



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.003/02

**Obtenção das distribuições de carga/massa e momentos no  ${}^4\text{He}$  com o  
método de coordenadas geradoras**

Marcello Antonio Alves Talarico

Orientador

*Prof. Diógenes Galetti*

Fevereiro de 2002

## Agradecimentos

À minha esposa, Luciane, pelo seu amor e por suportar a distância que nos separou durante o mestrado.

À minha mãe, Izabel, e minhas irmãs Graziella e Daniella, por seu carinho e apoio às minhas decisões .

Ao professor Diógenes Galetti, pela sua orientação (e paciência) e pelas agradáveis conversas nos coloquinhos dos estudantes.

À todos os amigos que conheci no IFT, que para não cometer nenhuma injustiça omitirei os nomes.

Aos meus amigos de Florianópolis, tanto o pessoal da Universidade, quanto o pessoal do RPG.

À CAPES, pelo apoio financeiro que tornou este trabalho realidade.

**Em homenagem ao meu pai.**

---

## Resumo

Utilizamos o Método de Coordenadas Geradoras (MCG), o qual incorpora correlações de nosso interesse para a função de onda do núcleo de  ${}^4\text{He}$ , para o cálculo da densidade espacial e da distribuição de momentos. Inicialmente descrevemos o ansatz do MCG e apontamos os bem conhecidos problemas de instabilidade da função peso, solução da equação de Griffin-Wheeler; também apontamos como eles podem ser contornados com o procedimento de Piza e Passos. Desenvolvemos o método usando a interação nucleon-nucleon efetiva fenomenológica de Skyrme, a interação coulombiana e extraíndo o centro de massa do sistema. Finalmente os resultados são comparados com dados experimentais. Observa-se uma melhor descrição dos resultados na região de altos momentos transferidos.

**Palavras Chaves:** Densidades nucleares; Método de Coordenadas Geradoras; Correlações nucleares.

**Áreas do conhecimento:** 1.05.04.00-1; 1.05.04.01-0; 1.05.04.05-2

## Abstract

We use the Generator Coordinate Method (GCM), which take into account suitable correlations in the wave function of  ${}^4\text{He}$  nuclei, to calculate the momentum distribution and spatial density. Firstly we describe the ansatz of the method and the well-known instability problems of the weight function, which is the solution of Griffin-Wheeler equation; furthermore we point out how they can be avoided with the use of the procedure proposed by Piza and Passos. We develop the method using the nucleon-nucleon phenomenological effective Skyrme interaction, Coulombian interaction and by extracting the center of mass of the system. Finally the results are compared with experimental data. We verify a better agreement of the results at the region of high transferred momenta.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Estados de muitos corpos . . . . .	2
1.2	O papel das correlações entre nucleons . . . . .	4
1.3	Interações nucleon-nucleon . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Método das Coordenadas Geradoras</b>	<b>8</b>
2.1	Aspectos Gerais . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Aspectos preliminares dos cálculos da densidade para o <math>{}^4He</math></b>	<b>13</b>
3.1	O cálculo de $N(\alpha, \alpha')$ . . . . .	14
3.2	O cálculo de $H(\alpha, \alpha')$ . . . . .	15
3.2.1	O cálculo do termo da interação coulombiana . . . . .	18
3.3	Mudança de coordenada geradora . . . . .	19
3.4	Eliminação de efeitos do centro de massa . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Aplicação do MCG para os cálculos das densidades do <math>{}^4He</math></b>	<b>25</b>
4.1	Densidade espacial nuclear . . . . .	25
4.2	Orbitais naturais do sistema . . . . .	30
4.3	Distribuição de momentos dos nucleons . . . . .	32
4.4	Fator de Forma . . . . .	33
4.5	Raios e energias . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>38</b>
	<b>Referências</b>	<b>40</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Nosso objetivo nessa dissertação consiste na obtenção das distribuições espacial de massa/carga e de momentos do  ${}^4\text{He}$ . Em particular, estaremos interessados nos efeitos de centro de massa naquelas distribuições. Como o  ${}^4\text{He}$  é um núcleo leve, sabemos que aqueles efeitos devem ser importantes e sua eliminação deve produzir efeitos perceptíveis nos resultados finais.

Antes, porém, de entrarmos no tema central, uma discussão preliminar sobre alguns dos tópicos que são recorrentes nesta dissertação se faz necessária. Para uma maior compreensão da mesma, iremos descrever de maneira muito breve certos aspectos básicos importantes de estrutura nuclear, para que possamos tratar de maneira específica o tema desta dissertação.

### 1.1 Estados de muitos corpos

O entendimento do significado de estados de muitos corpos é importante pois, como será percebido, esta dissertação se baseia em um método, a saber, o Método das Coordenadas Geradoras (MCG), que possibilita a construção de estados de muitos corpos baseada no princípio variacional, mas antes de nos aprofundarmos nesse método em específico iremos fazer um apanhado breve sobre estados de muitos corpos.

A resolução do problema de auto valores de um sistema nuclear usando os diferentes graus de liberdade associados a cada nucleon individual, como por exemplo, coordenadas, spin e isospin, consiste num dos objetivos principais nos cálculos microscópicos de muitos corpos. O hamiltoniano  $H$  do sistema de  $A$  nucleons é constituído da soma sobre as energias de cada nucleon, associada à parte de um corpo, da soma das interações entre pares e trios de nucleons, etc, e os níveis de energia são dados pelos auto valores  $E_i$  da equação de Schödinger

$$H\Psi_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = E_i\Psi_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A). \quad (1.1)$$

Valores de quantidades físicas associadas a outras propriedades de sistema podem ser obtidos com a aplicação dos operadores correspondentes nas funções de onda  $\Psi_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)$ . A descrição microscópica do problema de muitos corpos nuclear se centra na solução dessa equação (usamos  $\vec{r}_i$  para representar todas as variáveis ao nucleon  $i$ ); este é um problema altamente complexo de se resolver do ponto de vista numérico e muito mais analiticamente. Uma aproximação usual nos cálculos microscópicos de estrutura nuclear consiste em usar bases de funções de onda de muitos corpos construídas a partir de funções de onda de partícula independente  $\phi_i(\vec{r}_j)$ . Para assegurar a antissimetrização da função de onda dos férmions, um estado de muitos corpos se escreve na forma de um determinante de Slater,

$$\Psi_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{r}_1) & \phi_1(\vec{r}_2) & \dots & \phi_1(\vec{r}_A) \\ \phi_2(\vec{r}_1) & \phi_2(\vec{r}_2) & \dots & \phi_2(\vec{r}_A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_A(\vec{r}_1) & \phi_A(\vec{r}_2) & \dots & \phi_A(\vec{r}_A) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Existem vários modos de construir as funções de onda de partícula única  $\phi_i(\vec{r}_j)$ , entre eles, um conveniente, consiste em considerar funções de onda de partícula única provenientes da diagonalização de um hamiltoniano de um corpo  $h(\vec{r}_i)$

$$h(\vec{r}_i)\phi_n(\vec{r}_i) = \varepsilon_n\phi_n(\vec{r}_i); \quad (1.3)$$

onde  $\varepsilon_n$  é a energia de partícula única. O hamiltoniano  $h(\vec{r}_i)$  é constituído de um certo potencial médio  $v(\vec{r}_i)$ , de um corpo, comum para todos os nucleons, que pode ser local e/ou não local, determinado de modo autoconsistente como no caso de Hartree-Fock. Fenomenologicamente, são exemplos de potenciais locais usuais o oscilador harmônico e o potencial de Woods-Saxon. Dessa maneira, o hamiltoniano de muitos corpos com interações de até dois corpos é representado por,

$$H(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \sum_{i=1}^A h(\vec{r}_i) + \sum_{i \neq j=1} V(\vec{r}_i, \vec{r}_j), \quad (1.4)$$

onde  $V(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$  é interação de dois corpos residual. Os elementos da matriz de  $H(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)$  nesta base de muitos corpos podem ser expressados como uma soma de dois termos

$$H_{ij} = \delta_{ij} \sum_{n=1} \varepsilon_n + V_{ij}. \quad (1.5)$$

O primeiro termo é diagonal na base de estados próprios de muitos corpos construídos a partir de produtos de funções de onda de  $h(\vec{r}_i)$  e o segundo termos, escrito como

$$V_{ij} = \langle \Psi_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) | \sum_{p \neq q=1} V(\vec{r}_p, \vec{r}_q) | \Psi_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) \rangle, \quad (1.6)$$

é a contribuição do hamiltoniano correspondente a integração residual.

## 1.2 O papel das correlações entre nucleons

A base adotada na seção anterior, têm como os únicos elementos de matriz da hamiltoniana de muitos corpos fora da diagonal aqueles termos que vêm de  $V_{ij}$ , ou seja, da parte de dois corpos do hamiltoniano. Quando as contribuições provenientes da interação residual são suficientemente pequenas, quando comparadas com as correspondentes à parte de um corpo do hamiltoniano, elas podem ser ignoradas e, nesta aproximação, os autovalores são dados pela soma das energias de partículas independente somente. O problema de muitos corpos é reduzido a um problema de contribuições de um corpo muito mais simples. Esta é a idéia principal do modelo de partículas independentes, e uma boa aproximação para uma solução microscópica do problema de estrutura nuclear quando um hamiltoniano realístico de uma partícula é disponível (este é o objetivo, por exemplo, do método Hartree-Fock(HF)).

A incorporação do princípio de Pauli na construção de funções de onda de muitos corpos é considerada também como sendo uma correlação entre nucleons; ela implica em uma restrição na forma que pode ter uma função de onda de muitos corpos e que consiste no princípio de antissimetrização total, levando-se em conta que os nucleons são férmions.

Na realidade, muitas propriedades nucleares observadas têm seu comportamento caracterizado a partir de correlações entre dois ou mais nucleons. Nesses casos, combinações lineares de produtos de estados de partícula única são necessárias para podermos descrevê-las, o modelo de partícula independente já não é aplicável (uma vez que não introduz correlações de mais de um corpo), e os efeitos das interações residuais devem ser levados em conta nos cálculos de estados de muitos corpos (entendemos por correlação aqui só certos vínculos ou restrições na forma que deve ter a função de onda do sistema de muitos corpos).

Há casos em que a função de onda de muitos corpos é formada por uns poucos estados base de muitos corpos (determinates de Slater por exemplo), quando então ela é particularmente boa para a descrição dos estados de muitos corpos de energia mais baixas, próximos ao estados fundamental. Para estes casos se considera que o problema de muitos corpos pode ser aproximado diagonalizando a matriz hamiltoniana em um pequeno, mas bem escolhido subespaço daqueles estados. O modelo de camadas é baseado na aproximação mais baixa - um único estado de base - e é aplicado sobretudo em estados de baixa energia em núcleos de camada fechada ou próximo disso.

Em contrapartida, em fenômenos como a chamada ressonância dipolar gigante, por exemplo, um modelo de camadas puro envolvendo excitações simples não pode explicar a alta energia dessa ressonância gigante, mas isso pode ser explicado

se nós supomos que há movimentos com participação coerente de muitos nucleons. As excitações coletivas se caracterizam por ter probabilidades de transição entre uma ou duas ordens de magnitude maior que as transições de uma partícula e, por outro lado, aparecem em espectros de diferentes núcleos em regiões inteiras da tabela periódica com regularidade e a energia de excitação varia lentamente com  $A$ . Ou seja, há estados cuja descrição microscópica é muito mais complicada e então, nesses casos, se usam modelos coletivos. Nesses, os efeitos vindos de correlações proporcionadas por termos que provêm de  $V_{ij}$  não são desprezados.

No caso geral de muitas partículas com fortes correlações existe um problema se o tratamento de simetrias é considerado, pois nós queremos descrever o sistema com funções de onda simples (produto de estados de partícula única), mas não somos capazes de levar em conta importantes correlações entre nucleons com funções de onda simples se queremos, ao mesmo tempo, o comportamento adequado de simetria. Por exemplo, usando um produto de funções de onda planas certamente não será possível descrever as fortes correlações entre os nucleons que produzem sua aglomeração em núcleos finitos. Tais correlações podem ser descritas por um campo médio (por exemplo, modelo de camadas) e o produto de estados com funções de onda desse campo médio nos dá uma descrição mais razoável de várias propriedades nucleares, no entanto conseguimos isso às custas da quebra da simetria translacional.

### 1.3 Interações nucleon-nucleon

A escolha da interação tem um papel fundamental pois é ela que introduzirá muitas das correlações que podem ser impostas ao sistema. A nossa escolha por interações efetivas se deve a estas serem descritas por potenciais simples com poucos parâmetros fenomenológicos, que são mais simples em comparação com os potenciais realísticos, e que também são válidos numa ampla região de massa; em [1] pode-se encontrar uma discussão sobre potenciais realísticos e efetivos.

Os potenciais efetivos são definidos com uma forma radial simples, determinando - se suas intensidades ou parâmetros de modo que a estrutura nuclear possa ser corretamente descrita. Exemplos: potenciais de Yukawa, somas de gaussianas, deltas entre outras. Todas elas ilustram aspectos de interações nucleon-nucleon de curto alcance no núcleo [1, 2].

Uma das características particularmente interessantes deste tipo de potencial é que, em geral, os elementos de matriz de dois corpos podem ser calculados em forma analítica usando funções de onda de partícula independente. Simultaneamente, como se tem a necessidade de escrever também corretamente propriedades nucleares médias, a força correspondente deve estabelecer corretamente a

propriedade de saturação, o que não é necessário para a descrição dos espectros de excitação do núcleo com alguns nucleons de valência; sua determinação também fixa a região de massa onde pode-se usar essa força.

