

UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá
2002



1110000516



***"Características Dinâmicas e Estudo
da Estabilidade de Um Sistema
Formado por um Braço de Robô,
com Dois Elos Não Rígidos,
Incluindo a Ação da Gravidade"***

AFONSO HENRIQUE CASTILHO

200



CARO LEITOR NÃO
RISQUE O LIVRO

AFONSO HENRIQUE CASTILHO

CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS E ESTUDO DA ESTABILIDADE DE
UM SISTEMA FORMADO POR UM BRAÇO DE ROBÔ, COM DOIS
ELOS NÃO RÍGIDOS, INCLUINDO A AÇÃO DA GRAVIDADE

Dissertação apresentada à Faculdade
de Engenharia do Campus de
Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista, para a obtenção
do título de Mestre em Engenharia
Mecânica na área de Projetos e
Materiais

516

Orientador: Prof. Dr. Victor Orlando Gamarra Rosado

Guaratinguetá

2003

516

FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ
BIBLIOTECA



Data: _____
Valor: _____
C/D/T: _____

Castilho, Afonso Henrique
C352c Características dinâmicas e estudo da estabilidade de um sistema
formado por um braço de robô, com dois elos não rígidos, incluindo a ação
da gravidade / Afonso Henrique Castilho . – Guaratinguetá : [s.n.], 2003
150f. : il.

Bibliografia: f. 106-112
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade
de Engenharia de Guaratinguetá, 2003
Orientador: Prof. Dr. Victor Orlando Gamarra Rosado

1. Robótica I. Título

CDU 007.52

**“CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS E ESTUDO DA ESTABILIDADE DE
UM SISTEMA FORMADO POR UM BRAÇO DE ROBÔ, COM DOIS ELOS
NÃO RÍGIDOS, INCLUINDO A AÇÃO DA GRAVIDADE”**

AFONSO HENRIQUE CASTILHO

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE**

“MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA”

**ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PROJETOS E MATERIAIS**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. José Luz Silveira
Coordenador

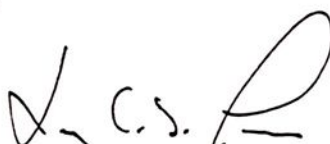
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. VICTOR ORLANDO GAMARRA ROSADO
Orientador / Unesp-Feg



Prof. Dr. TAMOTSU HIRATA
Unesp-Feg



Prof. Dr. LUIZ CARLOS SANDOVAL GÓES
ITA

Janeiro de 2003

DADOS CURRICULARES

AFONSO HENRIQUE CASTILHO

NASCIMENTO	06.04.1948 – SÃO JOÃO DA BOA VISTA / SP
FILIAÇÃO	Afonso Castilho Aparecida Boaventura Castilho
1967/1970	Curso de Formação Academia Militar das Agulhas Negras - AMAN
1978/1980	Curso de Graduação em Engenharia de Metalurgia Instituto Militar de Engenharia - IME
1998	Curso de Especialização de Técnica de Ensino (Inc) Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Dedico este trabalho, de modo muito especial, à minha esposa Marly que sempre foi minha grande incentivadora e que, uma vez mais, me ajudou de forma categórica para que eu concluísse este curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me dado capacidade e força de vontade para desenvolver este trabalho. A Ele toda honra e toda glória agora e sempre.

ao meu orientador, *Prof. Dr. Victor Orlando Gamarra Rosado*, pelo seu incentivo e apoio no desenvolvimento desta dissertação. Durante estes quase dois anos, o *Prof Victor* colocou a minha disposição toda a sua experiência no campo da modelagem matemática de sistemas mecânicos e da engenharia de controles. Foram muitas e longas conversas que sempre serviram para dirimir dúvidas ou, pelo menos, para indicar caminhos para a solução das dificuldades por mim encontradas.

aos professores do Departamento de Engenharia da FEG/UNESP, não só pelos conhecimentos transmitidos durante as aulas, mas também pela sua amizade e espírito de cooperação que demonstraram no nosso contato durante o curso.



CASTILHO, A. H.. Características dinâmicas e estudo da estabilidade de um sistema formado por um braço de robô, com dois elos não rígidos, incluindo a ação da gravidade. 2003. 150f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

RESUMO

Apresenta-se neste trabalho a modelagem dinâmica de um braço de robô, com dois elos não rígidos e duas juntas revolutas, movendo-se no plano vertical. Na obtenção do equacionamento matemático utilizou-se a formulação Newton-Euler, junto com o método de elementos finitos e a teoria elementar de vigas. Assim, neste estudo, considerou-se o efeito da gravidade e, também, a ação de uma carga colocada na extremidade livre do braço. A análise e a consideração destes parâmetros é necessária e de grande importância no estudo do problema da estabilidade e do controle do sistema. Neste trabalho, procurou-se estudar a estabilidade do braço robótico a luz do primeiro método de Liapunov. As equações que governam o movimento do braço foram desenvolvidas e, em seguida, linearizadas em torno de um valor nominal. Finalmente, a estabilidade do sistema foi analisada baseando-se nos autovalores da matriz de Jacobi das equações que governam o sistema.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem dinâmica, braço flexível, robótica, matriz de Jacobi, linearização, estabilidade, método de Liapunov.

CASTILHO, A. H. **Dynamic characteristics and stability analysis of a systems given for a nonrigid two link robotic arm including the gravity effects.** 2003. 150f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

ABSTRACT

This work presents the dynamic modeling of a system given for an arm with two nonrigid links interconnected by two revolute joints and a payload at its free end. The arm is moving in the vertical plane, so it is considered the gravity effects. The dynamic equations were obtained using the Newton-Euler's formulation together with the elementary beam theory based on the finite element method. The analysis of system's parameters is necessary and very important in the study of the stability problem and it is fundamental to apply a control strategy.

In this work, the dynamic stability of a flexible arm is studied according to Liapunov's first approximation method of stable criteria. The governing equations were developed and were linearized around the nominal value, also the modal analysis method of the systems was studied. The stable criteria was established by means of eigenvalue analysis of Jacobi matrix of governing equations.

KEYWORDS: Dynamics modeling, flexible arm, robotics, linearization, stability, Jacobi matrix, Liapunov's method

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS	15
1.2	OBJETIVOS	18
2	MODELAGEM MATEMÁTICA DO BRAÇO ROBÓTICO	19
2.1	INTRODUÇÃO	19
2.2	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	19
2.3	DETERMINAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO DO BRAÇO ROBÓTICO	22
2.3.1	Cinemática do movimento	22
2.3.2	Dinâmica do movimento	26
2.4	REPRESENTAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO NA FORMA MATRICIAL	40
3	LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO SISTEMA E OBTENÇÃO DA MATRIZ DE JACOBI	49
3.1	INTRODUÇÃO	49
3.2	LINEARIZAÇÃO DO BRAÇO COM ELOS DEFORMÁVEIS	51
3.3	OBTENÇÃO DA MATRIZ DE JACOBI	55
4	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DO BRAÇO ROBÓTICO FORMADO POR DOIS ELOS NÃO RÍGIDOS	65
4.1	INTRODUÇÃO	65
4.2	ESTABILIDADE SEGUNDO LIAPUNOV	66
4.3	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DO BRAÇO ROBÓTICO	69
4.4	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DO ELO SUPERIOR DO BRAÇO ROBÓTICO	75
4.4.1	Aplicação da condição de estabilidade $\tilde{h}_2 < 0$	83



4.4.2	Aplicação da condição de estabilidade $\tilde{c}_2 < 0$	90
4.5.	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DO ELO INFERIOR DO BRAÇO ROBÓTICO.....	95
4.5.1	Aplicação da condição de estabilidade $\tilde{h}_2 < 0$	99
4.5.2	Aplicação da condição de estabilidade $\tilde{c}_2 < 0$	102
5	CONCLUSÕES.....	103
	REFERÊNCIAS.....	106
	BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.....	109
	APÊNDICE A.– Determinação das matrizes de rotação e suas derivadas.....	113
	APÊNDICE B – Operações com as matrizes de rotação	116
	APÊNDICE C – Determinação das derivadas da matriz $M(\omega)$ e dos vetores $h(\omega)$ e $h(\dot{\omega})$	122
	APÊNDICE D – Programa MatLab para determinação das acelerações.....	124
	APÊNDICE E – Determinação da matriz inversa M^{-1} pelo processo dos co-fatores.....	140
	APÊNDICE F – Determinação dos autovalores da matriz de Jacobi.	145
	APÊNDICE G – Formulação da matriz de rigidez de um elemento de viga Plano.....	148

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Configuração não deformada do braço robótico.....	20
FIGURA 2	– Configuração deformada do braço robótico.....	21
FIGURA 3	– Sistema de coordenadas (x_p, z_p) para determinação da força total no elo inferior	35
FIGURA 4	– Forças e momentos que agem no elo superior	37
FIGURA 5	– Forças e momentos que agem no elo inferior	38
FIGURA 6	– Classificação da estabilidade de sistemas não lineares.....	68
FIGURA 7	– Componentes das forças e torques em uma haste em equilíbrio.....	70
FIGURA 8	– Atuação do peso no movimento de subida do elo	85
FIGURA 9	– Atuação do peso no movimento de descida do elo.....	86
FIGURA 10	– Posição relativa dos elos em função dos deslocamentos angulares	88
FIGURA A1	– Representação das coordenadas nos sistemas global e local	113
FIGURA G1	– Polinômios cúbicos de Hermite.....	148

LISTA DE SÍMBOLOS

b_2	Termo da matriz de Jacobi para análise da estabilidade do elo	
b_4	Termo da matriz de Jacobi para análise da estabilidade do braço robótico	
C	$\text{Cos}(\phi-\beta)$	
c_2	Termo da matriz de Jacobi para análise da estabilidade do elo	
c_4	Termo da matriz de Jacobi para análise da estabilidade do braço robótico	
f_i	Força que age no elemento i do elo superior segundo a orientação do sistema de coordenadas global	$[N]$
f_i^1	Força que age no elemento i do elo superior segundo a orientação do sistema de coordenadas local do elo 1	$[N]$
f_j^2	Força que age no elemento j do elo inferior segundo a orientação do sistema de coordenadas local do elo 2	$[N]$
f_i^{21}	Força que age no elemento i do elo inferior segundo a orientação do sistema de coordenadas local do elo 1	$[N]$
f_j^{22}	Força que age no elemento j do elo inferior segundo a orientação do sistema de coordenadas local do elo 2	$[N]$
F_z	Componente z da força resultante que age no elo inferior	$[N]$
F_x	Componente x da força resultante que age no elo inferior	$[N]$
g	Aceleração da gravidade	$[m.s^{-2}]$
J	Matriz de Jacobi	
J_1	Momento de inércia do atuador 1	
J_2	Momento de inércia do atuador 2	

J_p	Momento de inércia da carga na extremidade	
K	Matriz de rigidez	
l^2	Comprimento do elo inferior	$[m]$
l^1	Comprimento do elo superior	$[m]$
M_{total}	Massa total do elo inferior, incluindo atuador e carga	$[kg]$
M_{A2}	Massa do segundo atuador	$[kg]$
M_{A1}	Massa do primeiro atuador	$[kg]$
M_p	Massa da carga da extremidade livre do elo inferior	$[kg]$
$M(\omega)$	Matriz de massa do sistema	
$M(\tilde{\omega})$	Matriz de massa do sistema com valores nominais	
M_i^1	Massa do elemento i do elo superior	$[kg]$
M_i^2	Massa do elemento i do elo inferior	$[kg]$
Q^2	Matriz de rotação do elo inferior	
Q^1	Matriz de rotação do elo superior	
s	Inclinação na extremidade livre do elo superior	
S	$\text{sen}(\phi - \beta)$	
T_2	Torque aplicado no elo inferior	$[N.m]$
T_1	Torque aplicado no elo superior	$[N.m]$
U_i^1	Coordenada local do ponto nodal i do elo superior	$[m]$
U_i^2	Coordenada local do ponto nodal i do elo inferior	$[m]$
$\mathbf{x}_i^1$	Vetor posição do ponto nodal i do elo superior	$[m]$
$\mathbf{x}_i^2$	Vetor posição do ponto nodal i do elo inferior	$[m]$
$\dot{\mathbf{x}}_i^1$	Vetor velocidade do ponto nodal i do elo superior	$[m/s]$
$\dot{\mathbf{x}}_i^2$	Vetor velocidade do ponto nodal i do elo inferior	$[m/s]$
$\ddot{\mathbf{x}}_i^1$	Vetor aceleração do ponto nodal i do elo superior	$[m/s^2]$
$\ddot{\mathbf{x}}_i^2$	Vetor aceleração do ponto nodal i do elo inferior	$[m/s^2]$

$\mathbf{x}_i^1$	Vetor posição do último ponto nodal i do elo superior	$[m]$
$\mathbf{x}_i^2$	Vetor posição do último ponto nodal i do elo inferior	$[m]$
Z_i^1	Coordenada local do ponto nodal i do elo superior	$[m]$
Z_i^2	Coordenada local do ponto nodal i do elo inferior	$[m]$
β	Deslocamento angular do elo inferior	$[rad]$
$\dot{\beta}$	Velocidade angular do elo inferior	$[rad/s]$
$\ddot{\beta}$	Aceleração angular do elo inferior	$[rad/s^2]$
δ	Região do espaço de estado que define condição de estabilidade do sistema	
ε	Região do espaço de estado que define condição de estabilidade do sistema	
ζ	Coeficiente de amortecimento do sistema	
λ	Autovalores da matriz de Jacobi	
ϕ	Deslocamento angular do elo superior	$[rad]$
$\dot{\phi}$	Velocidade angular do elo superior	$[rad/s]$
$\ddot{\phi}$	Aceleração angular do elo superior	$[rad/s^2]$
ω	Vetor posição de coordenadas de estado	
$\dot{\omega}$	Vetor velocidade de coordenadas de estado	
$\ddot{\omega}$	Vetor aceleração de coordenadas de estado	
ω_n	Frequência natural do sistema	$[rad/s]$
Ω	Vetor de forças generalizadas	

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

A grande maioria dos robôs industriais são equipamentos pesados e que possuem pelo menos um braço composto de um conjunto de corpos rígidos. A idéia básica, deste trabalho, é estudar o comportamento de um braço robótico leve, diferente, portanto, dos braços dos robôs industriais normais. Para obter um braço leve é necessário o emprego de material e dimensões adequadas, ou seja, o material deve ser leve e a área da seção transversal, reduzida. O braço, neste caso, tornar-se-á flexível o que, inevitavelmente, causará o aparecimento de deflexões ou, pelo menos, vibrações, acarretando vários problemas de precisão e de estabilidade no seu posicionamento. Procurar-se-á estudar o movimento do braço numa situação o mais geral possível. Considerar-se-á que o braço é constituído de dois elos ligados por juntas rotativas e que está sujeito à ação da gravidade. Os elos estarão submetidos a esforços de flexão e na extremidade livre de um deles existirá uma carga aplicada. O estudo se desenvolverá no sentido de uma aplicação genérica. Pode-se imaginar o emprego deste braço em um equipamento de resgate, em uma prótese humana ou em algum equipamento leve de laboratório. O equipamento de resgate seria, por exemplo, um pequeno robô usado para retirar uma bomba de uma edificação ou, para localização de sobreviventes que possam estar sob escombros de algum prédio, que ruiu por alguma razão. A prótese humana é um braço mecânico que será usado por alguma pessoa em substituição do membro natural, quando isto for necessário. O equipamento leve de laboratório é um braço mecânico necessário para operar com materiais tóxicos ou contagiosos ou, até mesmo, um mecanismo de grande precisão como, por exemplo, um dispositivo para fertilização de um óvulo em uma operação de inseminação artificial. Como foi dito anteriormente, não se deseja estudar, em particular, nenhum dos equipamentos acima descritos, no entanto, como o Departamento de Engenharia Mecânica da FEG está bastante envolvido com pesquisas na área da bioengenharia, na expectativa de que este trabalho possa ser aproveitado nestas

pesquisas, o movimento geral do mecanismo foi considerado como o de um braço humano, deslocando-se num plano vertical, partindo da sua posição mais baixa e elevando-se para uma posição qualquer no quarto ou primeiro quadrante. Para simplificação o quarto quadrante será designado região I e o primeiro quadrante, região II. Fazendo-se a análise numa situação bastante geral, o equacionamento matemático conterá todas as variáveis e o campo de aplicação do sistema fica ampliado.

A primeira etapa deste trabalho consiste na obtenção de um modelo matemático do braço considerado, contendo todas as variáveis de posição, velocidade, aceleração e deformações, tanto transversais como longitudinais. Em seguida será feita uma análise com base no método dos elementos finitos e, conseqüentemente, a montagem do equacionamento matemático na forma matricial. Nesta etapa é conveniente fazer algumas simplificações que são oportunas, sem, no entanto, perder o caráter genérico do modelo matemático. Mesmo fazendo estas simplificações o modelo ainda permanece aplicável a uma grande quantidade de sistemas mecânicos reais.

A maioria das análises dos controles dos robôs industriais atuais é baseada na concepção de que o braço do robô é rígido e que pode ser considerado como sendo composto por um conjunto de corpos rígidos. Portanto, a partir do momento em que os ângulos das juntas tenham assumido valores pré-determinados, a extremidade final do braço do robô ocupará a posição desejada. O sistema de controle torna-se mais simples nestes casos, mas, em compensação, os robôs construídos com estas características apresentam um grande peso e uma estrutura que os impede de serem movimentados, com facilidade, de um ponto para outro. No caso do presente trabalho, onde se procura estudar o comportamento dinâmico de um braço robótico não rígido leve, a obtenção do modelo matemático e o estabelecimento do sistema de controle são bem mais complexos. Alguns estudos foram desenvolvidos neste sentido.

O trabalho de Cannon e Schmitz (1984), foi um estudo pioneiro na área do controle dos braços flexíveis de robôs. Tratava-se da modelagem matemática de um braço flexível único e os resultados experimentais relativos ao seu controle foram satisfatórios. O controle, neste caso, atuava no sentido de fazê-lo ocupar uma certa posição que era

controlada pela própria medida desta posição. É interessante, também, que se faça menção aos trabalhos de Harashima e Ueshiba (1986) e Sangveraphunsiri (1984). Em todos estes trabalhos existem dois pontos em comum. O primeiro ponto é que se trata de um braço composto de um único elemento, com seu centro de rotação sobre o eixo dos z e varrendo o plano horizontal $x-y$. O segundo ponto é que se trata de um braço flexível e modelado como uma viga cuja deflexão é representada por uma série em termos da função de auto-valores (modo normal). Lee et al. (1987) e, ainda, Lee e Wang (1988) obtiveram, rigorosamente, as equações dinâmicas e projetaram o sistema de controle para um braço único que tinha dois graus de liberdade na rotação e um, na translação. Estes autores estudaram o movimento da extremidade final do braço em movimento no espaço tridimensional e não somente no plano horizontal. Usoro; Nadira e Mahil (1986) empregaram a aproximação do Lagrangeano e o Método dos Elementos Finitos para a modelagem matemática de um manipulador com dois elos flexíveis. Neste estudo, foram levantadas as equações dinâmicas para um braço flexível de robô, com dois elos que se moviam no plano vertical $x-z$. Uma carga na extremidade do braço foi simulada afixando-se uma massa adicional em alguma localização específica do braço. Como em outras pesquisas do gênero, o método dos Elementos Finitos, baseado na Teoria Elementar das Vigas, também foi empregado na determinação do modelo matemático de tais sistemas. Nesse documento, para efeito de projeto do sistema de controle, considerou-se que a posição da extremidade final do braço pudesse ser medida e que somente a informação desta medida era um sinal de realimentação suficiente para o sistema de controle. Além disso, discutiu-se, também, o procedimento geral para formular a lei de controle.

Dando seqüência a este trabalho, procurou-se verificar o comportamento do sistema no tocante a estabilidade dinâmica. A este respeito, chegou-se a conclusão que um caminho possível seria a aplicação do primeiro método de Liapunov para o estudo da estabilidade de sistemas não lineares. Para a aplicação deste critério de estabilidade tornou-se necessário linearizar o sistema em torno de um valor nominal, determinar a matriz de Jacobi das equações que governam o movimento do braço e fazer uma análise

dos autovalores dessa matriz. Também com relação a este aspecto existem alguns estudos feitos. A estabilidade de mecanismos flexíveis compostos de um único elo não rígido foi estudada por Badlani e Kleinhenz (1979) e por Jandrasits e Lowen (1979). A estabilidade de mecanismos com mais de um elo flexível foi investigada por Kalaycioglu e Bagci (1979) e por Cleghorn; Tabarrok e Fenton, (1984), empregando-se a Teoria dos elementos finitos, a análise dos autovalores e a expansão em série de Fourier.

Na fase final deste trabalho, serão estabelecidas equações que permitirão fazer um estudo analítico do braço robótico composto por dois elos não rígidos e através da análise destas equações será possível entender o comportamento dinâmico e tirar conclusões a respeito deste tipo de mecanismo.

1.2 OBJETIVOS

- a) Desenvolver um modelo matemático para um braço de robô composto por dois elos não rígidos, ligados por juntas revolutas, portando uma carga na extremidade livre de um dos elos e sujeito à ação da gravidade.
- b) Experimentar um método alternativo para determinação da matriz de Jacobi das equações do modelo matemático deste sistema, evitando o método tradicional de determinação por meio de derivada já que este processo seria inviável dada a complexidade dessas equações.
- c) Entender o primeiro método de Liapunov para pesquisa da estabilidade de sistemas não lineares, verificando a sua aplicabilidade em sistemas do tipo do apresentado neste trabalho.
- d) Concluir sobre a estabilidade do braço robótico ora estudado, estabelecendo os parâmetros que influenciam no comportamento do sistema, e determinando as velocidades críticas que devem ser evitadas durante o seu funcionamento.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO BRAÇO ROBÓTICO

2.1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de um sistema dinâmico é um conjunto de equações que representam a dinâmica do sistema. Na dedução destas equações deve-se ter em mente que elas devem descrever com precisão o funcionamento do sistema. Caso não seja possível estabelecer equações extremamente precisas, pelo menos, elas têm que ser aceitáveis dentro dos parâmetros estabelecidos para o funcionamento do mecanismo. Na verdade, um sistema dinâmico pode ser representado de várias maneiras, ou seja, o modelo matemático de um sistema mecânico não é único.

O sistema que está sendo estudado possui dois graus de liberdade, envolve deformações, longitudinais e transversais, está sujeito a ação da gravidade e é composto de dois elos, desta forma, no equacionamento do problema irão aparecer várias expressões de forças, relacionadas com um sistema de coordenada inercial e dois locais, e duas expressões de torque. Além disso, o sistema não é linear e suas equações envolvem variáveis das juntas e variáveis de posição que, diga-se de passagem, são influenciadas pela deformação elástica dos elementos do sistema.

2.2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

A Figura 1 apresenta a configuração não deformada de um braço de robô composto de dois elos. O elemento assinalado com l^1 será denominado elo superior e todas as grandezas relativas a ele serão identificadas com o expoente 1. O elemento identificado por l^2 é o elo inferior e todas as grandezas que apresentarem o expoente 2 são relativas a este elo. Para o estabelecimento do modelo matemático, deste trabalho, considera-se que o braço se movimenta em um plano referencial inercial x - z . O elo superior faz um ângulo ϕ com o eixo z , que é representado na vertical e orientado para cima e o elo inferior faz um ângulo β com a mesma direção vertical.

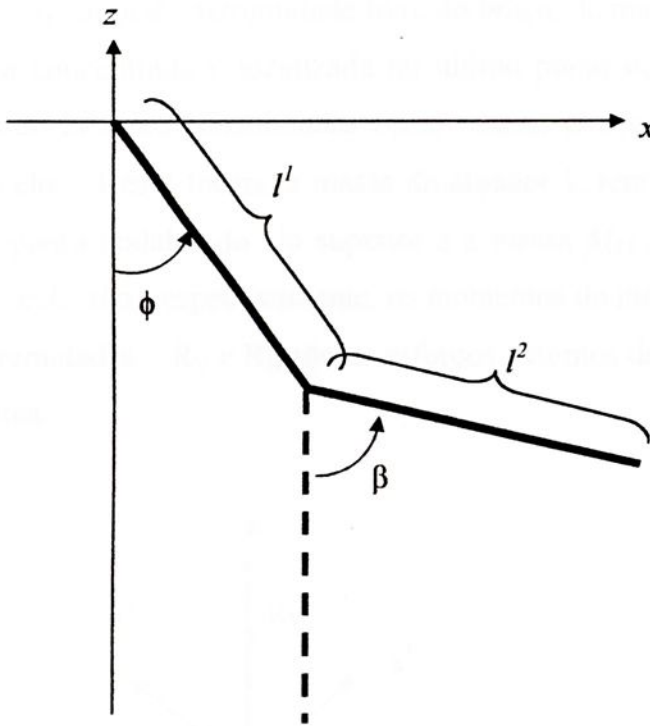


Figura 1 – Configuração não deformada do braço robótico

A configuração deformada dos dois elos é apresentada na Figura 2. Nesta figura aparecem os três sistemas coordenados que serão considerados. O sistema coordenado (x, z) é inercial e será denominado de sistema de referência ou global e os sistemas (x^1, z^1) e (x^2, z^2) que estão afixados no elo superior e no inferior, respectivamente, são móveis e serão chamados de sistemas de coordenadas locais. Quando o elo superior gira, no sentido anti-horário, ele forma um ângulo ϕ com a direção vertical, isto é, com o eixo dos z . Por outro lado, um ângulo β é formado entre a vertical e o elo inferior, quando este gira no mesmo sentido do outro elo. Os comprimentos originais dos elos, superior e inferior, antes de sofrerem qualquer deformação, são, respectivamente, l^1 e l^2 . Para o cálculo das forças e momentos que atuam nos componentes do braço, a massa própria do elo superior será dividida em “n” elementos infinitesimais de massa e a do elo inferior, em “m” elementos. Cada um destes pontos de concentração de massa será denominado ponto nodal. Portanto, no sistema como um todo, existirá um total de $(n + m + 1)$

pontos nodais. A carga da extremidade livre do braço, de massa M_p , será considerada como uma força concentrada e localizada no último ponto nodal do elo inferior. As massas dos atuadores serão consideradas como massas concentradas nos pontos nodais iniciais de cada elo. Desta forma, a massa do atuador 1, representada por M_{A1} , estará concentrada no ponto nodal 1 do elo superior e a massa M_{A2} , no ponto nodal 1 do elo inferior. J_1 , J_2 e J_p são, respectivamente, os momentos de inércia dos atuadores 1 e 2 e da carga na extremidades. R_v e R_H são os esforços externos de reação relacionados com o apoio do sistema.

