

Antonio Junior Poiate

Um Estudo Sobre o Princípio Variacional da
Mínima Ação: Teoria, Aplicações e um
Exemplo na Variedade de Grupo

✧

Título da dissertação:

Um estudo sobre o Princípio
Variacional da Mínima Ação: Teoria,
Aplicações e um exemplo na

**UM ESTUDO SOBRE O PRINCÍPIO VARIACIONAL
DA MÍNIMA AÇÃO: TEORIA, APLICAÇÕES
E UM EXEMPLO NA VARIEDADE DE GRUPO**

Antonio Junio Poiate

Dissertação de Mestrado

**Pós-Graduação em Matemática Aplicada
e Computacional
MAC 013**

ANTONIO JUNIO POIATE

Orientador: Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto



Título da dissertação:

**Um estudo sobre o Princípio
Variacional da Mínima Ação: Teoria,
Aplicações e um exemplo na
Variedade de Grupo.**

ANTONIO JUNIO POIATE

Orientador: **Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto**



ANTONIO JUNIO POIATE

**UM ESTUDO SOBRE O PRINCÍPIO
VARIACIONAL DA MÍNIMA AÇÃO: TEORIA,
APLICAÇÕES E UM EXEMPLO NA VARIEDADE
DE GRUPO.**

Dissertação apresentada ao Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas da
Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho", Campus de São José
do Rio Preto, para a obtenção do título
de Mestre em Ciências Exatas (Área de
Concentração: Matemática Aplicada e
Computacional).

Orientador: Prof. Dr. Manoel Ferreira
Borges Neto



733/97

São José do Rio Preto
1996

AGRADECIMENTO

ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto pelo incentivo, orientação, dedicação e paciência;

aos meus irmãos Célia, Arlete, Sergio, Humberto, Marcos, Elisabete, meus cunhados José Ricardo, Roseli, Susy Mary, meus sobrinhos Marcella, Leandro, Francieli, Heijer e Rafael, pelo carinho e pela descontração;

à amiga Fátima Quintiliano da Silva pela colaboração, perseverança e companheirismo;

aos amigos Ana Paula dos Santos Lázaro e Rodrigo Augusto Quintiliano da Silva pela colaboração;

ao amiguinho Davi Quintiliano pelos risos;

aos amigos, entre eles, Irene Izilda da Silva, Eduardo César Catanozi, Cleusa Teixeira Brochado, Cláudia Augusta Hidalgo, Sandra M. Malsaskiene e Sônia Maria Cestari pelas dicas e apoio;

aos funcionários da seção de pós-graduação, biblioteca e xerox pelo profissionalismo;

aos professores e funcionários das escolas: E.E.P.G. "Prof. Michel P. Sawaya" e Colégio Abrahão Naimé pela torcida.

Obrigado.

Aos meus pais, Arcolino e Vanda
sempre presentes, dedico.

AGRADECIMENTO

ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto pelo incentivo, orientação, dedicação e paciência;

aos meus irmãos Célia, Arlete, Sergio, Humberto, Marcos, Elisabete, meus cunhados José Ricardo, Roseli, Susy Mary, meus sobrinhos Marcella, Leandro, Francieli, Heitor e Rafael, pelo carinho e pela descontração;

à amiga Fátima Quintiliano da Silva pela colaboração, perseverança e companheirismo;

aos amigos Ana Paula dos Santos Lázaro e Rodrigo Augusto Quintiliano da Silva pela colaboração;

ao amiguinho Davi Quintiliano pelos risos;

aos amigos, entre eles, Irene Izilda da Silva, Eduardo César Catanozi, Cleusa Teixeira Brochado, Cláudia Augusta Hidalgo, Sandra M. Malsaskiene e Sônia Maria Cestari pelas dicas e apoio;

aos funcionários da seção de pós-graduação, biblioteca e xerox pelo profissionalismo;

aos professores e funcionários das escolas: E.E.P.G. "Prof. Michel P. Sawaya" e Colégio Abrahão Naime pela torcida,

Obrigado.

"Onde quer que na natureza ocorra um movimento, a quantidade de ação empregada para produzi-lo é a menor possível."

Pierre Moreau Maupertuis
(1746)

RESUMO

UM ESTUDO SOBRE O PRINCÍPIO VARIACIONAL DA MÍNIMA AÇÃO: TEORIA, APLICAÇÕES E UM EXEMPLO NA VARIEDADE DE GRUPO.

O objetivo maior desta dissertação é o de apresentar, além de um breve estudo teórico sobre Cálculos das variações e o de sua interpretação à física como um Princípio da mínima ação - Princípio de Hamilton -, estender sua aplicabilidade da mecânica clássica e da equação diferencial geométrica da geodésica às teorias de gravitação e supergravidade.

Desenvolvido a partir de 1696 o cálculo das variações tornou-se uma disciplina matemática independente desde Euler (1707/1783). Sua aplicabilidade à Mecânica Clássica encontrou expoente maior em Hamilton, que desenvolveu o Princípio da mínima ação. Deste é possível extrair a partir de uma integral as famosas equações do movimento de Lagrange e portanto toda a estrutura da então chamada Mecânica Analítica. Aplicando-o à Relatividade Geral, é possível extrair a equação de Einstein no vácuo, e à supergravidade, as equações de campo.

“Onde quer que na natureza ocorra um movimento, a quantidade de ação empregada para produzi-lo é a menor possível.”

Pierre Moreau Maupertuis
(1746)

ABSTRACT

RESUMO

UM ESTUDO SOBRE O PRINCÍPIO VARIACIONAL DA MÍNIMA AÇÃO:
TEORIA, APLICAÇÕES E UM EXEMPLO NA VARIEDADE DE GRUPO.

O objetivo maior desta dissertação é o de apresentar, além de um breve estudo teórico sobre Cálculos das variações e o de sua interpretação à física como um Princípio da mínima ação - Princípio de Hamilton -, estender sua aplicabilidade da mecânica clássica e da equação diferencial geométrica da geodésica às teorias de gravitação e supergravidade.

Desenvolvido a partir de 1696 o cálculo das variações tornou-se uma disciplina matemática independente desde Euler (1707/1783). Sua aplicabilidade à Mecânica Clássica encontrou expoente maior em Hamilton, que desenvolveu o Princípio da mínima ação. Deste é possível extrair a partir de uma integral as famosas equações do movimento de Lagrange e portanto toda a estrutura da então chamada Mecânica Analítica. Aplicando-o à Relatividade Geral, é possível extrair a equação de Einstein no vácuo, e à supergravidade, as equações de campo.

ABSTRACT

A STUDY ABOUT THE MINIMAL ACTION PRINCIPLE: THEORY, APPLICATIONS AND AN EXAMPLE ON THE GROUP MANIFOLD.

The biggest objective of this dissertation is to present, besides a brief theoretical study about Variational calculus and its interpretation in the Physics like a Minimal Action Principle - Hamilton's Principle -, extend its applicability from both Classical Mechanics and geometric differential equation of the geodesic, to the gravitation and supergravity theories.

The Variational calculus developed since 1696, became an independent mathematical discipline since Euler (1707/1783). Its applicability in the Classical Mechanics found larger (bigger) exponent in Hamilton, who developed the Minimal Action Principle, of which it is possible to extract from an integral, the famous equations of the Lagrange's motion and, hence, all the structure of the then called Analytics Mechanics. Applying in to the general Relativity, it is possible to extract the Einstein's equation in the vacuum, and to the supergravity, the field equations.

1 - Introdução	10
2.1 - A Variação e suas propriedades	14
2.2 - Equação Euler	14
2.3 - Funcionais da forma $\int_a^b F(x, y, y', x_1, y_1, y_1', x_2, y_2, y_2', \dots, x_n, y_n, y_n') dx$	30
3.1 - Princípio Variacional e equação de Lagrange	35
3.2 - O princípio da mínima ação	46
4 - O princípio da mínima ação em gravitação	54
4.1 - O espaço de Riemann	54
4.2 - Einstein e o espaço de Riemann	54
4.3 - Equação da Geodésica	56
4.3.1 - Introdução: a Geodésica	56
4.3.2 - A hipótese da Geodésica	57
4.4 - Princípio Variacional em Relatividade Geral	58
4.5 - O Princípio da Mínima Ação Gravitacional	61

ÍNDICE

5 - Supersimetria e supervariiedades	64
5.1 - A ação e o Princípio Variacional em um variedade de Grupo	65
1 - Introdução	10
2 - O Método de Variação em problemas com limites fixados	14
2.1 - A Variação e suas propriedades	14
2.2 - Equação Euler	14
2.3 - Funcionais da forma $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$	30
2.4 - Funcionais envolvendo derivadas de ordem mais alta	32
2.5 - Funcionais dependendo de funções de algumas variáveis independentes	35
2.6 - Representação paramétrica de problemas variacionais	39
2.7 - Uma aplicação: introdução matemática ao princípio de Hamilton	42
3 - O princípio físico da mínima ação ou princípio de Hamilton	45
3.1 - Princípio Variacionais e equação de Lagrange	45
3.2 - O princípio da mínima ação	46
4 - O princípio da mínima ação em gravitação	54
4.1 - O espaço de Riemann	54
4.2 - Einstein e o espaço de Riemann	54
4.3 - Equação da Geodésica	56
4.3.1 - Introdução: a Geodésica	56
4.3.2 - A hipótese da Geodésica.	57
4.4 - Princípio Variacional em Relatividade Geral	58
4.5 - O Princípio da Mínima Ação Gravitacional.	61

5 - Supersimetria e supervariiedades	64
5.1 - A ação e o Princípio Variacional em um variedade de Grupo	65
6 - Conclusão	75
7 - Apêndice	77
8 - Bibliografia	81



Fig. 1

Por exemplo, o comprimento l de uma curva ligando dois pontos dados no plano é um funcional por que seu comprimento é completamente determinado pela escolha de uma função definida $y = y(x)$, o gráfico que passa através destes pontos (fig.1). Tanto quanto a equação da curva $y = y(x)$ é dada, o valor l pode ser calculado, isto é

$$l(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Do mesmo modo, a área S de uma superfície é um funcional. É totalmente determinada pela escolha de uma superfície definida, isto é, escolhendo a função

1-INTRODUÇÃO:

Juntamente com o problema de descobrir os valores máximos e mínimos de uma função dada $z = f(x)$, freqüentemente temos de encontrar o máximo ou mínimo de entidades matemáticas chamadas **funcionais**.

Funcionais são valores os quais dependem de uma variável através de uma função, ou de um número finito de variáveis, e os quais são completamente determinados por uma escolha definida destas funções variáveis

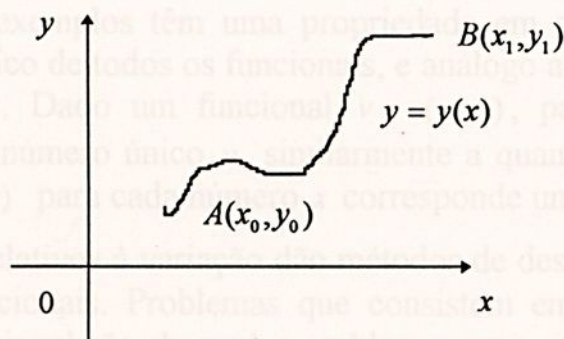


Fig. 1

Por exemplo, o comprimento l de uma curva ligando dois pontos dados no plano é um funcional por que seu comprimento é completamente determinado pela escolha de uma função definida $y = y(x)$, o gráfico que passa através destes pontos (fig.1). Tanto quanto a equação da curva $y = y(x)$ é dada, o valor l pode ser calculado, isto é

$$l(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Do mesmo modo, a área S de uma superfície é um funcional. É totalmente determinada pela escolha de uma superfície definida, isto é, escolhendo a função

$z(x,y)$ que é envolvida na equação desta superfície $z = z(x,y)$. Como é bem conhecido,

$$S(z(x,y)) = \int_D \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

onde D é a projeção desta superfície no plano x,y .

Os momentos de inércia de uma curva homogênea ou uma superfície com relação a um ponto ou um eixo (linha imaginária) ou um plano são também funcionais. Seus valores são totalmente determinados pela escolha de uma curva ou uma superfície, isto é, escolhendo as funções desta curva e superfície, respectivamente.

A resistência ρ , encontrada por um corpo físico movendo com velocidade dada num meio é também um funcional.

O valor de ρ é determinado completamente pela forma da superfície deste corpo, isto é, é determinado pela escolha envolvida na equação desta superfície.

Todos estes exemplos têm uma propriedade em comum que é de fato um aspecto característico de todos os funcionais, e análogo ao aspecto característico de funções ordinárias. Dado um funcional $v = v(y(x))$, para cada função $y = y(x)$ corresponderá um número único v , similarmente a quando nós temos uma função "ordinária" $z = f(x)$ para cada número x corresponde um número único z .

Os cálculos relativos à variação dão métodos de descobrir os valores máximos e mínimos de funcionais. Problemas que consistem em descobrir o máximo ou mínimo de um funcional são chamados problemas variacionais.

Os cálculos relativos à variação têm sido desenvolvidos desde 1696, e tornou-se uma disciplina matemática independente com seus próprios métodos de pesquisa depois de descobertas fundamentais de um membro da Academia de Ciências de Petersburg L. Euler (1707-1783), que nós podemos dizer com boa razão de ser, o fundador dos cálculos de variações.

Os três problemas seguintes tiveram influência considerável no desenvolvimento do cálculo de variações [1].

1 - O PROBLEMA BRAQUISTÓCRONA. Em 1696 Johann Bernoulli publicou um artigo no qual ele sugeriu para os matemáticos o problema de determinar o caminho de declínio mais rápido - o braquistócrona. O problema consiste em descobrir qual curva ligando dois pontos dados A e B, não encontrando-se na mesma linha vertical, tem a propriedade de que uma partícula deslizando para baixo sem atrito ao longo desta curva, de A a B, alcance B no mais curto tempo possível (fig 2).



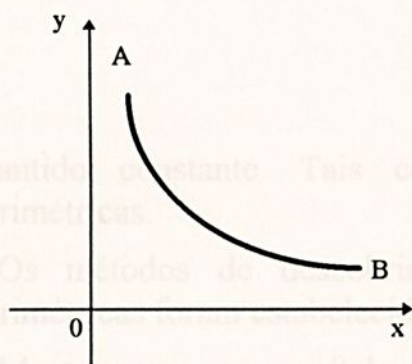


Fig. 2

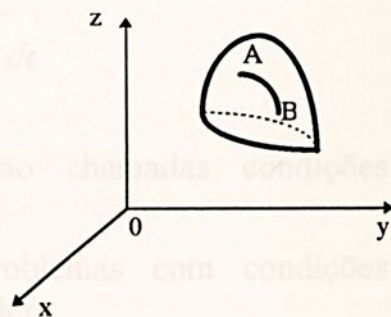


Fig. 3

É fácil observar que o caminho mais rápido para deslizar para baixo não é uma linha reta ligando os pontos A e B, embora a linha reta seja a linha mais curta entre estes pontos. Quando movimenta para baixo numa linha reta uma partícula têm velocidade comparativamente vagarosa. Se a linha é imergida perto do ponto de partida A, então seu comprimento aumentará, mas a parte maior dela será feita com mais velocidade. A solução do problema braquistócrona foi dada por Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli, Newton e de l'Hospital. Descobriu-se que a curva de descida mais rápida é um cicloíde.

2- O PROBLEMA DE GEODÉSICAS. Este problema é o de descobrir a linha de comprimento mínimo em uma superfície dada $p(x,y,z) = 0$ e ligando dois pontos dados nesta superfície (fig 3).

Tais linhas são chamadas geodésicas.

Temos que descobrir o mínimo do funcional

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx,$$

onde as funções $y(x)$ e $z(x)$ devem satisfazer a condição $\varphi(x,y,z) = 0$. Este problema foi solucionado em 1697 por Johann Bernoulli, mas o método de solução geral deste tipo de problema foi dado por L. Euler e J. Lagrange.

3- PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO. Este problema é para descobrir a curva mais próxima de um comprimento dado L , em torno de uma área S que é máxima. Foi

conhecido para os gregos antigos, que tal curva deve ser a circunferência de um círculo. O problema consiste em descobrir o extremo do funcional S , sob a condição adicional que o comprimento da curva seja constante, isto é, o funcional

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

é mantido constante. Tais condições adicionais são chamadas condições isoperimétricas.

Os métodos de descobrir as soluções dos problemas com condições isoperimétricas foram estabelecidas em detalhe por L. Euler.

Mostraremos no capítulo 2 alguns dos métodos para solucionar vários problemas de variações. Nos capítulos seguintes dissertaremos sobre o Princípio de Hamilton ou o Princípio da Mínima Ação, também chamado o “Princípio da menor ação” [2] ou Princípio da ação mínima [3], e suas aplicações em mecânica clássica, gravitação e finalmente uma aplicação em teorias na variedade de grupo.

2. O MÉTODO DE VARIAÇÃO EM PROBLEMAS COM LIMITES FIXADOS

2.1- A VARIAÇÃO E SUAS PROPRIEDADES [1]

Os métodos de solucionar problemas relativos a variação, isto é, problemas consistindo em descobrir o máximo ou mínimo de funcionais, são muito iguais aqueles descobrindo o máximo ou mínimo de funções ordinárias. Introduziremos a teoria de máximo e mínimo de um funcional lembrando o paralelo existente com uma função ordinária.

- a) A variável v é chamada um funcional dependendo de uma função $y(x)$, em que $v = v(y(x))$, se para cada função $y(x)$, de uma certa classe de funções corresponde um certo valor de v , isto é, para uma função dada $y(x)$ corresponde um número v .
- b) O aumento ou a variação δy do argumento $y(x)$ de um funcional $v(y(x))$ é a diferença de duas funções $\delta y = y(x) - y_1(x)$. É assumido que o argumento $y(x)$ pertence a uma certa classe de funções.

