

João Luiz Chela

Estratégias para a Resolução do Problema
de Inequações Variacionais



*

1910001095



João Luiz Chela

**ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA
DE INEQUAÇÕES VARIACIONAIS**

João Luiz Chela

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Rua Cristovão Colombo, 2265
Caixa Postal 136
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 221-2444
Fax: (017) 221-2445

Estratégias para a Resolução do Problema de Inequações Variacionais

João Luiz Chela

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Andreani



T 1.095/02

São José do Rio Preto

28 de Fevereiro de 2002



+ 518.734
C516e

20104003 — Matemática
aplicada

Chela, João Luiz.

Estratégias para a resolução do problema de inequações
variacionais / João Luiz Chela — São José do Rio Preto : [s.n.], 2002
58 f. ; 30 cm.

Orientador: Roberto Andreani

Dissertação (mestrado) — Universidade Estadual Paulista. Instituto
de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Otimização matemática.. 2. Conjuntos convexos.. 3. Inequações
variacionais. 4. Ponto proximal. I. Andreani, Roberto II. Universidade
Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III.
Título.

CDU — 518.734

Agradecimentos

Aos mestres que, ao desenvolverem este trabalho, contribuíram de alguma forma para sua realização.

Ao Prof. Dr. Roberto Andreani, pela orientação, incentivo e paciência na elaboração deste trabalho, e a todos professores e funcionários do UNICAMP que me ajudaram a concluir este trabalho.

Aos meus pais, Agenor e Marina, por sempre me apoiar.

Aos amigos, por ajudarem-me.

A PAPESP, pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.

Aos meus pais, Agenor e Marina.

Aos meus irmãos, Rodrigo e Tatiana

A minha namorada, Vanessa

Dedico

Agradecimentos

Às pessoas que no desenvolvimento deste trabalho contribuíram de diferentes formas para sua realização.

Ao Prof. Dr. Roberto Andreani, pela orientação, incentivo e paciência na elaboração deste trabalho, e a todos professores e funcionários do DCCE que de alguma forma contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, irmãos e namorada que sempre me apoiam.

Aos amigos pós-graduandos.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.



Resumo

Neste trabalho nós propomos três estratégias para resolver o problema de Inequações Variacionais, que denotaremos por $VIP(F, \Omega)$ onde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é monótona e Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Existem muitas aplicações interessantes do $VIP(F, \Omega)$ na economia, teoria de jogos etc.

Na primeira estratégia, adaptamos a função de Fischer-Burmeister penalizada para a resolução do $VIP(F, \Omega)$, a segunda estratégia envolve métodos de projeção na resolução do $VIP(F, \Omega)$ e a terceira estratégia envolve perturbações do tipo ponto proximal do $VIP(F, \Omega)$. Finalizando, foram feitos alguns experimentos numéricos comparando as duas primeiras estratégias propostas.

Palavras-chave: Problema de Inequações Variacionais, projeções, ponto proximal.



Sumário

Abstract

In this work we propose three methods for solving the variational inequality problem, denoted by $VIP(F, \Omega)$ where $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is monotone and Ω is a subset of $\mathbb{R}^n$. There are many interesting applications of the $VIP(F, \Omega)$ for example in economics and game theory.

In the first method we adapted the penalized Fischer Burmeister function for solving the $VIP(F, \Omega)$. The second method is associated to the projection method for solving the $VIP(F, \Omega)$. The third method is associated to a proximal-point method for the $VIP(F, \Omega)$. Computational experiences with the first two methods are also reported.

Keywords: Variational Inequality Problem, projections, proximal point .



Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	6
1.1 Notações	6
1.2 Operadores Monótonos	7
1.3 Convexidade e Projeções	8
1.3.1 Conjuntos Convexos	8
1.3.2 Álgebra dos conjuntos convexos	9
1.3.3 Funções Convexas	10
1.3.4 Projeções	11
1.3.5 Teorema da Separação	14
1.4 Condições de Otimalidade	15
1.4.1 Minimização com restrições de igualdade e desigualdade	16
2 Resultados Prévios	19
2.1 Introdução	19
2.2 Resolução do VIP utilizando um problema de otimização	19
2.3 Resolução do VIP usando projeções	22
3 Estratégias propostas para a Resolução do VIP	31
3.1 Introdução	31
3.2 Resolução do problema VIP utilizando a função de Fischer-Burmeister penalizada	31



3.3	Reformulação do VIP como MCP utilizando projeções para a sua resolução	37
3.4	Perturbações do Tipo Ponto Proximal	41
4	Experimentos Numéricos e Conclusões Finais	48
4.1	Algoritmos	48
4.2	Descrição dos Problemas e Resultados Numéricos	50
4.2.1	Problema 1 (Somax):	50
4.2.2	Problema 2 (Fukushima1):	51
4.2.3	Problema 3 (Fukushima2):	52
4.3	Conclusões Finais	53



Introdução

O Problema de Inequações Variacionais consiste em achar $x^* \in \Omega$ tal que

$$\langle F(x^*), z - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall z \in \Omega \quad (1)$$

onde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável e Ω é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ convexo e fechado, o qual é denotado por $VIP(F, \Omega)$ ou somente VIP .

Uma forma de interpretar geometricamente o VIP é a seguinte: se x^* é uma solução do $VIP(F, \Omega)$ então $-F(x^*)$ pertence ao cone normal a Ω em x^* , denotado por $N(x^*)$, onde

$$N(x^*) = \begin{cases} \{z : (y - x^*)^t z \leq 0 \quad \forall y \in \Omega\} & \text{se } x^* \in \Omega \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2)$$

Se considerarmos $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : g^1(x) \leq 0 \text{ e } g^2(x) \leq 0\}$, a interpretação geométrica de $N(x^*)$ é dada abaixo.

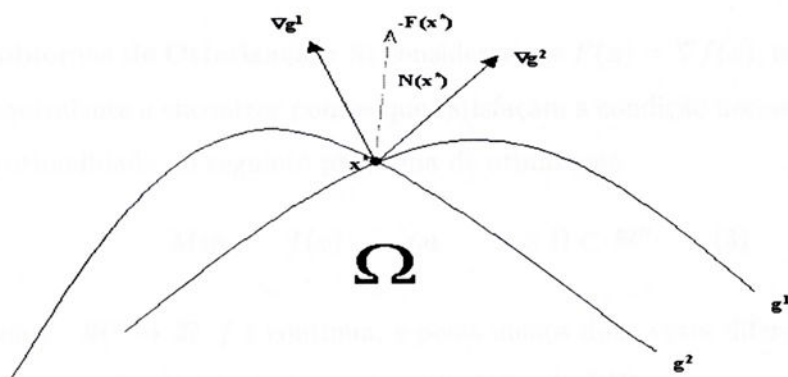


Figura 1:

Existem muitos problemas relacionados com a vida real onde o VIP é usado como ferramenta de resolução. Dentre estes podemos destacar problemas relacionados com a economia, teoria dos jogos, problemas de equilíbrio e problemas em engenharia ver [12].

Casos particulares do $VIP(F, \Omega)$:

- (a) O **Problema de Complementaridade Não Linear**, que aqui será denotado por NCP, com $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, consiste em achar x^* tal que:

$$x^* \geq 0 \quad F(x^*) \geq 0 \quad e \quad F(x^*)^t x^* = 0 \quad (4)$$

Se considerarmos $F(x) = Mx + q$ onde $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, q (fixo) $\in \mathbb{R}^n$, o NCP é chamado de problema de complementaridade linear, aqui denotado por LCP.

- (b) O **Problema de Complementaridade Mista** aqui será denotado por $MCP(F)$.

Neste caso Ω é uma caixa ou seja

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\} \quad a, b \in \mathbb{R}^n$$

- (c) **Resolução de sistemas não lineares:** Neste caso o $VIP(F, \Omega)$ é usado como ferramenta de resolução de sistemas não lineares monótonos, pois se considerarmos $VIP(F, \Omega)$ com $\Omega = \mathbb{R}^n$, resolver o $VIP(F, \mathbb{R}^n)$ é equivalente a resolver o sistema $F(x) = 0$.

- (d) **Problemas de Otimização:** Se considerarmos $F(x) = \nabla f(x)$, resolver o $VIP(F, \Omega)$ é equivalente a encontrar pontos que satisfaçam a condição necessária de 1ª ordem de otimalidade do seguinte problema de otimização

$$\text{Min} \quad f(x) \quad \text{s.a} \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (3)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f é contínua, e pelos menos duas vezes diferenciável. Em [12] podemos encontrar outros casos particulares do VIP.

As estratégias de resolução do $VIP(F, \Omega)$ desenvolvidas nesta dissertação podem ser classificadas em dois tipos:

1- Que utilizam uma reformulação do problema $VIP(F, \Omega)$ como um problema de otimização.

2- Que usam métodos de projeções.

Seguindo as idéias dadas por Andreani, Friedlander e Martínez em [1], a reformulação do problema $VIP(F, \Omega)$ se baseia nas condições K.K.T. do seguinte problema equivalente.

Se x^* é solução do problema de minimização

$$\min F(x^*)^t x \quad s.a. \quad x \in \Omega \quad (4)$$

onde se $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, \quad Ax = b, \quad x \geq 0\}$ (5)

$g = (g_1, \dots, g_m)^t$, $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e são convexas e $A \in \mathbb{R}^{q \times n}$, então x^* é solução do $VIP(F, \Omega)$.

As condições K.K.T. do problema acima nos permitem escrever o seguinte problema de otimização equivalente :

$$\min f(x, y, z, u, v) \quad s.a. \quad x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{R}_+^q, z \in \mathbb{R}_+^p, v \in \mathbb{R}_+^n \quad (6)$$

onde a função de mérito é:

$$f(x, y, z, u, v) = \|F(x) + g'(x)^t y + A^t u - v\|^2 + \rho_1 \|z + g(x)\|^2 + \rho_2 \|Ax - b\|^2 + \rho_3 [(y^t z)^p + (x^t v)^p], \quad (7)$$

com $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \geq 0$ e $p \geq 1$.

Foi provado em [1] que se Ω cumpre uma condição do tipo "constraint qualification" então $(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*)$ é minimizador global de (6) com $f(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*) = 0$, se e somente se, x^* é solução do $VIP(F, \Omega)$.

Mas a procura de minimizadores globais não é uma tarefa fácil, logo é interessante encontrar condições para que pontos estacionários de (6) sejam soluções do $VIP(F, \Omega)$.

Andreani, Friedlander e Martínez em [1] também encontraram condições para que pontos estacionários de (6) sejam soluções do $VIP(F, \Omega)$.

Uma outra estratégia foi proposta por Solodov e Svaiter em [19]. Esta estratégia envolve uma geometria interessante, por estar baseada em projeções ortogonais sobre conjuntos convexos.

A estratégia em questão gera uma sequência (x_k) de forma que o elemento x_{k+1} seja a projeção ortogonal de x_k sobre a interseção de um hiperplano e o conjunto Ω .

A contribuição dada nesta dissertação para a resolução de problemas de inequações variacionais consiste em três novas estratégias para resolução do $VIP(F, \Omega)$.

- (i) Baseados nos bons resultados numéricos obtidos por Chen, Chen e Kanzow em [6] para o NCP utilizando a função de Fischer-Burmeister penalizada, a primeira proposta adapta esta função de Fischer-Burmeister penalizada ao $VIP(F, \Omega)$, esta adaptação consiste em substituir na função de mérito f dada por Andreani, Friedlander e Martínez em [1], a expressão $(y^t z)^p + (x^t v)^p$ pela função de Fischer Burmeister penalizada; esta substituição transforma; problema (6) em um problema sem restrições.
- (ii) A segunda proposta modifica a estratégia dada por Solodov e Svaiter em [19], que necessita de pelo menos uma projeção. Obter esta projeção é equivalente a resolver um problema de otimização convexa, mas quando o conjunto Ω é complicado esta projeção pode se tornar complicada tendo assim um custo computacional alto.

Então esta proposta consiste em usar o fato que todo problema $VIP(F, \Omega)$ pode ser colocado como um problema de complementaridade mista (ver [2]), que é resolvido utilizando a estratégia de projeções dada por Solodov e Svaiter em [19], obtendo assim uma solução para o $VIP(F, \Omega)$.

- (iii) A terceira proposta tenta modificar algumas limitações da reformulação dada por Andreani, Friedlander e Martínez em [1], no sentido que uma das condições teóricas para conseguir relações entre pontos estacionários de problemas de otimização associados ao $VIP(F, \Omega)$ e a solução do $VIP(F, \Omega)$



é que o Jacobiano da F seja definido positivo. Este fato limita algumas aplicações, então Andreani, Friedlander e Martínez em [1] estenderam estes resultados para a hipótese da monotonia da F (jacobiano da F semi-definido positivo) usando uma perturbação do tipo Tikhonov.

Nossa proposta consiste em fazer uma perturbação da F do tipo ponto proximal. Uma perturbação desse tipo tem a vantagem de deixar o parâmetro de perturbação μ fixo, o que caracteriza uma vantagem sobre a perturbação de Tikhonov em relação à estabilidade do problema, pois mantendo o parâmetro μ fixo o problema se torna bem condicionado sempre.

