{4.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}, \Delta \left(\cancel{f^{\dagger} d_{\uparrow}^{\dagger}} + d_{\uparrow} f \right) \right] &= \Delta \left[\left(d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} d_{\uparrow} f - d_{\uparrow} f d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} \right) \right] \\
&= \Delta \left[\left(d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} f Y^{mm} - d_{\uparrow} f d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} \right) \right] \\
&= \Delta \left[\left(\left(1 - d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} \right) f Y^{mm} - d_{\uparrow} f d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} \right) \right] \\
&= \Delta \left(f Y^{mm} - d_{\uparrow} d_{\uparrow}^{\dagger} f Y^{mm} - d_{\uparrow} f d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} \right) \\
&= \Delta \left(f Y^{mm} + d_{\uparrow} f d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} - d_{\uparrow} f d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm} \right) \\
&= \Delta f Y^{mm}. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Dessa maneira, a função de Green anômala assume a forma

$$\begin{aligned} \left(\omega^+ + \varepsilon_{\uparrow} + \frac{Jm}{2} \right) \langle \langle d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle &= -V \sum_{\alpha k} \langle \langle c_{\alpha k \uparrow}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \\ &+ t \langle \langle f^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle + \Delta \langle \langle f Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Agora precisamos determinar as duas últimas funções de Green, $\langle \langle c_{\alpha k \uparrow}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle$ e $\langle \langle c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle$, para fechar o sistema de funções. Iniciemos com

$$\begin{aligned} \omega^+ \langle \langle c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle &= \langle \langle \cancel{c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm}}, d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle + \langle \langle [c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm}, \mathcal{H}]; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \\ &= \langle \langle [c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm}, \mathcal{H}]; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (4.34)$$

O comutador irá gerar apenas dois termos, pois a comutação entre $c_{\alpha k \sigma}^{\dagger}$ e os demais termos do Hamiltoniano [Eq. (4.4)] será zero.

$$\begin{aligned} [c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm}, \mathcal{H}] &= \left[c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm}, \sum_{\alpha' k' \sigma'} \varepsilon_{\alpha k'} c_{\alpha' k' \sigma'}^{\dagger} c_{\alpha' k' \sigma'} \right] \\ &+ \left[c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm}, V \sum_{\alpha' k' \sigma'} \left(\cancel{c_{\alpha' k' \sigma'}^{\dagger} d_{\sigma'}^{\dagger}} + d_{\sigma'}^{\dagger} c_{\alpha' k' \sigma'} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.35)$$

sendo assim, temos

$$\begin{aligned} &\left[c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm}, \sum_{\alpha' k' \sigma'} \varepsilon_{\alpha' k'} c_{\alpha' k' \sigma'}^{\dagger} c_{\alpha' k' \sigma'} \right] = \\ &= \sum_{\alpha' k' \sigma'} \varepsilon_{\alpha' k'} \left[c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm} c_{\alpha' k' \sigma'}^{\dagger} c_{\alpha' k' \sigma'} - c_{\alpha' k' \sigma'}^{\dagger} c_{\alpha' k' \sigma'} c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm} \right] \\ &= \sum_{\alpha' k' \sigma'} \varepsilon_{\alpha' k'} \left[-c_{\alpha' k' \sigma'}^{\dagger} c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} c_{\alpha' k' \sigma'} Y^{mm} - c_{\alpha' k' \sigma'}^{\dagger} c_{\alpha' k' \sigma'} c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm} \right] \\ &= \sum_{\alpha' k' \sigma'} \varepsilon_{\alpha' k'} \left[-c_{\alpha' k' \sigma'}^{\dagger} \left(\delta_{\alpha \alpha'} \delta_{k k'} \delta_{\sigma \sigma'} - c_{\alpha' k' \sigma'} c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} \right) Y^{mm} - c_{\alpha' k' \sigma'}^{\dagger} c_{\alpha' k' \sigma'} c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm} \right] \\ &= \sum_{\alpha' k' \sigma'} \varepsilon_{\alpha' k'} \left[-c_{\alpha' k' \sigma'}^{\dagger} \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{k k'} \delta_{\sigma \sigma'} Y^{mm} + c_{\alpha' k' \sigma'}^{\dagger} c_{\alpha' k' \sigma'} c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm} - c_{\alpha' k' \sigma'}^{\dagger} c_{\alpha' k' \sigma'} c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm} \right] \\ &= - \sum_{\alpha' k' \sigma'} \varepsilon_{\alpha' k'} c_{\alpha' k' \sigma'}^{\dagger} \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{k k'} \delta_{\sigma \sigma'} Y^{mm} \\ &= -\varepsilon_{\alpha k} c_{\alpha k \sigma}^{\dagger} Y^{mm} \end{aligned} \quad (4.37)$$

e

$$\begin{aligned}
& \left[c_{\alpha k \sigma}^\dagger Y^{mm}, V \sum_{\alpha' k' \sigma'} \left(\cancel{c_{\alpha' k' \sigma'}^\dagger d_{\sigma'}} + d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha' k' \sigma'} \right) \right] = \\
&= V \sum_{\alpha' k' \sigma'} \left[c_{\alpha k \sigma}^\dagger Y^{mm} d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha' k' \sigma'} - d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha' k' \sigma'} c_{\alpha k \sigma}^\dagger Y^{mm} \right] \\
&= V \sum_{\alpha' k' \sigma'} \left[-d_{\sigma'}^\dagger \left(\delta_{\alpha \alpha'} \delta_{k k'} \delta_{\sigma \sigma'} - c_{\alpha' k' \sigma'} c_{\alpha k \sigma}^\dagger \right) Y^{mm} - d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha' k' \sigma'} c_{\alpha k \sigma}^\dagger Y^{mm} \right] \\
&= V \sum_{\alpha' k' \sigma'} \left[-d_{\sigma'}^\dagger \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{k k'} \delta_{\sigma \sigma'} Y^{mm} + d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha' k' \sigma'} c_{\alpha k \sigma}^\dagger Y^{mm} - d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha' k' \sigma'} c_{\alpha k \sigma}^\dagger Y^{mm} \right] \\
&= -V \sum_{\alpha' k' \sigma'} d_{\sigma'}^\dagger Y^{mm} \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{k k'} \delta_{\sigma \sigma'} \\
&= -V d_\sigma^\dagger Y^{mm}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Dessa forma, substituindo os comutadores na Eq. (4.34), obtemos

$$\langle \langle c_{\alpha k \sigma}^\dagger Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle = -\frac{V}{(\omega^+ + \varepsilon_{\alpha k})} \langle \langle d_\sigma^\dagger Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle. \tag{4.39}$$

E agora vamos definir $\langle \langle c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle$,

$$\begin{aligned}
\omega^+ \langle \langle c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle &= \langle \langle \cancel{[c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}, d_\sigma^\dagger]_+} \rangle \rangle \overset{0}{+} \langle \langle [c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}, \mathcal{H}]; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle \\
&= \langle \langle [c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}, \mathcal{H}]; d_\sigma^\dagger \rangle \rangle,
\end{aligned} \tag{4.40}$$

em que o comutador é

$$\begin{aligned}
[c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}, \mathcal{H}] &= \left[c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}, \sum_{\alpha' k' \sigma'} \varepsilon_{\alpha' k'} c_{\alpha' k' \sigma'}^\dagger c_{\alpha' k' \sigma'} \right] \\
&+ \left[c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}, V \sum_{\alpha' k' \sigma'} \left(c_{\alpha' k' \sigma'}^\dagger d_{\sigma'} + \cancel{d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha' k' \sigma'}} \right) \right],
\end{aligned} \tag{4.41}$$

assim,

$$\left[c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}, \sum_{\alpha' k' \sigma'} \varepsilon_{\alpha' k'} c_{\alpha' k' \sigma'}^\dagger c_{\alpha' k' \sigma'} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha'k'\sigma'} \varepsilon_{\alpha'k'} \left[c_{\alpha k \sigma} Y^{mm} c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger c_{\alpha'k'\sigma'} - c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger c_{\alpha'k'\sigma'} c_{\alpha k \sigma} Y^{mm} \right] \\
&= \sum_{\alpha'k'\sigma'} \varepsilon_{\alpha'k'} \left[\left(\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} - c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger c_{\alpha k \sigma} \right) c_{\alpha'k'\sigma'} Y^{mm} - c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger c_{\alpha'k'\sigma'} c_{\alpha'k'\sigma'} c_{\alpha k \sigma} Y^{mm} \right] \\
&= \sum_{\alpha'k'\sigma'} \varepsilon_{\alpha'k'} \left[\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} c_{\alpha'k'\sigma'} Y^{mm} - c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger c_{\alpha k \sigma} c_{\alpha'k'\sigma'} Y^{mm} - c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger c_{\alpha'k'\sigma'} c_{\alpha'k'\sigma'} c_{\alpha k \sigma} Y^{mm} \right] \\
&= \sum_{\alpha'k'\sigma'} \varepsilon_{\alpha'k'} \left[\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} c_{\alpha'k'\sigma'} Y^{mm} + c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger c_{\alpha'k'\sigma'} c_{\alpha k \sigma} Y^{mm} - c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger c_{\alpha'k'\sigma'} c_{\alpha'k'\sigma'} c_{\alpha k \sigma} Y^{mm} \right] \\
&= \sum_{\alpha'k'\sigma'} \varepsilon_{\alpha'k'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} c_{\alpha'k'\sigma'} Y^{mm} \\
&= \varepsilon_{\alpha k} c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

e para

$$\begin{aligned}
&\left[c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}, V \sum_{\alpha'k'\sigma'} \left(c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} + \cancel{d_{\sigma'}^\dagger c_{\alpha'k'\sigma'}} \right) \right] = \\
&= V \sum_{\alpha'k'\sigma'} \left[c_{\alpha k \sigma} Y^{mm} c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} - c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} c_{\alpha k \sigma} Y^{mm} \right] \\
&= V \sum_{\alpha'k'\sigma'} \left[c_{\alpha k \sigma} c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} Y^{mm} - c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} c_{\alpha k \sigma} Y^{mm} \right] \\
&= V \sum_{\alpha'k'\sigma'} \left[\left(\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} - c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger c_{\alpha k \sigma} \right) d_{\sigma'} Y^{mm} - c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} c_{\alpha k \sigma} Y^{mm} \right] \\
&= V \sum_{\alpha'k'\sigma'} \left[\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} d_{\sigma'} Y^{mm} - c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger c_{\alpha k \sigma} d_{\sigma'} Y^{mm} - c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} c_{\alpha k \sigma} Y^{mm} \right] \\
&= V \sum_{\alpha'k'\sigma'} \left[\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} d_{\sigma'} Y^{mm} + c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} c_{\alpha k \sigma} Y^{mm} - c_{\alpha'k'\sigma'}^\dagger d_{\sigma'} c_{\alpha k \sigma} Y^{mm} \right] \\
&= V \sum_{\alpha'k'\sigma'} d_{\sigma'} Y^{mm} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} \\
&= V d_{\sigma} Y^{mm}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Substituindo o resultado dos comutadores na Eq. (4.40), temos que

$$\langle\langle c_{\alpha k \sigma} Y^{mm}; d_{\sigma}^\dagger \rangle\rangle = \frac{V}{(\omega^+ - \varepsilon_{\alpha k})} \langle\langle d_{\sigma} Y^{mm}; d_{\sigma}^\dagger \rangle\rangle. \tag{4.44}$$

Tendo as Eqs. (4.44) e (4.39) podemos substituí-las nas Eqs. (4.13) e (4.33), respectiva-

mente. Obtendo assim as GFs:

$$\begin{aligned}
\left(\omega^+ - \sum_{\alpha k} \frac{V^2}{(\omega^+ - \varepsilon_{\alpha k})} \right) \langle \langle d_{\sigma} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle &= \langle Y^{mm} \rangle + \varepsilon_{\uparrow} \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle d_{\uparrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle + \varepsilon_{\downarrow} \delta_{\sigma\downarrow} \langle \langle d_{\downarrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \\
&+ \frac{Jm}{2} \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle d_{\uparrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle - \frac{Jm}{2} \delta_{\sigma\downarrow} \langle \langle d_{\downarrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \\
&- \Delta \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle f^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle - t \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle f Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \quad (4.45)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left(\omega^+ + \varepsilon_{\uparrow} + \frac{Jm}{2} \right) \langle \langle d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle &= \sum_{\alpha k} \frac{V^2}{(\omega^+ + \varepsilon_{\alpha k})} \langle \langle d_{\sigma}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \\
&+ t \langle \langle f^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle + \Delta \langle \langle f Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle. \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Para simplificar as equações vamos considerar o parâmetro de Anderson $i\Gamma = \sum_{\alpha k} V^2 / (\omega^+ + \varepsilon_{\alpha k})$ e a média $\langle Y^{mm} \rangle = 1/(2S + 1)$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
(\omega^+ + i\Gamma) \langle \langle d_{\sigma} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle &= \frac{1}{2S + 1} + \varepsilon_{\uparrow} \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle d_{\uparrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle + \varepsilon_{\downarrow} \delta_{\sigma\downarrow} \langle \langle d_{\downarrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \\
&+ \frac{Jm}{2} \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle d_{\uparrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle - \frac{Jm}{2} \delta_{\sigma\downarrow} \langle \langle d_{\downarrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \\
&- \Delta \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle f^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle - t \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle f Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \quad (4.47)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left(\omega^+ + \varepsilon_{\uparrow} + \frac{Jm}{2} \right) \langle \langle d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle &= -i\Gamma \langle \langle d_{\sigma}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \\
&+ t \langle \langle f^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle + \Delta \langle \langle f Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle. \quad (4.48)
\end{aligned}$$

4.2.1 Sumário das GFs para a QI

Até o momento determinamos as GFs principais para determinar-se a DOS da QI. Temos então as funções:

$$\begin{aligned}
(\omega^+ + i\Gamma) \langle \langle d_{\sigma} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle &= \frac{1}{2S + 1} + \varepsilon_{\uparrow} \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle d_{\uparrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle + \varepsilon_{\downarrow} \delta_{\sigma\downarrow} \langle \langle d_{\downarrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \\
&+ \frac{Jm}{2} \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle d_{\uparrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle - \frac{Jm}{2} \delta_{\sigma\downarrow} \langle \langle d_{\downarrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \\
&- \Delta \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle f^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle - t \delta_{\sigma\uparrow} \langle \langle f Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \quad (4.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\omega^+ + \varepsilon_{\uparrow} + \frac{Jm}{2} \right) \langle \langle d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle &= -i\Gamma \langle \langle d_{\sigma}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \\ &+ t \langle \langle f^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle + \Delta \langle \langle f Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$(\omega^+ + \varepsilon_M) \langle \langle f^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle = t \langle \langle d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle - \Delta \langle \langle d_{\uparrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle \quad (4.51)$$

e

$$(\omega^+ - \varepsilon_M) \langle \langle f Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle = -t \langle \langle d_{\uparrow} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle + \Delta \langle \langle d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle \rangle. \quad (4.52)$$

4.2.2 Spin up

Nesta subseção vamos considerar $\sigma = \uparrow$. Apenas para esse canal de spin a QI se acopla ao nanofio contendo os MZMs. Sendo assim, temos as GFs

$$\begin{aligned} \left(\omega^+ - \varepsilon_{\uparrow} - \frac{Jm}{2} + i\Gamma \right) \langle \langle d_{\uparrow} Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle &= \frac{1}{(2S+1)} - \Delta \langle \langle f^{\dagger} Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle \\ &- t \langle \langle f Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle, \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\left(\omega^+ + \varepsilon_{\uparrow} + \frac{Jm}{2} + i\Gamma \right) \langle \langle d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle = t \langle \langle f^{\dagger} Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle + \Delta \langle \langle f Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle, \quad (4.54)$$

$$\langle \langle f^{\dagger} Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle = \frac{t}{(\omega^+ + \varepsilon_M)} \langle \langle d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle - \frac{\Delta}{(\omega^+ + \varepsilon_M)} \langle \langle d_{\uparrow} Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle \quad (4.55)$$

e

$$\langle \langle f Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle = -\frac{t}{(\omega^+ - \varepsilon_M)} \langle \langle d_{\uparrow} Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle + \frac{\Delta}{(\omega^+ - \varepsilon_M)} \langle \langle d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle. \quad (4.56)$$

Substituindo as Eqs. (4.55) e (4.56) na Eq. (4.53), obtemos

$$\left(\omega^+ - \varepsilon_{\uparrow} - \frac{Jm}{2} + i\Gamma - K_+ \right) \langle \langle d_{\uparrow} Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle = \frac{1}{(2S+1)} - 2t\Delta K_{MFs} \langle \langle d_{\uparrow}^{\dagger} Y^{mm}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle, \quad (4.57)$$

lembrando que $\omega^+ = \omega + i\eta^+$ e considerando os termos

$$K_+ = \frac{(\omega + i\eta^+) (\Delta^2 + t^2) + \varepsilon_M (t^2 - \Delta^2)}{\omega^2 - \varepsilon_M^2 + 2i\omega\eta^+ - (\eta^+)^2} \quad (4.58)$$

e

$$K_{MFs} = \frac{(\omega + i\eta^+)}{\omega^2 - \varepsilon_M^2 + 2i\omega\eta^+ - (\eta^+)^2}. \quad (4.59)$$

Agora substituindo as Eqs. (4.55) e (4.56) na Eq. (4.54) para obtermos a função anômala da QI.

$$\langle\langle d_\uparrow^\dagger Y^{mm}; d_\uparrow^\dagger \rangle\rangle = -\frac{2t\Delta K_{MFs}}{(\omega^+ + \varepsilon_\uparrow + \frac{Jm}{2} + i\Gamma - K_-)} \langle\langle d_\uparrow Y^{mm}; d_\uparrow^\dagger \rangle\rangle, \quad (4.60)$$

sendo o termo

$$K_- = \frac{(\omega + i\eta^+) (t^2 + \Delta^2) - \varepsilon_M (t^2 - \Delta^2)}{\omega^2 - \varepsilon_M^2 + 2i\omega\eta^+ - (\eta^+)^2}. \quad (4.61)$$

Substituindo a Eq. (4.60) na Eq. (4.57), temos que

$$\langle\langle d_\uparrow Y^{mm}; d_\uparrow^\dagger \rangle\rangle = \frac{1}{(2S+1)} \frac{1}{(\omega^+ - \varepsilon_\uparrow - \frac{Jm}{2} + i\Gamma - \Sigma_{MFs}^{+m})}, \quad (4.62)$$

na qual $\Sigma_{MFs}^{+m} = K_+ + (2t\Delta)^2 K_{MFs} \tilde{K}_m$ corresponde a auto-energia de correção devido ao acoplamento com o nanofio de Kitaev e a ponta spin-polarizada. Considerando também o termo

$$\tilde{K}_m = \frac{K_{MFs}}{(\omega^+ + \varepsilon_\uparrow + \frac{Jm}{2} + i\Gamma - K_-)}. \quad (4.63)$$