- c) Um funcional $v(y(x))$ é dito ser um funcional contínuo, se pequenas variações de $y(x)$ sempre conduzem à pequenas variações do funcional $v(y(x))$

Esta definição pode ser ainda mais precisa. A questão origina-se com variações da função $y(x)$, que é ela mesma um argumento de um funcional, cujas curvas $y = y(x)$, $y = y_1(x)$ são consideradas mais próximas umas das outras.

Assume-se então que as funções $y(x)$ e $y_1(x)$ estão próximas uma das outras, quando o valor absoluto das suas diferenças, $y(x) - y_1(x)$ é pequeno para todos os valores de x para os quais as funções $y(x)$ e $y_1(x)$ são definidas. Define-se assim um sistema de coordenadas fechado. Em muitos problemas considera-se que tais curvas são fechadas sistemas e as linhas tangentes em pontos correspondentes têm direções próximas uma das outras. Isto é, em tais problemas, as curvas são chamadas fechadas, quando não somente o valor absoluto da diferença $y(x) - y_1(x)$ é pequeno, mas também o valor absoluto da diferença $y'(x) - y_1'(x)$.

É algumas vezes necessário assumir que funções estão próximas uma das outras apenas quando o valor absoluto de todas as diferenças

$$y(x) - y_1(x), y'(x) - y_1'(x), y''(x) - y_1''(x), \dots, y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x),$$

são arbitrariamente pequenos.

Por conseguinte, somos conduzidos à seguintes definições de proximidades.

Def. 1: Duas curvas $y = y(x)$ e $y_1 = y_1(x)$ estão próximas ou vizinhas no sentido de proximidade de ordem zero se o valor absoluto de diferença $y(x) - y_1(x)$ é pequeno.

Def. 2: Duas curvas $y = y(x)$ e $y_1 = y_1(x)$ estão próximas ou vizinhas no sentido de proximidade de ordem um, se os valores absolutos das diferenças $y(x) - y_1(x)$ e $y'(x) - y_1'(x)$ são pequenos.

Def. 3: Duas curvas $y = y(x)$ e $y_1 = y_1(x)$ estão próximas ou vizinhas no sentido de proximidade de ordem k , se os valores absolutos das diferenças abaixo são pequenos:

$$y(x) - y_1(x), y'(x) - y_1'(x), \dots, y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)$$

Duas curvas vizinhas no sentido de proximidade de ordem zero, mas não primeira-ordem próximas são mostradas na fig 4.

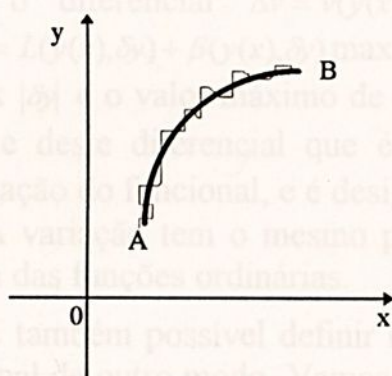


Fig. 4

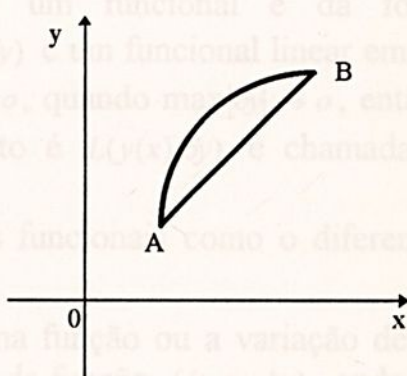


Fig. 5

As coordenadas de pontos correspondentes estão próximas, mas a direção de linhas tangentes em tais pontos varia consideravelmente. Um exemplo de duas primeira-ordem curvas próximas é dada na fig5.

Segue diretamente desta definição que duas curvas vizinhas que são de ordem próxima k -ésimas, são também próximas no sentido de qualquer ordem que é menor do que k .

A definição de continuidade de um funcional será então:

d) Um funcional $v(y(x))$ é contínuo ao longo de $y = y_0(x)$ no sentido de proximidade de ordem k , se por um número positivo arbitrário ε existe um $\delta > 0$ tal que $|v(y(x)) - v(y_0(x))| < \varepsilon$, onde

[illegible]

e) Um funcional $L(y(x))$ é chamado um funcional linear se ele satisfaz as seguintes condições:

$L(cy(x)) = cL(y(x))$, onde c é uma constante arbitrária, e
 $L(y_1(x) + y_2(x)) = L(y_1(x)) + L(y_2(x))$.

Por exemplo, o funcional $L(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} (p(x)y + q(x)y')dx$ é um funcional linear.

f) Se o diferencial $\Delta v = v(y(x) + \delta y) - v(y(x))$ de um funcional é da forma $\Delta v = L(y(x), \delta y) + \beta(y(x), \delta y) \max |\delta y|$, onde $L(y(x), \delta y)$ é um funcional linear em δy , $\max |\delta y|$ é o valor máximo de $|\delta y|$, e $\beta(y(x), \delta y) \rightarrow 0$, quando $\max |\delta y| \rightarrow 0$, então a parte deste diferencial que é linear em δy , isto é $L(y(x), \delta y)$ é chamada de variação do funcional, e é designada por δv .

A variação tem o mesmo papel na teoria dos funcionais como o diferencial tem na das funções ordinárias.

É também possível definir o diferencial de uma função ou a variação de um funcional de outro modo. Vamos considerar o valor da função $f(x + \alpha \Delta x)$, onde x e Δx são fixados e α é variável. Fazendo $\alpha = 1$ obteremos o valor aumentado da função $f(x + \Delta x)$ e colocando $\alpha = 0$ obteremos o valor original $f(x)$. É fácil ver que a derivada de $f(x + \Delta x)$ com relação à α em $\alpha = 0$, é o diferencial de $f(x)$ no ponto x . De fato, de acordo com a regra geral para a diferenciação de funções generalizadora.

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) \right|_{\alpha=0} = f'(x + \alpha \Delta x) \Delta x \Big|_{\alpha=0} = f'(x) \Delta x = df(x)$$

O mesmo pode ser obtido para uma função z de várias variáveis independentes:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

O diferencial pode ser obtido diferenciando a função

$$f(x_1 + \alpha \Delta x_1, x_2 + \alpha \Delta x_2, \dots, x_n + \alpha \Delta x_n)$$

com relação à α , e então fazendo $\alpha = 0$. De fato,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_1 + \alpha \Delta x_1, x_2 + \alpha \Delta x_2, \dots, x_n + \alpha \Delta x_n) \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = df$$

Do mesmo modo, para funcionais da forma $v(y(x))$, podemos definir a variação como a derivada do funcional $v(y(x) + \alpha \delta y)$ com respeito à α , em $\alpha = 0$. De fato se a variação de um funcional na parte linear principal do seu diferencial existe, então este diferencial tem a forma

$$\Delta v = v(y(x) + \alpha \delta y) - v(y(x)) = L(y, \alpha \delta y) + \beta(y, \alpha \delta y) |\alpha| \max |\delta y|$$

A derivada de $v(y + \alpha \delta y)$ com relação à α , em $\alpha = 0$ é

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta \alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(y, \alpha \delta y) + \beta(y(x), \alpha \delta y) |\alpha| \max |\delta y|}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(y, \alpha \delta y)}{\alpha} + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta(y(x), \alpha \delta y) |\alpha| \max |\delta y|}{\alpha} = L(y, \delta y), \end{aligned}$$

para

$$L(y, \alpha \delta y) = \alpha L(y, \delta y) \text{ e } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta(y(x), \alpha \delta y) |\alpha| \max |\delta y|}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta(y(x), \alpha \delta y) \max |\delta y| = 0$$

com $\beta(y(x), \alpha \delta y) \rightarrow 0$ onde $\alpha \rightarrow 0$.

g) A variação de um funcional $v(y(x))$ é portanto dada por

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v(y(x) + \alpha \delta y) \right|_{\alpha=0}$$

Def. 4: Um funcional $v(y(x))$ tem um valor máximo ao longo da curva $y = y_0(x)$, se todos os valores deste funcional $v(y(x))$ ocorrem ao longo da vizinhança arbitrária para $y = y_0(x)$ e não são maiores do que $v(y_0(x))$, isto é $\Delta v = v(y(x)) - v(y_0(x)) \leq 0$. Se $\Delta v \leq 0$ e $\Delta v = 0$ apenas quando $y(x) = y_0(x)$, então dizemos que o funcional $v(y(x))$ tem um máximo absoluto ao longo da curva $y = y_0(x)$. Similarmente definimos a curva $y = y_0(x)$ ao longo da qual o funcional tem um valor mínimo. Neste caso $\Delta v \geq 0$ para todas as curvas suficientemente próximas da curva $y = y_0(x)$.

Teorema 1. Se a variação de um funcional $v(y(x))$ existe, e se v tem um máximo ou um mínimo ao longo de $y = y_0(x)$, então $\delta v = 0$ ao longo de $y = y_0(x)$.

Prova do teorema para funcionais: Quando $y = y_0(x)$ e δy são fixados, $v(y_0(x) + \alpha \delta y) = \varphi(\alpha)$ é uma função de α a qual atinge um máximo ou mínimo para $\alpha = 0$.

Consequentemente $\varphi'(0) = 0$ ou $\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v(y_0(x) + \alpha \delta y) \right|_{\alpha=0} = 0$, isto é $\delta v = 0$. E consequentemente a variação de um funcional desaparece ao longo destas curvas que fazem o funcional um extremo.

A noção de extremo de um funcional é mais precisa. Por um máximo ou um mínimo, ou mais precisamente, um relativo máximo ou mínimo, queremos dizer o maior ou o menor valor de um funcional entre aqueles valores que são obtidos ao longo das curvas vizinhas. De qualquer modo, como mostramos acima, a noção de estagnação pode ser introduzida em uma variedade de modos diferentes, e além disso quando conservado sobre máximo e mínimo a ordem do estreitamento deveria ser apontada distintamente.

Se a curva $y = y_0(x)$ faz um funcional $v(y(x))$ um máximo ou mínimo na classe de todas as curvas para as quais o valor absoluto da diferença $y(x) - y_0(x)$ é pequeno, isto é na classe de todas as curvas vizinhas de $y = y_0(x)$ no sentido de estreiteza de ordem zero, então tal máximo ou mínimo é chamado forte.

Se a curva $y = y_0(x)$ faz um funcional $v(y(x))$ um máximo ou mínimo, apenas na classe de curvas vizinhas de $y = y_0(x)$ no sentido de extremidade de primeira-ordem, isto é com relação à todas as curvas que não são apenas de modo coordenado próximas para $y = y_0(x)$, mas coordenadas e de modo de declive próximas para $y = y_0(x)$, então tal máximo ou mínimo é chamado fraco.

Obviamente, se uma curva $y = y_0(x)$ faz um funcional um máximo forte (ou mínimo), então esta faz também este mesmo funcional um máximo fraco (ou mínimo), desde que qualquer curva vizinha no sentido de proximidade de primeira-

ordem é também próximo no sentido de proximidade de ordem zero. Ainda é possível que um máximo fraco (ou mínimo) seja obtido ao longo de uma curva $y = y_0(x)$, mas não é um máximo forte (ou mínimo). Para isso, pode acontecer que não haja modo coordenado e deslize próximo curvas para $y = y_0(x)$ para as quais $v(y(x)) > v(y_0(x))$ (em caso de um mínimo $v(y(x)) < v(y_0(x))$), mas entre aquelas curvas as quais são apenas de modo coordenado próximo, podemos encontrá-las ao longo das quais $v(y(x)) > v(y_0(x))$ (em caso de um mínimo $v(y(x)) < v(y_0(x))$). A distinção entre extremo forte e fraco não faz qualquer diferença para prova de condição fundamental necessária para um extremo. Esta distinção contudo é essencial.

Deveria ser observado que se uma curva $y = y_0(x)$ faz $v(y(x))$ ter um extremo, então não apenas $\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v(y_0(x) + \alpha \delta y) \right|_{\alpha=0} = 0$, mas também $\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v(y(x, \alpha)) \right|_{\alpha=0} = 0$, onde $y(x, \alpha)$ é uma classe arbitrária de curvas admitidas, tal que, para $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, $y(x, \alpha)$ torna-se $y_0(x)$ ou $y_0(x) + \delta y$ respectivamente. De fato, $v(y(x, \alpha))$ para qualquer escolha específica de α determina uma curva da classe $y(x, \alpha)$ e consequentemente um valor do funcional $v(y(x, \alpha))$.

Desde que $y_0(x)$ faça $v(y(x))$ um extremo, esta função, também, tem um extremo em $\alpha = 0$, e por esta razão sua derivada desaparece em $\alpha = 0$. Consequentemente

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v(y(x, \alpha)) \right|_{\alpha=0} = 0,$$

mas em geral esta derivada não coincide com a variação do funcional, embora como tem sido apenas mostrado ela desaparece junto com δv ao longo das curvas dando o extremo do funcional.

Todas definições desta seção tão bem quanto o teorema fundamental, pode ser estendido quase sem alterações para funcionais envolvendo algumas funções independentes

$$v(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$$

ou uma ou mais funções de algumas variáveis

$$v(z(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

$$v(z_1(x_1, x_2, \dots, x_n), z_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, z_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Por exemplo, a variação δv de um funcional $v(z(x,y))$ pode ser definida também como a parte linear principal do diferencial

$$\Delta v = v(z(x,y) + \delta z) - v(z(x,y)),$$

que é linear com respeito à δz , ou como a derivada com respeito à um parâmetro no valor inicial do parâmetro

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v(z(x,y) + \alpha \delta z) \Big|_{\alpha=0}$$

Se $z = z(x,y)$ faz o funcional v ter um extremo, então $\delta v = 0$ ao longo de $z = z(x,y)$, para $v(z(x,y) + \alpha \delta z)$ é uma função de α a qual de acordo com a suposição apenas feita, obtém um extremo em $\alpha = 0$ e por esta razão sua derivada com respeito a α em $\alpha = 0$ desaparece

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v(z(x,y) + \alpha \delta z) \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad \text{ou} \quad \delta v = 0$$

2.2 - EQUAÇÃO EULER

Vamos examinar um funcional da forma mais simples

$$(1) \quad v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

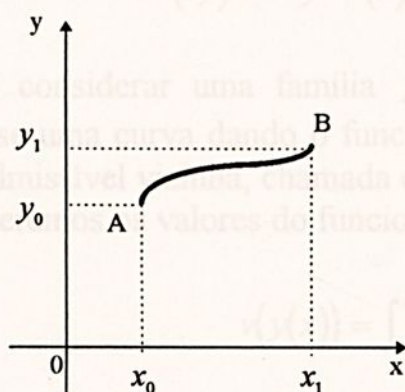


Fig. 6

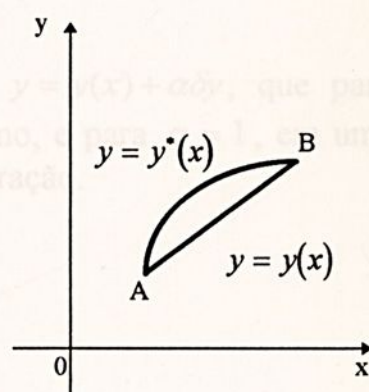


Fig. 7

onde os pontos finais $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$ de curvas admissíveis são fixados (fig.6). É também assumido que a terceira derivada da função $F(x, y, y')$ existe.

Sabemos que uma condição necessária para um extremo de um funcional é que sua variação desapareça.

Vamos mostrar como este teorema fundamental aplica-se ao funcional em questão. Vamos assumir que se um extremo ocorre ao longo de uma curva $y = y(x)$ possuindo uma derivada de 2ª ordem. Tomamos qualquer curva admissível $y = y^*(x)$, vizinha para $y = y(x)$, e estabelecemos uma família de curvas de um parâmetro

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(y^*(x) - y(x))$$

contendo as curvas $y = y(x)$ e $y = y^*(x)$. Quando $\alpha = 0$ temos $y = y(x)$, e quando $\alpha = 1$ nós temos $y = y^*(x)$ (fig.7). Como já sabemos, a diferença $y^*(x) - y(x)$ é chamada uma variação da função $y(x)$, e é designada por δy . A variação δy desempenha o mesmo papel em problemas variacionais como o diferencial Δx da variável independente faz no exame de uma função ordinária $f(x)$. A variação $\delta y = y^*(x) - y(x)$ é uma função de x . Esta função pode ser diferenciada uma vez ou mais, e temos $(\delta y)' = y^{*'}(x) - y'(x) = \delta y'$, isto é, a derivada da variação é a variação de uma derivada e do mesmo modo:

$$\begin{aligned} (\delta y)'' &= y^{*''}(x) - y''(x) = \delta y'' , \\ &\dots\dots\dots \\ (\delta y)^{(k)} &= y^{*(k)}(x) - y^{(k)}(x) = \delta y^{(k)} . \end{aligned}$$

Vamos considerar uma família $y = y(x, \alpha)$ ou $y = y(x) + \alpha \delta y$, que para $\alpha = 0$ torne-se uma curva dando o funcional um extremo, e para $\alpha = 1$, em uma certa curva admissível vizinha, chamada curva de comparação.