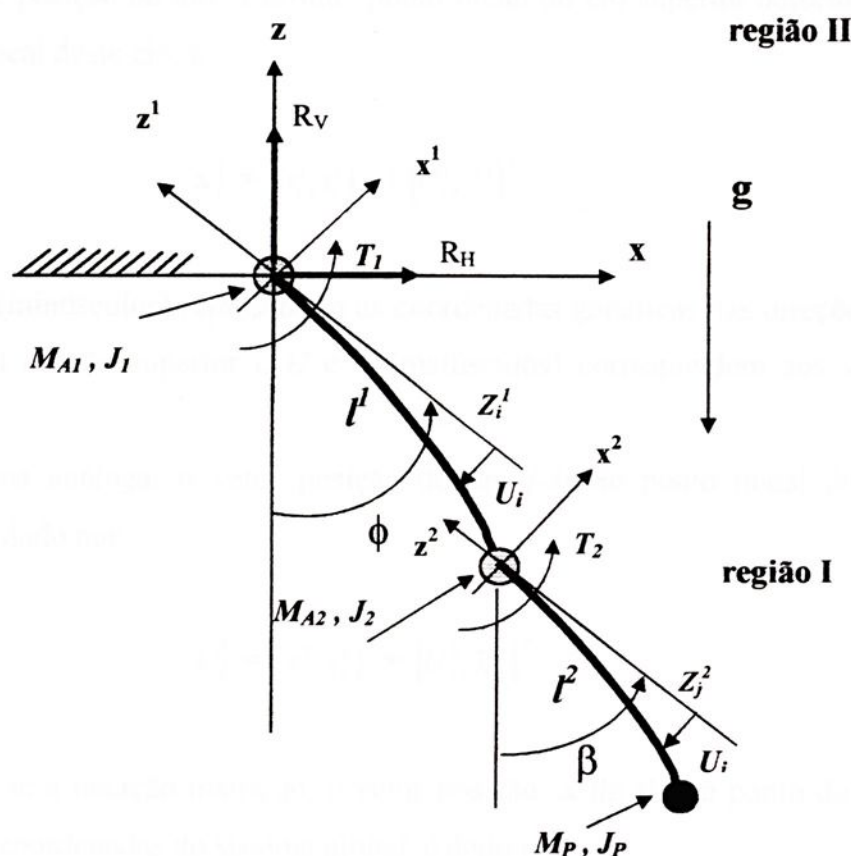


Figura 2 – Configuração deformada do braço robótico

É conveniente esclarecer que, no desenvolvimento matemático, um asterisco colocado como índice indicará que se trata do último ponto nodal de cada elo, de modo

que $f_{\star}^1$ representa a força que atua no último ponto nodal do braço superior e $f_{\star}^2$, a força que age no último ponto nodal do braço inferior. Ainda a título de esclarecimento, uma letra em negrito representa um vetor coluna, assim, $\mathbf{x}$ representa o vetor $\{x_1, x_2\}^T$.

2.3 DETERMINAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO DO BRAÇO ROBÓTICO

2.3.1 Cinemática do movimento

O vetor posição de um “i-ésimo” ponto nodal do elo superior deformado, expresso no sistema local deste elo, é:

$$\mathbf{x}_i^1 = (x_i^1, z_i^1) = \{U_i^1, Z_i^1\}^T \quad (1)$$

onde, x e z (minúsculos) representam as coordenadas genéricas nas direções x^1 e z^1 do sistema local do elo superior e U e Z (maiúsculos) correspondem aos valores destas coordenadas.

De forma análoga, o vetor posição de um j -ésimo ponto nodal do elo inferior deformado é dado por:

$$\mathbf{x}_j^2 = (x_j^2, z_j^2) = \{U_j^2, Z_j^2\}^T \quad (2)$$

Usando-se a notação matricial, o vetor posição $\mathbf{x}$ de algum ponto do elo superior, expresso em coordenadas do sistema global, é dado por:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^1 \\ z^1 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Sendo que a matriz, que aparece na expressão (3), corresponde a matriz de transformação ortogonal ou matriz de rotação do elo superior. Esta matriz foi determinada em função das condições do problema, adotando-se a convenção de que o elo, na sua posição inicial, encontra-se na vertical, voltado para baixo, e o deslocamento angular é considerado positivo no sentido anti-horário. A dedução da expressão desta matriz é mostrada no Apêndice A.

Representando a matriz de rotação do elo superior por Q^1 , a expressão (3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = Q^1 \begin{Bmatrix} x^1 \\ z^1 \end{Bmatrix} = Q^1 \mathbf{x}^1 \quad (4)$$

A matriz de rotação Q^1 é uma matriz quadrada que atende a propriedade:

$$(Q^1)^{-1} = (Q^1)^T \quad (5)$$

Conhecendo-se a matriz de rotação, pode-se determinar a sua primeira e segunda derivada. Estes cálculos e algumas outras operações com as matrizes de rotação e suas derivadas são mostrados no Apêndice B.

O vetor velocidade $\mathbf{v}$ de algum ponto do elo superior, expresso em coordenadas do sistema global (x, y) , é dado por:

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \dot{Q}^1 \begin{Bmatrix} x^1 \\ z^1 \end{Bmatrix} + Q^1 \begin{Bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{z}^1 \end{Bmatrix} \quad \text{portanto}$$

$$\mathbf{v} = \dot{Q}^1 \mathbf{x}^1 + Q^1 \mathbf{v}^1 \quad (6)$$

Similarmente, o vetor aceleração de um ponto qualquer do elo superior, expresso no sistema global (x, z) , é dado por:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} = \ddot{Q}^1 \begin{Bmatrix} x^1 \\ z^1 \end{Bmatrix} + \dot{Q}^1 \begin{Bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{z}^1 \end{Bmatrix} + \dot{Q}^1 \begin{Bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{z}^1 \end{Bmatrix} + Q^1 \begin{Bmatrix} \ddot{x}^1 \\ \ddot{z}^1 \end{Bmatrix} \quad \text{logo}$$

$$\mathbf{a} = \ddot{Q}^1 \mathbf{x}^1 + 2\dot{Q}^1 \mathbf{v}^1 + Q^1 \mathbf{a}^1 \quad (7)$$

O vetor posição $\mathbf{x}$ de um ponto qualquer do elo inferior, expresso em coordenadas do sistema global (x, y) , é dado por:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ Z^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^2 \\ z^2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

A matriz da segunda parcela do lado direito da equação (8) é a matriz de rotação do elo inferior e será representada por Q^2 . Como a matriz de rotação do elo superior, esta também atenderá à propriedade:

$$(Q^2)^{-1} = (Q^2)^T \quad (9)$$

Desta forma, a equação (8) pode ser representada, de forma mais reduzida, como:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = Q^1 \begin{Bmatrix} U^1 \\ Z^1 \end{Bmatrix} + Q^2 \begin{Bmatrix} x^2 \\ z^2 \end{Bmatrix} = Q^1 \mathbf{x}^1 + Q^2 \mathbf{x}^2 \quad (10)$$

Os vetores velocidade $\mathbf{v}$ e aceleração $\mathbf{a}$ para algum ponto do elo inferior, no sistema global, são calculados pelas expressões:

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \dot{Q}^1 \cdot \mathbf{x}_*^1 + Q^1 \cdot \mathbf{v}_*^1 + \dot{Q}^2 \cdot \mathbf{x}^2 + Q^2 \cdot \mathbf{v}^2 \quad (11)$$

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} = \ddot{Q}^1 \mathbf{x}_*^1 + \dot{Q}^1 \mathbf{v}_*^1 + \dot{Q}^1 \mathbf{v}_*^1 + Q^1 \mathbf{a}_*^1 + \ddot{Q}^2 \mathbf{x}^2 + \dot{Q}^2 \mathbf{v}^2 + \dot{Q}^2 \mathbf{v}^2 + Q^2 \mathbf{a}^2$$

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} = \ddot{Q}^1 \mathbf{x}_*^1 + 2\dot{Q}^1 \mathbf{v}_*^1 + Q^1 \mathbf{a}_*^1 + \ddot{Q}^2 \mathbf{x}^2 + 2\dot{Q}^2 \mathbf{v}^2 + Q^2 \mathbf{a}^2 \quad (12)$$

Para as equações acima, considera-se que:

$$\mathbf{x}_*^1 = \begin{Bmatrix} x_*^1 \\ z_*^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_*^1 \\ Z_*^1 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{x}^2 = \begin{Bmatrix} x^2 \\ z^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U^2 \\ Z^2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{v}_*^1 = \begin{Bmatrix} \dot{x}_*^1 \\ \dot{z}_*^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{U}_*^1 \\ \dot{Z}_*^1 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{v}^2 = \begin{Bmatrix} \dot{x}^2 \\ \dot{z}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{U}^2 \\ \dot{Z}^2 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{a}_*^1 = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_*^1 \\ \ddot{z}_*^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{U}_*^1 \\ \ddot{Z}_*^1 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{a}^2 = \begin{Bmatrix} \ddot{x}^2 \\ \ddot{z}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{U}^2 \\ \ddot{Z}^2 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

2.3.2 Dinâmica do movimento

A força total num ponto genérico do sistema é função da inércia e da força da gravidade que atua neste ponto. Matematicamente, essa força é representada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{f} = -M\mathbf{a} - Mg \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{portanto} \quad \mathbf{f} = -M \left(\mathbf{a} + \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix} \right) \quad (19)$$

A análise da expressão acima mostra que quando o braço sobe com movimento acelerado, a aceleração $\mathbf{a}$ é positiva e a aceleração da gravidade, segundo a orientação dos eixos coordenados, é negativa, indicando que, neste caso, a força da gravidade é resistiva ao movimento. O mesmo acontece quando o braço desce com movimento retardado. Por outro lado, quando o braço sobe com movimento retardado ou desce com movimento acelerado, o peso próprio do sistema atua no sentido de favorecer o movimento do braço.

No sistema de referência (x, z) , a força total que age num ponto nodal qualquer do elo superior, identificado pelo índice i , é calculada da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{Q}^1 \mathbf{f}_i^1$$

Aplicando-se as propriedades da matriz de rotação pode-se determinar a expressão que calcula a força total no ponto i do elo superior, no sistema local (x^1, z^1) .

$$\mathbf{f}_i^1 = (\mathbf{Q}^1)^{-1} \mathbf{f}_i \quad \text{e, conseqüentemente:} \quad \mathbf{f}_i^1 = (\mathbf{Q}^1)^T \mathbf{f}_i \quad (20)$$

Combinando-se a equação (19) com a equação (20) obtém-se:

$$\mathbf{f}_i^1 = -(\mathcal{Q}^1)^T M_i^1 \left(\mathbf{a} + \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix} \right) \quad \therefore \quad \mathbf{f}_i^1 = -(\mathcal{Q}^1)^T M_i^1 \left(\ddot{\mathcal{Q}}^1 \mathbf{x}^1 + 2\dot{\mathcal{Q}}^1 \mathbf{v}^1 + \mathcal{Q}^1 \mathbf{a}^1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix} \right)$$

E, de uma forma mais explicita:

$$\mathbf{f}_i^1 = -M_i^1 \left[(\mathcal{Q}^1)^T \ddot{\mathcal{Q}}^1 \mathbf{x}^1 + 2(\mathcal{Q}^1)^T \dot{\mathcal{Q}}^1 \mathbf{v}^1 + (\mathcal{Q}^1)^T \mathcal{Q}^1 \mathbf{a}^1 + (\mathcal{Q}^1)^T \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix} \right] \quad (21)$$

Na expressão (21), o termo M_i^1 corresponde à massa de cada um dos n elementos do elo superior, de modo que, a massa dos elementos 2, 3, ..., $n-1$ é calculada tomando-se a metade da massa do elemento anterior e somando-a com a metade da massa do elemento considerado. Considerando-se um elo homogêneo e de seção transversal constante, a massa destes elementos serão iguais e, desta forma, as massas M_i^1 , para estes elementos, serão as próprias massas de cada elemento. Para o primeiro ponto nodal, no entanto, a massa M_1^1 será a soma da metade da massa do elemento 1 com a massa do atuador colocada na sua extremidade. A massa do último ponto nodal do elo superior é calculada somando-se a metade da massa deste elemento com a metade da massa do atuador colocado entre os elos.

A posição, a velocidade e a aceleração, em termos das coordenadas locais, são:

$$\mathbf{x}_i^1 = \begin{Bmatrix} x_i^1 \\ z_i^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_i^1 \\ Z_i^1 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{v}_i^1 = \begin{Bmatrix} \dot{x}_i^1 \\ \dot{z}_i^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{U}_i^1 \\ \dot{Z}_i^1 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{a}_i^1 = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i^1 \\ \ddot{z}_i^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{U}_i^1 \\ \ddot{Z}_i^1 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Portanto, substituindo-se os produtos $(\mathcal{Q}^1)^T \ddot{\mathcal{Q}}^1$, $(\mathcal{Q}^1)^T \dot{\mathcal{Q}}^1$ e $(\mathcal{Q}^1)^T \mathcal{Q}^1$ pelos resultados obtidos nas operações com as matrizes de rotação e suas derivadas, constantes do Apêndice B, na equação (21) e considerando os valores das coordenadas previstos em

cada vetor da expressão (22), chega-se à expressão da força, seguindo o desenvolvimento matemático abaixo.

$$\mathbf{f}_i^1 = \begin{Bmatrix} f_i^1(x) \\ f_i^1(z) \end{Bmatrix} = -M_i^1 \left(\begin{bmatrix} -\dot{\phi}\dot{\phi} & -\ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & -\dot{\phi}\dot{\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i^1 \\ Z_i^1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} \\ \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_i^1 \\ \dot{Z}_i^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_i^1 \\ \ddot{Z}_i^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix} \right) \quad \text{portanto,}$$

$$\mathbf{f}_i^1 = \begin{Bmatrix} f_i^1(x) \\ f_i^1(z) \end{Bmatrix} = -M_i^1 \left(\begin{bmatrix} -\dot{\phi}\dot{\phi}U_i^1 - \ddot{\phi}Z_i^1 \\ +\ddot{\phi}U_i^1 - \dot{\phi}\dot{\phi}Z_i^1 \end{bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} -\dot{\phi}\dot{Z}_i^1 \\ +\dot{\phi}\dot{U}_i^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{U}_i^1 \\ \ddot{Z}_i^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g\sin\phi \\ g\cos\phi \end{Bmatrix} \right) \quad (23)$$

De modo que:

$$f_i^1(x) = M_i^1 \left(\dot{\phi}\dot{\phi}U_i^1 + \ddot{\phi}Z_i^1 + 2\dot{\phi}\dot{Z}_i^1 - \ddot{U}_i^1 - g\sin\phi \right) \quad (24)$$

$$f_i^1(z) = M_i^1 \left(-\ddot{\phi}U_i^1 + \dot{\phi}\dot{\phi}Z_i^1 - 2\dot{\phi}\dot{U}_i^1 - \ddot{Z}_i^1 - g\cos\phi \right) \quad (25)$$

A equação (24), juntamente com a equação (25), fornece as componentes da força que age no elo superior na direção x e z , respectivamente, calculadas segundo a orientação do sistema local de coordenadas (x^1, z^1) .

A força total que age num ponto qualquer do elo inferior, identificado pelo índice j , expressa em coordenadas locais (x^1, z^1) , é calculada da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_j^{21} = (\mathcal{Q}^1)^T \mathbf{f}_j, \quad \text{sendo} \quad \mathbf{f}_j = -M_j^2 \left(\mathbf{a} + \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix} \right)$$

O Cálculo desta força se faz necessário para a determinação do torque que age nos elos, no sistema local de coordenadas.

$$\mathbf{f}_j^{21} = -M_j^2 (\mathcal{Q}^1)^T \left(\ddot{\mathcal{Q}}^1 \mathbf{x}_*^1 + 2\dot{\mathcal{Q}}^1 \mathbf{v}_*^1 + \mathcal{Q}^1 \mathbf{a}_*^1 + \ddot{\mathcal{Q}}^2 \mathbf{x}^2 + 2\dot{\mathcal{Q}}^2 \mathbf{v}^2 + \mathcal{Q}^2 \mathbf{a}^2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{f}_j^{21} = -M_j^2 \left((\mathcal{Q}^1)^T \ddot{\mathcal{Q}}^1 \mathbf{x}_*^1 + 2(\mathcal{Q}^1)^T \dot{\mathcal{Q}}^1 \mathbf{v}_*^1 + (\mathcal{Q}^1)^T \mathcal{Q}^1 \mathbf{a}_*^1 + (\mathcal{Q}^1)^T \ddot{\mathcal{Q}}^2 \mathbf{x}^2 + \right.$$

$$\left. 2(\mathcal{Q}^1)^T \dot{\mathcal{Q}}^2 \mathbf{v}^2 + (\mathcal{Q}^1)^T \mathcal{Q}^2 \mathbf{a}^2 + (\mathcal{Q}^1)^T \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix} \right) \quad (26)$$

Na expressão (26), o termo M_j^2 corresponde à massa de cada um dos m elementos do elo inferior, de modo que, a massa dos elementos 2, 3, ..., $m-1$ é calculada tomando-se a metade da massa do elemento anterior e somando-a com a metade da massa do elemento considerado. Considerando-se um elo homogêneo e de seção transversal constante, a massa destes elementos serão iguais e, desta forma, as massas M_i^2 , para estes elementos, serão as próprias massas de cada elemento. Para o primeiro ponto nodal, no entanto, a massa M_1^2 será a soma da metade da massa do elemento 1 com a massa do atuador colocada na sua extremidade. A massa do último ponto nodal deste elo é calculada somando-se a metade da massa do elo em questão com a massa da carga colocada na extremidade final deste elo.

Substituindo na equação (26) os resultados obtidos nas operações com as matrizes de rotação e suas derivadas, constantes do Apêndice B, obtém-se:

$$\mathbf{f}_j^{21} = \begin{Bmatrix} f_j^{21}(x) \\ f_j^{21}(z) \end{Bmatrix} = -M_j^2 \left(\begin{bmatrix} -\dot{\phi} & -\ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & -\dot{\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_*^1 \\ Z_*^1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} \\ \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_*^1 \\ \dot{Z}_*^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_*^1 \\ \ddot{Z}_*^1 \end{Bmatrix} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \text{sen}(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos(\phi - \beta) & -\ddot{\beta} \cos(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta} \text{sen}(\phi - \beta) \\ \ddot{\beta} \cos(\phi - \beta) + \dot{\beta} \dot{\beta} \text{sen}(\phi - \beta) & \ddot{\beta} \text{sen}(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos(\phi - \beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_j^2 \\ Z_j^2 \end{Bmatrix} + \\
& 2 \begin{bmatrix} \dot{\beta} \text{sen}(\phi - \beta) & -\dot{\beta} \cos(\phi - \beta) \\ \dot{\beta} \cos(\phi - \beta) & \dot{\beta} \text{sen}(\phi - \beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_j^2 \\ \dot{Z}_j^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\phi - \beta) & \text{sen}(\phi - \beta) \\ -\text{sen}(\phi - \beta) & \cos(\phi - \beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_j^2 \\ \ddot{Z}_j^2 \end{Bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo os produtos das matrizes pelos vetores, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_j^{21} = \begin{Bmatrix} f_j^{21}(x) \\ f_j^{21}(z) \end{Bmatrix} = -M_j^2 \left(\begin{Bmatrix} -\dot{\phi} \dot{\phi} U_j^1 - \ddot{\phi} Z_j^1 \\ +\ddot{\phi} U_j^1 - \dot{\phi} \dot{\phi} Z_j^1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} -\dot{\phi} \dot{Z}_j^1 \\ +\dot{\phi} \dot{U}_j^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{U}_j^1 \\ \ddot{Z}_j^1 \end{Bmatrix} + \right. \\
\left. \begin{Bmatrix} [\ddot{\beta} \text{sen}(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos(\phi - \beta)] U_j^2 + [-\ddot{\beta} \cos(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta} \text{sen}(\phi - \beta)] Z_j^2 \\ [\ddot{\beta} \cos(\phi - \beta) + \dot{\beta} \dot{\beta} \text{sen}(\phi - \beta)] U_j^2 + [\ddot{\beta} \text{sen}(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos(\phi - \beta)] Z_j^2 \end{Bmatrix} + \right. \\
\left. 2 \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \dot{U}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{Z}_j^2 \cos(\phi - \beta) \\ \dot{\beta} \dot{U}_j^2 \cos(\phi - \beta) + \dot{\beta} \dot{Z}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{U}_j^2 \cos(\phi - \beta) + \ddot{Z}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) \\ -\ddot{U}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) + \ddot{Z}_j^2 \cos(\phi - \beta) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g \text{sen} \phi \\ g \cos \phi \end{Bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Fazendo-se uma melhor organização dos termos, a expressão matricial acima pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
f_j^{21} = \begin{Bmatrix} f_j^{21}(x) \\ f_j^{21}(z) \end{Bmatrix} = -M_j^2 \left(\begin{Bmatrix} -\dot{\phi} \dot{\phi} U_j^1 - \ddot{\phi} Z_j^1 \\ \ddot{\phi} U_j^1 - \dot{\phi} \dot{\phi} Z_j^1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} -\dot{\phi} \dot{Z}_j^1 \\ +\dot{\phi} \dot{U}_j^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{U}_j^1 \\ \ddot{Z}_j^1 \end{Bmatrix} + \right. \\
\left. \begin{Bmatrix} \ddot{\beta} U_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta} U_j^2 \cos(\phi - \beta) - \ddot{\beta} Z_j^2 \cos(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta} Z_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) \\ \ddot{\beta} U_j^2 \cos(\phi - \beta) + \dot{\beta} \dot{\beta} U_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) + \ddot{\beta} Z_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta} Z_j^2 \cos(\phi - \beta) \end{Bmatrix} + \right.
\end{aligned}$$

$$2 \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} \dot{U}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{Z}_j^2 \cos(\phi - \beta) \\ \dot{\beta} \dot{U}_j^2 \cos(\phi - \beta) + \dot{\beta} \dot{Z}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \ddot{U}_j^2 \cos(\phi - \beta) + \ddot{Z}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) \\ -\ddot{U}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) + \ddot{Z}_j^2 \cos(\phi - \beta) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} g \text{sen} \phi \\ g \cos \phi \end{array} \right\}$$

Chegando-se finalmente na expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_j^{21} = \left\{ \begin{array}{l} f_j^{21}(x) \\ f_j^{21}(z) \end{array} \right\} = -M_j^2 \left(\left\{ \begin{array}{l} -\dot{\phi} \dot{\phi} U_*^1 - \ddot{\phi} Z_*^1 \\ \ddot{\phi} U_*^1 - \dot{\phi} \dot{\phi} Z_*^1 \end{array} \right\} + 2 \left\{ \begin{array}{l} -\dot{\phi} \dot{Z}_*^1 \\ \dot{\phi} \dot{U}_*^1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \ddot{U}_*^1 \\ \ddot{Z}_*^1 \end{array} \right\} + \right. \\ \left. \left\{ \begin{array}{l} -(-\ddot{\beta} U_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} Z_j^2) \text{sen}(\phi - \beta) - (\ddot{\beta} Z_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} U_j^2) \cos(\phi - \beta) \\ (\ddot{\beta} Z_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} U_j^2) \text{sen}(\phi - \beta) - (-\ddot{\beta} U_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} Z_j^2) \cos(\phi - \beta) \end{array} \right\} + \right. \\ \left. 2 \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} \dot{U}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{Z}_j^2 \cos(\phi - \beta) \\ \dot{\beta} \dot{U}_j^2 \cos(\phi - \beta) + \dot{\beta} \dot{Z}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \ddot{U}_j^2 \cos(\phi - \beta) + \ddot{Z}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) \\ -\ddot{U}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) + \ddot{Z}_j^2 \cos(\phi - \beta) \end{array} \right\} + \right. \\ \left. \left\{ \begin{array}{l} g \text{sen} \phi \\ g \cos \phi \end{array} \right\} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

Da equação (27) obtém-se as componentes da força que age no elo inferior, nas direções x e z , com relação ao sistema local de coordenadas (x^I, z^I) .

$$\begin{aligned} f_j^{21}(x) = M_j^2 \left[\dot{\phi} \dot{\phi} U_*^1 + \ddot{\phi} Z_*^1 + 2 \dot{\phi} \dot{Z}_*^1 - \ddot{U}_*^1 + (-\ddot{\beta} U_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} Z_j^2) \text{sen}(\phi - \beta) + \right. \\ \left. (\ddot{\beta} Z_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} U_j^2) \cos(\phi - \beta) - 2 \dot{\beta} \dot{U}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) + 2 \dot{\beta} \dot{Z}_j^2 \cos(\phi - \beta) - \ddot{U}_j^2 \cos(\phi - \beta) - \right. \\ \left. - \ddot{Z}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) - g \text{sen} \phi \right] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
f_j^{21}(z) = M_j^2 \big[& -\ddot{\phi} U_j^1 + \dot{\phi} \dot{\phi} Z_j^1 - 2\dot{\phi} \dot{U}_j^1 - \ddot{Z}_j^1 + (-\ddot{\beta} Z_j^2 - \dot{\beta} \dot{\beta} U_j^2) \text{sen}(\phi - \beta) + \\
& (-\ddot{\beta} U_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} Z_j^2) \cos(\phi - \beta) - 2\dot{\beta} \dot{U}_j^2 \cos(\phi - \beta) - 2\dot{\beta} \dot{Z}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) + \ddot{U}_j^2 \text{sen}(\phi - \beta) - \\
& -\ddot{Z}_j^2 \cos(\phi - \beta) - g \cos \phi \big] \quad (29)
\end{aligned}$$