Para as duas primeiras propostas dadas nesta dissertação foram realizadas demonstrações teóricas e experimentos numéricos, para a última somente foram realizadas demonstrações teóricas.



Capítulo 1

Preliminares

1.1 Notações

Neste capítulo apresentaremos algumas notações necessárias e alguns conceitos relacionados com os temas discutidos nesta dissertação.

1- $\mathbb{R}^n$ é o espaço vetorial real e se x é um elemento pertencente a $\mathbb{R}^n$ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ e $x_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

2- Seja $x \in \mathbb{R}^n$ então $x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3- Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, o produto interno usual de x por y é dado por $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^t y$.

4- Seja $x \in \mathbb{R}^n$ $\|x\| = \sqrt{x^t x}$

Obs. No decorrer desta dissertação ao nos referirmos ao produto interno ou à norma estaremos nos referindo ao produto interno e à norma citada acima.

5- Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, se $\langle x, y \rangle = x^t y = 0$ dizemos que x é ortogonal a y .

6- A distância (euclidiana) entre dois elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$ será dada por $d(x, y) = \|x - y\|$.

7- Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ se $x \leq y$ significa que $x_i \leq y_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.



8- Uma bola de centro $y \in \mathbb{R}^n$ e raio ϵ , corresponde ao seguinte conjunto:

$$B(y, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \epsilon\}.$$

9- $I_{n \times n}$ denotará a Matriz Identidade de ordem n .

10- $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ significa que A é uma matriz com n linhas e m colunas.

$$11- \|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \neq 0.$$

12- (Gradiente da f) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})^t$ onde $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é a derivada da f em relação a x_i , $\nabla f(x)$ é chamado de gradiente da f .

13- Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$. Dizer que $f \in C^n(\Omega)$ significa que f é diferenciável de ordem n em Ω .

14- (Matriz Hessiana da f) $\nabla^2 f(x) = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}]$. Esta notação significa que os elementos da matriz Hessiana são $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

15- (Jacobiano) Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^t$

$f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a Matriz Jacobiana da F é formada pelos elementos $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, notação: $JF = [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]$.

16- Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $A = [a_{ij}]$ então $A^t = [a_{ji}]$.

17- Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A é chamada de uma matriz simétrica se $A = A^t$.

18- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é semi-definida positiva se $x^t A x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

19- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida positiva se $x^t A x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

1.2 Operadores Monótonos

Nesta seção, será dada uma breve noção dos tipos de monotonia de um operador F .

Definição 1.1. [12]

Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

(a-) F é monótona se

$$[F(x) - F(y)]^t(x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n;$$

Este item equivale a dizer que o JF (Jacobiano da F) é semi-definido positivo.

(b-) F é pseudomonótona se

$$F(y)^t(x - y) \geq 0 \implies F(x)^t(x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n;$$

(c-) F é fortemente monótona se $\exists \quad \gamma > 0$ tal que

$$[F(x) - F(y)]^t(x - y) \geq \gamma \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n;$$

1.3 Convexidade e Projeções

As definições, teoremas e proposições citados nesta seção podem ser encontrados em [24].

1.3.1 Conjuntos Convexos

Definição 1.2. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$. O conjunto dos pontos

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \quad \lambda \in [0, 1] \tag{1.3.1}$$

é chamado segmento com extremos x e y .

Definição 1.3. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$. Se $\forall \quad x, y \in S$ o segmento com extremos x e y pertence a S então S é chamado de um conjunto convexo ou seja

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S, \quad \lambda \in [0, 1], x, y \in S \tag{1.3.2}$$

Exemplo 1.1. $S = \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo

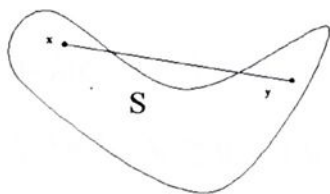
Exemplo 1.2. Se $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ então S é convexo

Exemplo 1.3. (Semi-Espaços): Se $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b \rangle \leq \beta\}$

e $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b \rangle \geq \beta\}$

onde $\beta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$ então S e S_1 são convexos

Exemplo 1.4. (S não é convexo)



Existem várias propriedades e características interessante de conjuntos convexos ver [24]. Dentre elas, podemos destacar duas.

1- A intersecção finita de conjuntos convexos é convexa.

2- Se S é convexo e $x_1, \dots, x_n \in S$ então $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in S$ se

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \text{ e } \alpha_i \geq 0 \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

1.3.2 Álgebra dos conjuntos convexos

Definição 1.4. Sejam C_1 e C_2 subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$

1- $C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$

2- $\lambda C_1 = \{\lambda x_1 : x_1 \in C_1, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Teorema 1.1. Sejam $C_1, C_2, \dots, C_n$ subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ então $C_1 + C_2 + \dots + C_n$ e λC_i são convexos ($i = 1, \dots, n$), $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dem: (ver [24])

Outras propriedades de operações com conjuntos convexos que são interessantes:

Sejam C_1, C_2 e C_3 subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ e λ_1, λ_2 e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$1- C_1 + C_2 = C_2 + C_1$$

$$2- (C_1 + C_2) + C_3 = C_1 + (C_2 + C_3)$$

$$3- \lambda_1 \lambda_2 C_1 = (\lambda_1 \lambda_2) C_1$$

$$4- \lambda(C_1 + C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$$

$$5- \text{Se } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)C_1 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_1$$

1.3.3 Funções Convexas

Definição 1.5. Seja $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, S convexo, f é convexa se e somente se

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (1.3.3)$$

$$\forall x, y \in S \quad \text{e} \quad \lambda \in [0, 1].$$

Proposição 1.1. Seja $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(S)$, S um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Então f é convexa se, e somente se, $\nabla^2 f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Dem: (ver [24])

Proposição 1.2. Seja $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(S)$, S um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Então f é convexa se, somente se, $\forall x, y \in S$ se cumpre

$$f(y) \geq f(x) + \nabla^t f(x)(y - x). \quad (1.3.4)$$

Dem: (ver [24])

Teorema 1.2. *Sejam $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, S convexo, $x_1, \dots, x_n \in S$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$. Então f é convexa se, e somente se,*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \quad (1.3.5)$$

$$\text{com } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \quad (1.3.6)$$

Dem: (ver [24])

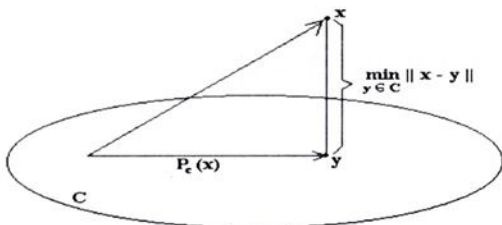
1.3.4 Projeções

Em uma das estratégias de resolução do $VIP(F, \Omega)$ citada nesta dissertação utilizaremos projeções, logo os resultados a seguir são essenciais para a compreensão da mesma, tais como a unicidade da projeção de um ponto sobre um conjunto convexo e também, a continuidade da função projeção.

Definição 1.6. *Seja o conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$. Definimos a projeção de $x \in \mathbb{R}^n$ sobre C como*

$$P_C(x) = \operatorname{argmin}_{y \in C} \|x - y\|$$

onde $P_C : \mathbb{R}^n \rightarrow C$.



Proposição 1.3. *Seja Ω um conjunto convexo. Então, dado $z \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$\langle z - P_{\Omega}(z), x - P_{\Omega}(z) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

Dem:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \frac{1}{2} \| z - (\lambda y + (1 - \lambda)P_{\Omega}(z)) \|^2 = \frac{1}{2} \| (z - P_{\Omega}(z)) - \lambda(y - P_{\Omega}(z)) \|^2 = \\ &= \frac{1}{2} [\| z - P_{\Omega}(z) \|^2 - 2\lambda \langle z - P_{\Omega}(z), y - P_{\Omega}(z) \rangle + \lambda^2 \| y - P_{\Omega}(z) \|^2] = \\ &= \frac{1}{2} \lambda^2 \| y - P_{\Omega}(z) \|^2 - \lambda \langle z - P_{\Omega}(z), y - P_{\Omega}(z) \rangle + \frac{1}{2} \| z - P_{\Omega}(z) \|^2 \end{aligned}$$

Analisando o mínimo da função $\varphi(\lambda)$, sabemos que este ocorre quando $\lambda = 0$, por definição de projeção. Então, claramente, $\varphi'(0) \geq 0$. Derivando $\varphi(\lambda)$ temos: $\varphi'(\lambda) = \lambda \| y - P_{\Omega}(z) \|^2 - \langle z - P_{\Omega}(z), y - P_{\Omega}(z) \rangle$ e $\varphi'(0) = -\langle z - P_{\Omega}(z), y - P_{\Omega}(z) \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle z - P_{\Omega}(z), y - P_{\Omega}(z) \rangle \leq 0$ o que prova a proposição. ■

Teorema 1.3. *(Continuidade da projeção) Seja C um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$. Então $\| P_C(x) - P_C(y) \| \leq \| x - y \| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$*

Dem:

Sejam $P_C(x) = \operatorname{argmin}_{z \in C} \| x - z \|$ e $P_C(y) = \operatorname{argmin}_{x \in C} \| x - y \|$, então pela proposição 1.3.

$$\langle x - P_C(x), P_C(y) - P_C(x) \rangle \leq 0$$

e

$$\langle y - P_C(y), P_C(x) - P_C(y) \rangle \leq 0$$

Somando ambas temos

$$\langle x - y + P_C(y) - P_C(x), P_C(y) - P_C(x) \rangle \leq 0$$

$$-\langle y - x, P_C(y) - P_C(x) \rangle + \| P_C(y) - P_C(x) \|^2 \leq 0$$

Logo

$$0 \leq \| P_C(y) - P_C(x) \|^2 \leq \langle y - x, P_C(y) - P_C(x) \rangle \quad (1.3.7)$$

Agora seja

$$0 \leq \| (y - x) - [P_C(y) - P_C(x)] \|^2 =$$

$$\| y - x \|^2 - 2\langle y - x, P_C(y) - P_C(x) \rangle + \| P_C(y) - P_C(x) \|^2$$

Por (1.3.7) temos que:

$$\| y - x \|^2 - 2\langle y - x, P_C(y) - P_C(x) \rangle + \| P_C(y) - P_C(x) \|^2 \leq$$

$$\leq \| y - x \|^2 - 2\| P_C(y) - P_C(x) \|^2 + \| P_C(y) - P_C(x) \|^2 =$$

$$= \| y - x \|^2 - \| P_C(y) - P_C(x) \|^2 \Rightarrow$$

$$\| P_C(y) - P_C(x) \|^2 \leq \| y - x \|^2 \Rightarrow$$

$$\| P_C(y) - P_C(x) \| \leq \| y - x \|$$

■

Proposição 1.4. (*Unicidade da Projeção*): Dados $z \in \mathbb{R}^n$ e C convexo, então a projeção de z sobre C ($P_C(z)$) é única.

Dem:

Sejam $P_1(z)$ e $P_2(z)$ projeções de z sobre Ω . Definindo, da mesma forma que na proposição anterior,

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2} \| z - (\lambda P_1(z) + (1 - \lambda)P_2(z)) \|^2$$

Desta maneira,

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2} \| z - (\lambda P_1(z) + (1 - \lambda)P_2(z)) \|^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \| (z - P_2(z)) - \lambda(P_1(z) - P_2(z)) \|^2 = \\
&= \frac{1}{2} \| z - P_2(z) \|^2 - \lambda \langle z - P_2(z), P_1(z) - P_2(z) \rangle + \frac{\lambda^2}{2} \| P_1(z) - P_2(z) \|^2
\end{aligned}$$

Pela proposição (1.3), temos que $\varphi'(0) \geq 0$. Logo

$$\begin{aligned}
&\langle z - P_2(z), P_1(z) - P_2(z) \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\langle z - P_1(z) + P_1(z) - P_2(z), P_1(z) - P_2(z) \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \| P_1(z) - P_2(z) \|^2 - \langle P_2(z) - P_1(z), z - P_1(z) \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \| P_1(z) - P_2(z) \|^2 \leq \underbrace{\langle P_2(z) - P_1(z), z - P_1(z) \rangle}_{\leq 0}
\end{aligned}$$

Logo,

$$P_1(z) - P_2(z) = 0 \Rightarrow P_1(z) = P_2(z)$$

■

1.3.5 Teorema da Separação

Definição 1.7. *Sejam C_1 e C_2 conjuntos em $\mathbb{R}^n$ não vazios.*

- (a) *Dizemos que o hiperplano H separa C_1 e C_2 , se C_1 está contido em um dos semi-espacos fechados caracterizado por H , e C_2 está contido no semi-espaço fechado oposto ao primeiro.*
- (b) *Dizemos que H separa propriamente C_1 e C_2 se $C_1 \cap H = \emptyset$ e $C_2 \cap H = \emptyset$.*
- (c) *Dizemos que H separa C_1 e C_2 fortemente se existe um $\epsilon > 0$ tal que $C_1 + \epsilon B$ está contido em um semi-espaço aberto associado a H e $C_2 + \epsilon B$ está contido*



no semi-espço aberto oposto, onde B é a bola euclidiana de raio unitário $\{x : |x| \leq 1\}$ ($C_i + \epsilon B$ consiste de todos os pontos x tais que $\|x - y\| \leq \epsilon$, para algum $y \in C_i$).