No início da Seção 4.2, destacamos que $\tilde{\mathcal{G}}_{d_\sigma d_\sigma^\dagger}^R(\omega) = \langle\langle d_\sigma; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle = \sum_m \langle\langle d_\sigma Y^{mm}; d_\sigma^\dagger \rangle\rangle$, porém para facilitar os calculos não carregamos a notação $\sum_m$, mas ela é fundamental. Desta forma, a GF para o canal de spin up da QI que é o único acoplado aos MZMs é definida como:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_\uparrow d_\uparrow^\dagger}^R = \sum_m \langle\langle d_\uparrow Y^{mm}; d_\uparrow^\dagger \rangle\rangle = \frac{1}{(2S+1)} \sum_m \frac{1}{(\omega^+ - \varepsilon_\uparrow - \frac{Jm}{2} + i\Gamma - \Sigma_{MFs}^{+m})}. \quad (4.64)$$

4.2.3 Spin down

Consideremos agora $\sigma = \downarrow$ para a Eq. (4.49). Como comentado anteriormente, este canal de spin não se acopla aos MZMs.

$$(\omega^+ + i\Gamma) \langle\langle d_{\downarrow} Y^{mm}; d_{\downarrow}^{\dagger} \rangle\rangle = \frac{1}{2S+1} + \varepsilon_{\downarrow} \langle\langle d_{\downarrow} Y^{mm}; d_{\downarrow}^{\dagger} \rangle\rangle - \frac{Jm}{2} \langle\langle d_{\downarrow} Y^{mm}; d_{\downarrow}^{\dagger} \rangle\rangle \quad (4.65)$$

$$\langle\langle d_{\downarrow} Y^{mm}; d_{\downarrow}^{\dagger} \rangle\rangle = \frac{1}{2S+1} \frac{1}{(\omega^+ - \varepsilon_{\downarrow} + \frac{Jm}{2} + i\Gamma)}. \quad (4.66)$$

Lembrando que $\tilde{\mathcal{G}}_{d_{\sigma}d_{\sigma}^{\dagger}}^R(\omega) = \langle\langle d_{\sigma}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle\rangle = \sum_m \langle\langle d_{\sigma} Y^{mm}; d_{\sigma}^{\dagger} \rangle\rangle$, logo

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_{\downarrow}d_{\downarrow}^{\dagger}}^R(\omega) = \sum_m \langle\langle d_{\downarrow} Y^{mm}; d_{\downarrow}^{\dagger} \rangle\rangle = \frac{1}{(2S+1)} \sum_m \frac{1}{(\omega^+ - \varepsilon_{\downarrow} + \frac{Jm}{2} + i\Gamma)}, \quad (4.67)$$

sendo que para o termo de spin down temos apenas a renormalização devido a presença da ponta spin-polarizada, não há termo algum que associe a Majoranas, como pode ser evidenciado pelo denominador da expressão.

Agora possuímos as GFs necessárias para mapear a densidade de estados da impureza quântica [Eqs. (4.64) e (4.67)] por meio da parte imaginárias das GFs, como vimos no Capítulo 3. Tais equações foram exploradas e gráficos foram gerados a partir de programação usando a linguagem Python. Esses resultados serão devidamente discutidos no Capítulo 5.

4.3 DOS para as quasipartículas de Majorana da QI

Com as equações obtidas na Seção 4.2 podemos obter o comportamento espectral da QI sob a influência da ponta spin-polarizada e dos MZMs. Porém, com o objetivo de entender como os MFs que compõem a QI se comportam, nesta seção iremos decompor a QI (sítio d) em suas componentes de Majorana, $d_{\uparrow} = (\gamma_A + i\gamma_B)/\sqrt{2}$ (faremos isso apenas para o canal de spin up). Para realizar tal feito, vamos considerar as seguintes combinações:

$$\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(d_{\uparrow}^{\dagger} + d_{\uparrow}) \quad (4.68)$$

e

$$\gamma_B = \frac{i}{\sqrt{2}}(d_{\uparrow}^{\dagger} - d_{\uparrow}). \quad (4.69)$$

Sendo que as DOSs para tais quasipartículas de Majorana são obtidas a partir da Eq. (3.1) e podem ser escritas da seguinte forma

$$\text{DOS}_{\gamma_A} = -\frac{1}{\pi} \text{Im}[\langle\langle \gamma_A; \gamma_A \rangle\rangle] \quad (4.70)$$

e

$$\text{DOS}_{\gamma_B} = -\frac{1}{\pi} \text{Im}[\langle\langle \gamma_B; \gamma_B \rangle\rangle]. \quad (4.71)$$

Como podemos evidenciar a partir das Eqs. (4.70) e (4.71) devemos determinar as funções de Green dos Majoranas. Com o objetivo de facilitar o entendimento faremos uso da GF Eq. (3.7), no domínio do tempo, desta forma temos

$$\mathcal{G}_{\gamma_A \gamma_A}^R(t, 0) = -\frac{i}{\hbar} \theta(t) Z_e^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n} \left\langle n \left| \left[\gamma_A(t), \gamma_A^\dagger(0) \right]_+ \right| n \right\rangle \quad (4.72)$$

e

$$\mathcal{G}_{\gamma_B \gamma_B}^R(t, 0) = -\frac{i}{\hbar} \theta(t) Z_e^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n} \left\langle n \left| \left[\gamma_B(t), \gamma_B^\dagger(0) \right]_+ \right| n \right\rangle. \quad (4.73)$$

4.3.1 Definindo as GFs de Majorana na QI

Para definir as GFs vamos substituir nas Eqs. (4.72) e (4.73) os operadores de Majorana por suas definições na base fermiônica, Eqs. (4.68) e (4.69), e calcular os anticomutadores.

Para γ_A (lembrando que $\gamma_A = \gamma_A^\dagger$),

$$\begin{aligned} \left[\gamma_A(t), \gamma_A^\dagger(0) \right]_+ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(d_\uparrow^\dagger(t) + d_\uparrow(t) \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(d_\uparrow^\dagger(0) + d_\uparrow(0) \right) \right]_+ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(d_\uparrow^\dagger(t) + d_\uparrow(t) \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(d_\uparrow^\dagger(0) + d_\uparrow(0) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(d_\uparrow^\dagger(0) + d_\uparrow(0) \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(d_\uparrow^\dagger(t) + d_\uparrow(t) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(d_\uparrow^\dagger(t) d_\uparrow^\dagger(0) + d_\uparrow^\dagger(t) d_\uparrow(0) + d_\uparrow(t) d_\uparrow^\dagger(0) + d_\uparrow(t) d_\uparrow(0) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(d_\uparrow^\dagger(0) d_\uparrow^\dagger(t) + d_\uparrow^\dagger(0) d_\uparrow(t) + d_\uparrow(0) d_\uparrow^\dagger(t) + d_\uparrow(0) d_\uparrow(t) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(d_\uparrow^\dagger(t) d_\uparrow^\dagger(0) + d_\uparrow^\dagger(0) d_\uparrow^\dagger(t) \right) + \left(d_\uparrow^\dagger(t) d_\uparrow(0) + d_\uparrow^\dagger(0) d_\uparrow(t) \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(d_\uparrow(t) d_\uparrow^\dagger(0) + d_\uparrow(0) d_\uparrow^\dagger(t) \right) + \left(d_\uparrow(t) d_\uparrow(0) + d_\uparrow(0) d_\uparrow(t) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\gamma_A(t), \gamma_A^\dagger(0) \right]_+ &= \frac{1}{2} \left(\left[d_\uparrow^\dagger(t), d_\uparrow^\dagger(0) \right]_+ + \left[d_\uparrow^\dagger(t), d_\uparrow(0) \right]_+ \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\left[d_\uparrow(t), d_\uparrow^\dagger(0) \right]_+ + \left[d_\uparrow(t), d_\uparrow(0) \right]_+ \right),
\end{aligned} \tag{4.74}$$

substituindo na Eq. (4.72), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\gamma_A \gamma_A}^R(t) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \theta(t) Z_e^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n} \left\langle n \left| \left[d_\uparrow^\dagger(t), d_\uparrow(0) \right]_+ \right| n \right\rangle \\
&+ \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \theta(t) Z_e^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n} \left\langle n \left| \left[d_\uparrow(t), d_\uparrow^\dagger(0) \right]_+ \right| n \right\rangle \\
&+ \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \theta(t) Z_e^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n} \left\langle n \left| \left[d_\uparrow^\dagger(t), d_\uparrow^\dagger(0) \right]_+ \right| n \right\rangle \\
&+ \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \theta(t) Z_e^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n} \left\langle n \left| \left[d_\uparrow(t), d_\uparrow(0) \right]_+ \right| n \right\rangle,
\end{aligned} \tag{4.75}$$

tal expressão pode ser escrita na notação de Zubarev [40], como apresentado no Capítulo 3, assumindo a seguinte forma:

$$\langle \langle \gamma_A; \gamma_A \rangle \rangle = \frac{1}{2} \left[\langle \langle d_\uparrow^\dagger; d_\uparrow^\dagger \rangle \rangle + \langle \langle d_\uparrow^\dagger; d_\uparrow \rangle \rangle + \langle \langle d_\uparrow; d_\uparrow^\dagger \rangle \rangle + \langle \langle d_\uparrow; d_\uparrow \rangle \rangle \right]. \tag{4.76}$$

Analogamente, temos γ_B .

$$\langle \langle \gamma_B; \gamma_B \rangle \rangle = \frac{1}{2} \left[-\langle \langle d_\uparrow^\dagger; d_\uparrow^\dagger \rangle \rangle + \langle \langle d_\uparrow^\dagger; d_\uparrow \rangle \rangle + \langle \langle d_\uparrow; d_\uparrow^\dagger \rangle \rangle - \langle \langle d_\uparrow; d_\uparrow \rangle \rangle \right]. \tag{4.77}$$

Na Seção 4.2 obtivemos a GF $\tilde{\mathcal{G}}_{d_\uparrow d_\uparrow^\dagger}^R(\omega) = \langle \langle d_\uparrow; d_\uparrow^\dagger \rangle \rangle = \sum_m \langle \langle d_\uparrow Y^{mm}; d_\uparrow^\dagger \rangle \rangle$, utilizando a mesma metodologia podemos obter as demais GFs eletrônicas que dão origem as quantidades $\langle \langle \gamma_A; \gamma_A \rangle \rangle$ e $\langle \langle \gamma_B; \gamma_B \rangle \rangle$. Sendo elas,

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_\uparrow^\dagger d_\uparrow^\dagger}^R(\omega) = \sum_m \langle \langle d_\uparrow^\dagger Y^{mm}; d_\uparrow^\dagger \rangle \rangle = -\frac{1}{(2S+1)} \sum_m \frac{2t\Delta K_m}{(\omega^+ + \varepsilon_\uparrow + \frac{Jm}{2} + i\Gamma - \Sigma_{MFs}^{-m})}, \tag{4.78}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_\uparrow^\dagger d_\uparrow}^R(\omega) = \sum_m \langle \langle d_\uparrow^\dagger Y^{mm}; d_\uparrow \rangle \rangle = \frac{1}{(2S+1)} \sum_m \frac{1}{(\omega^+ + \varepsilon_\uparrow + \frac{Jm}{2} + i\Gamma - \Sigma_{MFs}^{-m})} \tag{4.79}$$

e

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_{\uparrow}d_{\uparrow}}^R(\omega) = \sum_m \langle\langle d_{\uparrow} Y^{mm}; d_{\uparrow} \rangle\rangle = -\frac{1}{(2S+1)} \sum_m \frac{2\Delta t \tilde{K}_m}{(\omega^+ - \varepsilon_{\uparrow} - \frac{Jm}{2} + i\Gamma - \Sigma_{MFs}^{+m})}, \quad (4.80)$$

em que temos a auto-energia $\Sigma_{MFs}^{-m} = K_- + (2t\Delta)^2 K_{MFs} K_m$ e também o termo

$$K_m = \frac{K_{MFs}}{(\omega^+ - \varepsilon_{\uparrow} - \frac{Jm}{2} + i\Gamma - K_+)}, \quad (4.81)$$

os demais termos K_+ , K_{MFs} , K_- e $\tilde{K}_m$ já foram definidos e são expressos pelas Eqs. (4.58), (4.59), (4.61) e (4.63), respectivamente. Uma característica interessante das GFs anômalas, $\tilde{\mathcal{G}}_{d_{\uparrow}^{\dagger}d_{\uparrow}^{\dagger}}^R(\omega)$ e $\tilde{\mathcal{G}}_{d_{\uparrow}d_{\uparrow}}^R(\omega)$, é sua dependência com os termos de hopping t e emparelhamento supercondutor Δ , tais funções não existiriam caso não houvesse acoplamento com o supercondutor topológico que hospeda os MZMs.

Possuindo as Eqs. (4.64), (4.78), (4.79) e (4.80) podemos definir as DOSs das excitações de quasipartícula associadas as componentes de Majorana da QI para o canal de spin up, Eqs. (4.76) e (4.77). Como discutiremos no Capítulos 5, essas quantidades serão fundamentais para definirmos a fracionalização das excitações de Majorana, definindo assim a nossa quasipartícula do tipo Majorana-Ising, γ_{MIQ} (do inglês, MIQ: Majorana-Ising-type quasiparticle).

4.4 Quasipartículas de Majorana do sítio f

Na Seção 4.3 analisamos as excitações de Majorana que compõem a QI, nesta seção faremos um estudo semelhante, porém direcionado ao sítio fermiônico não-local f que é composto pela combinação linear dos dois MZMs isolados nas bordas do nanofio de Kitaev [Fig. 4.1(c) e (f)], $f = (\gamma_1 + i\gamma_2)/\sqrt{2}$. As componentes de Majorana são dadas por

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f^{\dagger} + f) \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(f^{\dagger} - f). \quad (4.82)$$

A partir de tais definições almejamos obter, assim como na Seção 4.3, as DOSs para as componentes de Majorana dadas aqui por:

$$\text{DOS}_{\gamma_1} = -\frac{1}{\pi} \text{Im}[\langle\langle \gamma_1; \gamma_1 \rangle\rangle] \quad (4.83)$$

e

$$\text{DOS}_{\gamma_2} = -\frac{1}{\pi} \text{Im}[\langle\langle\gamma_2; \gamma_2\rangle\rangle], \quad (4.84)$$

cujas funções de Green, assim como para $\langle\langle\gamma_A; \gamma_A\rangle\rangle$ e $\langle\langle\gamma_B; \gamma_B\rangle\rangle$, são dadas por

$$\langle\langle\gamma_1; \gamma_1\rangle\rangle = \frac{1}{2} [\langle\langle f^\dagger; f^\dagger\rangle\rangle + \langle\langle f^\dagger; f\rangle\rangle + \langle\langle f; f^\dagger\rangle\rangle + \langle\langle f; f\rangle\rangle], \quad (4.85)$$

e

$$\langle\langle\gamma_2; \gamma_2\rangle\rangle = \frac{1}{2} [-\langle\langle f^\dagger; f^\dagger\rangle\rangle + \langle\langle f^\dagger; f\rangle\rangle + \langle\langle f; f^\dagger\rangle\rangle - \langle\langle f; f\rangle\rangle]. \quad (4.86)$$

Desenvolvendo a metodologia apresentada no Capítulo 3, assim como feito na Seção 4.3, somos capazes de obter as funções de Green que compõem as Eqs. (4.85) e (4.86). Neste ponto, devido à semelhança com a Seção 4.2, iremos mitigar a apresentação do desenvolvimento analítico e partiremos para as equações finais. Lembrando que, devido a influência da ponta spin-polarizada $\tilde{\mathcal{G}}_{ff^\dagger}^R(\omega) = \langle\langle f; f^\dagger\rangle\rangle = \sum_m \langle\langle fY^{mm}; f^\dagger\rangle\rangle$. Sendo assim, para o sítio não local f , obtemos as GFs

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ff^\dagger}^R(\omega) = \sum_m \langle\langle fY^{mm}; f^\dagger\rangle\rangle = \frac{1}{(2S+1)} \sum_m \frac{1}{(\omega^+ - \varepsilon_M - \Sigma_{+M})}, \quad (4.87)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{f^\dagger f^\dagger}^R(\omega) = \sum_m \langle\langle f^\dagger Y^{mm}; f^\dagger\rangle\rangle = \frac{1}{(2S+1)} \sum_m \frac{2\Delta t K_{-M}}{(\omega^+ + \varepsilon_M - \Sigma_{-M})}, \quad (4.88)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{f^\dagger f}^R(\omega) = \sum_m \langle\langle f^\dagger Y^{mm}; f\rangle\rangle = \frac{1}{(2S+1)} \sum_m \frac{1}{(\omega^+ + \varepsilon_M - \Sigma_{-M})} \quad (4.89)$$

e

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ff}^R(\omega) = \sum_m \langle\langle fY^{mm}; f\rangle\rangle = \frac{1}{(2S+1)} \sum_m \frac{2\Delta t K_{+M}}{(\omega^+ - \varepsilon_M - \Sigma_{+M})}, \quad (4.90)$$

em que $\Sigma_{+M} = K_C^+ + (2\Delta t)^2 K_D K_{+M}$ e $\Sigma_{-M} = K_C^- + (2\Delta t)^2 K_D K_{-M}$ são as auto-energias oriundas da interação do sítio f com a QI que está acoplada à ponta spin-polarizada e também

aos terminais metálicos. As demais quantidades são:

$$K_{+M} = \frac{K_D}{(\omega^+ + \varepsilon_M - K_C^-)}, \quad (4.91)$$

$$K_{-M} = \frac{K_D}{(\omega^+ - \varepsilon_M - K_C^+)}, \quad (4.92)$$

$$K_D = \frac{(\omega + i\eta^+) + i\Gamma}{(\omega + i\Gamma + i\eta^+)^2 - \varepsilon_\uparrow^2 - Jm \left[\varepsilon_\uparrow + \frac{Jm}{4} \right]}, \quad (4.93)$$

$$K_C^+ = \left[\frac{(\omega + i\eta^+) (t^2 + \Delta^2) + \varepsilon_\uparrow (t^2 - \Delta^2) + \frac{Jm}{2} (t^2 - \Delta^2) + i\Gamma (t^2 + \Delta^2)}{(\omega + i\Gamma + i\eta^+)^2 - \varepsilon_\uparrow^2 - Jm \left[\varepsilon_\uparrow + \frac{Jm}{4} \right]} \right] \quad (4.94)$$

e

$$K_C^- = \left[\frac{(\omega + i\eta^+) (t^2 + \Delta^2) - \varepsilon_\uparrow (t^2 - \Delta^2) - \frac{Jm}{2} (t^2 - \Delta^2) + i\Gamma (t^2 + \Delta^2)}{(\omega + i\Gamma + i\eta^+)^2 - \varepsilon_\uparrow^2 - Jm \left[\varepsilon_\uparrow + \frac{Jm}{4} \right]} \right]. \quad (4.95)$$

Com o conjunto de funções de Green obtidas para o sítio f somos capazes de determinar a dinâmica das componentes de Majorana que compõem tal férmion não local. Bem como compreender a forma com a qual o sistema é renormalizado pelas auto-energias oriundas do acoplamento à QI.