A força total que age em um ponto qualquer do elo inferior, representada pelo índice j , expressa em coordenadas locais (x^2, z^2) é calculada da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_j^{22} = (Q^2)^T \mathbf{f}_j, \text{ sendo } \mathbf{f}_j = -M_j^2 \left(\mathbf{a} + \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix} \right)$$

O Cálculo desta força se faz necessário para a determinação do torque que age nos elos, no sistema local de coordenadas.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_j^{22} = -M_j^2 (Q^2)^T \left(\ddot{Q}^1 \mathbf{x}_j^1 + 2\dot{Q}^1 \mathbf{v}_j^1 + Q^1 \mathbf{a}_j^1 + \ddot{Q}^2 \mathbf{x}_j^2 + 2\dot{Q}^2 \mathbf{v}_j^2 + Q^2 \mathbf{a}_j^2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix} \right) \\
\mathbf{f}_j^{22} = -M_j^2 \left((Q^2)^T \ddot{Q}^1 \mathbf{x}_j^1 + 2(Q^2)^T \dot{Q}^1 \mathbf{v}_j^1 + (Q^2)^T Q^1 \mathbf{a}_j^1 + (Q^2)^T \ddot{Q}^2 \mathbf{x}_j^2 + \right. \\
\left. 2(Q^2)^T \dot{Q}^2 \mathbf{v}_j^2 + (Q^2)^T Q^2 \mathbf{a}_j^2 + (Q^2)^T \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix} \right) \quad (30)
\end{aligned}$$

Substituindo na equação (30) as expressões estabelecidas no Apêndice B, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_j^{22} &= \begin{Bmatrix} f_j^{22}(x) \\ f_j^{22}(z) \end{Bmatrix} \\
&= -M_j^2 \left(\begin{bmatrix} -\ddot{\phi} \sin(\phi - \beta) - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) & -\ddot{\phi} \cos(\phi - \beta) + \dot{\phi} \dot{\phi} \sin(\phi - \beta) \\ \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) - \dot{\phi} \dot{\phi} \sin(\phi - \beta) & -\ddot{\phi} \sin(\phi - \beta) - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_\bullet^1 \\ Z_\bullet^1 \end{Bmatrix} \right) + \\
&\quad 2 \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \sin(\phi - \beta) & -\dot{\phi} \cos(\phi - \beta) \\ \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) & -\dot{\phi} \sin(\phi - \beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_\bullet^1 \\ \dot{Z}_\bullet^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\phi - \beta) & -\sin(\phi - \beta) \\ \sin(\phi - \beta) & \cos(\phi - \beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_\bullet^1 \\ \ddot{Z}_\bullet^1 \end{Bmatrix} + \\
&\quad \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \dot{\beta} & -\ddot{\beta} \\ \ddot{\beta} & -\dot{\beta} \dot{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_j^2 \\ Z_j^2 \end{Bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\beta} \\ \dot{\beta} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_j^2 \\ \dot{Z}_j^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_j^2 \\ \ddot{Z}_j^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo os produtos das matrizes pelos vetores, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_j^{22} &= \begin{Bmatrix} f_j^{22}(x) \\ f_j^{22}(z) \end{Bmatrix} \\
&= -M_j^2 \left\{ \begin{Bmatrix} U_\bullet^1 [-\ddot{\phi} \sin(\phi - \beta) - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos(\phi - \beta)] + Z_\bullet^1 [-\ddot{\phi} \cos(\phi - \beta) + \dot{\phi} \dot{\phi} \sin(\phi - \beta)] \\ U_\bullet^1 [\dot{\phi} \cos(\phi - \beta) - \dot{\phi} \dot{\phi} \sin(\phi - \beta)] + Z_\bullet^1 [-\ddot{\phi} \sin(\phi - \beta) - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos(\phi - \beta)] \end{Bmatrix} \right\} + \\
&\quad 2 \left\{ \begin{Bmatrix} -\dot{U}_\bullet^1 \dot{\phi} \sin(\phi - \beta) - \dot{Z}_\bullet^1 \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) \\ \dot{U}_\bullet^1 \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) - \dot{Z}_\bullet^1 \dot{\phi} \sin(\phi - \beta) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{U}_\bullet^1 \cos(\phi - \beta) - \ddot{Z}_\bullet^1 \sin(\phi - \beta) \\ \ddot{U}_\bullet^1 \sin(\phi - \beta) + \ddot{Z}_\bullet^1 \cos(\phi - \beta) \end{Bmatrix} \right\} + \\
&\quad + \left\{ \begin{Bmatrix} -U_j^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - Z_j^2 \ddot{\beta} \\ U_j^2 \ddot{\beta} - Z_j^2 \dot{\beta} \dot{\beta} \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} -\dot{Z}_j^2 \dot{\beta} \\ +\dot{U}_j^2 \dot{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{U}_j^2 \\ \ddot{Z}_j^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g \sin \beta \\ g \cos \beta \end{Bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Fazendo-se uma melhor organização dos termos, a expressão matricial acima pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_j^{22} &= \begin{Bmatrix} f_j^{22}(x) \\ f_j^{22}(z) \end{Bmatrix} \\
&= -M_j^2 \left\{ \begin{Bmatrix} -U_j^1 \ddot{\phi} \sin(\phi - \beta) - U_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) - Z_j^1 \ddot{\phi} \cos(\phi - \beta) + Z_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} \sin(\phi - \beta) \\ U_j^1 \ddot{\phi} \cos(\phi - \beta) - U_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} \sin(\phi - \beta) - Z_j^1 \ddot{\phi} \sin(\phi - \beta) - Z_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) \end{Bmatrix} + \right. \\
&\quad \left\{ \begin{Bmatrix} -2\dot{U}_j^1 \dot{\phi} \sin(\phi - \beta) - 2\dot{Z}_j^1 \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) \\ 2\dot{U}_j^1 \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) - 2\dot{Z}_j^1 \dot{\phi} \sin(\phi - \beta) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{U}_j^1 \cos(\phi - \beta) - \ddot{Z}_j^1 \sin(\phi - \beta) \\ \ddot{U}_j^1 \sin(\phi - \beta) + \ddot{Z}_j^1 \cos(\phi - \beta) \end{Bmatrix} + \right. \\
&\quad \left. \begin{Bmatrix} -U_j^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - Z_j^2 \ddot{\beta} \\ U_j^2 \ddot{\beta} - Z_j^2 \dot{\beta} \dot{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2\dot{Z}_j^2 \dot{\beta} \\ 2\dot{U}_j^2 \dot{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{U}_j^2 \\ \ddot{Z}_j^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g \sin \beta \\ g \cos \beta \end{Bmatrix} \right\} \quad (31)
\end{aligned}$$

Com base na equação (31), as componentes da força que agem no elo inferior, nas direções x e z , expressas no sistema local de coordenadas (x^2, z^2) , são:

$$\begin{aligned}
f_j^{22}(x) &= M_j^2 [U_j^1 \ddot{\phi} \sin(\phi - \beta) + U_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) + Z_j^1 \ddot{\phi} \cos(\phi - \beta) - Z_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} \sin(\phi - \beta) + \\
&\quad 2\dot{U}_j^1 \dot{\phi} \sin(\phi - \beta) + 2\dot{Z}_j^1 \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) - \ddot{U}_j^1 \cos(\phi - \beta) + \ddot{Z}_j^1 \sin(\phi - \beta) + U_j^2 \dot{\beta} \dot{\beta} + \\
&\quad Z_j^2 \ddot{\beta} + 2\dot{Z}_j^2 \dot{\beta} - \ddot{U}_j^2 - g \sin \beta] \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_j^{22}(z) &= M_j^2 [-U_j^1 \ddot{\phi} \cos(\phi - \beta) + U_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} \sin(\phi - \beta) + Z_j^1 \ddot{\phi} \sin(\phi - \beta) + Z_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) - \\
&\quad 2\dot{U}_j^1 \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) + 2\dot{Z}_j^1 \dot{\phi} \sin(\phi - \beta) - \ddot{U}_j^1 \sin(\phi - \beta) - \ddot{Z}_j^1 \cos(\phi - \beta) - U_j^2 \dot{\beta} \dot{\beta} + \\
&\quad Z_j^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - 2\dot{U}_j^2 \dot{\beta} - \ddot{Z}_j^2 - g \cos \beta] \quad (33)
\end{aligned}$$

Para facilitar as operações matemáticas, a força total que age no elo inferior será calculada em um sistema de coordenadas (x_p, z_p) paralelo ao sistema local (x^1, z^1) e com origem na junta que liga os dois elos, conforme mostra a Figura 3. As posições das massas “ M_{A1} ” (do primeiro atuador), “ M_{A2} ”, (do segundo atuador) e “ M_p ”, (da carga aplicada na extremidade livre do braço inferior), também são mostradas nessa figura.

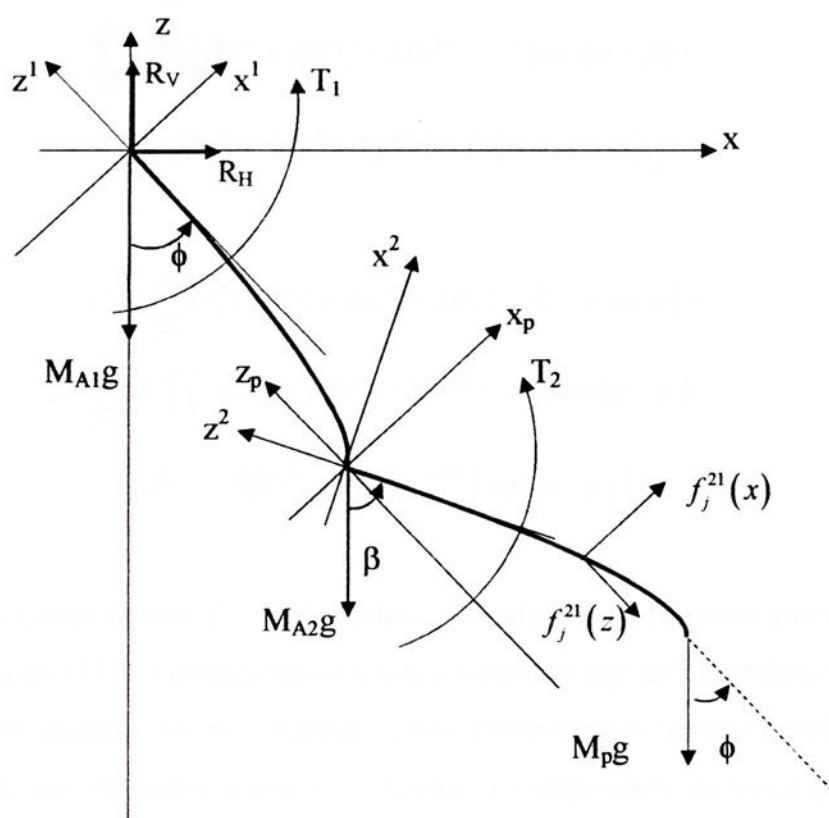


Figura 3 – Sistema de coordenadas (x_p, z_p) para determinação da força total no elo inferior.

A força resultante no elo inferior terá as componentes “ F_x ” e “ F_z ”, de tal modo que:

$$\mathbf{F}_2 = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \mathbf{f}_j^{21} \quad (34)$$

Desta forma, as componentes “ F_x ” e “ F_z ” serão dadas por:

$$F_x = \sum_{j=1}^m \mathbf{f}_j^{21}(x) \quad \text{e} \quad F_z = \sum_{j=1}^m \mathbf{f}_j^{21}(z) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} F_x = & \sum_{j=1}^m M_j^2 (\dot{\phi} \dot{\phi} U_j^1 + \ddot{\phi} Z_j^1 + 2\dot{\phi} \dot{Z}_j^1 - \ddot{U}_j^1 - g \sin \phi) + \\ & \sum_{j=1}^m M_j^2 [(\ddot{\beta} Z_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} U_j^2 + 2\dot{\beta} \dot{Z}_j^2 - \ddot{U}_j^2) \cos(\phi - \beta) + \\ & (-\ddot{\beta} U_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} Z_j^2 - 2\dot{\beta} \dot{U}_j^2 - \ddot{Z}_j^2) \sin(\phi - \beta)] \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} F_z = & \sum_{j=1}^m M_j^2 (-\ddot{\phi} U_j^1 + \dot{\phi} \dot{\phi} Z_j^1 - 2\dot{\phi} \dot{U}_j^1 - \ddot{Z}_j^1 - g \cos \phi) + \\ & \sum_{j=1}^m M_j^2 [(-\ddot{\beta} U_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} Z_j^2 - 2\dot{\beta} \dot{U}_j^2 - \ddot{Z}_j^2) \cos(\phi - \beta) + \\ & (-\ddot{\beta} Z_j^2 - \dot{\beta} \dot{\beta} U_j^2 - 2\dot{\beta} \dot{Z}_j^2 + \ddot{U}_j^2) \sin(\phi - \beta)] \end{aligned} \quad (37)$$

As componentes F_x e F_z podem ser calculadas, respectivamente, pela equação (36) e equação (37) e correspondem à força total que age no elo inferior. Para o cálculo do momento atuante no elo superior, estas componentes serão consideradas, devido a interação de um elo sobre o outro. Assim, a componente da força que age no último ponto nodal do elo superior, na direção x , será calculada fazendo-se a soma da componente x da força específica deste elo aplicada no ponto nodal considerado e da componente total F_x . O mesmo raciocínio pode ser aplicado no cálculo da componente z da força que também age neste ponto nodal. Ainda referindo-se ao cálculo do momento que gira o elo superior, vale lembrar que deve ser considerada a reação do momento que impulsiona o elo inferior. A Figura 4 mostra as forças e os momentos que atuam no elo superior e permite visualizar a composição de forças acima descrita com maior facilidade.

Nesta figura deixaram de ser representadas as forças externas tendo em vista que elas foram incorporadas na força que atua em cada ponto nodal.

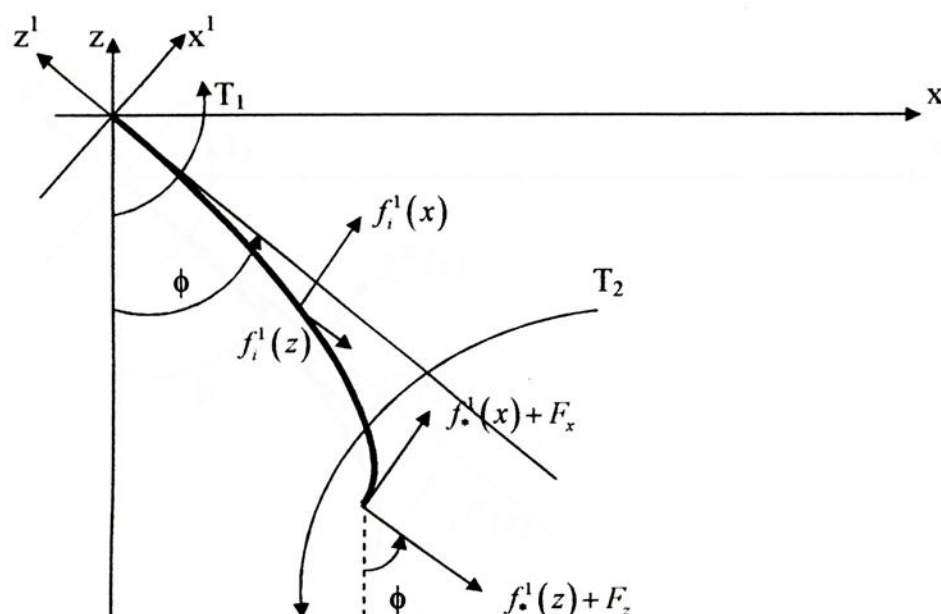


Figura 4 – Forças e momentos que agem no elo superior

O torque T_2 que age no elo inferior pode ser calculado com base no sistema local de coordenadas como apresenta a Figura 5. Com base na Figura 5 e considerando a condição de que o somatório dos momentos é igual a zero, pode-se escrever que:

$$\sum T = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 + \sum_{j=1}^m [f_j^{22}(x)Z_j^2 + f_j^{22}(z)U_j^2] = 0 \quad (38)$$

$$T_2 = -\sum_{j=1}^m M_j^2 \left[(U_j^1 \ddot{\phi} - Z_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} + 2\dot{U}_j^1 \dot{\phi} + \ddot{Z}_j^1) \text{sen}(\phi - \beta) + \right.$$

$$\left. (U_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} + Z_j^1 \ddot{\phi} + 2\dot{Z}_j^1 \dot{\phi} - \ddot{U}_j^1) \cos(\phi - \beta) - g \text{sen} \beta \right] Z_j^2 - \sum_{j=1}^m M_j^2 (U_j^2 \dot{\beta} \dot{\beta} + Z_j^2 \ddot{\beta} + 2\dot{Z}_j^2 \dot{\beta} - \ddot{U}_j^2) Z_j^2 -$$

$$\sum_{j=1}^m M_j^2 \left[(-U_j^1 \ddot{\phi} + Z_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} - 2\dot{U}_j^1 \dot{\phi} - \ddot{Z}_j^1) \cos(\phi - \beta) + (U_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} + Z_j^1 \ddot{\phi} + 2\dot{Z}_j^1 \dot{\phi} - \ddot{U}_j^1) \text{sen}(\phi - \beta) - \right.$$

$$g \cos \beta] U_j^2 - \sum_{j=1}^m M_j^2 (-U_j^2 \ddot{\beta} + Z_j^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - 2\dot{U}_j^2 \dot{\beta} - \ddot{Z}_j^2) U_j^2 \quad (39)$$

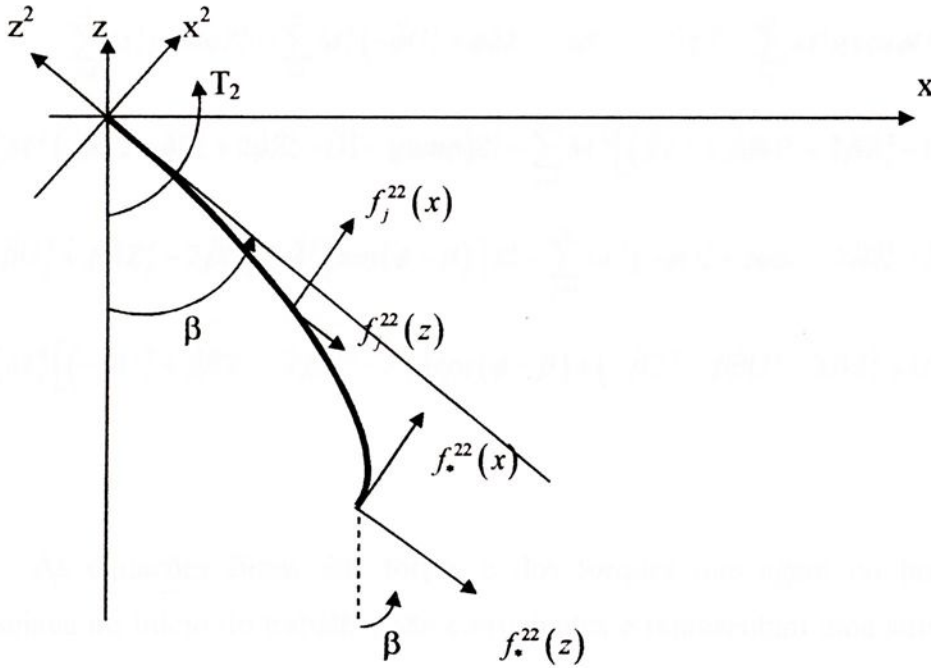


Figura 5 – Forças e momentos que agem no elo inferior

Analogamente, a expressão do torque T_l que terá a seguinte forma:

$$\sum T = 0 \Rightarrow T_1 - T_2 + \sum_{i=1}^n [f_i^1(x) Z_i^1 + f_i^1(z) U_i^1] + F_x Z_*^1 + F_z U_*^1 = 0 \quad (40)$$

$$T_1 = - \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[(U_*^1 \ddot{\phi} - Z_*^1 \dot{\phi} \dot{\phi} + 2\dot{U}_*^1 \dot{\phi} + \ddot{Z}_*^1) \sin(\phi - \beta) + \right. \\ \left. (U_*^1 \dot{\phi} \dot{\phi} + Z_*^1 \ddot{\phi} + 2\dot{Z}_*^1 \dot{\phi} - \ddot{U}_*^1) \cos(\phi - \beta) - g \sin \beta \right] Z_j^2 - \sum_{j=1}^m M_j^2 (U_j^2 \dot{\beta} \dot{\beta} + Z_j^2 \ddot{\beta} + 2\dot{Z}_j^2 \dot{\beta} - \ddot{U}_j^2) Z_j^2 -$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[(-U_j^1 \ddot{\phi} + Z_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} - 2\dot{U}_j^1 \dot{\phi} - \ddot{Z}_j^1) \cos(\phi - \beta) + (U_j^1 \dot{\phi} \dot{\phi} + Z_j^1 \ddot{\phi} + 2\dot{Z}_j^1 \dot{\phi} - \ddot{U}_j^1) \sin(\phi - \beta) - \right. \\
& g \cos \beta \left. \right] U_j^2 - \sum_{j=1}^m M_j^2 (-U_j^2 \ddot{\beta} + Z_j^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - 2\dot{U}_j^2 \dot{\beta} - \ddot{Z}_j^2) U_j^2 - \sum_{i=1}^n M_i^1 (\dot{\phi} \dot{\phi} U_i^1 + \ddot{\phi} Z_i^1 + 2\dot{\phi} \dot{Z}_i^1 - \ddot{U}_i^1) Z_i^1 + \\
& \sum_{i=1}^n M_i^1 g \sin \phi Z_i^1 - \sum_{i=1}^n M_i^1 (-\ddot{\phi} U_i^1 + \dot{\phi} \dot{\phi} Z_i^1 - 2\dot{\phi} \dot{U}_i^1 - \ddot{Z}_i^1) U_i^1 + \sum_{i=1}^n M_i^1 g \cos \phi U_i^1 - \\
& \sum_{j=1}^m M_j^2 (\dot{\phi} \dot{\phi} U_j^1 + \ddot{\phi} Z_j^1 + 2\dot{\phi} \dot{Z}_j^1 - \ddot{U}_j^1 - g \sin \phi) Z_j^1 - \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[(\ddot{\beta} Z_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} U_j^2 + 2\dot{\beta} \dot{Z}_j^2 - \ddot{U}_j^2) \cos(\phi - \beta) + \right. \\
& \left. (-\ddot{\beta} U_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} Z_j^2 - 2\dot{\beta} \dot{U}_j^2 - \ddot{Z}_j^2) \sin(\phi - \beta) \right] Z_j^1 - \sum_{j=1}^m M_j^2 (-\ddot{\phi} U_j^1 + \dot{\phi} \dot{\phi} Z_j^1 - 2\dot{\phi} \dot{U}_j^1 - \ddot{Z}_j^1 - g \cos \phi) U_j^1 - \\
& \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[(-\ddot{\beta} U_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} Z_j^2 - 2\dot{\beta} \dot{U}_j^2 - \ddot{Z}_j^2) \cos(\phi - \beta) + (-\ddot{\beta} Z_j^2 - \dot{\beta} \dot{\beta} U_j^2 - 2\dot{\beta} \dot{Z}_j^2 + \ddot{U}_j^2) \sin(\phi - \beta) \right] U_j^1.
\end{aligned} \tag{41}$$

As equações finais das forças e dos torques que agem no braço, conforme se desejava no início do trabalho, são consistentes e representam uma situação o mais geral possível para o caso analisado. Nelas aparecem os efeitos da gravidade, das deformações sofridas pelos elos, tanto as longitudinais (ao longo da coordenada local z) como as transversais (na direção da coordenada local x), da carga colocada na extremidade livre do braço e dos atuadores instalados nas juntas. Além disso, admite-se que o braço possa se mover com movimento uniforme, acelerado ou retardado. Portanto, este modelo pode ser aplicado em muitos tipos de mecanismos, dentre os quais se incluem as aplicações sugeridas na introdução deste trabalho, até mesmo para aquelas que exigem sistemas de extrema sensibilidade como os equipamentos de laboratório.

As expressões das posições, velocidades e acelerações, determinadas no item relacionado com a cinemática do movimento, em conjunto com as expressões das forças e dos momentos, deduzidas no item relativo a dinâmica do movimento, compõe um conjunto de equações matemáticas que descreve o comportamento do sistema. Portanto, pode-se dizer que já se dispõe de um modelo matemático do braço robótico leve, com dois elos não rígidos, no entanto, existem certas características do sistema, como, por

exemplo, a rigidez dos elos, que não aparecem neste equacionamento e que são importantes para a análise do movimento do braço. No sentido de melhorar este modelo, em seguida serão introduzidas estas características necessárias para análise do seu comportamento e será feita a representação do sistema na forma matricial.