(d) Outro tipo de separação a considerar é a separação estrita, onde C_1 e C_2 simplesmente pertencem a semi-espços abertos e opostos.

Teorema 1.4. *Sejam C_1 e C_2 conjuntos em $\mathbb{R}^n$ não vazios. Existe um hiperplano separando propriamente C_1 e C_2 se e somente se existe um vetor b tal que*

$$(a) \inf\{\langle x, b \rangle | x \in C_1\} \geq \sup\{\langle x, b \rangle | x \in C_2\}$$

$$(b) \sup\{\langle x, b \rangle | x \in C_1\} > \inf\{\langle x, b \rangle | x \in C_2\}$$

e existe um hiperplano separando C_1 e C_2 fortemente se e somente se existe um vetor b tal que

$$(c) \inf\{\langle x, b \rangle | x \in C_1\} > \sup\{\langle x, b \rangle | x \in C_2\}$$

Dem: (ver [24])

Se dois conjuntos podem ou não ser separados, isso é uma questão de existência e não é nenhuma surpresa que nas aplicações da teoria da separação ocorram demonstrações de vários teoremas de existência.

Tipicamente, precisamos de um vetor b com certas propriedades em um hiperplano, e que seja capaz de separar dois conjuntos convexos. O vetor b em questão é o vetor diretor do hiperplano separador de C_1 e C_2 .

1.4 Condições de Otimalidade

Vamos considerar o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & x \in \Omega \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^n(\mathbb{R}^n)$ e Ω é o conjunto das restrições do problema de minimização contido em $\mathbb{R}^n$.

Teremos que primeiramente dar sentido a minimizadores locais e minimizadores globais do problema (1.4.8).

Definição 1.8. [14, 16]

(a)-Dizemos que $\bar{x}$ é um minimizador global para (1.4.8) se $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in \Omega$ e $x \neq \bar{x}$.

(b)-Dizemos de $\bar{x}$ é um minimizador local para (1.4.8) se $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in B(\bar{x}, \epsilon)$ e $x \neq \bar{x}$.

Nos itens (a) e (b) se $f(\bar{x}) < f(x)$ diremos que $\bar{x}$ é um minimizador global ou local estrito.

As condições de otimalidades são importantes relações entre as derivadas de uma função f e as derivadas das restrições.

As condições necessárias devem ser obrigatoriamente satisfeitas por minimizadores, já as condições suficientes, quando satisfeitas, asseguram que o ponto em consideração é um minimizador.

Consideremos o problema (1.4.8). As curvas em Ω desempenham um papel importante nas condições práticas de otimalidade, pois elas podem expressar o comportamento da função objetivo em cima de curvas factíveis que passam por um ponto considerado.

1.4.1 Minimização com restrições de igualdade e desigualdade

Vamos considerar o problema (1.4.8) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : G(x) = 0 \text{ e } c(x) \leq 0\} \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Onde $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $G(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^t$ e $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ g_i pelo menos uma vez diferenciável para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $c(x) =$



$(c_1(x), \dots, c_p(x))^t$, $c_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e c_i pelo menos uma vez diferenciável para todo $i \in \{1, \dots, p\}$.

Teorema 1.5. - Condições K.K.T. gerais [14, 16]

Se $\bar{x}$ é um minimizador local regular de (1.4.9), $J = \{i \in \{1, \dots, p\} : c_i(\bar{x}) = 0\}$ e $\{\nabla c_i : i \in J\} \cup \{\nabla g_i(\bar{x}), \dots, \nabla g_m(\bar{x})\}$ é um conjunto linearmente independente então existem únicos $\mu_i \geq 0$, $i \in J$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tais que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in J} \mu_i \nabla c_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \quad (1.4.10)$$

Desta forma, se x é um ponto regular e minimizador local de (1.4.9) definindo $\mu_i = 0$ se $i \notin J$, podemos reescrever as condições K.K.T gerais da seguinte forma:

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in J} \mu_i \nabla c_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \quad (1.4.11)$$

$$G(\bar{x}) = 0 \quad (1.4.12)$$

$$\mu_i c_i(\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (1.4.13)$$

$$\mu_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (1.4.14)$$

$$c_i(\bar{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (1.4.15)$$

Se $(x, \lambda, \mu) \in (R^n \times R^m \times R^q)$ satisfaz as equações acima então x será chamado de um ponto estacionário de (1.4.9).

Teorema 1.6. - Condições necessárias de segunda ordem (rest. de igualdade e desigualdade) [14, 16]

Seja $\bar{x}$ ponto regular minimizador local de (1.4.9). Seja A a matriz cujas linhas são os gradientes das restrições ativas em $\bar{x}$, excluindo os gradientes daquelas restrições cujos multiplicadores são nulos. Então, se λ e μ são os vetores multiplicadores de Lagrange,

$$y^t \nabla_{xx}^2 \varphi(\bar{x}, \lambda, \mu) y \geq 0 \quad \forall y \in N(A) \quad (1.4.16)$$

onde $\varphi(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i c_i(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$.

Teorema 1.7. - *Condições suficientes de segunda ordem (rest. de igualdade e desigualdade) [14, 16]*

Se $\bar{x}$ satisfaz a condição necessária de primeira ordem para (1.4.9) e além disso $y^t \nabla_{xx}^2 \varphi(\bar{x}, \lambda, \mu) y > 0 \quad \forall y \in N(A) \text{ e } y \neq 0$ então $\bar{x}$ é um minimizador local estrito do problema (1.4.9).

Capítulo 2

Resultados Prévios

2.1 Introdução

Neste capítulo serão colocadas duas estratégias para resolução do $VIP(F, \Omega)$, que nos motivaram a propor nesta dissertação outras estratégias para resolver o $VIP(F, \Omega)$.

2.2 Resolução do VIP utilizando um problema de otimização

Nesta seção daremos uma reformulação do problema $VIP(F, \Omega)$, onde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador contínuo e diferenciável pelo menos uma vez e Ω é o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, Ax = b, x \geq 0\} \quad (2.2.1)$$

onde as funções $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, $i = 1, \dots, n$, são convexas, pelo menos duas vezes diferenciáveis e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Em [1] foi colocado o seguinte problema ($P(x)$)

$$\text{Min } F(x)^t w \quad (2.2.2)$$

$$\text{s.a } w \in \Omega \quad (2.2.3)$$



Nota-se que se x^* é solução de $(P(x^*))$ então x^* é solução do $VIP(F, \Omega)$. Como o problema $P(x^*)$ é um problema convexo então as condições de primeira ordem são suficientes, estas condições são as seguintes:

$$F(x^*) + g'(x^*)^t y + A^t \mu - v = 0; \quad (2.2.4)$$

$$g(x^*) + z = 0; \quad (2.2.5)$$

$$Ax^* - b = 0; \quad (2.2.6)$$

$$y^t z = 0; \quad (2.2.7)$$

$$v^t x^* = 0; \quad (2.2.8)$$

$$x^* \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0 \quad v \geq 0. \quad (2.2.9)$$

A função objetivo do problema de otimização estará baseada nas condições dadas acima e será a seguinte

$$h(x, y, z, u, v) = \|F(x) + g'(x)^t y + A^t u - v\|^2 + \varrho_1 \|z + g(x)\|^2 + \varrho_2 \|Ax - b\|^2 + \varrho_3 [(y^t z)^p + (x^t v)^p]. \quad (2.2.10)$$

A partir daí é associado ao $VIP(F, \Omega)$ o seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & h(x, y, z, u, v) \\ \text{s.a} \quad & x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{R}_+^q, z \in \mathbb{R}_+^q, v \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Esta associação foi motivada por uma reformulação semelhante dada por Friedlander, Martínez e Santos em [9].

Pela forma que foi construída a função objetivo do problema (2.2.11), um minimizador global que anula a função objetivo é solução do $VIP(F, \Omega)$.

Se Ω satisfaz uma condição do tipo "constraint qualification", Andreani, Friedlander e Martínez em [1] mostraram que a recíproca da afirmação acima é válida.

Mas a procura de minimizadores globais não é um trabalho fácil, principalmente quando o número de variáveis do problema é grande. E mesmo pontos estacionários do problema (2.2.11) podem ser solução do $VIP(F, \Omega)$.

Logo, é interessante verificar sob quais condições um ponto estacionário do problema (2.2.11) é uma solução do $VIP(F, \Omega)$.

Os termos $(y^t z)^p$ e $(x^t v)^p$ desempenham um papel importante na relação de pontos estacionários de (2.2.11) e a solução do $VIP(F, \Omega)$, principalmente quando $p = 1$ e $p > 1$.

Os teoremas a seguir darão condições suficientes para que pontos estacionários de (2.2.11) sejam solução do $VIP(F, \Omega)$ para $p = 1$ e $p > 1$.

Vamos definir H , a matriz cujas colunas formam uma base do núcleo de A .

Teorema 2.1. Se $(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^q \times \mathbb{R}_+^q \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^n$ é um ponto estacionário de (2.2.11), $p > 1$ e

$$H^t[F'(x) + \sum_{i=1}^q [y^*]_i \nabla^2 g_i(x^*)]H > 0 \quad (2.2.12)$$

Então x^* é solução do $VIP(F, \Omega)$.

Dem: (ver [1])

O teorema citado coloca condições para que pontos estacionários do problema (2.2.11) sejam solução do $VIP(F, \Omega)$ com $p > 1$. O teorema a seguir estende estes resultados para $p = 1$.

Teorema 2.2. Se $(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^q \times \mathbb{R}_+^q \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^n$ é um ponto estacionário do problema (2.2.11) com $p = 1$,

$$H^t[F'(x) + \sum_{i=1}^q [y^*]_i \nabla^2 g_i(x^*)]H > 0 \quad (2.2.13)$$

e $\nabla g_1(x^*), \dots, \nabla g_p(x^*), a_1, \dots, a_m$ são linearmente independentes onde a_i ($i = 1, \dots, m$) são as linhas de A , então x^* é solução do $VIP(F, \Omega)$.

Dem: (ver [1])

Algumas observações merecem destaque:

1- Devido à convexidade das g_i 's, nos teoremas 2.1, 2.2 podemos trocar a expressão $H^t[F'(x) + \sum_{i=1}^q [y^*]_i \nabla^2 g_i(x^*)]H$ por $H^t F'(x)H$.

2- É importante observar que o Jacobiano da F ser semi-definido positivo não implica que pontos estacionários do problema de otimização 2.2.11 sejam soluções do $VIP(F, \Omega)$ para $p \geq 1$. Em [1] são obtidas condições para que estes pontos estacionários sejam solução quando o Jacobiano da F é semi-definido positivo.

Também em [1] foram estendidos estes resultados para F monótona, com uma perturbação do tipo Tikhonov, ou seja

$$F_k(x) = F(x) + \epsilon_k x. \quad (2.2.14)$$

Esta extensão tornou o operador F fortemente monótono para todo $k \in \mathbb{N}$, condição importante para a unicidade da solução do problema VIP. A partir daí conseguem-se condições teóricas para que a seqüência (x_k) de soluções dos problemas $VIP(F_k, \Omega)$ convirja para a solução de mínima norma do $VIP(F, \Omega)$.

2.3 Resolução do VIP usando projeções

Nesta seção vamos considerar o $VIP(F, \Omega)$ da seguinte forma:

Sejam Ω um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}^n$ e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, monótona ou pseudomonótona.

Existem muitas estratégias para a resolução do $VIP(F, \Omega)$ usando projeções, principalmente quando F e Ω têm estruturas especiais [17, 18, 19, 20, 21, 22, 7, 13].

Entre estas podemos mencionar uma estratégia destacada em [7] que consiste em gerar uma seqüência (x_i) onde:

$$x_{i+1} = P_\Omega[x_i - \alpha F(x_i)], \quad (2.3.15)$$



sendo Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ convexo e fechado e F fortemente monótona e Lipschitz. Neste caso x^* é solução do $VIP(F, \Omega) \iff r(x^*) = x^* - P_\Omega[x^* - \alpha F(x^*)] = 0$.

O próximo resultado mostra que a seqüência (x_i) dada em (2.3.15) converge para uma solução do $VIP(F, \Omega)$.

Para isto vamos supor que a F é Lipschitz com constante L e fortemente monótona ou seja, existe $\gamma > 0$ tal que $\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \gamma \|x - y\|$.

Resultado: $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$ onde $\phi(x_i) = P_\Omega[x_i - \alpha F(x_i)]$ é uma contração se $\alpha \in (0, 2\gamma/L)$.