As forças efetivas nucleon-nucleon são parametrizadas com um número relativamente pequeno de parâmetros, para serem válidas numa região de massa. Com a intenção de simular o efeito do meio nuclear também se adiciona uma contribuição geral no hamiltoniano que inclui forças de três corpos, ou seja,

$$H(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \sum_{i=1}^A h(\vec{r}_i) + \sum_{i \neq j=1} V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \sum_{i \neq j \neq k=1} V(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k). \quad (1.7)$$

O problema de se levar em conta apropriadamente a interação entre os nucleons quando eles estão rodeados de outros nucleons (meio nuclear) é, na realidade, bem complexo. Assim, percebe-se a necessidade de se trabalhar com métodos aproximativos como a utilização de forças separáveis, forças que podem ser representadas como produtos nos quais cada fator atua sobre uma só partícula, por exemplo.

Como foi mostrado, existem vários aspectos que poderiam ser estudados mas, em face ao exposto, e em conexão com o problema das correlações, nos restringiremos a uma aspecto da estrutura nuclear, as distribuições de momentos e densidades nucleares.

De modo mais específico, podemos agora nos concentrar na abordagem que usamos nessa dissertação. Dentre os métodos teóricos usados para a obtenção da densidade nuclear e distribuição de momentos, pode-se considerar o Método de Coordenadas Geradoras (MCG). Essa técnica de abordagem de sistemas nucleares tem como objetivo primário a descrição de movimentos nucleares coletivos. No capítulo 2 apresentaremos uma breve descrição geral do MCG que nos permitirá a construção de funções de onda de muitos corpos correlacionados. No capítulo 3 iremos apresentar a aplicação do MCG, ou seja, iremos apresentar a interação que usaremos, determinar quantidades como os núcleos do operador de superposição e de energia, que são quantidades importantes para o MCG, para então, no capítulo 4, desenvolvermos os cálculos específicos para a determinação das densidades espaciais e de momentos entre outras quantidades. As densidades e distribuições de momentos nucleares obtidas com o método variacional usual para o estado fundamental não incorporam correlações suficientes, ao serem comparadas com os resultados experimentais para espalhamento elástico elétron - núcleo, pois apresentam grandes diferenças na região dos altos momentos transferidos; essa discrepância aponta para a necessidade de um tratamento mais detalhado que leve em conta mais correlações nos sistemas nucleares[3]. Uma das maneiras de fazer isso é pelo uso do próprio MCG. Os efeitos desse tratamento serão ilustrados com exemplos específicos medi-

---

ante a aplicação direta ao caso de nosso interesse. Para os cálculos será feito o uso da interação efetiva de Skyrme que além de ser uma interação efetiva que fornece uma boa descrição de propriedades nucleares, do ponto de vista prático facilita os cálculos de nosso interesse. Os resultados obtidos com o MCG serão comparados com o método variacional e também com dados experimentais. Por fim no capítulo 5 apresentaremos as conclusões.

## Capítulo 2

### Método das Coordenadas Geradoras

#### 2.1 Aspectos Gerais

O Método de Coordenadas Geradoras (MCG) foi originalmente desenvolvido no contexto de Física Nuclear para a descrição de movimentos coletivos no núcleo [4, 5] e é a esse caso que iremos nos ater, embora o método também tenha sido adaptado e usado para estudar reações nucleares [6] e aplicado também em física molecular [7, 8].

O MCG é baseado numa descrição variacional do sistema que se quer estudar. A função de onda de muitos corpos, a função de onda tentativa do método, é descrita pelo ansatz de Griffin-Wheeler [4, 5]

$$\Psi(\vec{\mathbf{r}}) = \int d\alpha f(\alpha) \Phi(\vec{\mathbf{r}}, \alpha), \quad (2.1)$$

onde  $\Psi(\vec{\mathbf{r}})$  é dependente somente das coordenadas das partículas, e, nesse sentido,  $\vec{\mathbf{r}}$  representa todas as coordenadas de todas as partículas do sistema (coordenadas espaciais e, se for o caso, também de spin e isospin). Nesse ponto as idéias principais aparecem,  $\Phi(\vec{\mathbf{r}}; \alpha)$  é uma função de onda de muitos corpos construída usando-se funções de partícula única, geradas por um potencial auxiliar parametrizado por  $\alpha$ , a coordenada geradora. Há que se observar que esta já é uma forma simplificada de um ansatz mais geral proposto também por Griffin e Wheeler [5] que, a saber, é

$$\Psi(\vec{\mathbf{r}}) = \int d\alpha f(\alpha) F(\vec{\mathbf{r}}; \alpha) \Phi(\vec{\mathbf{r}}; \alpha). \quad (2.2)$$

Essa expressão, mais geral, possibilita a inclusão de correlações adicionais como, por exemplo, as correlações associadas ao centro de massa, na função de onda do sistema, e se constitui também numa maneira de relacionar o MCG com outros métodos de tratar movimentos coletivos, como mostrado em [5]. A escolha usual feita na literatura considera  $F(\vec{\mathbf{r}}; \alpha) = 1$ . Apesar de seguirmos esse padrão na exposição inicial mostraremos posteriormente que uma escolha especial para  $F(\vec{\mathbf{r}}; \alpha) \neq 1$  no

ansatz (2.2) nos permitirá extrair o centro de massa sem alterar significativamente a aplicação do método.

A função de onda de muitos corpos  $\Phi(\vec{r}; \alpha)$  é considerada, em geral, determinantal, ou seja, é montada usando-se determinantes de Slater

$$\Phi(\vec{r}, \alpha) = \det\{\phi_i(\vec{r}_j; \alpha)\}, \quad (2.3)$$

com  $i$  indicando o estado,  $j$  a partícula e  $\phi_i(\vec{r}_j; \alpha)$  a função de onda de partícula única a ser escolhida. Para graus de liberdade de movimentos nucleares coletivos associados a tamanho e/ou forma, o parâmetro  $\alpha$  nas funções de onda de partícula única  $\phi(\vec{r}, \alpha)$  é o parâmetro que está associado ao tamanho e/ou forma do potencial auxiliar, ou seja, para cada valor de  $\alpha$  teremos um potencial com tamanho e/ou forma diferente e conseqüentemente as funções de onda provenientes da solução deste potencial refletirão essas mudanças. A escolha de uma forma determinantal para a função de onda tentativa, apesar de não ser a única maneira de se escrever uma função de onda de muitos corpos, é muito conveniente, pois uma função de onda determinantal inclui naturalmente o princípio de exclusão de Pauli e também possui propriedades de simetria que podem ser de grande valia em cálculos. Estas propriedades são bem apresentadas por D.M. Brink em[9].

O ansatz de Griffin-Wheeler (2.1) é uma superposição contínua (em alguns casos pode ser uma superposição discreta) dos determinantes  $\Phi(\vec{r}; \alpha)$ , onde  $f(\alpha)$ , a função peso, determina o quanto cada  $\Phi(\vec{r}; \alpha)$ , caracterizado por um valor de  $\alpha$ , entra na composição que caracteriza a função de onda final,  $\Psi(\vec{r})$ .

A determinação de  $f(\alpha)$  é um ponto importante do MCG. Aqui entra a característica variacional do método, já que como  $f(\alpha)$  não é conhecida a priori, devemos determiná-la exigindo que o funcional da energia seja um extremo (mínimo) com respeito a variações de  $f(\alpha)$

$$\frac{\delta \langle H \rangle}{\delta f(\alpha)} = 0, \quad (2.4)$$

onde  $H$  é a hamiltoniana microscópica do sistema.

A aplicação dessa exigência, utilizando-se a eq. (2.1), nos dá a equação integral conhecida na literatura como equação de Griffin-Wheeler [5]

$$\int [H(\alpha, \alpha') - EN(\alpha, \alpha')] f(\alpha') d\alpha' = 0, \quad (2.5)$$

onde o núcleo do operador energia  $H(\alpha, \alpha')$  e o núcleo do operador superposição  $N(\alpha, \alpha')$ , calculados para o sistema nuclear de interesse, são dados por

$$H(\alpha, \alpha') = \langle \Phi(\vec{r}; \alpha) | H | \Phi(\vec{r}; \alpha') \rangle, \quad (2.6)$$

sendo  $H$  a hamiltoniana microscópica de muitos corpos escolhida previamente e

$$N(\alpha, \alpha') = \langle \Phi(\vec{r}; \alpha) | \Phi(\vec{r}; \alpha') \rangle, \quad (2.7)$$

respectivamente. As funções  $N(\alpha, \alpha')$  e  $H(\alpha, \alpha')$  possuem também a propriedade de hermiticidade

$$\begin{aligned} N(\alpha, \alpha') &= N^*(\alpha', \alpha) \\ H(\alpha, \alpha') &= H^*(\alpha', \alpha). \end{aligned} \quad (2.8)$$

A resolução da equação (2.5), além de fornecer a melhor função peso  $f(\alpha)$  variacional que podemos obter, nos fornece uma melhor função de onda de muitos corpos e também dá, de maneira natural, as energias do sistema associadas ao movimento coletivo de nosso interesse, o que torna o método muito interessante de se trabalhar pois as energias do sistema geralmente são quantidades de interesse por permitirem a comparação com os valores experimentais. Porém, são poucos os casos em que a equação de Griffin-Wheeler possui solução analítica, obrigando-nos a encontrar a solução utilizando métodos numéricos, tendo o devido cuidado para não deixar que erros inerentes à resolução numérica mascarem os resultados. Uma discussão sobre isso é apresentada em [10]. Um exemplo onde se pode observar a solução analítica é o caso chamado de overlap gaussiano/kernel quadrático [5], onde a função de superposição é considerada como

$$N(\alpha, \alpha') = e^{s(\alpha - \alpha')^2} \quad (2.9)$$

e o núcleo do operador de energia têm a forma

$$H(\alpha, \alpha') = N(\alpha, \alpha') \left( a_0 + \frac{1}{2} a_1 (\alpha + \alpha')^2 + \frac{1}{2} a_2 (\alpha - \alpha')^2 \right); \quad (2.10)$$

nesse caso a solução da equação de Griffin-Wheeler é feita com uma função tentativa para a  $f(\alpha)$  do tipo

$$f(\alpha') = e^{-\frac{\alpha'^2}{2a^2}} \quad (2.11)$$

onde  $a$  é uma constante a ser determinada. Porém, a solução de (2.5) exige um valor real de  $a$  para que exista uma solução aceitável para  $f(\alpha)$ .

O principal problema, contudo, é o fato de  $f(\alpha)$  muitas vezes não ter um comportamento fisicamente aceitável, i.e.,  $f(\alpha)$  pode divergir, pois o exemplo acima é um dos poucos caso onde a solução existe. Estas divergências ocorrem basicamente devido ao fato do ansatz, eq. (2.1), gerar um espaço de funções de onda que exigem um comportamento anômalo de  $f(\alpha)$  em virtude dos pequenos valores

das normas de alguns determinantes de Slater. É possível solucionar esse problema usando o procedimento proposto por Piza e Passos [11, 12] que basicamente consiste na construção de uma representação ortogonal no subespaço coletivo a partir da diagonalização da função de superposição, o que permite, em princípio, diagonalizar a hamiltoniana de muitos corpos nesse subespaço. Para que esse novo formalismo seja implementado o núcleo do operador de superposição deve ser auto-adjunto (ou seja, positivo e limitado); ocorre que em muitos casos a função de superposição recai nessa categoria, o que permite o uso do teorema espectral da análise funcional que garante a diagonalização da mesma [11, 12]. Nesses caso, procura-se então a transformação que diagonaliza o núcleo do operador de superposição

$$\int U_{x'}^\dagger(\alpha') N(\alpha, \alpha') U_x(\alpha) d\alpha d\alpha' = \Lambda(x) \delta(x - x'), \quad (2.12)$$

com

$$\int U_{x'}^\dagger(\alpha) U_x(\alpha) d\alpha = \delta(x - x') \quad (2.13)$$

e

$$\int U_x^\dagger(\alpha) U_x(\alpha') dx = \delta(\alpha - \alpha'), \quad (2.14)$$

onde  $\Lambda(x)$  é o espectro do operador  $N(\alpha, \alpha')$ .