2.4 REPRESENTAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO NA FORMA MATRICIAL

Para a representação das expressões de força e torque, obtidas anteriormente, na forma matricial, seguir-se-á o desenvolvimento de Clough e Penzien (1982), no qual se considera o amortecimento estrutural igual a zero. Eles obtiveram, para uma viga em balanço, submetida à ação de forças somente ou, a ação de forças e torques, as expressões que relacionam estes esforços com a deformação da viga. Segundo este raciocínio, a representação matemática do elo inferior será:

$$K^2 V^2 = f^{22} \quad (42)$$

onde, K é a matriz de rigidez ($2m \times 2m$) para uma viga sujeita unicamente a esforços mostrada na expressão (G9) do Apêndice G, e V^2 e f^{22} são vetores constituídos pelos seguintes elementos:

$$V^2 \equiv \{U_1^2, Z_1^2, U_2^2, Z_2^2, U_3^2, Z_3^2, \dots, U_m^2, Z_m^2\}^T; \text{ e}$$

$$f^{22} \equiv \{f_1^{22}(x), f_1^{22}(z), f_2^{22}(x), f_2^{22}(z), f_3^{22}(x), f_3^{22}(z), \dots, f_m^{22}(x), f_m^{22}(z)\}^T$$

Para o elo superior, devido à ação do torque T_2 na extremidade livre do elo, a expressão será dada por,

$$\begin{bmatrix} K' & \mathbf{K} \\ \mathbf{K}^T & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}^1 \\ s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

onde,

$$\mathbf{V}^1 \equiv \{U_1^1, Z_1^1, U_2^1, Z_2^1, U_3^1, Z_3^1, \dots, U_n^1, Z_n^1\}^T;$$

$$\mathbf{f}^1 \equiv \{f_1^1(x), f_1^1(z), f_2^1(x), f_2^1(z), f_3^1(x), f_3^1(z), \dots, f_n^1(x), f_n^1(z)\}^T;$$

os fatores K' ; $\mathbf{K}$; $\mathbf{K}^T$ e k são segmentos da matriz de rigidez do elo superior. Assim se a matriz de rigidez for uma matriz quadrada de ordem r , K' será uma matriz quadrada de ordem $(r-1)$, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}^T$ serão vetores com $(r-1)$ elementos e k é um valor escalar, e o fator s é a inclinação da extremidade livre do elo superior, determinada pela relação dU/dz .

Desenvolvendo a expressão (43):

$$\begin{Bmatrix} K' \mathbf{V}^1 + \mathbf{K}s \\ \mathbf{K}^T \mathbf{V}^1 + ks \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} K' \mathbf{V}^1 + \mathbf{K}s = \mathbf{f}^1 & \textcircled{1} \\ \mathbf{K}^T \mathbf{V}^1 + ks = T_2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{de } \textcircled{2} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{k} (T_2 - \mathbf{K}^T \mathbf{V}^1) \quad \textcircled{3}$$

substituindo $\textcircled{3}$ em $\textcircled{1}$

$$K' \mathbf{V}^1 + \frac{KT_2}{k} - \frac{\mathbf{K}\mathbf{K}^T \mathbf{V}^1}{k} = \mathbf{f}^1 \quad \text{portanto,} \quad \left(K' - \frac{\mathbf{K}\mathbf{K}^T}{k} \right) \mathbf{V}^1 + \frac{KT_2}{k} = \mathbf{f}^1 \quad \text{e fazendo-se}$$

$$K' - \frac{KT_2}{k} = K^1 \quad \text{tem-se:} \quad K^1 V^1 = f^1 - \frac{KT_2}{k} \quad (44)$$

Na seqüência deste estudo, considerando, principalmente, que a próxima etapa é a análise da estabilidade do sistema e tendo em vista um futuro estabelecimento de uma estratégia de controle, torna-se oportuno, sendo até mesmo recomendável, que se aplique algumas hipóteses simplificadoras, a fim de viabilizar a análise pretendida. Neste sentido, é sabido que a deformação ao longo dos eixos $z^{1,2}$, isto é, a direção longitudinal dos elos, é muito pequena, podendo ser desprezada sem comprometer o resultado da pesquisa.

Desta forma, como a aceleração na direção z é nula, a força que age num ponto nodal qualquer do elo superior terá apenas a componente x e será dada pela expressão:

$$f_i^1(x) = M_i^1 (-\ddot{U}_i^1 + Z_i^1 \ddot{\phi} + U_i^1 \dot{\phi} \dot{\phi} - g \sin \phi) \quad (45)$$

A força que age num ponto nodal genérico do elo inferior também só terá a componente x e poderá ser calculada pela expressão:

$$f_j^{22} = M_j^2 [-\ddot{U}_j^2 + Z_j^2 \ddot{\beta} + U_j^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - g \sin \beta - C\ddot{U}_1^* + 2S\dot{U}_1^* \dot{\phi} + (CZ_1^* + SU_1^*) \ddot{\phi} + (-SZ_1^* + CU_1^*) \dot{\phi} \dot{\phi}] \quad (46)$$

Na equação (46), com o objetivo de torná-la mais concisa, usou-se os símbolos abaixo, que serão também usados nas demais equações que serão apresentadas daqui para frente.

$$C = \cos(\phi - \beta) \quad \text{e} \quad S = \sin(\phi - \beta)$$

A componente " F_x " será dada por:

$$F_x = M_{total} \left(-\ddot{U}^1 + Z^1 \ddot{\phi} + U^1 \dot{\phi} \dot{\phi} - g \sin \phi \right) + \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[-C\ddot{U}_j^2 + (CZ_j^2 - SU_j^2) \ddot{\beta} - 2S\dot{\beta} \dot{U}_j^2 + (SZ_j^2 + CU_j^2) \dot{\beta} \dot{\beta} \right] \quad (47)$$

onde, $M_{total} = \sum_{j=1}^m M_j^2$ é a massa total do elo inferior, incluindo as massas do atuador e da carga da extremidade livre, pois isto foi estabelecido por ocasião da discretização dos elos e a conseqüente concentração das massas nos ponto nodais. Desta forma, a massa do atuador, colocado no início deste elo, deve ser considerada na determinação da massa do seu primeiro ponto nodal e, da mesma maneira, a massa da carga colocada na outra extremidade do elo deve ser considerada no cálculo da massa do seu último ponto nodal.

As expressões simplificadas dos torques são:

$$T_2 = \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[Z_j^2 \ddot{U}_j^2 + (CZ_j^2 + SU_j^2) \ddot{U}^1 - (CZ^1 Z_j^2 + SU^1 Z_j^2 + SZ^1 U_j^2 - CU^1 U_j^2) \ddot{\phi} - (Z_j^2 Z_j^2 - U_j^2 U_j^2) \ddot{\beta} - 2\dot{U}^1 (SZ_j^2 - CU_j^2) \dot{\phi} + 2U_j^2 \dot{U}_j^2 \dot{\beta} + g(Z_j^2 \sin \beta + U_j^2 \cos \beta) + (SZ^1 Z_j^2 - CU^1 Z_j^2 - CZ^1 U_j^2 - SU^1 U_j^2) \dot{\phi} \dot{\phi} \right] \quad (48)$$

$$T_1 = \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[Z_j^2 \ddot{U}_j^2 + (CZ_j^2 + SU_j^2) \ddot{U}^1 - (CZ^1 Z_j^2 + SU^1 Z_j^2 + SZ^1 U_j^2 - CU^1 U_j^2) \ddot{\phi} - (Z_j^2 Z_j^2 - U_j^2 U_j^2) \ddot{\beta} - 2\dot{U}^1 (SZ_j^2 - CU_j^2) \dot{\phi} + 2U_j^2 \dot{U}_j^2 \dot{\beta} + g(Z_j^2 \sin \beta + U_j^2 \cos \beta) + (SZ^1 Z_j^2 - CU^1 Z_j^2 - CZ^1 U_j^2 - SU^1 U_j^2) \dot{\phi} \dot{\phi} + \right]$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n M_i^1 Z_i^1 \ddot{U}_i^1 + M_{total} \ddot{U}^1 Z^1 + (CZ^1 - SU^1) \sum_{j=1}^m M_j^2 \ddot{U}_j^2 + \ddot{\phi} [M_{total} (-Z^1 Z^1 + U^1 U^1) + \\
& \sum_{i=1}^n M_i^1 (-Z_i^1 Z_i^1 + U_i^1 U_i^1)] + \ddot{\beta} \left\{ \sum_{j=1}^m M_j^2 [(-CZ^1 + SU^1) Z_j^2 + (SZ^1 + CU^1) U_j^2] \right\} - \\
& g [M_{total} (-Z^1 \sin \phi - U^1 \cos \phi) + \sum_{i=1}^n M_i^1 (-Z_i^1 \sin \phi - U_i^1 \cos \phi)] + 2\dot{\phi} \left(M_{total} U^1 \dot{U}^1 + \sum_{i=1}^n M_i^1 U_i^1 \dot{U}_i^1 \right) + \\
& 2\dot{\beta} (SZ^1 + CU^1) \sum_{j=1}^m M_j^2 \dot{U}_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} \left\{ \sum_{j=1}^m M_j^2 [(-CZ^1 + SU^1) U_j^2 - (SZ^1 + CU^1) Z_j^2] \right\} - \\
& 2\dot{\phi} \dot{\phi} \left(M_{total} Z^1 U^1 + \sum_{i=1}^n M_i^1 Z_i^1 U_i^1 \right)
\end{aligned} \quad (49)$$

Dada a complexidade das expressões acima e visando equacionar o problema de uma maneira mais racional, torna-se interessante equacionar o sistema na forma matricial e, para isto, é necessário definir uma matriz A^{-1} que será determinada usando-se as expressões das forças e dos momentos simplificados obtidas neste item em combinação com a expressão (42), juntamente com a expressão (44).

Fazendo-se estas substituições, obtém-se um sistema de equações que, após sofrerem uma reorganização de seus termos, pode ser escrita na forma matricial, de acordo com a seguinte expressão:

$$A^{-1} \ddot{\omega} = \Omega \quad (50)$$

onde: $\ddot{\omega} = \{\ddot{U}_1^1, \ddot{U}_2^1, \dots, \ddot{U}_{n-1}^1, \ddot{U}_1^2, \ddot{U}_2^2, \dots, \ddot{U}_m^2, \ddot{U}_n^1, \ddot{\beta}, \ddot{\phi}\}^T$ e

$$\Omega = \{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, q_1, q_2, \dots, q_m, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}^T$$

Para que a matriz A^{-1} tenha as características acima assinaladas terá que ter a forma:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & Z_1 & b \\ Z_2 & a_2 & c_1 \\ -b^T & c_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Os elementos que aparecem na matriz A^{-1} são:

$$a_1 = \text{diag}[M_1^1, M_2^1, M_3^1, \dots, M_{n-1}^1]$$

$$a_2 = \text{diag}[M_1^2, M_2^2, M_3^2, \dots, M_m^2]$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} A_1 & A_4 & -I^1 A_1 \\ A_5 & A_2 & A_6 \\ I^1 A_1 & A_7 & A_3 \end{bmatrix}$$

onde: $A_1 = M_n^1 + M_{total}$

$$A_2 = \sum_{j=1}^m M_j^2 (U_j^2 U_j^2 - Z_j^2 Z_j^2)$$

$$A_3 = \sum_{i=1}^n (U_i^1 U_i^1 - Z_i^1 Z_i^1) + M_{total} (U_n^1 U_n^1 - Z_n^1 Z_n^1)$$

$$A_4 = -C \sum_{j=1}^m M_j^2 Z_j^2 + S \sum_{j=1}^m M_j^2 U_j^2$$

$$A_5 = C \sum_{j=1}^m M_j^2 Z_j^2 + S \sum_{j=1}^m M_j^2 U_j^2$$

$$A_6 = -(Z_n^1 C + U_n^1 S) \sum_{j=1}^m M_j^2 Z_j^2 - (Z_n^1 S - U_n^1 C) \sum_{j=1}^m M_j^2 U_j^2$$

$$A_7 = (-Z_n^1 C + U_n^1 S) \sum_{j=1}^m M_j^2 Z_j^2 + (Z_n^1 S + U_n^1 C) \sum_{j=1}^m M_j^2 U_j^2$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -M_1^1 Z_1^1 \\ 0 & 0 & -M_2^1 Z_2^1 \\ 0 & 0 & -M_3^1 Z_3^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -M_{n-1}^1 Z_{n-1}^1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \begin{bmatrix} CM_1^2 & -M_1^2 Z_1^2 & -M_1^2 (U_1^1 S + Z_1^1 C) \\ CM_2^2 & -M_2^2 Z_2^2 & -M_2^2 (U_2^1 S + Z_2^1 C) \\ CM_3^2 & -M_3^2 Z_3^2 & -M_3^2 (U_3^1 S + Z_3^1 C) \\ \dots & \dots & \dots \\ CM_m^2 & -M_m^2 Z_m^2 & -M_m^2 (U_m^1 S + Z_m^1 C) \end{bmatrix}$$

$$c_2 = \begin{bmatrix} CM_1^2 & CM_2^2 & CM_3^2 & \dots & CM_m^2 \\ M_1^2 Z_1^2 & M_2^2 Z_2^2 & M_3^2 Z_3^2 & \dots & M_m^2 Z_m^2 \\ M_1^2 (-U_1^1 S + Z_1^1 C) & M_1^2 (-U_2^1 S + Z_2^1 C) & M_1^2 (-U_3^1 S + Z_3^1 C) & \dots & M_1^2 (-U_m^1 S + Z_m^1 C) \end{bmatrix}$$

O vetor Ω terá os seguintes elementos:

$$p_i = -\sum_{j=1}^n K_y^1 U_j^1 - M_i^1 g \sin \phi + M_i^1 U_i^1 \dot{\phi} \dot{\phi} - \left(\frac{K_i}{k} \right) T_2$$

$$q_i = -\sum_{j=1}^m K_y^2 U_j^2 - M_i^2 g \sin \beta + 2S \dot{U}_i^1 \dot{\phi} M_i^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} U_i^2 M_i^2 + (-SZ_i^1 + CU_i^1) \dot{\phi} \dot{\phi} M_i^2$$

$$\gamma_1 = -\sum_{j=1}^n K_{\eta_j}^1 U_j^1 + (M_n^1 + M_{total}) U_n^1 \dot{\phi} \dot{\phi} - \left(\frac{K_n}{k} \right) T_2 - (M_n^1 + M_{total}) g \sin \phi -$$

$$2S \dot{\beta} \sum_{j=1}^m M_j^2 \dot{U}_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} \sum_{j=1}^m (SZ_j^2 + CU_j^2) M_j^2$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2 = & T_2 - g \sum_{j=1}^m M_j^2 \left(\sin \beta Z_j^2 + \cos \beta U_j^2 \right) + 2\dot{U}^1 \dot{\phi} \sum_{j=1}^m M_j^2 \left(SZ_j^2 - CU_j^2 \right) - \\
& \dot{\phi} \dot{\phi} \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[\left(SZ_j^1 - CU_j^1 \right) Z_j^2 - \left(CZ_j^1 + SU_j^1 \right) U_j^2 \right] + 2\dot{\beta} \dot{\beta} \sum_{j=1}^m M_j^2 Z_j^2 U_j^2 \\
\gamma_3 = & T_1 - T_2 + g \left[M_{total} \left(-Z^1 \sin \phi - U^1 \cos \phi \right) - \sum_{i=1}^n M_i^1 \left(Z_i^1 \sin \phi - U_i^1 \cos \phi \right) \right] - \\
& 2\dot{\phi} \left(M_{total} U^1 \dot{U}^1 + \sum_{i=1}^n M_i^1 U_i^1 \dot{U}^1 \right) - 2\dot{\beta} \left(SZ^1 + CU^1 \right) \sum_{j=1}^m M_j^2 \dot{U}_j^2 + \\
& \left\{ \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[\left(CZ_j^1 - SU_j^1 \right) U_j^2 + \left(SZ_j^1 + CU_j^1 \right) Z_j^2 \right] \right\} \dot{\beta} \dot{\beta} + \\
& 2 \left(M_{total} Z^1 U^1 + \sum_{i=1}^n M_i^1 Z_i^1 U_i^1 \right) \dot{\phi} \dot{\phi}
\end{aligned}$$

A primeira vista pode parecer que as expressões a que se chegou ainda sejam muito complexas para qualquer tipo de cálculo, no entanto, trabalhando-se com a forma matricial da expressão (50) e usando-se os recurso do cálculo numérico por computador, torna-se perfeitamente possível trabalhar com estas equações. O Apêndice D mostra um programa MatLab que foi desenvolvido para determinação dos elementos do vetor $\ddot{\omega}$. Para o cálculo destas acelerações, toma-se a matriz A^{-1} com seus valores numéricos e determina-se a sua inversa A , em seguida aplicam-se os resultados na expressão (50) invertida que terá a forma: $\ddot{\omega} = A\Omega$. Pretende-se mostrar, com este programa de computador, que o modelo matemático do braço robótico desenvolvido até este ponto do trabalho, embora constituído de expressões algébricas muito extensas, graças ao seu desenvolvimento na forma matricial, pode, perfeitamente, ser usado na determinação de parâmetros desconhecidos do sistema. No desenvolvimento do programa foram colocados vários comentários, de modo a torná-lo auto-explicativo.

A título de exemplo, o programa foi rodado usando-se valores hipotéticos e considerando-se cada elo dividido em três elementos, e resultou em valores de aceleração conforme mostra o Apêndice D.

3 LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO SISTEMA E OBTENÇÃO DA MATRIZ DE JACOBI

3.1 INTRODUÇÃO

Manipuladores robóticos leves, do tipo que está sendo estudado neste trabalho, são sistemas não lineares. Eles apresentam uma oscilação em torno de um ponto de equilíbrio, que corresponde à posição do corpo rígido, provocada pela deformação do elo não rígido do sistema, conforme apresentado por Shabana (1991), no item que estuda a vibração transversal das vigas. Esta oscilação poderá ser de pequena amplitude, dependendo das características do braço robótico. Nestes casos, o sistema pode ser linearizado em torno do ponto de equilíbrio. Esta é uma técnica bastante empregada para análise de sistemas não lineares, pois, através da linearização de equações não lineares é possível aplicar os métodos de análise de sistemas lineares e, desta forma, obter informações sobre o comportamento do sistema.

Uma maneira de linearizar um sistema não linear é fazer a expansão da função não linear em série de Taylor, em torno de um ponto de equilíbrio, e desprezar os termos de ordem superior da série. Assim, considerando um sistema cujo valor instantâneo do sinal de entrada é $x(t)$ e o valor instantâneo do sinal de saída, $y(t)$ pode-se representar, matematicamente, a relação entre o sinal de entrada e o de saída pela expressão:

$$y = f(x)$$

Se as coordenadas do ponto de equilíbrio for $\bar{x}$ e $\bar{y}$, a expansão em série de Taylor, em torno deste ponto será:

$$y = f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots$$

como se partiu da hipótese que o sistema varia muito pouco em torno do ponto de equilíbrio, a diferença $(x - \bar{x})$ é muito pequena e, desta forma, os termos de ordem superior, partindo-se do termo ao quadrado, podem ser desprezados. Assim,

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x})$$

$$\text{sendo que, } \bar{y} = f(\bar{x}) \text{ e } K = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}}$$

$$\text{deste modo: } y - \bar{y} = K(x - \bar{x})$$

Pela expressão acima, verifica-se que $(y - \bar{y})$ é proporcional a $(x - \bar{x})$, configurando o comportamento linear do sistema definido por esta função. No entanto, esta consideração somente é válida na proximidade do ponto de equilíbrio, onde $(x - \bar{x})$ é muito pequeno.

Dazzo e Houpis (1984) mostra como se aplica este processo no caso do sistema não linear ser modelado no espaço de estado com uma equação do tipo: $\dot{x} = f(x)$, que possui pontos de equilíbrio x_0 , tais que $f(x_0) = 0$. As variáveis de estado, neste caso, podem ser escrita da forma $x = x_0 + x^*$, onde x^* representa o afastamento do estado de equilíbrio x_0 . Se tal sistema apresenta um afastamento do estado de equilíbrio x_0 muito pequeno, cada um dos elementos de $f(x)$ pode ser expandido em série de Taylor em torno de cada ponto de equilíbrio.

Como se está considerando que o afastamento em relação aos pontos de equilíbrio x_0 é muito pequeno, os termos de ordem superior da série de Taylor podem ser abandonados, o que resulta na seguinte equação de estado linear variacional:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \mathbf{x}^* \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}^* = J_x \mathbf{x}^*$$

onde, J_x é chamada de Matriz Jacobiana.

3.2 LINEARIZAÇÃO DO BRAÇO COM ELOS DEFORMÁVEIS

Antes de se iniciar a linearização do sistema, torna-se mais interessante modificar a forma da equação (50), desmembrando o vetor Ω em dois vetores $h(\dot{\omega}, \omega)$ e τ , de tal forma que estes três vetores atendam a seguinte relação:

$$\Omega = \tau - h(\dot{\omega}, \omega) \quad (52)$$

onde: $h(\dot{\omega}, \omega)$ é um vetor que envolve as variáveis de deformação e velocidade e τ é um vetor que representa os torques aplicados nos elos.

Representando-se a matriz A^{-1} por $M(\omega)$ e considerando o desmembramento da expressão (52), pode-se escrever que:

$$M(\omega)\ddot{\omega} + h(\dot{\omega}, \omega) = \tau \quad (53)$$

sendo que o vetor $\mathbf{h}(\dot{\omega}, \omega)$ tem a seguinte definição:

$$\mathbf{h}(\dot{\omega}, \omega) = \{ {}_h P_1, {}_h P_2, \dots, {}_h P_{n-1}, {}_h Q_1, {}_h Q_2, \dots, {}_h Q_m, {}_h \gamma_1, {}_h \gamma_2, {}_h \gamma_3 \}^T$$

onde:
$${}_h P_i = \sum_{j=1}^n K_{ij}^1 U_j^1 + M_i^1 g \sin \phi - M_i^1 U_i^1 \dot{\phi} \dot{\phi}$$

$${}_h Q_i = \sum_{j=1}^m K_{ij}^2 U_j^2 + M_i^2 g \sin \beta - 2S \dot{U}_i^1 \dot{\phi} M_i^2 - \dot{\beta} \dot{\beta} U_i^2 M_i^2 + (SZ_i^1 - CU_i^1) \dot{\phi} \dot{\phi} M_i^2$$

$${}_h \gamma_i = \sum_{j=1}^n K_{ij}^1 U_j^1 + (g \sin \phi - U_i^1 \dot{\phi} \dot{\phi}) (M_i^1 + M_{total}) + 2S \dot{\beta} \sum_{j=1}^m M_j^2 \dot{U}_j^2 -$$

$$\dot{\beta} \dot{\beta} \sum_{j=1}^m (SZ_j^2 + CU_j^2) M_j^2$$

$${}_h \gamma_i = g \sum_{j=1}^m M_j^2 (\sin \beta Z_j^2 + \cos \beta U_j^2) - 2 \dot{U}_i^1 \dot{\phi} \sum_{j=1}^m M_j^2 (SZ_j^2 - CU_j^2) +$$

$$2 \dot{\beta} \sum_{j=1}^m M_j^2 U_j^2 \dot{U}_j^2 + \dot{\phi} \dot{\phi} \sum_{j=1}^m M_j^2 [(SZ_j^1 - CU_j^1) Z_j^2 - (CZ_j^1 + SU_j^1) U_j^2]$$

$${}_h \gamma_i = -g \left[M_{total} (-Z_i^1 \sin \phi - U_i^1 \cos \phi) - \sum_{i=1}^n M_i^1 (Z_i^1 \sin \phi + U_i^1 \cos \phi) \right] +$$

$$2 \dot{\phi} \left(M_{total} U_i^1 \dot{U}_i^1 + \sum_{i=1}^n M_i^1 U_i^1 \dot{U}_i^1 \right) + 2 \dot{\beta} (SZ_i^1 + CU_i^1) \sum_{j=1}^m M_j^2 \dot{U}_j^2 +$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^m M_j^2 [(CZ_j^1 - SU_j^1) U_j^2 + (SZ_j^1 + CU_j^1) Z_j^2] \right\} \dot{\beta} \dot{\beta} +$$

$$2 \left(M_{total} Z_i^1 U_i^1 + \sum_{i=1}^n M_i^1 Z_i^1 U_i^1 \right) \dot{\phi} \dot{\phi}$$

e sendo $\boldsymbol{\tau} = \{ {}_\tau P_1, {}_\tau P_2, \dots, {}_\tau P_{n-1}, {}_\tau Q_1, {}_\tau Q_2, \dots, {}_\tau Q_m, {}_\tau \gamma_1, {}_\tau \gamma_2, {}_\tau \gamma_3 \}^T$

$$\text{onde: } {}_{\tau}p_1 = -\left(\frac{K_i}{k}\right)T_2$$

$${}_{\tau}q_1 = 0$$

$${}_{\tau}\gamma_1 = -\left(\frac{K_n}{k}\right)T_2$$

$${}_{\tau}\gamma_2 = T_2$$

$${}_{\tau}\gamma_3 = T_1 - T_2$$

Linearizando a equação (53) em torno do valor nominal $\tilde{\omega}$ e assumindo que:

$$\omega = \tilde{\omega} + \delta\omega$$

$$\dot{\omega} = \tilde{\dot{\omega}} + \delta\dot{\omega}$$

$$\ddot{\omega} = \tilde{\ddot{\omega}} + \delta\ddot{\omega}$$

$$\tau = \tilde{\tau} + \delta\tau$$

$$M(\tilde{\omega} + \delta\omega)(\tilde{\ddot{\omega}} + \delta\ddot{\omega}) + h(\tilde{\dot{\omega}} + \delta\dot{\omega}, \tilde{\omega} + \delta\omega) = \tilde{\tau} + \delta\tau$$

$$M(\tilde{\omega})(\tilde{\ddot{\omega}} + \delta\ddot{\omega}) + M(\delta\omega)(\tilde{\ddot{\omega}} + \delta\ddot{\omega}) + h(\tilde{\dot{\omega}}, \tilde{\omega}) + h(\delta\dot{\omega}, \delta\omega) = \tilde{\tau} + \delta\tau$$

$$M(\tilde{\omega})\tilde{\ddot{\omega}} + M(\tilde{\omega})\delta\ddot{\omega} + M(\delta\omega)\tilde{\ddot{\omega}} + M(\delta\omega)\delta\ddot{\omega} + h(\tilde{\dot{\omega}}, \tilde{\omega}) + h(\delta\dot{\omega}, \delta\omega) = \tilde{\tau} + \delta\tau$$

$$M(\tilde{\omega} + \delta\omega)\tilde{\ddot{\omega}} + M(\tilde{\omega})\delta\ddot{\omega} + M(\delta\omega)\delta\ddot{\omega} + h(\tilde{\dot{\omega}}, \tilde{\omega}) + h(\delta\dot{\omega}, \delta\omega) = \tilde{\tau} + \delta\tau$$

$$M(\omega)\tilde{\ddot{\omega}} + M(\tilde{\omega})\delta\ddot{\omega} + M(\delta\omega)\delta\ddot{\omega} + h(\tilde{\dot{\omega}}, \tilde{\omega}) + h(\delta\dot{\omega}, \delta\omega) = \tilde{\tau} + \delta\tau$$

$$M(\omega)\tilde{\ddot{\omega}} + M(\tilde{\omega})\delta\ddot{\omega} + M(\omega - \tilde{\omega})(\tilde{\ddot{\omega}} - \tilde{\ddot{\omega}}) + h(\tilde{\dot{\omega}}, \tilde{\omega}) + h(\delta\dot{\omega}, \delta\omega) = \tilde{\tau} + \delta\tau$$

$$M(\omega)\tilde{\ddot{\omega}} + M(\tilde{\omega})\delta\ddot{\omega} + M(\omega)\ddot{\omega} - M(\omega)\tilde{\ddot{\omega}} -$$

$$M(\tilde{\omega})\ddot{\omega} + M(\tilde{\omega})\tilde{\ddot{\omega}} + h(\tilde{\dot{\omega}}, \tilde{\omega}) + h(\delta\dot{\omega}, \delta\omega) = \tilde{\tau} + \delta\tau$$

$$M(\tilde{\omega})\delta\ddot{\omega} + M(\omega)\ddot{\omega} - M(\tilde{\omega})\ddot{\omega} + M(\tilde{\omega})\tilde{\ddot{\omega}} + h(\tilde{\dot{\omega}}, \tilde{\omega}) + h(\delta\dot{\omega}, \delta\omega) = \tilde{\tau} + \delta\tau$$

$$M(\tilde{\omega})(\delta\ddot{\omega} - \ddot{\omega}) + M(\omega)(\ddot{\omega}) + M(\tilde{\omega})(\tilde{\ddot{\omega}}) + h(\tilde{\dot{\omega}}, \tilde{\omega}) + h(\delta\dot{\omega}, \delta\omega) = \tilde{\tau} + \delta\tau$$

$$-M(\tilde{\omega})(\ddot{\tilde{\omega}}) + M(\omega)(\ddot{\omega}) + M(\tilde{\omega})(\ddot{\tilde{\omega}}) + h(\ddot{\tilde{\omega}}, \tilde{\omega}) + h(\delta\dot{\omega}, \delta\omega) = \tilde{\tau} + \delta\tau$$

$$M(\omega)\ddot{\omega} + \mathbf{h}(\ddot{\omega}, \tilde{\omega}) + \mathbf{h}(\delta\dot{\omega}, \delta\omega) = \tilde{\tau} + \delta\tau \quad (54)$$

