



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

92

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.003/96

**Reduções Perturbativas com Múltiplos Tempos e
Hierarquias de Equações Integráveis**

Edgard Casal de Rey Neto

Orientador

Prof. Dr. José Geraldo Pereira



Agosto 1996

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao professor e orientador J. G. Pereira
pelo auxílio indispensável ao desenvolvimento
deste trabalho.

Gostaria também de agradecer os professores R. A. Kraenkel
e M. A. Manna pelas sugestões feitas.

Ao professor A. P. N. R. Galeão pela atenciosidade no período em que
atuou como coordenador da pós graduação.

Ao CNPQ pelo auxílio financeiro, sem o qual seria impossível
a realização deste trabalho.

Resumo

Usando reduções perturbativas com múltiplos tempos, estudamos dois sistemas não lineares, um dispersivo e outro tipicamente dissipativo. A introdução dos múltiplos tempos, como sugerida na expansão da relação de dispersão do sistema original no limite de ondas longas, permite que se elimine os termos ressonantes das expansões perturbativas, que são os termos que geralmente dão origem a secularidades. No caso do sistema dissipativo, entretanto, embora a expansão perturbativa não contenha termos seculares, os termos ressonantes podem assim mesmo serem eliminados. Neste caso, as constantes de integração desempenham um papel importante na obtenção de séries perturbativas uniformemente válidas. No final, fazemos uma discussão sobre os resultados obtidos, onde destacamos o papel fundamental desempenhado pelas hierarquias de equações integráveis nas reduções perturbativas.

Palavras Chaves: Hierarquia / Teoria Perturbativa.

Áreas do conhecimento: 1.05.01.01-0

Abstract

By using a perturbative scheme with multiple time-scales, two nonlinear systems are studied in this work, one dispersive and another typically dissipative. The introduction of the multiple-times according to the long-wave expansion of the dispersion relation of the original system, allows for the elimination of the resonant terms of the perturbative expansions, which in general are the secular-producing terms. For the case of the dissipative system, however, despite free of secular terms, the resonant terms can be removed as well. In this case, the integration constants are shown to play an important role in obtaining uniformly valid perturbative series. We conclude with a discussion on the results obtained, as well as on the fundamental role played by the hierarchies of the integrable equations in the multiple-time reductive method.

Índice

1	Introdução	3
1.1	<i>Sistemas Não Lineares e Aproximações Perturbativas</i>	3
1.2	<i>Objetivos</i>	5
2	Reduções Perturbativas e Múltiplos Tempos	8
2.1	<i>Introdução</i>	8
2.2	<i>Expansões Perturbativas Assintóticas</i>	11
2.3	<i>Alguns Métodos Utilizados para Obter Expansões Perturbativas Uni- formemente Válidas</i>	12
2.4	<i>Os Múltiplos Tempos</i>	15
2.5	<i>Hierarquias de Equações Integráveis</i>	17
3	A Hierarquia de KdV na Redução Perturbativa de um Sistema Dispersivo	22
3.1	<i>O Sistema Original e o Esquema Perturbativo</i>	22
3.2	<i>Evolução nos Tempos de Ordem Superior e Eliminação dos Termos Seculares</i>	26
3.3	<i>Solução Assintótica Tipo Onda Solitária</i>	33
3.4	<i>Resumo</i>	34

4	Redução Perturbativa de um Sistema Dissipativo	36
4.1	<i>Sistemas Não Lineares Dissipativos e a Equação de Burgers</i>	36
4.2	<i>Ondas Não Lineares em um Gás Unidimensional</i>	38
4.3	<i>Relação de Dispersão e Múltiplos Tempos</i>	39
4.4	<i>Esquema Perturbativo</i>	40
4.5	<i>Estudo da Uniformidade da Série Perturbativa</i>	46
5	Comentários Finais	50
5.1	<i>Equações de Evolução e Múltiplos Tempos</i>	50
5.2	<i>Conclusões</i>	55
A	Polinômios Diferenciais e Peso de Escala	59
B	Simetrias e a Derivada de Fréchet	61
C	A Hierarquia Generalizada	64
	Referências	67

Capítulo 1

Introdução

1.1 *Sistemas Não Lineares e Aproximações Perturbativas*

Sistemas não lineares possuem estruturas bastante complexas, e na maioria dos casos não podem ser resolvidos exatamente. As soluções são, em geral, obtidas por meio de aproximações. As *aproximações perturbativas* são realizadas em termos de *expansões assintóticas*, e são frequentemente utilizadas no tratamento de sistemas com infinitos graus de liberdade [4]. Em muitos sistemas de dimensão $(1 + 1)$, isto é, uma dimensão espacial e uma temporal, que exibem soluções tipo onda caminante, ou seja, soluções da forma $f(x - vt)$, o sistema linear que resulta da aproximação de ordem mais baixa pode ser eliminado por meio de uma transformação galileana das coordenadas [2]. Assim, a expansão perturbativa resultante, irá conter uma equação não linear, em geral integrável, para o primeiro termo relevante da expansão. Muitos exemplos de reduções deste tipo mostram que as equações não lineares integráveis que aparecem descrevendo a evolução do termo de ordem relevante mais baixa possuem um caráter universal, visto que são obtidas a partir de reduções perturbativas de sistemas não lineares de origens distintas. Em muitos casos, o sistema original é reduzido, nessa ordem, a equações como a equação de Korteweg-de Vries (KdV),

a equação de Schrödinger não linear (NLS) e a equação de Burgers. Vamos ver neste trabalho que todas as equações que surgem com o esquema perturbativo estão relacionadas à equação não linear integrável obtida para o termo de ordem mais baixa.

Em aproximações perturbativas, o uso de transformações de coordenadas é bastante frequente. As transformações de coordenadas são usadas para se passar a um novo referencial no qual o sistema assume características particulares que podem associá-lo a um determinado modelo integrável. Por exemplo, na ref. [2], encontramos sistemas que se reduzem à equação de KdV em ordem mais baixa quando tomamos transformações de coordenadas que implicam em grandes comprimentos de onda. Porém, o papel das transformações de coordenadas não se restringe a esta finalidade. Extensões a ordens mais altas da teoria perturbativa indicam que as transformações de coordenadas também podem ser usadas na remoção dos termos seculares provenientes do método perturbativo [4]. Isso geralmente é feito através da redefinição das variáveis que entram no problema original. Um dos métodos utilizados para isto é o *método das múltiplas escalas*, que consiste em introduzir simultaneamente um número muito grande de variáveis. Neste trabalho, vamos utilizar o método das múltiplas escalas através da inclusão simultânea de múltiplos tempos. Esse procedimento envolve a escolha de infinitas constantes que representam os novos graus de liberdade introduzidos no sistema pela presença de um número maior de variáveis do que o existente no sistema original. Essas constantes podem então ser escolhidas de forma que os termos seculares sejam removidos. Como vamos ver, quando usamos múltiplos tempos para estudar o sistema no limite de grandes comprimentos de onda, em muitos casos, as constantes que permitem remover os termos seculares são dadas pelos coeficientes da expansão da relação de dispersão

linear do sistema original em torno de $k = 0$. Além disso, no contexto dos múltiplos tempos, o esquema perturbativo acaba por revelar uma estrutura na qual as hierarquias de equações integráveis adquirem um papel essencial. Essas hierarquias, cujo significado físico não é muito claro até o momento, acabam por encontrar um papel importante dentro das teorias perturbativas.

1.2 *Objetivos*

Neste trabalho, vamos estudar dois sistemas não lineares por meio de reduções perturbativas incluindo múltiplas variáveis na dimensão temporal. Os sistemas que vamos tratar são definidos por equações diferenciais parciais em duas variáveis independentes, onde uma delas representa uma coordenada espacial cartesiana, e a outra o tempo. Com esse estudo, pretendemos obter resultados gerais envolvendo as reduções perturbativas com múltiplos tempos de sistemas não lineares.

No primeiro caso, escolhemos um sistema não linear e dispersivo, definido por uma equação alternativa à equação de Boussinesq [1]. Esta equação é obtida trocando-se algumas derivadas espaciais por temporais nos termos de ordem superior da equação de Boussinesq, num processo semelhante ao utilizado para se obter a equação de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) a partir da equação de KdV [17]. Assim, da mesma forma que BBM, a equação por nós obtida deve ser não-integrável. O segundo sistema que escolhemos para a aplicação da redução perturbativa é constituído pelas equações que descrevem a evolução de processos adiabáticos num gás em uma dimensão espacial. Este sistema é não linear, e ao mesmo tempo dissipativo. Vamos submeter os dois sistemas ao mesmo procedimento redutivo, e buscar uma solução na forma de onda caminhante, válida quando o número de onda k é pequeno, ou seja, $k \ll 1$, que corresponde a grandes comprimentos de onda. Comparando o que

vamos obter nos dois sistemas, podemos tirar conclusões a respeito de como sistemas pertencentes a classes distintas se manifestam diante das reduções perturbativas com múltiplos tempos.

Paralelamente a isto, vamos ressaltar os aspectos estruturais presentes nas reduções perturbativas dos dois sistemas. Teremos a oportunidade de ver que o esquema perturbativo possui uma estrutura bastante consistente, na qual as equações de evolução que aparecem em cada ordem, e em cada escala de tempo, estão relacionadas entre si. É essa estrutura que permite eliminar os termos que dão origem a secularidades na solução perturbativa. Estudos do mesmo tipo, realizados em sistemas não lineares dispersivos [11, 20], mostraram que é possível obter soluções na forma de ondas solitárias, eliminando ordem a ordem os termos que dão origem a secularidades. Para sistemas dissipativos, ainda não conhecemos um estudo que mostre se isso também é possível. Isso é uma das coisas que pretendemos fazer, aplicando a redução perturbativa com múltiplos tempos ao sistema de equações que descreve processos adiabáticos num gás unidimensional, o qual é não linear e dissipativo.

No capítulo 2, fazemos uma breve discussão sobre métodos perturbativos e definimos o que é uma solução assintótica uniformemente válida. Ainda neste capítulo, propomos uma forma de se definir as normalizações apropriadas para os múltiplos tempos utilizados nas reduções perturbativas. Na última seção, tratamos das hierarquias das equações de KdV e Burgers.

No capítulo 3, fazemos uma redução perturbativa com introdução de múltiplos tempos do sistema não linear dispersivo, dado por uma variante da equação de Boussinesq, buscando uma solução na forma de onda solitária de grande comprimento de onda.

No capítulo 4, aplicamos a mesma técnica de redução perturbativa ao sistema

dissipativo que governa a evolução de processos adiabáticos num gás unidimensional.

No capítulo 5, fazemos uma descrição do esquema perturbativo com múltiplos tempos dentro de um contexto geral em termos de polinômios diferenciais.

Incluimos também três apêndices. No Apêndice A, destacamos um conceito muito importante que é o de peso de escala. Este conceito surge em vista das necessidades impostas com a teoria perturbativa, sendo de grande utilidade tanto nas teorias perturbativas quanto na teoria dos polinômios diferenciais. No Apêndice B, resumimos alguns resultados do cálculo com funcionais, definindo a derivada de Fréchet e também as simetrias, que possuem um papel central nas reduções perturbativas. E finalmente, no Apêndice C, introduzimos o conceito de hierarquia generalizada, a qual é utilizada na redução perturbativa do sistema dissipativo.

Capítulo 2

Reduções Perturbativas e Múltiplos Tempos

2.1 *Introdução*

Uma das formas de abordar sistemas não lineares é através de aproximações perturbativas. As aproximações perturbativas consistem em se fazer pequenos desvios em torno de uma solução conhecida do sistema, em muitos casos uma solução estática. As soluções perturbativas são obtidas na forma de séries, as quais são escritas em termos de um parâmetro perturbativo.

Se o parâmetro perturbativo é ϵ , uma solução válida no limite de $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$, é chamada uma solução assintótica quando $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$. Esta solução também é chamada uma solução perturbativa. O limite $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ é denominado limite assintótico e está sempre relacionado com um certo comportamento qualitativo do sistema. Muitas vezes é necessário considerar a validade da solução assintótica no limite $x \rightarrow \pm\infty$, onde x é um vetor que representa as variáveis independentes. Para sistemas não lineares, as teorias perturbativas costumam gerar soluções que deixam de ser válidas quando $x \rightarrow \pm\infty$. Este é um problema muito antigo das teorias perturbativas que requerem validade para tempos grandes.

Uma solução perturbativa válida em todo domínio que define o problema físico

quando $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$, é dita uma solução assintótica *uniformemente válida* (ver sec. 2.2). Caso contrário é dita uma *expansão não uniformemente válida* ou *expansão singular* [4]. As não uniformidades surgem devido a vários fatores que podem estar presentes no problema inicial, os quais são designados como fontes de não uniformidade. De acordo com Nayfeh [4], as fontes de não uniformidade podem ser:

- (i) Domínio infinito.
- (ii) Pequeno parâmetro multiplicando a derivada mais alta.
- (iii) Mudança de tipo de equação diferencial parcial.
- (iv) Singularidades na solução perturbativa.

No caso (i), o domínio infinito das variáveis independentes é o responsável pelo aparecimento da não uniformidade. Neste caso, a solução assintótica perde a validade devido aos termos seculares. Os termos seculares são termos que aparecem na solução perturbativa e fazem com que a razão entre dois termos consecutivos da série se torne ilimitada quando $x \rightarrow \pm\infty$.

No caso (ii), as soluções das equações perturbativas em ordens diferentes não satisfazem as mesmas condições de contorno ou condições iniciais, resultando em uma não uniformidade da série perturbativa.

No caso (iii), o tipo das equações diferenciais parciais obtidas pelo método perturbativo difere do tipo da equação original. A mudança de tipo de equação diferencial parcial se dá quando o tipo da equação muda de hiperbólica para elíptica ou parabólica, por exemplo, à medida que as ordens mais altas são acrescentadas.

No caso (iv), singularidades que não estão presentes na solução exata do sistema original surgem nos termos da expansão assintótica à medida que termos de ordem

mais alta vão sendo acrescentados.

Nos problemas perturbativos, as não uniformidades podem ser originadas por uma única fonte pertencente ao conjunto acima, mas pode acontecer de duas ou mais fontes de não uniformidade estarem presentes no mesmo problema, colaborando para que a expansão perturbativa deixe de ser válida.