Podemos escrever a projeção do vetor  $|\Psi\rangle$ , onde  $\Psi(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \Psi \rangle$ , gerado pelo ansatz de Griffin-Wheeler, na direção do estado gerador  $|\alpha\rangle \equiv |\Phi(\alpha)\rangle$ , onde  $\langle \vec{r} | \alpha \rangle = \langle \vec{r} | \Phi(\alpha) \rangle$ ,

$$\langle \alpha | \Psi \rangle = \int \langle \alpha | \alpha' \rangle f(\alpha') d\alpha' \equiv \int N(\alpha, \alpha') f(\alpha') d\alpha', \quad (2.15)$$

e como (2.12) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\int \frac{U_x^\dagger(\alpha)}{\sqrt{\Lambda(x)}} \langle \alpha | \alpha' \rangle \frac{U_{x'}(\alpha')}{\sqrt{\Lambda(x')}} d\alpha d\alpha' = \delta(x - x'), \quad (2.16)$$

então as funções ortonormais no subespaço coletivo são definidas como

$$g(x) \equiv \langle x | \Psi \rangle = \int \frac{U_x^\dagger(\alpha)}{\sqrt{\Lambda(x)}} \langle \alpha | \Psi \rangle d\alpha = \sqrt{\Lambda(x)} \int U_x^\dagger(\alpha) f(\alpha) d\alpha. \quad (2.17)$$

Estas possuem um inverso formal

$$f(\alpha) = \int \frac{g(x)}{\sqrt{\Lambda(x)}} U_x(\alpha) dx, \quad (2.18)$$

que, como podemos ver, nos aponta para o fato que quando  $\Lambda(x) \rightarrow 0$ ,  $f(\alpha)$  divergirá. Com este formalismo podemos reescrever a equação (2.5) como

$$\int [\langle x | H | x' \rangle - E \delta(x - x')] g(x') dx' = 0, \quad (2.19)$$

sendo  $\langle x | H | x' \rangle$  o núcleo do operador de energia, definido no subespaço coletivo, e  $g(x)$  tem como argumento uma boa coordenada coletiva, no sentido que os vetores  $|x\rangle$

$$|x\rangle = \int \frac{U_x(\alpha')}{\sqrt{\Lambda(x)}} |\alpha'\rangle d\alpha' \quad (2.20)$$

satisfazem as condições de ortonormalidade, eq. (2.16).

Uma discussão mais completa e ampla sobre o método da coordenadas geradoras, como por exemplo aquele que inclui a consideração de  $\alpha$  como um parâmetro complexo pode ser encontrado em [1, 6]. Na discussão apresentada aqui e no desenvolvimento do nosso trabalho  $\alpha$  é considerada como um parâmetro real.

## Capítulo 3

### Aspectos preliminares dos cálculos da densidade para o ${}^4He$

Até agora discutimos características gerais do MCG e comentamos brevemente sobre o nosso objetivo de estudo. Neste capítulo iremos discutir a aplicação do MCG a aspectos preliminares dos cálculos para o  ${}^4He$ , como a escolha das funções de onda e hamiltoniana, e a determinação de  $N(\alpha, \alpha')$  e  $H(\alpha, \alpha')$ , já que estamos interessados em descrever algumas propriedades do  ${}^4He$  (um núcleo duplamente mágico,  $Z=N$ ), como a densidade e a distribuição de momentos, por exemplo. Para realizar esse objetivo iremos estudar as ressonâncias gigantes monopolares isoescalares ( $\mathbf{I}^\pi = 0^+$ ). Como esses movimentos coletivos são estados de compressão nuclear e a eles podem ser relacionadas alterações de densidade, podemos então concluir que os modos de respiração nuclear, como também são conhecidos, são um possível bom candidato para se estudar densidades (porém deve ficar bem claro que esta não é a única opção para se estudar densidades [13]).

Devemos discutir um ponto importante que foi ressaltado no capítulo anterior: A escolha das funções de onda de partícula única que serão usadas para a determinação de  $\Psi(\vec{\mathbf{r}})$ . Para o nosso problema usaremos as funções de onda do oscilador harmônico tridimensional, sendo que a nossa escolha por elas se deve ao fato de que essas funções de onda são aproximações razoáveis das soluções do modelo de camadas na região de massa de nosso interesse e, portanto, um bom ponto de partida para o MCG. Porém, também deve ficar claro que esta não é a única escolha possível, pois o poço quadrado poderia também ser utilizado [14]. Nossa escolha por funções de onda do oscilador se deve ao fato destas funções serem bem testadas na literatura fornecendo resultados confiáveis [15].

A coordenada geradora  $\alpha$ , deve estar relacionada, direta ou indiretamente, com o raio, pois a densidade nuclear está relacionada ao movimento coletivo de interesse que consiste basicamente na variação do raio do núcleo. Por este motivo a escolha das funções de onda do oscilador é razoável, pois, além dos motivos apre-

sentados previamente, nós podemos naturalmente associar  $\alpha$  com o raio, de maneira indireta, fazendo a coordenada geradora estar associada ao parâmetro  $b$  do oscilador harmônico, ou seja,  $\alpha \equiv b^{-1}$  e  $b = (\frac{\hbar^2}{Mw})^{\frac{1}{2}}$ .

O uso da interação efetiva nucleon-nucleon de Skyrme é uma boa escolha pois, testada em cálculos de estrutura nuclear, nos dá uma boa descrição das propriedades nucleares médias, tornando essa interação uma boa escolha para a hamiltoniana microscópica do sistema nuclear[16]. Na hamiltoniana usada em nossos cálculos não foi incluído o termo associado a interação spin-órbita que é, em geral, desprezado. O que consideramos foi a inclusão do potencial coulombiano na hamiltoniana microscópica com o intuito de levar em conta as pequenas alterações que essa interação pode proporcionar, sendo que elas normalmente são desprezadas por serem consideradas pequenas se comparadas com a contribuição da interação forte. A nossa hamiltoniana total então é

$$H(r_1, \dots, r_A) = \sum_i^A \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \right) \nabla_i^2 + V_{Skyrme} + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A \frac{e^2}{r_{i,j}}, \quad (3.1)$$

com  $M$  sendo uma massa média do próton e do nêutron e  $A$  o número de partículas do sistema nuclear.

Tendo todos os pontos principais iniciais bem definidos iremos então passar para a parte dos cálculos preliminares onde serão determinados tanto  $N(\alpha, \alpha')$  quanto  $H(\alpha, \alpha')$ , sendo este último objeto alvo de maiores detalhes principalmente na parte dos cálculos que envolvem a interação coulombiana já que a contribuição proveniente do termo de energia cinética, bem como da interação de Skyrme já foram calculadas anteriormente [15] e podem ser usadas diretamente.

### 3.1 O cálculo de $N(\alpha, \alpha')$

Aqui vamos exibir os passos do procedimento já mostrados na literatura. A determinação do operador de superposição se resume ao cálculo, no espaço das configurações, da quantidade [15]

$$N(\alpha, \alpha') = [\det (I_{\mu\nu}(\alpha, \alpha'))]^4 \quad (3.2)$$

onde

$$I_{\mu\nu}(\alpha, \alpha') = \int \phi_\mu^*(\vec{r}, \alpha) \phi_\nu(\vec{r}, \alpha') d\vec{r}. \quad (3.3)$$

Os números quânticos espaciais  $\mu, \nu \equiv \{n, l, m\}$  caracterizam os estados completamente. A expressão analítica para as funções de onda do oscilador harmônico

tridimensional em coordenadas esféricas é [18]

$$\phi_\mu(\vec{r}; \alpha) \equiv \phi_{nlm}(\vec{r}; \alpha) = \sqrt{\frac{2\alpha^3 n!}{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})}} \frac{R_{nl}(r\alpha)}{r\alpha} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (3.4)$$

com

$$R_{nl} = \exp\left(-\frac{r^2\alpha^2}{2}\right) (r\alpha)^{l+1} L_n^{l+\frac{1}{2}}(r^2\alpha^2). \quad (3.5)$$

Lembrando que a função de onda  $\Phi(\vec{r}; \alpha)$  é definida como

$$\Phi(\vec{r}, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det\{\phi_\mu(\vec{r}_j; \alpha)\},$$

com  $j$  indicando a partícula, podemos fazer uso então de propriedades gerais de integrais envolvendo determinantes de Slater [9]. Com  $N(\alpha, \alpha')$  dado por

$$N(\alpha, \alpha') \equiv \langle \alpha | \alpha' \rangle = \left( \det\left\{ \int \phi_\mu^*(\vec{r}, \alpha) \phi_\nu(\vec{r}, \alpha') d\vec{r} \right\} \right)^4, \quad (3.6)$$

e usando uma nova variável definida como

$$\bar{\alpha}^2 = \frac{\alpha^2 + \alpha'^2}{2}, \quad (3.7)$$

obtemos como resolução da integral para o  ${}^4He$  [15]

$$N(\alpha, \alpha') = \left( \frac{\alpha\alpha'}{\bar{\alpha}^2} \right)^6. \quad (3.8)$$

### 3.2 O cálculo de $H(\alpha, \alpha')$

Da mesma forma que na subseção anterior, vamos novamente exibir os passos essenciais do procedimento encontrado na literatura. A hamiltoniana microscópica foi apresentada de maneira geral em (3.1) e para o cálculo do núcleo do operador de energia  $H(\alpha, \alpha')$  precisamos da expressão analítica da interação de Skyrme, que no espaço das configurações tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} V_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = & t_0(1 + x_0 P_\sigma) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \\ & \frac{1}{2} t_1(1 + x_1 P_\sigma) [\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \hat{k} + \hat{k}' \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] + \\ & t_2(1 + x_2 P_\sigma) \hat{k}' \cdot \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \hat{k} + \frac{1}{6} t_3(1 + x_3 P_\sigma) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \rho^\sigma + \\ & iW_0 [\hat{k}' \times \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \hat{k}] \cdot (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde  $t_0, t_1, t_2, t_3, W_0, x_1, x_2, x_3$  e  $\sigma$  são parâmetros e

$$\hat{k} = \frac{1}{2i} (\vec{\nabla}_{r_1} - \vec{\nabla}_{r_2})$$

$$\hat{k}' = \frac{1}{2i}(\vec{\nabla}_{r'_1} - \vec{\nabla}_{r'_2}).$$

A hamiltoniana consiste das contribuições da interação de um corpo e de dois corpos, sendo o termo de energia cinética do primeiro tipo (um corpo) estando os termos de interação coulombiana e  $V_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  no segundo caso. O termo de interação de três corpos presente em  $V_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  se reduz, no caso onde trabalhamos com núcleos  $Z = N$  par, a uma interação de dois corpos dependente da densidade, i.e., o termo proporcional a  $\rho^\sigma$ [16]. O núcleo do operador de energia fica então dividido da seguinte maneira

$$H(\alpha, \alpha') = H_{Cin.}(\alpha, \alpha') + H_{Skyrme}(\alpha, \alpha') + H_{Coulomb}(\alpha, \alpha'), \quad (3.10)$$

e o cálculo para  $H(\alpha, \alpha')$  se faz também usando as propriedades de determinantes de Slater [9]. O cálculo do termo de energia cinética e da parte referente a interação de Skyrme fica [15]

$$H(\alpha, \alpha') = N(\alpha, \alpha') \int H(\vec{r}; \alpha, \alpha') d\vec{r}, \quad (3.11)$$

onde

$$\begin{aligned} H(\vec{r}; \alpha, \alpha') = & \frac{\hbar^2}{2M}T + \frac{3}{8}t_0\rho^2 + \frac{1}{16}(3t_1 + 5t_2)(\rho T + J^2) + \\ & \frac{1}{64}(9t_1 - 5t_2)(\nabla\rho)^2 + \frac{1}{16}t_3\rho^{2+\sigma}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

com as densidades

$$\rho \equiv \rho(\alpha, \alpha'; \vec{r}) = 4 \sum_{\mu}^{A/4} (I^{-1}(\alpha, \alpha'))_{\mu\lambda} \phi_{\lambda}^*(\vec{r}, \alpha) \phi_{\mu}(\vec{r}, \alpha') \quad (3.13)$$

$$T \equiv T(\alpha, \alpha'; \vec{r}) = 4 \sum_{\mu}^{A/4} (I^{-1}(\alpha, \alpha'))_{\mu\lambda} \nabla \phi_{\lambda}^*(\vec{r}, \alpha) \cdot \nabla \phi_{\mu}(\vec{r}, \alpha') \quad (3.14)$$

e

$$\begin{aligned} \vec{J} \equiv J(\alpha, \alpha'; \vec{r}) = & 4 \sum_{\mu}^{A/4} (I^{-1}(\alpha, \alpha'))_{\mu\lambda} [\phi_{\lambda}^*(\vec{r}, \alpha) \nabla \phi_{\mu}(\vec{r}, \alpha') - \\ & \nabla \phi_{\lambda}^*(\vec{r}, \alpha) \phi_{\mu}(\vec{r}, \alpha')], \end{aligned} \quad (3.15)$$

respectivamente.