Expandindo a expressão (54) em série de Taylor, em torno de $\tilde{\omega}$, e abandonando-se os termos de ordem superior, tem-se:

$$M(\tilde{\omega})\ddot{\omega} + \frac{\partial M}{\partial \omega}(\omega - \tilde{\omega})\ddot{\omega} + M(\tilde{\omega})(\ddot{\omega} - \ddot{\tilde{\omega}}) + h(\ddot{\tilde{\omega}}, \tilde{\omega}) + \frac{\partial h}{\partial \dot{\omega}}(\dot{\omega} - \dot{\tilde{\omega}}) + \frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega - \tilde{\omega}) = \tilde{\tau} + \delta\tau$$

como $(\omega - \tilde{\omega}) = \delta\omega$; $(\dot{\omega} - \dot{\tilde{\omega}}) = \delta\dot{\omega}$ e $(\ddot{\omega} - \ddot{\tilde{\omega}}) = \delta\ddot{\omega}$

$$M(\tilde{\omega})\ddot{\omega} + \frac{\partial M}{\partial \omega}(\delta\omega)\ddot{\omega} + M(\tilde{\omega})\delta\ddot{\omega} + \mathbf{h}(\ddot{\tilde{\omega}}, \tilde{\omega}) + \frac{\partial h}{\partial \dot{\omega}}\delta\dot{\omega} + \frac{\partial h}{\partial \omega}\delta\omega = \tilde{\tau} + \delta\tau \quad (55)$$

A expressão (55) pode ser escrita como uma soma de duas parcelas, onde a primeira é:

$$M(\tilde{\omega})\ddot{\omega} + \mathbf{h}(\ddot{\tilde{\omega}}, \tilde{\omega}) = \tilde{\tau} \quad (56)$$

e a segunda é obtida subtraindo-se (56) de (55), que resulta em:

$$M(\tilde{\omega})\delta\ddot{\omega} + \frac{\partial M}{\partial \omega}(\delta\omega)\ddot{\omega} + \frac{\partial h}{\partial \dot{\omega}}\delta\dot{\omega} + \frac{\partial h}{\partial \omega}\delta\omega = \delta\tau \quad (57)$$

fazendo-se $\frac{\partial h}{\partial \dot{\omega}} = \mathbf{h}_2(\ddot{\tilde{\omega}}, \tilde{\omega})$ e $\frac{\partial M}{\partial \omega}\ddot{\omega} + \frac{\partial h}{\partial \omega} = \mathbf{h}_1(\ddot{\tilde{\omega}}, \dot{\tilde{\omega}}, \tilde{\omega})$ e substituindo-se em (57),

chega-se em:

$$M(\tilde{\omega})\delta\ddot{\omega} + \mathbf{h}_2(\ddot{\tilde{\omega}}, \tilde{\omega})\delta\dot{\omega} + \mathbf{h}_1(\ddot{\tilde{\omega}}, \dot{\tilde{\omega}}, \tilde{\omega})\delta\omega = \delta\tau \quad (58)$$

ou, de outra forma:

$$\delta \ddot{\omega} = -M^{-1}(\tilde{\omega}) \mathbf{h}_2(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) \delta \dot{\omega} - M^{-1}(\tilde{\omega}) \mathbf{h}_1(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}, \tilde{\omega}) \delta \omega + M^{-1}(\tilde{\omega}) \delta \tau \quad (59)$$

Na forma matricial, a expressão (59) será dada por:

$$\begin{Bmatrix} \delta \dot{\omega} \\ \delta \ddot{\omega} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\tilde{M}^{-1} \tilde{h}_1 & -\tilde{M}^{-1} \tilde{h}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \omega \\ \delta \dot{\omega} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1} \delta \tau \end{Bmatrix} \quad (60)$$

sendo: $\tilde{M}^{-1} = M^{-1}(\tilde{\omega})$; $\tilde{h}_1 = h_1(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}, \tilde{\omega})$ e $\tilde{h}_2 = (\tilde{\omega}, \tilde{\omega})$

Para representar a equação (60) de uma forma mais compacta, representa-se o vetor

$\begin{Bmatrix} \delta \omega \\ \delta \dot{\omega} \end{Bmatrix}$ por $\mathbf{x}$, de modo que o vetor $\begin{Bmatrix} \delta \dot{\omega} \\ \delta \ddot{\omega} \end{Bmatrix}$ será $\dot{\mathbf{x}}$, a matriz $\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\tilde{M}^{-1} \tilde{h}_1 & -\tilde{M}^{-1} \tilde{h}_2 \end{bmatrix}$ por A e o

vetor $\begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1} \delta \tau \end{Bmatrix}$ por B . Com estas substituições a expressão (60) se transforma em:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B \quad (61)$$

3.3 OBTENÇÃO DA MATRIZ DE JACOBI

Tomando-se um vetor de coordenadas generalizadas $\mathbf{y} = \{\delta y, \delta \dot{y}\}^T$, de modo que

$\dot{\mathbf{y}} = \{\delta \dot{y}, \delta \ddot{y}\}^T$ e escrevendo-se a expressão (60) em função deste vetor:

$$\dot{\mathbf{y}} = f(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\tilde{M}^{-1} \tilde{h}_1 & -\tilde{M}^{-1} \tilde{h}_2 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1} \delta \tau \end{Bmatrix} \quad (62)$$

Desenvolvendo-se a expressão (62) em série de Taylor, em torno de um valor nominal $\tilde{y}$, e considerando-se apenas os termos de primeira ordem:

$$\dot{y} = f(t, \tilde{y}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - \tilde{y}) \quad (63)$$

como $\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\tilde{M}^{-1}\tilde{h}_1 & -\tilde{M}^{-1}\tilde{h}_2 \end{bmatrix}$ a expressão (63) terá a seguinte forma final:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\tilde{M}^{-1}\tilde{h}_1 & -\tilde{M}^{-1}\tilde{h}_2 \end{bmatrix} (y - \tilde{y}) + f(t, \tilde{y}) \quad (64)$$

Por outro lado, na vizinhança da solução $\tilde{y}(t)$, pode-se linearizar o sistema, por meio da matriz de Jacobi, usando-se a expressão apresentada por Hongzhao, Xianmim e Weiquing (1994).

$$\dot{y} = J(t, \tilde{y})(y - \tilde{y}) + f(t, \tilde{y}) \quad (65)$$

onde $J(t, \tilde{y})$ é a matriz de Jacobi de $f(t, y)$. Assim, comparando-se a expressão (64) com a expressão (65), verifica-se, com certa facilidade, que a matriz de Jacobi para o sistema estudado é:

$$J(t, \tilde{y}) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\tilde{M}^{-1}\tilde{h}_1 & -\tilde{M}^{-1}\tilde{h}_2 \end{bmatrix} \quad (66)$$

Redução do sistema considerando apenas um nodo para cada elo

Para se fazer uma análise do sistema, como sugere os autores acima citados, é suficiente levar em consideração o primeiro elemento dos pontos nodais de cada elo, deste modo, pode-se considerar nas equações do modelo dinâmico visto anteriormente que, $m=n=1$. Nestas condições a equação (53) mantém a mesma forma geral porém, explicitamente, se reduz, já que a matriz $M(\omega)$ será, agora, uma matriz de quarta ordem e $\ddot{\omega}$, $h(\dot{\omega}, \omega)$ e τ passarão a ser vetores com quatro elementos apenas.

A equação (53) passará a ser representada, na sua forma matricial, por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}^1 \\ \ddot{U}^2 \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e_1 h \\ e_2 h \\ e_3 h \\ e_4 h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{Bmatrix} \quad (67)$$

A matriz $M(\omega)$ representada por:

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (68a)$$

tem por elementos: $a_{11} = M^1 + M^2$

$$a_{12} = a_{21} = CM^2$$

$$a_{13} = M^2(U^2S - Z^2C)$$

$$a_{14} = -a_{41} = -Z^1(M^1 + M^2)$$

$$a_{22} = M^2$$

$$a_{23} = -a_{32} = -Z^2M^2$$

$$\begin{aligned}
a_{24} &= -(U^1 S + Z^1 C) M^2 \\
a_{31} &= (U^2 S + Z^2 C) M^2 \\
a_{33} &= (U^2 U^2 - Z^2 Z^2) M^2 \\
a_{34} &= [(U^1 C - Z^1 S) U^2 - (Z^1 C + U^1 S) Z^2] M^2 \\
a_{42} &= (Z^1 C - U^1 S) M^2 \\
a_{43} &= [(Z^1 S + U^1 C) U^2 - (Z^1 C - U^1 S) Z^2] M^2 \\
a_{44} &= (U^1 U^1 - Z^1 Z^1) (M^1 + M^2)
\end{aligned}$$

O vetor $\ddot{\omega}$ representado por:

$$\ddot{\omega} = \{\ddot{U}^1, \ddot{U}^2, \ddot{\beta}, \ddot{\phi}\}^T \quad (68b)$$

Tem por elementos as acelerações de deformação dos elos superior e inferior e as acelerações angulares dos mesmos elos.

O vetor $\mathbf{h}(\dot{\omega}, \omega)$ representado por:

$$\mathbf{h}(\dot{\omega}, \omega) = \{e_1 h, e_2 h, e_3 h, e_4 h\}^T \quad (68c)$$

tem os seguintes elementos:

$$e_1 h = K_1^1 U^1 + (M^1 + M^2) g \sin \phi - (M^1 + M^2) U^1 \dot{\phi} \dot{\phi} + 2M^2 S \dot{\beta} \dot{U}^2 - M^2 (S Z^2 + C U^2) \dot{\beta} \dot{\beta}$$

$$e_2 h = K_1^2 U^2 + M^2 g \sin \beta - 2M^2 S \dot{\phi} \dot{U}^1 - M^2 U^2 \dot{\beta} \dot{\beta} + M^2 (SZ^1 - CU^1) \dot{\phi} \dot{\phi}$$

$$e_3 h = M^2 g (Z^2 \sin \beta + U^2 \cos \beta) - 2M^2 (SZ^2 - CU^2) \dot{\phi} \dot{U}^1 + 2M^2 U^2 \dot{\beta} \dot{U}^2 + \\ M^2 [(SZ^1 - CU^1) Z^2 - (CZ^1 + SU^1) U^2] \dot{\phi} \dot{\phi}$$

$$e_4 h = g (M^1 + M^2) (Z^1 \sin \phi + U^1 \cos \phi) + 2(M^1 + M^2) U^1 \dot{\phi} \dot{U}^1 + 2M^2 (SZ^1 + CU^1) \dot{\beta} \dot{U}^2 + \\ M^2 [(CZ^1 - SU^1) U^2 + (SZ^1 + CU^1) Z^2] \dot{\beta} \dot{\beta} + 2(M^1 + M^2) Z^1 U^1 \dot{\phi} \dot{\phi}$$

E, finalmente, o vetor τ representado por:

$$\tau = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}^T \quad (68d)$$

é formado pelos seguintes elementos:

$$\tau_1 = -\left(\frac{K_1}{k}\right) T_2$$

$$\tau_2 = 0$$

$$\tau_3 = T_2$$

$$\tau_4 = T_1 - T_2$$

A partir deste ponto, pode-se determinar as expressões de $\mathbf{h}_1$ e $\mathbf{h}_2$. Conforme foi visto anteriormente, na equação (58), $\mathbf{h}_1$ e $\mathbf{h}_2$ podem ser calculados por:

$$\mathbf{h}_1 = \frac{\partial M}{\partial \omega} \ddot{\omega} + \frac{\partial h}{\partial \omega} \quad (69)$$

$$\mathbf{h}_2 = \frac{\partial h}{\partial \dot{\omega}} \quad (70)$$

As derivadas que aparecem na equação (69) e na equação (70) devem ser resolvidas de acordo com a expressão (C1) do Apêndice C.

A derivada $\frac{\partial M}{\partial \omega}$ gera uma matriz de quarta ordem cujos elementos são:

$$e_{24} = -e_{13} = -e_{31} = e_{42} = -M^2 S$$

$$e_{33} = 2M^2 U^2$$

$$e_{34} = \left[(U^1 + U^2)C - (Z^1 + Z^2)S \right] M^2$$

$$e_{43} = \left[(U^1 + U^2)C + (Z^1 + Z^2)S \right] M^2$$

$$e_{44} = 2U^1(M^1 + M^2)$$

e os demais elementos são nulos.

O produto da derivada $\frac{\partial M}{\partial \omega}$ pelo vetor $\ddot{\omega}$ resulta no vetor $\{e_1^1, e_2^1, e_3^1, e_4^1\}^T$ cujos elementos são:

$$e_1^1 = SM^2 \ddot{\beta}$$

$$e_2^1 = -SM^2 \ddot{\phi}$$

$$e_3^1 = SM^2 \ddot{U}^1 + 2U^2 M^2 \ddot{\beta} + \left[(U^1 + U^2)C - (Z^1 + Z^2)S \right] M^2 \ddot{\phi}$$

$$e_4^1 = -SM^2 \ddot{U}^2 + \left[(U^1 + U^2)C + (Z^1 + Z^2)S \right] M^2 \ddot{\beta} + 2U^1(M^1 + M^2) \ddot{\phi}$$

A derivada $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \omega}$ é o vetor $\{e_1^2, e_2^2, e_3^2, e_4^2\}^T$ cujos elementos são relacionados abaixo:

$$e_1^2 = K_1^1 + (M^1 + M^2)g \cos \phi - (M^1 + M^2)\dot{\phi}\dot{\phi} - M^2 C \dot{\beta}\dot{\beta}$$

$$e_2^2 = K_1^2 + M^2 g \cos \beta - M^2 \dot{\beta}\dot{\beta} + M^2 C \dot{\phi}\dot{\phi}$$

$$\begin{aligned}
 e_3^2 &= M^2 g \left[(Z^2 + 1) \cos \beta - U^2 \sin \beta \right] + 2M^2 C \dot{\phi} \dot{U}^1 + 2M^2 \dot{\beta} \dot{U}^2 + \\
 &\quad M^2 \left[(Z^1 + Z^2) C + (U^1 + U^2) S \right] \dot{\phi} \dot{\phi} \\
 e_4^2 &= (M^1 + M^2) g (Z^1 \cos \phi - U^1 \sin \phi) + 2(M^1 + M^2) \dot{\phi} \dot{U}^1 + 2M^2 C \dot{\beta} \dot{U}^2 + \\
 &\quad M^2 \left[(Z^1 + Z^2) C - (U^1 + U^2) S \right] + 2(M^1 + M^2) Z^1 \dot{\phi} \dot{\phi}
 \end{aligned}$$

O vetor $\mathbf{h}_1 = \{el_1, el_2, el_3, el_4\}^T$ que, conforme indica a equação (69), corresponde a soma do vetor $\frac{\partial M}{\partial \omega} \ddot{\omega}$ com o vetor $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \omega}$ é formado pelos seguintes elementos:

$$el_1 = K_1^1 + (M^1 + M^2) g \cos \phi - (M^1 + M^2) \dot{\phi} \dot{\phi} - M^2 C \dot{\beta} \dot{\beta} + SM^2 \ddot{\beta} \quad (71)$$

$$el_2 = K_1^2 + M^2 g \cos \beta - M^2 \dot{\beta} \dot{\beta} + M^2 C \dot{\phi} \dot{\phi} - SM^2 \ddot{\phi} \quad (72)$$

$$\begin{aligned}
 el_3 &= M^2 g \left[(Z^2 + 1) \cos \beta - U^2 \sin \beta \right] + 2M^2 C \dot{\phi} \dot{U}^1 + 2M^2 \dot{\beta} \dot{U}^2 + \\
 &\quad M^2 \left[(Z^1 + Z^2) C + (U^1 + U^2) S \right] \dot{\phi} \dot{\phi} + SM^2 \ddot{U}^1 + 2U^2 M^2 \ddot{\beta} + \\
 &\quad M^2 \left[(U^1 + U^2) C - (Z^1 + Z^2) S \right] \ddot{\phi}
 \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned}
 el_4 &= (M^1 + M^2) g (Z^1 \cos \phi - U^1 \sin \phi) + 2(M^1 + M^2) \dot{\phi} \dot{U}^1 + 2M^2 C \dot{\beta} \dot{U}^2 + \\
 &\quad M^2 \left[(Z^1 + Z^2) C - (U^1 + U^2) S \right] \dot{\beta} \dot{\beta} + 2(M^1 + M^2) Z^1 \dot{\phi} \dot{\phi} \\
 &\quad - SM^2 \ddot{U}^2 + M^2 \left[(U^1 + U^2) C + (Z^1 + Z^2) S \right] \ddot{\beta} + 2U^1 (M^1 + M^2) \ddot{\phi}
 \end{aligned} \quad (74)$$

O vetor $\mathbf{h}_2 = \{elm_1, elm_2, elm_3, elm_4\}^T$, que é obtido fazendo-se a derivada $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{\omega}}$, tem os seguintes elementos:

$$elm_1 = -2(M^1 + M^2) U^1 \dot{\phi} + 2M^2 S (\dot{\beta} + \dot{U}^2) - 2M^2 (SZ^2 + CU^2) \dot{\beta} \quad (75)$$

$$elm_2 = -2M^2 \left[(\dot{U}^1 + \dot{\phi}) S + U^2 \dot{\beta} - (SZ^1 - CU^1) \dot{\phi} \right] \quad (76)$$

$$elm_3 = -2M^2 (SZ^2 - CU^2) (\dot{U}^1 + \dot{\phi}) + 2M^2 U^2 (\dot{U}^2 + \dot{\beta}) +$$

$$2M^2[(SZ^1 - CU^1)Z^2 - (CZ^1 + SU^1)U^2]\dot{\phi} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} elm_4 = & 2(M^1 + M^2)U^1(\dot{U}^1 + \dot{\phi}) + 2M^2(SZ^1 + CU^1)(\dot{U}^2 + \dot{\beta}) + \\ & 2M^2[(CZ^1 - SU^1)U^2 + (SZ^1 + CU^1)Z^2]\dot{\beta} + 4(M^1 + M^2)Z^1U^1\dot{\phi} \end{aligned} \quad (78)$$

A inversa da matriz $M(\omega)$ será também uma matriz de quarta ordem e o produto desta matriz inversa, tomada com o sinal negativo, com os vetores h_1 e h_2 dá origem a dois vetores que serão representados por *vetor1* e *vetor2*, respectivamente. Assim:

$$\mathbf{vetor1} = -M^{-1}\mathbf{h}_1 \quad (79)$$

$$\mathbf{vetor2} = -M^{-1}\mathbf{h}_2 \quad (80)$$

Portanto, de acordo com a expressão (66), *vetor1* e *vetor2* são elementos da matriz de Jacobi.

A matriz inversa M^{-1} está determinada no Apêndice E e tem os seguintes elementos:

$$M^{-1}(\omega) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} \quad (81)$$

Os elementos do $\mathbf{vetor1} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}^T$ são:

$$b_1 = -(x_{11}el_1 + x_{12}el_2 + x_{13}el_3 + x_{14}el_4) \quad (82)$$

$$b_2 = -(x_{21}el_1 + x_{22}el_2 + x_{23}el_3 + x_{24}el_4) \quad (83)$$

$$b_3 = -(x_{31}el_1 + x_{32}el_2 + x_{33}el_3 + x_{34}el_4) \quad (84)$$

$$b_4 = -(x_{41}el_1 + x_{42}el_2 + x_{43}el_3 + x_{44}el_4) \quad (85)$$

Os elementos do $\text{vetor2} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}^T$ são:

$$c_1 = -(x_{11}elm_1 + x_{12}elm_2 + x_{13}elm_3 + x_{14}elm_4) \quad (86)$$

$$c_2 = -(x_{21}elm_1 + x_{22}elm_2 + x_{23}elm_3 + x_{24}elm_4) \quad (87)$$

$$c_3 = -(x_{31}elm_1 + x_{32}elm_2 + x_{33}elm_3 + x_{34}elm_4) \quad (88)$$

$$c_4 = -(x_{41}elm_1 + x_{42}elm_2 + x_{43}elm_3 + x_{44}elm_4) \quad (89)$$

Torna-se necessário, agora, determinar os vetores $\text{vetor}\tilde{1}$ e $\text{vetor}\tilde{2}$ sendo que:

$$\text{vetor}\tilde{1} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4\}^T = -\tilde{M}^{-1}\tilde{h}_1 = -M^{-1}(\tilde{\omega})h_1(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}, \tilde{\omega}) \quad \text{e}$$

$$\text{vetor}\tilde{2} = \{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4\}^T = -\tilde{M}^{-1}\tilde{h}_2 = -M^{-1}(\tilde{\omega})h_2(\tilde{\omega}, \tilde{\omega})$$

Com os elementos de $\text{vetor}\tilde{1}$ e $\text{vetor}\tilde{2}$ e baseando-se na expressão (66), pode-se escrever a matriz de Jacobi do sistema, que, no caso presente, é uma matriz de oitava ordem, com os seguintes elementos:

$$j_{15} = j_{26} = j_{37} = j_{4,8} = 1 \quad (90)$$

$$j_{54} = \tilde{b}_1 \quad (91)$$

$$j_{64} = \tilde{b}_2 \quad (92)$$

$$j_{74} = \tilde{b}_3 \quad (93)$$

$$j_{84} = \tilde{b}_4 \quad (94)$$

$$j_{58} = \tilde{c}_1 \quad (95)$$

$$j_{68} = \tilde{c}_2 \quad (96)$$

$$j_{78} = \tilde{c}_3 \quad (97)$$

$$j_{88} = \tilde{c}_4 \quad (98)$$

e os demais elementos são nulos (ver a equação (F1) do Apêndice F).

4 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DO BRAÇO ROBÓTICO FORMADO POR DOIS ELOS NÃO RIGIDOS

4.1 INTRODUÇÃO

Uma característica de grande importância na análise do comportamento de um sistema mecânico é a sua estabilidade. De acordo com o seu comportamento, o sistema poderá ser estável ou instável, no entanto, admite-se uma posição intermediária na qual o sistema é considerado criticamente estável. É importante diferenciar os conceitos de estabilidade e de equilíbrio. Considera-se que o sistema está em equilíbrio se na ausência de um estímulo ou perturbação ele permanece no mesmo estado. O sistema é estável se, ao ter sido submetido a um estímulo, ele retornar à situação inicial depois que cessar a ação deste estímulo. O sistema é criticamente estável se ele apresenta oscilações que se conservam indefinidamente. Finalmente, o sistema é considerado instável se, ao ser estimulado, afastar continuamente do seu ponto de equilíbrio.