Consideremos os valores do funcional

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

que estão ao longo das curvas de uma família $y = y(x, \alpha)$ apenas, então temos uma função da variável α :



$$v(y(x, \alpha)) = \varphi(\alpha) ,$$

e portanto o valor $v(y(x, \alpha))$ do funcional depende apenas de uma escolha particular do parâmetro α . Desde que para $\alpha = 0$ temos $y = y(x)$, segue que para $\alpha = 0$ esta função admite um extremo com relação à qualquer curva vizinha admissível e, em particular, com respeito à qualquer curva vizinha da família $y = y(x, \alpha)$. Como é bem conhecido, a condição necessária para que a função $\varphi(\alpha)$ tenha um extremo para $\alpha = 0$ é que para $\alpha = 0$ sua derivada deva desaparecer,

$$\varphi'(0) = 0 .$$

Desde que

$$\varphi[\alpha] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) dx ,$$

temos

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) \right] dx ,$$

onde

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) ,$$

$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))$$

Por causa das relações

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (y(x) + \alpha \delta y) = \delta y$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (y'(x) + \alpha \delta y') = \delta y' ,$$

segue que

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \delta y + F_{y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \delta y'] dx ,$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'(x)) \delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x)) \delta y'] dx .$$

Como temos observado, $\varphi'(0)$ é chamada uma variável do funcional e é designada por δv . A condição necessária para um funcional v ter um extremo é que sua variação deveria anular-se ($\delta v = 0$).

No caso do funcional

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

esta condição é consequentemente

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = 0 .$$

Integrando por partes o segundo termo, e lembrando que $\delta y' = (\delta y)'$, temos

$$\delta v = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx .$$

Desde que todas as curvas admissíveis passem através dos pontos finais fixados, segue que

$$\delta y|_{x=x_0} = y^*(x_0) - y(x_0) = 0 \quad \text{e}$$

$$\delta y|_{x=x_1} = y^*(x_1) - y(x_1) = 0 ,$$

e consequentemente

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx .$$

Consequentemente, a condição necessária para um extremo tem a seguinte forma

$$(2) \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0 ,$$

onde o primeiro fator $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$, ocupado ao longo da curva $y = y(x)$ que faz y um extremo é uma certa função contínua, e o segundo fator δy pode ser uma função arbitrária sujeita apenas a algumas condições gerais, para que a função de comparação $y = y^*(x)$ fosse escolhida arbitrariamente. Esta condição é que a função δy deveria desaparecer nos pontos finais $x = x_0$ e $x = x_1$, deveria ser uma função contínua com primeira derivada ou com derivadas de ordem maiores e também seu valor absoluto $|\delta y|$ deveria ser pequeno, ou ainda seu valor absoluto $|\delta y|$ e o valor absoluto de sua 1ª derivada $|\delta y'|$ deveriam ser pequenos.

Para fazer a condição (2) mais simples, o seguinte lema será útil.

O lema fundamental do cálculo de variações. Se uma função $\Phi(x)$ é contínua em um intervalo (x_0, x_1) e se

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = 0$$

para uma função arbitrária $\eta(x)$ sujeita à algumas condições de caráter geral apenas, então $\Phi(x) \equiv 0$ por toda parte do intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$. Por exemplo, as condições que $\eta(x)$ deveria ser uma função diferenciável de 1ª ou ordem mais alta, que $\eta(x)$ deveria desaparecer nos pontos finais x_0, x_1 e $|\eta(x)| < \varepsilon$ ou ambos $|\eta(x)| < \varepsilon$ e $|\eta'(x)| < \varepsilon$.

Prova: Suporemos que num ponto $x = x^*$ do intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$; $\Phi(x^*) \neq 0$, e então mostraremos que isto conduz à uma contradição. De fato desde que $\Phi(x)$ seja contínua e $\Phi(x) \neq 0$, segue que existe uma vizinhança $x_0^* \leq x \leq x_1^*$ do ponto x^* por toda parte da qual $\Phi(x)$ tem um sinal constante. Agora, se escolhemos a função $\eta(x)$ tal que ela também tenha um sinal constante nesta vizinhança e desapareça em qualquer outro lugar (fig.8) então temos

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = \int_{x_0^*}^{x_1^*} \Phi(x) \eta(x) dx \neq 0$$

para o produto $\Phi(x)\eta(x)$, e tem um sinal constante por toda parte do intervalo $x_0^* \leq x \leq x_1^*$ e desaparece do lado de fora.

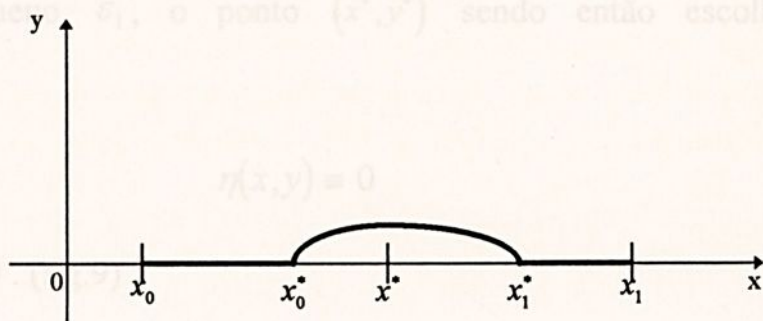


Fig. 8

Temos consequentemente (por esta razão) obtido uma contradição, e por isso $\Phi(x) \equiv 0$. Por exemplo, podemos escolher a função $\eta(x)$ como segue:

$$\eta(x) = k(x - x_0^*)^{2n}(x - x_1^*)^{2n}$$

no intervalo $x_0^* \leq x \leq x_1^*$, onde n é um número inteiro positivo e k é um número constante, e $\eta(x) = 0$ em outra parte.

Obviamente, esta função satisfaz a condição do lema, ela tem todas as derivadas contínuas elevadas à ordem $2n-1$, e ela desaparece nos pontos x_0 e x_1 , e seu valor absoluto tanto quanto o valor absoluto das suas derivadas pode ser feito tão pequeno quanto necessário pela escolha do coeficiente k tal que seu valor absoluto seja suficientemente pequeno.

Observação: Podemos provar similarmente que se a função $\Phi(x,y)$ é contínua no domínio D do plano x,y , e $\int_D \int \Phi(x,y)\eta(x,y)dx dy = 0$ para todas funções arbitrariamente escolhidas $\eta(x,y)$ satisfazendo apenas algumas condições de tipo geral, então $\Phi(x,y) \equiv 0$ no domínio D . Por exemplo, condições deste tipo são tais que $\eta(x,y)$ deveria ser contínua, deveria ter primeiras derivadas ou derivadas elevadas a uma certa ordem mais alta, deveria desaparecer no limite de D , e $|\eta| < \varepsilon$, $|\eta x'| < \varepsilon$, $|\eta' y| < \varepsilon$. Por exemplo, na prova do lema fundamental, podemos definir uma das funções $\eta(x,y)$ como segue:

$$\eta(x,y) = k \left((x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 - \varepsilon_1^2 \right)^{2n}$$

no interior de um círculo com o centro em um ponto (x^*, y^*) e um raio suficientemente pequeno ε_1 , o ponto (x^*, y^*) sendo então escolhido este $\Phi(x^*, y^*) \neq 0$, e

$$\eta(x,y) \equiv 0$$

na parte restante de D . (fig.9)

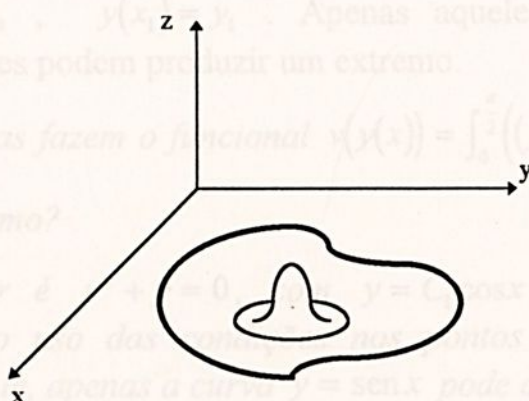


Fig 9

Nós agora aplicaremos o lema fundamental e simplificaremos a condição

$$(2) \quad \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0 ,$$

para um extremo da forma mais elementar de um funcional (1). Todas as suposições do lema satisfazem o fator $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ obtido ao longo de uma curva $y = y(x)$ dando um extremo como uma função contínua, e a variação δy é uma função arbitrária com algumas restrições, de modo geral consideradas no lema. Consequentemente, temos que ao longo da curva que faz o funcional v ter um extremo $y = y(x)$ é uma solução da equação diferencial de 2ª ordem

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

ou escrita explicitamente

A equação Euler é $F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$.

Esta equação é chamada a equação Euler, depois que Euler a obteve em 1744. As curvas integrais $y = y(x, C_1, C_2)$ da equação Euler são chamadas extremais. Apenas extremais podem fazer o funcional

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

ter um extremo.

Para descobrir uma curva fazendo o funcional (1) um extremo, temos que solucionar a equação de Euler, e então determinar as constantes arbitrárias envolvidas numa solução geral desta equação fazendo uso das condições nos pontos finais $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Apenas aqueles extremais os quais satisfazem estas condições podem produzir um extremo.

Exemplo 1: Quais curvas fazem o funcional $v(y(x)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((y')^2 - y^2) dx$, $y(0) = 0$, $y(\frac{1}{2}\pi) = 1$, ter um extremo?

A equação Euler é $y'' + y = 0$, com $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ como uma solução geral. Fazendo uso das condições nos pontos finais temos $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Consequentemente, apenas a curva $y = \sin x$ pode dar um extremo.

Considere agora a função F linear em y' ; então:

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y' ;$$

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \left(M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} \right) dx$$

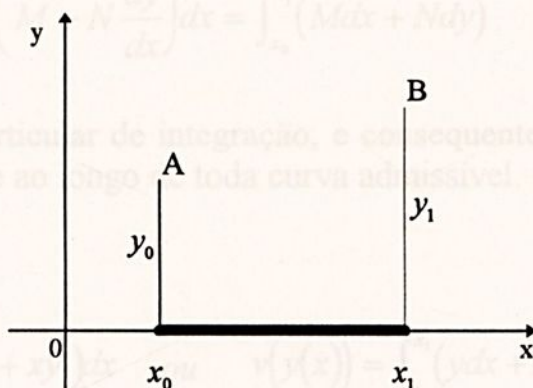


Fig. 10

A equação Euler é

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \frac{d}{dx} N(x, y) = 0 ,$$

ou

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} y' = 0 ,$$

ou

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 ,$$

esta é apenas uma identidade funcional, não uma equação diferencial. Em geral a curva

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

não satisfaz a condição limite, e consequentemente como uma regra, um tal problema variacional não tem solução entre funções contínuas. Se

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 ,$$

então $Mdx + Ndy$ é um diferencial exato e

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \left(M + N \frac{dy}{dx} \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} (Mdx + Ndy)$$

não depende do caminho particular de integração, e consequentemente o funcional tem o mesmo valor constante ao longo de toda curva admissível.

Exemplo 2:

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y + xy') dx \quad \text{ou} \quad v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (ydx + xdy) ,$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

A equação de Euler é a identidade $1 \equiv 1$. A integral é um diferencial exato e consequentemente a integral

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} d(xy) = x_1 y_1 - x_0 y_0,$$

não depende na curva de integração.

Considere que F depende apenas de x e y' :

$$F = F(x, y').$$

A equação Euler

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0,$$

tem uma curva integral $F_{y'}(x, y') = C_1$, e como esta equação de primeira-ordem $F_{y'}(x, y') = C_1$ não envolve y , ela pode ser solucionada também solucionando a para y' e integrando, ou introduzindo um parâmetro aproximadamente escolhido.

Suponha agora que F depende apenas de y e y' :

$$F = F(y, y').$$

A equação Euler é

$$F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0,$$

para $F_{xy'} = 0$. Se multiplicarmos ambos os lados por y' , então o primeiro membro da equação de Euler transforma-se em uma derivada exata $\frac{d(F - y' F_{y'})}{dx}$. De fato,

$$\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = F_y y' + F_{y'} y'' - y'' F_{y'} - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y'} y' y'' = y' (F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'').$$

Consequentemente, a equação de Euler tem uma primeira integral

$$F - y' F_{y'} = C_1,$$

e desde que esta equação de primeira-ordem não envolve x explicitamente, ela pode ser resolvida solucionando-a para y' , pela separação de variáveis ou pela introdução de um parâmetro.

2.3 - FUNCIONAIS DA FORMA $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$

Para obter a condição necessária para um funcional de forma mais geral

$$v(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

ter um extremo com valores limites prescritos para todas as funções

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}$$

$$y_1(x_1) = y_{11}, \quad y_2(x_1) = y_{21}, \quad \dots, \quad y_n(x_1) = y_{n1}$$

modificamos apenas uma das funções, para algum j

$$y_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

em um tempo, mantendo todas as outras funções fixadas. Fazendo então o funcional $v(y_1, y_2, \dots, y_n)$ transformar-se em um funcional dependendo apenas de uma função que está sendo variada, por exemplo em $y(x)$,

$$v(y_1, y_2, \dots, y_n) = \tilde{v}(y_i).$$

Consequentemente a função que a faz ter um extremo deve satisfazer a equação Euler.

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0$$

Desde que este argumento se aplica para cada função y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, temos um sistema de equações diferenciais de segunda-ordem



$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a qual, em geral, determina uma família de curvas integrais no espaço de $2n$ -parâmetro $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ - a família de extremais para um problema variacional dado.

Em particular, se o funcional depende apenas das duas funções $y(x), z(x)$,

$$v(y(x), z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx,$$

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1,$$

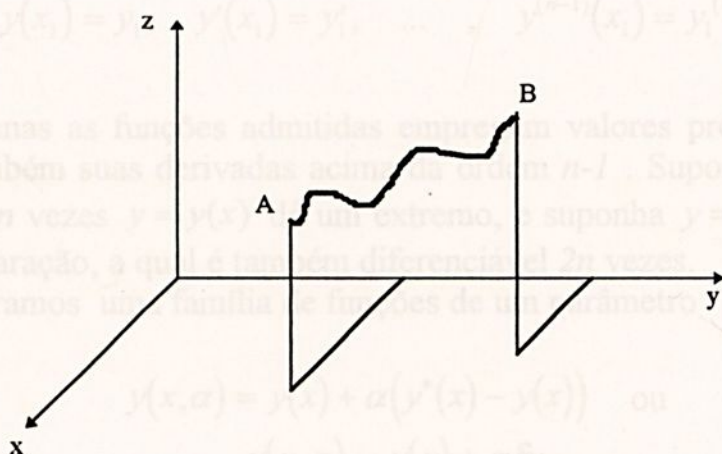


Fig. 11

isto é, qualquer espaço curvo $y=y(x), z=z(x)$ (fig.11) determina um valor deste funcional, então variando apenas $y(x), z(x)$ sendo fixado, estamos variando a curva de tal modo que sua projeção no plano x, z se mantém fixada, e consequentemente, a curva se mantém no cilindro $z=z(x)$ por todo o processo inteiro de variação.

Do mesmo modo, fixando $y(x)$ e variando $z(x)$, estamos variando a curva de modo que ela se mantém colocada no cilindro $y=y(x)$ por todo o processo de variação. Então, fazendo isto, obtemos um sistema de duas equações de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad \text{e} \quad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0$$

2.4 - FUNCIONAIS ENVOLVENDO DERIVADAS DE ORDEM MAIS ALTA

Examinamos o extremo do funcional

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx,$$

onde a função F tem derivadas parciais de ordem $n+2$ com relação à todos argumentos. Assumimos também que as condições limites são da forma

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)},$$

isto é, não apenas as funções admitidas empregam valores prescritos nos pontos finais, mas também suas derivadas acima da ordem $n-1$. Suponha que uma curva diferenciável $2n$ vezes $y = y(x)$ dê um extremo, e suponha $y = y^*(x)$ é uma certa curva de comparação, a qual é também diferenciável $2n$ vezes.

Consideramos uma família de funções de um parâmetro

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(y^*(x) - y(x)) \quad \text{ou} \\ y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y$$

Para $\alpha = 0$, $y(x, \alpha) = y(x)$, e para $\alpha = 1$, $y(x, \alpha) = y^*(x)$, se nós considerarmos os valores tomados pelo funcional $v(y(x))$ ao longo das curvas da família $y = y(x, \alpha)$ apenas, então este funcional transforma-se numa função ordinária de parâmetro α que tem um extremo para $\alpha = 0$. Consequentemente,

$$\frac{d}{d\alpha} v(y(x, \alpha))|_{\alpha=0} = 0.$$

Como na seção 1.1 esta derivada é chamada uma variação do funcional v , designada por δv ,

$$\delta v \left[\frac{d}{d\alpha} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha), \dots, y^{(n)}(x, \alpha)) dx \right]_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'' + \dots + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}) dx$$

Integrando o 2º termo do lado direito por partes, temos

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y' dx = \left[F_{y'} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx .$$

Similarmente, integrando o 3º termo por partes duas vezes, temos

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''} \delta y'' dx = \left[F_{y''} \delta y' \right]_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y''} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \delta y dx ,$$

e assim por diante, o último termo sendo integrado por partes n vezes,

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx = \left[F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-1)} \right]_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-2)} \right]_{x_0}^{x_1} + \dots + (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \delta y dx .$$

Lembrando que os pontos finais $x = x_0$, $y = y_0$ são fixados, e consequentemente que todas as variações tomadas nestes pontos desaparecem, $\delta y = \delta y' = \delta y'' = \dots = \delta y^{(n-1)} = 0$, finalmente temos

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \frac{d^3}{dx^3} F_{y'''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) \delta y dx .$$

Desde que ao longo da curva dando um extremo temos

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) \delta y dx = 0$$

tomando δy arbitrário, e desde que o 1º fator da integral considerado ao longo da curva $y = y(x)$ é uma função contínua de x , segue do lema fundamental que este primeiro fator é identicamente zero,

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \equiv 0 .$$

Consequentemente, qualquer função que produza um extremo do funcional

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx ,$$

deve satisfazer a equação



$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0 .$$

Esta equação diferencial de ordem $2n$ é chamada a equação de Euler-Poisson, e as curvas integrais destas equações são chamadas extremais do problema variacional. A solução geral desta equação envolve $2n$ constantes arbitrárias, as quais podem ser determinadas, como uma regra das condições de limite $2n$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)} .$$

Se o funcional v tem a forma

$$v(y(x), z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(m)}) dx ,$$

então variando apenas $y(x)$ e mantendo $z(x)$ fixado, descobrimos finalmente que qualquer par de funções $y(x)$, $z(x)$ que nos leve a um extremo deste funcional deve satisfazer a equação Euler-Poisson

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0 ,$$

e variando $z(x)$, mantendo $y(x)$ fixado obtemos que ambas estas funções deveriam também satisfazer a equação

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^{(m)}} = 0$$

Consequentemente, as funções $z(x)$ e $y(x)$ devem satisfazer o sistema de duas equações

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0 ,$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^{(m)}} = 0 .$$

A mesma linha de argumento se aplica na discussão de extremo de funcionais similares dependendo de um número de funções arbitrárias

$$v(y_1, y_2, \dots, y_m) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n_2)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(n_m)}) dx .$$

Variando qualquer função $y_i(x)$, e mantendo as restantes fixadas, descobrimos que a condição fundamental necessária para um extremo é

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} + \dots + (-1)^{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} F_{y_i^{(n_i)}} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

2.5 - FUNCIONAIS DEPENDENDO DE FUNÇÕES DE ALGUMAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES.