Dem:

Sejam x_i e $x_{i-1} \in \mathbb{R}^n$.

$$\|P_\Omega(x_i - \alpha F(x_i)) - P_\Omega(x_{i-1} - \alpha F(x_{i-1}))\|^2 \leq \quad (2.3.16)$$

$$\|x_i - \alpha F(x_i) - x_{i-1} + \alpha F(x_{i-1})\|^2 = \quad (2.3.17)$$

$$\|x_i - x_{i-1}\|^2 - 2\alpha \langle x_i - x_{i-1}, F(x_i) - F(x_{i-1}) \rangle + \quad (2.3.18)$$

$$\alpha^2 \|F(x_i) - F(x_{i-1})\|^2. \quad (2.3.19)$$

Usando o fato de que a F é fortemente monótona e Lipschitz e substituindo na expressão acima temos:

$$\begin{aligned} & \|P_\Omega(x_i - \alpha F(x_i)) - P_\Omega(x_{i-1} - \alpha F(x_{i-1}))\|^2 \leq \\ & \|x_i - x_{i-1}\|^2 - 2\alpha\gamma \|x_i - x_{i-1}\|^2 + \alpha^2 L^2 \|x_i - x_{i-1}\|^2 = \\ & \|x_i - x_{i-1}\|^2 (1 - 2\alpha\gamma + \alpha^2 L^2) \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Como $\alpha < \frac{2\gamma}{L^2} \Rightarrow \gamma > \frac{\alpha L^2}{2}$ e substituindo em (2.3.20) temos

$$\|P_\Omega(x_i - \alpha F(x_i)) - P_\Omega(x_{i-1} - \alpha F(x_{i-1}))\|^2 \leq \beta \|x_i - x_{i-1}\|^2, \quad (2.3.21)$$

onde $0 < \beta < 1$.

■

Usando o resultado acima podemos afirmar que ϕ admite um ponto fixo isto é existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(x^*) = x^*$, logo a seqüência (x_i) converge para x^* solução do $VIP(F, \Omega)$.

Uma outra estratégia também apresentada em [7] consiste em gerar uma seqüência (x_i) onde:

$$y_i = P_\Omega[x_i - \alpha F(x_i)] \quad e \quad x_{i+1} = P_\Omega[x_i - \alpha F(y_i)]. \quad (2.3.22)$$

Esta estratégia requer para a convergência da seqüência (x_i) que a F seja monótona, Lipschitz com constante L e $\alpha \in (0, 1/L)$.

A convergência desta seqüência é provada da mesma forma que na estratégia anterior.

A estratégia de resolução do VIP dada por Solodov e Svaiter [19] que será apresentada nesta seção envolve uma geometria interessante do problema $VIP(F, \Omega)$.

De um modo geral, esta estratégia gera uma seqüência de pontos (x_i) tal que o ponto x_{i+1} é a projeção ortogonal do ponto x_i sobre a interseção de um hiperplano e o conjunto Ω , e este hiperplano separa x_i do conjunto de soluções do $VIP(F, \Omega)$.

Em primeiro lugar, vamos considerar o $VIP(F, \Omega)$ da seguinte forma: F é contínua e Ω é um subconjunto qualquer de R^n convexo e fechado.

A monotonia da F implica sua pseudomonotonia, mas nem sempre a recíproca é válida. Quando a F for mencionada nesta seção vamos supor que é monótona. Mas é importante ressaltar que os resultados que serão citados nesta seção, também são válidos para F pseudomonótona (ver [19]).

A expressão $P_\Omega[x]$ está relacionada com o seguinte problema de otimização.

$$P_\Omega[x] = \operatorname{argmin}_{y \in \Omega} \|y - x\| \quad (2.3.23)$$

Como Ω é convexo, o problema (2.3.23) é um problema de otimização convexa.

Encontrar $P_\Omega[x]$ pode não ter um custo computacional barato, pois achar esta projeção é equivalente a resolver um problema de otimização.



Esta estratégia supõe que x_i seja uma aproximação de uma solução do $VIP(F, \Omega)$, então calcula-se $P_\Omega[x_i - F(x_i)]$ e em seguida é feita uma busca linear entre x_i e $P_\Omega[x_i - F(x_i)]$ para obter z_i de modo que $F(z_i)$ faça um ângulo menor que 90° com o vetor $r(x_i) = x_i - P_\Omega[x_i - F(x_i)]$ e o hiperplano $\partial H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle F(z_i), x - z_i \rangle = 0\}$ é gerado de forma a separar x_i do conjunto de soluções do $VIP(F, \Omega)$.

Em seguida é computado x_{i+1} como a projeção de x_i sobre a interseção do hiperplano ∂H_i e o conjunto Ω .

O próximo resultado validará a separação entre o ponto x_i e o conjunto solução do $VIP(F, \Omega)$ por um hiperplano.

Resultado: O hiperplano $\partial H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle F(z_i), x - z_i \rangle = 0\}$ separa x_i do conjunto solução do $VIP(F, \Omega)$.

Dem:

Sejam x_i uma iteração corrente do processo descrito acima, z_i obtido da forma dada acima e x^* uma solução do $VIP(F, \Omega)$.

Como F é monótona então

$$\langle F(z_i) - F(x^*), z_i - x^* \rangle \geq 0 \implies \quad (2.3.24)$$

$$\langle F(z_i), z_i - x^* \rangle \geq \langle F(z_i), x^* - z_i \rangle. \quad (2.3.25)$$

Como x^* é solução do $VIP(F, \Omega)$ então

$$\langle F(z_i), x^* - z_i \rangle \leq 0. \quad (2.3.26)$$

Suponhamos que x_i não é uma solução do $VIP(F, \Omega)$, como z_i foi obtido de forma que o ângulo entre $r(x_i)$ seja menor que 90° (graus) e pelo algoritmo 1 dado abaixo $z_i = x_i - \eta_i r(x_i)$.

Então

$$\langle F(z_i), x_i - z_i \rangle > 0. \quad (2.3.27)$$

Por (2.3.26) e (2.3.27) o hiperplano ∂H_i separa x_i do conjunto solução do $VIP(F, \Omega)$ ■

A figura abaixo descreve esse processo de projeção.

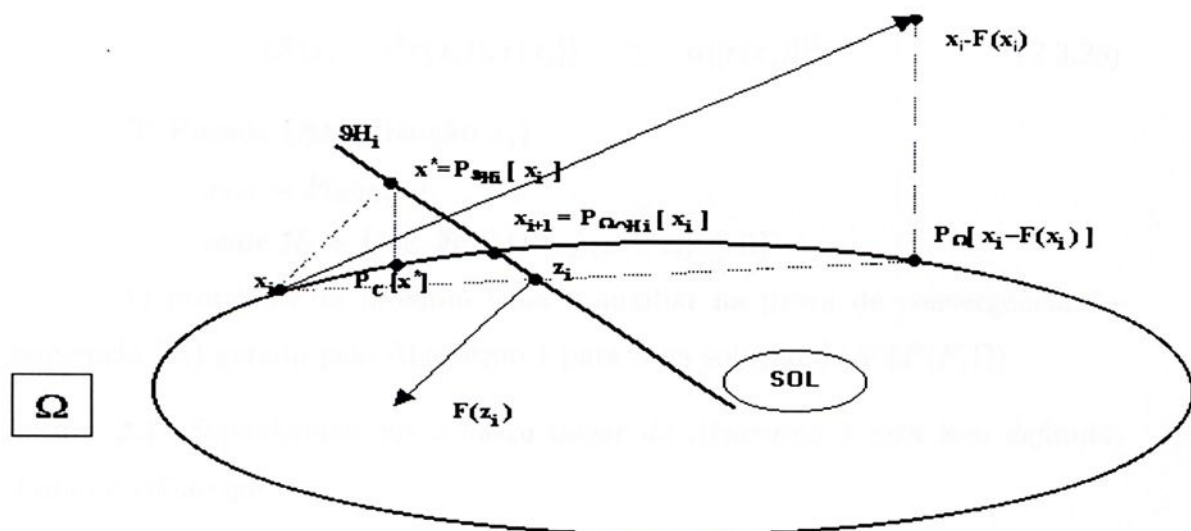


Figura 2.1: Interpretação Geométrica da Estratégia de Projeção

Uma outra estratégia dada em [13] semelhante a esta primeiramente projeta x_i sobre ∂H_i depois sobre Ω , mas foi verificado que a iteração x_{i+1} gerada por [19] está mais próxima do conjunto solução do que a feita em [13].

O próximo algoritmo descreve a estratégia dada nesta seção [19].

Antes de colocarmos o algoritmo é importante destacar que x^* é solução do $VIP(F, \Omega)$ se, e somente se, x^* é uma raiz da função $r(x) = x - P_\Omega[x - F(x)]$ ver [19].

Algoritmo 1

Dados Iniciais $x_o \in \Omega$, $\gamma \in (0, 1)$ e $\alpha \in (0, 1)$.

1º passo: (Critério de Parada)

Calcular $P_\Omega[x_i - F(x_i)]$

Se $r(x_i) = x_i - P_\Omega[x_i - F(x_i)] = 0$ (**Pare**). Caso contrário

2º Passo: (Busca Linear)

Calcular $z_i = x_i - \eta_i r(x_i)$ onde $\eta_i = \gamma^{k_i}$ e

k_i é o menor número inteiro k positivo que satisfaz

$$\langle F(x_i - \gamma^k r(x_i)), r(x_i) \rangle \geq \alpha \|r(x_i)\|^2 \quad (2.3.28)$$

3º Passo: (Atualização x_i)

$$x_{i+1} = P_{\Omega \cap H_i}[x_i]$$

$$\text{onde } H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle F(z_i), x - z_i \rangle \leq 0\}.$$

O propósito do próximo lema é auxiliar na prova de convergência da seqüência (x_i) gerada pelo Algoritmo 1 para uma solução do $VIP(F, \Omega)$.

Lema 2.1. *Suponhamos que a busca linear do Algoritmo 1 está bem definida. Então é válido que*

$$x_{i+1} = P_{\Omega \cap H}[x_i^*] \quad (2.3.29)$$

onde $x_i^* = P_{H_i}[x_i]$.

Dem: (ver [19])

Pode se dizer que o teorema a seguir é um dos principais resultados desta seção.

Teorema 2.3. *Seja F contínua e pseudomonótona e suponhamos que o conjunto de soluções do $VIP(F, \Omega)$ é não vazio.*

Então a seqüência (x_i) gerada pelo Algoritmo 1 converge para a solução do $VIP(F, \Omega)$.

Dem: (ver [19])

Motivados por experimentos numéricos realizados em [19] os autores desta estratégia fizeram algumas alterações no Algoritmo 1 que influenciaram em seus experimentos numéricos.

A primeira alteração feita foi na forma de definir $r(x)$ no Algoritmo 1, que foi redefinido como $r(x, \mu) = x - P_{\Omega}[x - \mu F(x)]$.



Logo o novo Algoritmo fica da seguinte forma:

Algoritmo 2

Dados Iniciais $x_o \in \Omega$, $\gamma \in (0, 1)$, $\alpha \in (0, 1)$, $\eta_{-1} > 0$ e $\theta > 1$.

1º passo: (Critério de Parada)

Calcular $P_\Omega[x_i - F(x_i)]$

Computar $r(x_i, \mu_i)$ onde $\mu_i = \min\{\theta\eta_{i-1}, 1\}$.

Se $r(x_i) = x_i - P_\Omega[x_i - F(x_i)] = 0$ (**Pare**). Caso contrário

2º Passo: (Busca Linear)

Calcular $z_i = x_i - \eta_i r(x_i, \mu_i)$ onde $\eta_i = \gamma^{k_i} \mu_i$

e k_i é o menor inteiro k que satisfaz

$$\langle F(x_i - \gamma^k \mu_i r(x_i, \mu_i)), r(x_i, \mu_i) \rangle \geq \alpha \|r(x_i, \mu_i)\|^2 \quad (2.3.30)$$

3º Passo: (Atualização x_i)

$x_{i+1} = P_{\Omega \cap H_i}[x_i]$

onde $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle F(z_i), x - z_i \rangle \leq 0\}$.

O próximo teorema é uma adaptação do teorema 2.3 para este novo algoritmo.

Teorema 2.4. *Se F é contínua, pseudomonótona e o conjunto de soluções do $VIP(F, \Omega)$ é não vazio, então a seqüência (x_k) gerada pelo Algoritmo 2 converge à solução do $VIP(F, \Omega)$.*

Dem: (ver [19])

Nesta seção também é importante destacar algumas vantagens e deficiências desta estratégia de projeção dada em [19].

1- A convergência da seqüência (x_i) tanto no Algoritmo 1 quanto no Algoritmo 2 não necessitou que a F fosse diferenciável, o que caracteriza uma vantagem desta estratégia sobre a estratégia dada na seção anterior [1], que necessita que a F seja diferenciável.

2- A existência do hiperplano ∂H_i está fortemente relacionada com a monotonia ou a pseudomonotonia da F .

3- O baixo custo computacional desta estratégia é um fator importante.

4- O fato de que em cada iteração dos Algoritmos dados nesta seção é necessário calcular duas projeções sobre Ω e $\Omega \cap H_i$, nos leva a fazer uma pergunta.

É sempre fácil fazer tais projeções ?

A resposta para esta pergunta é que existem subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ onde esta projeção pode se tornar cara, o que caracteriza uma deficiência desta estratégia.