A utilização de  $\bar{\alpha}$  novamente se mostra muito útil, simplificando o cálculo do núcleo do operador de energia, pois este pode ser escrito somente em função de  $\bar{\alpha}$  com auxílio de

$$\chi(\vec{r}; \alpha, \alpha') = \frac{r^2}{2}(\alpha^2 - \alpha'^2) \quad (3.16)$$

$$\chi(\vec{r}'; \alpha, \alpha') = \frac{r'^2}{2}(\alpha^2 - \alpha'^2). \quad (3.17)$$

Utilizando essas definições obtemos

$$\begin{aligned} H(\vec{r}; \alpha, \alpha') = & \frac{\hbar^2}{2M}[T_0(\vec{r}, \vec{r}) + \rho_0(\vec{r}, \vec{r})[\nabla\chi(\vec{r})]^2] + \\ & \frac{3}{8}t_0\rho_0^2(\vec{r}, \vec{r}) + \frac{1}{16}(3t_1 + 5t_2)\rho_0(\vec{r}, \vec{r})T_0(\vec{r}, \vec{r}) + \\ & \frac{1}{64}(9t_1 - 5t_2)[\nabla\rho_0(\vec{r}, \vec{r})]^2 + \frac{1}{16}t_3\rho_0^{2+\sigma}(\vec{r}, \vec{r}), \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde o índice “0” indica dependência somente com o parâmetro  $\bar{\alpha}$ . Ao efetuarmos a integração da expressão acima, conforme exigido em (3.11), conseguimos obter um resultado analítico devido a forma particular das funções de onda do oscilador harmônico [15]

$$\begin{aligned} \int H(\vec{r}; \alpha, \alpha')d\vec{r} = & \frac{\hbar^2}{2M}2C_1\bar{\alpha}^2 + \frac{3t_0d_0}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\bar{\alpha}^3 + \\ & \left[ \frac{(3t_1 + 5t_2)h_0}{8(2\pi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(9t_1 - 5t_2)g_0}{16(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \right] \bar{\alpha}^5 + \\ & \frac{4t_3f_0}{(\pi\sqrt{3})^3}\bar{\alpha}^6 - \frac{\hbar^2}{2M}2C_1\frac{(\alpha^2 - \alpha'^2)^2}{4\bar{\alpha}^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Na expressão acima foram usadas as constantes definidas pelas integrais

$$\begin{aligned} \int T_0(\vec{r}, \vec{r}; \bar{\alpha})d\vec{r} &= \int \rho((\vec{r}, \vec{r}; \bar{\alpha})r^2d\vec{r} = C_1\bar{\alpha}^2, \\ \int \rho_0^2(\vec{r}, \vec{r}; \bar{\alpha})r^2d\vec{r} &= C_2\bar{\alpha}^3 = \frac{4d_0}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\bar{\alpha}^3, \\ \int \rho_0^{2+\sigma}(\vec{r}, \vec{r}; \bar{\alpha})d\vec{r} &= C_3\bar{\alpha}^{3+3\sigma} = \frac{2^{(3+\sigma)}f_0}{\Gamma(\frac{3}{2})^{(1+\sigma)}\pi^{(1+\sigma)}(2+\sigma)^{\frac{3}{2}}}\bar{\alpha}^{3+3\sigma}, \\ \int [\nabla\rho_0]^2(\vec{r}, \vec{r}; \bar{\alpha})d\vec{r} &= C_4\bar{\alpha}^5 = \frac{4g_0}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\bar{\alpha}^5, \\ \int \rho_0^2(\vec{r}, \vec{r}; \bar{\alpha})T_0(\vec{r}, \vec{r}; \bar{\alpha})d\vec{r} &= C_5\bar{\alpha}^5 = \frac{2h_0}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\bar{\alpha}^5. \end{aligned} \quad (3.20)$$

As constantes  $C_1, d_0, g_0, h_0, f_0$  possuem os valores devidamente tabulados [15]

$$\begin{aligned} C_1 &= 3, \\ d_0 &= 4, \\ g_0 &= 12, \\ h_0 &= 6, \\ f_0 &= 1, \end{aligned} \quad (3.21)$$

e o  $\sigma$  por nós utilizado tem valor 1 em virtude da escolha feita para as famílias particulares da interação de Skyrme que são apresentadas na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Parâmetros de Skyrme

	$t_0[\text{MeV}fm^3]$	$t_1[\text{MeV}fm^5]$	$t_2[\text{MeV}fm^5]$	$t_3[\text{MeV}fm^5]$	$x_0$	$W_0$
SkI	-1057,3	235,9	-100,0	14463,5	0,56	120,0
SkII	-1169,9	586,6	-27,1	9331,1	0,34	105,0
SkIII	-1128,75	395,0	-95,0	14000,0	0,45	120,0
SkIV	-1205,6	765,0	35,0	5000,0	0,05	150,0
SkV	-1248,29	970,56	107,22	0,0	-0,17	150,0
SkVI	-1111,81	271,67	-138,33	17000,0	0,583	115,0

A expressão para  $H(\alpha, \alpha')$  correspondente à interação nucleon-nucleon[15], de Skyrme é então

$$\begin{aligned} \langle \alpha | H | \alpha' \rangle = & \left( \frac{2\alpha\alpha'}{\alpha^2 + \alpha'^2} \right)^6 \left\{ \frac{\hbar^2}{2M} 2C_1 \bar{\alpha}^2 + \left[ \frac{3t_0 d_0 \bar{\alpha}^3}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \right] + \right. \\ & \left. \left[ \frac{(3t_1 + 5t_2)h_0}{8(2\pi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(9t_1 - 5t_2)g_0}{16(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \right] \bar{\alpha}^5 + \right. \\ & \left. \frac{4t_3 f_0}{(\pi\sqrt{3})^3} \bar{\alpha}^6 - \frac{\hbar^2}{2M} 2C_1 \frac{(\alpha^2 - \alpha'^2)^2}{4\bar{\alpha}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.2.1 O cálculo do termo da interação coulombiana

Nesta seção iremos exibir as passagens mais importantes do cálculo para a parte coulombiana do núcleo do operador de energia do  ${}^4\text{He}$ , pois sendo a interação coulombiana de dois corpos isso nos permite fazer uso novamente das propriedades apresentadas em [9] e usadas anteriormente no cálculo da contribuição associada à interação nucleon-nucleon. Assim, o núcleo do operador de energia correspondente também terá sua expressão definida pelo produto do núcleo do operador de superposição e uma integral envolvendo as funções de onda dos prótons,

$$H_c(\alpha, \alpha') = e^2 \left( \frac{\bar{\alpha}^6}{(2\pi(\Gamma(\frac{3}{2})))^2} \right) \langle \alpha | \alpha' \rangle \int \int \frac{\phi_0^2(\vec{r}_1; \bar{\alpha}) \phi_0^2(\vec{r}_2; \bar{\alpha})}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2. \quad (3.23)$$

Lembrando que a função de onda radial para o  ${}^4\text{He}$  é dada por

$$\phi_0(\vec{r}; \bar{\alpha}) = e^{-\bar{\alpha}^2 \frac{r^2}{2}},$$

temos então a integral

$$\int \int \frac{e^{-\bar{\alpha}^2(r_1^2+r_2^2)}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2.$$

Ao fazermos uma mudança de coordenadas, quando então introduzimos as coordenadas de centro de massa e relativas, ficamos com uma integral na forma

$$\int \int \frac{e^{-\bar{\alpha}^2(2R^2+\frac{r^2}{2})}}{r} d^3r d^3R,$$

onde  $\vec{R}$  é a coordenada de centro de massa e  $\vec{r}$  é a coordenada relativa. A resolução desta integral recai em um caso de integração gaussiana

$$\int \int \frac{e^{-\bar{\alpha}^2(2R^2+\frac{r^2}{2})}}{r} d^3r d^3R = \frac{8\pi^2\Gamma(\frac{3}{2})}{2^{\frac{3}{2}}\bar{\alpha}^5}.$$

Voltando então o resultado em (3.23) obtemos

$$H_c(\alpha, \alpha') = e^2 \left( \frac{\bar{\alpha}^6}{(2\pi(\Gamma(\frac{3}{2})))^2} \right) \langle \alpha | \alpha' \rangle \left( \frac{8\pi^2\Gamma(\frac{3}{2})}{2^{\frac{3}{2}}\bar{\alpha}^5} \right), \quad (3.24)$$

que fica

$$H_c(\alpha, \alpha') = \frac{2e^2}{\sqrt{2\pi}} \langle \alpha | \alpha' \rangle \bar{\alpha}. \quad (3.25)$$

Lembrando o que foi visto em (3.8) temos então finalmente

$$H_{Coulomb}(\alpha, \alpha') = \frac{2e^2}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\alpha\alpha'}{\alpha^2} \right)^6 \bar{\alpha} = e_c \left( \frac{\alpha\alpha'}{\alpha^2} \right)^6 \bar{\alpha}, \quad (3.26)$$

onde

$$\frac{2e^2}{\sqrt{2\pi}} \equiv e_c$$

é a constante associada à energia coulombiana.

### 3.3 Mudança de coordenada geradora

A expressão completa para o núcleo do operador de energia, incluindo também a contribuição coulombiana, é

$$\begin{aligned} \langle \alpha | H | \alpha' \rangle = & \left( \frac{2\alpha\alpha'}{\alpha^2 + \alpha'^2} \right)^6 \left\{ \frac{\hbar^2}{2M} 2C_1 \bar{\alpha}^2 + \frac{3t_0 d_0}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \bar{\alpha}^3 + \right. \\ & \left[ \frac{(3t_1 + 5t_2)h_0}{8(2\pi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(9t_1 - 5t_2)g_0}{16(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \right] \bar{\alpha}^5 + \\ & \left. \frac{4t_3 f_0}{(\pi\sqrt{3})^3} \bar{\alpha}^6 - \frac{\hbar^2}{2M} 2C_1 \frac{(\alpha^2 - \alpha'^2)^2}{4\bar{\alpha}^2} + e_c \bar{\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Uma vez tendo tanto  $H(\alpha, \alpha')$  quanto  $N(\alpha, \alpha')$  podemos então partir para a resolução da equação de Griffin-Wheeler (2.5). Porém, devemos lembrar dos possíveis problemas causados pelo eventual comportamento não fisicamente aceitável de  $f(\alpha)$ ; para contornarmos esse problema que  $f(\alpha)$  pode apresentar, devemos utilizar o procedimento proposto por Piza e Passos [11, 12], no qual um dos principais pontos consiste em achar uma transformação unitária que permite a diagonalização do núcleo do operador de superposição. Por outro lado, sabemos que para os casos onde o núcleo de superposição é dependente apenas da diferença (invariância translacional), a transformação unitária recai em uma transformada de Fourier.

Com esta finalidade de adaptarmos nossos cálculos a essa situação, vamos introduzir uma mudança de coordenadas geradoras. Assim, utilizamos a transformação [17]

$$\alpha = \alpha_r e^x, \tag{3.28}$$

sendo  $\alpha_r$  um fator de escala que redefine a origem da nova coordenada geradora, com as unidades e dimensões apropriadas (por escolha, fizemos  $\alpha_r = 1 \text{ fm}^{-1}$ ). Dessa forma,  $N(\alpha, \alpha')$  e  $H(\alpha, \alpha')$  ficam escritos na forma

$$N(\alpha, \alpha') \longrightarrow N(x, x') = \text{sech}^6(x - x')$$

$$\begin{aligned} H(\alpha, \alpha') \longrightarrow H(x, x') = & \text{sech}^6(x - x') [B \text{sech}(x - x') e^{(x+x')} + \\ & C \cosh^{\frac{3}{2}}(x - x') e^{\frac{3}{2}(x+x')} + D \cosh^{\frac{5}{2}}(x - x') e^{\frac{5}{2}(x+x')} + \\ & E \cosh^3(x - x') e^{3(x+x')} + e_c \cosh^{\frac{1}{2}}(x - x') e^{(x+x')}] , \end{aligned} \tag{3.29}$$

onde

$$\begin{aligned} B &= \frac{\hbar^2}{2M} 2C_1 \\ C &= \frac{3t_0 d_0}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \\ D &= \frac{(3t_1 + 5t_2)h_0}{8(2\pi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(9t_1 - 5t_2)g_0}{16(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \\ E &= \frac{4t_3 f_0}{(\pi\sqrt{3})^3} \\ e_c &= \frac{2e^2}{\sqrt{2\pi}} . \end{aligned} \tag{3.30}$$

Esses resultados, exceto a parte dos cálculos para a interação coulombiana, podem ser vistos em [15].

### 3.4 Eliminação de efeitos do centro de massa

Devemos agora iniciar uma discussão sobre a eliminação dos efeitos de centro de massa em nosso sistema.

Podemos extrair a energia associada ao movimento do centro de massa (CM) do núcleo de energia, subtraindo da energia total o valor associado a parte de um corpo de  $\frac{\vec{P}^2}{2MA}$  (onde  $\vec{P}$  é o momento total do sistema e  $A$  o número de massa) pois, para o  ${}^4\text{He}$ , a parte de dois corpos se anula. Esse procedimento leva a uma correção exata para a energia do  ${}^4\text{He}$  e pode ser expresso através da redefinição do parâmetro  $B$  em (3.29) com a inclusão do termo[15]

$$\frac{(A-1)}{A},$$

o que faz  $B$  ficar como segue

$$B = \frac{\hbar^2}{2M} 2C_1 \frac{(A-1)}{A}. \quad (3.31)$$

Porém, com isso não estaríamos eliminando os efeitos de CM que estão também incluídos nas funções de onda. Para eliminarmos esse efeito iremos fazer uso do ansatz mais geral proposto por Griffin e Wheeler (2.2)

$$\Psi(\vec{r}) = \int d\alpha f(\alpha) F(\vec{r}; \alpha, \alpha_0) \Phi(\vec{r}; \alpha),$$

onde  $F(\vec{r}; \alpha, \alpha_0)$  será [19]

$$F(\vec{r}; \alpha, \alpha_0) = \exp[-2(\alpha_0^2 - \alpha^2)\vec{R}^2], \quad (3.32)$$

com  $\alpha_0$  um parâmetro fixo. Esta escolha faz com que a parte radial da função de onda no ansatz de Griffin-Wheeler fique escrita como

$$F(\vec{r}; \alpha, \alpha_0) \Phi(\vec{r}; \alpha) = N \exp\left(-\alpha^2 \sum_{i=1}^4 \frac{\vec{r}_i^2}{2}\right) \exp[-2(\alpha_0^2 - \alpha^2)\vec{R}^2]. \quad (3.33)$$

Se usarmos a expressão explícita para a coordenada de CM

$$\vec{R} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \vec{r}_i, \quad (3.34)$$

das coordenadas intrínsecas

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{R} \quad (3.35)$$

e lembrando que as coordenadas intrínsecas devem satisfazer a condição

$$\sum_{i=1}^4 \vec{\rho}_i = 0, \quad (3.36)$$

nós teremos um novo ansatz inicial para a parte radial separado em duas contribuições

$$\langle \vec{r} | \alpha, \alpha_0 \rangle = N \exp \left( - \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha^2 \vec{\rho}_i^2}{2} \right) \exp(-2\alpha_0^2 \vec{R}^2) = \langle \vec{r} | \varsigma(\alpha_0) \phi(\alpha) \rangle, \quad (3.37)$$

onde  $N$  carrega a normalização correspondente e  $\alpha_0$  é o parâmetro fixo cujo papel é dar para a contribuição do centro de massa uma largura fixa. O valor por nós utilizado para  $\alpha_0$  é determinado pelo procedimento variacional, ou seja, é o valor de  $\alpha$  associado ao mínimo da parte diagonal do núcleo do operador de energia.