Examinamos o extremo do funcional

$$v(z(x, y)) = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy ,$$

onde os valores da função $z(x, y)$ no limite C do domínio D são prescritos, isto é, é dada uma curva C^* no espaço, e toda superfície admissível é suposta passar através desta curva. Escrevemos $\partial z / \partial x = p$ e $\partial z / \partial y = q$. A função F é suposta ser diferenciável, e a superfície $z = z(x, y)$, dando um extremo, é suposta ser diferenciável duas vezes.

Consideramos uma família de superfícies de um parâmetro $z = z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha \delta z$, onde $\delta z = z^*(x, y) - z(x, y)$. Para $\alpha = 0$, temos a superfície $z = z(x, y)$, a qual foi suposta ter um extremo, e para $\alpha = 1$, uma certa superfície admissível $z = z^*(x, y)$. O funcional considerou as funções da família $z(x, y, \alpha)$, transformando-se numa função ordinária de uma variável α , que deveria ter um extremo em $\alpha = 0$. Consequentemente,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v(z(x, y, \alpha)) \Big|_{\alpha=0} = 0$$

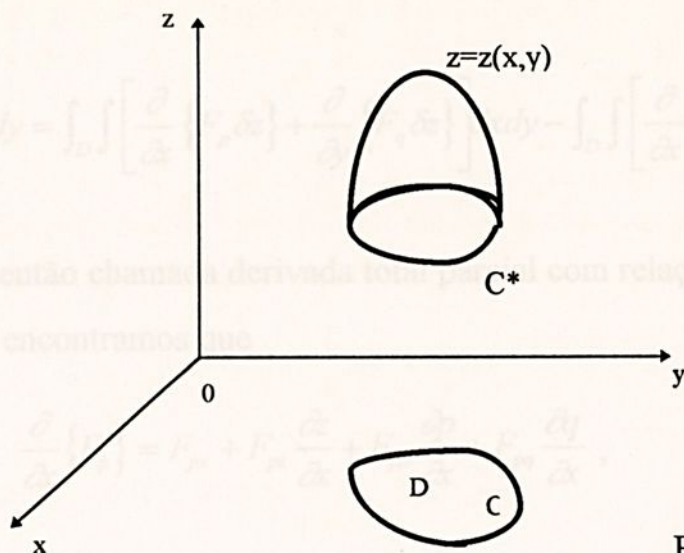


Fig. 12

Tendo chamado a derivada de $v(z(x, y, \alpha))$ com respeito à α , tomada em $\alpha = 0$, uma variação do funcional, tem-se que:

$$\delta v = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_D \int F(x, y, z(x, y, \alpha), p(x, y, \alpha), q(x, y, \alpha)) dx dy \right]_{\alpha=0} = \int_D \int (F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy$$

onde

$$z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha \delta z,$$

$$p(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x} = p(x, y) + \alpha \delta p,$$

$$q(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial y} = q(x, y) + \alpha \delta q;$$

desde que

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} = \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} \delta z + F_p \delta p,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} = \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \delta z + F_q \delta q,$$

segue que

$$\int_D \int (F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy = \int_D \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] dx dy - \int_D \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy$$

onde $\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\}$ é uma então chamada derivada total parcial com relação à x .

Calculando-a, encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} = F_{px} + F_{pz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq} \frac{\partial q}{\partial x},$$

e similarmente

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = F_{qy} + F_{qz} \frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq} \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Usando a fórmula de Green

$$\int_D \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (N dy - M dx)$$

temos

$$\int_D \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] dx dy = \int_C (F_p dy - F_q dx) \delta z = 0.$$

Esta integral, como veremos mais tarde, desaparecerá. Consequentemente

$$\int_D \int [F_p \delta p + F_q \delta q] dx dy = - \int_D \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy$$

e tomando as condições necessárias para um extremo

$$\int_D \int (F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy = 0$$

implica que

$$\int_D \int \left(F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right) \delta z dx dy = 0 .$$

Desde que a variação δz é arbitrária e desde que o primeiro fator seja contínuo, segue do lema fundamental (do cálculo de variações - seção 1.2), que se a superfície $z=z(x,y)$ de um extremo, então

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \equiv 0 .$$

Consequentemente, $z(x,y)$ é uma solução da equação

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0 .$$

Esta equação diferencial parcial de 2ª-ordem é chamada de equação Ostrogradski, depois que o famoso matemático russo M.B. Ostrogradski a descobriu em 1834. Ela é também algumas vezes conhecida como equação Euler-Lagrange

Exemplo 1:

$$v(z(x,y)) = \int_D \int \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

com a condição limite que $z=f(x,y)$ no limite C do domínio D , onde $f(x,y)$ é uma função dada na frente na curva limite C .

A equação Ostrogradski é

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

ou resumidamente

$$\Delta z = 0 ,$$

que é a bem-conhecida equação Laplace. Temos que descobrir uma solução desta equação que é contínua em D , e empregar os valores dados anteriormente no

limite de D . Este é um dos problemas fundamentais da física matemática, e é chamado o problema Dirichlet.

Para a função

$$v(z(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \iint_D \dots \int F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n ,$$

onde $p_i = \partial z / \partial x_i$, obtemos da condição fundamental necessária de um extremo, $\delta v = 0$, que a equação Ostrogradski tem a forma

$$F_z - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \{F_{p_i}\} = 0 ;$$

onde qualquer função

$$z = z(x_1, x_2, \dots, x_n) ,$$

que faz v um extremo deve satisfazer esta equação.

Por exemplo, no caso do funcional

$$v \iint_D \int \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dx dy dz$$

a equação Ostrogradski tem a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 .$$

2.6 - REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DE PROBLEMAS VARIACIONAIS

Em muitos problemas variacionais é mais conveniente obter uma solução em uma representação paramétrica. Por exemplo, este foi o caso para o problema isoperimétrico, já estudado nesta dissertação, no qual encontramos uma curva fechada de um perímetro dado l e uma área máxima S . É razoável tentar descobrir a solução em uma forma paramétrica $x=x(t)$, $y=y(t)$. Consequentemente, neste caso, devemos encontrar um extremo do funcional

$$S(x(t), y(t)) = \frac{1}{2} \int_0^T (x \dot{y} - y \dot{x}) dt$$

com a condição adicional que $l = \int_0^T \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$, onde l é uma constante.

Suponha que examinando o extremo de um funcional

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

encontramos que é melhor encontrar a solução em uma forma paramétrica, $x=x(t)$, $y=y(t)$. Então o funcional transforma-se em

$$v(x(t), y(t)) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t) dt.$$

Observamos que a função integral transformada

$$F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t)$$

não depende de t explicitamente e é uma função homogênea da primeira ordem com respeito às variáveis $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

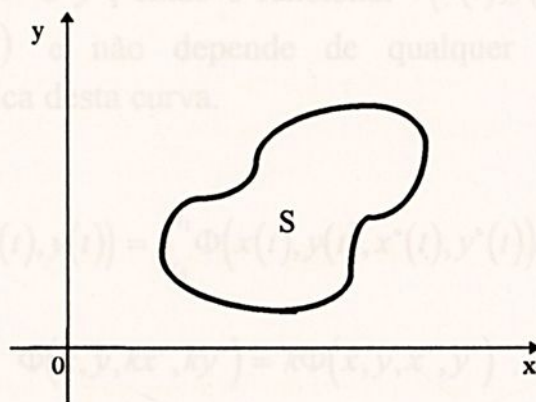


Fig. 13

Consequentemente, o funcional $v(x(t), y(t))$ não é uma função arbitrária da forma

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, x(t), y(t), x^\circ(t), y^\circ(t)) dt ,$$

dependendo das duas funções $x(t)$ e $y(t)$. Contrariamente, é apenas preferivelmente um caso especial particular de tal funcional, onde a “integral” não depende explicitamente de t e além disso, é uma função homogênea de primeira ordem com respeito à x° e y° .

Se introduzirmos alguma outra representação paramétrica $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, então o funcional $v(x, y)$ se transformará em

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{y^\circ}{x^\circ}\right) x^\circ d\tau .$$

Consequentemente, esta forma especial da função integral de v não depende da representação paramétrica escolhida. O funcional v depende apenas da curva ao longo da qual a integração é realizada, e não depende da representação paramétrica desta curva.

Não é difícil mostrar que se a “integral” do funcional

$$v(x(t), y(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, x(t), y(t), x^\circ(t), y^\circ(t)) dt$$

não depende de t explicitamente e se esta é uma função homogênea de primeira ordem com respeito à x° e y° , então o funcional $v(x(t), y(t))$ depende apenas da curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ e não depende de qualquer escolha particular da representação paramétrica desta curva.

De fato, suponha

$$v(x(t), y(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t), y(t), x^\circ(t), y^\circ(t)) dt ,$$

onde

$$\Phi(x, y, kx^\circ, ky^\circ) = k\Phi(x, y, x^\circ, y^\circ) .$$

Passaremos para alguma outra representação paramétrica, sendo

$$\tau = \varphi(t), \quad \text{onde} \quad \varphi'(t) \neq 0 ,$$

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau) .$$

Então

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t), y(t), x^\circ(t), y^\circ(t)) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x(\tau), y(\tau), x_\tau^\circ(t), y_\tau^\circ(t)) \frac{d\tau}{\varphi^\circ(t)} .$$

Desde que Φ seja uma função homogênea de primeira ordem com respeito à x° e y° temos

$$\Phi(x, y, x_\tau^\circ \varphi^\circ, y_\tau^\circ \varphi^\circ) = \varphi^\circ \Phi(x, y, x_\tau^\circ, y_\tau^\circ) ,$$

e conseqüentemente

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, x_t^\circ, y_t^\circ) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x, y, x_\tau^\circ, y_\tau^\circ) d\tau ,$$

isto é, a integral permanece invariável sob a transformação do parâmetro.

Um exemplo de tais funcionais é o comprimento de uma curva

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x^{\circ 2} + y^{\circ 2}} dt .$$

2.7 - UMA APLICAÇÃO: INTRODUÇÃO MATEMÁTICA AO PRINCÍPIO DE HAMILTON [4]

O princípio fundamental da mecânica é o princípio variacional de Hamilton, que dentre todos movimentos possíveis de um sistema de pontos materiais, seleciona aquele que dá um extremo da integral,

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt ,$$

onde T é a energia cinético e V energia potencial do sistema.

Daremos agora um único exemplo, e tornaremos a falar neste princípio na próxima seção.

Exemplo 1: Dado um sistema de pontos materiais com massas m_i , $i=1,2,\dots,n$, e coordenadas (x_i, y_i, z_i) , em cada ponto atua um potencial dependendo das coordenadas apenas:

$$F_i x = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad F_i y = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad F_i z = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

onde $F_i x$, $F_i y$, $F_i z$ são as coordenadas do vetor F_i atuando no ponto (x_i, y_i, z_i) .

Encontre as equações diferenciais de movimento do sistema.

A energia cinética é

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

e a energia potencial do sistema é V .

As equações de Euler para $\int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt$ são

$$-\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 0,$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = 0,$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = 0,$$

ou

$$m_i \ddot{x}_i - F_i x = 0,$$

$$m_i \ddot{y}_i - F_i y = 0,$$

$$m_i \ddot{z}_i - F_i z = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Se o sistema é sujeito a vínculos da forma

$$\varphi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, m, \quad m < 3n,$$

3 - O PRINCÍPIO FÍSICO DA MÍNIMA AÇÃO OU PRINCÍPIO
então todas $3n$ variáveis podem ser substituídas por $3n-m$ novas variáveis as
quais são independentes.

3.1 - PRINCÍPIOS VARIACIONAIS E EQUAÇÕES DE LAGRANGE

3.1.1 - Princípio da mínima ação: uma introdução física. A derivação das equações de Lagrange resulta de um "princípio diferencial" tal como o princípio de D'Alembert. É também possível obter as equações de Lagrange de um princípio o qual considera o movimento do sistema entre tempos t_1 e t_2 , e pequenas variações conhecido como um "princípio integral".

A configuração instantânea de um sistema é descrita pelos valores das n coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \dots, q_n$. Um ponto particular em um hiperespaço cartesiano onde x e y são as coordenadas cartesianas. Este espaço n -dimensional é conhecido como espaço de configuração. Suponha o tempo permanecendo constante e o estado do sistema variando, o ponto se move no espaço de configuração produzindo uma curva, conhecida como "o caminho do movimento do sistema", ou a história do sistema.

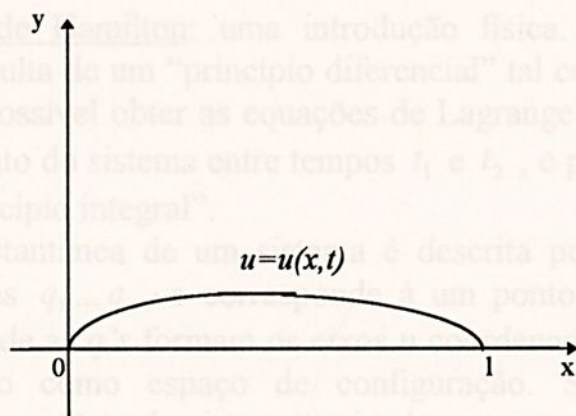


Fig. 14

O caminho do movimento no espaço de configuração não terá qualquer semelhança com o movimento no espaço físico. Agora T e V podem ser considerados como funções de $q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}$, e t , o caminho representa a configuração do sistema todo em algum instante de tempo dado.

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t),$$

Podemos agora estabelecer o Princípio da mínima ação integral para sistemas conservativos.

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}, t),$$

O movimento do sistema entre os tempos t_1 e t_2 é tal que a integral de linha $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ é um extremo, onde $L = T - V$ é a Lagrangiana.

e as equações de Euler são

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 3n-m.$$

onde $L = T - V$ é um extremo para o "caminho do movimento". Estas últimas são também conhecidas como equações do movimento de Lagrange.

Para dois pontos no espaço de configuração, para t_1 e t_2 fixados, é zero, isto é,
$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0. \quad (3.2)$$

As equações de Lagrange, seguem do princípio de Hamilton, como sendo um importante teorema. [vide também seção 2.7]

3 - O PRINCÍPIO FÍSICO DA MÍNIMA AÇÃO OU PRINCÍPIO DE HAMILTON

3.1 - PRINCÍPIOS VARIACIONAIS E EQUAÇÕES DE LAGRANGE

3.1.1 - Princípio de Hamilton: uma introdução física. A derivação das equações de Lagrange resulta de um “princípio diferencial” tal como o princípio de D'Alembert. É também possível obter as equações de Lagrange de um princípio o qual considera o movimento do sistema entre tempos t_1 e t_2 , e pequenas variações conhecido como um “princípio integral”.

A configuração instantânea de um sistema é descrita pelos valores das n coordenadas generalizadas $q_1 \dots q_n$, e corresponde à um ponto particular em um hiperespaço cartesiano onde as q 's formam os eixos n coordenados. Este espaço n -dimensional é conhecido como espaço de configuração. Suponha o tempo permanecendo constante e o estado do sistema variando, o ponto se move no espaço de configuração produzindo uma curva, descrita como “o caminho do movimento do sistema”, ou a história do sistema.

O caminho do movimento no espaço de configuração não terá qualquer semelhança necessária ao caminho no espaço de qualquer partícula; cada ponto do caminho representa a configuração do sistema todo em algum instante de tempo dado.

Podemos agora estabelecer o Princípio de Hamilton integral para sistemas conservativos.

O movimento do sistema do tempo t_1 ao tempo t_2 é tal que a integral de linha

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (3.1)$$

onde $L=T-V$, é um extremo para o “caminho do movimento”.

Podemos resumir o princípio de Hamilton dizendo que o movimento do sistema é tal que a variação da linha integral I para t_1 e t_2 fixados, é zero, isto é,

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0. \quad (3.2)$$

As equações de Lagrange, seguem do princípio de Hamilton, como sendo um importante teorema. [vide também seção 2.7]



Este nos habilita a construir a mecânica de sistemas conservativos como um postulado básico, antes do que as leis do movimento de Newton. É a rota que deve ser seguida quando tentamos descrever aparentemente sistemas não mecânicos nos moldes matemáticos da mecânica clássica, como na teoria de campos.