Um exemplo onde isso pode acontecer segue abaixo:

Exemplo: Consideremos o seguinte subconjunto $\Omega(n)$ de $\mathbb{R}^2$ formado por n elipses com um ângulo de rotação α :



Para ($n=6$)

$$\Omega(6) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x^t R H R^t x \leq 1, \quad \alpha = 0, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ\}$$

$$\text{Onde } R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ e } H = \begin{pmatrix} 1/25 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

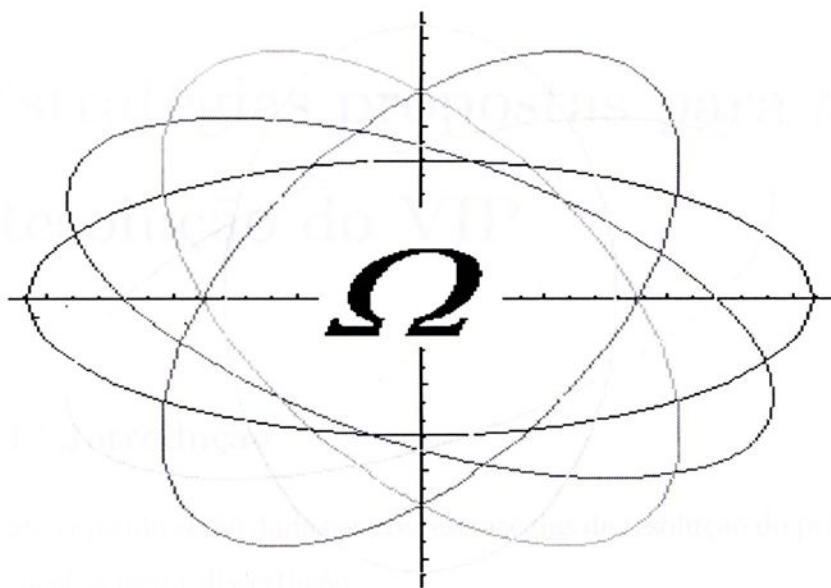


Figura 2.2: Região factível do Problema

No capítulo 3 será dada uma abordagem diferente do problema $VIP(F, \Omega)$ como um problema de complementaridade mista MCP para superar a deficiência desta estratégia.

Capítulo 3

Estratégias propostas para a Resolução do VIP

3.1 Introdução

Neste capítulo serão dadas as três estratégias de resolução do problema $VIP(F, \Omega)$ propostas nesta dissertação.

3.2 Resolução do problema VIP utilizando a função de Fischer-Burmeister penalizada

Nesta seção nós vamos considerar o problema $VIP(F, \Omega)$ da seguinte forma.

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, Ax = b, x \geq 0\} \quad (3.2.1)$$

e $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, $i = 1, \dots, n$, são funções convexas, pelo menos duas vezes diferenciáveis, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e F é contínua e diferenciável.

A proposta dada nesta seção consiste em uma alteração da função h do problema (2.2.11) dado no capítulo 2, proposta por Andreani, Friedlander e Martínez, convertendo o problema de otimização com restrições do tipo caixa (2.2.11) em um problema de otimização sem restrições.



3.2. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA VIP UTILIZANDO A FUNÇÃO DE FISCHER-BURMEISTER PENALIZADA

Esta mudança é importante já que agora a caracterização dos pontos estacionários do novo problema de otimização, associado com o $VIP(F, \Omega)$, não estará mais relacionada com os termos $(y^t z)^p$ e $(x^t v)^p$, uma vez que estes termos não pertencem mais à nova função h .

O novo problema de otimização associado ao $VIP(F, \Omega)$ pode ser colocado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{h}(x, y, z, u, v) \\ \text{s.a} \quad & x, y, z, u, v \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{h}(x, y, z, u, v) = & \|F(x) + g'(x)^t y + A^t u - v\|^2 + \varrho_1 \|z + g(x)\|^2 + \\ & \varrho_2 \|Ax - b\|^2 + [\phi_\lambda(y, z) + \phi_\lambda(x, v)], \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$\varrho_1, \varrho_2 \geq 0$ e $g'(x)$ é a matriz jacobiana de g ,

$$\phi_\lambda(a, b) = \sum_{i=1}^n [\lambda(a_i + b_i - \sqrt{a_i^2 + b_i^2}) + (1 - \lambda)a_i^+ b_i^+]^2 \quad (3.2.4)$$

e

$$a_i^+ = \max\{0, a_i\}. \quad (3.2.5)$$

A função ϕ_λ foi dada em [6] por Chen, Chen e Kanzow e utilizada na resolução do problema NCP, é conhecida como função de Fischer Burmeister Penalizada. O termo $\phi_{FB}(a_i, b_i) = a_i + b_i - \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ é conhecido como a função de Fischer Burmeister.

A função ϕ_λ , possui algumas propriedades importantes (ver [6]). Se considerarmos $\theta_\lambda(x, y) = [\lambda(x + y - \sqrt{x^2 + y^2}) + (1 - \lambda)x^+ y^+]^2$, algumas destas são:

$$\text{a- } \theta_\lambda(x, y) \geq 0, \quad \forall x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } \theta_\lambda(x, y) = 0 \implies xy = 0 \text{ e } x, y \geq 0$$

$$\text{b- } \theta_\lambda(x, y) = 0 \Leftrightarrow \nabla \theta_\lambda(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \theta_\lambda}{\partial x}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \theta_\lambda}{\partial y}(x, y) = 0$$

$$\text{c- } \frac{\partial \theta_\lambda}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \theta_\lambda}{\partial y}(x, y) \geq 0.$$

A função $\bar{h}$ deixa de ser duas vez diferenciável, em decorrência de uma das propriedades da Função de Fischer Burmeister penalizada não citada aqui (ver [6]). Logo deve-se tomar um certo cuidado no algoritmo utilizado para resolver este novo problema de otimização.

Então a idéia geral desta proposta consiste em substituir os termos $(y^t z)^p$ e $(x^t v)^p$ pela expressão

$$[\phi_\lambda(y, z) + \phi_\lambda(x, v)], \quad (3.2.6)$$

tornando o problema original que era com restrições de caixa em um problema de otimização sem restrições.

É importante ressaltar que Facchinei, Fischer e Kanzow propuseram em [8] uma estratégia semelhante, mas ao invés de utilizarem a função $\phi_\lambda(a_i, b_i) = \lambda \phi_{FB}(a_i, b_i) + (1 - \lambda)a_i^+ b_i^+$ eles utilizaram $\phi_{FB}(a_i, b_i) = a_i + b_i - \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ e o conjunto Ω era uma caixa.

Observa-se que se tomarmos $\lambda = 1$, ϕ_λ se reduz a ϕ_{FB} , logo a estratégia proposta por Facchinei, Fischer e Kanzow se torna um caso particular desta nova proposta.

A partir de agora vamos considerar o seguinte problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{h}(x, y, z, u, v) \\ \text{s.a} \quad & x, y, z, u, v \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{h}(x, y, z, u, v) = & \|F(x) + g'(x)^t y + A^t u - v\|^2 + \varrho_1 \|z + g(x)\|^2 + \\ & \varrho_2 \|Ax - b\|^2 + [\phi_\lambda(y, z) + \phi_\lambda(x, v)], \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

F é monótona e diferenciável.

O próximo teorema relaciona minimizadores globais do problema (3.2.7) com as soluções do $VIP(F, \Omega)$.

Teorema 3.1. *Se $(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*)$ é um minimizador global do problema (3.2.7) e $\bar{h}(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*) = 0$ então x^* é solução do $VIP(F, \Omega)$.*

Dem:

se $\bar{h}(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*) = 0$ então cada termo de $\bar{h}$ é nulo. Utilizando a propriedade (a) da função ϕ_λ temos

$$F(x^*) + g'(x^*)^t y^* + A^t u^* - v^* = 0 \quad (3.2.9)$$

$$g(x^*) \leq 0 \quad (3.2.10)$$

$$Ax^* = b \quad (3.2.11)$$

$$y^*, z^*, x^*, v^* \geq 0 \quad (3.2.12)$$

$$(3.2.13)$$

As condições acima significam que x^* satisfazem as condições K.K.T. do seguinte problema de otimização

$$\min \langle F(x^*), z \rangle \quad (3.2.14)$$

$$s.a \quad z \in \Omega \quad (3.2.15)$$

logo

$$\langle F(x^*), x^* \rangle \leq \langle F(x^*), z \rangle \quad \forall z \in \Omega \quad (3.2.16)$$

i.e.,

$$\langle F(x^*), z - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall z \in \Omega. \quad (3.2.17)$$

Portanto x^* é solução do $VIP(F, \Omega)$ ■

Como a busca de minimizadores globais é um trabalho nem sempre fácil, é interessante caracterizar pontos estacionários de (3.2.7) como soluções do $VIP(F, \Omega)$. O próximo teorema relaciona pontos estacionários de (3.2.7) como soluções do $VIP(F, \Omega)$.

Em primeiro lugar vamos definir H como sendo a matriz cujas colunas formam uma base para o núcleo de A .

Teorema 3.2. Se $(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^q \times \mathbb{R}_+^q \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^n$ é um ponto estacionário de (3.2.7) e

$$H^t[F'(x) + \sum_{i=1}^p [y^*]_i \nabla^2 g_i(x^*)]H > 0 \quad (3.2.18)$$

então x^* é solução do $VIP(F, \Omega)$.

Dem:

se $(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*)$ é um ponto estacionário de (3.2.7), então satisfaz as condições K.K.T., logo

$$[F(x^*)^t + \sum_{i=1}^n \nabla^2 g_i(x^*) y_i] (F(x^*) + g'(x^*)^t y + A^t \mu^* - v^*) + \quad (3.2.19)$$

$$2\varrho_1 g'(x^*)^t (z^* + g(x^*)) + 2\varrho_2 A^t (Ax^* - b) + \nabla_x \phi_\lambda(x^*, v^*) = 0$$

$$g'(x^*) (F(x^*) + g'(x^*)^t y^* + A^t \mu^* - v^*) + \nabla_y \phi_\lambda(y^*, z^*) = 0 \quad (3.2.20)$$

$$A(F(x^*) + g'(x^*)^t y^* + A^t \mu^* - v^*) = 0 \quad (3.2.21)$$

$$-(F(x^*) + g'(x^*)^t y^* + A^t \mu^* - v^*) + \nabla_v \phi_\lambda(x^*, v^*) = 0 \quad (3.2.22)$$

$$2\varrho_1 (z^* + g(x^*)) + \nabla_z \phi_\lambda(y^*, z^*) = 0 \quad (3.2.23)$$

Para facilitar a demonstração vamos chamar

$$P = F(x^*)^t + \sum_{i=1}^n \nabla^2 g_i(x^*) y_i^* \quad (3.2.24)$$

$$s_1 = F(x^*) + g'(x^*)^t y^* + A^t \mu^* - v^* \quad (3.2.25)$$

$$s_2 = z^* + g(x^*) \quad (3.2.26)$$

Assim as condições K.K.T. podem ser escritas da seguinte forma

$$P s_1 + 2\varrho_1 g'(x^*)^t s_2 + 2\varrho_2 A^t (Ax^* - b) + \nabla_x \phi_\lambda(x^*, v^*) = 0, \quad (3.2.27)$$

3.2. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA VIP UTILIZANDO A FUNÇÃO DE FISCHER-BURMEISTER PENALIZADA

$$g'(x^*)s_1 + \nabla_y \phi_\lambda(y^*, z^*) = 0, \quad (3.2.28)$$

$$As_1 = 0, \quad (3.2.29)$$

$$-s_1 + \nabla_v \phi_\lambda(x^*, v^*) = 0, \quad (3.2.30)$$

$$2\varrho_1(z^* + g(x^*)) + \nabla_z \phi_\lambda(y^*, z^*) = 0. \quad (3.2.31)$$

Logo

$$s_1^t [Ps_1 + 2\varrho_1 g'(x^*)^t s_2 + 2\varrho_2 A^t (Ax^* - b) + \nabla_x \phi_\lambda(x^*, v^*)] = 0. \quad (3.2.32)$$

Por (3.2.29), $s_1 \in N(A)$. Então

$$s_1^t Ps_1 = -2\varrho_1 s_1^t g'(x^*)^t s_2 - s_1^t \nabla_x \phi_\lambda(x^*, v^*). \quad (3.2.33)$$

Usando (3.2.28), (3.2.30) e (3.2.31) obtemos

$$s_1^t Ps_1 = -\nabla_y^t \phi_\lambda(y^*, z^*) \nabla_z \phi_\lambda(y^*, z^*) - \nabla_v^t \phi_\lambda(x^*, v^*) \nabla_x \phi_\lambda(x^*, v^*). \quad (3.2.34)$$

Usando a propriedade (c) da função ϕ_λ temos

$$s_1^t Ps_1 \leq 0. \quad (3.2.35)$$

Mas usando a hipótese $H^t PH > 0$ e por (3.2.29), então $s_1 \in N(A)$, logo $s_1 = 0$.