A origem dos termos seculares está nas "ressonâncias" que aparecem naturalmente nas equações perturbativas. Essas ressonâncias se originam no processo perturbativo, que é desenvolvido de forma recursiva. As equações perturbativas que surgem numa dada ordem n devem ser "alimentadas" com as soluções obtidas para as equações das ordens anteriores. A maneira como o processo se desenrola depende fortemente do sistema original. Se a substituição das soluções das equações perturbativas de ordens mais baixas nas de ordens mais altas resulta em ressonâncias, essas ressonâncias podem levar a um crescimento exagerado da solução, que em geral, se manifesta quando as variáveis independentes se aproximam de valores muito grandes.

Neste capítulo, vamos descrever um método utilizado para se obter soluções perturbativas uniformemente válidas para sistemas de equações diferenciais parciais não lineares. Este método se aplica quando a não uniformidade se deve à ocorrência de termos seculares na solução assintótica. O método se baseia na introdução de múltiplas escalas, o que o torna equivalente aos antigos métodos para se obter séries uniformemente válidas.

No entanto, na versão do método das múltiplas escalas, que inclui uma sequência infinita de coordenadas temporais, é possível encontrar uma estrutura algébrica subjacente que nos dá informações gerais a respeito dos sistemas estudados.

2.2 Expansões Perturbativas Assintóticas

Nesta seção, vamos descrever as séries assintóticas, as expansões perturbativas assintóticas, e estabelecer condições para a validade da representação da solução do sistema em termos dessas expansões.

Se pretendemos representar uma função $\phi(x)$ por uma série perturbativa da forma

$$\sum_n^{\infty} \phi_n(x; \epsilon), \quad (2.1)$$

muitas vezes, o erro $R_N(x; \epsilon)$, que cometemos ao truncar a série no N -ésimo termo, pode ser feito arbitrariamente pequeno quando ϵ se aproxima de um limite conveniente, digamos $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$. Isso pode ser feito mesmo se a série (2.1) for divergente, isto é, se $R_N(x; \epsilon) \rightarrow \infty$ para $N \rightarrow \infty$. Se pudermos fazer $R_N(x; \epsilon)$ arbitrariamente pequeno para qualquer N finito quando $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$, então dizemos que a série (2.1) é uma série assintótica para ϕ quando $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$. Lembremos que esta série pode ser divergente e mesmo assim ser uma boa representação para a solução no limite assintótico, $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$.

A seguir, vamos fazer algumas definições que serão úteis para podermos entender as expansões assintóticas.

Def. 1: Dizemos que $f(\epsilon) = O[g(\epsilon)]$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} \right| < \infty. \quad (2.2)$$

Def. 2: Dizemos que $f(\epsilon) = o[g(\epsilon)]$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} \right| = 0 \quad (2.3)$$

Def. 3: *Sequência Assintótica:* Seja uma sequência de funções $\delta_n(\epsilon)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Se, quando $\epsilon \rightarrow 0$, $\delta_n(\epsilon) = o[\delta_{n-1}(\epsilon)]$ então, dizemos que a sequência $\delta_n(\epsilon)$ é uma

sequência assintótica quando $\epsilon \rightarrow 0$. As sequências, ϵ^n , $\epsilon^{\frac{n}{2}}$, $\log(\epsilon)^n$, com $\epsilon \ll 1$, são exemplos de sequências assintóticas quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Def 4: *Expansão Assintótica:* Nas expansões perturbativas, expandimos uma função $\phi(x)$ em termos de um parâmetro perturbativo ϵ . Usando uma sequência assintótica $\delta_n(\epsilon)$, definimos uma *expansão assintótica* por:

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \phi_n(x) \delta_n(\epsilon) + O[\delta_N(\epsilon)], \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Def. 5: *Expansão Assintótica Uniformemente Válida:* Se a expressão (2.4) vale para qualquer N e para todos os valores de x pertencentes ao domínio de ϕ , dizemos que a expansão acima é uma *expansão assintótica uniformemente válida* quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Para que a condição de uniformidade seja satisfeita, $\phi_n(x) \delta_n(\epsilon)$ deve ser menor que $\phi_{n-1}(x) \delta_{n-1}(\epsilon)$ [10]. Isto é, numa expansão uniformemente válida, cada termo deve ser uma pequena correção ao termo anterior, para qualquer valor da variável x . Um sistema que admite soluções em forma de expansões assintóticas uniformemente válidas quando $\epsilon \rightarrow 0$, é dito um sistema assintoticamente integrável, quando $\epsilon \rightarrow 0$, e o limite $\epsilon \rightarrow 0$ é denominado limite assintótico.

2.3 Alguns Métodos Utilizados para Obter Expansões Perturbativas Uniformemente Válidas

Nesta seção, vamos descrever alguns métodos utilizados para remover as não uniformidades que surgem em séries perturbativas. Os métodos que vamos descrever são eficientes em fornecer expansões uniformemente válidas para sistemas em que a não uniformidade surge devido apenas aos termos seculares. Estes métodos são todos equivalentes e alguns podem ser mais convenientes do que outros dependendo do

caso estudado. Cada método enfatiza aspectos diferentes do sistema, que permitem aprofundar a intuição física a respeito de como a não linearidade se manifesta em sistemas dinâmicos próximos a um regime dominado por uma dinâmica linear.

As primeiras tentativas no sentido de se obter expansões uniformemente válidas levaram a procedimentos diferentes envolvendo transformações de variáveis que acabaram associando o parâmetro perturbativo a grandezas físicas como a frequência, ou as energias presentes nas soluções do sistema original.

O primeiro método para obter séries uniformemente válidas foi desenvolvido pelo astrônomo Lindstedt em 1882 quando procurava soluções perturbativas para a equação

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon f(u, \dot{u}), \quad (2.5)$$

na qual $u = u(t)$ e $f(u, \dot{u})$ é não linear. Lindstedt observou que as não linearidades afetavam a frequência, provocando desvios em torno da frequência linear ω_0 . A sua idéia foi então introduzir uma nova variável $\tau = \omega t$ onde ω é escrito em termos de uma série de potências de ϵ em torno da frequência ω_0 ,

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \epsilon + \omega_2 \epsilon^2 + \dots \quad (2.6)$$

A frequência ω_0 corresponde a uma solução da equação linear que resulta de (2.5) tomando-se $\epsilon = 0$. Substituindo a variável τ na expansão perturbativa para u ,

$$u = u_0(\tau) + \epsilon u_1(\tau) + \epsilon^2 u_2(\tau) + \dots, \quad (2.7)$$

e introduzindo essa expressão na equação (2.5), podemos determinar os coeficientes ω_i a partir da condição de uniformidade da expansão perturbativa. Este método ficou conhecido como *método dos parâmetros forçados*, ou método de Lindstedt-Poincaré. O método consiste em encontrar algum parâmetro do sistema que seja afetado pela perturbação e expandir este parâmetro em termos do parâmetro perturbativo ϵ . No

caso acima, o parâmetro do sistema que expandimos foi a frequência. Para problemas de mecânica quântica, por exemplo, os parâmetros físicos que são expandidos são os autovalores da energia.

Um método que leva a resultados equivalentes ao método de Lindstedt-Poincaré, é o *método das coordenadas forçadas* de Lighthill. Em vez de se expandir o parâmetro físico que é afetado pelas perturbações, é feita uma transformação de coordenadas em uma ou mais variáveis independentes, de forma que esta variável seja escrita como uma série perturbativa. Quando se expande uma função $u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ em potências de ϵ e se encontra não uniformidades, toma-se a coordenada em que se manifesta a não uniformidade, digamos x_1 , expandindo-a numa série em ϵ . Assim, o esquema perturbativo é desenvolvido a partir de:

$$u = \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon^n u_n(s, x_1, x_2, \dots, x_m) + O(\epsilon^N), \quad (2.8)$$

$$x_1 = s + \sum_{n=1}^N \epsilon^n \xi_n(s, x_1, x_2, \dots, x_m) + O(\epsilon^{N+1}). \quad (2.9)$$

As funções ξ_n são determinadas de forma que a expansão para u seja uniformemente válida.

Outro método utilizado para se obter expansões uniformemente válidas é o *método das múltiplas escalas*. Este método se baseia na informação de que os termos seculares surgem na forma $\epsilon^n t^n f_n(t)$, onde f_n são funções limitadas de t . Portanto, introduzindo novas coordenadas na forma:

$$\tau_n = \epsilon^n t, \quad (2.10)$$

t deve ser maior que ϵ^{-n} para que a série deixe de ser da forma (2.4). A introdução das múltiplas escalas equivale a uma expansão em termos de ϵ da derivada $\partial/\partial t$, visto que (2.10) implica em:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_n \epsilon^n \frac{\partial}{\partial \tau_n}, \quad (2.11)$$

de forma que o método das múltiplas escalas é também conhecido como método das expansões derivativas [4].

A introdução de novas variáveis implica no surgimento de novos graus de liberdade em relação ao sistema original. Esses novos graus de liberdade aparecem como parâmetros livres que devem ser escolhidos de maneira que a expansão resultante seja uniformemente válida. Um fator comum em todos esses métodos é a introdução de parâmetros ou funções, inicialmente desconhecidas, que são obtidas no final do processo aplicando-se as condições de uniformidade. As transformações de escala que são utilizadas nas reduções perturbativas definem o que chamamos de *coordenadas perturbativas*, por serem essas as coordenadas nas quais o esquema perturbativo é desenvolvido.

2.4 Os Múltiplos Tempos

Para um sistema contínuo que depende de duas variáveis, digamos x e t , onde x é uma coordenada cartesiana e t o tempo, definimos os múltiplos tempos usando transformações do tipo

$$\xi = \xi(\epsilon; x, t), \quad (2.12)$$

$$\tau_n = \tau_n(\epsilon; t), \quad (2.13)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$. Como t está presente em todas as equações, o operador $\partial/\partial t$ pode ser escrito em termos de $\partial/\partial \xi$ e $\partial/\partial \tau_n$ como:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \tau_2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots \quad (2.14)$$

Em geral as funções (2.13) são sequências assintóticas em ϵ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Nas aplicações usuais do método das múltiplas escalas, os tempos τ_n seriam definidos

por

$$\tau_n = \epsilon^n t. \quad (2.15)$$

Porém, deve existir uma normalização "natural" para cada uma dessas variáveis temporais. Essas normalizações dependem do sistema original que está sendo estudado. Como exemplo, consideremos a relação de dispersão linear de um sistema qualquer. No limite de ondas longas, $k = \epsilon\kappa \rightarrow 0$, a relação de dispersão $\omega(k)$ se escreve:

$$\omega(k) = \omega_0 + \omega_1 \epsilon \kappa + \omega_2 \epsilon^2 \kappa^2 + \dots, \quad (2.16)$$

na qual

$$\omega_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \omega}{\partial k^n}, \quad (2.17)$$

calculado no ponto $k = 0$. No caso particular em que $\omega_0 = 0$, e usando a expressão (2.16), a solução $\phi(x, t)$ do sistema linear, quando $k \rightarrow 0$, fica:

$$\phi = \exp i(\epsilon \kappa x - \omega_1 \epsilon \kappa t - \omega_2 \epsilon^2 \kappa^2 t + \dots), \quad (2.18)$$

Essa expressão sugere uma maneira natural de se definir a coordenada lenta ξ e os múltiplos tempos:

$$\xi = \epsilon(x - \omega_1 t) \quad (2.19)$$

$$\tau_n = \omega_n \epsilon^n t, \quad (2.20)$$

com $n = 2, 3, \dots$. Com isso,

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\omega_1 \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} + \omega_2 \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \omega_3 \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial \tau_3} + \dots \quad (2.21)$$

A introdução dos múltiplos tempos implica na existência de infinitas equações de evolução, uma para cada escala de tempo. Como vamos ver, essas equações formam o que chamamos de hierarquias de equações integráveis. Na seção 2.5, vamos discutir

as hierarquias que são obtidas a partir das equações de KdV e Burgers. Nos capítulos 3 e 4, vamos definir os múltiplos tempos, utilizando os coeficientes da expansão da relação de dispersão para o sistema original em torno de $k = 0$, como em (2.20). Com isso, como veremos depois, obteremos automaticamente uma expansão livre de termos seculares para soluções na forma de ondas caminantes [11].

2.5 Hierarquias de Equações Integráveis

As hierarquias são conjuntos de infinitas equações integráveis obtidas como generalizações de ordens superiores de uma dada equação. A primeira vez que surgiu o conceito de hierarquia, foi no trabalho de Lax de 1968 [19]. Neste trabalho, Lax faz uma generalização do método desenvolvido por Gardner, Greene, Kruskal e Miura [15] para obter a solução do problema de valor inicial para a equação de KdV, mostrando que o problema pode ser resolvido para qualquer equação de evolução na forma

$$u_t = K(u), \quad (2.22)$$

onde K é um operador não linear que pode ser escrito como

$$K(u) = [B, L], \quad (2.23)$$

com B e L operadores lineares. A hierarquia de KdV surge quando escolhemos,

$$B_n = D^{2n+1} + \sum_{j=1}^n (b_j D^{2j-1} + D^{2j-1} b_j) \quad (2.24)$$

e

$$L = D^2 + \frac{1}{6}u, \quad (2.25)$$

onde $D = \partial/\partial x$. Os coeficientes b_j são funcionais de u que devem ser determinados de forma que $[B_n, L]$ não contenha termos proporcionais a D^n [19]. Com isso, As

equações de evolução

$$u_t = K_n(u), \quad (2.26)$$

com

$$K_n = [B_n, L]. \quad (2.27)$$

formam a hierarquia de KdV. Todas as equações dessa hierarquia possuem a propriedade de serem integráveis pelo método do espalhamento inverso.

Existem também, equações não lineares integráveis por outros métodos. Um exemplo bem conhecido é o da equação de Burgers. Para esta equação, a solução geral pode ser obtida através de uma transformação de Backlund. As transformações de Backlund fazem uma correspondência um-a-um entre soluções de um problema integrável conhecido (muitas vezes um problema linear) e soluções da equação não linear que estamos querendo resolver. A solução geral da equação de Burgers, via transformação de Backlund, foi obtida em 1950 no trabalho de Hopf [9]. A transformação utilizada por Hopf faz uma correspondência um-a-um entre soluções da equação de difusão linear (equação do calor) e a equação de Burgers. A transformação utilizada por Hopf é a transformação conhecida como transformação de Hopf-Cole, e constitui um dos exemplos mais citados de uma transformação de Backlund [3].