3.2 - O PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO

Um princípio variacional associado com a formulação Hamiltoniana da mecânica é conhecido como o princípio da mínima ação. Em mecânica, ação é uma quantidade definida mais geralmente como a integral

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i dt,$$

onde p_i e q_i são os momentos e as coordenadas generalizadas, respectivamente.

O princípio de mínima ação estabelece que em um sistema para o qual H é conservado

$$\Delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i dt \right) = 0, \quad (3.3)$$

onde Δ representa um novo tipo de variação de caminho.

O Δ -processo pode ser representado etiquetando as curvas variadas por um parâmetro α , como foi feito pelo δ -processo. Aqui, contudo, a variação inclui o tempo associado com cada ponto no caminho, e conseqüentemente t deve também ser considerado como uma função de α . A variação em $q_i(t, \alpha)$ envolverá não somente a dependência explícita de q_i em α , mas também a dependência implícita através de t . Deste modo devemos escrever Δq como

$$\Delta q \rightarrow d\alpha \left(\frac{dq}{d\alpha} \right) = d\alpha \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} + \dot{q} \frac{dt}{d\alpha} \right). \quad (3.4)$$

Será reconhecido que o primeiro termo corresponde exatamente à δq :

$$\delta q \rightarrow d\alpha \frac{\partial q}{\partial \alpha}$$

enquanto o coeficiente de $\dot{q}$ representa a troca em t ocorrendo como um resultado da Δ -variação, e pode conseqüentemente ser designado como Δt . Conseqüentemente (3.4) tem a forma

$$\Delta q = \delta q + \dot{q} \Delta t. \quad (3.5)$$

(Note que a Δ -operação e tempo diferenciação não podem mais ser permutados, como é possível para a δ -variação.) A relação expressa pela Eq. (3.5) entre a Δ e δ variações pode agora ser mostrada para qualquer função $f(q, t)$:

$$\Delta f = \delta f + \dot{f} \Delta t. \quad (3.6)$$

Em geral Δf será dada pela expressão

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t,$$

a qual pode ser escrita como

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t.$$

Esta expressão se reduz a Eq. (3.6), desde que o primeiro termo à direita é igual para δf , enquanto os termos no parênteses combinam-se para formar a derivada total de f , provendo o resultado desejado. A Eq. (3.6) é a única propriedade importante da Δ -variação, que precisaremos para provar o princípio da mínima ação.

Agora, a ação A pode ser escrita como

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} (L + H) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + H(t_2 - t_1). \quad (3.7)$$

Aplicaremos a relação (3.6) à integral aparecendo nesta expressão. Deve ser lembrado que os limites da integral estão também sujeitos à variação. Se a integral é escrita como $I(t_2) - I(t_1)$, a variação tem a forma

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \Delta I(t_2) - \Delta I(t_1),$$

a qual, pela Eq. (3.6), pode também ser escrita como

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta I(t_2) - \delta I(t_1) + \dot{I}(t_2) \Delta t_2 - \dot{I}(t_1) \Delta t_1,$$

ou, finalmente,

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + L \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (3.8)$$

Poderemos ser tentados a dizer que o primeiro termo à direita desaparece em consequência do princípio de Hamilton, mas isto não ocorre. O valor deste termo pode ser avaliado sem muita dificuldade. Da δ -variação nós temos

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt,$$

a qual pelas equações de Lagrange pode ser escrita

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \sum_i \int \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt \\ &= \sum_i \int \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt = \\ &= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Delta t \right) dt \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Delta t \right) \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

Nos pontos finais Δq_i desaparece. Consequentemente, a última expressão pode ser escrita como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = - \sum_i p_i \dot{q}_i \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (3.9)$$

Combinando estes vários termos, a variação total da ação é

$$\Delta A = \left(- \sum_i p_i \dot{q}_i + L + H \right) \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (3.12)$$

a qual é identicamente zero, em virtude da definição de H . Isto completa a prova do princípio da mínima ação.

O princípio de mínima ação pode ser exibido em uma variedade de formas. Na mecânica não relativística, se a transformação definida equações não envolve o tempo explicitamente, é mostrado que

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = 2T,$$

e nestas circunstâncias o princípio pode ser escrito como

$$\Delta \int T dt = 0. \quad (3.10) \quad (3.13)$$

Se, além do mais, não há forças externas no sistema, então T é conservado ao longo do percurso com a energia total H . O princípio da mínima ação toma então a seguinte forma:

$$\Delta(t_2 - t_1) = 0. \quad (3.11)$$

A eq. (3.11) nos coloca que de todos os caminhos possíveis entre dois pontos, consistente com a conservação de energia, o sistema se move ao longo daquele caminho particular para o qual o tempo de percurso é o mínimo (mais estritamente, um extremo). Nesta forma o princípio de mínima ação lembra o princípio de Fermat da óptica geométrica em que um raio de luz viaja por um percurso entre dois pontos ao longo do qual o tempo gasto é mínimo.

Se o sistema consiste de somente uma partícula a energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left| \frac{dr}{dt} \right|^2$$

ou

$$dt = \sqrt{\frac{m|dr|^2}{2T}}$$

a qual apresenta dt em termos dos comprimentos de arcos da trajetória da partícula. Em tal caso o princípio de mínima ação como expressado na Eq. (3.11) pode ser escrito como

$$\Delta \int 2T dt = \Delta \int \sqrt{2mT} ds = \Delta \int \sqrt{2m(H-V)} ds = 0. \quad (3.12)$$

Esta forma do princípio de mínima ação pode também ser estendida para sistemas de mais do que uma partícula e descrita por qualquer conjunto de coordenadas generalizadas. Para as condições estipuladas que as equações definindo q_i não contêm o tempo, a energia cinética é sempre uma função homogênea quadrática das velocidades

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k,$$

cujas relação poderia também ser escrita como

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \frac{dq_i dq_k}{dt^2}. \quad (3.13)$$

Definimos agora um novo diferencial $d\rho$ pela equação

$$(d\rho)^2 = \sum_{i,k} m_{ik} dq_i dq_k, \quad (3.14)$$

tal que a energia cinética tem a forma

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2, \quad (3.15)$$

ou equivalentemente

$$dt = \frac{d\rho}{\sqrt{2T}}.$$

Com esta relação para dt o princípio de mínima ação torna-se

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \Delta \int \sqrt{T} d\rho = 0$$

ou, finalmente,

$$\Delta \int \sqrt{H - V(q)} d\rho = 0, \quad (3.16)$$

uma expressão equivalente do princípio de mínima ação a qual é formalmente similar a Eq.(3.12) para uma partícula única. Eq.(3.16) é frequentemente referida como a forma de Jacobi do princípio de mínima ação. O procedimento usado em definir $d\rho$ que parece completamente abstrato, mas é suscetível de uma interpretação muito elegante. A diferencial $d\rho$ introduzida na Eq.(3.14) é bem conhecida da geometria diferencial como a forma mais geral para o comprimento do caminho em um espaço n -dimensional cujas coordenadas são $q_1 \dots q_n$. Nesta aplicação os coeficientes m_{ik} são elementos do então chamado tensor métrico. Em um sistema cartesiano coordenado o tensor métrico é completamente simples; os elementos são

$$m_{ik} = \delta_{ik}, \text{ onde } \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ 1 & \text{se } i = k \end{cases} \quad (3.17)$$

como pode ser visto comparando a expressão

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

com Eq.(3.14). O tensor métrico é diagonal para qualquer sistema coordenado curvilíneo geral ortogonal, mas exceto para sistemas cartesianos, os elementos diagonais não são todos iguais. Por exemplo, em coordenadas cilíndricas o elemento do comprimento de arco é

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2,$$

tal que os únicos elementos não desaparecidos do tensor métrico correspondente são

$$m_{rr} = 1, \quad m_{\theta\theta} = r^2, \quad m_{zz} = 1.$$

Em geral os elementos não diagonais não serão zero para um conjunto de coordenadas curvilíneas arbitrárias não ortogonais.

O diferencial $d\rho$ definida pela Eq.(3.14) é deste modo o elemento do comprimento do caminho no espaço de configuração de coordenadas $q_1 \dots q_n$ o qual não é cartesiano geral mas curvilíneo, de fato, tão curvo que os elementos do tensor métrico são dados por m_{ik} da Eq.(3.13). O número quadrado de $2T$ representa a velocidade do sistema ao longo do caminho no espaço configuração.

Se não há forças externas agindo no sistema, então T é constante e o movimento é tal que o sistema viaja ao longo do caminho de comprimento mais curto no espaço de configuração - isto é, viaja ao longo de uma das geodésicas do espaço.

Deveria ser enfatizado que a forma Jacobi do princípio de mínima ação é confundida com o caminho do sistema ponto antes que com seu movimento em tempo. A Eq.(3.16) é uma afirmação sobre o elemento do comprimento do caminho $d\rho$, o tempo em nenhuma parte aparece, desde que H seja uma constante e V dependa de q_i somente. De fato, a forma de Jacobi do princípio pode ser utilizada para fornecer equações diferenciais para o caminho. Isto pode ser explicitado melhor introduzindo algum parâmetro, por exemplo, a distância ao longo do caminho. Poderemos então escrever a Eq.(3.16) como

$$\Delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{H-V} \sqrt{\sum_{i,k} m_{ik} \frac{dq_i}{d\theta} \frac{dq_k}{d\theta}} d\theta = 0, \quad (3.17)$$

onde o parâmetro em questão é designado por θ . O parâmetro não deve ser confundido com o tempo; ele é uma propriedade geométrica do caminho, e pode ser escolhido como constante durante os deslocamentos os quais caracterizam a Δ -variação. Com respeito à θ , a Δ -variação é consequentemente idêntica com a δ -variação, e as equações diferenciais derivadas da Eq.(3.17) têm a forma familiar das equações Euler-Lagrange. As equações Euler-Lagrange para o caminho do sistema ponto são então

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial F}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0. \quad (3.18)$$

Quando lidando com um sistema contendo muitas partículas, o caminho determinado pela forma Jacobi do princípio é o caminho do sistema ponto no espaço configuração. Mas se o sistema contém somente uma partícula, e as coordenadas q_i são coordenadas de posição, então o caminho dado pela Eq.(3.18) também representa a órbita da partícula no espaço. As coordenadas q_i não precisam ser coordenadas cartesianas. Se a partícula for restrita a mover-se em uma superfície dada, com duas coordenadas q_1 e q_2 dando a posição da partícula na superfície, então a quantidade $d\rho$ é obviamente proporcional à um elemento do comprimento de caminho atual na superfície. A Eq.(3.18) pode então ser usada para encontrar a órbita descrita pela partícula na superfície vinculada. Em particular, se não há forças externas atuando na partícula, então o caminho na superfície, tanto quanto o caminho no espaço de configuração, é uma das geodésicas da superfície. Desde modo, uma partícula movendo-se na superfície de uma esfera sem forças

externas atuando nela, deve viajar ao longo de um grande círculo, uma geodésica da esfera.

Muitos princípios variacionais similares para mecânica clássica podem ser derivados em outras variedades. Para dar um exemplo, o princípio de mínima ação conduz imediatamente ao princípio Hertz de curvatura mínima, o qual estabelece que uma partícula não sujeita a influência de forças externas viaja ao longo do caminho de curvatura mínima. Pelo princípio de Jacobi tal caminho deve ser uma geodésica, e a propriedade geométrica de curvatura mínima é uma das bem conhecidas características de uma geodésica. Importante chama a atenção que princípios variacionais neles mesmos não contêm novos conteúdos físicos, e raramente simplificam a solução prática de um problema mecânico dado. Sua importância encontra-se sobretudo como um ponto de partida para novas formulações da estrutura teórica da mecânica clássica. Outros têm provado serem de pequeno uso. A importância do Princípio da mínima ação será melhor entendida na parte final desta dissertação [capítulos 4 e 5].

aquela forma. Damos então que a métrica é não-Euclidiana e que E_0 será então definido como um "Espaço de Riemann".

DEFINIÇÃO. Os espaços métricos nos quais a distância elementar se define por uma expressão tal qual (4.1), com o determinante $|g_{ij}| \neq 0$ em geral não integralizável, se chamam Espaços de Riemann (V_n).

A teoria da Relatividade Geral tem por hipótese fundamental que o universo é um espaço de Riemann.

Isso significa que os coeficientes g_{ij} de $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ não são dados a priori, mas devem ser calculados caso a caso (dependem do formato do corpo e da composição da matéria).

4.2 - EINSTEIN E O ESPAÇO DE RIEMANN

É hipótese de Einstein o fato de cada distribuição de matéria determina uma curvatura ("deformação"). Essa curvatura é dada matematicamente pelo "tensor de curvatura" de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (4.2).

Interessante também será notar que o g_{ij} determinará o tensor de curvatura. Por isso ao g_{ij} é dado também o nome de "POTENCIAL DE GRAVITAÇÃO".

$$E_0 \rightarrow R_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Relembrando Newton

4 - O PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO EM GRAVITAÇÃO

4.1 - O ESPAÇO DE RIEMANN

Os espaços E_n para os quais existe uma lei para medir a distância entre dois pontos de coordenadas $y^i, y^i + dy^i$, e portanto, por integração, o comprimento de uma curva qualquer se chamam espaços métricos. A expressão para esta distância pode ser geral, porém o caso mais importante é aquele que supõe que a distância elementar ds entre dois pontos é dada por:

$$ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j . \quad (4.1)$$

Se a métrica (4.1) não é integralizável, então não existirão em E_n sistema de coordenadas curvilíneas tais que a métrica tome aquela forma. Diremos então que a métrica é não-Euclidiana e que E_n será então definido como um “Espaço de Riemann”.

DEFINIÇÃO: Os espaços métricos nos quais a distância elementar se define por uma expressão tal qual (4.1), com o determinante $\|g_{ij}\| \neq 0$ em geral não integralizável, se chamam Espaços de Riemann (V_n).

A teoria da Relatividade Geral tem por hipótese fundamental que o universo é um espaço de Riemann.

Isso significa que os coeficientes g_{ij} de $ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j$ não são dados a priori, mas devem ser calculados caso a caso (dependem do formato do corpo e da composição da matéria).

4.2 - EINSTEIN E O ESPAÇO DE RIEMANN

É hipótese de Einstein o fato de cada distribuição de matéria determina uma curvatura (“deformação”). Essa curvatura é dada matematicamente pelo “tensor de curvatura” de Riemann $R_{ih,rs}$ (4.2).

Interessante também será notar que o g_{ij} determinará o tensor de curvatura. Por isso ao g_{ij} é dado também o nome de “POTENCIAL DE GRAVITAÇÃO”;

$$g_{ij} \rightarrow R_{ih,rs} .$$

Relembrando Newton

$$(4.3) \quad F = m\ddot{y} = \frac{GMm}{y^2} \Rightarrow \ddot{y} - \frac{GM}{y^2} = 0 \quad (4.4).$$

A arena⁽¹⁾ (espaço-tempo) onde vale (4.3) é plana (euclidiana). A solução da equação diferencial (4.4) nos mostra como a partícula livre de massa m se aproxima de M [fig.15].

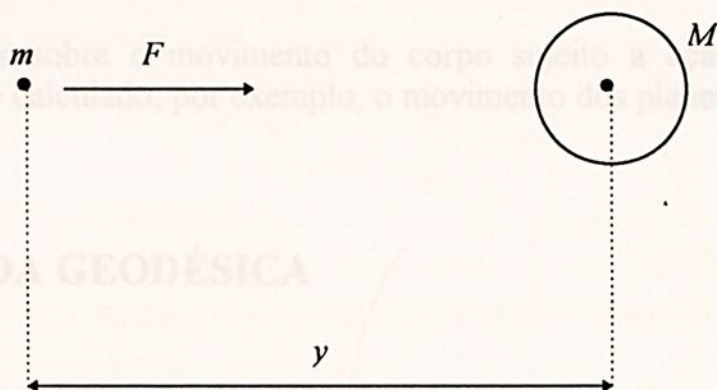


Fig.15

Einstein apresentou a hipótese que, da mesma maneira que um espaço bi-dimensional (e.g. uma superfície de uma esfera) está imerso em um espaço plano tri-dimensional (euclidiano), um universo curvo quadri-dimensional (riemanoiano) estaria imerso em um espaço plano de um número maior de dimensões.

$$R_{ij} = 0 \quad (4.5).$$

A expressão (4.5) constitui a sua lei de gravitação.

Einstein assumiu que o espaço físico é riemanoiano e foi assim que ele fundou sua teoria de gravitação. Ele imaginou que no espaço vazio $R_{ij} = 0$. Esta expressão constitui a sua lei de gravitação.

“Vazio” aqui significa que não existe outra matéria exceto a geradora do campo gravitacional.

(1) Admitiremos que a “arena” onde os fenômenos físicos se desenvolverão é um contínuo, chamado de espaço-tempo.

Espaço “vazio” é, pode ser considerado por exemplo, o espaço entre planetas do sistema solar.

Uma partícula livre num espaço “vazio” descreve o que chamaremos de “GEODÉSICA” (seção 4.3).

A equação (4.5) combinada com equação da geodésica

$$\frac{d^2 y^i}{dt^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{dy^j}{dt} \frac{dy^k}{dt} = 0 \quad (4.6)$$

nos dará informações sobre o movimento do corpo sujeito a ação do campo gravitacional. Assim é calculado, por exemplo, o movimento dos planetas.

4.3- EQUAÇÃO DA GEODÉSICA

4.3.1 - Introdução: A Geodésica [5]

O 5º axioma de Euclides levou 20 séculos para ser demonstrado e foi “reformulado”.