Usando este fato e substituindo em (3.2.27), (3.2.28), (3.2.30) e (3.2.31) temos

$$\nabla_v \phi_\lambda(x^*, v^*) = 0, \quad (3.2.36)$$

$$\nabla_y \phi_\lambda(y^*, z^*) = 0, \quad (3.2.37)$$

$$A^t (Ax^* - b) = 0. \quad (3.2.38)$$



Usando as propriedades (a) e (b) da ϕ_λ , substituindo em s_2 e usando que (3.2.38) implica que x^* é solução das equações normais, temos

$$\phi_\lambda(x^*, v^*) = 0; \quad (3.2.39)$$

$$\phi_\lambda(y^*, z^*) = 0; \quad (3.2.40)$$

$$z^* + g(x^*) = 0; \quad (3.2.41)$$

$$\|Ax^* - b\| = 0. \quad (3.2.42)$$

logo

$$\bar{h}(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*) = 0 \text{ e } x^* \text{ é solução do VIP}$$

■

Nota-se que na demonstração acima não foi utilizada a convexidade das restrições g_i 's, um fato interessante, pois mesmo as restrições não sendo convexas o conjunto Ω pode ser convexo, por exemplo:

$$\Omega = \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 \geq x_2^2 \text{ e } x_1 \geq 0\} \quad (3.2.43)$$

Este fato caracteriza uma vantagem em relação à estratégia dada por Andreani, Friedlander e Martínez em [1] que necessita da convexidade das g_i 's.

3.3 Reformulação do VIP como MCP utilizando projeções para a sua resolução

Nesta seção vamos propor uma estratégia de resolução do $VIP(F, \Omega)$ por meio de uma reformulação do $VIP(F, \Omega)$ como um Problema de Complementaridade Mista MCP.

Vamos considerar também o problema $VIP(F, \Omega)$ com Ω da seguinte forma:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, Ax = b, \quad a \leq x \leq b\} \quad a \geq -\infty, \quad b \leq \infty, \quad (3.3.44)$$

onde $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, $i = 1, \dots, q$, são convexas e pelo menos duas vezes diferenciáveis, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e F é monótona.

3.3. REFORMULAÇÃO DO VIP COMO MCP UTILIZANDO PROJEÇÕES PARA A SUA RESOLUÇÃO

Tanto no Algoritmo 1 como no Algoritmo 2 dados no capítulo 2 existe a necessidade de calcular pelo menos duas projeções ortogonais a cada iteração, primeiro sobre Ω , depois sobre a interseção de Ω com H_i , o que consiste em resolver dois problema de otimização a cada iteração, necessitando quase sempre de algum software (toolbox) de otimização.

As perguntas que surgem são as seguintes:

1ª-Será que estas projeções sempre são fáceis de serem calculadas ?

2ª-Será que é possível utilizar estes algoritmos (1 e 2) sem usar algum software de otimização?

3ª- Será que é possível colocar o $VIP(F, \Omega)$ de uma forma mais simples, por exemplo, como um MCP ou NCP ?

A resposta para a 1ª pergunta é que nem sempre o conjunto Ω é simples o que complica estas projeções.

A resposta para as outras perguntas é afirmativa e a estratégia aqui proposta mostrará isso.

Dado o $VIP(F, \Omega)$, R. Andreani, J.M. Martínez and B.F. Svaiter em [2] propuseram um reformulação do $VIP(F, \Omega)$ como um problema de complementaridade mista $MCP(G)$ onde

$$G(x, \mu, \lambda) = \begin{pmatrix} F(x) + A^t \mu + \sum_{i=1}^q \nabla g_i(x) \lambda_i \\ b - Ax \\ -g(x) \end{pmatrix}. \quad (3.3.45)$$

O novo conjunto Ω fica da seguinte forma :

$$\bar{\Omega} = \{(x, \mu, \lambda) \in \mathbb{R}^{n \times m \times q} : \lambda \geq 0 \quad a \leq x \leq b\}. \quad (3.3.46)$$

Algumas características importantes desta reformulação que foram demonstradas em [2] podem ser destacadas.

3.3. REFORMULAÇÃO DO VIP COMO MCP UTILIZANDO PROJEÇÕES PARA A SUA RESOLUÇÃO

1- Se a função F do $VIP(F, \Omega)$ é monótona então o novo operador G também é monótono em $\bar{\Omega}$.

2- Se (x^*, μ^*, λ^*) é solução do $MCP(G)$ então x^* é solução do $VIP(F, \Omega)$

Obs. A recíproca acima é válida se uma condição do tipo "constraint qualification"(ver [2, 12]) é satisfeita em Ω .

Logo a nossa proposta consiste em fazer uma reformulação do $VIP(F, \Omega)$ semelhante à dada em [2] como um $MCP(G)$, em seguida resolvê-lo usando a estratégia de projeção dada por [19], pois projetar sobre uma caixa não é um trabalho complicado, tendo assim uma solução para o $VIP(F, \Omega)$ por meio da resolução do $MCP(G)$, ou seja:

Dado $VIP(F, \Omega)$ é feita uma reformulação dele como $MCP(G)$ onde

$$G(x, \mu, \lambda) = \begin{pmatrix} F(x) + A^t \mu + \sum_{i=1}^q \nabla g_i(x) \lambda_i \\ b - Ax \\ -g(x) \end{pmatrix} \quad (3.3.47)$$

e

$$\bar{\Omega} = \{(x, \mu, \lambda) \in \mathbb{R}^{n \times m \times q} : \lambda \geq 0 \quad a \leq x \leq b\}. \quad (3.3.48)$$

Então é resolvido o $MCP(G)$ usando a estratégia de resolução dada na seção anterior já que o operador G também é monótono, obtendo assim uma solução do $VIP(F, \Omega)$.

O próximo teorema validará esta relação entre a solução do $VIP(F, \Omega)$ e a do $MCP(G)$, este teorema é um caso particular da proposição 2.2 dada em [12].

Teorema 3.3. *Sejam Ω , $\bar{\Omega}$ conforme definido em (3.3.44) e (3.3.48) respectivamente e F, G conforme já foram definidas anteriormente.*

Se (x^, μ^*, λ^*) é solução do $MCP(G)$ então x^* é solução do $VIP(F, \Omega)$*

Dem:

Se (x^*, μ^*, λ^*) é solução do MCP(G) então

$$\langle G(x^*, \mu^*, \lambda^*), (x, \mu, \lambda) - (x^*, \mu^*, \lambda^*) \rangle \geq 0 \quad \forall (x, \mu, \lambda) \in \bar{\Omega} \quad (3.3.49)$$

Então

$$\langle F(x^*) + A^t \mu^* + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla g_i(x^*), x - x^* \rangle \quad (3.3.50)$$

$$+ \langle Ax^* - b, \mu - \mu^* \rangle - \langle g(x^*), \lambda - \lambda^* \rangle \geq 0$$

Se tomarmos em particular $(x, 0, 0)$ tal que $x \in \Omega$ e substituirmos em (3.3.50) temos que

$$\begin{aligned} \langle F(x^*) + A^t \mu^* + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla g_i(x^*), x - x^* \rangle \\ - \langle Ax^* - b, \mu^* \rangle + \langle g(x^*), \lambda^* \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (3.3.51)$$

Desenvolvendo (3.3.51) temos

$$\begin{aligned} \langle F(x^*), x - x^* \rangle &\geq -(\langle A^t \mu^*, x - x^* \rangle + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \langle \nabla g_i(x^*), x - x^* \rangle \\ &- \langle Ax^* - b, \mu^* \rangle + \langle g(x^*), \lambda^* \rangle) \end{aligned}$$

Usando o fato de que $x^* \in \Omega$ e $g_i (i = 1, \dots, q)$ são convexas e substituindo em (3.3.51) temos que

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq - \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i^* g_i(x) \right) \quad \forall x \in \Omega \quad (3.3.52)$$

Como $\lambda_i^* \geq 0$ e $g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, q$, (3.3.52) implica que

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.3.53)$$

Logo (3.3.53) implica que x^* é solução do VIP(F, Ω). ■

Algumas características importantes desta reformulação merecem uma certa atenção.

1- Como usaremos a estratégia dada na seção 2.3 (Solodov e Svaiter) para a resolução do MCP(G) e $\bar{\Omega}$ é uma caixa, as projeções sobre a caixa se tornam fáceis.

2- Esta nova proposta utiliza o baixo custo computacional da estratégia de projeção dada no capítulo 2, quando Ω é uma caixa.

3- Pode ser desnecessária a utilização de ferramentas de otimização para conseguir essas projeções.

4- O número de variáveis aumenta conforme o número de restrições do problema aumenta.

5- Uma das idéias fundamentais desta estratégia não é só ser competitiva em relação a tempo computacional com outras estratégias, mas também de fácil implementação, ou seja, que não tenha necessidade de ferramentas de otimização (toolbox) para sua implementação.

3.4 Perturbações do Tipo Ponto Proximal

Em casos especiais do problema $VIP(F, \Omega)$ quando a função F é monótona, pontos estacionários de uma função de mérito associada ao $VIP(F, \Omega)$ são soluções do $VIP(F, \Omega)$.

Mas em geral, mesmo que a F seja monótona, isto não garante que pontos estacionários desta função de mérito sejam solução do $VIP(F, \Omega)$.

Andreani, Friedlander e Martínez propuseram uma perturbação da função F do $VIP(F, \Omega)$ da seguinte forma:

$$F_k(x) = F(x) + \epsilon_k x, \quad (3.4.54)$$



onde $0 < \epsilon_{k+1} \leq \epsilon_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\epsilon_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

No trabalho [1] foi mostrado que a sequência (x_k) de soluções do problema $VIP(F_k, \Omega)$ converge para x^* solução de mínima norma do $VIP(F, \Omega)$ e esta é única.

A unicidade desta solução vem do fato que se a F é monótona, F_k é fortemente monótona, logo pelo corolário 3.2 [12] esta solução é única.

A proposta apresentada nesta seção consiste em fazer uma perturbação da F do tipo ponto proximal, ou seja, $F_k(x) = F(x) + \mu(x - x_k)$ onde $\mu > 0$ pode ser fixo.

A partir de agora vamos considerar o problema P_{k+1} , como encontrar $x_{k+1} \in \Omega$ tal que

$$\langle F(x) + \mu(x - x_k), z - x_{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall z \in \Omega. \quad (3.4.55)$$

O próximo resultado é importante para garantir a unicidade da solução de P_{k+1} .

Resultado: *Seja $F_k(x) = F(x) + \mu(x - x_k)$. Se F é monótona então F_k é fortemente monótona.*

Dem: Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\langle F_k(x) - F_k(y), x - y \rangle = \langle F(x) + \mu(x - x_k) - F(y) - \mu(y - x_k), x - y \rangle$$

Usando a monotonia da F ,

$$\langle F_k(x) - F_k(y), x - y \rangle = \quad (3.4.56)$$

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle + \mu \langle x - y, x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2 \quad (3.4.57)$$

Portanto F_k é fortemente monótona. ■

Definição 3.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$, $U = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \Omega\}$.*

U é chamado conjunto de soluções do $VIP(F, \Omega)$, que será denotado nesta seção por $SOL(VIP(F, \Omega))$.

Os próximos lemas serão de grande utilidade na demonstração do principal teorema desta seção.

Em todos os lemas vamos supor que F é monótona e o conjunto $SOL(VIP(F, \Omega))$ é não vazio.

Lema 3.1. *Sejam $S = SOL(VIP(F, \Omega))$ e $\bar{x} \in S$. Se (x_k) é uma sequência de soluções dos problemas (P_{k+1}) então*

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \|x_k - \bar{x}\| \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.4.58)$$

Dem:

Sejam x_{k+1} solução do problema P_{k+1} e $\bar{x} \in S$. Então

$$\langle F(x_{k+1}) + \mu(x_{k+1} - x_k), \bar{x} - x_{k+1} \rangle \geq 0, \quad (3.4.59)$$

seguinte que

$$\langle F(x_{k+1}), x_{k+1} - \bar{x} \rangle \leq \mu \langle x_{k+1} - x_k, \bar{x} - x_{k+1} \rangle. \quad (3.4.60)$$

Como a F é monótona e $\bar{x} \in S$, temos

$$\langle x_{k+1} - x_k, \bar{x} - x_{k+1} \rangle \geq 0. \quad (3.4.61)$$

Mas

$$\langle x_{k+1} - x_k, \bar{x} - x_{k+1} \rangle = \langle x_{k+1} - \bar{x} + \bar{x} - x_k, \bar{x} - x_{k+1} \rangle = \quad (3.4.62)$$

$$\langle x_{k+1} - \bar{x}, \bar{x} - x_{k+1} \rangle + \langle \bar{x} - x_k, \bar{x} - x_{k+1} \rangle \geq 0, \quad (3.4.63)$$

então

$$\langle \bar{x} - x_k, \bar{x} - x_{k+1} \rangle \geq \|\bar{x} - x_{k+1}\|^2. \quad (3.4.64)$$

Usando o fato que



$$\langle \bar{x} - x_k, \bar{x} - x_{k+1} \rangle \leq \|\bar{x} - x_k\| \cdot \|\bar{x} - x_{k+1}\|, \quad (3.4.65)$$

temos .