Esta análise é razoavelmente fácil de ser feita em sistemas lineares e invariantes no tempo, mas torna-se bastante complexa em sistemas não lineares e/ou variantes no tempo.

A estabilidade analisada da forma acima é chamada *estabilidade absoluta*. Em sistemas físicos que armazenam energia, ao se aplicar o sinal de entrada, a resposta se apresenta como uma combinação de dois regimes, o transitório e o permanente. A resposta transitória pode, inicialmente, apresentar oscilações amortecidas para depois atingir o regime estacionário. Quando isto acontece, a estabilidade do sistema é chamada *estabilidade relativa*. Se o sistema apresenta uma estabilidade relativa, pode acontecer que a resposta do regime estacionário apresente uma pequena diferença em relação ao sinal de entrada. Esta diferença é chamada de erro estacionário. É importante entender que a existência de um erro estacionário, desde que ele esteja dentro dos limites estabelecidos no projeto, não significa que o sistema é instável.

Em se tratando de sistemas lineares e invariantes no tempo, existem vários métodos para determinar a sua estabilidade, seja ela absoluta ou relativa. Para os sistemas não



lineares e/ou variantes no tempo, embora o estudo da estabilidade seja bastante mais complexo, também existem procedimentos para fazer esta análise. Um dos métodos mais conhecido para a análise da estabilidade de sistemas não lineares é o método de Liapunov.

A análise da estabilidade de sistemas não lineares de Liapunov pode ser feita por dois critérios distintos, conforme descreve Dazzo e Houpis (1984). Para a aplicação do primeiro critério de Liapunov, o sistema deve ser linearizado em torno de um ponto de equilíbrio e, desta forma, só é válido em uma pequena região em torno desta singularidade. É comum, em se tratando de sistemas não lineares e/ou variantes no tempo, fazer a sua modelagem no espaço dos estados e, no caso da aplicação do primeiro método de Liapunov, nestes sistemas, a análise é feita com base nos autovalores da equação linearizada em torno do ponto de equilíbrio.

No segundo critério, não há necessidade de se resolver a equação diferencial. Deve-se escolher uma função escalar $V(x)$, denominada função de Liapunov. De posse da função de Liapunov adequada ao sistema em estudo e com base em alguns teoremas é possível determinar se o sistema é estável ou não. Este critério pode ser empregado para sistemas forçados ou livres, lineares ou não, invariantes ou variantes no tempo e determinísticos ou estocásticos. Além disso, a aplicação deste critério pode ser feita em uma porção razoavelmente grande do espaço dos estados, ou, até mesmo, em toda a região deste espaço.

Portando, analisando os dois critérios de Liapunov, pode-se dizer que o segundo está associado com uma estabilidade ampla enquanto que o primeiro, a uma estabilidade restrita a uma pequena região do espaço dos estados.

4.2 ESTABILIDADE SEGUNDO LIAPUNOV.

A análise deve ser feita em um sistema definido por uma função que tem a forma $\dot{x} = f(x, t)$, onde $\dot{x}$ é um vetor de estado n -dimensional e $f(x, t)$, um vetor de dimensão n , cujas componentes são funções de $x_1, x_2, \dots, x_n$ e t .



Para o sistema acima mencionado, o estado de equilíbrio do sistema corresponde à situação $f(x_e, t) = 0$.

Em se tratando de sistemas não lineares, é possível que o sistema apresente mais de um ponto de equilíbrio.

Na aplicação do critério de estabilidade de Liapunov deve-se trabalhar em uma região esférica, no espaço dos estados, de raio K em torno de um estado de equilíbrio x_e . Esta região é definida pela seguinte expressão:

$$\|x - x_e\| \leq K \quad (99)$$

onde $\|x - x_e\|$ é chamado de norma Euclideana e é calculada da seguinte forma:

$$\|x - x_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2]^{1/2}$$

Na verdade, é preciso definir duas regiões como a dada pela equação (99). A primeira é uma região mais limitada, representada por δ e definida da seguinte forma:

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta. \quad (100)$$

A outra região é um pouco mais ampla e contém os pontos do espaço definidos por:

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \varepsilon \quad (101)$$

onde, $\phi(t; x_0, t_0)$ é a solução do sistema $\dot{x} = f(x, t)$.

Segundo Liapunov, o sistema é estável se qualquer trajetória iniciada em δ permanecer dentro da região ε , a medida que t tende para o infinito.

Dentro do critério de Liapunov, define-se, também, um tipo especial de estabilidade denominado de estabilidade assintótica. O conceito de estabilidade assintótica é mais restritivo pois, considera-se que o sistema é assintoticamente estável, se a trajetória iniciada em δ , além de não deixar a região ε , sempre se dirigir para x_e , quando o tempo t tende para o infinito.

Finalmente, dentro da visão de Liapunov um sistema será instável se a sua trajetória, que começa na região δ se dirigir para fora da região ε .

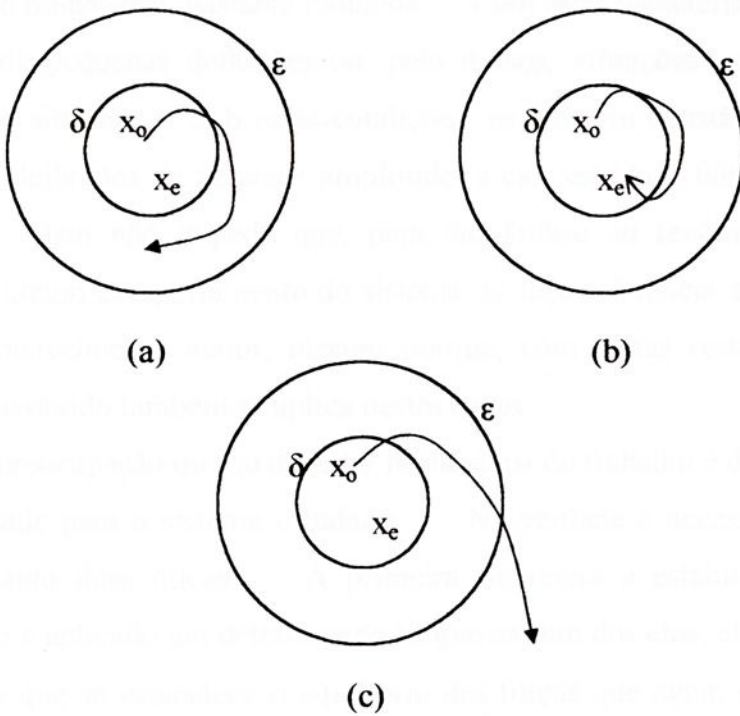


Figura 6 – Classificação da estabilidade de sistemas não lineares

A Figura 6 mostra uma representação geométrica que facilita o entendimento dos conceitos de estabilidade anteriormente apresentados. A posição (a) corresponde a um sistema estável, a posição (b), a um sistema assintoticamente estável e a posição (c), a um sistema instável.

4.3 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DO BRAÇO ROBÓTICO.

O objetivo do presente trabalho é estudar a estabilidade de um braço robótico composto de dois elos não rígidos ligados por juntas revolutas e sujeitos a ação da gravidade. Como foi dito na introdução deste trabalho, a idéia básica é estudar o comportamento de um braço genérico que poderia ser usado em um pequeno equipamento de laboratório, ou numa prótese humana ou, ainda, num engenho mecânico extremamente móvel e para isto é necessário que o braço seja feito de um material leve e com área de seção transversal bastante reduzida. Com estas características, é inevitável o aparecimento de pequenas deflexões ou, pelo menos, vibrações que interferirão no funcionamento do sistema. Sob estas condições, os elos em questão estarão, quando muito, sujeitos a deflexões de pequena amplitude, e este estudo é feito com base nesta consideração. Isto não impede que, para dar ênfase ao fenômeno e facilitar o entendimento de algum comportamento do sistema, se faça referência a uma deformação de magnitude sensivelmente maior, mesmo porque, com certas restrições, o modelo matemático desenvolvido também se aplica nestes casos.

A primeira preocupação que se deve ter nesta etapa do trabalho é definir exatamente o que é estabilidade para o sistema estudado. Na verdade é necessário estudar esta estabilidade segundo duas óticas. A primeira, se refere à estabilidade estática do sistema. Quando é aplicado um determinado torque em um dos elos, ele se movimentará até um ponto em que se estabelece o equilíbrio das forças que agem no sistema. A Figura 7 mostra esta situação, onde se observa que se o torque T for igual ao produto $Pl \sin\theta/2$, onde l é o comprimento da haste AO , o sistema permanece em equilíbrio. Para estudar a estabilidade desta haste seria necessário aplicar uma excitação, por exemplo do tipo de um impulso, e observar o comportamento do sistema.

Considerando que a haste seja rígida, ao aplicar um impulso para cima, o deslocamento angular aumenta e o produto $Pl \sin\theta/2$ passa a ser maior que o torque T e a tendência da haste será descer. Se no movimento de descida a haste ocupar uma posição mais baixa do que a inicial, o produto $Pl \sin\theta/2$ passará a ser menor que o torque T e a

tendência do corpo é subir. Assim depois de um período de oscilação o sistema retornaria a posição de equilíbrio. A condição de estabilidade é atendida e se trata neste caso de uma estabilidade absoluta.

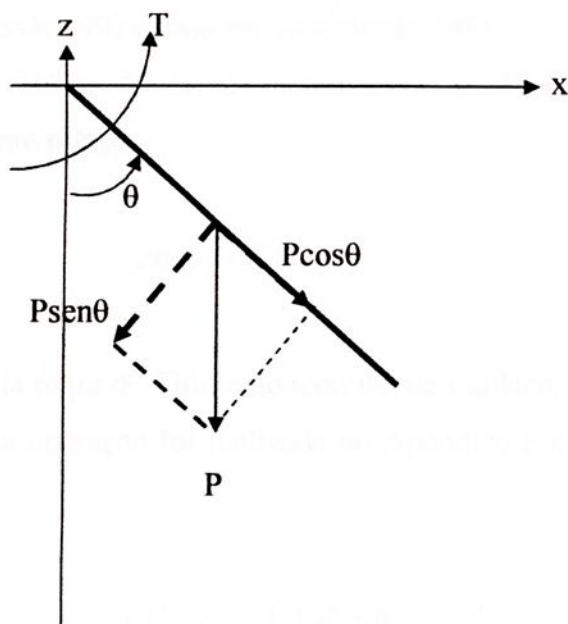


Figura 7 – Componentes das forças e torques em uma haste em equilíbrio

Considerando-se que o sistema não seja rígido, as deflexões de pequena amplitude serão somadas ou subtraídas modificando a posição do extremo final da haste em cada instante. Seria necessário pesquisar se a amplitude e a frequência da oscilação comprometem ou não o funcionamento do sistema, no entanto, como a haste retorna a sua posição de equilíbrio a condição de estabilidade é mantida. Assim, no tocante à estabilidade estática do sistema, com exceção de deslocamentos angulares muito próximos de 180° , ele poderá ser considerado estável, no entanto o sistema terá, neste caso, uma estabilidade relativa.

A segunda estabilidade que se fez referência anteriormente é a estabilidade dinâmica, e esta requer um estudo bem mais detalhado, não só por ser mais complexa

mas, também, por ser a mais importante para o funcionamento do sistema. Para esta análise usar-se-á o primeiro método de Liapunov, fazendo-se uma linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio e trabalhando-se com os autovalores da matriz de Jacobi. A matriz de Jacobi foi determinada no Capítulo 3 e seus elementos são apresentados, começando na expressão (90) e indo até a expressão (98).

De posse da matriz de Jacobi torna-se possível determinar seus autovalores aplicando-se a seguinte relação:

$$|J(t, \tilde{y}) - \lambda I| = 0 \quad (102)$$

Com o auxílio da regra de Chió e do teorema de Laplace, o determinante acima pode ser resolvido. Esta operação foi realizada no Apêndice F e o resultado para o sistema em estudo é:

$$(\lambda^2 - c_4\lambda - b_4)\lambda^6 = 0 \quad (103)$$

Parte da solução da equação (103) é obtida fazendo-se $\lambda^6 = 0$. Isto significa que o sistema possui seis raízes iguais a zero, que estão associadas ao movimento do corpo rígido do braço deformável. Além dos autovalores nulos, existem ainda dois autovalores que são obtidos através da solução da equação do segundo grau que aparece entre parênteses na equação (103). Esta solução é:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(c_4 \pm \sqrt{(-c_4)^2 + 4b_4} \right) \quad (104)$$

De acordo com os critérios de estabilidade, se a parte real das soluções da equação (104) for positiva, a resposta do sistema divergirá e o sistema será considerado instável. Por outro lado, quando a parte real da solução da equação (104) for negativa, o sistema

será estável. No caso da solução dessa equação apresentar apenas a parte imaginária, o sistema será oscilante.

De posse dos autovalores determinados pela equação (104) e considerando-se as condições de estabilidade acima mencionada, pode-se fazer a seguinte análise do sistema:

a) Para $c_4 > 0$:

- se $b_4 > 0$, as duas raízes são reais, sendo uma delas positiva e outra negativa, desta forma o sistema será instável.

- se $b_4 = 0$, existirá uma raiz nula e outra positiva, para esta condição o sistema será instável.

- se $-\left(\frac{c_4}{2}\right)^2 < b_4 < 0$, existirão duas raízes reais positivas e o sistema será instável.

- se $b_4 < -\left(\frac{c_4}{2}\right)^2$, a solução consiste de duas raízes imaginárias conjugadas com parte real positiva, de modo que o sistema será instável.

b) Para $c_4 = 0$:

- se $b_4 > 0$, existirão duas raízes reais e opostas, determinando uma instabilidade no sistema.

- se $b_4 = 0$, as duas raízes serão nulas.

- se $b_4 < 0$, a solução será composta por duas raízes imaginárias conjugadas com parte real nula, indicando uma oscilação contínua do sistema.

c) Para $c_4 < 0$:

- se $b_4 > 0$, a solução será constituída de duas raízes reais, sendo uma positiva e outra negativa, de modo que o sistema, nestas condições, será instável.

- se $b_4 = 0$, uma raiz será nula e outra negativa

- se $-\left(\frac{c_4}{2}\right)^2 < b_4 < 0$, a equação terá duas soluções reais negativas e o sistema será estável.

- se $b_4 < -\left(\frac{c_4}{2}\right)^2$, existirão duas raízes complexas conjugadas, ambas com parte real negativa, e o sistema será estável.

Portanto, da análise mostrada acima a condição de estabilidade ocorre para $c_4 < 0$ e $b_4 < 0$, o que quer dizer que, o sistema somente será estável se os valores de b_4 e c_4 forem, simultaneamente, negativos.

Observa-se, também, da análise acima que, para $c_4 < 0$ e $b_4 = 0$ não existe raiz positiva o que equivale a dizer que o sistema é estável, no entanto, a ocorrência de uma raiz nula indica que o sistema está na condição limite da estabilidade. Como o desenvolvimento analítico pressupõe algumas aproximações, torna-se temeroso usar esta situação como condição de estabilidade, uma vez que, tomando-se um valor de b na vizinhança de zero, pelo lado positivo, por menor que seja este valor, o sistema será considerado instável.

Os valores de b_4 e c_4 podem ser determinados pelas expressões (85) e (89), respectivamente, e considerando-se, também, os elementos x_{41} , x_{42} , x_{43} e x_{44} da matriz inversa M^1 , constantes do Apêndice E. Ao substituir as expressões de x_{41} , x_{42} , x_{43} e x_{44} e dos elementos do *vetor1* e *vetor2*, para a determinação das expressões de b_4 e c_4 , verifica-se que estas expressões são, na realidade, frações algébricas com uma quantidade de termos muito grande, tanto no numerador como no denominador. Isto, obviamente, dificulta a análise das expressões de b_4 e c_4 , só sendo possível concluir se elas são positivas ou negativas usando-se recursos numéricos por intermédio do computador. Uma alternativa para contornar esta dificuldade seria determinar, numericamente, a matriz $M(\omega)$ e, em seguida, usando-se, por exemplo, os recursos do programa MatLab, calcular a matriz inversa, os vetores *vetor1* e *vetor2* e os valores numéricos de b_4 e c_4 . Trabalhando-se desta forma em vários pontos do movimento do braço, pode-se traçar uma curva dos valores de b_4 e c_4 e, desta forma, concluir sobre a estabilidade do sistema com base no comportamento destes gráficos. Para a aplicação desta linha de conduta seria necessário usar os dados da simulação para a conclusão do estudo analítico e isto quebra a seqüência natural da análise, uma vez que, o mais comum, é chegar-se a uma conclusão analítica e em seguida comprová-la através da simulação. Por outro lado, para calcular o valor numérico da matriz de massa do sistema, a matriz $M(\omega)$, é necessário atribuir valores para as massas, para a rigidez, para os comprimentos, etc. Desta forma, deixar-se-ia de trabalhar com um braço genérico e passar-se-ia a considerar um braço robótico específico, o que contraria a linha de pesquisa adotada neste trabalho.

Uma outra forma de contornar o problema é considerar cada elo isoladamente, o que reduziria o sistema encontrado para expressões mais simples, cujo estudo analítico se torna possível. Isto seria feito reduzindo as matrizes 4x4 para matrizes 2x2 e os vetores de 4 elementos para vetores de 2 elementos, sem, no entanto, descaracterizar as matrizes anteriormente determinadas. Desta forma, a análise independente feita nos elos é necessária para simplificar as equações, possibilitando o estudo analítico, e consistente porque leva em consideração a interação entre os elos.

A análise da estabilidade do sistema, considerando os elos separadamente um do outro será baseada na equação geral representada pela expressão (67) e será desenvolvida nos itens 4.4 e 4.5 deste capítulo..

4.4 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DO ELO SUPERIOR

No estudo dos auto-valores da matriz de Jacobi, concluiu-se que a estabilidade do sistema como um todo ocorria para valores negativos de b_4 e c_4 . Na análise dos elos separadamente, a matriz de massa 4 x 4, referenciada na expressão (67), deve ser reestruturada, reduzindo-se para uma matriz 2 x 2. Neste caso, os termos correspondentes a b_4 e c_4 são, respectivamente, b_2 e c_2 .

A adequação da expressão (67), para o estudo do elo superior isolado, é feita suprimindo-se as segundas e as terceiras linhas da matriz M e dos vetores $\ddot{\omega}$, h e τ e suprimindo-se, ainda, a segunda e a terceira coluna da matriz M . Feitas estas modificações, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} M^1 + M^2 & -Z^1(M^1 + M^2) \\ Z^1(M^1 + M^2) & (U^1U^1 - Z^1Z^1)(M^1 + M^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}^1 \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{Bmatrix} K_1^1 U^1 + (M^1 + M^2) g \sin \phi - (M^1 + M^2) U^1 \dot{\phi} \dot{\phi} + 2M^2 S \dot{\beta} \dot{U}^2 - \\ M^2 \dot{\beta} \dot{\beta} (SZ^2 + CU^2) \\ (M^1 + M^2) g (Z^1 \sin \phi + U^1 \cos \phi) + 2(M^1 + M^2) U^1 \dot{\phi} \dot{U}^1 + \\ 2M^2 \dot{U}^2 \dot{\beta} (SZ^1 + CU^1) + 2(M^1 + M^2) Z^1 U^1 \dot{\phi} \dot{\phi} + \\ M^2 \dot{\beta} \dot{\beta} [(CZ^1 - SU^1)U^2 + (SZ^1 + CU^1)Z^2] \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\left(\frac{K_1}{k}\right)T_2 \\ T_1 - T_2 \end{Bmatrix} \quad (105)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} M^1 + M^2 & -Z^1(M^1 + M^2) \\ Z^1(M^1 + M^2) & (U^1 U^1 - Z^1 Z^1)(M^1 + M^2) \end{bmatrix} = M(\omega) \quad (105a)$$

$$\begin{Bmatrix} K_1^1 U^1 + (M^1 + M^2)g \sin \phi - (M^1 + M^2)U^1 \dot{\phi} \dot{\phi} + 2M^2 S \dot{\beta} \dot{U}^2 - \\ M^2 \dot{\beta} \dot{\beta} (SZ^2 + CU^2) \\ (M^1 + M^2)g(Z^1 \sin \phi + U^1 \cos \phi) + 2(M^1 + M^2)U^1 \dot{\phi} \dot{U}^1 + \\ 2M^2 \dot{U}^2 \dot{\beta} (SZ^1 + CU^1) + 2(M^1 + M^2)Z^1 U^1 \dot{\phi} \dot{\phi} + \\ M^2 \dot{\beta} \dot{\beta} [(CZ^1 - SU^1)U^2 + (SZ^1 + CU^1)Z^2] \end{Bmatrix} = \mathbf{h}(\dot{\omega}, \omega) \quad (105b)$$

$$\begin{Bmatrix} -\left(\frac{K_1}{k}\right)T_2 \\ T_1 - T_2 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\tau} \quad (105c)$$

A massa M^1 , considerando-se o elo como sendo constituído de um único elemento, corresponde a massa própria do elo mais a massa do primeiro atuador. Da mesma forma, a massa M^2 é a soma da massa do elo inferior, com a massa do segundo atuador e com a massa da carga colocada na extremidade livre do elo inferior. Assim, a soma $(M^1 + M^2)$ corresponde a massa total do sistema e será representada, daqui por diante, por M^* .

Através da expressão (105), é possível verificar que a interação entre os elos está realmente sendo analisada, pois, nela aparecem os elementos do elo considerado que

possuem o expoente 1, mas, também, apresenta os elementos de interação do elo inferior, ou seja, termos de massa, velocidade e torque, que são identificados com o expoente 2.

A matriz inversa de $M(\omega)$, denotada por $M^I(\omega)$, é determinada por:

$$\begin{bmatrix} M^* & -Z^1 M^* \\ Z^1 M^* & (U^1 U^1 - Z^1 Z^1) M^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo o produto indicado:

$$\begin{bmatrix} M^* m_{11} - Z^1 M^* m_{21} & M^* m_{12} - Z^1 M^* m_{22} \\ Z^1 M^* m_{11} + (U^1 U^1 - Z^1 Z^1) M^* m_{21} & Z^1 M^* m_{12} + (U^1 U^1 - Z^1 Z^1) M^* m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da igualdade acima se pode montar o seguinte sistema de quatro equações:

$$\begin{cases} M^* m_{11} - Z^1 M^* m_{21} = 1 \\ M^* m_{12} - Z^1 M^* m_{22} = 0 \\ Z^1 M^* m_{11} + (U^1 U^1 - Z^1 Z^1) M^* m_{21} = 0 \\ Z^1 M^* m_{12} + (U^1 U^1 - Z^1 Z^1) M^* m_{22} = 1 \end{cases}$$

Na primeira equação verifica-se que $M^* m_{11} = 1 + Z^1 M^* m_{21}$. Substituindo este valor na terceira equação:

$$Z^1 + Z^1 Z^1 M^* m_{21} + (U^1 U^1 - Z^1 Z^1) M^* m_{21} = 0 \quad \therefore \quad Z^1 + (Z^1 Z^1 + U^1 U^1 - Z^1 Z^1) M^* m_{21}$$

então:

$$Z^1 + U^1 U^1 M^* m_{21} = 0 \quad \therefore \quad m_{21} = -\frac{Z^1}{M^* U^1 U^1} \quad (106)$$

retornando com o valor de m_{21} na primeira equação:

$$M^* m_{11} = 1 + Z^1 M^* \left(-\frac{Z^1}{M^1 U^1 U^1} \right) \therefore M^* m_{11} = 1 - \frac{Z^1 Z^1}{U^1 U^1} \therefore m_{11} = \frac{U^1 U^1 - Z^1 Z^1}{M^* U^1 U^1} \quad (107)$$

na segunda equação verifica-se que $M^* m_{12} = Z^1 M^* m_{22} \therefore m_{12} = Z^* m_{22}$ e substituindo este valor na quarta equação:

$$Z^1 M^* Z^1 m_{22} + (U^1 U^1 - Z^1 Z^1) M^* m_{22} = 1 \therefore (Z^1 Z^1 + U^1 U^1 - Z^1 Z^1) M^* m_{22}$$

logo:

$$m_{22} = \frac{1}{M^* U^1 U^1} \quad (108)$$

retornando o valor de m_{22} na segunda equação:

$$m_{12} = \frac{Z^1}{M^* U^1 U^1} \quad (109)$$

com as expressões (106), (107), (108) e (109) pode-se escrever a matriz inversa $M^I(\omega)$ que terá a forma:

$$M^{-1}(\omega) = \frac{1}{M^* U^1 U^1} \begin{bmatrix} (U^1 U^1 - Z^1 Z^1) & Z^1 \\ -Z^1 & 1 \end{bmatrix} \quad (110)$$

A derivada da matriz $M(\omega)$ é:

$$\frac{\partial M}{\partial \omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2M^*U^1 \end{bmatrix} \quad (111)$$

A derivada $\frac{\partial h(\dot{\omega}, \omega)}{\partial \dot{\omega}}$, determinada a partir da expressão (105b), é:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{\omega}} = \begin{Bmatrix} -2M^*U^1\dot{\phi} + 2M^2S(\dot{\beta} + \dot{U}^2) - 2M^2\dot{\beta}(SZ^2 + CU^2) \\ 2M^*U^1(\dot{\phi} + \dot{U}^1) + 2M^2(SZ^1 + CU^1)(\dot{\beta} + \dot{U}^2) + \\ 2M^2\dot{\beta}[(CZ^1 - SU^1)U^2 + (SZ^1 + CU^1)Z^2] + \\ 4M^*Z^1U^1\dot{\phi} \end{Bmatrix} = h_2 \quad (112)$$