Tomemos a equação de Burgers

$$u_t = 2uu_x + u_{xx}. \quad (2.28)$$

A transformação de Hopf-Cole é uma transformação da variável dependente que pode ser escrita como:

$$u = [\ln(\phi)]_x. \quad (2.29)$$

Substituindo (2.29) na equação de Burgers, temos:

$$\left(\frac{\phi_x}{\phi}\right)_t = \left[\left(\frac{\phi_x}{\phi}\right)^2 + \left(\frac{\phi_x}{\phi}\right)_x \right]_x, \quad (2.30)$$

ou seja,

$$\left(\frac{\phi_x}{\phi}\right)_t \equiv \left(\frac{\phi_t}{\phi}\right)_x = \left[\left(\frac{\phi_x}{\phi}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi}\right) - \left(\frac{\phi_x}{\phi}\right)^2 \right]_x, \quad (2.31)$$

ou ainda,

$$\left(\frac{\phi_t}{\phi}\right)_x = \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi}\right)_x. \quad (2.32)$$

Integrando na variável x , ficamos com:

$$\phi_t = \phi_{xx}, \quad (2.33)$$

desde que possamos assumir a constante de integração como sendo nula. A eq. (2.33) é a equação de difusão linear. Assim, resolvendo (2.33) e usando a transformação (2.29), podemos construir uma solução para a equação de Burgers (2.28). Agora, vamos ver como pode ser gerada a hierarquia da equação de Burgers a partir da transformação de Hopf-Cole.

Invertendo (2.29), obtemos:

$$\phi = e^{\int u dx}. \quad (2.34)$$

Derivando em relação à variável x temos:

$$\phi_x = u e^{\int u dx}, \quad (2.35)$$

$$\phi_{xx} = (u^2 + u_x) e^{\int u dx}, \quad (2.36)$$

$$\phi_{xxx} = (u^3 + 3uu_x + u_{xx}) e^{\int u dx}. \quad (2.37)$$

Continuando com este procedimento, vamos obter uma série de expressões para as derivadas de ordem n de ϕ em relação a x , que vamos escrever como:

$$\phi_{(nx)} = q_n(u) e^{\int u dx}, \quad (2.38)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$. Se u e $\partial/\partial x$ possuem, cada um, peso de escala 1, os funcionais $q_n(u) = q_n(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{((n-1)x)})$ são polinômios diferenciais de peso de escala n (Apêndice A). Esses polinômios podem ser obtidos de ϕ pela relação:

$$q_n(u) = \phi_{(nx)} \phi^{-1}. \quad (2.39)$$

Os polinômios $q_n(u)$ podem ser utilizados para gerar a hierarquia de Burgers através da seguinte expressão [5]:

$$u_{t_n} = G_n(u) \equiv \frac{\partial q_n(u)}{\partial x}. \quad (2.40)$$

Para $n = 1$

$$u_{t_1} = u_x. \quad (2.41)$$

Para $n = 2$, a eq. (2.40) fornece a equação de Burgers

$$u_{t_2} = 2uu_x + u_{xx}. \quad (2.42)$$

Para $n = 3$, temos:

$$u_{t_3} = 3u^2u_x + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + u_{xxx}. \quad (2.43)$$

Esta é a equação de terceira ordem da hierarquia de Burgers, a qual constitui um sistema hamiltoniano [14]. Para $n = 4$, temos:

$$u_{t_4} = 4uu_{xxx} + 12uu_x + 10u_xu_{xx} + 4u^3u_x + 6u^2u_{xx} + u_{xxxx}, \quad (2.44)$$

e assim sucessivamente. Por meio da transformação de Hopf-Cole, eq. (2.29), as equações (2.40) podem ser reduzidas a

$$\phi_{t_n} = \phi_{(nx)}. \quad (2.45)$$

Desta forma, todas as equações da hierarquia de Burgers podem ser linearizadas por meio da transformação de Hopf-Cole.

As equações (2.40) definem a hierarquia de Burgers [5]. A hierarquia de Burgers, assim como a hierarquia de KdV, surge através de generalizações do método desenvolvido para obter suas soluções. As hierarquias são constituídas de polinômios diferenciais, de forma que cada elemento da hierarquia possui um peso de escala diferente (Apêndice A). Para as hierarquias de KdV e Burgers, eqs. (2.26) e (2.40), os pesos de escala de cada equação são dados respectivamente por $n + 2$ e $n + 1$.

Capítulo 3

A Hierarquia de KdV na Redução Perturbativa de um Sistema Dispersivo

3.1 O Sistema Original e o Esquema Perturbativo

Neste capítulo, vamos estudar o comportamento assintótico do sistema definido pela equação

$$h_{xx} - h_{tt} + \frac{1}{2}h_{xxxx} + \frac{1}{6}h_{xxxt} + \frac{1}{2}(h^2)_{xx} - (h^2)_{xt} = 0, \quad (3.1)$$

no regime de ondas longas. Essa equação é obtida quando trocamos algumas derivadas espaciais por temporais nos termos de ordem superior na dedução da equação de Boussinesq [1],

$$u_{xx} - u_{tt} + u_{xxxx} - 3(u^2)_{xx} = 0. \quad (3.2)$$

Este é um procedimento semelhante ao utilizado para se obter a equação de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) a partir da equação de KdV [17]. Podemos dizer que a eq. (3.1) está para (3.2) assim como a equação de Benjamin-Bona-Mahony está para a equação de KdV.

Primeiramente, vamos obter a relação de dispersão linear do sistema (3.1). Para

isto, omitimos os termos não lineares de (3.1) ficando com a seguinte equação:

$$h_{xx} - h_{tt} + \frac{1}{2}h_{xxxx} + \frac{1}{6}h_{xxxxt} = 0. \quad (3.3)$$

Vamos supor uma solução para (3.3) na forma de onda plana,

$$h = Ae^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.4)$$

onde A é uma constante. Substituindo (3.4) em (3.3), encontramos a seguinte relação, que deve ser satisfeita por ω e k :

$$-k^2 + \omega^2 + \frac{1}{2}k^4 - \frac{1}{6}\omega k^3 = 0. \quad (3.5)$$

Resolvendo para ω temos:

$$\omega(k) = \frac{1}{12} \left[k^3 \pm k(k^4 - 72k^2 + 144)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (3.6)$$

Como $\omega(k)$ é real e

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \neq 0, \quad (3.7)$$

o sistema linearizado definido pela eq. (3.3) é puramente dispersivo. Os dois ramos de $\omega(k)$ representam os dois sentidos de propagação possíveis para a onda plana. Vamos escolher o sinal positivo, e estudar as soluções com grande comprimento de onda. Sendo assim, fazemos

$$k = \epsilon \kappa, \quad (3.8)$$

onde ϵ é o parâmetro perturbativo satisfazendo a condição $\epsilon \ll 1$. Substituindo (3.8) em (3.6), e expandindo (3.6) em torno de $k = \epsilon \kappa = 0$, obtemos

$$\omega(k) = \epsilon \kappa - \frac{1}{6}\epsilon^3 \kappa^3 - \frac{1}{36}\epsilon^5 \kappa^5 - \frac{1}{144}\epsilon^7 \kappa^7 + \dots. \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9) em (3.4) podemos então definir a coordenada ξ e os múltiplos tempos τ_i , com $i = 3, 5, 7, \dots$ (ver sec.2.4):

$$\xi = \epsilon(x - t), \quad (3.10)$$

$$\tau_3 = -\frac{1}{6}\epsilon^3 t, \quad (3.11)$$

$$\tau_5 = -\frac{1}{36}\epsilon^5 t, \quad (3.12)$$

$$\tau_7 = -\frac{1}{144}\epsilon^7, \text{ etc.} \quad (3.13)$$

Notemos que ξ é definida por uma transformação galileana. Isso permite eliminar a dinâmica linear de ordem mais baixa de forma que a primeira equação perturbativa seja uma equação não linear.

Em termos das novas variáveis, as derivadas, $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial t$, se tornam:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{6}\epsilon^3 \frac{\partial}{\partial \tau_3} - \frac{1}{36}\epsilon^5 \frac{\partial}{\partial \tau_5} - \frac{1}{144}\epsilon^7 \frac{\partial}{\partial \tau_7} + \dots \quad (3.15)$$

A expansão do campo h é feita da seguinte forma:

$$h = \epsilon^2(h_0 + \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + \dots). \quad (3.16)$$

Utilizando as eqs. (3.14), (3.15) e (3.16), reescevmos a eq. (3.1) como:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3}\epsilon^{2+n}h_{n\tau_3\xi} - \frac{1}{18}\epsilon^{4+n}h_{n\tau_5\xi} - \frac{1}{72}\epsilon^{6+n}h_{n\tau_7\xi} - \frac{1}{36}\epsilon^{4+n}h_{n\tau_3\tau_3} \\ & - \frac{1}{108}\epsilon^{6+n}h_{n\tau_5\tau_3} + \frac{1}{3}\epsilon^{2+n}h_{n(4\xi)} - \frac{1}{36}\epsilon^{4+n}h_{n\tau_3\xi\xi} - \frac{1}{216}\epsilon^{6+n}h_{n\tau_5\xi\xi\xi} \\ & + 3\epsilon^{2+n+m}(h_nh_{m\xi})_\xi + \frac{1}{3}\epsilon^{4+n+m}(h_nh_{m\tau_3})_\xi + \frac{1}{18}\epsilon^{6+n+m}(h_nh_{m\tau_5})_\xi \\ & + \frac{1}{72}\epsilon^{8+n+m}(h_nh_{m\tau_7})_\xi = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

As equações perturbativas são obtidas quando igualamos a zero os coeficientes dos termos de mesma potência de ϵ em (3.17). Este procedimento implica que, nas equações perturbativas, todos os termos devem possuir o mesmo peso de escala (Apêndice A). O peso de escala w é definido tendo-se em vista os expoentes de ϵ nas eqs. (3.10)-(3.13) e (3.16). A forma como se define o peso de escala está descrita

no Apêndice A, eqs. (A.4)-(A.7). Po exemplo, no caso acima, para $h_{n\tau_i}$ e $h_{n\xi}$ temos que,

$$w[h_{n\tau_i}] = n + i + 2 \quad (3.18)$$

e

$$w[h_{n\xi\xi\xi}] = n + 3 + 2. \quad (3.19)$$

Coletando os coeficientes dos termos de mesma potência de ϵ em (3.17) obtemos:

Ordem ϵ^2 : nesta ordem obtemos uma equação de evolução para h_0 no tempo τ_3 :

$$h_{0\tau_3} - 9h_0h_{0\xi} - h_{0\xi\xi\xi} = 0. \quad (3.20)$$

Esta é a equação de KdV. Notemos que, nessa equação, todos os termos possuem o mesmo peso de escala $w = 5$. Vamos reescrever (3.20) na forma:

$$N(h_0) = 0, \quad (3.21)$$

definindo o operador diferencial N .

Ordem ϵ^3 : nesta ordem, obtemos uma equação de evolução para h_1 no tempo τ_3 :

$$h_{1\tau_3} - 9(h_0h_1)_\xi - h_{1\xi\xi\xi} = 0. \quad (3.22)$$

usando a definição de $N(h_0)$ vemos que esta equação pode ser reescrita como:

$$N'_{h_0} h_1 = 0, \quad (3.23)$$

onde $N'_{h_0} h_1$ é a derivada de Fréchet de $N(h_0)$ no ponto h_0 e na direção h_1 (Apêndice B).

Em outras palavras, a equação para h_1 no tempo τ_3 é dada pela linearização da equação (3.20), que é a equação de evolução para h_0 nessa mesma escala de tempo.

Notemos que todos termos de (3.22) possuem peso de escala $w = 6$.

Entre as funções que satisfazem (3.23), vamos escolher a solução trivial $h_1 = 0$.

Como veremos mais adiante, essa solução está ligada à solução onda solitária da

eq. (3.1).

Ordem ϵ^4 : nesta ordem obtemos a equação

$$h_{2\tau_3} - 9(h_0 h_2)_\xi - h_{2\xi\xi\xi} = - \left[\frac{1}{6} h_{0\tau_5} + \frac{9}{2} h_{0\xi} h_{0\xi\xi} + \frac{5}{4} h_0 h_{0\xi\xi\xi} - \frac{3}{4} (h_0^3)_\xi + \frac{1}{6} h_{0(5\xi)} \right], \quad (3.24)$$

onde todos os termos possuem peso de escala $w = 7$. Notemos que o lado esquerdo da eq. (3.24) também pode ser escrito em termos da derivada de Fréchet de N .

Assim reescrevemos (3.24) como:

$$N'_{h_0} h_2 = - \left[\frac{1}{6} h_{0\tau_5} + \frac{9}{2} h_{0\xi} h_{0\xi\xi} + \frac{5}{4} h_0 h_{0\xi\xi\xi} - \frac{3}{4} (h_0^3)_\xi + \frac{1}{6} h_{0(5\xi)} \right]. \quad (3.25)$$

Isso significa que a equação de evolução para h_2 também é dada pela linearização da equação de KdV. Porém, neste caso, a equação de evolução não é uma equação homogênea. Como vamos ver na seção 3.2, a fonte da equação (3.25) contém termos ressonantes que podem dar origem a secularidades na série perturbativa.

3.2 *Evolução nos Tempos de Ordem Superior e Eliminação dos Termos Seculares*

Na equação (3.24) encontramos o termo $h_{0\tau_5}$. Portanto, devemos conhecer a equação de evolução para h_0 no tempo τ_5 . Para isto, lembremos que todos os termos que comparecem nesta equação devem ter o mesmo peso de escala, neste caso, $w = 7$. Tomando todos os monômios de peso de escala 7 que contém derivadas de h_0 em relação a ξ , ficamos com uma equação de evolução polinomial para h_0 no tempo τ_5 . Essa equação deve ter a seguinte forma

$$h_{0\tau_5} = \alpha_5 h_{0(5\xi)} + \beta_5 h_0 h_{0\xi\xi\xi} + \gamma_5 h_{0\xi} h_{0\xi\xi} + \delta_5 h_0^2 h_{0\xi}, \quad (3.26)$$

na qual α_5 , β_5 , γ_5 e δ_5 são constantes a serem determinadas. Essas constantes devem ser determinadas de forma que as derivadas a tempos diferentes comutem, ou seja:

$$(h_{0\tau_3})_{\tau_5} = (h_{0\tau_5})_{\tau_3}. \quad (3.27)$$

Essa condição fornece um sistema de equações algébricas para os coeficientes α_5 , β_5 , γ_5 e δ_5 . Esse sistema é superdeterminado, e portanto os coeficientes ficam sendo expressos em termos de um parâmetro livre. Assim, a partir de (3.27) obtemos:

$$\beta_5 = 15\alpha_5, \quad (3.28)$$

$$\gamma_5 = 30\alpha_5, \quad (3.29)$$

$$\delta_5 = \frac{135}{2}\alpha_5, \quad (3.30)$$

sendo α_5 o parâmetro livre. Substituindo esses valores em (3.26), chegamos à seguinte equação para a evolução de h_0 no tempo τ_5 :

$$h_{0\tau_5} = \alpha_5 \left[h_{0(\xi\xi)} + 15h_0 h_{0\xi\xi\xi} + 30h_{0\xi} h_{0\xi\xi} + \frac{135}{2}h_0^2 h_{0\xi} \right]. \quad (3.31)$$

Visto que o parâmetro α_5 pode ser absorvido na variável τ_5 por uma transformação de escala, concluímos que este parâmetro reflete simplesmente a arbitrariedade na normalização do tempo τ_5 . Independente dessa normalização, entretanto, a eq. (3.31) é a equação de quinta ordem da hierarquia de KdV. Assim, a componente h_0 deve satisfazer simultaneamente as equações (3.20) e (3.31), nos tempos τ_3 e τ_5 respectivamente.