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \|x_k - \bar{x}\| \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.4.66)$$

■

Lema 3.2. *Sejam (x_k) uma sequência de soluções do problema (P_k) , (x_j) e (x_p) duas subsequências de (x_k) que convergem para u e $v \in \mathbb{R}^n$ respectivamente, então para todo $\bar{x} \in \text{SOL}(\text{VIP}(F, \Omega))$*

$$\|u - \bar{x}\| = \|v - \bar{x}\| \quad (3.4.67)$$

Dem:

Seja $K = \{1, 2, 3, \dots\}$ o conjunto de índices de (x_k) e sejam (x_j) e (x_p) subsequências de (x_k) tais que $x_j \rightarrow u$ e $x_p \rightarrow v$, K_1 e K_2 subconjuntos de K onde K_1 é o conjunto de índices de (x_j) e K_2 é o conjunto de índices de (x_p) .

$$\text{Se } x_j \rightarrow u \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists j_o \in K_1 : \text{ para } j \geq j_o \text{ temos } \|x_j - u\| < \epsilon \quad (3.4.68)$$

$$\text{Se } x_p \rightarrow v \Rightarrow \forall \delta > 0 \exists p_o \in K_2 : \text{ para } p \geq p_o \text{ temos } \|x_p - v\| < \delta \quad (3.4.69)$$

Esta demonstração será dividida em duas partes

1ª Parte: $\|u - \bar{x}\| \geq \|v - \bar{x}\|$

Suponhamos que existe $\bar{x} \in \text{SOL}(\text{VIP}(F, \Omega))$ tal que $\|u - \bar{x}\| < \|v - \bar{x}\|$.

Sejam $\bar{K}_1 \subset K_1$ e $\bar{K}_2 \subset K_2$ tais que se $\bar{p} \in \bar{K}_1$ e $\bar{j} \in \bar{K}_2$ então para $\bar{p} \geq p_o$ e $\bar{j} \geq j_o$ é $\|x_{\bar{p}} - \bar{x}\| < \|x_{\bar{j}} - \bar{x}\|$. Isto é possível pois (x_j) e (x_p) convergem para u e v respectivamente e $\|u - \bar{x}\| < \|v - \bar{x}\|$.



Logo, se tormarmos $p^* \in \bar{K}_1$ e $j^* \in \bar{K}_2 : p^* < j^*$ então $\|x_{p^*} - \bar{x}\| < \|x_{j^*} - \bar{x}\|$ uma contradição pelo lema 3.1, portanto $\|u - \bar{x}\| \geq \|v - \bar{x}\|$.

2ª Parte: $\|u - \bar{x}\| \leq \|v - \bar{x}\|$

Suponhamos que $\exists \bar{x} \in SOL(VIP(F, \Omega))$ tal que $\|u - \bar{x}\| > \|v - \bar{x}\|$.
Sejam $\bar{K}_1 \subset K_1$ e $\bar{K}_2 \subset K_2$ tais que se $\bar{p} \in \bar{K}_1$ e $\bar{j} \in \bar{K}_2$ então para $\bar{p} \geq p_o$ e $\bar{j} \geq j_o$ e $\|x_{\bar{p}} - \bar{x}\| > \|x_{\bar{j}} - \bar{x}\|$. Isto é possível pois (x_j) e (x_p) convergem para u e v respectivamente e $\|u - \bar{x}\| > \|v - \bar{x}\|$

Logo, se tomarmos $p^* \in \bar{K}_1$ e $j^* \in \bar{K}_2 : p^* > j^*$ então $\|x_{p^*} - \bar{x}\| > \|x_{j^*} - \bar{x}\|$ uma contradição pelo lema 3.1, portanto $\|u - \bar{x}\| \leq \|v - \bar{x}\|$. ■

Lema 3.3. *Sejam (x_k) uma seqüência de soluções de (P_k) e (x_j) uma subseqüência de (x_k) tal que $x_j \rightarrow x^+$ e $x_{j+1} \rightarrow x^*$, então $x^+ = x^*$.*

Dem: Seja $\bar{x} \in SOL(VIP(F, \Omega))$ então

$$\langle F(x_{j+1}) + \mu(x_{j+1} - x_j), \bar{x} - x_{j+1} \rangle \geq 0. \quad (3.4.70)$$

Tomando o limite na expressão acima e usando o fato que a F é contínua temos:

$$\langle F(x^*) + \mu(x^* - x^+), \bar{x} - x^* \rangle \geq 0. \quad (3.4.71)$$

Mas

$$\langle F(x^*) + \mu(x^* - x^+), \bar{x} - x^* \rangle = \langle F(x^*) - F(\bar{x}) + F(\bar{x}) + \mu(x^* - x^+), \bar{x} - x^* \rangle \quad (3.4.72)$$

$$\mu(x^* - x^+), \bar{x} - x^* \rangle = \langle F(x^*) - F(\bar{x}), \bar{x} - x^* \rangle + \quad (3.4.73)$$

$$\langle F(\bar{x}), \bar{x} - x^* \rangle + \mu \langle x^* - x^+, \bar{x} - x^* \rangle \geq 0. \quad (3.4.74)$$

Usando a monotonia da F e a expressão acima temos

$$\langle x^* - x^+, \bar{x} - x^* \rangle \geq 0. \quad (3.4.75)$$

Mas

$$\langle x^* - x^+, \bar{x} - x^* \rangle = \langle x^* - \bar{x}, \bar{x} - x^* \rangle + \langle \bar{x} - x^+, \bar{x} - x^* \rangle \geq 0, \quad (3.4.76)$$

então

$$\langle \bar{x} - x^+, \bar{x} - x^* \rangle \geq \|x^* - \bar{x}\|^2. \quad (3.4.77)$$

Como

$$\langle \bar{x} - x^+, \bar{x} - x^* \rangle \leq \|\bar{x} - x^+\| \|\bar{x} - x^*\| \cos \theta. \quad (3.4.78)$$

onde θ é o ângulo entre $\bar{x} - x^+$ e $\bar{x} - x^*$, então

$$\cos \theta \|\bar{x} - x^+\| \geq \|\bar{x} - x^*\|. \quad (3.4.79)$$

Logo, pelo lema anterior

$$\cos \theta \geq 1 \text{ então } \cos \theta = 1 \text{ e } \theta = 0$$

$$\text{Portanto } \bar{x} - x^+ = \bar{x} - x^* \text{ assim } x^+ = x^*. \quad \blacksquare$$

Lema 3.4. *Se (x_k) uma sequência de soluções de (P_k) então (x_k) admite uma subsequência convergente para $x^* \in \text{SOL}(\text{VIP}(F, \Omega))$.*

Dem: Pelo lema 3.1 temos que se $\bar{x} \in \text{SOL}(\text{VIP}(F, \Omega))$

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \|x_k - \bar{x}\| \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.4.80)$$

Logo

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \|x_0 - \bar{x}\| \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.4.81)$$

Então (x_k) é uma sequência limitada pela bola de raio $\|x_0 - \bar{x}\|$ e centro $\bar{x}$.

Isto significa que (x_k) admite uma subsequência (x_j) convergente para x^* e pelo lema 3.3, $x_{j+1} \rightarrow x^*$. Ainda,

$$\langle F(x_{j+1}) + \mu(x_{j+1} - x_j), x - x_{j+1} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.4.82)$$

Tomando o limite na expressão acima

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.4.83)$$

portanto $x^* \in \text{SOL}(\text{VIP}(F, \Omega))$. ■

Pode se dizer que o teorema a seguir é um dos resultados mais importantes desta seção.

Teorema 3.4. *Se (x_k) uma seqüência de soluções de (P_k) então (x_k) converge a $x^* \in SOL(VIP(F, \Omega))$.*

Dem: Seja $K \subset \mathbb{N}$ o conjunto de índices da seqüência (x_k) .

Pelo lema 3.4 existe um subseqüência (x_j) de (x_k) que converge para $x^* \in SOL(VIP(F, \Omega))$.

Então dado $\epsilon > 0$ $\exists j_0 \in K_1 \subset K$ tal que para $j \geq j_0$.

$$\|x_j - x^*\| < \epsilon. \quad (3.4.84)$$

Tomando $k_0 \in K$ de forma que $k_0 > j_0$,

temos que para $k \geq k_0$, pelo lema 3.1

$$\|x_k - x^*\| \leq \|x_{j_0} - x^*\| < \epsilon, \quad (3.4.85)$$

portanto $x_k \rightarrow x^*$. ■

Capítulo 4

Experimentos Numéricos e Conclusões Finais

Nesta capítulo serão dados alguns experimentos numéricos comparando às estratégias propostas nesta dissertação e algumas conclusões finais.

Para facilitar a notação vamos nos referir às estratégias da seguinte forma.

E1: Estratégia proposta por Andreani, Friedlander e Martínez em [1].

E2: Estratégia proposta nesta dissertação usando a função de Fischer-Burmeister penalizada.

E3: Estratégia proposta por Solodov e Svaiter em [19].

E4: Estratégia proposta nesta dissertação que usa a reformulação do $VIP(F, \Omega)$ como um MCP.

4.1 Algoritmos

Nesta seção vamos descrever como foram implementadas as estratégias E1, E2, E3 e E4.

Nas estratégias E1 e E2 nós utilizamos a rotina `constr.m` do matlab versão 5.0 para a resolução do problema de otimização.



Nas estratégias E3 e E4 nós utilizamos o Algoritmo 2 dado na seção 2.3 com os seguintes parâmetros iniciais $\alpha = 0.5$, $\theta = 4$, $\eta_{-1} = 1$ e $\sigma = 0.5$ e implementamos no matlab versão 5.0 .

Tanto no passo 1 como no passo 2 do Algoritmo 2 dado na seção 2.3 existe a necessidade de resolver um problema de projeção, primeiro sobre Ω e depois sobre $H \cap \Omega$. Resolver este problema é equivalente a resolver um problema de otimização convexa.

Na estratégia E3 para resolver este problema de otimização nós utilizamos a rotina `constr.m` do matlab 5.0. Já na estratégia E4 também foi utilizado o Algoritmo 2 dado na seção 2.3, mas nós propusemos uma nova forma de fazer a projeção sobre $\partial H_i \cap \Omega$, onde ∂H_i é o hiperplano definido na seção 3.3, de forma que o ponto da próxima iteração fosse obtido de forma explícita, uma vez que a projeção sobre Ω quando Ω é uma caixa, é um trabalho simples.

Este processo em $\mathbb{R}^2$ pode ser descrito da seguinte forma:

Seja x_i a iteração corrente da sequência gerada pelo algoritmo 2 do método dado por [19]; primeiramente foi gerado $\bar{x}_i$ como a projeção ortogonal de x_i sobre ∂H_i . Esta projeção pode ser feita de forma explícita (ver [19]): Se $\bar{x}_i \in \bar{\Omega}$ então $x_{i+1} = \bar{x}_i$, caso contrário $\bar{x}_i$ é projetado sobre $\bar{\Omega}$, neste caso uma caixa. Seja p_i esta projeção; a partir daí gera-se uma direção d_i da seguinte forma:

- 1º- Projeta-se p_i sobre ∂H_i gerando j_i ;
- 2º- Projeta-se j_i sobre a caixa gerando p_i^1 ;
- 3º- $d_i = p_i^1 - p_i$.

Após gerar d_i toma-se esta direção que está sobre a fronteira da caixa até o momento que intercepte o hiperplano ∂H_i gerando assim x_{i+1} .



A figura abaixo descreve este processo de projeção.

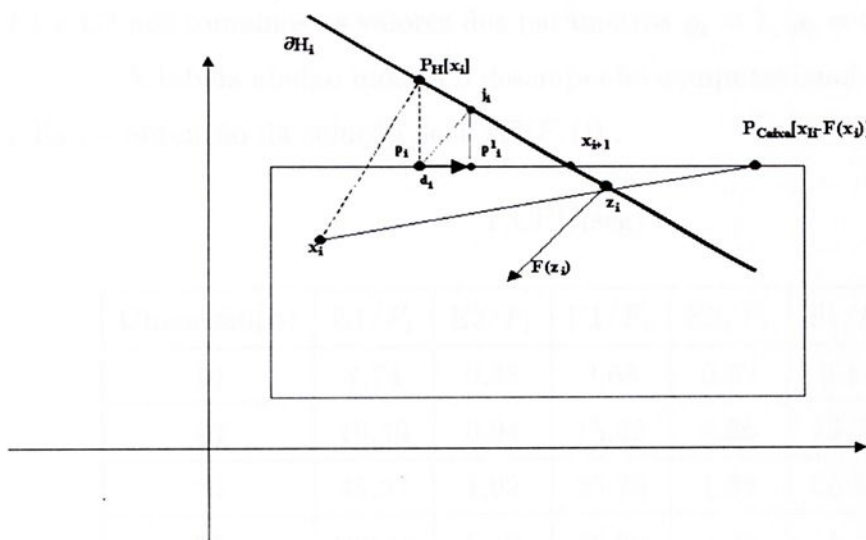


Figura 4.1: Projeção sobre $\bar{\Omega} \cap H_i$

4.2 Descrição dos Problemas e Resultados Numéricos

4.2.1 Problema 1 (Somax):

Vamos considerar o problema $VIP(F, \Omega)$ definido da seguinte forma

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = n\} \quad (4.2.1)$$

Neste caso os operadores F foram tomados da seguinte forma:

$$F_1(x) = (I_{n \times n} + uu^t)x \quad \text{onde } u \in \mathbb{R}^n \text{ (fixo);} \quad (4.2.2)$$

$$F_2(x) = (f_1^2(x), \dots, f_n^2(x))^t, \quad f_i^2(x) = \exp(x(i)) - 1; \quad (4.2.3)$$

$$F_3(x) = (f_1^3(x), \dots, f_n^3(x))^t, \quad f_i^3(x) = \exp(x(i)) * x(i) - 1 \quad (4.2.4)$$

$$i = 1, \dots, n. \quad (4.2.5)$$

Dados Iniciais das estratégias usados neste problema:

4.2. DESCRIÇÃO DOS PROBLEMAS E RESULTADOS NUMÉRICOS

Em todas as estratégias nós tomamos $x_0 = (0, 0, \dots, 0)$ e nas estratégias E1 e E2 nós tomamos os valores dos parâmetros $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 50$, $\varrho_3 = 1$ e $p = 1$.