A derivada $\frac{\partial h(\dot{\omega}, \omega)}{\partial \omega}$, determinada a partir da expressão (105b), é:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \omega} = \begin{Bmatrix} K_1^1 + M^*g \cos \phi - M^*\dot{\phi}\dot{\phi} - M^2\dot{\beta}\dot{\beta}C \\ M^*g(Z^1 \cos \phi - U^1 \sin \phi) + 2M^*\dot{\phi}\dot{U}^1 + 2M^2\dot{U}^2\dot{\beta}C + \\ M^2\dot{\beta}\dot{\beta}[(Z^1 + Z^2)C - (U^1 + U^2)S] + 2M^*Z^1\dot{\phi}\dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (113)$$

O vetor h_I que corresponde a soma das parcelas $\frac{\partial M}{\partial \omega} \cdot \ddot{\omega}$ e $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \omega}$ é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2M^*U^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}^1 \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} K_1^1 + M^*g \cos \phi - M^*\dot{\phi}\dot{\phi} - M^2\dot{\beta}\dot{\beta}C \\ M^*g(Z^1 \cos \phi - U^1 \sin \phi) + 2M^*\dot{\phi}\dot{U}^1 + 2M^2\dot{U}^2\dot{\beta}C + \\ M^2\dot{\beta}\dot{\beta}[(Z^1 + Z^2)C - (U^1 + U^2)S] + 2M^*Z^1\dot{\phi}\dot{\phi} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 2M^*U^1\ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} K_1^1 + M^*g \cos \phi - M^*\dot{\phi}\dot{\phi} - M^2\dot{\beta}\dot{\beta}C \\ M^*g(Z^1 \cos \phi - U^1 \sin \phi) + 2M^*\dot{\phi}\dot{U}^1 + 2M^2\dot{U}^2\dot{\beta}C + \\ M^2\dot{\beta}\dot{\beta}[(Z^1 + Z^2)C - (U^1 + U^2)S] + 2M^*Z^1\dot{\phi}\dot{\phi} \end{Bmatrix}$$

logo:

$$\mathbf{h}_1 = \begin{Bmatrix} K_1^1 + M^*g \cos \phi - M^*\dot{\phi}\dot{\phi} - M^2\dot{\beta}\dot{\beta}C \\ M^*g(Z^1 \cos \phi - U^1 \sin \phi) + 2M^*\dot{\phi}\dot{U}^1 + 2M^2\dot{U}^2\dot{\beta}C + \\ M^2\dot{\beta}\dot{\beta}[(Z^1 + Z^2)C - (U^1 + U^2)S] + 2M^*Z^1\dot{\phi}\dot{\phi} + \\ 2M^*U^1\ddot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (114)$$

O produto $-M^{-1}h_1$ que aparece na matriz de Jacobi, equação (66), é:

$$\frac{1}{M^*U^1U^1} \begin{bmatrix} Z^1Z^1 - U^1U^1 & -Z^1 \\ Z^1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1^1 + M^*g \cos \phi - M^*\dot{\phi}\dot{\phi} - M^2\dot{\beta}\dot{\beta}C \\ M^*g(Z^1 \cos \phi - U^1 \sin \phi) + 2M^*\dot{\phi}\dot{U}^1 + 2M^2\dot{U}^2\dot{\beta}C + \\ M^2\dot{\beta}\dot{\beta}[(Z^1 + Z^2)C - (U^1 + U^2)S] + 2M^*Z^1\dot{\phi}\dot{\phi} + \\ 2M^*U^1\ddot{\phi} \end{Bmatrix}$$

então:

$$-M^{-1}h_1 = \frac{1}{M^*U^1U^1} \begin{Bmatrix} (Z^1Z^1 - U^1U^1)(K_1^1 + M^*g \cos \phi - M^*\dot{\phi}\dot{\phi} - M^2\dot{\beta}\dot{\beta}C) - \\ M^*Z^1g(Z^1 \cos \phi - U^1 \sin \phi) - 2M^*Z^1\dot{\phi}\dot{U}^1 - \\ 2M^2Z^1\dot{U}^2\dot{\beta}C - M^2Z^1\dot{\beta}\dot{\beta}[(Z^1 + Z^2)C - (U^1 + U^2)S] - \\ 2M^*Z^1Z^1\dot{\phi}\dot{\phi} - 2M^*Z^1U^1\ddot{\phi} \\ K_1^1Z^1 + M^*Z^1g \cos \phi - M^*Z^1\dot{\phi}\dot{\phi} - M^2Z^1\dot{\beta}\dot{\beta}C - M^*g(Z^1 \cos \phi - U^1 \sin \phi) - \\ 2M^*\dot{\phi}\dot{U}^1 - 2M^2\dot{U}^2\dot{\beta}C - M^2\dot{\beta}\dot{\beta}[(Z^1 + Z^2)C - (U^1 + U^2)S] - \\ 2M^*Z^1\dot{\phi}\dot{\phi} - 2M^*U^1\ddot{\phi} \end{Bmatrix}$$

Para a análise da estabilidade do elo superior basta verificar o sinal de b_2 que corresponde a segunda linha do vetor $-M^{-1}h_1$, de modo que:

$$b_2 = \frac{1}{M^* U^1 U^1} \left\{ \begin{array}{l} K_1^1 Z^1 + M^* Z^1 g \cos \phi - M^* Z^1 \ddot{\phi} - M^2 Z^1 \dot{\beta} \dot{\beta} C - \\ M^* g (Z^1 \cos \phi - U^1 \sin \phi) - 2M^* \dot{\phi} \dot{U}^1 - \\ M^2 \dot{\beta} \dot{\beta} [(Z^1 + Z^2) C - (U^1 + U^2) S] - \\ 2M^2 \dot{U}^2 \dot{\beta} C - 2M^* Z^1 \ddot{\phi} - 2M^* U^1 \ddot{\phi} \end{array} \right\} \quad (115)$$

reorganizando os termos de b_2 :

$$b_2 = \frac{1}{M^* U^1 U^1} \left\{ \begin{array}{l} K_1^1 Z^1 + M^* Z^1 g \cos \phi - M^* Z^1 \ddot{\phi} - M^2 Z^1 \dot{\beta} \dot{\beta} C - \\ M^* g Z^1 \cos \phi - M^* g U^1 \sin \phi - 2M^* \dot{\phi} \dot{U}^1 - \\ M^2 \dot{\beta} \dot{\beta} [(Z^1 + Z^2) C - (U^1 + U^2) S] - \\ 2M^2 \dot{U}^2 \dot{\beta} C - 2M^* Z^1 \ddot{\phi} - 2M^* U^1 \ddot{\phi} \end{array} \right\}$$

chegando a expressão final que tem a forma:

$$b_2 = \frac{1}{M^* U^1 U^1} \left\{ \begin{array}{l} K_1^1 Z^1 - M^* g U^1 \sin \phi - 3M^* Z^1 \ddot{\phi} - \\ M^2 \dot{\beta} \dot{\beta} [(2Z^1 + Z^2) C - (U^1 + U^2) S] - \\ 2M^* \dot{\phi} \dot{U}^1 - 2M^2 \dot{U}^2 \dot{\beta} C - 2M^* U^1 \ddot{\phi} \end{array} \right\} \quad (116)$$

Esta é a expressão de b_2 para a análise do elo superior, no entanto, para a efetivação da análise, as variáveis deverão ser substituídas pelos valores nominais em torno dos quais foi feita a linearização.

O produto $-M^{-1}h_2$ que aparece na matriz de Jacobi, constante da equação (66), é:

$$\frac{1}{M^*U^1U^1} \begin{bmatrix} Z^1Z^1 - U^1U^1 & -Z^1 \\ Z^1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2M^*U^1\dot{\phi} + 2M^2S(\dot{\beta} + \dot{U}^2) - 2M^2\dot{\beta}(SZ^2 + CU^2) \\ 2M^*U^1(\dot{\phi} + \dot{U}^1) + 2M^2(SZ^1 + CU^1)(\dot{\beta} + \dot{U}^2) + \\ 2M^2\dot{\beta}[(CZ^1 - SU^1)U^2 + (SZ^1 + CU^1)Z^2] + \\ 4M^*Z^1U^1\dot{\phi} \end{Bmatrix}$$

logo

$$-M^{-1}h_2 = \frac{1}{M^*U^1U^1} \begin{Bmatrix} (Z^1Z^1 - U^1U^1)[-2M^*U^1\dot{\phi} + 2M^2S(\dot{\beta} + \dot{U}^2) - 2M^2\dot{\beta}(SZ^2 + CU^2)] - \\ 2M^*Z^1U^1(\dot{\phi} + \dot{U}^1) - 2M^2Z^1(SZ^1 + CU^1)(\dot{\beta} + \dot{U}^2) - \\ 4M^*Z^1Z^1U^1\dot{\phi} - 2M^2Z^1\dot{\beta}[(CZ^1 - SU^1)U^2 + Z^2(SZ^1 + CU^1)] \\ -2M^*Z^1U^1\dot{\phi} + 2M^2Z^1S(\dot{\beta} + \dot{U}^2) - 2M^2Z^1\dot{\beta}(SZ^2 + CU^2) - \\ 2M^*U^1(\dot{\phi} + \dot{U}^1) - 2M^2\dot{\beta}[(CZ^1 - SU^1)U^2 + (SZ^1 + CU^1)Z^2] - \\ 2M^2(SZ^1 + CU^1)(\dot{\beta} + \dot{U}^2) - 4M^*Z^1U^1\dot{\phi} \end{Bmatrix}$$

Para a análise da estabilidade do elo superior basta verificar o sinal de c_2 que corresponde a segunda linha do vetor $-M^{-1}h_2$, de modo que:

$$c_2 = \frac{1}{M^*U^1U^1} \begin{Bmatrix} -2M^*Z^1U^1\dot{\phi} + 2M^2Z^1S(\dot{\beta} + \dot{U}^2) - 2M^2Z^1\dot{\beta}(SZ^2 + CU^2) - \\ 2M^2\dot{\beta}[(CZ^1 - SU^1)U^2 + (SZ^1 + CU^1)Z^2] - \\ 2M^*U^1(\dot{\phi} + \dot{U}^1) - 2M^2(SZ^1 + CU^1)(\dot{\beta} + \dot{U}^2) - \\ 4M^*Z^1U^1\dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (117)$$

reorganizando os termos de c_2 :

$$c_2 = \frac{1}{M^* U^1 U^1} \left\{ \begin{aligned} &-2M^* Z^1 U^1 \dot{\phi} + 2M^2 Z^1 S (\dot{\beta} + \dot{U}^2) - 2M^2 Z^1 \dot{\beta} (SZ^2 + CU^2) - \\ &2M^2 \dot{\beta} [(CZ^1 - SU^1)U^2 + (SZ^1 + CU^1)Z^2] - \\ &2M^* U^1 (\dot{\phi} + \dot{U}^1) - 2M^2 SZ^1 (\dot{\beta} + \dot{U}^2) - \\ &2M^2 CU^1 (\dot{\beta} + \dot{U}^2) - 4M^* Z^1 U^1 \dot{\phi} \end{aligned} \right\}$$

chegando a expressão final que tem a forma:

$$c_2 = \frac{1}{M^* U^1 U^1} \left\{ \begin{aligned} &-2M^* U^1 [(3Z^1 + 1)\dot{\phi} + \dot{U}^1] - 2M^2 CU^1 (\dot{\beta} + \dot{U}^2) - \\ &2M^2 \dot{\beta} [(SZ^2 + CU^2)Z^1 + (CZ^1 - SU^1)U^2 + (SZ^1 + CU^1)Z^2] \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

Esta é a expressão de c_2 para a análise do elo superior, no entanto, para a efetivação da análise, as variáveis deverão ser substituídas pelos valores nominais em torno dos quais foi feita a linearização.

Conforme foi dito anteriormente, no estudo dos autovalores da matriz de Jacobi, adaptada para o estudo dos elos separadamente, a estabilidade de cada elo ocorre para valores de b_2 e c_2 menores que zero. A seguir será feita uma análise atendendo a estas condições.

4.4.1 Aplicação da condição de estabilidade $\tilde{b}_2 < 0$:

Aplicando-se esta condição na expressão (116), referenciada com os valores nominais, verifica-se que:

a) O termo $\left(\frac{1}{M^1 \tilde{U}^1 \tilde{U}^1}\right)$ será sempre positivo, por isso não interfere na análise do sinal de b_2 .

b) O termo $(K_1^1 Z^1)$ será sempre negativo, pois K_1^1 é um coeficiente com valor maior que zero e Z^1 é a coordenada local do ponto extremo do elo e, de acordo com o sistema de coordenadas adotado, esta coordenada será sempre negativa.

c) O termo $(-gM^* \tilde{U}^1 \sin \tilde{\phi})$ corresponde a contribuição do peso do elo (aqui peso do elo inclui, também, o peso do outro elo, dos atuadores e da carga da extremidade) na estabilidade do sistema. O peso, neste caso, irá se comportar de modo diferente, dependendo da direção da deformação (se para frente ou para trás).

Para análise da contribuição do peso na estabilidade do elo serão mostrados, na Figura 8 e Figura 9, alguns gráficos que permitirão visualizar como as suas componentes atuam no sentido de aumentar ou diminuir a deformação do elo. Acredita-se que através da visualização destas figuras haverá um melhor entendimento de como o peso atua na estabilidade do sistema se comparado com a análise feita com base nos sinais do termo acima mencionado, o que, diga-se de passagem, levaria às mesmas conclusões.

A Figura 8 mostra a atuação do peso no movimento de subida do elo. A posição (a) mostra o elo na região I, sofrendo uma deformação negativa e a posição (b) mostra o elo ainda na mesma região porém com uma deformação positiva. A posição (c) mostra o elo na região II e com deformação negativa e a posição (d) mostra o elo situado na mesma região, sofrendo deformação positiva. Em todos os casos a componente na direção z^1 contribui apenas para a deformação longitudinal que está sendo considerada muito pequena e, portanto, desprezível.

A observação da Figura 8 mostra que na posição (a) a componente do peso (P_{x1}) contribui para aumentar a deformação do elo à medida que ele se desloca com este tipo de deformação. O mesmo comportamento é verificado na posição (c). Já nas posições (b) e (d) mostradas na mesma figura, verifica-se que a componente do peso (P_{x1}) está, em ambas, atuando no sentido de reduzir a deformação do elo. Portanto, a menos que a deformação seja tão grande que a amplitude da oscilação do elo seja insuficiente para mudar o sinal da deformação, o peso estará reduzindo a deformação num instante e aumentando num outro.

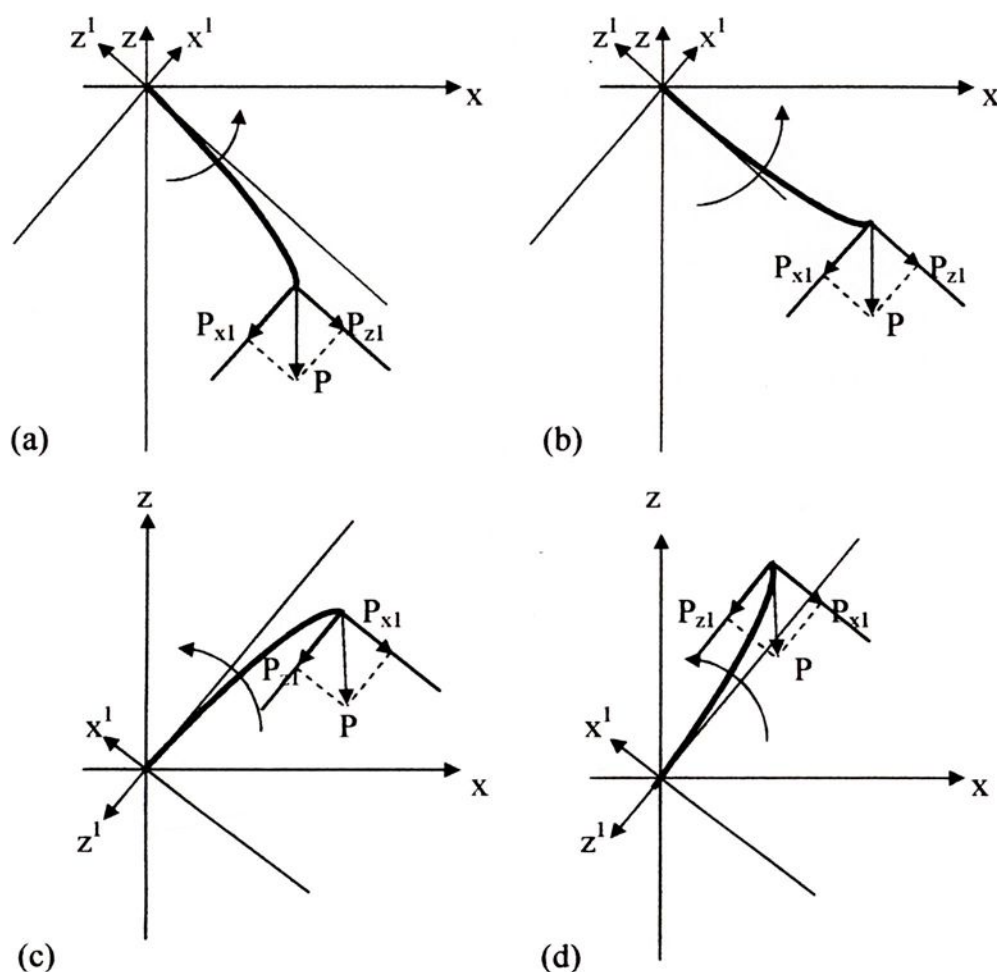


Figura 8 – Atuação do peso no movimento de subida do elo

Analisando o movimento de descida do elo mostrado na Figura 9 verifica-se que as conclusões são as mesmas do movimento de subida, uma vez que, nas posições (a) e (c) a componente do peso (P_{x^1}) contribui para aumentar a deformação, enquanto que nas posições (b) e (d) mostradas na mesma figura esta componente do peso (P_{x^1}) está atuando no sentido de reduzir a deformação do elo.

Portanto, considerando-se apenas a contribuição do peso na estabilidade do elo, verifica-se que num dado instante ele atua favorecendo a estabilidade do sistema, já que neste momento ele reduz a deformação do elo, no entanto, num instante seguinte ele age de modo contrário.

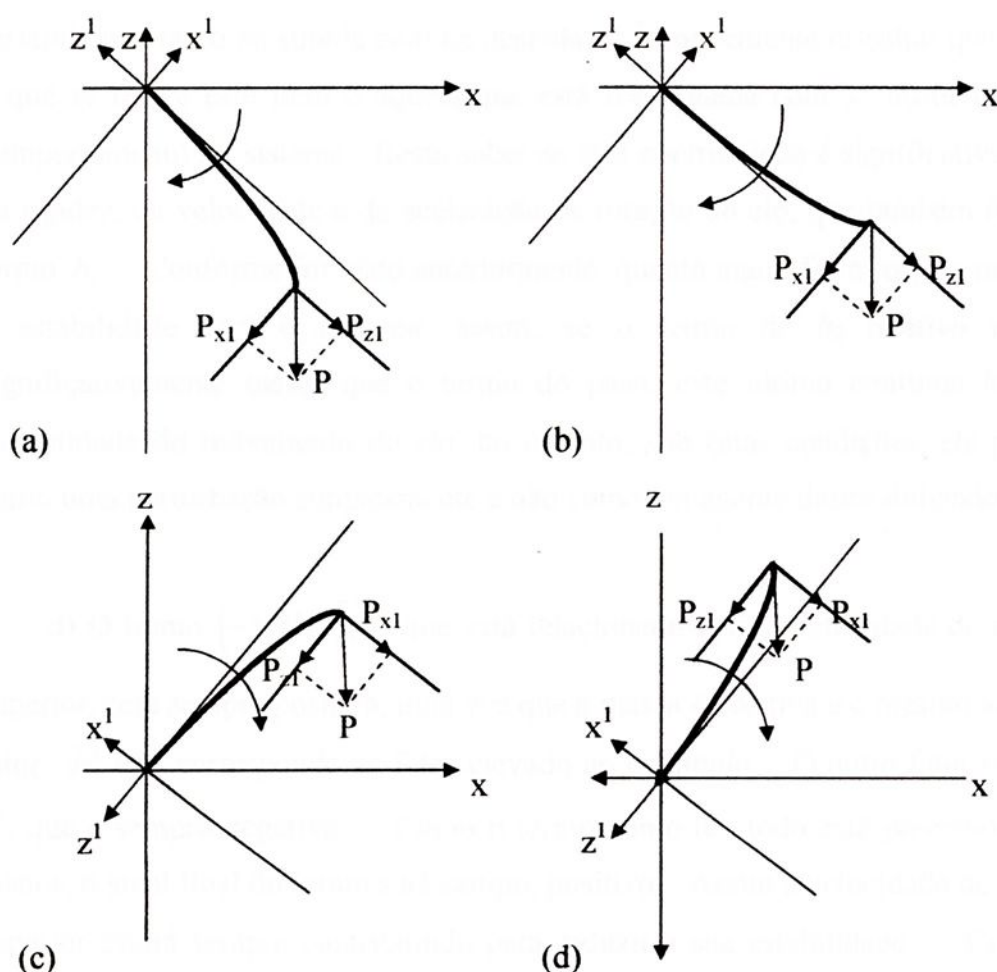


Figura 9 – Atuação do peso no movimento de descida do elo

Um comportamento um pouco diferente é observado quando se trabalha com um material de baixa rigidez (efeito mola), pois, é mais provável que ele suba com deformação negativa e desça com deformação positiva. Nesta situação, lembrando que se está analisando apenas a ação do peso, existirá uma maior tendência para estabilidade no movimento de descida, uma vez que o peso age no sentido de reduzir a deformação do elo e, uma maior tendência para a instabilidade na subida do elo, pela razão contrária. Caso o elo seja confeccionado com um material mais rígido, haverá uma alternância da deformação, sendo ora positiva e ora negativa, conduzindo o sistema para uma

instabilidade tanto na subida com na descida. É conveniente ressaltar que a estabilidade a que se refere este item é aquela que está relacionada com a influência do peso no comportamento do sistema. Resta saber se esta contribuição é significativa frente à ação da rigidez, da velocidade e da aceleração de rotação do elo, que também fazem parte do termo b_2 . Conforme foi visto anteriormente, quanto maior for a rigidez maior tendência à estabilidade terá o sistema, assim, se o termo de b_2 relativo a rigidez for significativamente maior que o termo do peso, este último continua interferindo na estabilidade do movimento do elo, no entanto, sob estas condições, ele pode ser visto como uma perturbação simplesmente e não como um agente desestabilizador.

d) O termo $\left(-3M^*Z^1\ddot{\phi}\tilde{\phi}\right)$, que está relacionado com a velocidade de rotação do elo superior, será sempre positiva, uma vez que a massa é positiva e o mesmo acontece com o fator $\ddot{\phi}\tilde{\phi}$ que corresponde ao fator elevado ao quadrado. O outro fator é a coordenada Z^1 , que é sempre negativa. Como o termo como um todo está precedido de um sinal menos, o sinal final do termo será sempre positivo. Assim a velocidade de rotação do elo superior estará sempre contribuindo para reduzir a sua estabilidade. Como é comum empregar-se baixas velocidades para o movimento dos braços robóticos, este fator deverá ser menos relevante na análise da estabilidade do elo.

e) O termo $\left(-2M^*\dot{\phi}\tilde{U}^1\right)$ representa a influência das velocidades de rotação e de deformação do elo superior em relação a sua estabilidade. Este termo alterna sinais positivos e negativos ao longo do tempo e, desta forma, ele contribui negativamente para a estabilidade do elo. Quanto à velocidade de rotação, já se tinha chegado a esta conclusão. Verifica-se agora que, quanto maior for a velocidade de deformação do elo, maior será a tendência para a sua instabilidade durante o seu movimento e, desta forma, uma velocidade de deformação mais alta irá agravar o efeito negativo, sobre a estabilidade, da velocidade de rotação própria do elo.

f) O termo $\left\{ -M^2 \tilde{\beta} \tilde{\beta} \left[(2Z^1 + Z^2)C - (\tilde{U}^1 + \tilde{U}^2)S \right] \right\}$ relaciona a velocidade de rotação do elo inferior com a estabilidade do elo superior. Como a magnitude de $Z^{1,2}$ (comprimentos dos elos) é muito maior que a de $U^{1,2}$ (deformações dos elos), o sinal da expressão que está dentro dos colchetes será o mesmo do termo $(2Z^1 + Z^2)C$. Como as coordenadas Z^1 e Z^2 são sempre negativas, o termo entre colchetes será positivo quando C for menor que zero. Como definido anteriormente, $C = \cos(\phi - \beta)$, então C será menor que zero quando $|\phi - \beta| > 90^\circ$. Uma análise geométrica da posição relativa entre os elos mostra que a diferença entre os deslocamentos angulares ϕ e β determina se os elos fazem entre si um ângulo agudo ou um ângulo obtuso. A figura abaixo mostra este relacionamento.