Capítulo 5

Fractionalization of Majorana-Ising-type quasiparticle excitations

J. E. Sanches, L. T. Lustosa, L. S. Ricco, I. A. Shelykh, M. de Souza, M. S. Figueira, and A. C. Seridonio, [Phys. Rev. B 107, 155144](#) – Published 26 April 2023.

Neste capítulo exploraremos os resultados obtidos a partir das simulações realizadas com base nos cálculos apresentados no Capítulo 4, utilizando Python como linguagem de programação para obtenção das curvas.

No estudo desenvolvido ao longo desta tese exploramos as propriedades espectrais de uma impureza quântica (QI) flanqueada por um supercondutor topológico (TSC) unidimensional finito, que possui MZMs em suas bordas, e por uma ponta spin-polarizada de spin S variável. A ponta se acopla à QI por um termo de troca do tipo Ising, J . Descobrimos que nesse sistema há a possibilidade de fracionalização de MZMs regulares, até então não explorada pela literatura. Um regime contraintuitivo, capaz de localizar um MZM fracionado no nível da QI, emerge quando definimos um valor específico para J e S , a esse estado ressonante emergente atribuímos o nome de quasipartícula do tipo Majorana-Ising (MIQ). Consequentemente, encontramos que o peso espectral desse estado MIQ é a metade de um MZM e se manifesta com características ressonantes.

Para a condição em que há a emergência da MIQ um efeito interessante se manifesta na condutância diferencial. Essa quantidade possui um valor equivalente a metade da condutância para um MZM genuíno e se mostra puramente eletrônica, ou seja, a contribuição das reflexões

de Andreev é igual a zero entre os terminais metálicos e a QI. Por outro lado, para um sistema ideal, ou seja, um nanofio de Kitaev grande o suficiente, em que apenas um dos MZMs se acopla com a QI e no qual não há uma superposição finita entre eles, a condutância através da QI é equivalente a um MZM completo e manifesta contribuição de condutâncias eletrônicas e de reflexões de Andreev em pé de igualdade. Levando-se em consideração esses aspectos, podemos afirmar que as excitações de MIQ são uma forma de manifestação dos *poor man's Majorana*.

Em síntese, propomos um modelo que apresenta, do ponto de vista experimental, uma forma mais realista para se explorar as propriedades e a emergência de férmions de Majorana. Sistema esse, que por ser finito, se assemelha ao chamado modelo mínimo de Kitaev que vem desempenhando um papel importante no contexto experimental e a partir do qual os *poor man's Majoranas* podem emergir.

5.1 Artigo publicado

Fractionalization of Majorana-Ising-type quasiparticle excitations

J.E. Sanches,^{1,*} L.T. Lustosa,¹ L.S. Ricco,² I.A. Shelykh,^{2,3} M. de Souza,⁴ M.S. Figueira,⁵ and A.C. Seridonio^{1,†}

¹*São Paulo State University (Unesp), School of Engineering,*

Department of Physics and Chemistry, 15385-000, Ilha Solteira-SP, Brazil

²*Science Institute, University of Iceland, Dunhagi-3, IS-107, Reykjavik, Iceland*

³*Abrikosov Center for Theoretical Physics, MIPT, Dolgoprudnyi, Moscow Region 141701, Russia*

⁴*São Paulo State University (Unesp), IGCE, Department of Physics, 13506-970, Rio Claro-SP, Brazil*

⁵*Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, 24210-340, Niterói, Rio de Janeiro, Brazil*

We theoretically investigate the spectral properties of a quantum impurity (QI) hosting the here proposed Majorana-Ising-type quasiparticle (MIQ) excitation. It arises from the coupling between a finite topological superconductor (TSC) based on a chain of magnetic adatoms-superconducting hybrid system and an integer large spin S flanking the QI. Noteworthy, the spin S couples to the QI via the Ising-type exchange interaction. As the Majorana zero-modes (MZMs) at the edges of the TSC chain are overlapped, we counterintuitively find a regime wherein the Ising term modulates the localization of a fractionalized and resonant MZM at the QI site. Interestingly enough, the fermionic nature of this state is revealed as purely of electron tunneling-type and most astonishingly, it has the Andreev conductance completely null in its birth. Therefore, we find that a resonant edge state appears as a zero-mode and discuss it in terms of a *poor man's Majorana*[Nature 614, 445 (2023)].

I. INTRODUCTION

Majorana fermions are peculiar particles equal to their own antiparticles described by real solutions of the Dirac equation[1]. In condensed matter Physics, such fermions rise as quasiparticle excitations usually quoted as Majorana zero-modes (MZMs), which are found attached to the boundaries of topological superconductors (TSCs)[2–31]. Astonishingly, since the theoretical Kitaev seminal proposal of p -wave superconductivity[32], MZMs are notably coveted due to their attribution as building-blocks for the highly pursued fault-tolerant topological quantum computing. Thereafter, in the last years, such excitations have received astounding focus from both communities working with quantum science and technology.

Interestingly enough, theoretical predictions point out that the fractional zero-bias peak (ZBP) in transport evaluations through quantum dots, which is given by the conductance $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$ [2–4], could have its origin from both the system topological nontrivial regime, where two MZMs emerge spatially far apart at the edges of a TSC[3, 4], as well as in the corresponding trivial, which could exhibit, for instance, Andreev bound states (ABSs)[33, 34]. In this regard, we highlight Ref.[35], which by treating the TSC within the theoretical framework of the Oreg-Lutchyn Hamiltonian[9], allows a detailed and systematic analysis on the formation of MZMs versus ABSs issue. In parallel, effective models[3, 33, 36], despite their simplifications, are used to capture, with a quite good accuracy, the corresponding low-energy Physics encoded by models such as that in Ref.[9] and the Kitaev Hamiltonian[32].

Back to the issue of the topological nontrivial regime, not less important, once an ordinary fermion can be

decomposed into two MZMs, is the amplitude $1/2$ in $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0)$, the hallmark of the fractionalization of the quantum of conductance $\frac{e^2}{h}$, thus giving rise to the concept of fractionalized electronic zero-frequency spectral weight, which indeed reveals, the MZM “half-fermionic” nature[4]. This aforementioned fingerprint is expected to show up in engineered platforms that combine conventional s -wave superconductivity and spin-texture [see Refs.[37–39] and Fig.1(a)]. As aftermath, the p -wave superconductivity becomes feasible, thus allowing the experimental realization of the spinless Kitaev wire, which is indeed, a TSC in 1D[7, 25, 27, 32, 40–43]. For such an accomplishment, we highlight two practical recipes based on the Oreg-Lutchyn proposal[9], which have the following ingredients: (i) a semiconducting nanowire, with strong spin-orbit coupling (SOC) and under a magnetic field, should be deposited on top of an s -wave superconductor[25, 29–31, 40, 41, 44] or (ii) a linear chain of magnetic adatoms with exchange interactions should be hosted by an s -wave superconductor with strong SOC[13, 18, 37–39, 45–51]. In both the situations, the s -wave superconductors with singlet Cooper pairing lead to the so-called superconducting proximity effect, which is pivotal to carry forward the superconducting (SC) character into such manufactured Kitaev wires. Thus, the Zeeman field from the previous recipes (i) and (ii), together with the magnified SOC from such quantum materials, establish a synergy that stabilizes the system spin-texture. Consequently, the triplet Cooper pairing for the p -wave superconductivity, as well.

Particularly in the topological nontrivial regime of such setups, these Majorana quasiparticle excitations emerge ideally, i.e., as MZMs decoupled from each other and localized on the boundaries of the TSC. Due to this decoupling from their environment, MZMs are regarded robust against perturbations, once they are topologically protected by the SC gap. Thus, MZMs become promising candidates for a quantum computing free of the decoher-

* corresponding author: jose.sanches@unesp.br

† corresponding author: antonio.seridonio@unesp.br

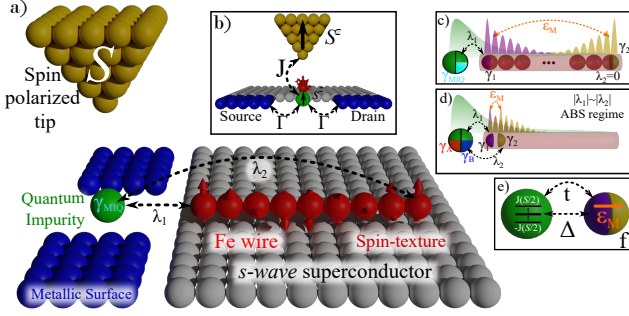


Figure 1. (a) Proposed device expected to show a Majorana-Ising-type quasiparticle (MIQ) excitation γ_{MIQ} localized at the quantum impurity (QI) site. The γ_{MIQ} leads to a zero-bias conductance peak $\mathcal{G}_{\text{MIQ}}(0) = \frac{e^2}{4h}$ due to the QI placed between source and drain leads, but the total conductance is still $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$. This occurs once a genuine electron tunneling process is present and there is a complete lack of local Andreev reflection. It can be performed by considering the QI simultaneously coupled to a spin-polarized tip with an integer large spin S via an Ising-type exchange interaction J and with the hopping terms $\lambda_{1(2)}$ (being $\lambda_2 = 0$ for this case) to a helical spin-texture chain hosted by an s -wave superconductor. (b) Side view of panel (a) wherein the QI-lead coupling Γ and Ising-type exchange interaction J for the spin-polarized tip and QI appear highlighted. (c) Pictorial scheme of panel (b), which effectively consists of a topological superconductor (TSC), where ϵ_M represents the overlap between the Majorana zero-modes (MZMs) γ_1 and γ_2 at edges, while the QI shows the MIQ γ_{MIQ} . The spatial distributions of the wave functions for the MZMs and QI are also illustrated. The factor $\frac{1}{4}$ in $\mathcal{G}_{\text{MIQ}}$ has correspondence to the $\frac{1}{4}$ from the volume for the sphere depicted to represent the quasiparticle γ_{MIQ} , in contrast to the ratio $\frac{1}{2}$ for the typical volume of the MZMs γ_1 and γ_2 . (d) Andreev bound state (ABS) regime, obtained from the effective model with $|\lambda_1| \sim |\lambda_2|$ [33]. (e) These MZMs mimic a delocalized fermionic site f , wherein ϵ_M plays the role of its energy level, while the QI has $2S+1$ levels ranging from $-J(S/2)$ to $+J(S/2)$. In this scenario, such quantum dots constitute a Kitaev dimer, i.e., with hopping t and pairing Δ of the p -wave Cooper pair split into the QI and f orbitals.

ence phenomenon [52, 53]. However, perfectly far apart MZMs are hypothetical objects, since they are reliable solely in infinite-size systems and in real experiments, the quantum wires are finite. As a result, these end MZMs within a finite length overlap with each other and inevitably, a fermionic mode with a finite energy emerges instead.

To overcome the aforementioned challenge, in this work, we find as route the fractionalization of ordinary MZMs, in particular, those found at a quantum impurity (QI) site coupled to one edge of a finite TSC in 1D. To this end, we should take into account the Ising exchange interaction between an integer large spin and such a QI. This setup corresponds to Figs. 1(a) and (b), and it contains the ordinary MZMs γ_1 and γ_2 placed at the edges of a short TSC wire. To better understand our findings, we propose to view the MZMs as sketched

in Fig. 1(c), where these objects appear symbolized by calottes (half-spheres). We clarify that the employment of such a pictorial representation for the MZMs aims to explain diagrammatically the electron fractionalization into them, as well as the MZM fractionalization itself here observed. These calottes belong to a delocalized sphere cut in half, with each part placed at the TSC edges. This cartoon is very useful and it has the purpose of emulating the nonlocal nature of the fermionic state composed by these MZMs, which are found spatially far apart. To best of our knowledge, the Majorana zero-frequency spectral weight, in particular for a QI coupled to an infinite TSC, is given by the unity when the leaking of the MZM γ_1 into a quantum dot occurs [4]. This unity corresponds to a calotte, which is a half-electron state that contributes to the conductance $\mathcal{G}_{\text{MZM}}(0) = \frac{e^2}{2h}$, as expected [3, 4]. Particularly for a finite TSC, we define as the system sweet spot [see Fig. 3(b)-I] a special configuration, in which a peculiar Ising exchange interaction allows us to observe a fractionalized MZM quasiparticle excitation γ_{MIQ} at the QI, namely, the called by us as Majorana-Ising-type quasiparticle (MIQ) excitation [Figs. 1(a) and (c)]. This quasiparticle excitation can be viewed as the half-calotte within the cartoon representation of the QI state [see also Fig. 1(c)]. Such a ratio symbolizes a novel MZM-type excitation in the presence of finite TSCs, in which technically speaking, it is identified by a Majorana zero-frequency spectral weight equals to half. Equivalently, the same amount corresponds to $\frac{1}{4}$ of the entire QI electronic state. In contrast, it leads to $\mathcal{G}_{\text{MIQ}}(0) = \frac{e^2}{4h}$ as it should be. Interestingly enough, solely in one of the Majorana densities of states (DOSs) of the QI, the MIQ becomes evident as a resonant mode localized at $\omega = 0$. Counterintuitively, the other Majorana DOS of the QI instead of exhibiting a resonant state, reveals a Majorana zero-frequency spectral weight with a valley, but presenting the same magnitude of the resonant Majorana fermion. In this manner, we can safely state that this novel MZM-type quasiparticle excitation, which for simplicity, we just call by MIQ from now on, is then found at the QI. In this situation, we demonstrate that the emergence of such a quasiparticle excitation yields a zero-bias local Andreev conductance entirely null, with only normal electronic contribution to the total conductance.

II. THE MODEL

The effective system Hamiltonian that corresponds to the proposed setup presented in Fig. 1(a) can be expressed

as:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{\alpha k \sigma} \varepsilon_{\alpha k} c_{\alpha k \sigma}^\dagger c_{\alpha k \sigma} + \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} d_{\sigma}^\dagger d_{\sigma} + i \varepsilon_M \gamma_1 \gamma_2 \\ & + \left(\frac{\Gamma}{2\pi\rho_0} \right)^{1/2} \sum_{\alpha k \sigma} (c_{\alpha k \sigma}^\dagger d_{\sigma} + \text{H.c.}) + J s^z S^z \\ & + \lambda_1 (d_{\uparrow} - d_{\uparrow}^\dagger) \gamma_1 + \lambda_2 (d_{\uparrow} + d_{\uparrow}^\dagger) \gamma_2, \end{aligned} \quad (1)$$

where the operator $c_{\alpha k \sigma}^\dagger (c_{\alpha k \sigma})$ describes the creation (annihilation) of an electron with momentum k , spin- z $\sigma = \pm 1$, energy $\varepsilon_{\alpha k} = \varepsilon_k - \mu_{\alpha}$ for the metallic lead $\alpha = [\text{Source}, \text{Drain}]$ in terms of the single-particle energy ε_k and chemical potential μ_{α} , while $d_{\sigma}^\dagger (d_{\sigma})$ stands for the electrons at the QI site in which ε_{σ} represents their energy levels per spin. To connect the QI to the metallic leads and a large spin S as well, we should consider the QI-lead coupling $\Gamma = 2\pi v^2 \rho_0$, which is determined by the QI-lead hopping term v and lead DOS ρ_0 , in parallel to the Ising-type exchange interaction J [Fig.1(b)]. This Ising Hamiltonian involves the components s^z and S^z of the QI ($s = 1/2$) and S , respectively, wherein the latter could be well-represented, within an experimental framework, by a spin-polarized tip [Ref.[54] and Figs.1(a)-(b)]. The emergence of MZMs at the TSC wire edges are accounted for γ_1 and γ_2 , with ε_M as the overlap parameter. Finally, λ_1 and λ_2 couple the spin-up channel of the QI to γ_1 and γ_2 , respectively [Figs.1(a) and (c)]. Additionally, for the sake of simplicity, we consider that the spin-down degree is decoupled from the TSC and obeys the single impurity Anderson model (SIAM)[55]. Thus, we assume that the spin component of the QI that couples to the Kitaev wire is $\sigma = +1$, which is, as can be viewed in Fig.1(a), the same spin direction assumed for the edges of the magnetic chain of adatoms. This means that the spin-flips of the QI electron injected into the TSC and vice-versa are prevented. Therefore, the spin-up degree of the QI is the unique to perceive the TSC. Different spin-textures on the TSC edge where γ_1 is found[56], which would allow the mixing of the spin degrees of freedom, will be addressed elsewhere and do not belong to the current analysis. Additionally, as we assume the intrinsic Zeeman splitting $\varepsilon_{\downarrow} - \varepsilon_{\uparrow} = V_Z$ of the magnetic chain as the largest energy scale, the spin-down has no influence in the phenomenon here reported, once the corresponding electronic occupation is empty. However, even with the present assumption, we are free to demonstrate that both these spin components become influenced by S and the TSC that mimics an effective quantum dot tunnel and Andreev-coupled to the QI [Fig.1(e), [57, 58]].