Vamos considerar a seguinte solução particular da eq. (3.20) para a componente h_0 :

$$h_0 = \frac{4}{3}\kappa^2 \text{sech}^2[\kappa\xi + 4\kappa^3\tau_3]. \quad (3.32)$$

Substituindo (3.32) em (3.31) obtemos que,

$$h_{0\tau_5} = -\alpha_5 \kappa^7 \frac{128}{3} \text{sech}^2\theta \tanh\theta. \quad (3.33)$$

Nesta equação, $\theta = \kappa\xi + 4\kappa^3\tau_3$. Um cálculo direto mostra que:

$$N'_{h_0} h_{0\tau_5} = 0, \quad (3.34)$$

com $h_{0\tau_5}$ dado por (3.33). Isso mostra que $h_{0\tau_5}$ é um termo ressonante na eq. (3.24).

Notemos que, como a derivada de Fréchet satisfaz a regra da cadeia (Apêndice B),

$$N'_{h_0} h_{0\tau_5} = \frac{\partial N(h_0)}{\partial \tau_5} = 0, \quad (3.35)$$

visto que h_0 satisfaz $N(h_0) = 0$. Dessa forma vemos que, se h_0 é solução de (3.20) então $N'_{h_0} h_{0z} = 0$, com h_{0z} uma derivada parcial de primeira ordem em relação a uma coordenada genérica z . Assim, $h_{0\tau_5}$ é sempre um termo ressonante na eq. (3.24) qualquer que seja a solução h_0 de (3.20), e não apenas no caso da solução particular (3.32). Por outro lado, o termo $h_{0(5\xi)}$ que aparece no lado direito da eq. (3.24), quando escrito em termos da solução (3.32), se torna:

$$h_{0(5\xi)} = \kappa^7 \left[640 \operatorname{sech}^4 \theta - \frac{128}{3} \operatorname{sech}^2 \theta \tanh \theta + 960 \operatorname{sech}^6 \theta \tanh \theta \right]. \quad (3.36)$$

O segundo termo de (3.36) é idêntico ao lado direito de (3.33) a menos da constante multiplicativa α_5 . Portanto, o termo $h_{0(5\xi)}$ contém o termo ressonante. Esse termo é a origem de uma secularidade na solução assintótica. Usando a solução particular (3.32), os outros termos de (3.24) se escrevem:

$$h_{0\xi} h_{0\xi\xi} = \kappa^7 \left[-\frac{128}{9} \operatorname{sech}^4 \theta \tanh \theta + \frac{64}{3} \operatorname{sech}^6 \theta \tanh \theta \right], \quad (3.37)$$

$$h_0 h_{0(3\xi)} = \kappa^7 \left[-\frac{128}{9} \operatorname{sech}^4 \theta \tanh \theta + \frac{128}{3} \operatorname{sech}^6 \theta \tanh \theta \right], \quad (3.38)$$

e

$$(h_0^3)_\xi = -\frac{128}{9} \kappa^7 \operatorname{sech}^6 \theta \tanh \theta. \quad (3.39)$$

Isso mostra que o único termo de (3.24), além de $h_{0\tau_5}$, que contém o termo ressonante é o termo linear $h_{0(5\xi)}$. Substituindo (3.31) em (3.24) e tomando $\alpha_5 = -1$, os termos

ressonantes da equação (3.24) se cancelam, de forma que ficamos com a seguinte equação para h_2 no tempo τ_3 :

$$h_{2\tau_3} - 9(h_0 h_2)_\xi - h_{2\xi\xi\xi} = \frac{5}{4}h_0 h_{0\xi\xi\xi} + \frac{1}{2}h_{0\xi} h_{0\xi\xi} + \frac{9}{2}(h_0^3)_\xi. \quad (3.40)$$

Essa equação não contém termos ressonantes, e portanto não vai gerar termos seculares na solução assintótica para h . Usando a solução (3.32), vamos expressar h_2 em termos de h_0 .

Substituindo a onda solitária (3.32) em (3.40) obtemos que,

$$N'_{h_0} h_2 = -\frac{224}{9}\kappa^7 \text{sech}^4\theta \tanh\theta. \quad (3.41)$$

Agora, notemos que a equação para h_0 , eq. (3.20) pode ser escrita como:

$$N'_{h_0} h_0 = -9h_0 h_{0\xi}. \quad (3.42)$$

Substituindo a solução (3.32) no lado direito de (3.42) ficamos com:

$$N'_{h_0} h_0 = 32\kappa^5 \text{sech}^4\theta \tanh\theta. \quad (3.43)$$

A partir de (3.43) e (3.41), deduzimos que:

$$N'_{h_0} h_2 = -\frac{7}{9}\kappa^2 N'_{h_0} h_0. \quad (3.44)$$

Isso nos permite tomar uma solução particular para h_2 na forma

$$h_2 = -\frac{7}{9}\kappa^2 h_0. \quad (3.45)$$

Assim, quando h_0 é uma onda solitária dada pela eq. (3.32), a componente h_2 pode ser expressa em função de h_0 . Lembremos que esse resultado não é válido em geral, e sim uma propriedade do sistema que estamos estudando, isto é, a eq. (3.1), juntamente com a escolha da solução particular (3.32).

Agora, vamos continuar com o esquema perturbativo estendendo-o a ordens mais altas, usando a eq. (3.45) para eliminar a componente h_2 , toda vez que esta estiver presente numa equação.

Ordem ϵ^5 : nesta ordem obtemos uma equação de evolução para h_3 no tempo τ_3 dada por

$$N'_{h_0} h_3 = 0. \quad (3.46)$$

Obtemos novamente a equação de KdV linearizada e homogênea. Escolhemos, tal como fizemos para a eq. (3.22), a solução trivial $h_3 = 0$.

Ordem ϵ^6 : nesta ordem, obtemos uma equação de evolução para h_4 no tempo τ_3 . Após eliminarmos h_2 usando a eq (3.45), chegamos à seguinte equação:

$$\begin{aligned} N'_{h_0} h_4 &= \frac{7}{54} \kappa^2 h_{0\tau_5} - \frac{35}{36} \kappa^2 h_0 h_{0\tau_3} + \frac{7}{54} \kappa^2 h_{0\tau_3 \xi \xi} - \frac{1}{24} h_{0\tau_7} \\ &- \frac{1}{12} h_0 h_{0\tau_5} - \frac{1}{24} h_{0\tau_5 \xi \xi} + \frac{49}{9} \kappa^4 h_0 h_{0\xi}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Notemos que, assim como na eq. (3.24), o lado esquerdo é dado pela derivada de Fréchet de $N(h_0)$. O peso de escla de todos os termos nessa equação é $w = 9$.

Usando as eqs. (3.20) e (3.31), podemos expressar $h_{0\tau_3}$ e $h_{0\tau_5}$ em termos de derivadas de h_0 em relação a ξ . Com isso, levando em conta que $\alpha_5 = -1$, o termo linear $h_{0(5\xi)}$, proveniente de $h_{0\tau_3 \xi \xi}$, se cancela automaticamente. Substituindo $h_{0\tau_5}$ dado pela eq. (3.31) no termo $\frac{1}{24} h_{0\tau_5 \xi \xi}$, vamos encontrar o termo linear $h_{0(7\xi)}$. Quando h_0 é dado por (3.32), esse termo passa a conter o termo ressonante, isto é, o termo que satisfaz a equação (3.47) na forma homogênea. Para eliminar esse termo, procedemos da mesma maneira pela qual eliminamos os termos ressonantes da eq. (3.24). Primeiramente obtemos a equação de evolução para h_0 no tempo τ_7 . Para isto, supomos que

$$h_{0\tau_7} = K_7[h_0], \quad (3.48)$$

com $K_7[h_0]$ um polinômio diferencial de peso de escala 9. Em seguida impomos a condição de compatibilidade:

$$(h_{0\tau_3})_{\tau_7} = (h_{0\tau_7})_{\tau_3}, \quad (3.49)$$

na qual $h_{0\tau_3}$ é dado pela equação de KdV (3.20). Essa condição leva à equação:

$$\begin{aligned} h_{0\tau_7} = & \alpha_7 \left[h_{0(7\xi)} + 21h_0 h_{0(5\xi)} + 63h_{0\xi} h_{0(4\xi)} + 105h_{0\xi\xi} h_{0(3\xi)} \right. \\ & \left. + 630h_0 h_{0\xi} h_{0\xi\xi} + \frac{315}{2}(h_{0\xi})^3 + \frac{315}{2}h_0^2 h_{0(3\xi)} + \frac{945}{2}h_0^3 h_{0\xi} \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

A evolução de h_0 em τ_7 é, portanto, dada pela equação de sétima ordem da hierarquia de KdV.

Substituindo (3.50) na equação (3.47), e escolhendo $\alpha_7 = 1$, eliminamos o termo responsável pela introdução de mais uma secularidade na solução perturbativa. Com isso, chegamos a uma equação para a evolução de h_4 no tempo τ_3 , livre de termos ressonantes.

$$\begin{aligned} N'_{h_0} h_4 = & -\kappa^2 \left[\frac{7}{9} h_0 h_{0(3\xi)} + \frac{7}{18} h_{0\xi} h_{0\xi\xi} + \frac{35}{4} h_0^2 h_{0\xi} + \frac{35}{36} h_0 h_{0\tau_3} \right] \\ & + \frac{49}{9} \kappa^4 h_0 h_{0\xi} - \frac{1}{6} h_0 h_{0(5\xi)} - \frac{1}{8} h_{0\xi} h_{0(4\xi)} - \frac{55}{8} h_0 h_{0\xi} h_{0\xi\xi} \\ & - \frac{15}{16} (h_{0\xi})^3 - \frac{5}{2} h_0^2 h_{0(3\xi)} - \frac{225}{16} h_0^3 h_{0\xi} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Como h_0 deve satisfazer simultaneamente (3.31) com $\alpha_5 = -1$ e (3.50) com $\alpha_7 = 1$, reescrevemos h_0 incluindo as dependências em τ_5 e τ_7 :

$$h_0 = \frac{4}{3} \kappa^2 \text{sech}^2[\kappa\xi + 4\kappa^3\tau_3 - 16\kappa^5\tau_5 + 64\kappa^7\tau_7]. \quad (3.52)$$

Neste ponto, notamos que a mesma estrutura se repete a cada ordem do esquema perturbativo. Isto é, as equações para as componentes h_n , com n ímpar, são equações lineares e homogêneas, o que permite tomar essas componentes como sendo iguais a zero. As equações para h_n , com n par e diferente de zero, são equações lineares

com fontes, nas quais todos os termos ressonantes se cancelam quando usamos a solução (3.32) para h_0 , e expressamos os termos h_{0,τ_i} por meio das equações que constituem a hierarquia de KdV,

$$h_{0,\tau_i} = K_i(h_0). \quad (3.53)$$

Este procedimento pode ser repetido até qualquer ordem. Com isso a introdução dos múltiplos tempos permite obter uma série de equações de evolução livre de termos ressonantes, o que fornece uma expansão livre de termos seculares para a solução assintótica no regime de ondas longas.

Resumindo, a existência de infinitas escalas de tempo implica numa equação de evolução em cada uma dessas escalas. Assim,

$$h_0 = h_0(\xi; \tau_3, \tau_5, \tau_7, \tau_9, \dots) \quad (3.54)$$

deve satisfazer todas as equações de evolução da hierarquia de KdV, uma em cada escala de tempo. As componentes de ordem mais alta que h_0 , isto é, h_n , com $n > 0$, satisfazem a equação de KdV linearizada e não homogênea nas variáveis ξ e τ_3 , com fontes que variam a cada n . Além disso, verificamos que os termos de ordem ímpar no parâmetro perturbativo, h_{2n-1} , podem ser escolhidos iguais a zero, visto que as equações para esses termos são equações diferenciais lineares e homogêneas.

Na próxima seção, vamos determinar uma expressão para a solução assintótica, $h = \epsilon^2(h_0 + \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + \dots)$, no caso em que tomamos h_0 como a onda solitária (3.32) de KdV.

3.3 Solução Assintótica Tipo Onda Solitária

Usando a solução onda solitária (3.32) para h_0 , podemos reescrever as equações (3.20), (3.40) e (3.51) como:

$$N'_{h_0} h_0 = 32\kappa^5 \text{sech}^4 \theta \tanh \theta, \quad (3.55)$$

$$N'_{h_0} h_2 = -\frac{224}{9}\kappa^7 \text{sech}^4 \theta \tanh \theta, \quad (3.56)$$

$$N'_{h_0} h_4 = \frac{2240}{81}\kappa^9 \text{sech}^4 \theta \tanh \theta. \quad (3.57)$$

Enquanto que

$$N'_{h_0} h_1 = 0, \quad (3.58)$$

$$N'_{h_0} h_3 = 0, \quad (3.59)$$

etc. Das equações (3.55)-(3.57), obtemos que:

$$h_2 = -\frac{7}{9}\kappa^2 h_0, \quad (3.60)$$

e

$$h_4 = \frac{70}{81}\kappa^4 h_0. \quad (3.61)$$

Portanto, podemos expressar os campos de ordem superior em termos do campo h_0 .