Usando esse novo ansatz para a função de onda do  ${}^4He$  podemos então encontrar um novo núcleo do operador de superposição  $N(\alpha, \alpha')$  e um novo núcleo do operador de energia  $H(\alpha, \alpha')$ .

Assim, temos

$$\langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha') \rangle = \left( \frac{2\alpha\alpha'}{\alpha^2 + \alpha'^2} \right)^{\frac{9}{2}}, \quad (3.38)$$

onde foi feita a integração sobre as coordenadas intrínsecas, levando-se em conta o vínculo dado pela equação (3.36). Lembrando a definição de  $\bar{\alpha}$ , temos então como novo núcleo do operador de superposição

$$N(\alpha, \alpha') = \left( \frac{\alpha\alpha'}{\bar{\alpha}^2} \right)^{\frac{9}{2}}, \quad (3.39)$$

que, fazendo a transformação proposta em (3.28), fica

$$N(x, x') = \text{sech}^{\frac{9}{2}}(x - x'). \quad (3.40)$$

O novo núcleo do operador de energia pode ser encontrado com o uso deste novo ansatz

$$\begin{aligned} \langle \varsigma(\alpha_0) \phi(\alpha) | H | \varsigma(\alpha_0) \phi(\alpha') \rangle &= \langle \varsigma(\alpha_0) \phi(\alpha) | H_{int} | \varsigma(\alpha_0) \phi(\alpha') \rangle + \\ &\langle \varsigma(\alpha_0) \phi(\alpha) | H_{CM} | \varsigma(\alpha_0) \phi(\alpha') \rangle, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde cada termo é escrito da maneira que segue

$$\langle \varsigma(\alpha_0) \phi(\alpha) | H_{int} | \varsigma(\alpha_0) \phi(\alpha') \rangle = \langle \varsigma(\alpha_0) | \varsigma(\alpha_0) \rangle \langle \phi(\alpha) | H_{int} | \phi(\alpha') \rangle \quad (3.42)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \varsigma(\alpha_0) \phi(\alpha) | H_{CM} | \varsigma(\alpha_0) \phi(\alpha') \rangle &= \langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha') \rangle \langle \varsigma(\alpha_0) | H_{CM} | \varsigma(\alpha_0) \rangle \\ &= E_{CM}(\alpha_0) \langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha') \rangle. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Observando (3.42) com mais atenção, vemos que a parte que nos interessa pode ainda ser escrita como

$$\langle \zeta(\alpha_0) | \zeta(\alpha_0) \rangle \langle \phi(\alpha) | \mathbf{H}_{int} | \phi(\alpha') \rangle = \langle \zeta(\alpha_0) \phi(\alpha) | \mathbf{H} | \zeta(\alpha_0) \phi(\alpha') \rangle - E_{CM}(\alpha_0) \langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha') \rangle. \quad (3.44)$$

Agora, se lembrarmos que na expressão original do núcleo do operador de energia trabalhamos com funções de onda determinantis, temos então

$$\langle \zeta(\alpha) | \zeta(\alpha') \rangle \langle \phi(\alpha) | \mathbf{H}_{int} | \phi(\alpha') \rangle = \langle \zeta(\alpha) \phi(\alpha) | \mathbf{H} | \zeta(\alpha') \phi(\alpha') \rangle - \langle \zeta(\alpha) | \mathbf{H}_{CM} | \zeta(\alpha') \rangle \langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha') \rangle, \quad (3.45)$$

mas podemos fazer uso novamente das propriedades determinantis em

$$\langle \zeta(\alpha) \phi(\alpha) | \mathbf{H} | \zeta(\alpha') \phi(\alpha') \rangle = \langle \zeta(\alpha) | \zeta(\alpha') \rangle \langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha') \rangle h(\alpha, \alpha'), \quad (3.46)$$

o que permite escrever (3.45) como

$$\langle \zeta(\alpha) | \zeta(\alpha') \rangle \langle \phi(\alpha) | \mathbf{H}_{int} | \phi(\alpha') \rangle = \langle \zeta(\alpha) | \zeta(\alpha') \rangle \langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha') \rangle h(\alpha, \alpha') - \langle \zeta(\alpha) | \mathbf{H}_{CM} | \zeta(\alpha') \rangle \langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha') \rangle. \quad (3.47)$$

Observando as equações (3.44) e (3.47), ao fazermos  $\langle \zeta(\alpha_0) | \zeta(\alpha_0) \rangle = 1$ , percebemos que o núcleo do operador de energia tem uma nova expressão ,

$$\langle \zeta(\alpha_0) \phi(\alpha) | \mathbf{H} | \zeta(\alpha_0) \phi(\alpha') \rangle = \langle \phi(\alpha) \phi(\alpha') \rangle [h(\alpha, \alpha') + \frac{\langle \zeta(\alpha) | \mathbf{H}_{CM} | \zeta(\alpha') \rangle}{\langle \zeta(\alpha) | \zeta(\alpha') \rangle} + E_{CM}(\alpha_0)], \quad (3.48)$$

que recai no caso apresentado por [19] quando  $E_{CM}=0$ . O termo  $\langle \zeta(\alpha) | \mathbf{H}_{CM} | \zeta(\alpha') \rangle$  quando calculado nos dá [19]

$$\langle \zeta(\alpha) | \mathbf{H}_{CM} | \zeta(\alpha') \rangle = \langle \zeta(\alpha) | \zeta(\alpha') \rangle \frac{6\hbar^2}{2MA} \frac{2\alpha^2\alpha'^2}{\alpha^2 + \alpha'^2}, \quad (3.49)$$

o que permite escrever  $H(\alpha, \alpha')$  como

$$\langle \zeta(\alpha_0) \phi(\alpha) | \mathbf{H} | \zeta(\alpha_0) \phi(\alpha') \rangle = \left( \frac{2\alpha\alpha'}{\alpha^2 + \alpha'^2} \right)^{\frac{9}{2}} [h(\alpha, \alpha') + \frac{6\hbar^2}{2MA} \frac{2\alpha^2\alpha'^2}{\alpha^2 + \alpha'^2} + E_{CM}(\alpha_0)]. \quad (3.50)$$

Se lembramos que o núcleo do operador de energia  $H(\alpha, \alpha')$  original, (3.11), pode ser separado em energia cinética mais a potencial

$$H(\alpha, \alpha') = t(\alpha, \alpha') + v(\alpha, \alpha'),$$

onde a contribuição da energia cinética calculada nos dá

$$t(\alpha, \alpha') = \frac{\hbar^2}{2M} 2a_1 \frac{2\alpha^2 \alpha'^2}{\alpha^2 + \alpha'^2},$$

e que  $2C_1 = 6$  para o  ${}^4He$ , nós temos então

$$\begin{aligned} \langle \zeta(\alpha_0) \phi(\alpha) | H | \zeta(\alpha_0) \phi(\alpha') \rangle = & \left( \frac{2\alpha\alpha'}{\alpha^2 + \alpha'^2} \right)^{\frac{9}{2}} [h(\alpha, \alpha') + \\ & \frac{\hbar^2}{2MA} 2a_1 \left( \frac{4-1}{4} \right) \frac{2\alpha^2 \alpha'^2}{\alpha^2 + \alpha'^2} + v(\alpha, \alpha') + E_{CM}(\alpha_0)], \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde o termo de correção para a energia cinética devido à extração da energia do centro de massa calculado por [15] aparece novamente, mas desta vez saindo consistentemente do procedimento mais geral proposto com a utilização do MCG; isto justifica o que foi feito e nos permite utilizar o parâmetro  $B$  definido em (3.31).

Ao fazermos a transformação proposta em (3.28), o novo núcleo do operador de energia fica

$$\begin{aligned} H(x, x') = & \operatorname{sech}^{\frac{9}{2}}(x - x') [B \operatorname{sech}(x - x') e^{(x+x')} + \\ & C \operatorname{cosh}^{\frac{3}{2}}(x - x') e^{\frac{3}{2}(x+x')} + D \operatorname{cosh}^{\frac{5}{2}}(x - x') e^{\frac{5}{2}(x+x')} + \\ & E \operatorname{cosh}^3(x - x') e^{3(x+x')} + e_c \operatorname{cosh}^{\frac{1}{2}}(x - x') e^{(x+x')} + \\ & E_{CM}], \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde  $E_{CM}$ , agora uma constante, é calculada como

$$E_{CM} = \frac{\hbar^2}{2M} 2C_1 \alpha_0^2. \quad (3.53)$$

A nova expressão para  $H(x, x')$  não é muito diferente da original (3.29), a não ser pelo novo expoente que foi encontrado para o núcleo de superposição e da correção da energia de CM. Agora que temos tanto  $N(x, x')$  quanto  $H(x, x')$  podemos procurar a solução da equação de Griffin-Wheeler (2.5) para então obtermos a densidade.

## Capítulo 4

### Aplicação do MCG para os cálculos das densidades do ${}^4He$

Neste capítulo iremos fazer uso dos conceitos e informações mostrados nos capítulos anteriores. Iremos calcular a densidade espacial nuclear, os orbitais naturais, a distribuição de momentos, fator de forma, e, por fim, apresentar os raios e as energias por nós encontrados.

#### 4.1 Densidade espacial nuclear

O nosso interesse no uso do Método das Coordenadas Geradoras (MCG) para a obtenção da densidade espacial provém do fato que este método permite a consideração de correlações nucleon-nucleon que não se manifestam quando se utiliza somente o método variacional padrão. O MCG não é o único a gerar funções de onda com correlações adicionais às descrições de campo médio mais simples; outros métodos podem ser mencionados como, por exemplo, o de Jastrow [20] e o método de Brueckner, Eden e Francis [21], mas não nos deteremos neles aqui. Assim, uma vez que tenhamos a solução da equação de Griffin-Wheeler (2.5) podemos escrever uma função de onda de muitos corpos que incorpora as correlações permitidas pelo MCG. De posse da  $f(\alpha)$  do estado fundamental (ainda que  $f(\alpha)$  possa apresentar comportamento não aceitável fisicamente a função de onda  $\Psi(\vec{r})$  é bem comportada por causa do núcleo do operador de superposição ) nós calculamos a matriz densidade espacial de um corpo na forma

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \int \Psi^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}, \dots, \vec{r}_A) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}', \dots, \vec{r}_A) \underbrace{d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_A}_{A-1 \text{ integrals}}. \quad (4.1)$$

Agora, se usarmos o ansatz de Griffin-Wheeler

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}, \dots, \vec{r}_A) = \int d\alpha f(\alpha) \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}, \dots, \vec{r}_A), \quad (4.2)$$

temos

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \int \int f(\alpha)^* f(\alpha') N(\alpha, \alpha') \rho(\alpha, \alpha', \vec{r}, \vec{r}') d\alpha d\alpha', \quad (4.3)$$

onde

$$\rho(\alpha, \alpha', \vec{r}, \vec{r}') = \int \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}, \dots, \vec{r}_A; \alpha) \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}', \dots, \vec{r}_A; \alpha') \underbrace{d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_A}_{A-1 \text{ integrals}}. \quad (4.4)$$

O cálculo da densidade foi feito numericamente e, para esse tratamento do problema, implementamos o que foi proposto por Piza e Passos[12, 19]. Para podermos trabalhar numericamente, nós fizemos uma discretização da coordenada geradora  $x$  para trabalharmos com matrizes e vetores. A equação de Griffin-Wheeler após a transformação (3.28), como já dito, é

$$\int [H(x, x') - EN(x, x')] f(x') dx' = 0, \quad (4.5)$$

e assumirá a forma discretizada

$$\sum_{j=1}^n [H(x_i, x_j) - EN(x_i, x_j)] f(x_j) = 0. \quad (4.6)$$

Construímos nossa malha numérica com um número razoável de pontos ( $n=50$ ) de tal forma a conter o mínimo da parte diagonal do núcleo de energia. Ela apresenta estabilidade numérica, não sendo notada nenhuma diferença significativa em nossos cálculos para a densidade e energia quando se mudou a malha para  $n=40$  ou  $n=60$  pontos. De fato, se estivéssemos interessados somente na energia do sistema poderíamos trabalhar com malhas bem menores; tipicamente se obtém estabilidade com  $n \simeq 20$  pontos. Alguns autores na literatura [15] utilizam uma malha numérica com mais pontos,  $n=143$ , para uma descrição mais detalhada da função peso  $f(x)$ .