Para Riemann (século XIX) a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180°. Um exemplo de geometria de Riemann é representada pela superfície de uma esfera.

Tomemos por exemplo uma esfera e vamos nos deter só na sua superfície. Para encontrar o menor caminho entre dois pontos A e B da superfície esférica vamos traçar uma “reta” entre A e B . Estaremos aí, determinando uma geodésica.

DEFINIÇÃO: A geodésica é um arco de circunferência que, contendo um ponto P da superfície esférica, contém também o ponto Q diametralmente oposto a P .

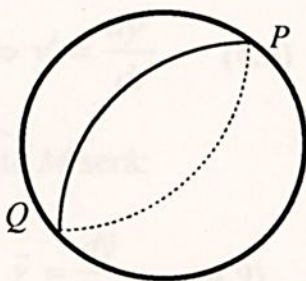


Fig 16

Riemann imaginou uma geometria cujo universo não fosse o plano de Euclides, mas, ao contrário, uma superfície esférica.

As geodésicas passaram a ser as retas de Riemann.

Em utilizando a geometria de B.Riemann, W.Clifford (1845-1879) estabeleceu que as propriedades físicas da matéria e as propriedades do espaço curvo estariam relacionadas. Ele antecipou alguns conceitos básicos que a posteriori, dariam origem a Relatividade Geral, tais como, que todas ou algumas das forças que chamamos de físicas, se originam da geometria do nosso espaço. Uma das idéias fundamentais da teoria da Relatividade Geral concerne a relação entre distribuição de matéria e geometria do espaço-tempo. O espaço-tempo age sobre a matéria, portanto, o tensor métrico é também um potencial gravitacional. Por um princípio generalizado de ação e reação, a matéria deve agir sobre o espaço, determinando as suas propriedades geométricas.

4.3.2- A hipótese da Geodésica

Em $V^n (= R^4)$, que chamaremos de variedade Riemanniana, considere uma partícula de prova M

$$M = M(y^i) \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Mostraremos que numa variedade Riemanniana:

$$\frac{d^2 y^i}{dt^2} + \Gamma_{kh}^i \frac{dy^h}{dt} \frac{dy^k}{dt} = 0$$

O vetor velocidade de M será:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{M}}{dt} \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow v^i = \frac{dy^i}{dt} \quad (4.8)$$

O vetor aceleração do ponto M será:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.9)$$

Como $d\vec{v}$ admite componentes contravariantes ∇v^i o vetor v^i será tal que:

$$\gamma^i = \frac{\nabla v^i}{dt} \quad (4.10)$$

Como

$$\nabla v^i = (\partial_k v^i + \Gamma_{kh}^i v^h) dy^k$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla v^i}{dy^k} = \partial_k v^i + \Gamma_{kh}^i v^h \quad (4.11)$$

$$y^k = y^k(t) \Rightarrow \frac{\nabla v^i}{dt} = \frac{\nabla v^i}{dy^k} \cdot \frac{dy^k}{dt} = \gamma^i,$$

onde γ^i é a aceleração, então:

$$\frac{\nabla v^i}{dt} = \frac{d^2 y^i}{dt^2} + \Gamma_{kh}^i \frac{dy^h}{dt} \cdot \frac{dy^k}{dt} \quad (4.12)$$

Se a aceleração de M é constantemente nula, a trajetória da partícula na qual não atua nenhuma força, exceto a gravitacional, será uma “GEODÉSICA” do espaço Riemanniano V^n , ou seja: Em uma métrica riemanniana a geodésica fixa o percurso mínimo entre dois pontos dados. [vide também próxima seção]

$$\frac{d^2 y^i}{dt^2} + \Gamma_{kh}^i \frac{dy^h}{dt} \cdot \frac{dy^k}{dt} = 0 \Rightarrow \text{Equação da Geodésica}$$

Então, em uma carta local inercial, $\Gamma_{kh}^i = 0$, e portanto, a equação acima se reduziria àquela de uma reta, e corresponde ao movimento uniforme com ausência de aceleração, como exigência do princípio de equivalência.

4.4 - PRINCÍPIO VARIACIONAL EM RELATIVIDADE GERAL

Na geometria euclidiana (E_n) as retas estão caracterizadas pela propriedade de minimizar o comprimento de arco AB das curvas que unem dois pontos A e B .

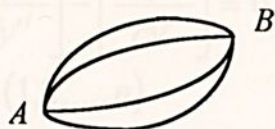
E_n 

Fig17

Cabe então a pergunta: Esta propriedade valeria também à geodésicas na geometria de Riemann?

Solução:

Considere uma curva parametrizada que une dois pontos A e B de V^n .

Se a e b designam os valores do parâmetro t correspondentes aos pontos A e B o comprimento de arco $\hat{AB}$ será dado pela integral

$$\hat{AB} = \int_a^b ds \quad (4.13)$$

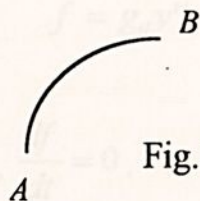


Fig.18

onde ds é a distância elementar entre A e B .

A integral (4.13) pode ser escrita como:

$$\hat{AB} = \int_a^b \sqrt{f(y'^k, y'^i)} dt \quad (4.14)$$

onde

$$f = g_{ij} y'^i y'^j \quad ; \quad y'^i = \frac{dy^i}{dt} \quad ; \quad y'^j = \frac{dy^j}{dt} .$$

A integral para ser mínima tem que ter $\delta(\hat{AB}) = 0$ (4.15). Então a partir da Equação de Euler, ou Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \sqrt{f}}{\partial y'^i} \right] - \left[\frac{\partial \sqrt{f}}{\partial y^i} \right] = 0. \quad (4.16)$$

para todo $i = (1, 2, \dots, n)$

Efetuada as derivações, teremos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'^i} \right] - \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'^i} = 0, \text{ ou seja}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'^i} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y^i} - \frac{1}{2f} \frac{df}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'^i} = 0. \quad (4.17)$$

Como o significado do parâmetro t (tempo) é arbitrário, então podemos identificá-lo com o arco S , o que nos levará a:

$$y'^i = \frac{dy^i}{ds}; \quad f = g_{ij} y'^i y'^j. \quad (4.16')$$

Se $f=1$ voltando em (4.17), $\frac{df}{dt} = 0$.

Então (4.17) se reduz a:

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'^i} - \frac{df}{dy^i} = 0. \quad (4.18)$$

Retomando a (4.16') teremos que:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'^i} = 2 g_{ij} y'^j; \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y^i} = \partial_i g_{kj} y'^j y'^k. \quad (4.19)$$

Substituindo (4.19) em (4.18) obtemos que:

$$\frac{d}{ds} (g_{ij} y'^j) - \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} y'^j y'^k = g_{ij} \frac{dy'^j}{ds} + \left(\partial_k g_{ij} - \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} \right) y'^j y'^k = 0. \quad (4.20)$$

Recordando os símbolos de Christoffel de 1ª ordem teremos que a relação (4.20) se reduz a:

$$g_{ij} \frac{dy'^j}{ds} + [jk, i] y'^i y'^k = 0 \quad (4.21)$$

onde $[jk, i]$ são os símbolos de Christoffel de primeira ordem.

Se fizermos a multiplicação de g^{ih} pela equação (4.21) teremos:

$$\frac{d^2 y^h}{ds^2} + \Gamma_{jk}^h \frac{dy^j}{ds} \frac{dy^k}{ds} = 0. \quad (4.22)$$

Conclusão: Em geometria Riemmaniana as geodésicas correspondem ao valor estacionário da integral do comprimento de arco que une dois pontos fixos de V^n .

4.5 - O PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO GRAVITACIONAL

Introduzindo o escalar [6], [7]

$$I \equiv \int R \sqrt{g} d^4 x \quad (4.23)$$

(integração sob um volume quadri-dimensional),

onde:

$$g = \det g^{\mu\nu}.$$

Então teremos que introduzir uma variação δ em (4.23), onde o integrando ficaria como

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{g}R) &= \sqrt{g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \delta \sqrt{g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= \sqrt{g} R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + R \delta \sqrt{g} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Como o tensor de Ricci é definido a partir de uma contração do tensor de Riemann-Christoffel, então

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda}.$$

O último termo da expressão (4.24) em $\delta(\sqrt{g}R)$ é:

$$\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \sqrt{g} \left[(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda} \right].$$

Acontece que

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} [\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}] = \left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\nu}} \right) g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} + \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} \quad (4.25)$$

e ainda

$$\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} [\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}] = \left[\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\sqrt{g}) \right] g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \sqrt{g} [g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}]_{;\lambda}. \quad (4.26)$$

Portanto, subtraindo (4.26) de (4.25) temos:

$$\begin{aligned} & \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\nu}} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}, \end{aligned}$$

Então,

$$\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}). \quad (4.27)$$

Quando efetuamos a integração dos termos à direita da equação (4.27), estes desaparecerão, ou seja,

(Equação de Einstein no vácuo)

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) dx^\nu - \int \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) dx^\lambda \\ &= \sqrt{g} (\delta \Gamma_{\lambda}^\lambda) \Big|_\nu - \sqrt{g} (\delta \Gamma_{\nu}^\lambda) \Big|_\lambda = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0 \end{aligned}$$

Calculemos agora $\delta\sqrt{g}$ no segundo termo da expressão (4.24).

Temos que,

$$\det g = \sum_{\mu} g_{\mu\nu} \Delta^{\mu\nu}$$

onde $\Delta^{\mu\nu}$ é o complemento algébrico de g .

Posto que:

$$g^{\mu\nu} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g} \quad \text{onde} \quad \Delta^{\mu\nu} = g g^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (4.28)$$

Como:

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\mu} \Rightarrow \delta(\delta_{\nu}^{\mu}) = 0$$

$$\Rightarrow (\delta g^{\mu\nu}) g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.29)$$

A partir das expressões (4.28) e (4.29) e pela regra da cadeia temos:

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}; \quad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\theta} \delta g_{\rho\theta}$$

Finalmente

$$\delta I = \int \sqrt{g} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right] \delta g_{\mu\nu} d^4 x.$$

Para

$$\int \sqrt{g} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right] \delta g_{\mu\nu} d^4 x = 0$$

temos, então:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0.$$

(Equação de Einstein no vácuo)

5 - SUPERSIMETRIA E SUPERVARIEDADES

A idéia de supersimetria foi originariamente desenvolvida na tentativa de construir uma teoria unificada de todos os tipos de interação conhecidas. Supersimetria em física significa consideração simultânea de partículas com diferentes tipos de estatística (bosons e fermions) [8].

Os bosons são partículas de spin zero, um, ou dois, e os fermions partículas de spin semi-inteiro, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$. A supersimetria não deixa de ser um postulado incrível, pois somos tentados muitas vezes a pensar em fermions e bosons como partículas completamente diferentes. Os fermions são individualistas. De acordo com o princípio de exclusão de Pauli dois fermions idênticos não podem se congregam no mesmo ponto do espaço. Em contraste, os bosons apreciam congregam-se.

Um exemplo dos primeiros são os elétrons no interior do átomo que obedecem o princípio da exclusão de Pauli. Os bosons seriam os ftons de luz que se congregam no raio laser, por exemplo.

Em 1971, na então União Soviética, Gelfond e Licktmann [8] descobriram que se poderia, se assim se desejasse, introduzir uma simetria entre esses dois tipos de partículas fundamentais (bosons e fermions), colocando fermions e bosons num mesmo multipletto de um possível grupo de simetria. A única exigência feita é a de que os campos físicos associados aos fermions e aos bosons tenham o mesmo número de graus de liberdade, ou seja, os graus de liberdade dos campos fermiônicos sejam iguais aos graus de liberdade dos campos bosônicos. Os campos fermiônicos são representados por entidades matemáticas que chamamos de "Spinors".

O ramo da matemática que serve como "arena" para o desenvolvimento destas idéias é o que chamamos de teoria dos "supermanifolds" [9], [10]. Muito dos conteúdos e resultados da geometria clássica, análise e álgebra têm sido generalizados com sucesso para supervariiedades.

Teorias de supergravidade são uma extensão supersimétrica da teoria de gravitação de Einstein, em outros cenários que não o da geometria riemanniana clássica. Um destes cenários possíveis para extensão da teoria de Einstein da Relatividade Geral é o da variedade de grupo. Teorias de supergravidade construídas na variedade de grupo, desenvolvidas em anos recentes, sobretudo pelo grupo de Turim, podem ser entendidas como um caminho diferencial geométrico que tem suas bases na formulação da teoria de gravitação segundo sugestões de Elie Cartan - uso da torção [11]. A filosofia básica das teorias construídas na variedade de grupo seria que todas simetrias locais de uma dada teoria da física são transformações de coordenadas de um espaço de um número maior de dimensões. Este espaço maior seria a variedade de grupo G e tem tantas coordenadas



fermionicas quantas bosônicas, que seriam os geradores do próprio grupo. O espaço-tempo M é uma hipersuperfície imersa em G .

As teorias de supergravidade têm dois tipos distintos de simetrias locais: simetrias internas, como as invariâncias locais de Lorentz e Yang-Mills, e as simetrias do espaço-tempo como as invariâncias gerais de coordenadas e de supersimetria. As simetrias internas formam um grupo H . A variedade de Grupo, ou o grupo total G , é maior do que H , que é um subgrupo de G . Na gravitação a la Einstein, G é o grupo a la Poincaré e H o grupo de Lorentz, mas em outros casos a escolha de G não é tão óbvia, e será, como já dissemos, ditada pelo número dos graus de liberdade dos campos fermionicos e bosonicos - quando a teoria for supersimétrica.

Em algumas vezes existem vários candidatos a grupo total de uma dada teoria. Por exemplo na teoria de Kaluza-Klein se poderia escolher G como o grupo de Poincaré em 5 dimensões ou $G=U(1) \otimes$ grupo de Poincaré em quatro dimensões. Em outras vezes um dado grupo G pode nos levar a diferentes teorias dependendo da escolha do sub-grupo H ou/e da dimensionalidade d do espaço-tempo. Por exemplo, o grupo super-conforme $SU(2,2/1)$ produz uma teoria de supergravidade conforme se se decide em ter um espaço-tempo base em 4 dimensões. Porém, produz uma teoria simples da supergravidade não conforme, se se toma o espaço-tempo final em 5 dimensões:

Uma outra importante característica das teorias construídas na variedade de grupo é a de que ambas as simetrias, sejam as internas como as do espaço-tempo, deixam a ação invariante. Sobre esta ação e o princípio variacional a ela associada discorreremos na próxima seção.

5.1 - A AÇÃO E O PRINCÍPIO VARIACIONAL EM UMA VARIEDADE DE GRUPO

A dinâmica dos campos h_A^A é especificada por uma ação a qual é definida na variedade d -dimensional, e por um princípio variacional generalizado, que resultará nas equações de movimento. Para que a ação seja invariante sob as transformações gerais de coordenadas, das coordenadas da variedade de grupo, é vantajoso usar formas diferenciais. Isto ocorre mesmo num espaço-tempo de Minkowski ordinário 4-dimensional. Por exemplo, a ação de Einstein pode ser escrita como [11]

$$I = \int \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge V^c \wedge V^d$$

$$V^c \equiv V_\mu^c dx^\mu \quad , \quad R^{ab} \equiv R_{\mu\nu}^{ab} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (5.1)$$



Desde de $dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x$, a formulação em termos das formas diferenciais é equivalente para a formulação usual. De fato

$$I = \int R^{ab}{}_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abcd} V_\rho^c V_\sigma^d d^4x = \int 4VR^{ab}{}_{ab} d^4x \quad (5.2)$$

onde $V = \det V_\mu^c$.

Usando formas diferenciais, a ação I não tem índices curvos explícitos e será automaticamente invariante sob difeomorfismos. Note, contudo, que desde que estejamos na subvariedade M, todos diferenciais estariam em M, sendo parametrizados por x^μ , e não podemos considerar todos dz^Λ como independentes. Introduziremos contudo, um princípio variacional generalizado no qual um varia mais do que somente os campos $h_\Lambda^A dz^\Lambda$, para dz^Λ fixados, tal que possamos considerar todos δh_Λ^A como variações independentes.

Antes de trabalharmos diretamente na ação, comentaremos brevemente sobre as 1-formas $h^A \equiv h_\Lambda^A dz^\Lambda$. Quando h_Λ^A é bosônico (pelo qual queremos dizer que quando x_A é um gerador bosônico de G), duas dessas 1-formas anticomutam, ou seja, $h^A \wedge h^B = -h^B \wedge h^A$. Mas quando ambas 1-formas são fermiônicas, elas comutam: $h^A \wedge h^B = h^B \wedge h^A$. Se uma é bosônica e a outra é fermiônica, elas se anticomutarão.

Como consequência, para uma 1-forma fermiônica ψ , as expressões $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$ e $\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi$ não são nulas, enquanto

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}\Gamma_5\psi = \bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_a\psi = 0. \quad (5.3)$$

Para spinors de Majorana⁽²⁾, os resultados correspondentes são $\bar{\psi}_\mu\psi_\nu - \bar{\psi}_\nu\psi_\mu = 0$. Algumas outras propriedades estão calculadas na dissertação [12] para spinors de Dirac em 5 dimensões.