Desta forma, a solução onda solitária para (3.1) pode ser escrita como:

$$h = \epsilon^2 \left(1 - \frac{7}{9}\kappa^2 \epsilon^2 + \frac{70}{81}\kappa^4 \epsilon^4 + \dots \right) h_0. \quad (3.62)$$

Agora, vamos usar a forma explícita de h_0 , eq. (3.52). Com isso,

$$h = \left(\frac{4}{3}\kappa^2 \epsilon^2 - \frac{28}{27}\kappa^4 \epsilon^4 + \frac{280}{243}\kappa^6 \epsilon^6 + \dots \right) \text{sech}^2 \left[\kappa \xi + 4\kappa^3 \tau_3 - 16\kappa^5 \tau_5 + 64\kappa^7 \tau_7 + \dots \right]. \quad (3.63)$$

Voltando às variáveis de laboratório k , x e t , ficamos com:

$$h = \left(\frac{4}{3}k^2 - \frac{28}{27}k^4 + \frac{280}{243}k^6 + \dots \right) \text{sech}^2 \left[kx + \left(-\frac{2}{3}k^3 + \frac{4}{9}k^5 - \frac{4}{9}k^7 + \dots \right) t \right]. \quad (3.64)$$

A série que multiplica $\text{sech}^2\theta$ pode ser somada, resultando em:

$$\frac{4}{3}k^2 - \frac{28}{27}k^4 + \frac{280}{243}k^6 + \dots = -k^2 \left[1 - \frac{7k}{k + 2\Omega} \right] \equiv A(k), \quad (3.65)$$

com

$$\Omega(k) = -\frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{3}k[k^4 + 18k^2 + 9]^{(1/2)}. \quad (3.66)$$

Por outro lado, a série que multiplica t no argumento de (3.64), pode também ser somada. O resultado é exatamente $\Omega(k)$ da eq. (3.66). Deste modo, a solução (3.62) se escreve:

$$h = A(k)\text{sech}^2[kx - \Omega(k)t]. \quad (3.67)$$

Com $A(k)$ e $\Omega(k)$ dados por (3.65) e (3.66) respectivamente. A substituição direta de (3.67) em (3.1), revela que (3.67) é uma solução exata da equação (3.1).

Desta forma, a validade da solução assintótica fica estabelecida para quaisquer x e t , mostrando que a solução assintótica obtida é uma solução uniformemente válida.

3.4 *Resumo*

Neste capítulo, mostramos que o método perturbativo com a introdução de múltiplos tempos pode ser usado para se obter uma solução assintótica uniformemente válida para o sistema (3.1) no limite de ondas longas. Mostramos que, quando a solução da equação de ordem mais baixa é uma onda solitária, os termos ressonantes podem ser eliminados das equações de evolução perturbativas pelo uso das equações da hierarquia de KdV. É interessante notar que, na hierarquia de KdV, dada por

$$h_{0,\tau_i} = K_i(h_0), \quad (3.68)$$

os funcionais $K_i(h_0)$ são simetrias da equação de KdV (ver sec. 5.1), isto é,

$$N'_{h_0} K_i(h_0) = 0. \quad (3.69)$$

Como as equações perturbativas possuem a forma $N'_{h_0} h_n = S_n(h_0)$, os funcionais $K_i(h_0)$ são termos ressonantes nas equações perturbativas de ordens superiores para qualquer solução h_0 da equação de KdV. Porém, para uma solução qualquer da equação de KdV, torna-se mais complicado identificar os termos ressonantes que podem estar presentes nas fontes das equações de movimento. Desta forma, só podemos garantir a eliminação dos termos seculares quando usamos a solução particular (3.32) da equação de KdV (3.20) para o termo de ordem mais baixa h_0 .

Capítulo 4

Redução Perturbativa de um Sistema Dissipativo

4.1 *Sistemas Não Lineares Dissipativos e a Equação de Burgers*

Por meio de reduções perturbativas para ondas de grande comprimento, alguns sistemas dissipativos que dependem de duas variáveis, digamos x e t , podem se reduzir em ordem mais baixa, à equação de Burgers [6].

A equação de Burgers,

$$u_t - 2uu_x - u_{xx} = 0, \quad (4.1)$$

é, talvez, a equação mais simples que inclui simultaneamente efeitos não lineares e dissipativos. Essa equação, tal como a equação de KdV, costuma surgir governando a evolução do termo de ordem mais baixa das expansões perturbativas. A equação de KdV combina efeitos não lineares e dispersivos, enquanto isso, a equação de Burgers combina não linearidade e dissipação. Para a equação de KdV, a não linearidade compensa a dispersão de forma a possibilitar a existência de soluções que se propagam na forma de pulsos que não se deformam à medida que evoluem. A onda solitária (3.32) é exemplo de uma solução desse tipo. A equação de Burgers, tal como KdV, também possui uma solução na forma de um pulso que não se deforma à medida que evolui. Neste caso, ocorre uma compensação exata entre a dissipação

e a não linearidade. Esta solução é

$$u(x, t) = -k[1 - \tanh(kx - 2k^2t)]. \quad (4.2)$$

A expressão (3.32),

$$h_0(\xi, \tau_3) = \frac{4}{3}\kappa^2 \text{sech}^2(\kappa\xi + 4\kappa^3\tau_3) \quad (4.3)$$

é um sóliton de KdV, isto é, uma solução que mantém sempre sua forma mesmo quando interage com outras soluções do mesmo tipo. Essa propriedade, que caracteriza os sólitons, não é encontrada em (4.2), que apesar de possuir uma forma permanente, esta forma é destruída quando esta onda interage com uma outra onda do mesmo tipo. No entanto, as equações de Burgers e KdV, possuem algumas características em comum. Ambas são modelos não lineares integráveis, possuem soluções na forma de ondas que caminham sem se deformar, e podem ser encontradas governando a dinâmica em primeira aproximação nas reduções perturbativas de alguns sistemas não lineares mais gerais. As semelhanças entre essas duas equações nos motivou a estudar sistemas que podem se reduzir à equação de Burgers em primeira ordem utilizando o método perturbativo com introdução de múltiplos tempos. Há também um ponto que precisa ser clarificado. Na ref. [6], a equação de Burgers é obtida governando a evolução do termo de ordem mais baixa da expansão perturbativa. No entanto, nessa referência, a relação de dispersão linear do sistema original não foi levada em conta na definição das variáveis lentas. Sabemos que, para sistemas dissipativos, a relação de dispersão linear deve conter termos imaginários. Isso deve, de alguma forma, influenciar o resultado.

4.2 Ondas Não Lineares em um Gás Unidimensional

Vamos considerar um gás contido em uma dimensão espacial. As equações de movimento são [2]:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (4.4)$$

$$(\rho u)_t + [\rho u^2 + P - \mu u_x]_x = 0. \quad (4.5)$$

Nesta equação, $\rho(x, t)$ é a densidade, $u(x, t)$ a componente longitudinal da velocidade, $P(x, t)$ a pressão e μ o coeficiente de viscosidade. A primeira é a equação da continuidade, enquanto que a segunda expressa a conservação de momento.

Em processos adiabáticos reversíveis, a pressão varia com a densidade de acordo com a relação [24]:

$$P = A \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (4.6)$$

onde $\gamma = c_p/c_v$ é a razão entre os calores específicos a pressão constante e a volume constante e A é uma constante de proporcionalidade. Em geral, $\gamma > 1$: por exemplo, para o ar nas condições normais de temperatura e pressão, $\gamma \sim 1.4$. O parâmetro γ está associado ao módulo de elasticidade adiabática B_s por,

$$B_s = \gamma P_0 = \frac{1}{\kappa_s}. \quad (4.7)$$

Nesta equação, P_0 é a pressão do gás em equilíbrio e κ_s é o módulo de compressibilidade adiabática [21].

Substituindo (4.6) em (4.5), ficamos com as seguintes equações para $\rho(x, t)$ e $u(x, t)$:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (4.8)$$

$$(\rho u)_t + \left[\rho u^2 + A \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - \mu u_x \right]_x = 0. \quad (4.9)$$

Vamos realizar uma expansão perturbativa do sistema (4.8)-(4.9) buscando soluções tipo onda-caminhante, válidas quando o número de onda é pequeno.

4.3 *Relação de Dispersão e Múltiplos Tempos*

Nesta seção, vamos obter a relação de dispersão linear para o sistema (4.8)-(4.9), e escolher as coordenadas perturbativas, da mesma forma como fizemos para o sistema (3.1) na seção 3.1. O sistema linear correspondente ao sistema (4.8)-(4.9) é:

$$\rho_t + \rho_0 u_x = 0, \quad (4.10)$$

$$\rho_0 u_t + \gamma A \frac{\rho_x}{\rho_0} - \mu u_{xx} = 0, \quad (4.11)$$

onde ρ_0 é uma constante que representa a densidade do gás em equilíbrio. Supomos que a solução de (4.10)-(4.11) seja uma onda plana

$$u = \exp[i(kx - \Omega t)]. \quad (4.12)$$

Substituindo essa solução em (4.10) encontramos:

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{k}{\Omega} u \right]. \quad (4.13)$$

A relação de dispersão é obtida quando substituímos ρ em termos de u na eq. (4.11), usando (4.12) para expressar u . O resultado é:

$$\Omega^2 + i\mu \frac{k^2 \Omega}{\rho_0} - \gamma A \frac{k^2}{\rho_0} = 0. \quad (4.14)$$

Resolvendo para Ω , temos:

$$\Omega(k) = -i\mu \frac{k^2}{2\rho_0} \pm \frac{k}{2\rho_0} [4\gamma A\rho_0 - \mu^2 k^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.15)$$

Sem perda de generalidade, vamos escolher as constantes A e ρ_0 iguais a 1 de forma a simplificar as expressões. Para estudar ondas com grandes comprimentos de onda,

tomamos $k = \epsilon\kappa$, com $\epsilon \ll 1$, e expandimos o ramo de parte real positiva da relação de dispersão em torno de $k = 0$. O resultado é:

$$\Omega = \gamma^{\frac{1}{2}}\epsilon\kappa - i\frac{\mu\epsilon^2\kappa^2}{2} - \frac{\mu^2\epsilon^3\kappa^3}{8\gamma^{\frac{1}{2}}} - \frac{\mu^4\epsilon^5\kappa^5}{128\gamma^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu^6\epsilon^7\kappa^7}{1024\gamma^{\frac{5}{2}}} + \dots \quad (4.16)$$

Vamos usar esta relação para definir as coordenadas perturbativas incluindo os múltiplos tempos, de maneira análoga ao capítulo anterior. Substituindo (4.16) em (4.12), somos levados a definir as seguintes coordenadas:

$$\xi = \epsilon(x - \gamma^{\frac{1}{2}}t), \quad (4.17)$$

$$\tau_2 = -i\frac{\mu}{2}\epsilon^2t, \quad (4.18)$$

$$\tau_3 = -\frac{\mu^2}{8\gamma^{\frac{1}{2}}}\epsilon^3t, \quad (4.19)$$

$$\tau_5 = -\frac{\mu^4}{128\gamma^{\frac{3}{2}}}\epsilon^5t, \quad (4.20)$$

$$\tau_7 = -\frac{\mu^6}{1024\gamma^{\frac{5}{2}}}\epsilon^7t, \text{ etc} \quad (4.21)$$

Na próxima seção, vamos reduzir o sistema (4.8)-(4.9) utilizando as coordenadas perturbativas acima. Notemos que a expansão (4.16), da relação de dispersão linear para o sistema, implica na introdução de uma coordenada temporal imaginária, isto é, τ_2 . Este é um fato novo, haja vista que os sistemas estudados até então foram sempre sistemas dispersivos, para os quais a relação de dispersão linear não contém termos imaginários.

4.4 Esquema Perturbativo

Vamos proceder à redução perturbativa do sistema (4.8)-(4.9). Notemos que na equação (4.9), há um termo proporcional a ρ^γ . Portanto, antes de aplicar o método

perturbativo, vamos expandir esse termo, que é dado pela eq. (4.6) com A e ρ_0 iguais a 1, em potências de ρ em torno do ponto ρ_0 :

$$P(\rho) = 1 + \gamma(\rho - 1) + \dots \quad (4.22)$$

Mantendo os termos até primeira ordem em ρ , ficamos com o seguinte sistema de equações para a densidade $\rho(x, t)$ e a componente longitudinal da velocidade, $u(x, t)$:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (4.23)$$

$$(\rho u)_t + [\rho u^2 + 1 + \gamma(\rho - 1) - \mu u_x]_x = 0. \quad (4.24)$$

Introduzindo as variáveis (4.17)-(4.21) e expandindo os campos u e ρ de acordo com

$$u = \epsilon \hat{u} = \epsilon(u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots), \quad (4.25)$$

$$\rho = \hat{\rho} = 1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^2 \rho_2 + \dots, \quad (4.26)$$

obtemos equações perturbativas que podem ser analisadas ordem a ordem. As funções u_n e ρ_n serão designadas como componentes perturbativas. Tendo em vista as eqs. (4.17)-(4.21) e (4.25)-(4.26) definimos o peso de escala w de acordo com as seguintes expressões (Apêndice A):

$$w(u_{n(m\xi)}) = m + n + 1, \quad (4.27)$$

$$w(\rho_{n(m\xi)}) = m + n, \quad (4.28)$$

$$w(u_{n\tau_m}) = m + n + 1, \quad (4.29)$$

$$w(\rho_{n\tau_m}) = m + n, \quad (4.30)$$

$$w(AB) = w(A) + w(B). \quad (4.31)$$

Passemos agora às equações perturbativas.

Ordem ϵ^2 : nesta ordem obtemos

$$u_{0\xi} = \gamma^{\frac{1}{2}} \rho_{1\xi}. \quad (4.32)$$

Integrando em ξ , ficamos com:

$$u_0 = \gamma^{\frac{1}{2}} \rho_1 + A, \quad (4.33)$$

onde A é uma constante de integração. Aqui, não vamos tomar a constante A igual a zero como fizemos para o sistema do capítulo anterior. Tomar a constante $A = 0$ significa tomar a condição de contorno $\rho_1 = 0$ para x e t tendendo a infinito. Como veremos, essa hipótese não é conveniente no presente caso. Vamos, portanto, manter a constante A diferente de zero, e no final analisar a solução para qualquer valor de A , inclusive $A = 0$.