Se usarmos a notação de matrizes e vetores

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x_i \\ f(x) &\longrightarrow f(x_i) \longrightarrow \tilde{f} \\ H(x, x') &\longrightarrow H(x_i, x_j) \longrightarrow \hat{H} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$N(x, x') \longrightarrow N(x_i, x_j) \longrightarrow \hat{N} \quad (4.8)$$

teremos

$$(\hat{H} - E\hat{N})\tilde{f} = 0. \quad (4.9)$$

Como a resolução direta daquela equação pode apresentar problemas por causa do espectro de valores próprios de  $\hat{N}$ , uma vez que ele pode ter autovalores muito pequenos, o que pode causar problemas, como já discutimos antes, nós não podemos simplesmente inverter  $\hat{N}$  para obter uma equação de valores próprios como é usual. Para contornarmos esse problema, nós fazemos uma transformação das matrizes representando os operadores de forma que diagonalizamos  $\hat{N}$  e truncamos o conjunto das autofunções de  $\hat{N}$  de tal forma a ficarmos com aquelas associadas a autovalores maiores que  $10^{-6}$ . Esse procedimento corresponde a partir da equação (4.6) e considerar  $\hat{U}$ , uma matriz unitária,  $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = 1$ , que, diagonalizando  $\hat{N}$ , transforma a equação (4.6)

$$(\hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} - E \hat{U}^\dagger \hat{N} \hat{U}) \hat{U}^\dagger \tilde{f} = 0. \quad (4.10)$$

Aqui

$$\hat{U}^\dagger \hat{N} \hat{U} = \hat{\Lambda}, \quad (4.11)$$

onde  $\hat{\Lambda}$  é uma matriz diagonal.

Da equação

$$(\hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} - E \hat{\Lambda}) \hat{U}^\dagger \tilde{f} = 0, \quad (4.12)$$

tomando a raiz quadrada da matriz diagonal  $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \hat{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$ , e multiplicando a esquerda por  $\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}$ , obtemos

$$(\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} - E \hat{1}) \hat{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \hat{U}^\dagger \tilde{f} = 0. \quad (4.13)$$

Definindo  $\hat{g} = \hat{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \hat{U}^\dagger \tilde{f}$  e  $\hat{V} = \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{U}^\dagger$ , a transformação é escrita finalmente como

$$(\hat{K} - E \hat{1}) \hat{g} = 0, \quad (4.14)$$

com  $\hat{K} = \hat{V} \hat{H} \hat{V}^\dagger$ . Esta é uma equação de valores próprios usual para  $\hat{g}$ , com um novo núcleo de energia, como indicado pelo método de Piza e Passos [11, 12]. Devemos primeiro resolvê-la para obtermos as  $g$ 's que são as soluções bem comportadas, com os correspondentes  $E$ 's, a partir das quais podemos obter, como um subproduto, as  $f$ 's, que são funções que nos interessam para o cálculo das distribuições, usando a relação  $\tilde{f} = \hat{V}^\dagger \hat{g}$ .

Segue o gráfico de  $\hat{g}$ , que possui um número limitado de pontos devido ao truncamento feito após a diagonalização de  $\hat{N}$ , que nos deixa com um número limitado de pontos. Podemos optar por um número maior de pontos, porém começaremos a ter um aumento significativo no erro numérico [10]. O gráfico de  $\tilde{f}$  possui um

número maior de pontos por estar relacionada com a malha numérica ( $n = 50$  pontos) enquanto a  $g(y)$ , escrita no espaço recíproco da coordenada geradora original, possui um número menor de pontos por ser relacionada com as autovalores que restam após aplicarmos nosso critério de truncamento (descartamos autovalores menores que  $10^{-6}$ ). Já o gráfico de  $g(x)$ , fig. 4.2, possui o mesmo número de pontos que a  $\hat{f}$ , pois é feito no espaço da coordenada geradora original.

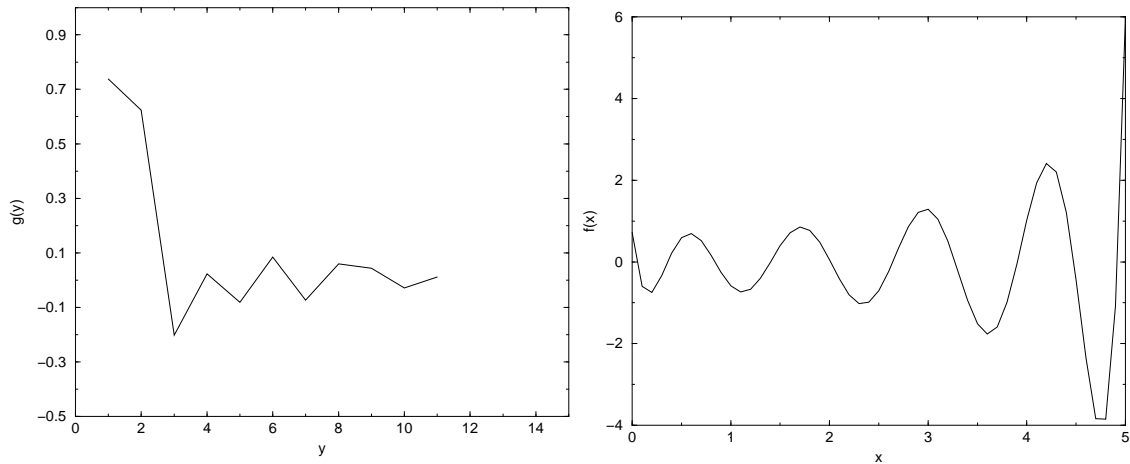


Figura 4.1: Funções  $\hat{g}$  e  $\hat{f}$  para o estado fundamental do  ${}^4\text{He}$  no caso onde é retirado o efeito de centro de massa, com as interações Skyrme III e Coulomb

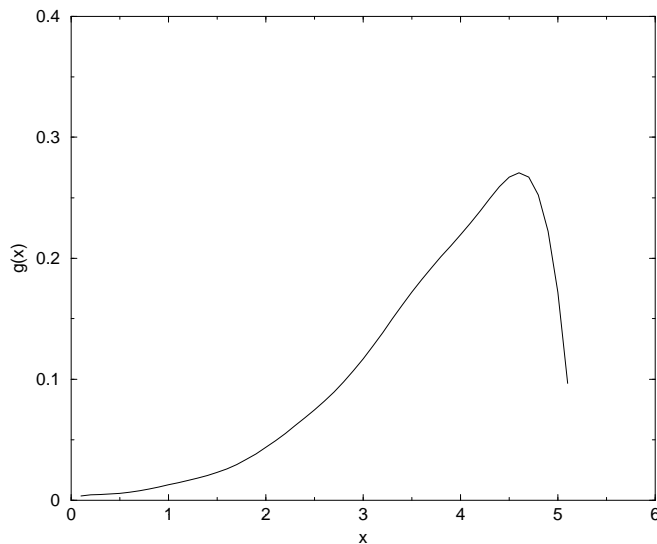


Figura 4.2: Função de onda para o estado fundamental do  ${}^4\text{He}$  no caso onde é retirado o efeito de centro de massa, interações Skyrme e Coulomb

Todos estes cálculos e os intermediários foram feitos utilizando computação

algébrica, em particular utilizamos o Mathematica, a partir de uma versão preliminar [22].

Para podermos calcular a densidade espacial de um corpo, encontramos o equivalente numérico da expressão (4.3), efetuamos a integração numérica sobre as coordenadas geradoras  $\alpha$  e  $\alpha'$  e então montamos uma matriz de  $\vec{r}, \vec{r}'$  com uma malha de pontos montada sobre o intervalo de  $0,0001\text{fm}$  a  $5,0\text{fm}$ , com passo numérico de  $0,1\text{fm}$ . Neste ponto dos cálculos numéricos foi adotado a parte diagonal  $\vec{r} = \vec{r}'$  para que pudéssemos montar então uma tabela com a qual seriam feitos os gráficos da densidade. Os cálculos foram realizados utilizando-se os seis conjuntos diferentes de parâmetros da interação Skyrme. Para cada conjunto foi calculado o núcleo do operador de energia  $H(x, x')$ , o qual foi usado, depois de transformado, na equação (4.14); daí encontramos a energia e então calculamos a função  $g(y)$ , a função  $f(x)$ , a densidade espacial, a distribuição de momentos, fator de forma e raio para cada conjunto de parâmetros. Aqui uma justificativa é necessária: apesar do conjunto de

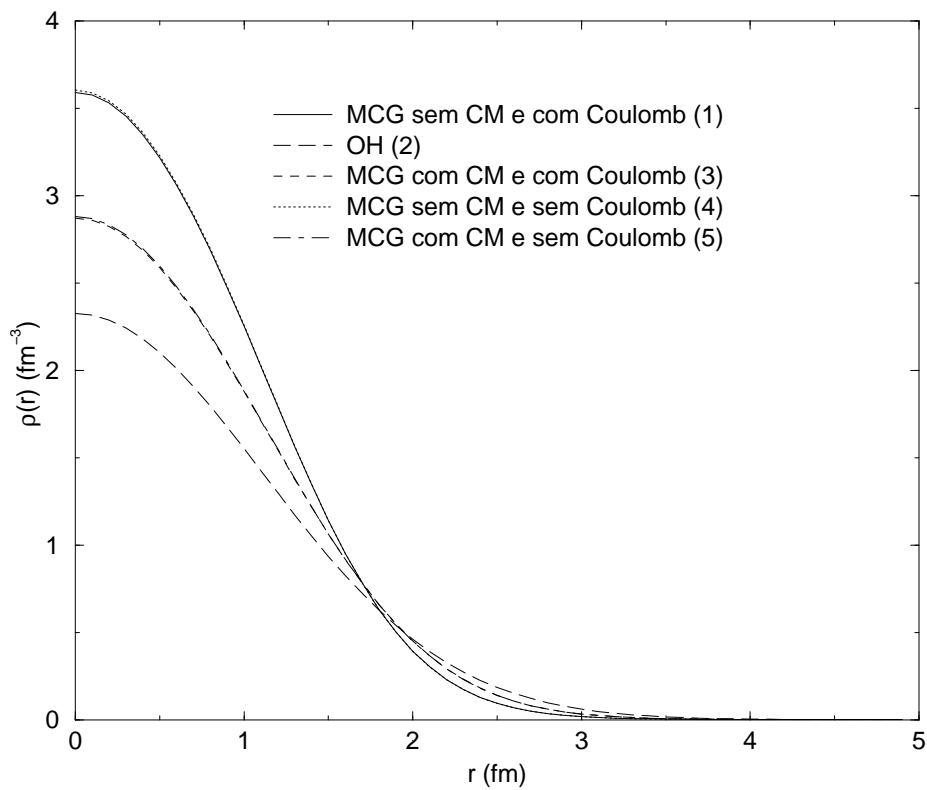


Figura 4.3: Densidade de massa calculada com a interação SkIII com e sem a contribuição coulombiana, normalizada ao número de nucleons do sistema

parâmetros de Skyrme V ter sido utilizado, não apresentaremos nenhum resultado

referente àquele conjunto de parâmetros, pois os resultados não foram satisfatórios, confirmando que esse conjunto de parâmetros não apresenta uma boa descrição para a compressibilidade nuclear, como mostrado por [23], por não apresentar o termo dependente da densidade, ou seja, para essa interação  $t_3 = 0$ . Por outro lado, os parâmetros de Skyrme III foram os quais apresentaram, para este trabalho, o melhor compromisso entre todas as quantidades estudadas. Para as demais interações não há mudanças essenciais. Nos resultados que seguem são apresentados os resultados com a interação Skyrme III com o MCG e com o método variacional para que pudéssemos realizar comparações entre os dois.

Ao estudarmos o gráfico, fig. 4.3, percebemos aspectos que merecem a nossa atenção, como por exemplo, que a densidade proporcionada pelo MCG (em qualquer um dos quatro casos) é bem maior do que a densidade variacional (OH) na região que vai da origem até  $\approx 1,85\text{fm}$ ; isso se deve às correlações nucleon-nucleon dadas pela superposição de determinantes de Slater proporcionadas pelo MCG. Quando são comparados os casos (ambos calculados com o MCG) onde houve a extração de CM, (1) e (4,) com aqueles em que não houve, (3) e (5), percebe-se que efeitos de CM são importantes para sistemas leves, como é sabido. Com relação ao efeito que a interação coulombiana proporciona, os cálculos mostram que é justificada a não inclusão dessa interação na hamiltoniana microscópica em cálculos para núcleos leves, pois quando comparamos os casos onde há a referida interação, (1) e (3), com os casos onde não há, (4) e (5), percebemos um ligeiro aumento da densidade na região central; esse aumento é pequeno, em torno de 0,3%, o que, com certeza, pode ser desprezado.