A ação deverá ser construída a partir das curvaturas que são 2-formas e da 1-forma h^A . Sua forma mais geral é

$$I = \int_M \lambda + R^A \wedge V_A + R^A \wedge R^B \wedge V_{AB} + \dots \quad (5.4)$$

onde todos os termos são d-formas se tiver decidido que o espaço-tempo final é d-dimensional. Desde que as R^A são 2-formas definidas por

(2) Em homenagem ao fisico italiano Ettore Majorana



$$R^A = R^A{}_\pi \wedge dz^\pi \wedge dz^\pi \quad (5.5)$$

não pode estar aí mais do que $d/2+1$ termos em (5.4). De fato, em nenhum exemplo encontramos que mais do que duas curvaturas presentes, e provavelmente isto é uma propriedade geral que pode ser provada. As λ são d-formas, as ν_A são (d-2) formas, etc, e $\lambda, \nu_A, \nu_{AB}, \dots$ são todas somas dos produtos das 1-formas

$$h^A \equiv h^A{}_\Lambda dz^\Lambda \quad (5.6)$$

sem derivadas.

Escolhe-se um sistema de coordenadas, tais que as coordenadas $x^1, \dots, x^d$ sejam coordenadas em M, enquanto as coordenadas restantes definem eixos coordenados que interceptam M em um ponto. Então $h^A = h^A{}_\mu dx^\mu$. A substituição destas formas para h^A em I resultará, então, uma ação definida inteiramente em termos dos campos $h^A{}_\mu$ somente, e veremos qual a função os campos restantes $h^A{}_\Lambda$ com $\Lambda \neq \mu$ interpreta. Salientamos que a ação I é definida em M somente, mas que os campos $h^A{}_\Lambda$ são definidos todos na variedade de grupo G.

Desde que nossa teoria final está para ser invariante sob as simetrias internas locais, como as dadas pelo subgrupo H

$$\delta_{\text{integral}} h^A = (D \epsilon)^A \equiv (D \wedge \epsilon)^A dz^\Lambda, \epsilon \in H, \quad (5.7)$$

a ação deverá ser um escalar em H.

Uma outra restrição para a ação I é fornecida pelo nosso desejo de substituir R_O com um índice zero fora do espaço-tempo (out), por R_{IJ} com I, J índices internos, no espaço-tempo (in). Se isto for efetuado pelas equações de campo, equações do movimento, estas devem necessariamente ser relações entre curvaturas, em outras palavras, elas deveriam tornar-se identidades quando todas R^A desaparecem. Isto tem uma importante interpretação física. Definindo o vácuo clássico por $R^A = 0$ para todos $A \in G$, devemos ter que o vácuo clássico satisfaz as equações de campo. Chamamos $R^A = 0$ de vácuo clássico, para eliminar implicações quantum-mecânicos: outro termo algumas vezes usado é espaço plano, mas desde que $R^A = 0$ pode descrever, por exemplo, um espaço tempo de de-Sitter, este termo não é geralmente utilizado.

Para obter as equações de campo, como equações Euler-Lagrange de I, devemos agora especificar o princípio variacional. Sob uma variação arbitrária dos campos $h^A{}_\Lambda$, somente as projeções $h^A{}_\Lambda dz^\Lambda$ apareceriam em δI , e não seríamos

capazes de encontrar tantas equações de campo quantas necessárias para expressar todas curvaturas externas (outer curvatures) em termos das curvaturas internas (inner curvatures). Para que encontremos equações de campo para todas componentes h_{Λ}^A teremos que a superfície M deverá ser estacionária em relação as variações dos campos h_{Λ}^A e da sua própria superfície. Isto nos faz recordar da definição de uma variedade mínima, a qual é uma variedade para a qual $\int \sqrt{g} d^n x$ é estacionária (x^μ são as coordenadas intrínsecas de M), porém no nosso caso o integrando não é o elemento volume $\sqrt{g}$, mas $\lambda + R^A \wedge \nu_A + \dots$ perfazendo variações de superfície, teremos que:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int [h_{\Lambda}^A(z') + \delta h_{\Lambda}^A(z')] dz'^{\wedge} S_A(z') - \int h_{\Lambda}^A(z) dz^{\wedge} S_A(z) \\ &= \int [\delta h_{\Lambda}^A(z) + h_{\Lambda}^A(z') - h_{\Lambda}^A(z)] dz^{\wedge} S_A(z) \\ &\quad + \int h_{\Lambda}^A (dz'^{\wedge} - dz^{\wedge}) S_A(z) + \theta (dz' - dz)^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde $S_A = \delta I / \delta h^A$. Posto que os vetores $dz' - dz$ se situam do lado de fora de M (outside M), encontraremos em δI d-formas com d aumentos arbitrários de coordenadas, e não somente com $dz^{\wedge}$, o qual se situa em M . Todos estes termos são proporcionais a S_A , e portanto concluímos que $S_A = 0$ como uma $(d-1)$ forma em Γ , e não somente $S_A = 0$ quando limitado à M .

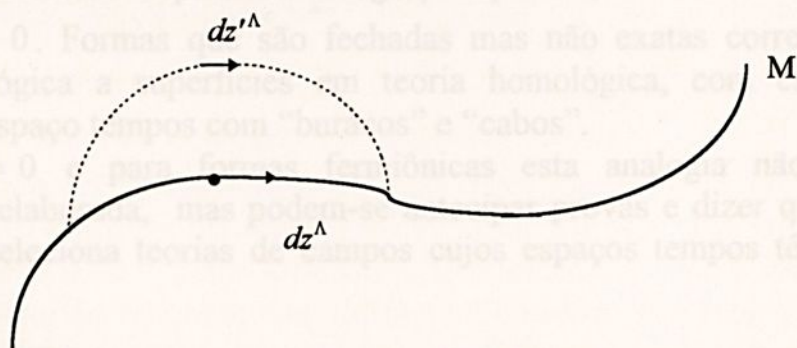


Fig.19

Deste modo podemos considerar as formas h^A como objetos independentes e variá-los em I . Vamos agora voltar para a exigência que o vácuo clássico $R^A = 0$ seja uma solução das equações de campo. Assumindo $R^A = 0$, precisamos somente considerar nesta caso as variações de λ e de R^A no termo $R^A \wedge \nu_A$. Usando

$$\delta R^A = D(\delta h)^A \quad (5.9)$$

e integrando parcialmente nós chegamos à seguinte restrição em λ e ν_A ,

$$\delta\lambda / \delta h^A + D\nu_A = 0 \text{ (equação de cohomologia).} \quad (5.10)$$

Como é claro da sua origem, a derivada D é a derivada covariante. Os ν_A são coeficientes arbitrários do R^A . Um ponto técnico para ser brevemente discutido concerne integração parcial. Como discutimos, os diferenciais dz^Λ não são independentes, mas restritos a subvariedades M , isto é, uma combinação linear do dx^μ . Se tivermos uma expressão $(dA)B \equiv \left(\frac{\partial}{\partial z^\Lambda} A\right) dz^\Lambda B$, poderemos de fato integrar parcialmente $(dA)B = d(AB) - AdB$ (ou $+ AdB$) se A é uma $(2p+1)$ forma. Para observar isto, note que

$$dA = \left(\frac{\partial}{\partial z^\Lambda} A\right) \frac{\partial z^\Lambda}{\partial x^\mu} dx^\mu = \frac{\partial A}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (5.11)$$

pode ser vista como uma derivada ordinária exterior em M .

A equação acima tem uma explicação simples para $\lambda = 0$. Esta nos diz que ν_A é uma forma fechada, mas deveria não ser exata, pois o sendo, o termo $R^A \wedge \nu_A$ desaparecería depois da integração parcial, devido à identidade de Bianchi $DR^A = 0$. Formas que são fechadas mas não exatas correspondem em teoria cohomológica a superfícies em teoria homológica, com estruturas não triviais, isto é, espaço tempos com “buracos” e “cabos”.

Para $\lambda \neq 0$ e para formas fermiônicas esta analogia não está ainda completamente elaborada, mas podem-se antecipar provas e dizer que a equação cohomológica seleciona teorias de campos cujos espaços tempos têm “cabos” e “buracos”.

O exemplo da Supergravidade em $N=1$

Ao invés de continuar com o formalismo geral, vamos discutir agora, dois exemplos os quais ilustram o caso geral. Estes exemplos são os da gravidade de Einstein e o da supergravidade em $d=4$ dimensões. Para G , postulamos o grupo Poincaré e super Poincaré, respectivamente. As curvaturas no caso da super álgebra de Poincaré são

$$R(M)^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^{ac} \wedge \omega^{cb}$$



$$R(P)^a = dV^a + \omega^{ab} \wedge V^b + \frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma_{\Lambda}^a \psi \quad (5.12)$$

$$R(Q)^a = d\psi^a + \frac{1}{4} \omega^{ab} \wedge (\Gamma_{ab})^a_{\beta} \psi^{\beta}, \Gamma_{ab} = \Gamma_{[a} \Gamma_{b]}$$

enquanto para o caso Poincaré retira-se ψ e $R(Q)$. A forma geral é

$$R^A = dh^A + \frac{1}{2} f_{BC}^A h^B \wedge h^C \quad (5.13)$$

e o modo mais fácil para checar que as três curvas acima estão corretas, é verificar se $dR^A = 0$ quando $R^A = 0$.

Se calcularmos dR^A , descobriremos que dh^A desaparece (devido à identidade de Poincaré $d^2 = 0$) enquanto

$$d\left(\frac{1}{2} f_{BC}^A h^B h^C\right) = \frac{1}{2} f_{BC}^A dh^B h^C - \frac{1}{2} f_{BC}^A h^B dh^C. \text{ A substituição de } dh^A = -\frac{1}{2} f_{BC}^A h^B h^C$$

conduz ao fato de que a identidade Jacobi é satisfeita ao invés de determinar primeiro a f_{AB}^C e então a R^A é mais fácil checar que $dR^A = 0$; como vimos, isto é equivalente para as identidades de Jacobi e, consequentemente, atingimos o mesmo propósito.

Na prática é aconselhável usar as derivadas de Cartan $\mathcal{D}$, ou, derivadas covariantes ao invés de derivadas ordinárias exteriores d . Por exemplo, no nosso caso $R(Q) = \mathcal{D}\psi$ e $\mathcal{D}R(Q) = \mathcal{D}\mathcal{D}\psi = R^{mn}(M) \frac{1}{4} \Gamma_{mn} \psi$, o qual se anula quando todas as curvaturas se anulam. A identidade $\mathcal{D}R^{ab}(M) = 0$ é, logicamente, a identidade usual de Bianchi da relatividade geral com ou sem torção.

Em escrevendo as curvaturas R^A da super álgebra Poincaré na forma de representações irredutíveis do grupo Lorentz, nós teremos uma base adequada à construção de uma ação a qual é localmente H-invariante (Lorentz invariant).

A ação deve ser uma 4-forma, desde que nosso espaço tempo final é o $d=4$ espaço-tempo de Minkowski. A ação mais geral localmente invariante de Lorentz seria (omitindo o símbolo $(\wedge)$ de produto exterior por razões tipográficas)

$$\begin{aligned} I = \int & \alpha V^a V^b V^c V^d \epsilon_{abcd} + \beta \bar{\psi} \Gamma^{ab} \Gamma_5 \psi V_a V_b \\ & + \gamma R(M)^{ab} V^c V^d \epsilon_{abcd} + \delta R(M)^{ab} \bar{\psi} \Gamma_{ab} \Gamma_5 \psi \\ & + 3 \bar{\psi} \Gamma_5 \Gamma_c R(Q) V^c \end{aligned} \quad (5.14)$$

Não há outros termos possíveis. Por exemplo as formas $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\Gamma_5\psi$ e $\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_m\psi$ se anulam, enquanto também $\Gamma_a\psi\bar{\psi}\Gamma^a\psi$ e $\Gamma_{ab}\psi\bar{\psi}\Gamma^{ab}$ anular-se-iam devido às identidades.

$$\Gamma_a\psi_\mu\bar{\psi}_\nu\Gamma^a\psi_\rho\in^{\mu\nu\rho\sigma}=0. \quad (5.15)$$

A ação é independente de formas explícitos ω^{ab} . Nesta ação não precisamos de termos da forma $R^A R^B v_{AB}$, posto que v_{AB} são constantes e a integração parcial da derivada exterior em R^A junto com a identidade de Poincaré $dd=0$ expressariam $R^A R^B v_{AB}$ em termos de R^A e Λ . Contudo, por exemplo, em $d=5$ precisaríamos dos termos $R^A R^B v_{AB}$.

Fixamos os parâmetros livres requerendo que as equações de campo sejam satisfeitas por $R^A = 0$. Estas seriam:

Equações de campo para ω^{ab} :

$$\delta\omega^{ab}[2\gamma(\delta V^c)V^d\in_{abcd}-2\delta\bar{\psi}\Gamma^{ab}\Gamma_5\delta\psi-3\left(\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_c\frac{1}{4}\Gamma_{ab}\psi\right)V^c]=0. \quad (5.16)$$

Desde que em $R^A = 0$ tem-se $\delta V^c = -\frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^c\psi$ e $\delta\psi = 0$, enquanto $\bar{\psi}\Gamma^a\Gamma_5\psi = 0$ e consequentemente

$$\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_c\Gamma_a\in_{cabd}\bar{\psi}\Gamma^d\psi \quad (5.17)$$

encontra-se que

$$-\gamma\bar{\psi}\Gamma^c\psi V^d\in_{abcd}-\frac{1}{4}3\bar{\psi}\Gamma^d\psi V^c\in_{abcd}=0 \quad (5.18)$$

em outras palavras $\zeta = 4\gamma$.

Equações de campo para V^a :

$$4\alpha V^b V^c V^d\in_{abcd}+2\beta\bar{\psi}\Gamma^{ab}\Gamma_5\psi V^b \quad (5.19)$$

+ termos com curvaturas=0

da qual concluímos $\alpha = 0$ e $\beta = 0$!

Deste modo o termo cosmológico λ do grupo desaparece.

Equações de campo para ψ :

Novamente omitindo termos proporcionais a R^A posto que consideramos o caso $R^A = 0$, somente $\delta\psi$ em $R(Q)$ contribui. Contudo, $\delta\psi$ produz depois da integração parcial zero, desde que $\delta\bar{\psi} = \bar{R}(\bar{Q}) = 0$. Deste modo a analogia mais geral - preservando a ação localmente invariante de Lorentz para a qual o vácuo clássico é uma solução da equação de campo será

$$I = \int \left[R(M)^{ab} V^c V^d \epsilon_{abcd} + 4\bar{\psi} \Gamma_5 \Gamma_a R(Q) V^a \right] + \delta R(M)^{ab} (\bar{\psi} \Gamma_{ab} \Gamma_5 \psi), \quad (\gamma = 1). \quad (5.20)$$

É conveniente a este ponto fazer duas observações. Usamos as equações de campo, para garantir que $R^A = 0$ é uma solução das próprias equações de campo. Não há nada ilógico neste procedimento: tudo o que se faz é fixar constantes na ação, e tendo fixado estas constantes uma vez por todas, poderíamos esquecê-las como obtê-las, e proceder à investigar se $R^A = 0$ é uma solução. A segunda observação concerne se $\delta\lambda / \delta h_A + D\nu_A = 0$ tem soluções. Não há soluções, e conclui-se então o estudo deste grupo G e segue-se para o próximo caso. Se há soluções, poderíamos tentar construir a forma atual da superfície M satisfazendo $R^A = 0$. Poderíamos também estudar (ou tentar provar) que a superfície definida pelos campos $h_\mu^A(x)$ é a mesma que a obtida como um tipo de variedade mínima na variedade de grupo. Estes aspectos não serão aqui tratados.

Posto que $R^A = 0$ é uma solução, as equações de campo são expressões algébricas nas curvaturas. Isto significa que ao invés de variando todos os termos na ação para descobrir a equação de campo, um modo mais rápido é variar somente termos com derivadas. Então, por exemplo, não precisamos variar ω^{ab} em $R(Q)$ e variar somente o termo $d\omega^{ab}$ em $R(M)^{ab}$. Deste modo, encontramos as seguintes equações de campo:

$$\omega^{ab} : 2R(P)^c V^d \epsilon_{abcd} - 2\delta\bar{\psi} \Gamma_{ab} \Gamma_5 R(Q) = 0$$

$$V^a : 2R(M)^{bc} V^d \epsilon_{abcd} - 4\bar{\psi} \Gamma_5 \Gamma_a R(Q) = 0 \quad (5.21)$$

$$\bar{\psi} : 8\Gamma_5 \Gamma_a R(Q) V^a - 4\Gamma_5 \Gamma_a \psi R(P)^a + 2\delta R(M)^{ab} \Gamma_{ab} \Gamma_5 \psi = 0.$$

Expandimos todas curvaturas na base completa de ψ^a e V^a .

$$R(M)^{ab} = R(M)_{kl}^{ab} V^k V^l + \bar{\psi} R(M)_c^{ab} V^c + \bar{\psi} R(M)^{ab} \psi, \text{ idem } R(P) \quad (5.22)$$

$$R(Q)^a = R(Q)_{kl}^a V^k V^l + R(Q)_b^a \psi V^b + (\bar{\psi} R^a(Q)) \psi.$$

Substituindo estas expressões nas equações de campo temos que para cada das 14 h^A um total de $\frac{1}{2} 10 \times 9 + \frac{1}{2} 4 \times 5 = 55$ equações de campo. Contudo, como explicitamente nenhum ω^{ab} aparece nas equações de campo, todas curvaturas R_{AB}^C com A e /ou B em H desapareçam. (Esta foi a razão porque não expandimos R^A em termos de ψ^a , V^a e ω^{ab} , mas somente em ψ^a e V^a .)

Para investigar se a teoria é também reonômica, isto é, se todas curvaturas externas (outer curvatures) podem ser expressas em função de curvaturas internas (inner curvatures), nós devemos analisar separadamente os termos restantes em $\psi\psi\psi$, $\psi\psi V$ e $\psi V V$ das equações de campo.