To this end, we call the attention that the Majorana and Ising terms of Eq.(1) should be conveniently rewritten to access the system underlying Physics: (i) the Ising term turns straightforwardly into

$$J s^z S^z = \frac{J}{2} \sum_{m \sigma} \sigma m d_{\sigma}^\dagger d_{\sigma} |m\rangle \langle m|, \quad (2)$$

due to the standard expansions $s^z = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sigma d_{\sigma}^\dagger d_{\sigma}$ and

$S^z = \sum_m m |m\rangle \langle m|$ with $m = [-S, -S+1, \dots, S-1, S]$ for the QI and large spin, respectively. This means that each spin channel in the QI acquires a multi-level structure split into $2S+1$ energies ranging from $-J(S/2)$ to $+J(S/2)$. As a matter of fact, the TSC alters this feature quite a bit for the channel $\sigma = +1$; and (ii) it is imperative to evoke that the MZMs are made by the electron ($f^\dagger$) and hole (f) of a regular Dirac fermion delocalized over the TSC edges, which lead to $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f^\dagger + f)$ and $\gamma_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(f^\dagger - f)$. In this picture, ε_M plays the role of the energy level related to the electronic occupation $f^\dagger f$ and the QI is indeed hybridized with f , as mentioned earlier, via the hopping t and the superconducting pairing Δ . In summary, by considering the parameterization $\lambda_1 = (t+\Delta)/\sqrt{2}$ and $\lambda_2 = i(\Delta-t)/\sqrt{2}$ [Fig.1(a)], we simply find the Kitaev dimer composed by $d_{\uparrow}$ and f orbital sites[57, 58]:

$$\begin{aligned} & i \varepsilon_M \gamma_1 \gamma_2 + \varepsilon_{\uparrow} d_{\uparrow}^\dagger d_{\uparrow} + \lambda_1 (d_{\uparrow} - d_{\uparrow}^\dagger) \gamma_1 + \lambda_2 (d_{\uparrow} + d_{\uparrow}^\dagger) \gamma_2 \\ & = \varepsilon_M (f^\dagger f - \frac{1}{2}) + \varepsilon_{\uparrow} d_{\uparrow}^\dagger d_{\uparrow} + (t d_{\uparrow} f^\dagger + \Delta d_{\uparrow} f + \text{H.c.}). \end{aligned} \quad (3)$$

Similarly, the spin-up channel of the QI can be also decomposed in MZMs[4], which we label by γ_A and γ_B , i.e.,

$$d_{\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_A + i\gamma_B). \quad (4)$$

Based on Eq.(4), one can compute the Majorana zero-frequency spectral weights for γ_A and γ_B , respectively. These quantities reveal that in the poor man's Majorana regime ($J = 0$, $\Delta = t$ and $\varepsilon_M = \varepsilon_{\uparrow} = 0$)[57, 58] for the Kitaev dimer, that at the QI site, one spectral weight shows a unitary amplitude for a resonant zero-mode, while the other is completely null at zero-energy. It means that an isolated MZM is found at the QI. Analogously, such a feature is also observed in f [4, 32]. This results, according to Eq.(3) given by $i\sqrt{2}\lambda_1\gamma_B\gamma_1$, into two isolated MZMs spatially placed at $d_{\uparrow}$ and f orbital sites, namely, γ_A and γ_2 , respectively. Although f is already nonlocal and split over the TSC edges, it should be understood as an orbital site in the framework of the Kitaev dimer, thus γ_2 , within such a context, is placed there. For the trivial case ($\varepsilon_M \neq 0$), the two spectral weights for γ_A and γ_B attain to unity and then, two resonant zero-modes emerge at the QI site. Thus, Eq.(4) is extremely clarifying, once it points out the possibility of having within the QI, in the presence of ε_M and J , the isolation of the here proposed MIQ. Additionally, as one can notice, the spin down channel always shows the trivial case, due to its decoupling from the TSC. For completeness, the MZMs for $d_{\downarrow}$ we label by γ_C and γ_D . To conclude, we are aware that the QI could also be coupled to the s -wave platform of Fig.1(a) as in Ref.[51] by the term $\mathcal{H}_{s-QI} \sim -\Gamma_s (d_{\uparrow}^\dagger d_{\downarrow}^\dagger + \text{H.c.})$ [36, 51] in the limit $\Delta_{SC} \rightarrow \infty$ (infinite superconducting gap standard approximation), where Γ_s is the s -wave-QI coupling. Nevertheless, differently, we do not consider the on top geometry of Ref.[51]

and assumes intrinsic Zeeman splitting $\varepsilon_{\downarrow} - \varepsilon_{\uparrow} = V_Z$ of the magnetic chain extremely high, in order to rid off the spin-down component. As a result, we expect that both features suppress $\mathcal{H}_{s-QI}$ and let the exploration to elsewhere when V_Z is not found magnified.

III. QUANTUM TRANSPORT AND GREEN'S FUNCTIONS

In this section, our goal is the analytical evaluation of the total conductance through the QI device depicted in Figs.1(a)-(b). As a matter of fact, solely the spin-up channel contributes to the conductance, once the spin-down is energetically inaccessible as previously stated. As our goal is the transport determination around the energy of the MZM, only the bias-energy between source and drain leads $|eV| \ll \Delta_{SC} \rightarrow \infty$ (infinite superconducting gap standard approximation) is accounted for in the derivation of our conductance expression below [see Ref.[59] and Appendix B]. In the case of a grounded TSC, symmetric QI-lead couplings (Γ) independent of $\mu_{\text{Source}} - \mu_{\text{Drain}} = eV$, being $\mu_{\text{Source}} = -\mu_{\text{Drain}} = eV/2$, where e is the elemental charge and V the corresponding bias-voltage, the crossed Andreev reflection is suppressed and the conductance can be split into[59]

$$\mathcal{G}_{\text{Total}} = \mathcal{G}_{\text{ET}} + \mathcal{G}_{\text{LAR}}, \quad (5)$$

where ET and LAR stand for the electron tunneling and local Andreev reflection processes, respectively, with

$$\mathcal{G}_{\text{ET}}(eV) = \frac{e^2}{2h} [\tau_{\alpha\bar{\alpha}}^{\text{ET}}(eV/2) + \tau_{\alpha\bar{\alpha}}^{\text{ET}}(-eV/2)], \quad (6)$$

wherein $\alpha = \text{Source}$, $\bar{\alpha} = \text{Drain}$ and vice-versa, together with

$$\mathcal{G}_{\text{LAR}}(eV) = \frac{e^2}{2h} [\tau_{\alpha\alpha}^{\text{LAR}}(eV/2) + \tau_{\alpha\alpha}^{\text{LAR}}(-eV/2)], \quad (7)$$

in which the transmittances $\tau_{\alpha\bar{\alpha}}^{\text{ET}} = (2S + 1)\Gamma^2 |\langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega}|^2$ and $\tau_{\alpha\alpha}^{\text{LAR}} = (2S + 1)\Gamma^2 |\langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega}|^2$ are expressed in terms of the frequency-dependent Green's functions (GFs) of type $\langle\langle A_{\sigma}; B_{\sigma} \rangle\rangle_{\omega} = \sum_m \langle\langle A_{\sigma}|m\rangle\langle m|; B_{\sigma} \rangle\rangle_{\omega}$ (details in the Appendix A), due to the presence of the large spin, in which the thermal average $\langle|m\rangle\langle m|\rangle = \frac{1}{2S+1}$ should be taken into account. Particularly, these GFs, are indeed the time Fourier transform (with $k_B = \hbar = 1$) of

$$\langle\langle A_{\sigma}; B_{\sigma} \rangle\rangle_{\omega} = \int \sum_m \langle\langle A_{\sigma}(t)|m(t)\rangle\langle m(t)|; B_{\sigma}(0) \rangle\rangle e^{i\omega^+ t} dt, \quad (8)$$

where $\omega^+ = \omega + i\eta^+$, with $\eta^+ \rightarrow 0$ and

$$\begin{aligned} \langle\langle A_{\sigma}(t)|m(t)\rangle\langle m(t)|; B_{\sigma}(0) \rangle\rangle &= -i\theta(t)\mathcal{Z}^{-1}\text{Tr}\{e^{-\mathcal{H}/T} \\ &\quad [A_{\sigma}(t)|m(t)\rangle\langle m(t)|, B_{\sigma}(0)]_+\} \end{aligned} \quad (9)$$

stands for the time-dependent GF following double-brackets Zubarev notation[60], wherein Tr gives the trace over Eq.(1) eigenstates, $\mathcal{Z}$ is the partition function and $[\dots]_+$ as the anticommutator.

In practice, the GFs should be determined via the standard equation-of-motion (EOM) approach[61], which in frequency domain, can be summarized as follows

$$\omega^+ \langle\langle A_{\sigma}; B_{\sigma} \rangle\rangle_{\omega} = \langle[A_{\sigma}, B_{\sigma}]_+\rangle + \langle\langle [A_{\sigma}, \mathcal{H}]; B_{\sigma} \rangle\rangle_{\omega}. \quad (10)$$

Additionally, Ref.[59] also ensures that the QI normalized DOS obeys the decomposition

$$\text{DOS}(\uparrow) = -\Gamma \text{Im} \langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega} = \tau_{\alpha\bar{\alpha}}^{\text{ET}} + \tau_{\alpha\alpha}^{\text{LAR}}. \quad (11)$$

As Eq.(11) is bounded to unity, it describes the electronic overall transmittance through the QI decomposed into ET and LAR processes. Specially when it attains to its maximum value at zero energy, i.e., the $\text{DOS}(\uparrow)(0) = 1$ value gives the electronic zero-frequency spectral weight. In this case, the regular fermionic state of the QI is then made equally by the MZMs γ_A and γ_B . Equivalently, it means that the corresponding normalized DOSs for such quasiparticles localize Majorana states with the same spectral weights and as a result, the QI state is fully built by a pair of resonant MZMs. It gives rise to the conductance $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{h}$. Interestingly enough for $\text{DOS}(\uparrow)(0) = 1/2$, an isolated ordinary MZM is found at the QI site and the zero-bias conductance is characterized by the hallmark $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$ [3, 4]. Such a case corresponds to an ideal infinite superconducting wire. However, there is a regime in which the value $\text{DOS}(\uparrow)(0) = 1/2$ is still present for a finite wire and due to the Ising interaction between the large spin and the QI, the observation of the conductance $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$ is ensured. This emerges from the novel excitation that we introduce as the MIQ, in particular, by driving the system into the sweet spot for the exchange interaction J , namely, $J = J_h$. In the latter, the index “h” stands for the “half-fermion” special condition of a MZM, which is produced by imposing $\text{DOS}(\uparrow)(0) = 1/2$, from where we extract J_h for a given S [see Fig.3 b)-I].

Therefore, in order to reveal the aforementioned Physics about the system conductance, we should begin evaluating Eq.(6) for the electron tunneling process. Thus, the GF $\langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega}$ should be found via the EOM method, which gives

$$\langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega} = \frac{1}{2S+1} \sum_m \frac{1}{\omega^+ - \varepsilon_{\uparrow} - \frac{Jm}{2} + i\Gamma - \Sigma_{\text{MFs}}^+}, \quad (12)$$

where $\Sigma_{\text{MFs}}^+ = K_+ + (2t\Delta)^2 K_{\text{MFs}} \tilde{K}_m$ represents the self-energy correction due to the couplings of the QI with the TSC and the large spin S . This also depends on the following defined quantities

$$K_{\text{MFs}} = \frac{\omega^+}{\omega^2 - \varepsilon_M^2 + 2i\omega\eta^+ - (\eta^+)^2}, \quad (13)$$

$$K_{\pm} = \frac{\omega^+(\Delta^2 + t^2) \pm \varepsilon_M(t^2 - \Delta^2)}{\omega^2 - \varepsilon_M^2 + 2i\omega\eta^+ - (\eta^+)^2} \quad (14)$$

and

$$\tilde{K}_m = \frac{K_{\text{MFS}}}{\omega^+ + \varepsilon_{\uparrow} + \frac{J_m}{2} + i\Gamma - K_-}. \quad (15)$$

Concerning the LAR, the conductance of Eq.(7) needs the evaluation of the anomalous GF $\langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega}$ instead. After performing the EOM approach, it gives rise to

$$\langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega} = -\frac{1}{2S+1} \sum_m \frac{2t\Delta K_m}{\omega^+ + \varepsilon_{\uparrow} + \frac{J_m}{2} + i\Gamma - \Sigma_{\text{MFS}}^{-m}}, \quad (16)$$

with $\Sigma_{\text{MFS}}^{-m} = K_- + (2t\Delta)^2 K_{\text{MFS}} K_m$ and

$$K_m = \frac{K_{\text{MFS}}}{\omega^+ - \varepsilon_{\uparrow} - \frac{J_m}{2} + i\Gamma - K_+}. \quad (17)$$

However, if we want to know about the possibility of isolating MZMs in the QI, the DOSs for γ_A and γ_B should be found in order to examine the emergence of resonant states. To this end, we invert Eq.(4) for γ_A and γ_B , namely, $\gamma_A = (d_{\uparrow}^{\dagger} + d_{\uparrow})/\sqrt{2}$ and $\gamma_B = i(d_{\uparrow}^{\dagger} - d_{\uparrow})/\sqrt{2}$, and we calculate the GFs $\langle\langle \gamma_A; \gamma_A \rangle\rangle_{\omega}$ and $\langle\langle \gamma_B; \gamma_B \rangle\rangle_{\omega}$. Consequently,

$$\begin{aligned} \langle\langle \gamma_j; \gamma_j \rangle\rangle_{\omega} &= \frac{1}{2} [\langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega} + \langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow} \rangle\rangle_{\omega} \\ &\quad + \epsilon (\langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega} + \langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow} \rangle\rangle_{\omega})], \end{aligned} \quad (18)$$

where $j = (A, B)$ corresponds to $\epsilon = (+1, -1)$, respectively. Physically speaking, the sign reversal in ϵ can lead to distinct quantum interference phenomena, in particular between those encoded by the normal GFs ($\langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega}$ and $\langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow} \rangle\rangle_{\omega}$) and the corresponding superconducting ($\langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega}$ and $\langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow} \rangle\rangle_{\omega}$). To reveal such interference processes, we need just to find the GFs $\langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow} \rangle\rangle_{\omega}$ and $\langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega}$ to close the evaluation of $\langle\langle \gamma_A; \gamma_A \rangle\rangle_{\omega}$ and $\langle\langle \gamma_B; \gamma_B \rangle\rangle_{\omega}$. By applying the EOM method, we conclude that

$$\langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow} \rangle\rangle_{\omega} = \frac{1}{2S+1} \sum_m \frac{1}{\omega^+ + \varepsilon_{\uparrow} + \frac{J_m}{2} + i\Gamma - \Sigma_{\text{MFS}}^{-m}} \quad (19)$$

and

$$\langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega} = -\frac{1}{2S+1} \sum_m \frac{2\Delta t \tilde{K}_m}{\omega^+ - \varepsilon_{\uparrow} - \frac{J_m}{2} + i\Gamma - \Sigma_{\text{MFS}}^{+m}}. \quad (20)$$

Naturally, we define the normalized DOSs for γ_A and γ_B such as

$$\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_j] = -\Gamma \text{Im} \langle\langle \gamma_j; \gamma_j \rangle\rangle_{\omega}. \quad (21)$$

This formula elucidates that when the quantity $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_j](0) = -\Gamma \text{Im} \langle\langle \gamma_j; \gamma_j \rangle\rangle_{\omega}(0) = 1$ is fulfilled, it can be recognized as the maximum Majorana quasiparticle transmittance or its corresponding zero-frequency spectral weight.

Henceforward, we focus the attention on the case $\varepsilon_{\uparrow} = 0$ (grounded SC). We perceive by inspecting Eqs.(12) and (19), that Eq.(11) becomes also $\text{DOS}(\uparrow) = -\Gamma \text{Im} \langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow} \rangle\rangle_{\omega}$. Additionally, $-\Gamma \text{Im} \langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega} = -\Gamma \text{Im} \langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow} \rangle\rangle_{\omega}$. This in combination with Eqs.(18) and (21) allow us to establish that

$$\text{DOS}(\uparrow) = \frac{1}{2} (\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A] + \text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B]). \quad (22)$$

Consequently, by taking into account this finding together with Eqs.(5), (6), (7) and (11), we conclude the providential equality as follows

$$\mathcal{G}_{\text{Total}} = \mathcal{G}_{\gamma_A} + \mathcal{G}_{\gamma_B}, \quad (23)$$

where

$$\mathcal{G}_{\gamma_j}(\text{eV}) = \frac{e^2}{4h} [\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_j](\text{eV}/2) + \text{DOS}(\uparrow)[\gamma_j](-\text{eV}/2)] \quad (24)$$

stands for the conductance contribution arising from the quasiparticle γ_j within the QI.

We highlight that Eq.(23) introduces an alternative perspective concerning the underlying Physics of the conductance in Eq.(5): the ET and LAR quantum transport mechanisms are revealed as the net effect of two Majorana quasiparticle conductances, namely, the corresponding contributions arising from γ_A and γ_B , respectively. In this context, our main findings hold for the constraint $J = J_h$ fulfilled, thus characterizing the system sweet spot to produce the MIQ. This regime consists of the maximum Majorana quasiparticle transmittance $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_j](0) = 1$, surprisingly, fractionalized and split into $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0) = 1/2$ and $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 1/2$. Despite such equipartition, the electronic transmittance is still given by $\text{DOS}(\uparrow)(0) = 1/2$ [see Fig.3 b)-I] and according to Eq.(24), it ensures $\mathcal{G}_{\gamma_A}(0) = \frac{e^2}{4h}$ and $\mathcal{G}_{\gamma_B}(0) = \frac{e^2}{4h}$. However, counterintuitively, solely $\mathcal{G}_{\gamma_B}(0)$ contains a MZM in the common sense, i.e., a resonant state, while $\mathcal{G}_{\gamma_A}(0)$ shows a dip instead, but with the same magnitude of the peak in γ_B . This is the reason why we call the contribution $\mathcal{G}_{\gamma_B}(0) = \frac{e^2}{4h}$ by $\mathcal{G}_{\text{MIQ}}(0)$, in attention to the emergent MIQ. This is the unique MZM-type resonant state that appears in the system, due to the interplay between the topological superconductivity and the Ising Hamiltonian. In this case, Eqs.(5) and (23) ensure that when the MIQ emerges, $\mathcal{G}_{\gamma_B}(0)$ exhibits a maximum and $\mathcal{G}_{\gamma_A}(0)$ shows a minimum, in such a way that only $\mathcal{G}_{\text{ET}}(0)$ enters into $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$. It means that the LAR process is found entirely suppressed within this regime. The complete analysis here summarized will be discussed in the next section.

IV. RESULTS

In the entire numerical analysis of Sec.A, we keep constant $\varepsilon_{\uparrow} = 0$ (grounded SC), $\lambda_1 = 2.12\Gamma$ ($\Delta = t$) and perform variations in the parameters ε_M , S and J . Partially for Sec.B, we assume $|\lambda_1| \sim |\lambda_2|$ [$\Delta \neq 0, t \rightarrow 0$] from Eq.(1) [Eq.(3)] to analyze the ABSs regime within the framework of the effective model[33]. We should remember that $\mu_{\text{Source}} - \mu_{\text{Drain}} = eV$ represents the bias-energy between source and drain leads, with the choice $\mu_{\text{Source}} = -\mu_{\text{Drain}} = eV/2$ in our transport calculations.