Em vista das transformações (4.25)-(4.26), e lembrando que devemos obter um esquema perturbativo bem ordenado, deduzimos que a constante A é de peso de escala $w(A) = 1$. Notemos que a substituição de u_0 , dado por (4.33), nas equações perturbativas de ordens mais altas, vai introduzir a constante A nessas equações. Como A tem peso de escala 1, em ordem ϵ^n , essa constante deve ser encontrada multiplicando termos de peso de escala $w = n - w(A) = n - 1$. Passemos agora à próxima ordem:

Ordem ϵ^3 : nessa ordem, obtemos a equação de evolução para a componente ρ_1 no tempo τ_2 :

$$i\rho_{1\tau_2} - 2\frac{A}{\mu}\rho_{1\xi} - 2\frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu}\rho_1\rho_{1\xi} + \rho_{1\xi\xi} = 0. \quad (4.34)$$

Podemos também verificar que todos os termos de (4.34) possuem o mesmo peso de escala $w = 3$. Fazendo a constante $A = 0$, ficamos com:

$$i\rho_{1\tau_2} - 2\frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu}\rho_1\rho_{1\xi} + \rho_{1\xi\xi} = 0. \quad (4.35)$$

Podemos pensar nesta equação como a equação de Burgers num referencial no qual o tempo é imaginário. Notemos que, na ref. [6], a equação de Burgers é encontrada para o termo perturbativo de ordem mais baixa. Porém, nessa referência, as constantes de integração que surgem no processo perturbativo foram tomadas como sendo nulas e, como já dissemos, a relação de dispersão linear para o sistema não foi considerada. O coeficiente imaginário do termo $\rho_{1\tau_2}$ tem a função de remover os termos imaginários que apareceriam na relação de dispersão linear de (4.34).

Estamos interessados na solução tipo onda caminhante de (4.34). Vamos então procurar uma solução análoga à solução onda caminhante de Burgers, dada pela eq.(4.2). Fazendo isso, chegamos à seguinte forma para ρ_1 :

$$\rho_1(\xi, \tau_2) = \frac{\kappa\mu}{\gamma^{\frac{1}{2}}}[1 - \tanh(\kappa\xi - 2i\kappa^2\tau_2)] - \frac{A}{\gamma^{1/2}}. \quad (4.36)$$

Não vamos nos incomodar com o fato desta solução ser complexa, já que podemos passar para as variáveis de laboratório ρ , x e t nas quais ρ_1 é real.

Passemos em seguida à próxima ordem:

Ordem ϵ^4 : nessa ordem, obtemos a equação de evolução para a componente ρ_2 no tempo τ_2 :

$$\begin{aligned} i\rho_{2\tau_2} - 2\frac{A}{\mu}\rho_{2\xi} - 2\frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu}(\rho_1\rho_2)_\xi + \rho_{2\xi\xi} = & -\frac{\mu}{4\gamma^{\frac{1}{2}}}\rho_{1\tau_2} - \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu}\rho_1^2\rho_{1\xi} \\ & + \frac{1}{2}(\rho_{1\xi})^2 + \rho_1\rho_{1\xi\xi} + \frac{\mu}{4\gamma^{\frac{1}{2}}}\rho_{1\xi\xi\xi} + 2\frac{B}{\mu}\rho_{1\xi}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Aqui, B é uma segunda constante de integração. Essa constante surge quando integramos a equação:

$$u_{1\xi} = -i\frac{\mu}{2}\rho_{1\tau_2} + A\rho_{1\xi} + \gamma^{\frac{1}{2}}\rho_{2\xi} + \mu\rho_{1\xi\xi}, \quad (4.38)$$

para obter ρ_1 , o que constitui num dos passos intermediários necessários para chegar

a (4.37). Usando (4.34) ficamos com:

$$u_1 = \gamma^{\frac{1}{2}} \rho_2 - \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{2} (\rho_1)^2 - \frac{\mu}{2} \rho_{1\xi} + B, \quad (4.39)$$

Portanto, deduzimos que $w(B)=2$. Com isso, todos os termos de (4.37) ficam com o mesmo peso de escala $w = 4$.

Vamos fazer uma comparação entre as equações (3.24) e (4.37). Da mesma forma que para a equação (3.24), o lado direito de (4.37) é dado pela linearização da equação de evolução obtida para a componente anterior. Notemos que, o último termo do lado direito de (4.37) é composto por uma derivada de peso de escala 2, $\rho_{1\xi}$, multiplicando a constante de integração B . Termos deste tipo não são encontrados em (3.24). Tal como a eq (3.24), (4.37) possui uma derivada temporal da componente anterior, em relação a uma escala de tempo de ordem mais elevada. Essa derivada, $\rho_{1\tau_3}$, deve ser tal que a condição de compatibilidade entre as evoluções nas duas escalas de tempo seja satisfeita, isto é

$$(\rho_{1\tau_2})_{\tau_3} = (\rho_{1\tau_3})_{\tau_2}. \quad (4.40)$$

Lembremos que, no cap. 3, para obtermos a equação seguinte da hierarquia, isto é, aquela que deve representar a evolução no tempo da ordem seguinte, juntamos todos os termos com peso de escala correspondente a essa ordem e montamos um polinômio diferencial através de uma combinação linear desses termos, capaz de satisfazer a condição de compatibilidade. Agora, desejamos repetir o mesmo procedimento, porém neste caso, devemos prever a ocorrência de termos extras, com pesos de escala inferiores, multiplicados por constantes dotadas de pesos de escala, tal como acontece nas eqs. (4.34) e (4.37). Esses termos se tornam necessários para que ρ_1 possa ser uma solução simultânea das equações de evolução que aparecem nas várias escalas de tempo. Assim, vamos supor que a equação de evolução de ρ_1 em τ_3 seja

da forma:

$$\begin{aligned} \rho_{1\tau_3} = & \alpha_3 \rho_{1\xi\xi\xi} + \beta_3 \rho_1 \rho_{1\xi\xi} + \gamma_3 (\rho_{1\xi})^2 + \delta_3 \rho_1^2 \rho_{1\xi} \\ & + a_3 \rho_1 \rho_{1\xi} + b_3 \rho_{1\xi\xi} + c_3 \rho_{1\xi}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Essa é a combinação linear mais geral, de termos com peso de escala 4, que podemos construir utilizando constantes dotadas de pesos de escala. Em (4.41), a_3 e b_3 são de peso de escala 1, e c_3 de peso de escala 2. Enquanto isso, α_3 , β_3 , γ_3 e δ_3 , não possuem peso de escala.

A condição de compatibilidade entre as evoluções em τ_2 e τ_3 , determina as constantes β_3 , γ_3 e δ_3 em termos de α_3 , e b_3 em termos de a_3 . Com isso, ficamos com a seguinte equação que deve ser satisfeita por ρ_1 em τ_3 :

$$\begin{aligned} \rho_{1\tau_3} = & \alpha_3 \left[\rho_{1\xi\xi\xi} - \frac{3\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu} \rho_1 \rho_{1\xi\xi} - \frac{3\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu} (\rho_{1\xi})^2 + \frac{3\gamma}{\mu^2} \rho_1^2 \rho_{1\xi} \right] \\ & + a_3 \left[\rho_1 \rho_{1\xi} - \frac{\mu}{2\gamma^{1/2}} \rho_{1\xi\xi} \right] + c_3 \rho_{1\xi}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para que ρ_1 dado por (4.36) seja solução dessa equação, devemos ter a seguinte condição:

$$c_3 = \frac{3A^2}{\mu^2} \alpha_3 \quad ; \quad a_3 = \frac{6A\gamma^{1/2}}{\mu^2} \alpha_3. \quad (4.43)$$

Assim, ficamos com:

$$\begin{aligned} \rho_{1\tau_3} = & \alpha_3 \left[\rho_{1\xi\xi\xi} - \frac{3\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu} \rho_1 \rho_{1\xi\xi} - \frac{3\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu} (\rho_{1\xi})^2 + \frac{3\gamma}{\mu^2} \rho_1^2 \rho_{1\xi} \right. \\ & \left. + \frac{3A^2}{\mu^2} \rho_{1\xi} + \frac{3A}{\mu} \left(\frac{2\gamma^{1/2}}{\mu} \rho_1 \rho_{1\xi} - \rho_{1\xi\xi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Esta é a equação de terceira ordem da hierarquia gerada pela equação (4.34). Tomando $A = 0$ em (4.44), ficamos com a equação de terceira ordem da hierarquia de Burgers. Notemos que, a hierarquia gerada pela eq. (4.34), devido à presença

de termos com peso de escala diferentes, pode ser interpretada como uma generalização da hierarquia de Burgers (ver Apêndice C). Notemos também que, o lado direito de (4.44) é uma *simetria* da equação (4.34) de acordo com o que foi definido no Apêndice B. Isso pode ser verificado facilmente para a solução particular (4.36). Substituindo (4.36) em (4.44), chegamos a:

$$\rho_{1\tau_3} = -\alpha_3 \frac{4\kappa^4 \mu}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \text{sech}^2(\kappa\xi - 2i\kappa^2\tau_2). \quad (4.45)$$

Essa função é uma solução da equação (4.37) sem fonte, isto é, na forma homogênea, e portanto uma *simetria* de (4.34).

Substituindo a solução (4.36) em (4.37) com $\rho_{1\tau_3}$ dado por (4.45) podemos determinar o valor de α_3 que faz com que todos os termos ressonantes, aqueles proporcionais a $\text{sech}^2\theta$, se cancelem. Este valor é:

$$\alpha_3 = 1 + \frac{2A}{\kappa\mu} - \frac{A^2}{\kappa^2\mu^2} + \frac{2B\gamma^{\frac{1}{2}}}{\kappa^2\mu^2}. \quad (4.46)$$

Usando (4.46) e (4.36) chegamos a:

$$i\rho_{2\tau_2} - 2\frac{A}{\mu}\rho_{2\xi} - 2\frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu}(\rho_1\rho_2)_\xi + \rho_{2\xi\xi} = \frac{3\kappa^4\mu^2}{\gamma}\text{sech}^4(\kappa\xi - 2i\kappa^2\tau_2). \quad (4.47)$$

Na seção seguinte, vamos obter uma solução para (4.47) e estudar a condição de uniformidade da série perturbativa.

4.5 Estudo da Uniformidade da Série Perturbativa

Para que a série perturbativa $\rho = \rho_0 + \epsilon\rho_1 + \epsilon^2\rho_2 + \dots$ seja uniformemente válida quando estendemos o cálculo perturbativo até o termo proporcional a ρ_2 , as razões ρ_1/ρ_0 e ρ_2/ρ_1 devem permanecer limitadas para $\xi \rightarrow \pm\infty$ e $\tau_2 \rightarrow \pm i\infty$. Como ρ_0 é constante, usando (4.36) verificamos que a razão ρ_1/ρ_0 é limitada em ξ e τ_2 . Para estudar os limites acima no caso de ρ_2/ρ_1 , devemos primeiramente obter a solução ρ_2

da eq. (4.47) com ρ_1 dado por (4.36). Para isto, supomos que $\rho_2 = \rho_2(\kappa\xi - 2i\kappa^2\tau_2)$.

Com isso, a eq. (4.47) fica:

$$2\kappa^2\rho_2' - 2\frac{A\kappa}{\mu}\rho_2' - 2\frac{\gamma^{1/2}\kappa}{\mu}(\rho_1\rho_2)' + \kappa^2\rho_2'' = 3\frac{\kappa^4\mu^2}{\gamma}\text{sech}^4\theta, \quad (4.48)$$

onde $'$ denota a derivada total $d/d\theta$, e $\theta = \kappa\xi - 2i\kappa^2\tau_2$. Integrando em θ , ficamos com:

$$2\kappa^2\rho_2 - 2\frac{A\kappa}{\mu}\rho_2 - 2\frac{\gamma^{1/2}}{\mu}\kappa(\rho_1\rho_2) + \kappa^2\rho_2' = 3\frac{\kappa^4\mu^2}{\gamma} \int \text{sech}^4\theta \, d\theta. \quad (4.49)$$

Substituindo ρ_1 dado por (4.36), obtemos:

$$\rho_2' + (2 \tanh \theta)\rho_2 = 3\frac{\kappa^2\mu^2}{\gamma} \int \text{sech}^4\theta \, d\theta. \quad (4.50)$$

A solução dessa equação pode ser obtida através de [22]:

$$\rho_2 = e^{-I} \int Q(\theta)e^I d\theta + Ce^{-I}, \quad (4.51)$$

onde

$$I = \int 2 \tanh \theta \, d\theta = \ln(\cosh^2 \theta), \quad (4.52)$$

$$Q(\theta) = 3\frac{\kappa^2\mu^2}{\gamma} \int \text{sech}^4\theta \, d\theta, \quad (4.53)$$

e C é uma constante de integração. Fazendo os cálculos necessários, obtemos:

$$\rho_2 = \frac{\kappa^2\mu^2}{\gamma} [\tanh^2 \theta + \text{sech}^2\theta(\ln \cosh \theta)] + C \text{sech}^2\theta. \quad (4.54)$$

O primeiro termo representa uma solução particular da equação não homogênea, enquanto que o segundo, aquele multiplicado pela constante C , representa a solução da equação homogênea. Note que

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \rho_2 = \frac{\kappa^2\mu^2}{\gamma}.$$

Queremos estudar os limites de ρ_2/ρ_1 quando $\xi \rightarrow \pm\infty$ e $\tau_2 \rightarrow \pm i\infty$. Estes limites estão contidos no limite $\theta \rightarrow \pm\infty$, onde

$$\theta = \kappa\xi - 2i\kappa^2\tau_2. \quad (4.55)$$

O limite $\theta \rightarrow \infty$ corresponde a $\tau_2 \rightarrow -i\infty$ com ξ fixo, ou $\xi \rightarrow \infty$ com τ_2 fixo, enquanto $\theta \rightarrow -\infty$ corresponde a $\tau_2 \rightarrow +i\infty$ com ξ fixo, ou $\xi \rightarrow -\infty$ com τ_2 fixo. Deste modo, expressamos a condição de uniformidade da solução por

$$\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} < \infty. \quad (4.56)$$

Usando (4.36) e (4.54), é fácil ver que

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = -\frac{\kappa^2 \mu^2}{\gamma^{1/2} A} < \infty. \quad (4.57)$$

Por outro lado,

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\kappa^2 \mu^2}{\gamma^{1/2} (2\kappa\mu - A)} < \infty. \quad (4.58)$$

Vemos dessa forma que, até esta ordem, a série perturbativa é uniformemente válida. Esse mesmo procedimento pode ser repetido até qualquer ordem, levando dessa forma a uma solução uniformemente válida até qualquer ordem. É importante notar, no caso específico do problema tratado, que a constante de integração A desempenha um papel decisivo na obtenção de uma série uniformemente válida pois se $A = 0$ ou $A = 2\kappa\mu$, um dos limites acima seria infinito, o que destruiria completamente a validade da solução. Notemos que, neste caso, a perda de validade da solução não ocorre em virtude dos termos seculares, e sim devido à impossibilidade da solução ρ_1 satisfazer as condições de contorno $\rho_1 = 0$ em $x \rightarrow \pm\infty$. Então, concluimos que, num sistema dissipativo, a condição de contorno acima não pode ser aplicada e devemos considerar a eq. (4.34) como a equação correta para descrever a evolução da primeira componente relevante na teoria perturbativa. Um outro ponto a ser destacado, é o surgimento de um novo tipo de hierarquia. Essa hierarquia, a qual chamamos de hierarquia generalizada, será discutida no Apêndice C. Existe ainda mais um ponto a ser mencionado. Apesar do método perturbativo com múltiplos tempos permitir a eliminação dos termos ressonantes em cada ordem da teoria de perturbações,

os quais em geral são os termos que dão origem a secularidades na solução do problema, no caso específico considerado aqui os termos ressonantes não produzem secularidades. Nesse caso, sua eliminação serviu apenas para ilustrar a forma como o método funciona, além de permitir a obtenção de uma solução mais simples para o problema. Um fato que permanece obscuro e que certamente mereceria um estudo mais aprofundado é porque em alguns casos os termos ressonantes dão origem a secularidades, e em outros casos não. Neste trabalho, entretanto, não vamos nos ocupar dessa questão.