O termo em $\psi V V$ da equação ω^{ab} produz $\delta R(Q)_{mn} = R(P)_a^m = 0$. Suponha que δ não fosse zero, tal que a parte $V V$ do $R(Q)$ desaparecesse. Como está mostrado no apêndice 1, se agora olharmos a todas as outras equações de campo, e usando as identidades de Bianchi, todos os componentes de todas as curvaturas desapareceriam, e a teoria desmoronaria. Note que esta é uma mais forte restrição do que aquela de que todos os campos satisfaçam suas equações de campo. Consequentemente, desde que a teoria tenha mais soluções do que somente $R^A = 0$, devemos colocar $\delta = 0$.

Neste caso as equações de campo reduzem-se a:

$$\omega^{ab} : R(P)^c V^d \epsilon_{abcd} = 0$$

$$V^a : R(M)^{bc} V^d \epsilon_{abcd} - 2 \bar{\psi} \Gamma_5 \Gamma_c R(Q) = 0$$

$$\bar{\psi} : 2 \Gamma_5 \Gamma_a R(Q) V^a - \Gamma_5 \Gamma_a \psi R(P)^a = 0. \quad (5.23)$$

Os termos em $\psi V V$ e $\psi\psi V$ da equação ω^{ab} são tais que $R(P)$ não tenha projeções em ψV e $\psi\psi$. Deste modo

$$R(P)^a = R(P)_{mn}^a V^m V^n \quad (5.24)$$

A equação ψ nas direções externas nos diz que $R(Q)$ também não tem termos em ψV ou $\psi\psi$, portanto:

$$R(Q) = R(Q)_{mn} V^m V^n. \quad (5.25)$$

Finalmente, as direções externas da equação V^a nos diz que $R(M)$ não tem termos em $\psi\psi$, enquanto a parte em ψV de $R(M)$ é dada em termos de $R(Q)_{mn}$, ou seja,

$$R(M)^{ab} = R(M)_{kl}^ab V^k V^l + \bar{\psi} R(M)_c^{ab} V^c \quad (5.26)$$

$$\bar{\psi} R(M)_c^{ab} = -\bar{\psi} \Gamma_5 \Gamma_c \tilde{R}^{ab}(Q) + \frac{1}{2} \Gamma_5 \Gamma_d \tilde{R}(Q)^{ad} \delta_c^b - \frac{1}{2} \Gamma_5 \Gamma_d \tilde{R}^{bd}(G) \delta_c^a \quad (5.27)$$

onde $R(\tilde{Q})^{ab}$ é igual a $\epsilon^{abcd} R(Q)_{cd}$.

Portanto, como conclusão, diremos que a teoria é reonômica.

Fig 28. Reflexão do objeto A

Maupertuis, século XVIII, por sua vez formulou um princípio filosófico, considerando que todos os fenômenos físicos ocorreriam seguindo uma ação mínima dada por

$$A = m \times v \times s, \text{ onde:}$$

m = massa do corpo

v = velocidade do corpo

s = caminho percorrido pelo corpo

Para alguns, dentre estes Mach, foi inspirado pelas idéias e pelo princípio filosófico de Maupertuis que Euler formalizou a ação de outra maneira, estipulando que para todo sistema mecânico existe uma integral S , chamada ação, que tem um mínimo para o movimento efetivo e cuja variação δS é consequentemente, nula. Pode-se representar a ação sob a forma de uma integral no tempo

$$S = \int L dt.$$

CONCLUSÃO:

É importante ressaltar, como conclusão ao nosso trabalho, que as origens filosóficas do Princípio da mínima ação talvez nos levem à Grécia antiga, como destacado por E. Mach e E. Whittaker nas suas obras “A treatise on the Analytical Dynamics of particles and Rigid Bodies”, Dover Publications, 1944”, e “The Science of Mechanics”, dover publications, 1971”, respectivamente [13], [14].

A origem histórica do Princípio da mínima ação estaria no Princípio de Heron, quanto a reflexão da luz seguir o menor caminho (fig.20).

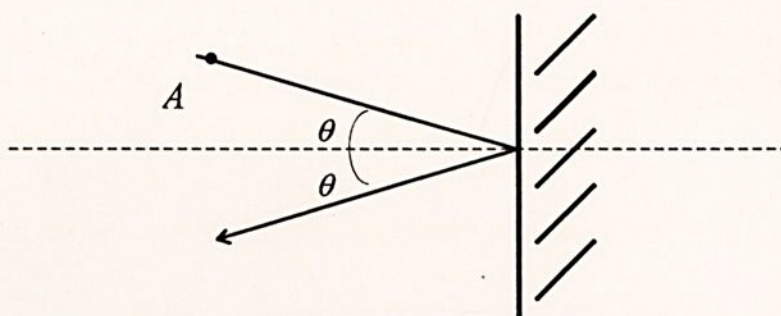


Fig.20: Reflexão do objeto A

Maupertuis, século XVIII, por sua vez formulou um princípio filosófico, considerando que todos os fenômenos físicos ocorreriam seguindo uma ação mínima dada por

$$A = m \times v \times s, \text{ onde:}$$

m = massa do corpo

v = velocidade do corpo

s = caminho percorrido pelo corpo

Para alguns, dentre estes Mach, foi inspirado pelas idéias e pelo princípio filosófico de Maupertuis que Euler formalizou a ação de outra maneira, estipulando que para todo sistema mecânico existe uma integral S , chamada ação, que tem um mínimo para o movimento efetivo e cuja variação δS é consequentemente, nula. Pode-se representar a ação sob a forma de uma integral no tempo

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt ,$$

onde o integrando L é a função de Lagrange do sistema mecânico dado.

A variação $\delta S = 0$, produz, como vimos ao longo do texto, as equações do movimento, equações de campo. É através deste princípio que são calculadas as equações de campo nas modernas teorias de supergravidade e seguindo resultados recentes [15], é um princípio também válido e útil para teorias do tipo Yang-Mills (teoria que estendem o conteúdo daquelas de supergravidade, pela presença de campos materiais).

$$\omega^{\mu\nu} : R(P)^{\alpha} V^{\beta} \in_{\mu\nu} - \delta \omega^{\mu\nu} \Gamma_{\alpha} R(Q) = 0$$

$$V^{\mu} : R(M)^{\alpha} V^{\beta} \in_{\mu\nu} - 2 \omega^{\mu\nu} \Gamma_{\alpha} R(Q) = 0$$

$$\bar{\psi} : 4 \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} R(Q) V^{\alpha} - 2 \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \psi R(P)^{\alpha} + 4 R(M)^{\alpha} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \psi = 0$$

δ é o parâmetro livre. Expandimos as curvaturas na base completa ψ^{μ} como segue

$$R(M)^{\alpha} = R(M)^{\alpha}_{\mu} V^{\mu} V^{\nu} + \bar{\psi} R(M)^{\alpha}_{\mu} V^{\mu} + \bar{\psi} R(M)^{\alpha}_{\nu} \psi$$

$$R(P)^{\alpha} = R(P)^{\alpha}_{\mu} V^{\mu} V^{\nu} + \bar{\psi} R(P)^{\alpha}_{\mu} V^{\mu} + \bar{\psi} R(P)^{\alpha}_{\nu} \psi$$

$$R(Q)^{\alpha} = R(Q)^{\alpha}_{\mu} V^{\mu} V^{\nu} + R(Q)^{\alpha}_{\mu} \psi V^{\mu} + \bar{\psi} R(Q)^{\alpha}_{\nu} \psi$$

Os pontos indicam contrações de "spinors". Também precisamos da identidade de Bianchi, a qual é obtida do texto principal

$$\Delta R^{\mu\nu} = 0, \quad \Delta R(Q) = R^{\mu\nu}(M) \frac{1}{4} \Gamma_{\mu\nu} \psi$$

$$\Delta R(P)^{\alpha} = R(M)^{\alpha} V^{\beta} - \bar{\psi} \Gamma^{\alpha} R(Q)$$

Simbolizamos algumas vezes os componentes das curvaturas por $R(P)_{\mu\nu}, R(P)_{\mu\nu},$ etc.

As equações de Einstein seguem do termo $V^{\mu} V^{\nu}$ da equação V^{μ} .

$$R(M)^{\mu\nu} = 0$$

As equações obtidas por

$$\epsilon^{\mu\nu} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} R(Q)_{\mu\nu} = 0,$$

são as conhecidas equações de Rarita-Schwinger.

APÊNDICE

Neste apêndice mostramos que a necessidade de que existam mais outras soluções das equações de campo (interiores e exteriores), e não apenas aquela para somente o vácuo, fixa um parâmetro livre na ação super Poincaré.

Nas equações de campo

$$\omega^{ab}: R(P)^c V^d \in_{abcd} -\delta \bar{\psi} \Gamma_{ab} \Gamma_5 R(Q) = 0$$

$$V^a: R(M)^{bc} V^\alpha \in_{abcd} -2 \bar{\psi} \Gamma_5 \Gamma_a R(Q) = 0$$

$$\bar{\psi}: 4 \Gamma_5 \Gamma_a R(Q) V^a - 2 \Gamma_5 \Gamma_a \psi R(P)^a + \delta R(M)^{ab} \Gamma_{ab} \Gamma_5 \psi = 0$$

δ é o parâmetro livre. Expandimos as curvaturas na base completa ψV como segue

$$R(M)^{ab} = R(M)^{ab}_{kl} V^k V^l + \bar{\psi} R(M)^{ab}_{,k} V^k + \bar{\psi} R(M)^{ab}_{,,} \psi$$

$$R(P)^a = R(P)^a_{kl} V^k V^l + \bar{\psi} R(P)^a_{,k} V^k + \bar{\psi} R(P)^a_{,,} \psi$$

$$R(Q)^\alpha = R(Q)^\alpha_{kl} V^k V^l + R(Q)^\alpha_{\beta k} \psi V^k + \bar{\psi} R(Q)^\alpha_{,,} \psi.$$

Os pontos indicam contrações de "spinors". Também precisamos da identidade de Bianchi, a qual é obtida do texto principal

$$\delta R^{ab} = 0, \quad \delta R(Q) = R^{ab}(M) \frac{1}{4} \Gamma_{ab} \psi$$

$$\delta R(P)^a = R(M)^{ab} V^b - \bar{\psi} \Gamma^a R(Q).$$

Simbolizamos algumas vezes os componentes das curvaturas por $R(P)_{VV}, R(P)_{\psi V}$, etc.

As equações de Einstein seguem do termo VVV da equação V^a .

$$R(M)^{ab}_{ka} = 0$$

As equações obtidas por

$$\in^{aklb} \Gamma_5 \Gamma_a R(Q)_{kl} = 0,$$

são as conhecidas equações de Rarita-Schwinger.

A parte VVV da equação ω^{ab} é a equação usual de torção

$$R(P)^c_{kl} = 0 .$$

O termo ψVV da equação ω^{ab} produz

$$\bar{\psi} R(P)^c_k V^k V^d \in_{abcd} - \delta \bar{\psi} \Gamma_{ab} \Gamma_5 R(Q)_{kl} V^k V^l = 0 .$$

Substituindo $V^k V^d$ por $\in^{klmn}$ (a qual eleva-se expressando a anticomutatividade das 1-formas V^k e V^d), e expandindo o produto de dois $\in$ -símbolos em soma dos produtos de funções delta Kronecker, obtém-se

$$\begin{aligned} & 2\bar{\psi} (R(P)^{[l}_a \delta^{n]}_b - R(P)^{[m}_b \delta^{n]}_a - R(P)^k_a \delta^{[m}_a \delta^{n]}_b) \\ & = -\delta \bar{\psi} \Gamma_{ab} \Gamma_5 R(Q)_{kl} \in^{klmn} \end{aligned}$$

Tomando a, b, m e n todos diferentes, o lado esquerdo desaparece. Consequentemente, $\Gamma_{ab} \Gamma_5 R(Q)_{kl} = 0$, e isto, em troca, produz

$$R(Q)_{VV} = 0 , \quad R(P)_{\psi V} = 0 .$$

A seguir, considere o termo ψVV da equação V^a . Desde que $R(Q)$ não tenha partes VV , descobre

$$\bar{\psi} R(M)^{bc}_{,k} V^k V^d \in_{abcd} = 0 .$$

Substituindo $V^k V^d$ por um $\in$ -símbolo, descobre

$$\bar{\psi} R(M)^{mn}_{,a} - \bar{\psi} R(M)^{mk}_{,k} \delta^n_a - \bar{\psi} R(M)^{nk}_{,k} \delta^m_a = 0$$

e depois traçando sobre, descobre

$$R(M)^{bc}_{\psi V} = 0 .$$

Agora consideramos o termo ψVV da equação $\bar{\psi}$. Depois de extrair o fator Γ_5 , têm-se

$$-4\Gamma_a R(Q)^a_{\beta k} \psi^\beta V^k V^a = \delta R(M)^{ab}_{kl} V^k V^l \Gamma_{ab} \psi .$$

Parametrizando o termo ψV de $R(Q)$ como segue

$$(M_k)^\alpha{}_\beta \equiv R(Q)^\alpha{}_{\beta k} = (\delta_k + P_k \Gamma_5 + V_{km} \Gamma_m + A_{km} \Gamma_5 \Gamma_m + \Gamma_{kmn} \Gamma_{mn})$$

e omitindo as 1-formas, nós encontramos a equação matriz

$$2(\Gamma_k M_l - \Gamma_l M_k) = \delta R(M)_{kl}^{ab} (\Gamma_{ab}) .$$

Desde que possa ter o termo Γ_{mn} do lado esquerdo, descobriremos um conjunto de restrições o qual exclui todas as outras estruturas do tensor:

$$V_{km} = \text{simetrico} , \quad A_{km} = \text{simetrico} \quad (\text{em } l \text{ ou } \Gamma_5)$$

$$(\delta_{kn} S_l - \delta_{ln} S_k) = 2T_{kln} - 2T_{lkn} \quad (\text{em } \Gamma_k)$$

$$(\delta_{ks} P_l - \delta_{ls} P_k) = T_{kmn} \epsilon_{smnl} - T_{lmn} \epsilon_{smnk} \quad (\text{em } \Gamma_k \Gamma_5) .$$

A equação com S_l é

$$T_{kln} = -\frac{1}{2} \delta_{kl} S_n + \frac{1}{2} \delta_{kn} S_l$$

mas inserindo esta solução na equação com P_l , descobre-se que $P_l = 0$, e consequentemente $S_l = 0$, consequentemente $T_{kln} = 0$. Os termos V_{km} e A_{km} em M devem reproduzir os termos Γ_{ab} , e isto produz uma equação da forma

$$\delta_k^{[a} \delta_m^{b]} V_{lm} - \delta_l^{[a} \delta_m^{b]} V_{km} + \epsilon^{ab}{}_{km} A_{lm} - \epsilon^{ab}{}_{lm} A_{km} = R_{(\mu)kl}^{ab} .$$

Traçando sobre (al) e usando as equações de Einstein e a simetria de A_{lm} , descobrimos que $V_{lm} = 0$. Por outro lado, multiplicando por $\epsilon^{b}{}_{kl}$ e usando a identidade de Bianchi $R_{[bkl]}^a = 0$, $A_{lm} = 0$. Consequentemente, nós concluímos que a matriz inteira M_k desaparece. Em outras palavras,

$$R(Q)_{\psi V} = 0 , \quad R(M)_{VV} = 0 .$$

Do desaparecimento do termo ψV , nós deduzimos com a equação ω^{ab} que o termo $\psi\psi$ de $R(P)$ desaparece. Consequentemente a P -curvatura desaparece

$$R(P)^a = 0.$$

Inserindo este resultado na identidade de Bianchi para $R(P)$ produz

$$R(M)^{ab}V^b = \bar{\psi}T^aR(Q)$$

e consequentemente, desde que $R(Q)_{\psi V} = 0$

$$R(M)_{\psi\psi} = 0.$$

Desde que já encontramos que $R(M)_{\psi V} = 0$, teremos da equação ψ que

$$R(Q)_{\psi\psi} = 0.$$

Deste modo, todas curvaturas desaparecem se $\delta = 0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. E. Elsgolc, *Calculus of Variations*, Assison - Wesley, 1962.
- [2] V.I. Arnold, *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*, Editora Mir, Moscou, 1987
- [3] L. Landau, E. Lifchitz, *Teoria do Campo*, Editora Hemus, 1977.
- [4] H.Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison - Wesley, 1972.
- [5] A. Lichnerowicz, *Elementos de Cálculo Tensorial*, Aguilar, 1972.
- [6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, 1972.
- [7] P. A. M. Dirac, *General Relativity*, Wiley, 1975.
- [8] P. Fayet e S. Ferrara, *Supersymmetry*, Physics Reports. 32, (1977). 142.
- [9] F. A. Berezin, *Introduction to Supersanalysis*, Reidel, Dordrecht, 1986.
- [10] B. Kostant, Graded Manifolds, Graded Lie Teory, and Prequantization, *Lecture Notes in Mathematics*, vol.570, Springer, Berlin, 1977..
- [11] L. Castellani, R. D'Auria, P. Fré "Supergravity and Superstrings". A geometric perspective, vol.1, "Mathematical Foundations", World Scientific Publishing, New Jersey, 1991.
- [12] F. Quintiliano, *Álgebra de Dirac e algumas identidades de Fiers para uma teoria supersimétrica em cinco dimensões*, Dissertação Mestrado, UNESP, 1996.
- [13] E. Mach, *The Science of Mechanics*, open court, La Salle, 1960.
- [14] E. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, dover publications, 1971. A geometric perspective, vol.1, "Mathematical Foundations", World Scientific Publishing, New Jersey,
- [15] M. F. Borges, *Journal of Geometry an Physics*, Elsevier, Amsterdam, 20, 2, (1996). 142.