A. Majorana-Ising-type quasiparticle (MIQ) excitation

In Fig.2 we present, for the QI of Fig.1, the total conductance of Eq.(5) as a function of the bias-voltage eV/Γ . Particularly in Fig.2(a) the ideal case is considered, i.e., the TSC wire is perfectly infinite ($\varepsilon_M = 0$) and the large spin is found turned-off ($S = 0$). This case is well-known, being characterized by the ZBP in the conductance given by $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$ [3, 4]. Interestingly enough, this ZBP in the conductance represents the isolated MZM γ_1 originally attached to one edge of the TSC wire, which leaks towards the QI site in the form of the MZM γ_A . The MZM leakage from the TSC edge into the QI is then characterized by the $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0) = 1$ and $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 0$. We will provide extra details concerning this issue in the discussion of the inset a)-I of Fig.3(a). In the other hand, the satellite peaks in Fig.2(a) are the aftermath of the splitting arising from the condition $i\sqrt{2}\lambda_1\gamma_B\gamma_1$ given by Eq.(3) for the *poor man's Majoranas* regime of the system[57, 58]. Additionally, we have made explicit via Eq.(5) that the ET and LAR processes compose the total conductance. Thus, such a feature can be viewed in Fig.2(b), where we notice, in particular, for the ZBP conductance that, the ET and LAR split equally. Here we propose that it is still achievable to obtain $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$ for a finite TSC wire and to perform also the isolation of a Majorana quasiparticle at the QI site. In our setup, such an excitation rises, in particular, dressed by the Ising interaction. To this end, an integer large spin S should be accounted for and be coupled to the QI with a special value in the exchange interaction J . Thus, by evaluating $J = J_h$, the amplitude $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$ [Eq.(23)] finally becomes restored. However, we will verify that such a configuration corresponds to isolate a peculiar MZM, namely γ_B , with a resonant peak characterized by the spectral weight $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 1/2$ [Eq.(21)], while for γ_A we have the same amplitude, i.e., $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0) = 1/2$, but with a dip instead.

Now, we consider the presence of a large spin S . Figs.2(c) and (d) show the total conductance in the presence of $S = 3$ and $J_h = 1.335\Gamma$ [see inset b)-I of Fig.3(b)] for a finite TSC with $\varepsilon_M = \Gamma$. The ZBP

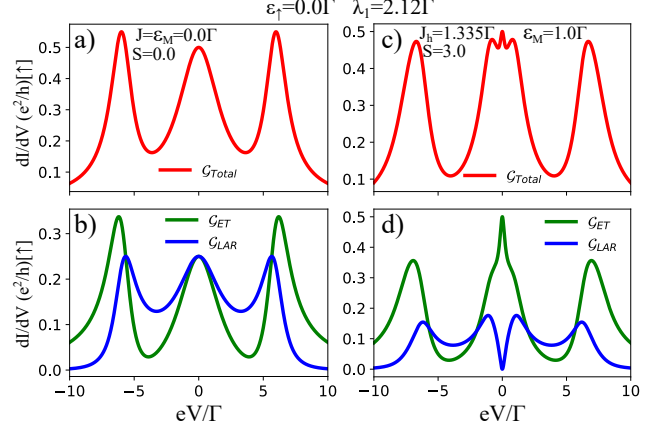


Figure 2. (Color online) (a) Total differential conductance $\mathcal{G}_{\text{Total}}$ [Eq.(5)] versus the source-drain bias-voltage eV in units of the QI-lead coupling Γ with isolated MZMs γ_1 and γ_2 ($\varepsilon_M = 0$) in the absence of a spin-polarized tip ($S = 0$). As aftermath, a zero-bias peak (ZBP) emerges with amplitude $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$ and characterizes the leaking of the MZM γ_1 from the TSC wire edge [Fig.1(c)] into the QI as γ_A [inset a)-I of Fig.3(a) and Refs.[3, 4]. (b) The ZBP conductance can be split into finite contributions from the electron tunneling (ET) and local Andreev reflection (LAR) processes [Eq.(5)], namely, $\mathcal{G}_{\text{ET}}(0)$ and $\mathcal{G}_{\text{LAR}}(0)$, respectively. This corresponds to the ideal case of an infinite TSC wire, wherein these processes compete on equal footing. (c) In the presence of a tip with $S = 3$ and exchange coupling at the sweet spot $J = J_h = 1.335\Gamma$ [inset b)-I of Fig.3(b)] for a finite wire ($\varepsilon_M = 1\Gamma$), the amplitude $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$ is still observed and denotes the existence of a MIQ γ_{MIQ} within the QI, but with related differential conductance $\mathcal{G}_{\text{MIQ}}(0) = \frac{e^2}{4h}$ [Fig.3(c) and Eqs.(23)-(24)]. (d) In the regime of (c), $\mathcal{G}_{\text{LAR}}(0)$ is completely quenched and solely the term $\mathcal{G}_{\text{ET}}(0)$ contributes to the ZBP.

conductance in Fig.2(c) is $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$ as expected, but the decomposition into ET and LAR channels described in Fig.2(d) reveals a striking result: solely ET survives, while LAR is completely suppressed at zero-bias. Below we will verify that the LAR suppression corresponds to a quasiparticle localization in the DOS for γ_B , which leads to $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 1/2$. Thus, according to Eq.(24), such a finite DOS contributes to a conductance $\mathcal{G}_{\gamma_B}(0) = \mathcal{G}_{\text{MIQ}}(0) = \frac{e^2}{4h}$, where we define the MIQ $\gamma_B \equiv \gamma_{\text{MIQ}}$.

In order to understand the emergence of the MIQ, we begin with the trivial case in Fig.3(a): the central panel discriminates the electronic $\text{DOS}(\uparrow)$ into the corresponding DOSs for γ_A and γ_B [Eq.(21)] with $S = 0$ and $\varepsilon_M = \Gamma$. This case is regarded as trivial, once we verify that in both the DOSs γ_A and γ_B resonant states pinned at zero-energy $\omega = 0$ are present. Schematically, the QI fermionic state can be imagined as a sphere formed by two MZMs depicted by two calottes. This is the manner we outline pictorially the two zero-energy resonant states, the so-called MZMs in the DOSs γ_A and γ_B . This sketch can be found in the upper-right inset of Fig.3(a), in which

each calotte symbolizes the “half-fermionic” character of the MZM. Equivalently, a calotte occupies the half-volume of the sphere and as it corresponds to a MZM, it can be surely characterized by $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_j](0) = 1$. As aftermath, according to Eqs.(22)-(24), these two MZMs lead to the zero-bias conductance peak $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{h}$. Concerning the satellite peaks in the $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B]$, they occur due to the overlap between the MZMs γ_B and γ_1 . In the other hand, the inset panel a)-II of Fig.3(a) shows the spin-down channel, which is the one decoupled from the TSC. To analyze it on the same footing as the spin-up channel, we assume artificially $\varepsilon_\downarrow = 0$ and verifies that both the MZMs γ_C and γ_D , which constitute this spin sector of the QI, are then identified exactly by degenerate resonant states. The evaluation of the DOSs for the spin-down sector just employs the GFs for the spin-up sector, but it disregards the superconducting terms. As none of these MZMs overlap with γ_1 , a full superposition of the lineshapes for these MZMs manifests in the profiles of the DOSs γ_C and γ_D . Therefore, satellite peaks do not emerge. Now, let us go back to discuss the spin-up channel. We should pay particular attention to the case $\varepsilon_M = 0$ depicted in the inset panel a)-I of Fig.3(a), which corresponds to the nonoverlapped situation between γ_1 and γ_2 . This scenario is the ideal one and it contains the pillars for the conductance behavior of Fig.2(a). Notice that γ_B overlaps with γ_1 leading to satellite peaks in $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B]$ and $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 0$, while γ_A is found isolated and localized as a well-defined resonant zero-mode with spectral weight $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0) = 1$. Thereafter, $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \mathcal{G}_{\gamma_A}(0) = \frac{e^2}{2h}$. This case is well-known in literature [3, 4] and points out that the MZM γ_A contributes to the conductance as a resonant state in contrast to γ_B , which shows a gap in $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B]$ around zero-bias. This latter prevents a finite conductance, i.e., $\mathcal{G}_{\gamma_B}(0) = 0$. Below, we will see that by turning-on the exchange J for a given S , the spectral profiles for the $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A]$ and $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B]$ will exhibit a multi-level structure. Additionally, these densities will be responsible, according to Eq.(24), by a nonquantized $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) \neq \frac{e^2}{h}$ in Eq.(23). In the situation of arbitrary J , the contributions to $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) \neq 0$ will not arise from well-defined resonant zero-mode states in $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A]$ and $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B]$. The Majorana fermion localization within the QI as a resonant zero-mode state will only occur for the sweet spot $J = J_h$.

Fig.3(b) treats the presence of a large spin coupled to the QI for $\varepsilon_M = \Gamma$. As we can notice, the Ising interaction $J = 5\Gamma$ for $S = 3$ clearly affects the spectral profiles of $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A]$ and $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B]$. Basically, it introduces a multi-level structure for the satellite peaks and modifies drastically the MZM localization around the zero-bias. Surprisingly, the $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A]$ presents a valley (dip) at zero-energy and a quasi-resonant MZM rises in $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B]$. As a matter of fact, the latter cannot be considered a well-defined resonant MZM: its spectral weight is not exactly an integer or semi-integer number, and

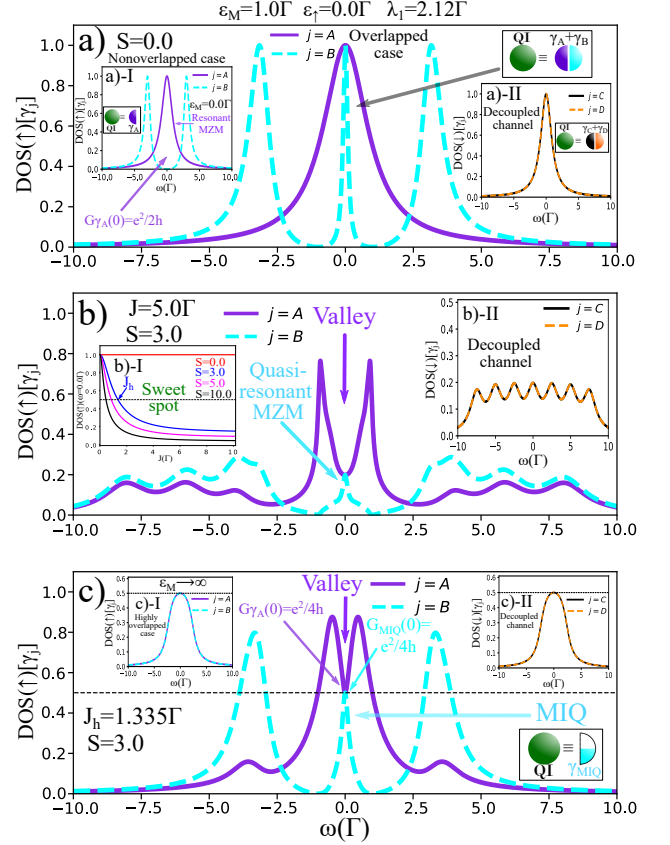


Figure 3. (Color online) (a) The central panel shows the frequency dependence of the normalized densities of states (DOSs) for the MZMs γ_A and γ_B [Eq.(21)] for the spin-up channel within the QI by assuming the spin-polarized tip absent and the MZMs γ_1 and γ_2 overlapped ($\varepsilon_M = 1\Gamma$) in the TSC. In each DOS we find a resonant MZM, which corresponds to a “half-fermionic” state of the QI depicted as the green sphere in the upper-right inset. This sphere has inner MZMs represented by calottes to denote the half-fermion nature of the MZM. In the nonoverlapped situation, only the calotte γ_A prevails [inset a)-I]. It leads to $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \mathcal{G}_{\gamma_A}(0) = \frac{e^2}{2h}$ in Fig.2(a) [Eqs.(23)-(24)]. For the spin-down channel, which is decoupled from the TSC, the MZMs γ_C and γ_D within the QI stay paired permanently [inset a)-II]. (b) In the presence of $S = 3$ and $J = 5\Gamma$ for $\varepsilon_M = 1\Gamma$ the DOS for γ_A changes drastically exhibiting a valley at $\omega = 0$ instead of a peak, while for γ_B the zero-mode is not well defined. To restore the ZBP $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$ we should choose the right J for a given S , i.e., the sweet spot $J = J_h$ [panel b)-I] for the QI DOS of Eq.(22) imposing $\text{DOS}(\uparrow)(0) = 1/2$. In the spin-down channel, the γ_C and γ_D DOSs are degenerate with a $2S + 1$ multi-level structure [panel b)-II]. (c) The choice $J = J_h = 1.335\Gamma$ for $S = 3$ completely defines the valley and peak for the DOSs γ_A and γ_B , respectively, where in the latter we introduce $\gamma_B \equiv \gamma_{\text{MIQ}}$ as the Majorana-Ising quasi-particle, once the peak clearly represents the unique MZM isolated in the system. It is characterized by a ZBP given by $\mathcal{G}_{\text{MIQ}}(0) = \frac{e^2}{4h}$ pictorially illustrated by the half-calotte in the lower-right inset for the green sphere representing the QI fermionic state. However, $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \mathcal{G}_{\gamma_A}(0) + \mathcal{G}_{\text{MIQ}}(0) = \frac{e^2}{2h}$.

the lineshape broadening does not obey a *lorentzian-like* form. The lineshapes of such spectral densities are then distinct, but counterintuitively, their zero-bias values coincide, i.e., $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0) = \text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0)$. As the spin-up sector of the QI is the one coupled to the TSC, the spectral profiles in the $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A]$ and $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B]$ do not follow strictly the standard angular momentum theory for the Zeeman splitting [Eq.(2)]. Usually, this theory ensures that for an integer S , $2S$ symmetrically displaced levels around the corresponding at $\omega = \varepsilon_\uparrow = 0$ should emerge. Here, indeed we observe a mirror-symmetric set with S energy bands below and above the zero-bias, respectively, where nearby peculiar spectral structures rise. We reveal that the profiles differ significantly in this range, as aftermath of the nontrivial interplay between the TSC and Ising exchange term. In Figs.4(d)-(f) we will see that the manifestation of this effect lies within a region comprised by *cone-like walls* spanned by ω and ε_M in the DOSs of the system. Within the cone, the Zeeman splitting becomes unusual and the energy spacing between the levels is simultaneously governed by J and ε_M . Besides, solely the spin-down channel shows standard Zeeman splitting, once it does not perceive the TSC. This can be verified in the inset panel b)-II of Fig.3(b), where the DOSs for γ_C and γ_D , as expected, present the ordinary $2S+1$ multi-level structure ensured by Eq.(2). We highlight that upon decreasing the exchange parameter J , the restoration of the conductance $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$ can be still allowed. Thus, we should remember that such a conductance arises from the fulfillment of the condition $\text{DOS}(\uparrow)(0) = 1/2$. Particularly in the inset panel b)-I of Fig.3(b), we show exactly the points where this happens by considering several values of S and $\varepsilon_M \neq 0$. Particularly for $S = 3$, this sweet spot occurs for $J = J_h = 1.335\Gamma$ and its dependence on ε_M is revealed as very weak according to our numerical calculations (not shown). It means that $J = J_h = 1.335\Gamma$ still keeps the value $\text{DOS}(\uparrow)(0) = 1/2$ while ε_M does not exceed very much Γ ($\varepsilon_M \gg \Gamma$). Experimentally speaking, J can be tuned by changing the tip-QI vertical distance. Thus for $\varepsilon_M \neq 0$, $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0)$ drops from $\frac{e^2}{h}$ to $\frac{e^2}{2h}$ when $J = J_h$. Hence, at the sweet spot, if one knows previously the spin S of the tip, J_h can be extracted from Fig.3 b)-I or vice-versa.

In Fig.3(c) we present the case $J = J_h = 1.335\Gamma$ that leads to our main finding: a localization of a resonant state at zero-energy in $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B]$, with spectral weight $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 1/2$. The latter amplitude points out that the ordinary MZM now is fractionalized and the value $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 1$ is not present anymore. This fractionalized MZM, the called MIQ by us, then leads to a conductance $\mathcal{G}_{\gamma_B}(0) = \mathcal{G}_{\text{MIQ}}(0) = \frac{e^2}{4h}$ as ensured by Eq.(24). The value $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 1/2$ can be pictorially viewed by the half-calotte found in the lower-right inset of Fig.3(c), which symbolizes the MZM fractionalization within the QI state. Nevertheless, to complete the total conductance $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$, the zero-bias value for $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0)$ should coincide, i.e.,

$\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0) = 1/2$ and as aftermath, $\mathcal{G}_{\gamma_A}(0) = \frac{e^2}{4h}$ as well. Here we emphasize that in $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0)$ a quantum destructive interference manifests and a resonant state does not rise at zero-bias. Moreover, it is capital to clarify the underlying mechanism to produce the MIQ: the key idea is the decrease of J , thus forcing the merge of the $2S$ side bands (satellite peaks) of the system towards the zero-energy, where a resonant level is pinned. As a result, this sum of amplitudes for the satellite peaks interferes constructively at zero-energy giving rise to $\text{DOS}(\uparrow)(0) = 1/2$ for $J = J_h$. Further, our findings do not depend on the sign of J and in case of a semi-integer large spin, the multi-level structure is even and a zero-energy is absent in the spectrum. In this manner, the MIQ cannot be excited. Concerning the inset panels c)-I and c)-II of Fig.3(c), we verify that for $\varepsilon_M \gg \Gamma$ (or $\varepsilon_M \rightarrow \infty$) the DOSs for the Majorana fermions are degenerate. For extremely short TSC wires ($\varepsilon_M \rightarrow \infty$), the energy level ε_M for the orbital f [Eq.(3)] is highly off resonance the QI energy $\varepsilon_\uparrow = 0$, thus making the QI and the TSC to decouple from each other. Thus, the spin-up channel behaves as the corresponding spin-down, which is the one permanently decoupled from the TSC. This implies that the MIQ cannot be seen for very short wires.