Capítulo 5

Comentários Finais

5.1 *Equações de Evolução e Múltiplos Tempos*

Nesta seção, vamos descrever o esquema perturbativo com múltiplos tempos através de um esquema geral, no qual as equações de movimento assumem a forma de polinômios diferenciais.

Vamos admitir que o sistema original a ser submetido à redução perturbativa seja dado na forma de equações diferenciais polinomiais. Quando não for este o caso, admitimos que existe um limite no qual podemos expandir as variáveis dependentes, de maneira que as equações originais possam ser escritas como equações diferenciais polinomiais.

Para um sistema

$$R(u) = 0, \quad (5.1)$$

onde $u = u(x, t)$ e $R(u)$ um polinômio diferencial em u e suas derivadas parciais, expandimos u em termos do parâmetro perturbativo ϵ da seguinte maneira:

$$u = \epsilon^p(u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots). \quad (5.2)$$

Em seguida, introduzimos as variáveis lentas ξ e τ_i , onde $\tau_i = (\tau_1, \tau_2, \dots)$ representam os múltiplos tempos. A introdução dos múltiplos tempos implica que cada uma das

componentes u_n da expansão (5.2) deve satisfazer uma equação de evolução em cada tempo τ_i . Vamos admitir, no nosso tratamento geral, que $i = 1, 2, 3, \dots$, lembrando que nas aplicações concretas i pode não conter todos estes valores. A utilização dos múltiplos tempos leva a equações de evolução polinomiais para as componentes perturbativas u_n em cada escala de tempo τ_i . A forma geral para essas equações deve ser

$$u_{n\tau_i} = W_i^n(u_0, u_1, \dots, u_n), \quad (5.3)$$

com W_i^n um polinômio diferencial nas derivadas em relação a ξ e τ_j , $1 \leq j \leq i - 1$, das componentes u_m , onde m é um inteiro tal que $0 \leq m \leq n$. Ambos os lados de (5.3) devem ter o mesmo peso de escala w , que pode ser obtido a partir dos índices n , i e p . Neste caso, o peso de escala é dado por

$$w = n + p + i. \quad (5.4)$$

Assim, o peso de escala de qualquer monômio de W_i^n deve ser igual a $n + p + i$. Vamos representar as eqs. (5.3) em um diagrama na forma de uma "matriz bidimensional", onde as linhas correspondem ao índice i , que indica o peso de escala da derivada temporal, e as colunas ao índice n , que indica a componente na expansão perturbativa:

$$\begin{array}{ccccccc} u_{0\tau_1} = W_1^0(u_0) & u_{1\tau_1} = W_1^1(u_0, u_1) & u_{2\tau_1} = W_1^2(u_0, u_1, u_2) & \cdots & & & \\ u_{0\tau_2} = W_2^0(u_0) & u_{1\tau_2} = W_2^1(u_0, u_1) & u_{2\tau_2} = W_2^2(u_0, u_1, u_2) & \cdots & & & \\ u_{0\tau_3} = W_3^0(u_0) & u_{1\tau_3} = W_3^1(u_0, u_1) & u_{2\tau_3} = W_3^2(u_0, u_1, u_2) & \cdots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{array} \quad (5.5)$$

As equações da primeira linha, $i = 1$, são obtidas diretamente do esquema perturbativo, isto é, são as equações que aparecem nas ordens sucessivas da teoria de perturbação, e que por essa razão são chamadas de equações físicas. As equações da segunda linha em diante, $i \geq 2$, são as equações de evolução nos tempos de ordem superior. As equações de cada coluna podem ser obtidas a partir das equações da primeira linha, impondo-se a condição de compatibilidade:

$$[\partial_{\tau_1}, \partial_{\tau_i}]u_n = 0. \quad (5.6)$$

Notemos que o termo $u_{0\tau_2}$ tem o mesmo peso de escala que $u_{1\tau_1}$:

$$w[u_{0\tau_2}] = 2 + p \quad (5.7)$$

e

$$w[u_{1\tau_1}] = 2 + p. \quad (5.8)$$

Analogamente, vemos que os termos $u_{0\tau_3}$ e $u_{1\tau_2}$ possuem o mesmo peso de escala $w = 3 + p$. Assim, as diagonais do diagrama (5.5), definidas pelos números i e n tais que $i + n = Cte.$, contém polinômios diferenciais de mesmo peso de escala $w = i + n + p$.

No diagrama (5.5), as equações da primeira coluna, $n = 0$, podem ser reescritas como equações diferenciais parciais homogêneas para u_0 . Na segunda coluna, $n = 1$, as equações podem ser reescritas como equações diferenciais parciais para u_1 , com fontes que dependem de u_0 . Na terceira coluna, $n = 3$, as equações podem ser reescritas como equações diferenciais parciais para u_2 com fontes que dependem de u_0 e u_1 . De maneira geral, vemos que as equações para as componentes u_n podem ser escritas como equações diferenciais parciais não homogêneas, com as fontes dependendo das componentes u_m , com $0 \leq m < n$. Para $n = 0$, as equações em qualquer escala de tempo, são necessariamente homogêneas.

A experiência com a aplicação do método perturbativo, capítulos 3 e 4, mostrou que as equações para u_n , com $n \geq 1$, isto é, as equações que não são necessariamente homogêneas, são obtidas pela linearização da equação para o termo de ordem mais baixa, u_0 . Considerando este fato, podemos reescrever as eqs. (5.5) como:

$$\begin{aligned}
 N_1(u_0) &= 0 & N'_1 u_1 &= S_1^1(u_0) & N'_1 u_2 &= S_1^2(u_0, u_1) & \cdots \\
 N_2(u_0) &= 0 & N'_2 u_1 &= S_2^1(u_0) & N'_2 u_2 &= S_2^2(u_0, u_1) & \cdots \\
 N_3(u_0) &= 0 & N'_3 u_1 &= S_3^1(u_0) & N'_3 u_2 &= S_3^2(u_0, u_1) & \cdots \\
 &\vdots & &\vdots & &\vdots & .
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Nestas equações, $N_i(u_0) = u_{0\tau_i} - W_i^0(u_0)$ e $N'_i u_k$ é a derivada de Fréchet de N_i no ponto u_0 e na direção u_k . As fontes S_i^n dependem das componentes u_m , $0 \leq m < n$. Em alguns casos, a fonte pode ser nula, tal como acontece para as componentes h_{2i-1} da expansão para a solução assintótica do sistema (3.1). Lembremos que, no caso geral, apenas as equações para u_0 são necessariamente homogêneas. Nas equações físicas (primeira linha) não homogêneas, costumam aparecer termos ressonantes, isto é, termos que satisfazem a mesma equação na forma homogênea. Estes são os termos que dão origem às secularidades na solução perturbativa. Conforme vimos nos capítulos 3 e 4, esses termos podem ser eliminados com o uso das equações de evolução nos tempos de ordem superior (equações da segunda linha em diante).

Para o termo de ordem mais baixa, u_0 , temos:

$$u_{0\tau_1} = W_1^0(u_0). \tag{5.10}$$

Usando a regra da cadeia para a derivada de Fréchet (Apêndice B),

$$(u_{0\tau_1})_{\tau_i} = \partial_{\tau_i} W_1^0(u_0) = W_1^{\prime 0}(u_{0\tau_i}) = W_1^{\prime 0} W_i^0, \quad (5.11)$$

com $W_1^{\prime 0}$ a derivada de Fréchet de W_1^0 no ponto u_0 . De maneira análoga obtemos:

$$(u_{0\tau_i})_{\tau_1} = W_i^{\prime 0} W_1^0. \quad (5.12)$$

Assim, a equação

$$[\partial_{\tau_1}, \partial_{\tau_i}] u_0 = 0 \quad (5.13)$$

pode ser reescrita como:

$$[W_1^0, W_i^0] = W_1^{\prime 0} W_i^0 - W_i^{\prime 0} W_1^0 = 0. \quad (5.14)$$

Se

$$[W_1^0, W_i^0] = 0, \quad (5.15)$$

dizemos que W_i^0 é uma *simetria* da equação de evolução (5.10). Neste caso, se

$$u_{0\tau_i} = W_i^0(u_0), \quad (5.16)$$

então existe uma função $u(\tau_i)$, $i = 1, 2, \dots$, que satisfaz simultaneamente todas as equações (5.16). Quando isso ocorre, dizemos que estas equações são compatíveis. Por isso, a condição (5.13) é chamada de condição de compatibilidade. A exigência de que (5.13) seja válida para qualquer tempo τ_i implica na existência de infinitas simetrias da equação (5.10).

Notemos, que as simetrias da equação de evolução (5.10) coincidem com os pontos estacionários do funcional

$$N_1(u_0) = u_{0\tau_1} - W_1^0(u_0). \quad (5.17)$$

Os pontos estacionários de N_1 (Apêndice B) são os funcionais σ para os quais

$$N'_1 \sigma = 0. \quad (5.18)$$

De fato,

$$N'_1 W_i^0 = \partial \tau_1 W_i^0 - W_1'^0 W_i^0 = W_i'^0 u_{0\tau_1} - W_1'^0 W_i^0 = W_i'^0 W_1^0 - W_1'^0 W_i^0. \quad (5.19)$$

Portanto, se W_i^0 é uma simetria de (5.10),

$$N'_1 W_i^0 = [W_i^0, W_1^0] = 0. \quad (5.20)$$

Isso mostra que as simetrias de uma equação de evolução satisfazem esta mesma equação na sua forma linearizada. No formalismo dos múltiplos tempos, as equações de evolução nos tempos de ordem superior devem ser compatíveis entre si para que o mesmo fenômeno possa ser descrito em escalas de tempo diferentes. Em particular, as equações de evolução nos tempos de ordem superior devem ser compatíveis com a equação de evolução no tempo de ordem mais baixa, a qual é sempre uma equação física, no sentido que ela é obtida diretamente das equações que descrevem o sistema.

5.2 Conclusões

Neste trabalho, analisamos as consequências de se utilizar múltiplos tempos nas reduções perturbativas. Os múltiplos tempos são representados por uma sequência infinita de coordenadas temporais, cada uma delas escrita com uma potência diferente do parâmetro perturbativo. A razão, bem como a escolha dessas coordenadas deve ser feita de maneira que os termos que dão origem às secularidades nas soluções possam ser eliminados. As coordenadas nas quais isso acontece definem uma estrutura na qual cada componente da expansão perturbativa deve satisfazer

uma hierarquia de equações integráveis, cada equação da hierarquia fornecendo a evolução de uma componente da expansão numa dada escala de tempo.

As hierarquias que descrevem a evolução de componentes diferentes, estão relacionadas entre si. O diagrama (5.9) representa essa relação. É interessante notar que apenas a primeira hierarquia, aquela que governa a evolução da componente de ordem mais baixa, é composta de equações não lineares. Para as outras componentes, as hierarquias que governam as evoluções nos múltiplos tempos são dadas pela derivada de Fréchet das equações da hierarquia associada ao termo de ordem mais baixa, e portanto são compostas de equações lineares. Lembremos que a derivada de Fréchet do operador N é a linearização desse operador. Assim, as dinâmicas para as componentes de ordens superiores no tempo τ_i são dadas pela linearização da dinâmica em ordem mais baixa na mesma escala de tempo. Isso ocorre para qualquer escala de tempo τ_i . Tendo em vista a eq. (5.20), as hierarquias também estão relacionadas às ressonâncias perturbativas. Consideremos a equação

$$u_{n\tau_1} - W_1^n = 0, \quad (5.21)$$

satisfeita pela componente u_n da expansão perturbativa.

$$u_{n\tau_1\tau_j} = u_{n\tau_j\tau_1} \quad (5.22)$$

implica que

$$[W_j^n, W_1^n] = 0. \quad (5.23)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} W_j'^n W_1^n - W_1'^n W_j^n &= W_j'^n u_{n\tau_1} - W_1'^n W_j^n = \partial_{\tau_1} W_j^n - W_1'^n W_j^n \\ &= (u_{n\tau_1} - W_1^n)' W_j^n = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Como vimos, as simetrias W_i^0 são ressonâncias perturbativas nas equações para os termos u_n com $n \geq 2$, pois satisfazem essas equações na forma homogênea, eq (5.20).

Este fato se verifica para qualquer solução u_0 da equação (5.10). Nos capítulos 3 e 4, mostramos que, utilizando uma solução na forma de onda solitária para o termo de ordem mais baixa, as simetrias e as ressonâncias que originariam secularidades na solução perturbativa se cancelam mutuamente. Apesar da relação (5.20) ser satisfeita para qualquer solução u_0 de (5.10), não podemos ainda dizer que os termos que originam as secularidades podem ser eliminados para uma solução qualquer.