## 4.2 Orbitais naturais do sistema

A matriz densidade encontrada por nós em (4.3) também manifesta a presença de correlações, através dos termos fora da diagonal principal. Mas qual a vantagem de se utilizar a matriz densidade se tanto essa matriz quanto a função de onda carregam igualmente toda a informação do sistema que é permitida com as correlações imposta pelo MCG e a extração do centro de massa? A vantagem no uso da matriz densidade com relação a função de onda é o fato que a primeira independe da representação e, a diagonalização desta, numa dada representação conveniente, nos permite encontrar os orbitais naturais do sistema nuclear, os  $U_j(\vec{r})$ , auto-estados do operador densidade de tal forma que aquela matriz possa ser decomposta como

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{A} \sum_j^A n_j U_j^*(\vec{r}) U_j(\vec{r}'), \quad (4.15)$$

onde  $A$  é o número de partículas e  $n_j$ , seus auto-valores, são os números de ocupação natural do sistema e respeitam a relação

$$0 \leq n_j \leq 1. \quad (4.16)$$

A matriz que diagonalizamos para obter os autovalores (número de ocupação) e os autovetores (orbitais naturais) é a matriz (4.3). Seguem os três orbitais naturais mais relevantes

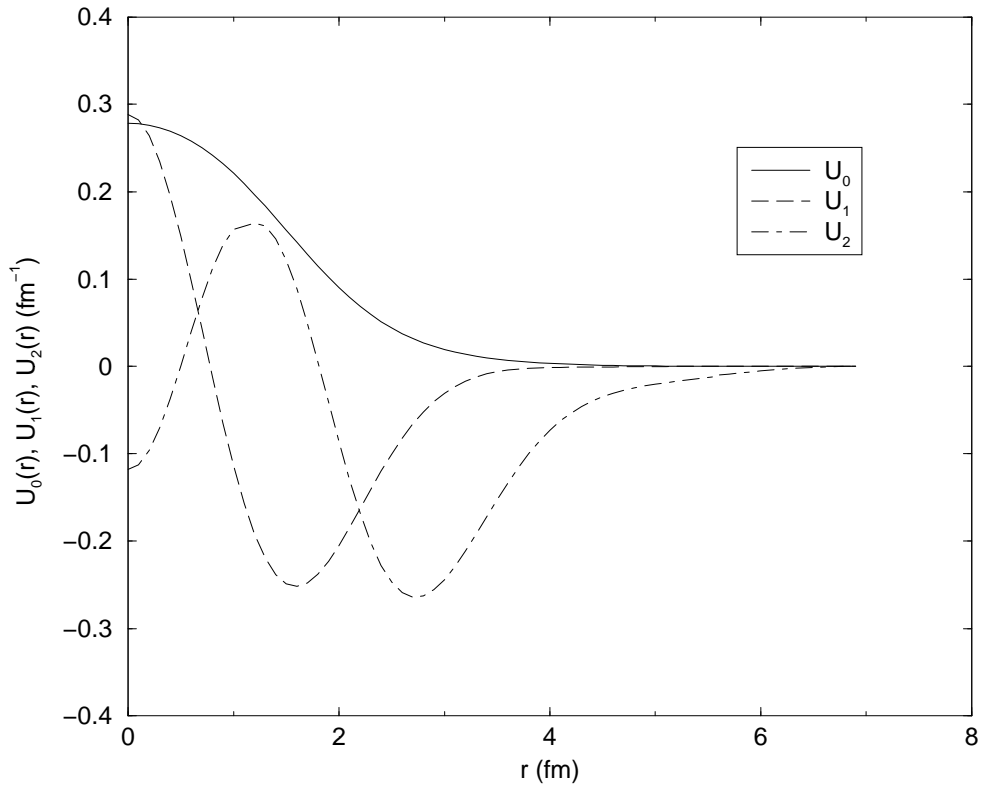


Figura 4.4: Orbitais naturais calculados com as interações SkIII e coulombiana

e as respectivas ocupações para o  ${}^4\text{He}$ .

Tabela 4.1: Orbitais naturais para o  ${}^4\text{He}$

Ocupação		
$U_0$	1s	0.990929
$U_1$	2s	0.008849
$U_2$	3s	0.000221

Percebemos que a matriz densidade, com as correlações proporcionadas pela superposição de determinantes de Slater do Método de Coordenadas Geradoras, nos apresenta como estado dominante do  ${}^4\text{He}$  o estado  $1s$  que praticamente esgota a ocupação dos orbitais naturais mostrando-nos que a descrição do  ${}^4\text{He}$  através de uma função de onda  $1s$  do oscilador harmônico como partida, mais especificamente uma gaussiana, já é boa.

### 4.3 Distribuição de momentos dos nucleons

Em princípio, a função  $\Psi(\vec{r})$ , construída com o MCG, contém uma enorme quantidade de informação sobre o sistema nuclear da qual extraímos, em particular,  $\rho(\alpha, \alpha', \vec{r}, \vec{r}')$ . Como é bem conhecido que não se tem uma boa descrição da distribuição de momentos na região de altos valores de momento [15], com a descrição do MCG usual, podemos esperar que as correlações introduzidas pelo MCG, mais os efeitos da extração de centro de massa, nos permitam melhores resultados para aquela região de altos momentos.

Analogamente ao que foi feito anteriormente para a densidade nuclear, a descrição para a distribuição de momentos utilizando o MCG nos dá

$$n(\vec{k}, \vec{k}') = \int \int f(\alpha)^* f(\alpha') N(\alpha, \alpha') n(\alpha, \alpha', \vec{k}, \vec{k}') d\alpha d\alpha', \quad (4.17)$$

com

$$n(\alpha, \alpha', \vec{k}, \vec{k}') = \int \varphi(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}, \dots, \vec{k}_A; \alpha) \varphi(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}', \dots, \vec{k}_A; \alpha') \underbrace{d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \dots d\vec{k}_A}_{A-1 \text{ integrals}}, \quad (4.18)$$

sendo  $\varphi(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}, \dots, \vec{k}_A; \alpha)$  a transformada de Fourier em  $A$  dimensões de  $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}', \dots, \vec{r}_A; \alpha')$ .

Como nosso objetivo consistia em obter somente  $n(\vec{k})$ , trabalhamos diretamente com a diagonal da matriz  $n(\vec{k}, \vec{k}')$ , que foi achada seguindo o mesmo procedimento numérico usado para a densidade espacial; escreveu-se o equivalente numérico da expressão (4.17), tomando  $\vec{k}=\vec{k}'$  e então efetuando a integração sobre as coordenada geradoras  $\alpha$  e  $\alpha'$ , criando então uma tabela que se inicia em  $k = 0, 0001 \text{ fm}^{-1}$  e termina em  $k = 4, 0 \text{ fm}^{-1}$ , com intervalo de  $0, 1 \text{ fm}^{-1}$ , com a qual foi feito o gráfico.

No gráfico, fig. 4.5, ao fim desta seção comparamos os resultados provenientes dos cálculos do MCG, quando incluímos a interação coulombiana e extraímos o centro de massa e quando usamos o ansatz sem extração do centro de massa e sem a interação coulombiana. Observa-se que no primeiro caso há um aumento da

distribuição, a partir de  $k \cong 1,6 \text{ fm}^{-1}$ , na região de altos momentos, aproximando os resultados obtidos do que é observado experimentalmente. Isso indica que a exclusão dos efeitos de centro de massa no ansatz da função de onda de muitos corpos nos leva a uma melhor descrição para a distribuição de momentos de  ${}^4\text{He}$ . Os efeitos vindos da inclusão da interação coulombiana se mostraram imperceptíveis, pois o gráfico do caso onde havia essa interação e o do caso em que não havia, se superpõem de uma maneira que não se pode perceber a diferença entre eles (as comparações foram feitas usando o ansatz sem os efeitos de centro de massa).

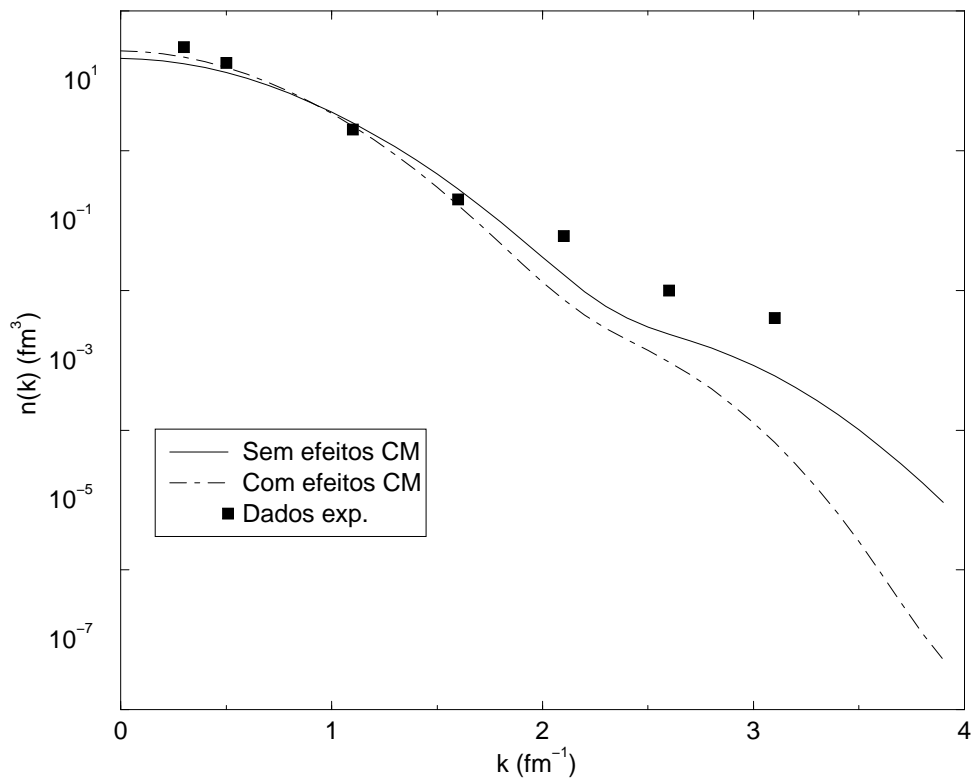


Figura 4.5: Distribuição de momentos para o  ${}^4\text{He}$ , calculada com as interações SkIII e coulombiana; dados experimentais retirados de [14].

#### 4.4 Fator de Forma

O fator de forma é uma quantidade que é muito utilizada para o estudo dos sistemas nucleares por estar relacionado com a densidade, dessa forma nos dando informações sobre a distribuição de matéria/carga no núcleo de uma maneira indireta. Por essa razão, é uma quantidade muito utilizada para comparação entre

dados teóricos e experimentais. A expressão para o fator de forma é [18, 2]

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}, \vec{r}') \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) d\vec{r}, \quad (4.19)$$

onde  $\vec{q}$  é o momento transferido. No nosso caso,  $\rho(\vec{r}, \vec{r}')$  será tomada como  $\rho(\vec{r}, \vec{r}') \equiv \rho(\vec{r}) \equiv 2\rho_{ch}(\vec{r})$ , pois estamos considerando as densidades dos prótons e nêutrons iguais (sabemos que existe uma diferença muito pequena entre elas que não discutiremos aqui [2]). Como temos a matriz  $\rho(\vec{r}, \vec{r}')$ , encontrada anteriormente de maneira numérica, nós implementamos então um algoritmo para efetuarmos essa integração.

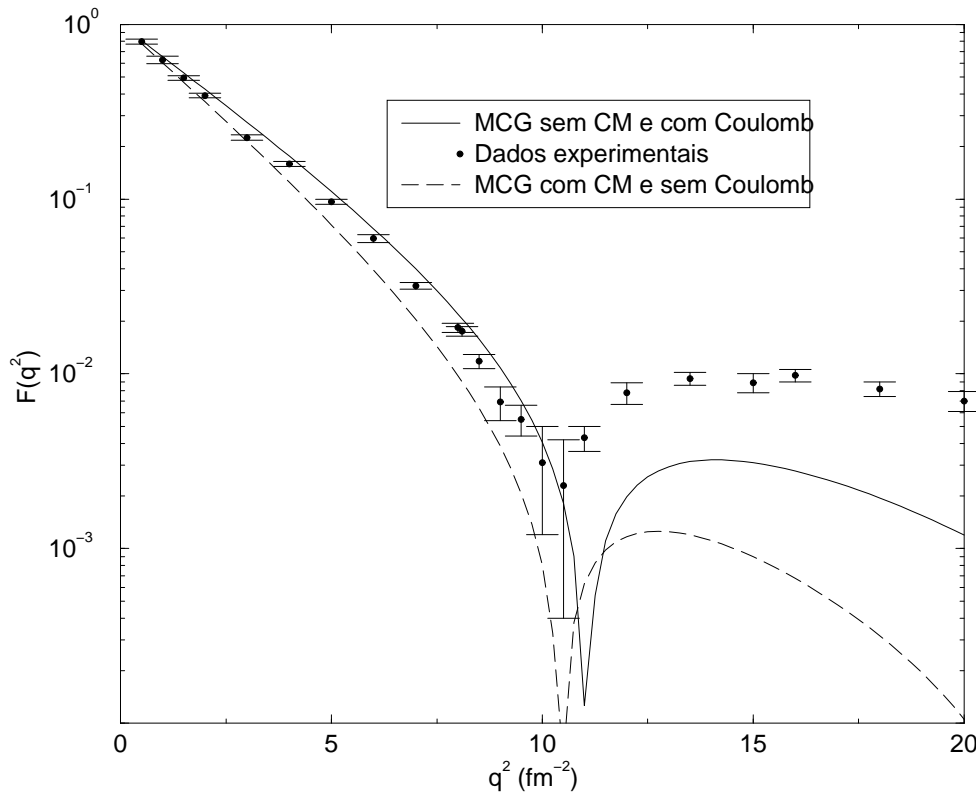


Figura 4.6: Fator de forma para o  ${}^4\text{He}$ , com interação SkIII e coulombiana. As densidades estão normalizadas a um; os dados experimentais foram retirados de [24]

Do gráfico do fator de forma, fig. 4.6, podemos observar, ao compararmos as duas curvas teóricas, a importância das correlações impostas pela extração do centro de massa no ansatz para a função de onda de muitos corpos. Pode-se constatar que a curva associada ao caso no qual se retiraram os efeitos de centro de massa apresenta um aumento na região a partir de  $q^2 \simeq 11 \text{ fm}^{-1}$ , quando comparada ao gráfico associado ao caso onde aqueles efeitos não foram retirados. A comparação entre a curva teórica, obtida sem a extração dos efeitos de centro de massa (linha

tracejada) e os dados experimentais mostra a tendência correta e um acordo razoável até  $q^2 \simeq 10 fm^{-1}$ ; a partir daí há um acentuado desacordo.