Fig.4 summarizes our findings exhibiting color maps of Eqs.(11) and (21) for the electronic and Majorana DOSs, respectively and spanned by ω and ε_M . Panels (a)-(c) describe the case $S = 0$, which is characterized by $\text{DOS}(\uparrow)(0) = 1$ and $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0) = \text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 1$. This corresponds to the trivial regime where two MZMs localize around zero-bias and appear at the QI site. Such a characteristic lies on the zero-bias peaks and appears as horizontal lines in the representation of panels (a)-(c) for any finite value of ε_M . As we can see, the satellite peaks in (a) arise from (c). By turning-on the Ising interaction with $S = 3$ and $J = 5\Gamma$, the spectral profiles of the DOSs acquire distinct patterns: the satellite peaks obey approximately the standard angular momentum theory for the Zeeman splitting, thus exhibiting $2S$ split side-bands. In this situation, the linear dependence on the exchange parameter J is lacking. Besides, the central regions of panels (a)-(c) are converted into the domains delimited by *cone-like walls* as those found in (d)-(f). While these walls persist up to a threshold in ε_M (not marked in the figure), a sophisticated interplay between the TSC and the Ising interaction rules the Physics of the system and allows the possibility of the MIQ existence. Notice that for $\varepsilon_M > \Gamma$, a $2S+1$ multi-level central structure finally becomes resolved. It is worth mentioning that for $\varepsilon_M = \Gamma$, the line cuts in Fig.4 given by the vertical dashed lines, then correspond to the cases discussed in detail in Fig.3. We would like to mention that the choice $\varepsilon_M = \Gamma$ corresponds to a strong limit, just to better resolve our findings. However, while ε_M stays within the aforementioned *cone-like walls*, the effect persists. In panels (e) and (f) we notice the rising of the valley and the quasi-resonant MZM spectral struc-

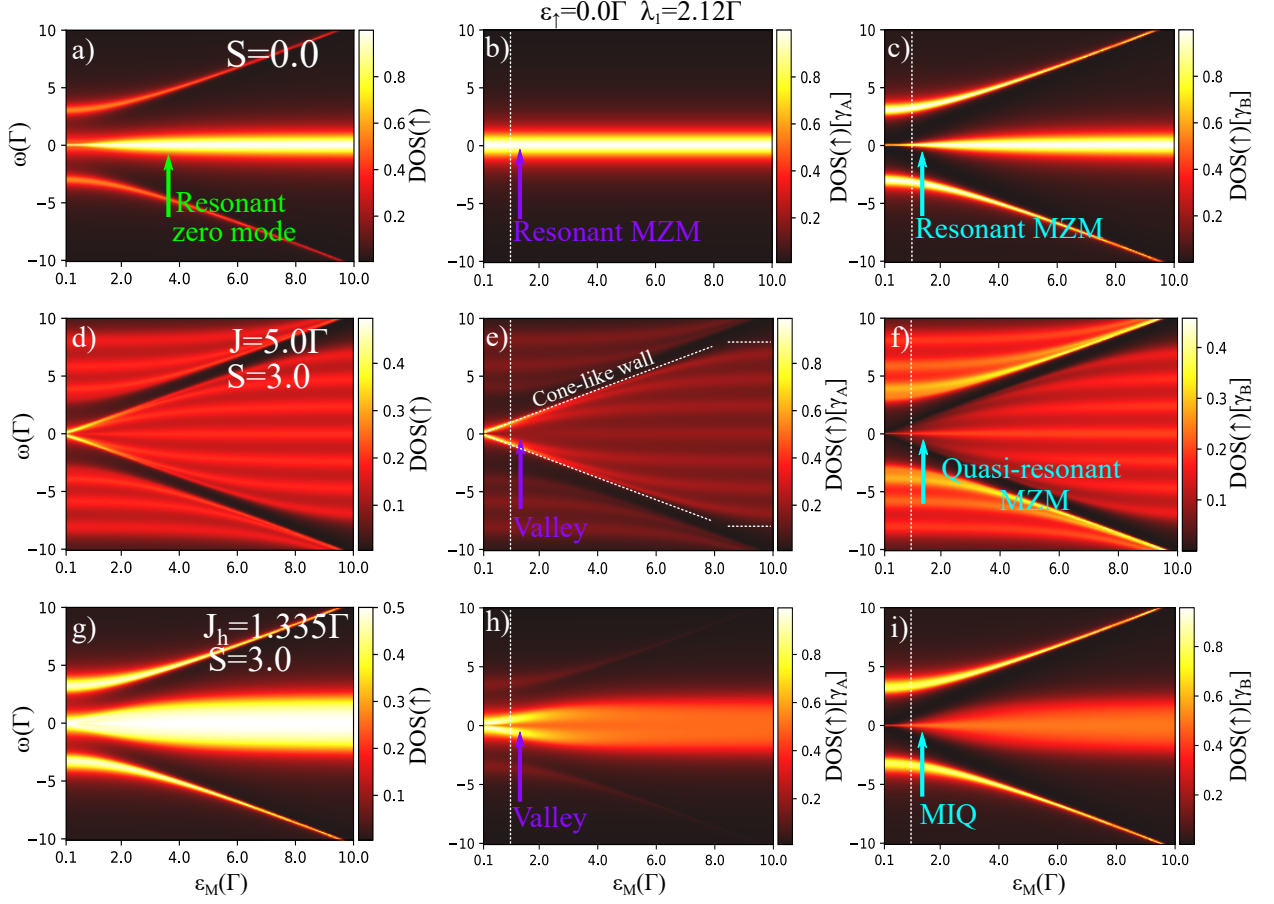


Figure 4. (Color online) Color maps of Eqs.(11) and (21) for the QI, γ_A and γ_B DOSs, respectively, spanned by the frequency ω and ϵ_M : (a) In the case $S = 0$, the ZBP in the DOS($\uparrow$) arises from the individual ZBPs found in DOS($\uparrow$)[γ_A] [panel(b)] and DOS($\uparrow$)[γ_B] [panel(c)], due to the MZMs γ_A and γ_B that act as the building-blocks of the QI state $\epsilon_\uparrow = 0$ [Eq.(22)]. They reveal that the system does not contain isolated MZMs and that the overlapped γ_1 and γ_2 split the zero-mode energy state leading to the upper and lower arcs in panels (a) and (c). Panels (d)-(f) reveal the influence of $S = 3$ and $J = 5\Gamma$ on the QI, where we can clearly see a $2S + 1$ multi-level structure centered at $\omega = 0$. The upper and lower arcs, distinctly, show $2S$ levels each. The central region of (e) has a valley-type structure in contrast to that for (f), which points out a quasi-resonant MZM. In both the cases, the $2S + 1$ multi-level structure is delimited by cone-like walls up to a threshold in ϵ_M (not indicated), where above it the DOS($\uparrow$)[γ_A] and DOS($\uparrow$)[γ_B] exhibit a zero-mode with the lines of the walls parallel to each other. For this situation, the TSC plays no role and the MZMs γ_A and γ_B stay paired as in (a)-(c). Panels (g)-(i) hold for the sweet spot $J = J_h = 1.335\Gamma$, where we have the zero-frequency valley and peak well-resolved in the DOS($\uparrow$)[γ_A] and DOS($\uparrow$)[γ_B], respectively. In the latter, the MIQ rises as aftermath of the partial merge of the $2S + 1$ multi-level structure centered at $\omega = 0$ upon decreasing the coupling J . We call the attention that the vertical lines represent slice cuts of the cases profoundly explored in Figs.2 and 3.

tures, respectively upon increasing ϵ_M . However, much above the threshold in ϵ_M , the linear spacing in J for the Zeeman splitting is restored and this situation is that delimited by the marked horizontal dashed lines. Finally, panels (g)-(i) show the merge of the multi-level structure in the sweet spot $J = J_h = 1.335\Gamma$ leading to the emergence of the MIQ in the Majorana channel γ_B , while the valley continues in the channel γ_A . Therefore, within the cone-like walls domain, the sector γ_B of Majorana fermions for the QI makes explicit a constructive interference process at zero-bias, while the corresponding in γ_A displays a destructive behavior. In this regime, the conductance $\mathcal{G}_{\text{LAR}}(0)$ becomes fully quenched and just

$\mathcal{G}_{\text{ET}}(0)$ contributes to $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$ [Fig.2(d)].

B. Poor man's Majoranas, parity qubit and ABSs regime

In this section, we clarify that the MIQ excitation can be classified as a *poor man's Majorana* [57, 58] and to demonstrate such, the analysis of the DOSs for the MZMs of Eq.(3) placed at the Kitaev dimer right edge is performed. To accomplish this goal, we employ pertinent GFs from the Appendix C. Additionally, we discuss the possibility of having a MIQ excitation-based par-

ity qubit for quantum computing purposes[57] and the ABSs regime within the effective model of Eq.(1)[33]. To this end, let us focus again on the left edge of the Kitaev dimer, i.e., the QI. This system part description is found in central panel of Fig.3(a) ($\varepsilon_M = \Gamma$) and its inset a)-I ($\varepsilon_M = 0$), which account for the QI operator $d_\uparrow$, where the MZMs γ_A and γ_B reside [Eq.(4)]. Particularly, these panels show two resonant and single MZMs, respectively, while in Fig.5(a), a resonant MZM appears permanently in the DOS $(-1/\pi)\text{Im}\langle\gamma_2; \gamma_2\rangle_\omega$ (not normalized, once leads are lacking at this side) for γ_2 in both the situations, thus describing the MZM placed at the TSC right edge. Such a characteristic is entirely understood within the theoretical framework for the Kitaev dimer described in Ref.[57]. The latter points out that systems based on Eq.(3) for QIs tunnel and Andreev-coupled, which in our case are given by the $d_\uparrow$ and f orbital sites, could contain the so-called *poor man's Majoranas*. These MZMs, in particular, cannot be considered topologically protected as true MZMs, and emerge at the M. Leijnse *et al* sweet spot[57], when the following set of parameters is obeyed: $J = 0$, $\Delta = t$ and $\varepsilon_M = \varepsilon_\uparrow = 0$. This scenario can be observed in the inset panels a)-I of Figs.3 and 5, which reveal resonant MZMs, namely, the *poor man's Majoranas*, with one placed at left and the other at right of the Kitaev dimer. This statement holds, since the spectral weights are given by the $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0) = 1$ and $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 0$ for the QI [inset a)-I of Fig.3(a)], while we have $\text{DOS}[\gamma_1](0) = 0$ and $\text{DOS}[\gamma_2](0) \neq 0$ for the Kitaev dimer right edge, as depicted in the inset of Fig.5(a). For the aforementioned case, the nonlocal fermion $\eta = (\gamma_A - i\gamma_2)/\sqrt{2}$ can be made via the linear combination between the resonant MZMs γ_2 and γ_A localized at right and left of the dimer, respectively[57]. In this manner, the fermion parity, which is given by the electronic occupation of $\eta^\dagger\eta$, becomes a feasible quantity for quantum computing[57]. For the resonant MZMs γ_A and γ_B at left depicted in central panel of Fig.3(a) and the corresponding in Fig.5(a), i.e., the situation off the M. Leijnse *et al* sweet spot with $\varepsilon_M = \Gamma$, the fragility of these *poor man's Majoranas* becomes evident. In such a case, the spectral weights $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0) = 1$ and $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 1$ occur simultaneously at the QI. Thus, according to Ref.[57], the zero-mode dip in the DOS $(-1/\pi)\text{Im}\langle\gamma_1; \gamma_1\rangle_\omega$ represents the spill of the MZM γ_1 from the f orbital site over the QI, being characterized by the $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 1$. As after-math, these two resonant MZMs inevitably introduce an ambiguous definition for the nonlocal parity qubit, i.e., it could be $\eta = (\gamma_A - i\gamma_2)/\sqrt{2}$ or $\eta = (\gamma_B - i\gamma_2)/\sqrt{2}$. In this way, the parity qubit becomes not well-defined and its employment compromised, as expected, for quantum computing.

With this in mind, we back to our sweet spot in Fig.3, where the Ising term J_h , by considering $\varepsilon_M = \Gamma$, siphons off the $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0) = 1$ [Fig.3(a)] from resonant profile towards one antiresonant with $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0) = 1/2$ [Fig.3(c)], while it keeps the $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B = \gamma_{\text{MIQ}}](0) =$

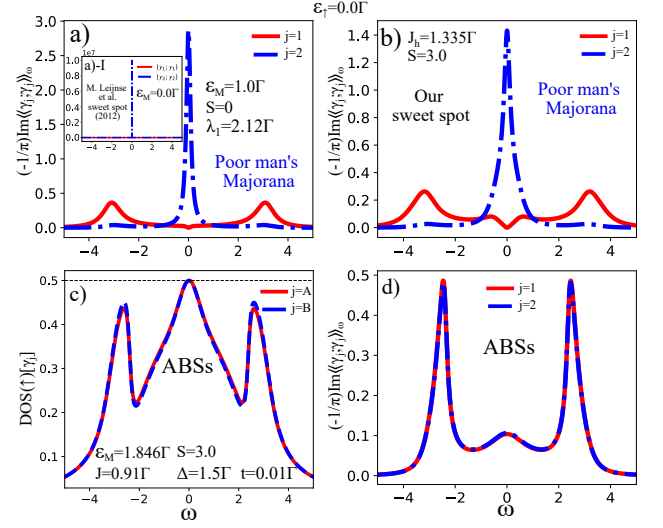


Figure 5. (Color online) Panels (a) and (b) show M. Leijnse *et al*[57] and our sweet spots, respectively for *poor man's Majoranas*. The Andreev bound states (ABSs) regime of Refs.[33, 34] appear depicted in panels (c) and (d). Additionally, fractionalization of zero-modes also occurs in the latter.

$1/2$ [Fig.3(c)] resonant after such a deviation from the value $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 1$ [Fig.3(a)]. As the MZM given by γ_{MIQ} exhibits resonant character and its partner γ_A is of antiresonant-type, it means that the QI does not host exactly one MZM. It is an indication that a MZM is spilled over the QI from the f orbital site, where the $\text{DOS}[\gamma_1](0) = 0$ and the resonant $\text{DOS}[\gamma_2](0) \neq 0$ still persist, as can be seen in Fig.5(b). Thus, such features reinforce that the MIQ excitation obeys the properties of the poor man's Majorana[57]. Let us remember that in panels a)-I from Figs.3 and 5, the left and right resonant MZMs were linearly combined to build η when $\varepsilon_M = 0$. However, an extrapolation to $\eta = (\gamma_{\text{MIQ}} - i\gamma_2)/\sqrt{2}$ for $\varepsilon_M \neq 0$ instead, despite being $\gamma_B = \gamma_{\text{MIQ}}$ resonant and γ_A not, deserves further investigation, once Ref.[57] does not cover such a limit. We let the advances on this particular parity qubit issue to better exploration elsewhere, since they do not belong to the scope of our current research. We call attention that our main findings consist of showing one way of realizing the fractionalization of MZMs, in particular, via the Ising coupling to a QI site.

Still concerning the nature of the fractionalized spectral weight peak given by $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_{\text{MIQ}}](0) = 1/2$, we attribute its origin to several modes that added up result into a half-integer contribution. Indeed, each mode, as we know, due to the QI-leads coupling, becomes a band centered at the mode in the absence of the leads. As the separation between the modes (centers of these bands) depends directly on the Ising coupling J , by decreasing to $J = J_h$ (our sweet spot), it favors the partial merge of the $2S + 1$ odd number of bands at zero-energy, where there is an accumulation point. This is naturally imposed by the choice of an integer S . Consequently,

we find the peak $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_{\text{MIQ}}](0) = 1/2$ and the dip $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0) = 1/2$, when we fix $\text{DOS}(\uparrow)(0) = 1/2$ in Eq.(22).

In summary, as demonstrated by us, the MIQ excitation (the resonant one) and γ_A (the corresponding partner antiresonant) at the system left, together with γ_2 at right, are *poor man's Majoranas*, since they obey their properties of partially protection (not topological) introduced by Ref.[57]. It is worth mentioning that *poor man's Majoranas* were recently verified in the experiment of Ref.[58] and in our case, the *poor man's Majoranas* observed at the QI show fractionalized characteristic, due to the Ising coupling. At the M. Leijnse *et al* sweet spot[57], the Ising term plays no role and we still have $\text{DOS}(\uparrow)(0) = 1/2$, but with the $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_B](0) = 0$ and a peak in the $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_A](0) = 1$, thus reflecting not fractionalized MZMs. In both the sweet spots, it is capital to note that we have always $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$, once we adopt the right side of Eq.(4) as the basis for the quasiparticle excitations of the electron at the QI [Eq.(11)]. This basis is convenient to evaluate the system quantum transport and elucidates if just one MZM (M. Leijnse *et al* sweet spot) or half of each from the MZM couple of quasiparticle excitations at the QI (our sweet spot), is really contributing to $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$.

Figs.5(c) and (d) discuss the ABSs regime, which can be captured by imposing $|\lambda_1| \sim |\lambda_2|$ [$\Delta \neq 0$, $t \rightarrow 0$] in Eq.(1) [Eq.(3)], as pointed out by Ref.[33]. It is worth mentioning that such a scenario corresponds to place the MZMs γ_1 and γ_2 practically at same TSC edge [see Fig.1(d)], with model parameters marked in Fig.5(c), from where we highlight $\Delta = 1.5\Gamma$ and $t = 0.01\Gamma$. Thus, it leads to a conductance $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$, which is purely from electron tunneling, but counterintuitively, assisted by Andreev reflection. It means that although $\mathcal{G}_{\text{LAR}}(\text{eV}) \rightarrow 0$ through the QI flanked by the leads [Eqs.(7), (16) and (20)], the Kitaev dimer, indeed still admits Andreev reflection, in particular, between the $d_{\uparrow}$ and f orbitals given by the terms $\Delta d_{\uparrow}f + \text{H.c.}$ [Eq.(3),[57]], which then build the quasiparticle electronic state at the QI. As Eqs.(23) and (24) also determine $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$, in Fig.5(c), we evaluate then the DOSs $\text{DOS}(\uparrow)[\gamma_j] = -\Gamma \text{Im}\langle\langle\gamma_j; \gamma_j\rangle\rangle_{\omega}$ [Eq.(21)], which strongly depend only on the GFs $\langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega}$ and $\langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow} \rangle\rangle_{\omega}$ [Eq.(18)], since $\langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow} \rangle\rangle_{\omega} = \langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega} \rightarrow 0$ [Eqs.(16) and (20)] in the ABS regime. By looking at Eqs.(A1) and (A2) in the Appendix A, we verify that $\langle\langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega}$ and $\langle\langle d_{\uparrow}^{\dagger}; d_{\uparrow} \rangle\rangle_{\omega}$ have a dependence on $\Delta\langle\langle f^{\dagger}|m\rangle\langle m|; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega}$ and $\Delta\langle\langle f|m\rangle\langle m|; d_{\uparrow} \rangle\rangle_{\omega}$, which are modulated by the SC pairing Δ and GFs associated to $\Delta d_{\uparrow}f + \text{H.c.}$ for the Andreev process. Such features establish the Andreev reflection between the QI and f , while $\mathcal{G}_{\text{LAR}}(\text{eV}) \rightarrow 0$ is evaluated at the interface QI-leads. Additionally, we should highlight that similar analysis in observing the ABSs regime, in particular, within the effective model of Eq.(1) but without the Ising term, was already performed

by some of us via the analogous Eq.(20) of Ref.[34] and now, we extend it to the current Hamiltonian. As consequences, Fig.5(c) also exhibits the DOSs siphon off to $1/2$ for γ_A and γ_B , which distinct from Figs.5(a) and (b) with $\Delta = t$, are identically resonant. In Fig.5(d), a pair of ABSs manifests too. To conclude, $\mathcal{G}_{\text{Total}}(0) = \frac{e^2}{2h}$ could be reproduced by both the *poor man's Majoranas* and ABSs regimes.

V. CONCLUSIONS

We found that the fractionalization of regular MZMs becomes a feasible task once an integer large spin S is exchange coupled to a quantum impurity, in particular when it acts as the new edge of a finite TSC in 1D. A counterintuitive regime arises due to a sweet value for the Ising coupling, which is capable of localizing a fractionalized MZM. We introduce such an excitation as the called Majorana-Ising-type quasiparticle (MIQ). As aftermath, we report the emergence of one MZM with the maximum spectral weight reduced by half and exhibiting resonant character. In contrast, the other MZM mode in the QI does not localize around zero-energy, but shows the same spectral weight of the resonant MZM via an antiresonant profile. Interestingly enough, due to the localization of the MIQ, half of the quantum conductance is made essentially by the normal electronic contribution, while that from the Andreev reflection is totally lacking between the QI and leads. This behavior differs from that observed in perfectly infinite TSC wires, in which one MZM localizes at QI site with maximum spectral weight given by unit and with electronic and Andreev conductances equally split at zero-bias. Therefore, our proposal points out a manner to induce, within a more realistic perspective from an experimental point of view, a quantum state at the edge of a short TSC in 1D. Additionally, our MIQ is demonstrated to be a *poor man's Majorana*[57, 58].