A tabela abaixo mostra o desempenho computacional das estratégias E1 e E2 na obtenção da solução do $VIP(F, \Omega)$.

T.CPU(seg)

Dimensão(n)	E1/ F_1	E2/ F_1	E1/ F_2	E2/ F_2	E1/ F_3	E2/ F_3
10	2,74	0,33	3,68	0,33	5,11	0,82
20	10,49	0,94	15,32	0,66	13,79	0,94
30	45,37	1,92	25,76	1,38	26,31	6,43
50	109,13	5,49	66,29	5,38	*-*	10,82

- : Não encontrou a solução.

A tabela a seguir mostrará o desempenho computacional das estratégias E3 e E4 na obtenção da solução do $VIP(F, \Omega)$.

T.CPU(seg)

Dimensão(n)	E3/ F_1	E4/ F_1	E3/ F_2	E4/ F_2	E3/ F_3	E4/ F_3
10	0,01	0,11	0,06	0,27	0,06	0,6
20	0,06	0,22	0,05	0,39	0,05	0,77
30	0,11	0,33	0,11	0,55	0,11	0,88
50	0,22	0,66	0,27	0,77	0,22	1,15
100	0,93	1,98	0,82	1,38	0,82	1,97
200	4,23	8,62	4,23	2,86	4,29	3,46
500	53,77	9,17	54,71	50,37	53,71	7,86

Os problemas a seguir foram propostos em [11].

4.2.2 Problema 2 (Fukushima1):

Considere o $VIP(F, \Omega)$ da seguinte forma:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + 0.4x_2^2 + 0.6x_3^2 - 1 \leq 0\}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 0.2x_1^3 - 0.5x_2 + 0.1x_3 - 4 \\ -0.5x_1 + x_2 + 0.1x_2^3 + 0.5 \\ 0.5x_1 - 0.2x_2 + 2x_3 - 0.5 \end{pmatrix}$$

Dados Iniciais das estratégias usados neste problema:

Nas Estratégias E1 e E2 o ponto inicial foi $x_0 = (2, 2, 2)$ $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 50$, $\varrho_3 = 1$ e $p = 1$.

Nas Estratégias E3 e E4 utilizou-se o ponto inicial $x_0 = (0, 0, 0)$, o vetor dos multiplicadores nulo e a solução do problema é $x^* = (1, 0, 0)$.

4.2.3 Problema 3 (Fukushima2):

Considere o $VIP(F, \Omega)$ da seguinte forma:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + x_3 - 210 = 0, \quad (4.2.6) \\ x_4 + x_5 - 120 = 0, x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5\}$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{pmatrix} 10x_1 + 5x_4 + 1000 \\ 15x_2 + 5x_5 + 950 \\ 20x_3 + 3000 \\ 2x_1 + 20x_4 + 1000 \\ x_2 + 25x_5 + 1300 \end{pmatrix}$$

Dados Iniciais das estratégias usados neste problema:

Nas Estratégias E1 e E2 o ponto inicial foi $x_0 = (10, 10, \dots, 10)$ e parâmetros de penalização $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 50$ $\varrho_3 = 1$ e $p = 1$.

Nas Estratégias E3 e E4 utilizou-se o ponto inicial $x_0 = (80, 80, 80, 80, 80)$, o vetor dos multiplicadores nulo e a solução do problema é $x^* = (120, 90, 0, 70, 50)$.

T.CPU(seg)				
Prob.	E1	E2	E3	E4
Fukushima1	1,38	0,76	3,68	7,64
Fukushima2	0,22	0,11	1,16	0,11

Obs. Na estratégia E1 realizamos experimentos numéricos com $p = 1$ e $p = 2$, mas observamos que com $p = 2$ o tempo computacional foi muito alto, por isso não apresentamos os resultados com $p = 2$.

4.3 Conclusões Finais

Durante esta dissertação de mestrado foram estudadas estratégias já conhecidas de resolução do VIP e foram propostas algumas novas estratégias de resolução do VIP baseadas nestas já conhecidas.

A primeira estratégia proposta na seção 3.2 está relacionada com a estratégia dada por Andreani, Friedlander e Martínez [1]. Nesta estratégia a adaptação da função de Fischer-Burmeister penalizada a função de mérito h acarretou algumas características ao novo problema de otimização associado ao VIP.

- (i) O novo problema de otimização deixou de ser um problema com restrições. Este fato se deve às propriedades da função de Fischer-Burmeister penalizada.
- (ii) A constante p dada na função de mérito do problema de otimização proposto por Andreani, Friedlander e Martínez aparece na nova função de mérito, logo a constante p não influencia a caracterização de pontos estacionários como soluções do VIP.
- (iii) A nova função de mérito não é duas vezes diferenciável, logo devemos tomar cuidado com o algoritmo utilizado para resolver este problema de otimização.
- (iv) Um ponto interessante nesta estratégia foi o fato de que não foi necessária a convexidade das restrições g_i 's, o que caracteriza uma vantagem em relação à estratégia de Andreani, Friedlander e Martínez [1].



Observando os experimentos numéricos verificamos que a nossa estratégia (E2) obteve um desempenho computacional melhor em relação à estratégia proposta por Andreani, Friedlander e Martínez (E1).

A segunda proposta dada na seção 3.3 esta relacionada com a estratégia de projeção dada por Solodov e Svaiter em [19].

As projeções necessárias na estratégia dada por Solodov e Svaiter podem se tornar difíceis dependendo do conjunto Ω . Como na nossa estratégia nós reformulamos o VIP como um MCP estas projeções se tornaram fáceis, o que caracterizou uma vantagem em relação a estratégia dada por Solodov e Svaiter.

Uma outra vantagem está relacionada com a implementação desta nova estratégia, uma vez que para implementá-la não foi necessária nenhuma rotina de otimização para resolver as projeções. Já na estratégia dada por Solodov e Svaiter existe a necessidade de uma rotina de otimização para se conseguir esta projeção.

Em relação aos experimentos numéricos no problema 1 podemos observar que a estratégia de Solodov e Svaiter (E3) obteve um desempenho computacional melhor que a nossa estratégia (E4) quando a dimensão do problema é menor ou igual a 100, mas a partir do momento que a dimensão do problema aumenta nossa estratégia se comportou melhor.

Este fato se deve às características do conjunto Ω . A partir do momento que a dimensão dos problemas aumenta, o conjunto Ω ficou mais complicado, tornando assim o passo de projeção necessário na estratégia Solodov e Svaiter caro computacionalmente.

Já no problema 2 a estratégia Solodov e Svaiter (E3) se comportou melhor que a nossa estratégia (E4), mas no problema 3, a nossa estratégia se comportou melhor.

Na terceira e última proposta dada na seção 3.4, nós conseguimos resultados teóricos bons que mostram a convergência da sequência (x_k) dos problemas $VIP(F_k, \Omega)$ à solução do $VIP(F, \Omega)$, utilizando a perturbação do tipo ponto proximal.



Andreani, Friedlander e Martínez mostraram em [1] que a seqüência (x_k) , utilizando a perturbação do tipo Tikhonov converge a solução de mínima norma do $VIP(F, \Omega)$.

Na nossa proposta a solução obtida não é a de mínima norma, mas a vantagem neste caso é que o problema se torna bem condicionado graças ao parâmetro μ que fica fixo, o que não acontece na estratégia [1] pois $\epsilon_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

De um modo geral, em todas as estratégias propostas conseguimos resultados teóricos bons que contribuíram em relação às estratégias existentes para resolução do $VIP(F, \Omega)$. Para as duas primeiras estratégias proposta obtivemos resultados numéricos bons.

Continuando os estudos nesta área, uma opção seria estudar algoritmos que resolvem projeções sobre uma caixa e a interseção com um hiperplano (ver [15]), e testá-los na segunda estratégia proposta dada na seção 3.3 desta dissertação, buscando assim conseguir melhores resultados computacionais para esta estratégia.



Referências Bibliográficas

- [1] R. Andreani, A. Friedlander and J.M. Martínez, On the Solution of Finite-Dimensional Variational Inequalities Using Smooth Optimizations with Simples Bounds, *Journal on Optimization Theory and Applications* pp.635-657, 1994.
- [2] R. Andreani, J.M. Martínez and B.F. Svaiter, On the Regularization of mixed complementarity problems, *Num. Funct. and Optimization*, 21 (5 & 6) - pp. 589-600, 2000.
- [3] R. Andreani and J.M. Martínez, On the Reformulation of Nonlinear Complementarity Problems using the Fischer-Burmeister function, *Applied. Mathematics Letters*, 12 pp. 7-12, 1998.
- [4] R. Andreani and J.M. Martínez, On the Solution of Bounded and Unbounded Mixed Complementarity Problems, *Linear Algebra and its Applications*, 281 pp. 247-257, 1998.
- [5] R. Andreani and A. Friedlander, Bound Constraint Smooth Optimization for Solving Variational Inequalities and Related Problems, *submetido*.
- [6] B. Chen , X.Chen and C. Kanzow, A penalized Fischer Burmeister NCP-Function Theoretical Investigation and Numerical Results, *Mathematical Prog.*, 88 pp.211-216, 2000.



- [7] Y. Censor, A. N. Iusem and S. Azenios, An Interior Point Method with Bregman Functions for the Variational Inequality Problem with Paramonotone Operators, *Mathematical Prog.*, 81, -pp. 373-400, 2000.
- [8] F. Facchinei, A. Fischer and C. Kanzow, A Semi Smooth Newton Method for Variational Inequalities the case of Box Constraints, *state of the art* eds. M.C. Ferris and J.S. Pang SIAM, Philadelphia, pp. 76-90, 1997.
- [9] A. Friedlander, J.M. Martínez and S.A. Santos, A new strategy for solving variational inequalities in bounded polytopes, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 16 pp. 653-668, 1995.
- [10] A. Friedlander, *Elementos de programação não linear*, Editora Unicamp-Campinas-SP, 1994.
- [11] M.Fukushima, A Relaxed Projection Method for Variational Inequalities, *Mathematical Prog.*, 35 pp. 58 -70 , 1986.
- [12] P.T. Harker, J.S. Pang , Finite Dimensional Variational Inequality and nonlinear Complementary problems: A survey of Theory, Algorithms and Applications, *Mathematical Prog.*, 48, pp. 161-220, 1990.
- [13] A.N. Iusem and B.F. Svaiter, A variant of Korpelevich's method for variational inequalities with a new search strategy, *Optimization*, 42 pp 309-321, 1997.
- [14] D.G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programing*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, MA, 1984.
- [15] N.Maculan, C.P. Santiago, E.M. Macambira and M.H.Cauteiro Jardim , An $O(n)$ algorithm for projecting a vector on the intersection of a hyperplane and a box in $\mathbb{R}^n$, *submetido*.
- [16] J.M. Martínez and S.A. Santos, *Métodos Computacionais de Otimização*, IMPA-CNPQ, Rio de Janeiro, 1995.



- [17] M.V. Solodov and P. Tseng, Modified Projection - Type Methods for Monotone Variational Inequalities, *SIAM J. Control and Optimization*, vol 34 n.5, pp.1814-1830, September, 1996.
- [18] M.V. Solodov and P. Tseng, Some Methods Based on the D-Gap Function for solving Monotone Variational Inequalities, *Computational Optimization and Applications*, 17, pp. 225-277, 2000.
- [19] M.V. Solodov and B.F. Svaiter, A New Projection Method for Variational Inequality Problems , *SIAM J. Control Optimization*, vol 37 n.3 pp.765-776, 1999.
- [20] M.V. Solodov and B.F. Svaiter, A globally Convergent Inexact Newton Method for Systems of Monotone equations, Kluwer Academic Publishers, eds. Norwell, MA, pp. 355-369, 1998.
- [21] M.V. Solodov and A.N. Iusem, Newton-Type Methods with Generalized Distances for Constrained Optimization, *Optimization*, vol 41 pp.257-278, 1997.
- [22] M.V. Solodov, A Class of Globally Convergent Algorithms for Pseudomonotone Variational Inequalities, *Applied Optimization* 50, Kluwer Academic Publishers, chapter 14 , pp.297-315, 2001.
- [23] M.V. Solodov, Some Optimization Reformulations of the Extended Linear Complementarity Problem, *Computacional Optim0. and Applications*, 13, pp. 187-200, 1999.
- [24] R. Tyrrel Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton, New Jersey-Princeton University Press, 1970.