Por outro lado, também observamos que o mínimo dos dados experimentais concorda razoavelmente bem com os cálculos do caso onde os efeitos de centro de massa não foram retirados (linha tracejada), em contraste com o outro caso (linha cheia). De fato, a comparação do fator de forma, obtido dos cálculos onde os efeitos de centro de massa foram retirados (linha cheia), com os dados experimentais não é direta, uma vez que as densidades envolvidas não são diretamente comparáveis.

## 4.5 Raios e energias

Nesta seção serão apresentados as energias e os raios por nós encontrados; essas quantidades também podem ser achadas diretamente dos cálculos com o MCG, sendo que a energia do sistema surge naturalmente da resolução da equação de Griffin-Wheeler modificada e transformada em (4.14) e os procedimentos para se achar o raio não fogem, a não ser por tecnicismos do método, do usual em mecânica quântica. A importância que essas duas quantidades possuem, neste contexto, se deve ao fato que elas nos dão uma idéia se a nossa descrição das densidades para  ${}^4\text{He}$  é razoável e consistente, uma vez que em nenhum momento tentamos ajustar essas quantidades. O único ajuste feito corresponde àquele dos parâmetros da interação de Skyrme. Contudo, ele não foi realizado especificamente para o caso de  ${}^4\text{He}$ . Por exemplo, no caso da interação de SkIII foram determinados os parâmetros para  ${}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{40}\text{Ca}$ ,  ${}^{90}\text{Zr}$  e  ${}^{208}\text{Pb}$  com o objetivo de ajustarem os valores corretos da energia de ligação da matéria nuclear (NM) bem como a energia de ligação por nucleon ( $E/A$ ), densidade de equilíbrio  $\rho_0$  e massa efetiva  $m^*$ . Portanto, se tivermos também boas energias e bons raios, além dos bons resultados encontrados para a distribuição de momentos, por exemplo, significa que a nossa proposta para o ansatz do sistema é boa. Para o estudo do raio quadrático médio partimos de

$$\langle \bar{r}^2 \rangle \equiv \frac{\langle \Psi | \bar{r}^2 | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad (4.20)$$

onde devemos lembrar do que foi visto na seção (3.4).

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Psi | \bar{r}^2 | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} &= \frac{\int f^*(\alpha) \langle \phi(\alpha) | \bar{r}^2 | \phi(\alpha') \rangle f(\alpha') \langle \varsigma(\alpha_0) | \varsigma(\alpha_0) \rangle d\alpha d\alpha'}{\int f^*(\alpha) \langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha') \rangle f(\alpha') \langle \varsigma(\alpha_0) | \varsigma(\alpha_0) \rangle d\alpha d\alpha'} \\ &= \frac{\int f^*(\alpha) \langle \phi(\alpha) | \bar{r}^2 | \phi(\alpha') \rangle f(\alpha') d\alpha d\alpha'}{\int f^*(\alpha) \langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha') \rangle f(\alpha') d\alpha d\alpha'} \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde

$$\langle \phi(\alpha) | \vec{r}^2 | \phi(\alpha') \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha\alpha'} \left( \frac{2\alpha\alpha'}{\alpha^2 + \alpha'^2} \right)^{\frac{11}{2}} \quad (4.22)$$

é achado ao usarmos a função de onda intrínseca vista em (3.4) e ao efetuarmos a integração sobre as coordenadas do sistema. Com a expressão (4.21) e (4.22) encontramos os raios tabulados abaixo. O mesmo cálculo pode ser feito sem se retirar os efeitos de CM, nesse caso, porém, a expressão (4.22) se altera somente no índice da potência, que se torna  $5/2$  para o caso onde os efeitos de CM estão presentes. Na tabela abaixo a indica os cálculos feitos com os efeitos de CM na função de onda e b indica os cálculos onde os efeitos de CM foram retirados.

Tabela 4.2: Resultados para a energia e raio rms para o  ${}^4\text{He}$

	SkI		SkII		SkIII		SkIV		SkVI	
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$E_0$	-34.51	-30.82	-31.33	-26.12	-31.53	-27.30	-30.81	-24.73	-32.86	-29.46
$r_0$	1.66	1.32	1.75	1.40	1.74	1.38	1.76	1.42	1.72	1.36
$E_1$	-4.76	11.36	-4.80	10.34	-4.52	10.42	-4.93	10.30	-4.74	10.31
$r_1$	2.69	2.88	2.77	3.01	2.79	3.00	2.78	3.04	2.74	2.94

A tabela acima mostra-nos que existe uma diferença significativa entre os raios e as energias no caso onde não se retirou os efeitos de centro de massa e onde esse efeito foi removido. Nos casos onde não se retirou o CM os dados para o raio estão condizentes com os cálculos encontrados na literatura [14, 15, 25] e com dados experimentais  $\langle r^2 \rangle^{1/2} = 1,696 \text{ fm}$  [26]. Por outro lado, ao observamos os resultados calculados para os raios na situação onde os efeitos de CM são extraídos, os nossos resultados se aproximam dos resultados experimentais obtidos quando se retira a contribuição do tamanho finito do próton [25]. A saber, os valores experimentais são, nesse caso,  $r = 1,47 \pm 0,02 \text{ fm}$  [25, 27] e  $E = -28,20 \text{ MeV}$ . Vale a pena chamar atenção para o fato que os cálculos feitos com SkIII foram os que apresentaram o melhor balanço entre raio e energia, quando comparados com os resultado experimentais. Porém, novamente chamamos a atenção para o fato de não termos tentado ajustar os valores da energia intrínseca ajustando a energia de centro de massa, pois de fato utilizamos apenas o critério pelo qual  $\alpha_0$  assume o valor mínimo da energia encontrado pelo método variacional (seção 3.4). O procedimento que desenvolvemos para o cálculo numérico nos possibilitou também acharmos as energias  $E_1$  e os raios

$r_1$  para o primeiro estado excitado. Como é percebido na tabela (4.2) estes valores também se alteram significativamente quando comparados o caso onde se retirou o efeito de CM e o caso onde esse efeito não foi retirado. Percebe-se também que  $r_1$  segue um padrão inverso ao de  $r_0$ . Enquanto  $r_0$  para o caso sem CM é menor que o do caso com CM, o  $r_1$  do primeiro é maior que o do segundo para qualquer caso.

## Capítulo 5

### Conclusões

O nosso objetivo com esta dissertação foi o estudo dos efeitos que correlações nucleon-nucleon, proporcionadas pela superposição de determinantes de Slater, como introduzidas pelo ansatz do MCG, causam na descrição da densidade nuclear do  ${}^4\text{He}$  (não só da densidade espacial e sim também de outras quantidades como, por exemplo, a distribuição de momentos). Contudo, o MCG permite que incluamos naturalmente outros vínculos que nos permitem incluir outras correlações além das correlações proporcionadas pela superposição de determinantes de Slater. Neste trabalho, os vínculos extras impostos ao ansatz de Griffin-Wheeler (2.2) nos levam a extração dos efeitos de centro de massa da função de onda de muitos corpos, o que permite discriminar resultados sensíveis àquelas correlações. A descrição das densidades do  ${}^4\text{He}$  no contexto do MCG fez-nos automaticamente escolher a descrição da ressonância gigante isoescalar monopolar, à qual associamos uma variação na densidade; circunstancialmente este é também um fenômeno ao qual a aplicação do MCG se faz de maneira direta (capítulo 3). Com a escolha do movimento coletivo, precisamos escolher a hamiltoniana microscópica para descrever o sistema de maneira apropriada. Para nossos cálculos usamos a interação de Skyrme e a interação coulombiana e não foi utilizada a interação spin-orbita (capítulo 3).

O que pudemos observar em nossos resultados foi a importância que o efeito de centro de massa possui em sistemas leves, no nosso caso o  ${}^4\text{He}$ , pois as alterações causadas pela exclusão desses efeitos nos levou a resultados interessantes já que, por exemplo, tivemos um bom resultado na descrição da distribuição de momentos (seção 4.3), que apresentou, na região de altos momentos, um ganho considerável em comparação com a descrição na qual não se levam em conta os efeitos de centro de massa, sendo que existe um bom compromisso de resultados com outras quantidades do sistema, energia e raio por exemplo (seção 4.5). Quanto aos resultados obtidos para a densidade, fator de forma e energia, estes confirmam a importância das correlações de centro de massa que foi observado na distribui-

ção de momentos. Com relação ao raio do  ${}^4\text{He}$ , um ponto merece ser destacado: nossos resultados, quando extraímos os efeitos de centro de massa, estão próximos do resultado experimental no caso em que se elimina a contribuição do tamanho finito do próton. Quanto ao primeiro estado excitado, nossos resultados mostram que eles se encontram em energia acima das outras previsões teóricas. Isto significa que a energia de excitação do primeiro estado da ressonância gigante de monopolo é maior do que era prevista, ou seja, é necessária mais energia para excitar o primeiro estado dessa ressonância do que os cálculos anteriores previram [15].

O efeito que a interação coulombiana mostrou ter sobre as propriedades do  ${}^4\text{He}$ , quando observadas a densidade e a distribuição de momentos, nos casos onde se utilizou essa interação e o caso onde não foi utilizada, se mostrou irrelevante. Com a correção observada na densidade na ordem de 0,3%, uma observação menos cuidadosa do gráfico (4.3) poderia deixar despercebida essa correção e para o caso da distribuição de momentos a dita correção é imperceptível, não sendo observada nenhuma alteração nas regiões de altos momentos, onde o efeito da presença da interação coulombiana poderia ser perceptível. Mas devemos lembrar que a correção de quase 1 MeV nos cálculos da energia para o estado fundamental do  ${}^4\text{He}$  proporcionada por essa interação é algo que não deve ser desprezada.

E como consideração final notamos que poderia ser aplicado para distribuição de momentos o mesmo procedimento usado no estudo da densidade, ou seja, escrever a matriz  $n(\vec{k}, \vec{k}')$  e diagonalizar essa matriz. Dessa maneira, poderíamos encontrar os orbitais naturais no espaço dos momentos. Assim, tendo mais informações sobre o sistema, ao estudarmos os orbitais naturais e suas ocupações, poderíamos compreender quais as limitações impostas pelas correlações para a descrição da região de altos momentos.

## Referências

- [1] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag (1980).
- [2] S. S. M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Prentice-Hall International, E.U.A., 1990.
- [3] A. N. Antonov, P. E. Hogdson and I. Zh. Petkov, *Nucleon Correlation in Nuclei*, Springer Verlag, Berlin, 1993.
- [4] D. Hill and J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* 89 (1953) 1102.
- [5] J. J. Griffin and J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* 108 (1957) 311.
- [6] C. W. Wong, *Phys. Reports* 5 (1974) 283.
- [7] L. Lathouwers, *J. Phys. B: Atom. Molec. Phys.* 12 (1979) 3.
- [8] L. Lathouwers and P. Van Leuven, *Chem. Phys. Lett.* 67 (1979) 436.
- [9] D. M. Brink, *Int. School of Physics "E. Fermi". Course 36*. ed. C. Bloch, Academic Press, New York (1966).
- [10] D. Galetti and A. F. R. de Toledo Piza, *Phys. Rev.* C17 (1978) 774.
- [11] A. F. R. de Toledo Piza and E. J. V. Passos, *Nuovo Cimento* B45 (1978) 1.
- [12] A. F. R. de Toledo Piza, E. J. V. de Passos, D. Galetti, M. C. Nemes and M. M. Watanabe, *Phys. Rev.* C15 (1977) 1477.
- [13] A. Kolomiets, V. M. Kolomiets and S. Shlomo, *Phys. Rev.* C59 (1999) 3139.
- [14] A. N. Antonov, C. V. Christov, E. N. Nikolov, I. Zh. Petkov and I. S. Bonev, *Nuovo Cimento* A103 (1990) 9.
- [15] H. Flocard and D. Vautherin, *Nucl. Phys.* A264 (1976) 197.
- [16] D. M. Brink and D. Vautherin, *Phys. Rev.* C5 (1972) 626.

- 
- [17] J. J. Griffin, Phys. Rev. 108 (1957) 328.
- [18] K. L. G. Heyde, *The Nuclear Shell Model*, Springer-Verlag (1993).
- [19] D. Galetti and A. F. R. de Toledo Piza, Phys. Rev. C24 (1981) 2311.
- [20] R. Jastrow, Phys. Rev. 98 (1955) 1479.
- [21] K. A. Brueckner, R. J. Eden and N. C. Francis, Phys. Rev. 98 (1955) 1445.
- [22] C. A. T. Echevarria, Dissertação de Mestrado, IFT (Fevereiro de 1997).
- [23] D. Galetti and A. F. R. de Toledo Piza, J. Phys. G27 (2001) 33.
- [24] R. N. Frosch, J. S. McCarthy, R. E. Rand and M. R. Yearian, Phys. Rev. 160 (1967) 874.
- [25] D. T. Khoa, Phys. Rev. C63 (2001).
- [26] H. De Vries, C. W. De Jager and C. De Vries, Atom. Data nucl. Data Tables 36 (1987) 495.
- [27] S. A. Afzal, A. Ahmad and S. Ali, Rev. Mod. Phys. 41 (1969) 247.