VI. ACKNOWLEDGMENTS

We thank the Brazilian funding agencies CNPq (Grants. Nr. 302887/2020-2, 308410/2018-1, 311980/2021-0, 305668/2018-8 and 308695/2021-6), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Finance Code 001 and FAPERJ process Nr. 210 355/2018. LSR and IAS acknowledge the support from Icelandic Research Fund (Rannis), projects No. 163082-051 and “Hybrid polaritons”. LSR thanks ACS and Unesp for their hospitality.

Appendix A: Green's functions for the system left side

As the GFs in the presence of the large spin obey the notation $\langle\langle A_\sigma; B_\sigma \rangle\rangle_\omega = \sum_m \langle\langle A_\sigma | m \rangle\langle m |; B_\sigma \rangle\rangle_\omega$ [60], here we make explicit the details in the EOM approach to find the elements of type $\langle\langle A_\sigma | m \rangle\langle m |; B_\sigma \rangle\rangle_\omega$. In what follows, we have

$$\begin{aligned} & (\omega^+ - \varepsilon_\uparrow - \frac{Jm}{2} + i\Gamma) \langle\langle d_\uparrow | m \rangle\langle m |; d_\uparrow^\dagger \rangle\rangle_\omega \\ &= \frac{1}{2S+1} - t \langle\langle f | m \rangle\langle m |; d_\uparrow^\dagger \rangle\rangle_\omega - \Delta \langle\langle f^\dagger | m \rangle\langle m |; d_\uparrow^\dagger \rangle\rangle_\omega, \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

$$\begin{aligned} & (\omega^+ + \varepsilon_\uparrow + \frac{Jm}{2} + i\Gamma) \langle\langle d_\uparrow^\dagger | m \rangle\langle m |; d_\uparrow \rangle\rangle_\omega \\ &= \frac{1}{2S+1} + t \langle\langle f^\dagger | m \rangle\langle m |; d_\uparrow \rangle\rangle_\omega + \Delta \langle\langle f | m \rangle\langle m |; d_\uparrow \rangle\rangle_\omega, \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

the other two terms are given by

$$\begin{aligned} & (\omega^+ + \varepsilon_\uparrow + \frac{Jm}{2} + i\Gamma) \langle\langle d_\uparrow^\dagger | m \rangle\langle m |; d_\uparrow^\dagger \rangle\rangle_\omega \\ &= t \langle\langle f^\dagger | m \rangle\langle m |; d_\uparrow^\dagger \rangle\rangle_\omega + \Delta \langle\langle f | m \rangle\langle m |; d_\uparrow^\dagger \rangle\rangle_\omega \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

and

$$\begin{aligned} & (\omega^+ - \varepsilon_\uparrow - \frac{Jm}{2} + i\Gamma) \langle\langle d_\uparrow | m \rangle\langle m |; d_\uparrow \rangle\rangle_\omega \\ &= -t \langle\langle f | m \rangle\langle m |; d_\uparrow \rangle\rangle_\omega - \Delta \langle\langle f^\dagger | m \rangle\langle m |; d_\uparrow \rangle\rangle_\omega \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

And finally the last two GFs associated with the f site is

$$\begin{aligned} \langle\langle f | m \rangle\langle m |; d_\uparrow \rangle\rangle_\omega &= \frac{-t}{(\omega^+ - \varepsilon_M)} \langle\langle d_\uparrow | m \rangle\langle m |; d_\uparrow \rangle\rangle_\omega \\ &+ \frac{\Delta}{(\omega^+ - \varepsilon_M)} \langle\langle d_\uparrow^\dagger | m \rangle\langle m |; d_\uparrow \rangle\rangle_\omega \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

and

$$\begin{aligned} \langle\langle f^\dagger | m \rangle\langle m |; d_\uparrow \rangle\rangle_\omega &= \frac{t}{(\omega^+ + \varepsilon_M)} \langle\langle d_\uparrow^\dagger | m \rangle\langle m |; d_\uparrow \rangle\rangle_\omega \\ &- \frac{\Delta}{(\omega^+ + \varepsilon_M)} \langle\langle d_\uparrow | m \rangle\langle m |; d_\uparrow \rangle\rangle_\omega. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

With this group of GFs we can determine the complete description of the QI.

Appendix B: Quantum transport formalism

Based on the quantum transport Keldysh formalism of Ref.[59], we wrap up here a summary of steps in deriving

Eqs.(6), (7) and (11), which assumes the subgap regime $|eV| \ll \Delta_{\text{SC}} \rightarrow \infty$ (infinite superconducting gap standard approximation) and wide-band limit characterized by an electron-hole symmetry in the QI-leads coupling, which is given by Γ [see the main text below Eq.(1)]. As a result, we have as the total current I_α at the metallic lead α the following

$$I_\alpha = I_\alpha^{\text{ET}} + I_\alpha^{\text{LAR}} + I_\alpha^{\text{CAR}}, \quad (\text{B1})$$

where

$$I_\alpha^{\text{ET}} = \frac{e}{h} \int d\varepsilon \tau_{\alpha\bar{\alpha}}^{\text{ET}}(\varepsilon) [f_\alpha^e(\varepsilon) - f_{\bar{\alpha}}^e(\varepsilon)], \quad (\text{B2})$$

$$I_\alpha^{\text{CAR}} = \frac{e}{h} \int d\varepsilon \tau_{\alpha\bar{\alpha}}^{\text{CAR}}(\varepsilon) [f_\alpha^e(\varepsilon) - f_{\bar{\alpha}}^h(\varepsilon)] \quad (\text{B3})$$

and

$$I_\alpha^{\text{LAR}} = \frac{e}{h} \int d\varepsilon \tau_{\alpha\bar{\alpha}}^{\text{LAR}}(\varepsilon) [f_\alpha^e(\varepsilon) - f_{\bar{\alpha}}^h(\varepsilon)], \quad (\text{B4})$$

where I_α^{ET} and I_α^{CAR} refer to the currents for the electron tunneling (ET) and crossed Andreev reflection (CAR) between the QI and the lead α , but with occupation probabilities of an electron $f_\alpha^e(\varepsilon)$ and hole $f_{\bar{\alpha}}^h(\varepsilon)$ states at lead $\bar{\alpha}$, respectively, where $f_\alpha^j(\varepsilon)$ stands for the Fermi distribution at lead α and $j = e(h)$ for the electron (hole) quasiparticle. For the local Andreev reflection (LAR) I_α^{LAR} , the hole emission is into the same terminal α , once it depends on $f_\alpha^h(\varepsilon)$.

As the total current should conserve, the Kirchhoff's law holds $I_\alpha + I_{\bar{\alpha}} + I_S = 0$. Additionally, the following assumptions are performed: $\mu_{\text{Source}} = -\mu_{\text{Drain}} = eV/2$ and the TSC is supposed to be grounded (null chemical potential $\mu_{\text{SC}} = 0$). The former implies in $f_\alpha^e(\varepsilon) = f_{\bar{\alpha}}^h(\varepsilon)$ and consequently $I_\alpha^{\text{CAR}} = 0$ from Eq.(B3), while the latter gives $I_S = 0$ and finally $I_\alpha = -I_{\bar{\alpha}}$. It means that the current only changes the sign from terminal α to $\bar{\alpha}$, being the conductance $\mathcal{G}_{\text{Total}}$ lead independent:

$$\mathcal{G}_{\text{Total}} = \frac{dI_\alpha}{dV} = \frac{dI_\alpha^{\text{ET}}}{dV} + \frac{dI_\alpha^{\text{LAR}}}{dV} = \mathcal{G}_{\text{ET}} + \mathcal{G}_{\text{LAR}}, \quad (\text{B5})$$

with

$$\begin{aligned} \frac{dI_\alpha^{\text{ET}}}{dV} &= \frac{e^2}{2h} \frac{1}{T} \int d\varepsilon \tau_{\alpha\bar{\alpha}}^{\text{ET}}(\varepsilon) \{f_\alpha^e(\varepsilon)[1 - f_\alpha^e(\varepsilon)] \\ &+ f_{\bar{\alpha}}^e(\varepsilon)[1 - f_{\bar{\alpha}}^e(\varepsilon)]\}, \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

and

$$\begin{aligned} \frac{dI_\alpha^{\text{LAR}}}{dV} &= \frac{e^2}{2h} \frac{1}{T} \int d\varepsilon \tau_{\alpha\alpha}^{\text{LAR}}(\varepsilon) \{f_\alpha^e(\varepsilon)[1 - f_\alpha^e(\varepsilon)] \\ &+ f_\alpha^e(\varepsilon)[1 - f_\alpha^e(\varepsilon)]\}, \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

where we employed the identity $f_\alpha^e(\varepsilon) = f_{\bar{\alpha}}^h(\varepsilon)$ again and

$$\frac{\partial f_{\alpha(\bar{\alpha})}^e(\varepsilon)}{\partial V} = \pm \frac{e}{2T} f_{\alpha(\bar{\alpha})}^e(\varepsilon) [1 - f_{\alpha(\bar{\alpha})}^e(\varepsilon)], \quad (\text{B8})$$

with $k_B = 1$, $f_{\alpha}^e(\varepsilon) = f(\varepsilon - eV/2)$, $f_{\bar{\alpha}}^e(\varepsilon) = f(\varepsilon + eV/2)$ and $f(x) = 1/(1 + e^{x/T})$.

As $\frac{1}{T} f_{\alpha(\bar{\alpha})}^e(\varepsilon) [1 - f_{\alpha(\bar{\alpha})}^e(\varepsilon)] = \left(-\frac{\partial f_{\alpha(\bar{\alpha})}^e(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \rightarrow \delta(\varepsilon \mp eV/2)$ when $T \rightarrow 0\text{K}$, then we deduce Eqs.(6) and (7). To conclude, we should remember that the Keldysh formalism of Ref.[59] also ensures

$$I_{\alpha} = \frac{e}{h} \int d\varepsilon (-\Gamma \text{Im} \langle \langle d_{\uparrow}; d_{\uparrow}^{\dagger} \rangle \rangle_{\omega}) [f_{\alpha}^e(\varepsilon) - f_{\bar{\alpha}}^e(\varepsilon)]. \quad (\text{B9})$$

Therefore, by comparing Eqs.(B9) and (B1), together with Eqs.(B2) and (B4), we finally determine Eq.(11).

Appendix C: Green's functions for the system right side

Here we show the GFs for the f orbital site and the MZMs γ_1 and γ_2 of the Kitaev dimer right side [Eq.(3)]. These quantities are important for Fig.5 and make explicit the *poor man's Majoranas*[57, 58] and ABSs[33] regimes in our system. As we know that $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f^{\dagger} + f)$ and $\gamma_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(f^{\dagger} - f)$, we naturally find the GF

$$\begin{aligned} \langle \langle \gamma_j; \gamma_j \rangle \rangle_{\omega} &= \frac{1}{2} [\langle \langle f; f^{\dagger} \rangle \rangle_{\omega} + \langle \langle f^{\dagger}; f \rangle \rangle_{\omega} \\ &+ \epsilon (\langle \langle f^{\dagger}; f^{\dagger} \rangle \rangle_{\omega} + \langle \langle f; f \rangle \rangle_{\omega})], \quad (\text{C1}) \end{aligned}$$

where $j = (1, 2)$ corresponds to $\epsilon = (+1, -1)$, respectively. By applying Eq.(10) for the EOM approach, we obtain

$$\langle \langle f; f^{\dagger} \rangle \rangle_{\omega} = \frac{1}{(2S+1)} \sum_m \frac{1}{(\omega^+ - \varepsilon_M - \Sigma_{+M})}, \quad (\text{C2})$$

$$\langle \langle f^{\dagger}; f \rangle \rangle_{\omega} = \frac{1}{(2S+1)} \sum_m \frac{1}{(\omega^+ + \varepsilon_M - \Sigma_{-M})}, \quad (\text{C3})$$

$$\langle \langle f^{\dagger}; f^{\dagger} \rangle \rangle_{\omega} = \frac{1}{(2S+1)} \sum_m \frac{2\Delta t K_{-M}}{(\omega^+ + \varepsilon_M - \Sigma_{-M})} \quad (\text{C4})$$

and

$$\langle \langle f; f \rangle \rangle_{\omega} = \frac{1}{(2S+1)} \sum_m \frac{2\Delta t K_{+M}}{(\omega^+ - \varepsilon_M - \Sigma_{+M})}. \quad (\text{C5})$$

with $\Sigma_{\pm M} = K_C^{\pm} + (2\Delta t)^2 K_D K_{\pm M}$ being the self-energy due to the interaction of the f site with the QI, which can be expressed in terms of the defined quantities

$$K_{+M} = \frac{K_D}{(\omega^+ + \varepsilon_M - K_C^-)}, \quad (\text{C6})$$

$$K_{-M} = \frac{K_D}{(\omega^+ - \varepsilon_M - K_C^+)}, \quad (\text{C7})$$

$$K_D = \frac{(\omega + i\eta^+) + i\Gamma}{(\omega + i\Gamma + i\eta^+)^2 - \varepsilon_{\uparrow}^2 - Jm[\varepsilon_{\uparrow} + \frac{Jm}{4}]}, \quad (\text{C8})$$

and

$$\begin{aligned} K_C^{\pm} &= \left[\frac{(\omega + i\eta^+) (t^2 + \Delta^2) \pm \varepsilon_{\uparrow} (t^2 - \Delta^2)}{(\omega + i\Gamma + i\eta^+)^2 - \varepsilon_{\uparrow}^2 - Jm[\varepsilon_{\uparrow} + \frac{Jm}{4}]} \right] \\ &+ \left[\frac{\pm \frac{Jm}{2} (t^2 - \Delta^2) + i\Gamma (t^2 + \Delta^2)}{(\omega + i\Gamma + i\eta^+)^2 - \varepsilon_{\uparrow}^2 - Jm[\varepsilon_{\uparrow} + \frac{Jm}{4}]} \right] \quad (\text{C9}) \end{aligned}$$

-
- [1] E. Majorana, *Il Nuovo Cimento* (1924-1942) **14**, 10.1007/BF02961314 (1937).
 - [2] P. Marra, *Journal of Applied Physics* **132**, 231101 (2022).
 - [3] D. E. Liu and H. U. Baranger, *Phys. Rev. B* **84**, 201308 (2011).
 - [4] E. Vernek, P. H. Penteado, A. C. Seridonio, and J. C. Egues, *Phys. Rev. B* **89**, 165314 (2014).
 - [5] M. Duckheim and P. W. Brouwer, *Phys. Rev. B* **83**, 054513 (2011).
 - [6] R. M. Lutchyn, J. D. Sau, and S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 077001 (2010).
 - [7] O. Lesser and Y. Oreg, *Journal of Physics D: Applied Physics* **55**, 164001 (2022).
 - [8] F. Pientka, L. I. Glazman, and F. von Oppen, *Phys. Rev. B* **89**, 180505 (2014).
 - [9] Y. Oreg, G. Refael, and F. von Oppen, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 177002 (2010).
 - [10] F. Pientka, L. I. Glazman, and F. von Oppen, *Phys. Rev. B* **88**, 155420 (2013).
 - [11] J. Li, H. Chen, I. K. Drozdov, A. Yazdani, B. A. Bernevig, and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **90**, 235433 (2014).