Os resultados discutidos acima se verificam igualmente nos dois sistemas estudados nesse trabalho. No entanto existem diferenças fundamentais entre esses sistemas que devem se destacar. No sistema dispersivo, obtivemos uma solução uniformemente válida eliminando-se as ressonâncias perturbativas através da escolha de coordenadas temporais adequadas. Com isso, mostramos que a solução onda solitária para a componente de ordem mais baixa da expansão perturbativa satisfaz simultaneamente as infinitas equações da hierarquia de KdV. Esses resultados são semelhantes àqueles encontrados na ref. [11], diferindo pelo fato de que em [11] a série perturbativa é truncada para a solução particular considerada. No cap. 3 isso não acontece, apesar de estarmos utilizando uma solução particular totalmente análoga àquela usada em [11]. Os resultados do capítulo 3 são importantes, no sentido de que confirmam a eficiência do método, e fornecem um roteiro a ser seguido no caso do sistema dissipativo. Para o sistema dissipativo, estudado no cap. 4, encontramos algumas diferenças em relação ao sistema dispersivo. Entre essas diferenças, talvez a mais importante seja o aparecimento de um novo tipo de hierarquia na qual, uma dada equação de ordem n , contém toda a informação necessária para que se construa a hierarquia até essa ordem (Apêndice C). A relação de compatibilidade eq. (B.22) é satisfeita para as equações desta hierarquia. Essa nova hierarquia, a qual denominamos hierarquia generalizada, também pode ser usada para remover

os termos ressonantes, da mesma forma que a hierarquia usual foi utilizada no cap. 3. Porém, para o sistema estudado no cap. 4, os termos ressonantes não dão origem a secularidades. Não sabemos se este fato se deve à solução particular considerada ou se é um fato geral em sistemas dissipativos. Lembremos também que, para este sistema, as constantes de integração devem ser escolhidas de maneira a eliminar a não uniformidade devida à incompatibilidade entre as condições de contorno (caso (ii), sec. 2.1). Portanto, a hierarquia generalizada é importante visto que, sem ela não poderíamos escolher as constantes de integração de maneira a obtermos uma expansão uniformemente válida.

Apêndice A

Polinômios Diferenciais e Peso de Escala

Em teoria perturbativa, quando o sistema original é dado na forma de polinômios diferenciais, as equações perturbativas aparecem também na forma desses polinômios. Em cada equação perturbativa, todos os termos que aparecem devem contribuir em mesma ordem de grandeza. Desta forma, pretendemos ter o que chamamos de um esquema perturbativo bem ordenado. Podemos "medir" a contribuição de um termo que é gerado pela redução perturbativa, definindo-se um número denominado peso de escala. Vamos supor uma expansão perturbativa da forma:

$$u = \epsilon^{p+n} u_n = \epsilon^p (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots), \quad (\text{A.1})$$

Introduzimos as coordenadas ξ e τ_r pelas transformações de escala:

$$\xi = \epsilon^q (x - \alpha t), \quad (\text{A.2})$$

e

$$\tau_r = \epsilon^r t. \quad (\text{A.3})$$

Assim, o peso de escala w deve ser definido de acordo com:

$$w[u_{m(k\xi)}] = kq + m + p, \quad (\text{A.4})$$

$$w[u_{m(k'\tau_r)}] = k'r + m + p, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{w}[u_{m_{(k\xi)(k'\tau_r)}}] = k * q + k'r + m + p, \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{w}[AB] = \mathbf{w}[A] + \mathbf{w}[B], \quad (\text{A.7})$$

onde

$$u_{m_{(k\xi)}} = \frac{\partial^k u_m}{\partial \xi^k} \quad (\text{A.8})$$

e

$$u_{m_{(k'\tau_r)}} = \frac{\partial^{k'} u_m}{\partial \tau_r^{k'}}. \quad (\text{A.9})$$

Apêndice B

Simetrias e a Derivada de Fréchet

Seja $F = F(u)$, com $u = u(x, t)$. A derivada de Fréchet de F no ponto $u(x, t)$ e na direção $\varphi(x, t)$ é definida por [13]:

$$F'_u \varphi = \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon} F(u + \epsilon \varphi) \right]_{\epsilon=0}. \quad (\text{B.1})$$

Com a derivada de Fréchet, podemos obter os primeiros termos da expansão em série de Taylor de $F(u)$ em torno do ponto $u(x, t)$:

$$F(u + \epsilon \varphi) = F(u) + \epsilon F'_u \varphi + \dots \quad (\text{B.2})$$

Neste Apêndice, estaremos usando a seguinte notação para as derivadas parciais:

$$u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \quad (\text{B.3})$$

$$u_j = \frac{\partial^j u}{\partial t^j}. \quad (\text{B.4})$$

Com essa notação e, usando a definição (B.1), podemos escrever:

$$F'_u \varphi = \sum_i \frac{\partial F}{\partial u_i} \varphi_i + \sum_j \frac{\partial F}{\partial u_j} \varphi_j + \sum_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \varphi_{ij}. \quad (\text{B.5})$$

A derivada de Fréchet transforma $F(u)$ num operador linear F'_u que atua nas funções $\varphi(x, t)$. Se $L(u)$ é uma função linear de $u(x, t)$, L'_u é independente de u , e:

$$L'_u \varphi = L(\varphi). \quad (\text{B.6})$$

Usando (B.6) podemos mostrar que, em ordem ϵ :

$$L(u + \epsilon\varphi) = L(u) + \epsilon L(\varphi). \quad (\text{B.7})$$

Por outro lado, para $F(u)$ não linear, temos:

$$F(u + \epsilon\varphi) = F(u) + \epsilon F'_u \varphi. \quad (\text{B.8})$$

Notemos que, se $F'(\varphi) = 0$;

$$F(u + \epsilon\varphi) = F(u), \quad (\text{B.9})$$

em ordem ϵ . As funções φ que satisfazem (B.9), são denominadas *simetrias* de ordem ϵ de $F(u)$ [8]. O termo *simetria generalizada* também é utilizado por alguns autores para designar estas funções [25, 14, 16]. Para as funções $u(x, t)$ para as quais:

$$[\partial_x, \partial_t]u = 0, \quad (\text{B.10})$$

podemos mostrar, usando (B.5) que:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F' u_t. \quad (\text{B.11})$$

Dadas as equações de evolução:

$$u_{t_1} - F(u) = 0 \quad (\text{B.12})$$

e

$$u_{t_2} - G(u) = 0, \quad (\text{B.13})$$

pode-se mostrar, usando (B.11) que:

$$[\partial_{t_1}, \partial_{t_2}]u = F'_u G - G'_u F. \quad (\text{B.14})$$

O lado direito de (B.14) é definido como o "produto" de $F(u)$ e $G(u)$:

$$[F, G] = F'_u G - G'_u F. \quad (\text{B.15})$$

Assim, quando

$$[F, G] = 0 = [G, F], \quad (\text{B.16})$$

podemos mostrar que G é uma *simetria* de

$$N(u) = u_{t_1} - F(u). \quad (\text{B.17})$$

Usando (B.11), temos:

$$N'_u G = \frac{\partial G}{\partial t_1} - F'_u G = G'_u u_{t_1} - F'_u G = [G, F]. \quad (\text{B.18})$$

Portanto

$$[G, F] = 0, \quad (\text{B.19})$$

implica em

$$N'_u G = 0. \quad (\text{B.20})$$

Dado o conjunto infinito de equações:

$$u_{t_n} = F_n(u), \quad (\text{B.21})$$

a condição

$$[F_n, F_m] = 0 \quad (\text{B.22})$$

é chamada condição de compatibilidade entre as equações (B.21).

Apêndice C

A Hierarquia Generalizada

Fazendo $A = 0$ em (4.34) ficamos com a equação:

$$i\rho_{1\tau_2} - 2\frac{\gamma^{1/2}}{\mu}\rho_1\rho_{1\xi} + \rho_{1\xi\xi} = 0 \quad (\text{C.1})$$

Vamos supor que:

$$\rho_{1\tau_3} = \alpha_3\rho_{1\xi\xi\xi} + \beta_3\rho_1\rho_{1\xi\xi} + \gamma_3(\rho_{1\xi})^2 + \delta_3\rho_1^2\rho_{1\xi}. \quad (\text{C.2})$$

A condição de compatibilidade,

$$(\rho_{1\tau_2})_{\tau_3} = (\rho_{1\tau_3})_{\tau_2}, \quad (\text{C.3})$$

implica em:

$$\rho_{1\tau_3} = \alpha_3 \left[\rho_{1\xi\xi\xi} - \frac{3\gamma^{1/2}}{\mu}\rho_1\rho_{1\xi\xi} - \frac{3\gamma^{1/2}}{\mu}(\rho_{1\xi})^2 + \frac{3\gamma}{\mu^2}\rho_1^2\rho_{1\xi} \right]. \quad (\text{C.4})$$

Essa é a equação de terceira ordem da hierarquia de Burgers. Podemos verificar que, por meio da condição:

$$(\rho_{1\tau_2})_{\tau_n} = (\rho_{1\tau_n})_{\tau_2}, \quad (\text{C.5})$$

obtemos toda a hierarquia de Burgers a partir da eq. (C.1). Portanto, do ponto de vista da hierarquia, o coeficiente imaginário encontrado em (C.1) não introduz novas mudanças, de forma que, a eq. (C.1) tem a mesma hierarquia que a equação

de Burgers. Por outro lado, podemos obter a hierarquia de Burgers por meio da transformação de Hopf-Cole, tal como na sec. 2.5, fazendo pequenas modificações que levam em conta as constantes γ e μ . Definimos:

$$q_n(\rho_1) = \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} [\exp(-\frac{\gamma^{1/2}}{\mu} \int \rho_1 d\xi)] \exp(\frac{\gamma^{1/2}}{\mu} \int \rho_1 d\xi), \quad (C.6)$$

e

$$\rho_{1\tau_n} = \frac{\mu}{\gamma^{1/2}} \frac{\partial q_n(\rho_1)}{\partial \xi} = K_n(\rho_1). \quad (C.7)$$

A condição (C.5) equivale a (ver Apêndice B):

$$[K_2, K_n] = 0. \quad (C.8)$$

Portanto, os $K_n(\rho_1)$ são simetrias de (C.1).

Agora, voltemos a tomar $A \neq 0$ em (4.34). Como vimos, a condição de compatibilidade (C.3) nos leva à eq. (4.44). Generalizando essa condição para qualquer n , obtemos a hierarquia:

$$\rho_{1\tau_n} = F_n(\rho_1), \quad (C.9)$$

na qual $F_n(\rho_1)$ pode ser escrito em termos das *simetrias* da equação (C.1). Ou seja:

$$F_n(\rho_1) = a_1 K_1(\rho_1) + a_2 K_2(\rho_1) + \cdots + a_n K_n(\rho_1). \quad (C.10)$$

Os coeficientes a_i são constantes com pesos de escala:

$$\mathbf{w}(a_i) = n - i. \quad (C.11)$$

Como

$$\mathbf{w}(K_i(\rho_1)) = i + p, \quad (C.12)$$

onde p é o peso de escala de ρ_1 , deduzimos que:

$$\mathbf{w}(F_n(\rho_1)) = n + p. \quad (C.13)$$

Para a hierarquia (C.7), temos que:

$$[K_n, K_m] = 0. \quad (C.14)$$

Portanto, podemos mostrar que:

$$[F_n, F_m] = 0. \quad (C.15)$$

Isso mostra que a relação de compatibilidade deve ser satisfeita pelas equações da hierarquia de Burgers generalizada. Como

$$[F_2, F_m] = (i \frac{\partial}{\partial \tau_2} - F'_2) F_m = 0, \quad (C.16)$$

generalizamos o resultado obtido na sec. 4.4 envolvendo o termo ressonante, para qualquer solução ρ_1 de (4.34).

Referências

- [1] M. J. Boussinesq, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquée*, **XVII**, 55(1872).
- [2] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations* (Academic, London, 1982).
- [3] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley, New York, 1974).
- [4] A. Nayfeh, *Perturbation Methods* (Wiley, New York, 1974).
- [5] D. V. Choodnovsky and G. V. Choodnovsky, *Il Nuovo Cimento*, **40**, 339(1977).
- [6] R. A. Kraenkel, M. A. Manna and J. G. Pereira, *Phys. Rev. A* **45**, 838(1992).
- [7] R. A. Kraenkel, M. A. Manna and J. G. Pereira, *J. Math. Phys.* **36**, 307(1995).
- [8] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, and V. V. Sokolov, in *What is Integrability?* ed. by V. E. Zakharov (Springer, New York, 1991).
- [9] E. Hopf, *Comm. Pure Appl. Math.* **3**, 201(1950).
- [10] A. Jeffrey and T. Kawahara, *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory* (Pitman Advanced Publishing Program, London, 1982).
- [11] R. A. Kraenkel, M. A. Manna, J. C. Montero and J. G. Pereira, *J. Math. Phys.* **36**, 6822(1995).

- [12] Y. Kodama and T. Taniuti, J. Phys. Soc. Jpn. **45**, 298(1978).
- [13] R. W. Atherton and G. M. Homsy, Stud. Appl. Math. **54**, 31(1975).
- [14] Li Yi-Shen, in *Symmetries and Singularity Structures, Integrability and Chaos in Nonlinear Dynamical Systems* (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [15] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Phys. Rev. Lett. **19**, 1095 (1967).
- [16] R. Sarathy and K. M. Tamizhmani, in *Symmetries and Singularity Structures, Integrability and Chaos in Nonlinear Dynamical Systems* (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [17] T. B. Benjamin, J. L. Bona and J. J. Mahony, Phil. Trans. Royal Soc. (London) **1220**, 47(1972).
- [18] Y. Kodama and A. V. Mikhailov, Preprint (1995) Ohio State University, to appear in a memorial volume dedicated to Irene Dorfman.
- [19] P. D. Lax, Comm. Pure. Appl. Math. **21**, 467(1968).
- [20] R. A. Kraenkel, M. A. Manna, J. C. Montero, J. G. Pereira, in *Nonlinear Physics: Theory and Experiment*, (World Scientific, Singapore, 1996). Ed. by M. Boiti and F. Pempinelli.
- [21] H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica 2 - Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor* (Edgard Blücher, São Paulo, 1983).
- [22] M. L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, (John Wiley, New York, 1966).

- [23] A. Pickering, J. Math. Phys. **35**, 2(1994).
- [24] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, (Cambridge University Press, London, 1967).
- [25] A. S. Fokas and Q. M. Liu, Theor. Math. Phys. **99** 263 (1994).