- [12] J. Klinovaja, P. Stano, A. Yazdani, and D. Loss, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 186805 (2013).
- [13] S. Nadj-Perge, I. K. Drozdov, B. A. Bernevig, and A. Yazdani, *Phys. Rev. B* **88**, 020407 (2013).
- [14] L. Fu and C. L. Kane, *Phys. Rev. B* **79**, 161408 (2009).
- [15] L. Fu and C. L. Kane, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 096407 (2008).
- [16] M. M. Vazifeh and M. Franz, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 206802 (2013).
- [17] S. Nakosai, Y. Tanaka, and N. Nagaosa, *Phys. Rev. B* **88**, 180503 (2013).
- [18] B. Braunecker and P. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 147202 (2013).
- [19] A. C. Potter and P. A. Lee, *Phys. Rev. B* **85**, 094516 (2012).
- [20] S. B. Chung, H.-J. Zhang, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, *Phys. Rev. B* **84**, 060510 (2011).
- [21] C. W. J. Beenakker, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 1037 (2015).
- [22] M. Sato and S. Fujimoto, *Journal of the Physical Society of Japan* **85**, 072001 (2016).
- [23] M. Sato and Y. Ando, *Reports on Progress in Physics* **80**, 076501 (2017).
- [24] A. Haim and Y. Oreg, *Physics Reports* **825**, 1 (2019), time-reversal-invariant topological superconductivity in one and two dimensions.
- [25] J. Alicea, *Reports on Progress in Physics* **75**, 076501 (2012).
- [26] C. Beenakker, *Annual Review of Condensed Matter Physics* **4**, 113 (2013).
- [27] A. S. Karsten Flensberg, Felix von Oppen, *Nature Reviews Materials* **6**, 944 (2021).
- [28] K. Laubscher and J. Klinovaja, *Journal of Applied Physics* **130**, 081101 (2021).
- [29] M. T. Deng, S. Vaitiekėnas, E. B. Hansen, J. Danon, M. Leijnse, K. Flensberg, J. Nygård, P. Krogstrup, and C. M. Marcus, *Science* **354**, 1557 (2016).
- [30] V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, and L. P. Kouwenhoven, *Science* **336**, 1003 (2012).
- [31] F. Nichele, A. C. C. Drachmann, A. M. Whiticar, E. C. T. O'Farrell, H. J. Suominen, A. Fornieri, T. Wang, G. C. Gardner, C. Thomas, A. T. Hatke, P. Krogstrup, M. J. Manfra, K. Flensberg, and C. M. Marcus, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 136803 (2017).
- [32] A. Y. Kitaev, *Physics-Uspekhi* **44**, 131 (2001).
- [33] M.-T. Deng, S. Vaitiekėnas, E. Prada, P. San-Jose, J. Nygård, P. Krogstrup, R. Aguado, and C. M. Marcus, *Phys. Rev. B* **98**, 085125 (2018).
- [34] L. S. Ricco, M. de Souza, M. S. Figueira, I. A. Shelykh, and A. C. Seridonio, *Phys. Rev. B* **99**, 155159 (2019).
- [35] C.-X. Liu, J. D. Sau, T. D. Stanescu, and S. Das Sarma, *Phys. Rev. B* **96**, 075161 (2017).
- [36] L. S. Ricco, J. E. Sanches, Y. Marques, M. de Souza, M. S. Figueira, I. A. Shelykh, and A. C. Seridonio, *Scientific Reports* **11**, 17310 (2021).
- [37] S. Nadj-Perge, I. K. Drozdov, J. Li, H. Chen, S. Jeon, J. Seo, A. H. MacDonald, B. A. Bernevig, and A. Yazdani, *Science* **346**, 602 (2014).
- [38] M. Ruby, F. Pientka, Y. Peng, F. von Oppen, B. W. Heinrich, and K. J. Franke, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 197204 (2015).
- [39] R. Pawlak, M. Kisiel, J. Klinovaja, T. Meier, S. Kawai, T. Glatzel, D. Loss, and E. Meyer, *npj Quantum Information* **2**, 10.1038/npjqi.2016.35 (2016).
- [40] S. R. Elliott and M. Franz, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 137 (2015).
- [41] R. Aguado, *LA RIVISTA DEL NUOVO CIMENTO* **40**, 523 (2017).
- [42] M. Leijnse and K. Flensberg, *Semiconductor Science and Technology* **27**, 124003 (2012).
- [43] T. D. Stanescu and S. Tewari, *Journal of Physics: Condensed Matter* **25**, 233201 (2013).
- [44] R. M. Lutchyn, J. D. Sau, and S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 077001 (2010).
- [45] T.-P. Choy, J. M. Edge, A. R. Akhmerov, and C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. B* **84**, 195442 (2011).
- [46] J. Klinovaja, P. Stano, A. Yazdani, and D. Loss, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 186805 (2013).
- [47] S. Jeon, Y. Xie, J. Li, Z. Wang, B. A. Bernevig, and A. Yazdani, *Science* **358**, 772 (2017).
- [48] P. Marra and M. Nitta, *Phys. Rev. B* **100**, 220502 (2019).
- [49] R. Pawlak, S. Hoffman, J. Klinovaja, D. Loss, and E. Meyer, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **107**, 1 (2019).
- [50] B. Jack, Y. Xie, and A. Yazdani, *Nature Reviews Physics* **3**, 2522 (2021).
- [51] G. Górski, J. Baranski, I. Weymann, and T. Domanski, *Scientific Reports* **8**, 15717 (2018).
- [52] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1083 (2008).
- [53] S. D. Sarma, M. Freedman, and C. Nayak, *npj Quantum Information* **1**, 2056 (2015).
- [54] R. Wiesendanger, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1495 (2009).
- [55] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **124**, 41 (1961).
- [56] E. Prada, R. Aguado, and P. San-Jose, *Phys. Rev. B* **96**, 085418 (2017).
- [57] M. Leijnse and K. Flensberg, *Phys. Rev. B* **86**, 134528 (2012).
- [58] T. Dvir, G. Wang, N. van Loo, C.-X. Liu, G. P. Mazur, A. Bordin, S. L. D. ten Haaf, S. L. D. ten Haaf, J.-Y. Wang, D. van Driel, F. Zatelli, X. Li, F. K. Malinowski, S. Gazibegovic, G. Badawy, E. P. A. M. Bakkers, M. Wimmer, and L. P. Kouwenhoven, *Nature* **614**, 445 (2023).
- [59] L. Máthé, D. Sticlet, and L. P. Zârbo, *Phys. Rev. B* **105**, 155409 (2022).
- [60] D. N. Zubarev, *Soviet Physics Uspekhi* **3**, 320 (1960).
- [61] H. Bruus and K. Flensberg, (Oxford: Oxford University Press) (2012).

Capítulo 6

Conclusões

No desenvolvimento do trabalho nós, teoricamente, investigamos as propriedades espectrais de uma impureza quântica (QI) que hospeda as, por nós propostas e denominadas, excitações de quasipartículas do tipo Majorana-Ising (MIQ). Tais excitações podem emergir do acoplamento entre um supercondutor topológico (do inglês, TSC: Topological superconductor) finito – baseado em uma cadeia de átomos magnéticos depositados sob uma matriz supercondutora do tipo s -wave que induz, por efeito de proximidade, a supercondutividade no nanofio (cadeia de átomos) [Fig. 4.1] – com uma ponta spin-polarizada S flanqueando uma QI. O acoplamento entre a ponta e a QI é dado por uma interação de troca do tipo Ising. Sendo o TSC finito, partimos do princípio que os modos zero de Majorana (MZM) nas bordas da cadeia estão sobrepostos e encontramos um regime em que o termo de Ising modula a localização de um MZM fracionado e ressonante no sítio da QI. Interessante é o fato de que a natureza fermiônica desse estado é originada, puramente, a partir do tunelamento de elétrons e, quando emerge, a condutância de Andreev que é esperada em assinaturas de MZMs genuínos se anula completamente. Assim, descobrimos que um estado borda ressonante do tipo MIQ emerge como um modo de energia zero e, demonstramos também, que o mesmo pode ser entendido como uma forma de manifestação dos *poor man's Majoranas*.

Capítulo 7

Publicações e perspectivas futuras

Aqui vamos destacar o artigo vinculado a tese, alguns artigos que fizeram parte da jornada ao longo do doutorado, bem como projetos que pretendemos publicar.

Diretamente associado a tese publicamos:

- **Fractionalization of Majorana-Ising-type quasiparticle excitations.** J. E. Sanches, L. T. Lustosa, L. S. Ricco, I. A. Shelykh, M. de Souza, M. S. Figueira, and A. C. Seridonio, [Phys. Rev. B 107, 155144](#) – Published 26 April 2023.

Em colaboração com outros pesquisadores, participei dos seguintes artigos:

- **Atomic frustrated impurity states in Weyl metals.** W. N. Mizobata, Y. Marques, M. Penha, J. E. Sanches, L. S. Ricco, M. de Souza, I. A. Shelykh, and A. C. Seridonio, [Phys. Rev. B 102, 075120](#) – Published 14 August 2020.
- **Interaction induced hybridization of Majorana zero modes in a coupled quantum-dot–superconducting-nanowire hybrid system.** L. S. Ricco, Y. Marques, J. E. Sanches, I. A. Shelykh, and A. C. Seridonio, [Phys. Rev. B 102, 165104](#) – Published 5 October 2020.
- **Atomic frustration-based twistronics.** W N Mizobata, J E Sanches, M Penha, W C Silva, C A Carvalho, M S Figueira, M de Souza and A C Seridonio, [2D Materials, Volume 8, Number 4](#) - Published 7 October 2021.
- **Topological isoconductance signatures in Majorana nanowires.** L. S. Ricco, J. E. Sanches, Y. Marques, M. de Souza, M. S. Figueira, I. A. Shelykh, A. C. Seridonio, [Scientific Reports volume 11, Article number: 17310](#) - Published 27 August 2021.

- **Topological charge Fano effect in multi-Weyl semimetals.** W. C. Silva, W. N. Mizobata, J. E. Sanches, L. S. Ricco, I. A. Shelykh, M. de Souza, M. S. Figueira, E. Vernek, and A. C. Seridonio, [Phys. Rev. B 105, 235135](#) – Published 24 June 2022.
- **Analog of atomic collapse for adatoms on rhombohedral multilayer graphene.** W. C. Silva, J. E. Sanches, A. M. Freitas, L. T. Lustosa, M. de Souza, and A. C. Seridonio, [Phys. Rev. B 108, 205407](#) – Published 7 November 2023.

Para futuras publicações, já em fase de redação dos artigos, temos:

- Análise das operações do tipo *braiding* obtidas por meio de funções de Green (em um cadeia linear com quatro MZMs), considerando um acoplamento finito entre as componentes adjacentes de Majorana. Sistema a partir do qual temos a emergência de fases entre caminhos contra-propagantes, ex: $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \gamma_{12}$ enquanto tem-se $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \Rightarrow -\gamma_{12}$. Um esquema representando o modelo proposto é apresentado pela Fig. 7.1.

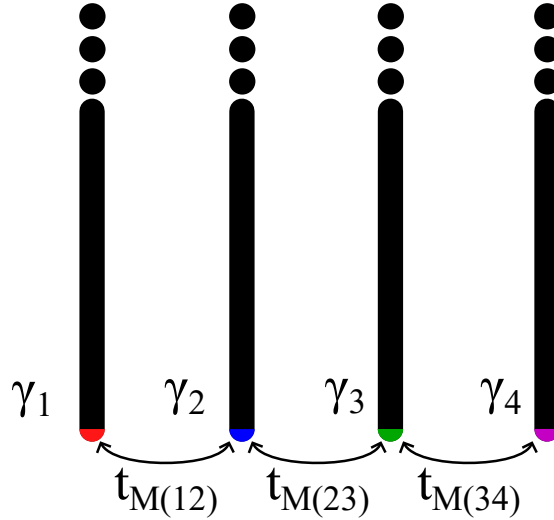


Figura 7.1: Representação esquemática do sistema proposto para se estudar as operações do tipo *braiding* obtidas por meio do desenvolvimento e estudo de funções de Green. Quatro nanofios de Majorana semi-infinitos nos quais consideramos apenas os Majoranas presentes em uma das bordas, $\gamma_{1,2,3,4}$. O acoplamento entre Majoranas adjacentes é dado por t_M .

- Estudo do comportamento do modelo mínimo de Kitaev ou dímero de Kitaev composto por dois sítios férmionicos, μ_L e μ_R , que se acoplam por um termo de *hopping* t e um termo de emparelhamento supercondutor Δ , sob influência de um “spin” variável acoplado por um termo de troca do tipo Ising, como apresentado esquematicamente pela Fig. 7.2. A análise das densidades espectrais para os sítios fermiônicos que compõem o dímero serão

desenvolvidas, assim como para as quasipartículas de Majorana que caracterizam cada um dos sítios.

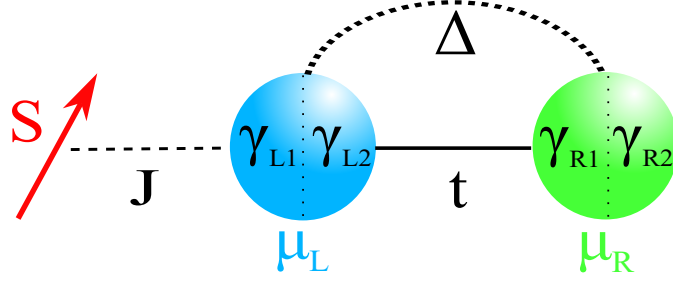


Figura 7.2: Representação do sistema proposto para se estudar o modelo mínimo de Kitaev sob influência de um spin S que se acopla a uma das componentes do dímero por um termo do tipo Ising J . Os sítios μ_L e μ_R podem ser decompostos nas componentes de Majorana $\gamma_{1,2}$ e $\gamma_{3,4}$, respectivamente, e se acoplam por meio de um hopping t e uma amplitude emparelhamento supercondutor Δ .

Destaco também que esses trabalhos estão sendo desenvolvidos em colaboração com o Prof. Dr. Enesio Marinho da Silva Jr., do Departamento de Física e Química da UNESP de Ilha solteira.

Referências Bibliográficas

- [1] AGUADO, R. Majorana quasiparticles in condensed matter. *La Rivista del Nuovo Cimento*, Springer, v. 40, p. 523–593, 2017.
- [2] MAJORANA, E. Teoria simmetrica dell’elettrone e del positrone. *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, Springer, v. 14, n. 4, p. 171–184, 1937.
- [3] ALICEA, J. New directions in the pursuit of majorana fermions in solid state systems. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 75, n. 7, p. 076501, jun 2012. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501>>.
- [4] ENGEL, J.; VOGEL, P. The hunt for no neutrinos. *Physics*, APS, v. 11, p. 30, 2018.
- [5] MARRA, P. Majorana nanowires for topological quantum computation. *Journal of Applied Physics*, v. 132, n. 23, p. 231101, 12 2022. ISSN 0021-8979. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/5.0102999>>.
- [6] SARMA, S. D.; FREEDMAN, M.; NAYAK, C. Majorana zero modes and topological quantum computation. *npj Quantum Information*, Nature Publishing Group, v. 1, n. 1, p. 1–13, 2015. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/npjqi20151>>.
- [7] LUTCHYN, R. M.; SAU, J. D.; SARMA, S. D. Majorana fermions and a topological phase transition in semiconductor-superconductor heterostructures. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 105, p. 077001, Aug 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.077001>>.
- [8] LEIJNSE, M.; FLENSBERG, K. Quantum information transfer between topological and spin qubit systems. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 107, p. 210502, Nov 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.210502>>.

- [9] LEIJNSE, M.; FLENSBERG, K. Parity qubits and poor man's majorana bound states in double quantum dots. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 86, p. 134528, Oct 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.86.134528>>.
- [10] SANCHES, J. E. et al. Fractionalization of majorana-ising-type quasiparticle excitations. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 107, p. 155144, Apr 2023. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.107.155144>>.
- [11] ELLIOTT, S. R.; FRANZ, M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 87, p. 137–163, Feb 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.87.137>>.
- [12] KITAEV, A. Y. Unpaired majorana fermions in quantum wires. *Physics-Uspekhi*, v. 44, n. 10S, p. 131, oct 2001. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1070/1063-7869/44/10S/S29>>.
- [13] LEIJNSE, M.; FLENSBERG, K. Introduction to topological superconductivity and majorana fermions. *Semiconductor Science and Technology*, IOP Publishing, v. 27, n. 12, p. 124003, nov 2012. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0268-1242/27/12/124003>>.
- [14] FLENSBERG, K.; OPPEN, F. von; STERN, A. Engineered platforms for topological superconductivity and majorana zero modes. *Nature Reviews Materials*, Nature Publishing Group UK London, v. 6, n. 10, p. 944–958, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41578-021-00336-6>>.
- [15] MOURIK, V. et al. Signatures of majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices. *Science*, v. 336, n. 6084, p. 1003–1007, 2012. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1222360>>.
- [16] BRUUS, H.; FLENSBERG, K. Many-body quantum theory in condensed matter physics, an introduction. (*Oxford: Oxford University Press*), 2012.
- [17] CHURCHILL, H. O. H. et al. Superconductor-nanowire devices from tunneling to the multichannel regime: Zero-bias oscillations and magnetoconductance crossover. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 87, p. 241401, Jun 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.87.241401>>.

- [18] FINCK, A. D. K. et al. Anomalous modulation of a zero-bias peak in a hybrid nanowire-superconductor device. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 110, p. 126406, Mar 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.126406>>.
- [19] DENG, M. T. et al. Anomalous zero-bias conductance peak in a nb-insb nanowire-nb hybrid device. *Nano Letters*, v. 12, n. 12, p. 6414–6419, 2012. PMID: 23181691. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/nl303758w>>.
- [20] NADJ-PERGE, S. et al. Observation of majorana fermions in ferromagnetic atomic chains on a superconductor. *Science*, v. 346, n. 6209, p. 602–607, 2014. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1259327>>.
- [21] BAGRETS, D.; ALTLAND, A. Class d spectral peak in majorana quantum wires. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 109, p. 227005, Nov 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.227005>>.
- [22] CRONENWETT, S. M.; OOSTERKAMP, T. H.; KOUWENHOVEN, L. P. A tunable kondo effect in quantum dots. *Science*, v. 281, n. 5376, p. 540–544, 1998. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.281.5376.540>>.
- [23] LAI, Y.-H.; SAU, J. D.; SARMA, S. D. Presence versus absence of end-to-end nonlocal conductance correlations in majorana nanowires: Majorana bound states versus andreev bound states. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 100, p. 045302, Jul 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.100.045302>>.
- [24] HELL, M.; FLENSBERG, K.; LEIJNSE, M. Distinguishing majorana bound states from localized andreev bound states by interferometry. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 97, p. 161401, Apr 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.97.161401>>.
- [25] LIU, C.-X.; SAU, J. D.; SARMA, S. D. Distinguishing topological majorana bound states from trivial andreev bound states: Proposed tests through differential tunneling conductance spectroscopy. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 97, p. 214502, Jun 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.97.214502>>.
- [26] LIU, C.-X. et al. Andreev bound states versus majorana bound states in quantum dot-nanowire-superconductor hybrid structures: Trivial versus topological zero-bias conductance

- peaks. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 96, p. 075161, Aug 2017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.96.075161>.
- [27] DENG, M.-T. et al. Nonlocality of majorana modes in hybrid nanowires. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 98, p. 085125, Aug 2018. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.98.085125>.
- [28] DENG, M. T. et al. Majorana bound state in a coupled quantum-dot hybrid-nanowire system. *Science*, v. 354, n. 6319, p. 1557–1562, 2016. Disponível em: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.aaf3961>.
- [29] ZHANG, H. et al. Retracted article: Quantized majorana conductance. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 556, n. 7699, p. 74–79, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/nature26142>.
- [30] ZHANG, H. et al. *Retraction note: Quantized majorana conductance*. [S.l.]: Nature Publishing Group UK London, 2021.
- [31] DVIR, T. et al. Realization of a minimal kitaev chain in coupled quantum dots. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 614, n. 7948, p. 445–450, 2023.
- [32] KELLS, G.; MEIDAN, D.; BROUWER, P. W. Near-zero-energy end states in topologically trivial spin-orbit coupled superconducting nanowires with a smooth confinement. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 86, p. 100503, Sep 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.86.100503>.
- [33] PRADA, E.; SAN-JOSE, P.; AGUADO, R. Transport spectroscopy of *ns* nanowire junctions with majorana fermions. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 86, p. 180503, Nov 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.86.180503>.
- [34] LIU, C.-X. et al. Andreev bound states versus majorana bound states in quantum dot-nanowire-superconductor hybrid structures: Trivial versus topological zero-bias conductance peaks. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 96, p. 075161, Aug 2017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.96.075161>.
- [35] VUIK, A. et al. Reproducing topological properties with quasi-Majorana states. *SciPost Phys.*, SciPost, v. 7, p. 061, 2019. Disponível em: <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.7.5.061>.

- [36] PAN, H.; SARMA, S. D. Physical mechanisms for zero-bias conductance peaks in majorana nanowires. *Phys. Rev. Res.*, American Physical Society, v. 2, p. 013377, Mar 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.013377>>.
- [37] ANDERSON, P. W. Localized magnetic states in metals. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 124, p. 41–53, Oct 1961. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.41>>.
- [38] ODASHIMA, M. M.; PRADO, B. G.; VERNEK, E. Pedagogical introduction to equilibrium green's functions: condensed-matter examples with numerical implementations. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 39, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0087>>.
- [39] HUBBARD, J. Electron correlations in narrow energy bands. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 276, n. 1365, p. 238–257, 1963. ISSN 00804630. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2414761>>.
- [40] ZUBAREV, D. N. Double-time green functions in statistical physics. *Soviet Physics Uspekhi*, v. 3, n. 3, p. 320, mar 1960. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1070/PU1960v003n03ABEH003275>>.