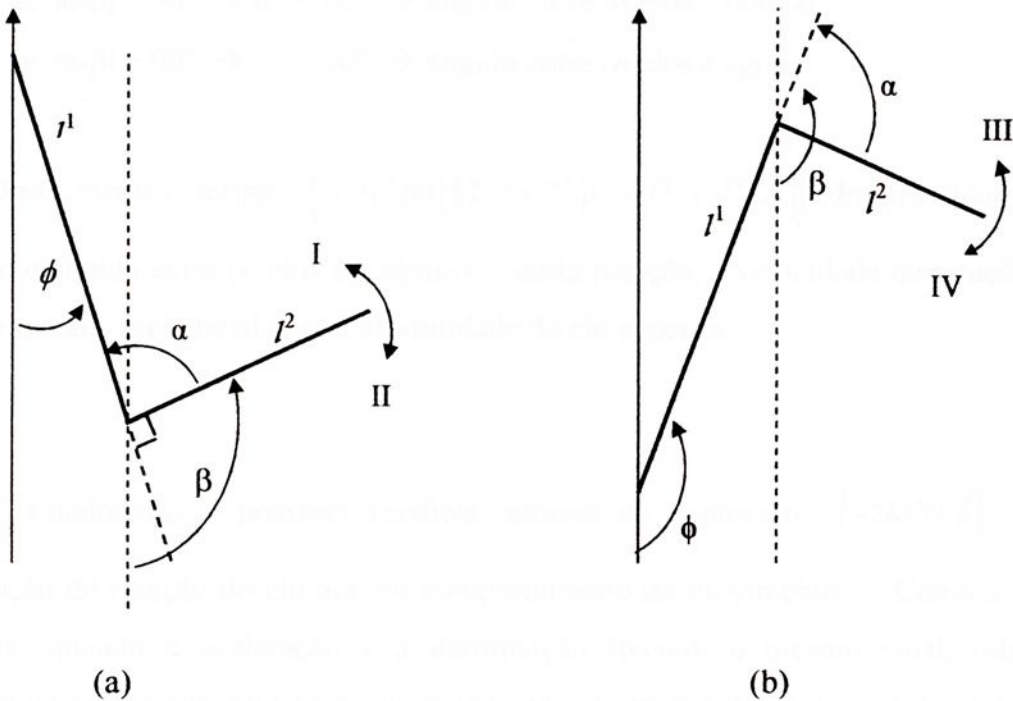


Figura 10 – Posição relativa dos elos em função dos deslocamentos angulares

Na Figura 10, os elos, superior e inferior, estão identificados pelos comprimentos l^1 e l^2 , respectivamente. Tanto no gráfico (a) como no (b) os elos estão em uma situação caracterizada pela posição onde $|\phi - \beta| = 90^\circ$. Quando o elo inferior se desloca na direção I indicada no gráfico (a), a diferença $(\beta - \phi)$ torna-se maior que 90° e, conseqüentemente, o ângulo formado entre os elos, α , torna-se menor que o ângulo reto. Comportamento inverso é observado quando se caminha na direção II, pois neste caso o ângulo

α torna-se maior que 90° . Analogamente quando se desloca na direção III, no gráfico (b), a diferença $(\phi - \beta)$ torna-se maior que 90° e o ângulo α torna-se menor que 90° . Se o movimento for na direção IV, o ângulo formado entre os elos será obtuso. Deste modo, o raciocínio acima pode ser resumido da seguinte forma:

- Se $|\phi - \beta| < 90^\circ \rightarrow \alpha > 90^\circ \rightarrow$ ângulo entre os elos é obtuso
- Se $|\phi - \beta| > 90^\circ \rightarrow \alpha < 90^\circ \rightarrow$ ângulo entre os elos é agudo.

Deste modo o termo $\left\{ -M^2 \ddot{\beta} \ddot{\beta} \left[(2Z^1 + Z^2)C - (\tilde{U}^1 + \tilde{U}^2)S \right] \right\}$ admitirá sinal positivo quando o ângulo entre os elos for obtuso e, nesta posição, a velocidade de rotação do elo inferior é mais prejudicial para a estabilidade do elo superior.

g) Finalmente, é possível verificar, através da expressão $\left(-2M^1 \tilde{U}^1 \ddot{\phi} \right)$, como a aceleração de rotação do elo age no comportamento do movimento. Como a massa é positiva, quando a aceleração e a deformação tiverem o mesmo sinal, este termo contribuirá favoravelmente para que o sistema seja mais estável e, quando elas tiverem sinais contrários, a tendência do sistema é ser mais instável. Como se observa, a aceleração do elo, num dado instante, está contribuindo no sentido de levar o sistema para uma instabilidade e, num instante seguinte, ela está agindo no sentido contrário.

Portanto é interessante analisar a magnitude deste termo em relação aos demais termos de b_2 , pois, dependendo destes valores, a aceleração de rotação pode deixar de ter uma ação desestabilizadora e passar a ter, simplesmente, uma ação perturbadora do movimento do elo.

Um comportamento um pouco diferente ocorrerá se o material do elo possuir baixa rigidez. Quando o elo é feito com um material que se deforma com maior facilidade, a condição mais favorável para a estabilidade do sistema ocorre no movimento de descida, qualquer que seja o tipo de movimento, isto é, acelerado ou retardado. No entanto, como já se frisou anteriormente, este não é o tipo de sistema que se está estudando no momento.

Sabendo-se como cada termo da expressão de b_2 contribui para a estabilidade ou não do sistema, pode-se concluir quanto ao comportamento do elo como um todo, analisando o conjunto desta expressão. De uma forma resumida a rigidez do elo, representada pelo coeficiente K_1^I , contribui para tornar o sistema mais estável, o comprimento do elo atua no sentido de prejudicar a estabilidade e as demais grandezas analisadas, como a velocidade de rotação, o peso, a aceleração e a posição relativa entre os elos determinam uma alternância de situações de estabilidade e de instabilidade. Como estas variáveis apresentem uma alternância de comportamento, é indiscutível que, dependendo das suas magnitudes, elas irão influenciar diretamente para tornar o elo mais instável.

Não obstante se tenha chegado a um ponto em que se possa prever o comportamento do elo, não se pode esquecer que o critério de estabilidade exige, também, uma análise concomitante do sinal de c_2 . Assim, além das conclusões a que se chegou até agora é preciso saber como a expressão de c_2 influencia na estabilidade do sistema.

4.4.2 Aplicação da condição de estabilidade $\bar{c}_2 < 0$:

Verifica-se ao analisar a expressão (118) que todos os seus termos são funções das velocidades do sistema, ou seja, das velocidades de rotação e de deformação dos elos. Já



foi visto anteriormente, por ocasião da análise do termo b_2 , como estas velocidades influenciam na estabilidade do elo superior. O exame do termo c_2 poderá ser, então, bem mais sucinto, pois, na verdade, esta análise somente devera confirmar as conclusões a que se chegou anteriormente.

Assim, aplicando-se a condição de estabilidade na expressão (118), referenciada com os valores nominais, verifica-se que:

a) O termo $\left(\frac{1}{M} \cdot \tilde{U}^1 \tilde{U}^1\right)$ será sempre positivo, por isso não interfere na análise do sinal de c_2 .

b) O termo $\left\{-2M \cdot \tilde{U}^1 \left[(3Z^1 + 1)\tilde{\phi} + \tilde{U}^1\right]\right\}$ envolve as velocidades de rotação e de deformação do próprio elo superior. No tocante aos valores que este termo pode assumir, ele irá alternar o seu sinal, sendo ora positivo e ora negativo. Portanto, este termo mostra que as velocidades de rotação e de deformação de um elo influem diretamente na sua instabilidade, isto é, quanto maiores forem estas velocidades maior tendência terá o sistema de ser instável.

c) O termo $\left[-2M^2 C \tilde{U}^1 (\tilde{\beta} + \tilde{U}^2)\right]$ representa a contribuição das velocidades de rotação e de deformação do elo inferior para a estabilidade ou instabilidade do elo superior. Neste termo aparece também a interferência da deformação do elo superior na sua própria estabilidade. Como em outros elementos já estudados, este termo também alternará o seu sinal a cada instante, de modo que, o resultado da análise deste fator indica que o sistema tende a ser mais instável à medida que estas velocidades aumentam.

d) O termo $\left\{-2M^2\tilde{\beta}\left[(SZ^2+C\tilde{U}^2)Z^1+(CZ^1-S\tilde{U}^1)\tilde{U}^2+(SZ^1+C\tilde{U}^1)Z^2\right]\right\}$ relaciona a estabilidade do elo superior com a velocidade de rotação do inferior e com os comprimentos e deformações dos dois elos. Mais uma vez observa-se o mesmo comportamento em que o termo assume valores maiores e menores que zero durante o movimento do elo. Assim, a influência na estabilidade de um elo, não só é determinada pela velocidade de rotação do próprio elo, como se concluiu no item anterior, mas também pela velocidade de rotação do outro elo.

Fecha-se assim a análise do elo superior. A conclusão final é que existe uma série de fatores que influenciam na estabilidade ou instabilidade do elo. Estes fatores estão presentes nas expressões de b_2 e c_2 . Somando-se as contribuições de cada um destes fatores, que poderão ser positivas ou negativas, chegar-se-á a um valor de b_2 e outro de c_2 para o elo considerado. Se estes resultados forem negativos, o elo é estável, caso contrário, ele é instável. Vale ressaltar que estável ou não, o elo não rígido sempre apresentará vibrações durante o funcionamento, porque o próprio critério de Liapunov admite a ocorrência dessas oscilações. Portanto, é possível que um sistema que se mostre impróprio para uma determinada aplicação, devido à amplitude e frequência de sua vibração possa ser empregado satisfatoriamente em uma outra aplicação qualquer. Além disso, existem os sistemas de controle que poderão ser empregados para melhorar a performance do sistema, reduzindo ou corrigindo este tipo de falha no seu funcionamento.

Uma outra informação que pode ser obtida analisando-se a expressão de c_2 é a identificação de valores de velocidades considerada críticas e que, por isso, prejudicam o funcionamento do braço. Esta informação não é tão relevante no caso do movimento dos braços robóticos porque, neste caso, a velocidade é tão pequena que dificilmente atingirá valores críticos. Apresenta-se, portanto, este estudo sobre velocidade crítica como um complemento ao estudo da estabilidade de sistemas mecânicos.



Observando a expressão (104), vê-se que o termo c_2 é equivalente à parte real dos autovalores da matriz de Jacobi e, portanto, de acordo com Ogata (1997), corresponde à parte real dos pólos do sistema.

Em Phillips e Harbor (1996) encontra-se a expressão dos pólos de um sistema mecânico que tem a forma:

$$s = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{1-\zeta^2} \quad (119)$$

onde, ζ é o coeficiente de amortecimento e ω_n é a frequência natural do sistema.

Comparando-se as expressões (104) e (119) verifica-se que para determinado valor de velocidade de rotação o sistema irá vibrar com frequência igual à frequência natural, em consequência, ele entrará em ressonância. O sistema se afastará continuamente do ponto de equilíbrio à medida que o tempo tende para o infinito, o que caracteriza uma instabilidade do sistema. Na prática os batentes físicos do sistema impedem que as amplitudes atinjam valores extraordinários, no entanto, a ressonância fará o elo vibrar com muita intensidade, fazendo com que ele apresente uma instabilidade altamente nociva e indesejável. Estas são as *velocidades críticas*, a que se referiu anteriormente e, por razões óbvias, devem ser evitadas no funcionamento do sistema.

No tocante à estabilidade existem alguns estudos publicados como, por exemplo, Badlani e Kleinhenz (1979) e Tobias (1971), no entanto, com relação à determinação das velocidades críticas é mais difícil encontrar bibliografia a respeito.

O trabalho de Cleghorn; Tabarrok e Fenton (1984) é um dos poucos, que se encontrou, dirigido à pesquisa das velocidades críticas. O procedimento adotado nesse documento constou da determinação das velocidades críticas de um mecanismo flexível, baseando-se no teorema de Sanches. Segundo estes autores o teorema de Sanches afirma que, se o sistema é governado por uma equação do tipo:

$$\frac{d}{dt}\{x\} + S(t)\{x\} = \{U(t)\} \quad (120)$$

e se atende as condições: $[S(t+T)] = [S(t)]$ e $[U(t+T)] = [U(t)]$

onde T é o período e tem valor constante e positivo, ele terá uma única solução periódica, com período T , se e somente se, a solução homogênea da equação (120) não tiver solução não trivial de período T .

Este teorema aplica-se a sistemas que têm seu comportamento descrito por equações matemáticas do tipo da equação (53), de modo que elas possam ser representadas na forma:

$$M(\omega)\ddot{\omega} + B\dot{\omega} + \left(\frac{1}{\omega_s^2}K_s - K_D\right)\omega = \tau \quad (121)$$

sendo B a matriz de amortecimento e K_s e K_D partes da matriz de rigidez, correspondendo, respectivamente, à componente estática da estrutura e à componente dinâmica do sistema.

A forma homogênea da equação (121) é:

$$M(\omega)\ddot{\omega} + B\dot{\omega} + \left(\frac{1}{\omega_s^2}K_s - K_D\right)\omega = 0 \quad (122)$$

A equação (122) mostra que existem valores de ω_s que resultam em solução periódica não trivial. Estes valores de ω_s correspondem as velocidades críticas. Aqui usou-se a nomenclatura ω_s para designar a frequência do sistema para diferenciar do vetor ω que aparece na equação (121).

O procedimento para calcular as velocidades críticas envolve a expansão do vetor ω em série de Fourier.

Substituindo-se a expansão em série do vetor ω na equação (121), determina-se um conjunto de equações lineares que possuem soluções não triviais quando ω_s é igual a velocidade crítica ω_{crit} . A partir daí, o problema se resume na análise dos autovalores (λ_i) destas equações. A solução final leva à relação:

$$(\omega_{crit})_i = (\lambda_i)^{1/2} \quad i=1,2,\dots,N \quad (123)$$

4.5 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DO ELO INFERIOR DO BRAÇO ROBÓTICO

A adequação da expressão (67), para o estudo do elo inferior isolado, é feita suprimindo-se as primeiras e as quartas linhas da matriz M e dos vetores $\ddot{\omega}$, h e τ e suprimindo-se, ainda, a primeira e a quarta coluna da matriz M . Feitas estas modificações, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} M^2 & -Z^2 M^2 \\ Z^2 M^2 & (U^2 U^2 - Z^2 Z^2) M^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}^2 \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} K_1^2 U^2 + M^2 g \sin \beta - 2M^2 S \dot{U}^1 \dot{\phi} - M^2 U^2 \dot{\beta} \dot{\beta} + \\ M^2 (SZ^1 - CU^1) \dot{\phi} \dot{\phi} \\ M^2 g (Z^2 \sin \beta + U^2 \cos \beta) - 2M^2 \dot{\phi} \dot{U}^1 (SZ^2 - CU^2) + \\ M^2 \dot{\phi} \dot{\phi} [(SZ^1 - CU^1) Z^2 - (CZ^1 + SU^1) U^2] + \\ 2M^2 U^2 \dot{\beta} \dot{U}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad (124)$$

sendo que:

$$\begin{bmatrix} M^2 & -Z^2 M^2 \\ Z^2 M^2 & (U^2 U^2 - Z^2 Z^2) M^2 \end{bmatrix} = M(\omega) \quad (124a)$$

$$\begin{Bmatrix} K_1^2 U^2 + M^2 g \sin \beta - 2M^2 S \dot{U}^1 \dot{\phi} - M^2 U^2 \dot{\beta} \dot{\beta} + \\ M^2 (SZ^1 - CU^1) \dot{\phi} \dot{\phi} \\ M^2 g (Z^2 \sin \beta + U^2 \cos \beta) - 2M^2 \dot{\phi} \dot{U}^1 (SZ^2 - CU^2) + \\ M^2 \dot{\phi} \dot{\phi} [(SZ^1 - CU^1) Z^2 - (CZ^1 + SU^1) U^2] + \\ 2M^2 U^2 \dot{\beta} \dot{U}^2 \end{Bmatrix} = \mathbf{h}(\dot{\omega}, \omega) \quad (124b)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\tau} \quad (124c)$$

A matriz de massa do elo inferior apresenta o termo M^2 que, conforme foi visto anteriormente, corresponde a soma da massa do elo inferior, com a massa do segundo atuador e com a massa da carga colocada na extremidade livre do elo inferior.

Por analogia com o elo superior a matriz inversa de $M(\omega)$ é:

$$M^{-1}(\omega) = \frac{1}{M^2 U^2 U^2} \begin{bmatrix} (U^2 U^2 - Z^2 Z^2) & Z^2 \\ -Z^2 & 1 \end{bmatrix}$$

A derivada da matriz M é:

$$\frac{\partial M}{\partial \omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2M^2 U^2 \end{bmatrix}$$

A derivada $\frac{\partial h(\dot{\omega}, \omega)}{\partial \dot{\omega}}$, determinada a partir da expressão (124b), é:

$$\frac{\partial h}{\partial \dot{\omega}} = \left\{ \begin{array}{l} -2M^2 S(\dot{\phi} + \dot{U}^1) - 2M^2 U^2 \dot{\beta} + 2M^2 \dot{\phi}(SZ^1 - CU^1) \\ -2M^2(SZ^2 - CU^2)(\dot{\phi} + \dot{U}^1) + 2M^2 U^2(\dot{U}^2 + \dot{\beta}) + \\ 2M^2 \dot{\phi}[(SZ^1 - CU^1)Z^2 - (CZ^1 + SU^1)U^2] \end{array} \right\} = h_2$$

A derivada $\frac{\partial h(\dot{\omega}, \omega)}{\partial \omega}$, determinada a partir da expressão (124b), é:

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} = \left\{ \begin{array}{l} K_1^2 + M^2 g \cos \beta - M^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - M^2 \dot{\phi} \dot{\phi} C \\ M^2 g[(Z^2 + 1) \cos \beta - U^2 \sin \beta] + \\ 2M^2 \dot{U}^1 \dot{\phi} C + 2M^2 \dot{\beta} \dot{U}^2 - \\ M^2 \dot{\phi} \dot{\phi}[(Z^1 + Z^2)C + (U^1 + U^2)S] \end{array} \right\}$$

O vetor $h_1 = \frac{\partial M}{\partial \omega} \cdot \dot{\omega} + \frac{\partial h}{\partial \omega}$ é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2M^2 U^2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}^2 \\ \ddot{\beta} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} K_1^2 + M^2 g \cos \beta - M^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - M^2 \dot{\phi} \dot{\phi} C \\ M^2 g[(Z^2 + 1) \cos \beta - U^2 \sin \beta] + \\ 2M^2 \dot{U}^1 \dot{\phi} C + 2M^2 \dot{\beta} \dot{U}^2 - \\ M^2 \dot{\phi} \dot{\phi}[(Z^1 + Z^2)C + (U^1 + U^2)S] \end{array} \right\}$$

logo:

$$h_1 = \left\{ \begin{array}{l} K_1^2 + M^2 g \cos \beta - M^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - M^2 \dot{\phi} \dot{\phi} C \\ M^2 g[(Z^2 + 1) \cos \beta - U^2 \sin \beta] + \\ 2M^2 \dot{U}^1 \dot{\phi} C + 2M^2 U^2 \ddot{\beta} + 2M^2 \dot{\beta} \dot{U}^2 - \\ M^2 \dot{\phi} \dot{\phi}[(Z^1 + Z^2)C + (U^1 + U^2)S] \end{array} \right\}$$

O produto $-M^{-1}h_1$ que aparece na matriz de Jacobi, constante da equação (66), é:

$$\frac{1}{M^2 U^2 U^2} \begin{bmatrix} Z^2 Z^2 - U^2 U^2 & -Z^2 \\ Z^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1^2 + M^2 g \cos \beta - M^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - M^2 \dot{\phi} \dot{\phi} C \\ M^2 g [(Z^2 + 1) \cos \beta - U^2 \sin \beta] + \\ 2M^2 \dot{U}^1 \dot{\phi} C + 2M^2 U^2 \ddot{\beta} + 2M^2 \dot{\beta} \dot{U}^2 - \\ M^2 \dot{\phi} \dot{\phi} [(Z^1 + Z^2) C + (U^1 + U^2) S] \end{Bmatrix}$$

desenvolvendo-se o produto acima indicado:

$$-M^{-1}h_1 = \frac{1}{M^2 U^2 U^2} \left\{ \begin{aligned} & (Z^2 Z^2 - U^2 U^2) (K_1^2 + M^2 g \cos \beta - M^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - M^2 \dot{\phi} \dot{\phi} C) - \\ & M^2 Z^2 g [(Z^2 + 1) \cos \beta - U^2 \sin \beta] - \\ & 2M^2 Z^2 \dot{U}^1 \dot{\phi} C - 2M^2 Z^2 U^2 \ddot{\beta} + 2M^2 Z^2 \dot{\beta} \dot{U}^2 - \\ & M^2 Z^2 \dot{\phi} \dot{\phi} [(Z^1 + Z^2) C + (U^1 + U^2) S] \\ & K_1^2 Z^2 + M^2 Z^2 g \cos \beta - M^2 Z^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - M^2 Z^2 \dot{\phi} \dot{\phi} C - \\ & M^2 g [(Z^2 + 1) \cos \beta - U^2 \sin \beta] - \\ & 2M^2 \dot{U}^1 \dot{\phi} C + 2M^2 U^2 \ddot{\beta} - 2M^2 \dot{\beta} \dot{U}^2 + \\ & M^2 \dot{\phi} \dot{\phi} [(Z^1 + Z^2) C + (U^1 + U^2) S] \end{aligned} \right\}$$

Para a análise da estabilidade do elo inferior basta verificar o sinal de b_2 que corresponde a segunda linha do vetor $-M^{-1}h_1$, de modo que:

$$b_2 = \frac{1}{M^2 U^2 U^2} \left\{ \begin{aligned} & K_1^2 Z^2 - M^2 Z^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - M^2 g (\cos \beta - U^2 \sin \beta) - 2M^2 \dot{U}^1 \dot{\phi} C - \\ & 2M^2 \dot{\beta} \dot{U}^2 + M^2 \dot{\phi} \dot{\phi} [Z^1 C + (U^1 + U^2) S] \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

Esta é a expressão de b_2 para a análise do elo inferior, no entanto, para a efetivação da análise, as variáveis deverão ser substituídas pelos valores nominais em torno dos quais foi feita a linearização.

4.5.1 Aplicação da condição de estabilidade $\tilde{b}_2 < 0$:

Baseando-se no estudo feito para o elo superior, a contribuição de cada termo da expressão (125), referenciada aos valores nominais, para a sua estabilidade do elo inferior é a seguinte:

a) O termo $\left(1/M^2 \tilde{U}^1 \tilde{U}^1\right)$ será sempre positivo, por isso não interfere na análise do sinal de b_2 .

b) O termo $\left(K_1^2 Z^2\right)$ será sempre negativo e, desta forma, quanto maior for o seu valor absoluto maior tendência de estabilidade terá o elo.

c) O termo $\left(-M^2 Z^2 \tilde{\beta} \tilde{\beta}\right)$ está relacionado com a velocidade de rotação própria do elo em estudo e será sempre positivo, contribuindo para que este elo seja instável.

d) O termo $\left(M^2 \tilde{\phi} \tilde{\phi} \left[Z^1 C + (\tilde{U}^1 + \tilde{U}^2) S\right]\right)$ corresponde a influência, na estabilidade do elo inferior, da velocidade de rotação do outro elo e, também, da posição relativa entre os elos. O sinal deste termo alterna valores positivos e negativos, de acordo com a variação de sinal de (C) . Como foi visto anteriormente, a condição mais favorável para a estabilidade deste elo ocorre quando o ângulo entre os elos é agudo.



e) O termo $\left[M^2 g (\cos \tilde{\beta} - \tilde{U}^2 \sin \tilde{\beta}) \right]$ estabelece a contribuição do peso na estabilidade do elo inferior. As conclusões, neste caso, são as mesmas do elo superior estudado anteriormente, ou seja, o peso atua no sentido de prejudicar a estabilidade do elo.

f) O termo $\left(-2M^2 \tilde{U}^1 \tilde{\phi}^2 \right)$ corresponde a contribuição das velocidades de rotação e de deformação do elo superior na estabilidade do elo inferior. O sinal deste termo variará a cada instante, assumindo valores positivos e negativos, de modo que estas velocidades fazem com que o elo inferior tenha maior tendência de ser instável.

g) O termo $\left(-2M^2 \tilde{\beta} \tilde{U}^2 \right)$ representa a interferência das velocidades de rotação e de deformação do elo inferior na sua própria estabilidade. Este termo alterna o seu sinal a cada instante, o que significa, que estas velocidades contribuem para que o elo seja mais instável.

O produto $-M^{-1}h_2$ que aparece na matriz de Jacobi, constante da equação (66), é:

$$\frac{1}{M^2 U^2 U^2} \begin{bmatrix} Z^2 Z^2 - U^2 U^2 & -Z^2 \\ Z^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2M^2 S(\dot{\phi} + \dot{U}^1) - 2M^2 U^2 \dot{\beta} + 2M^2 \dot{\phi}(SZ^1 - CU^1) \\ -2M^2 (SZ^2 - CU^2)(\dot{\phi} + \dot{U}^1) + 2M^2 U^2 (\dot{U}^2 + \dot{\beta}) + \\ 2M^2 \dot{\phi}[(SZ^1 - CU^1)Z^2 - (CZ^1 + SU^1)U^2] \end{Bmatrix}$$

de modo que:

$$-M^{-1}h_2 = \frac{1}{M^2U^2U^2} \left\{ \begin{aligned} & \left(Z^2Z^2 - U^2U^2 \right) \left[-2M^2S(\dot{\phi} + \dot{U}^1) - 2M^2U^2\dot{\beta} + 2M^2\dot{\phi}(SZ^1 - CU^1) \right] + \\ & 2M^2Z^2(SZ^2 - CU^2)(\dot{\phi} + \dot{U}^1) - 2M^2Z^2U^2(\dot{U}^2 + \dot{\beta}) - \\ & 2M^2Z^2\dot{\phi}[(SZ^1 - CU^1)Z^2 - (CZ^1 + SU^1)U^2] \\ & - 2M^2Z^2S(\dot{\phi} + \dot{U}^1) - 2M^2U^2Z^2\dot{\beta} + 2M^2Z^2\dot{\phi}(SZ^1 - CU^1) + \\ & 2M^2(SZ^2 - CU^2)(\dot{\phi} + \dot{U}^1) - 2M^2U^2(\dot{U}^2 + \dot{\beta}) - \\ & 2M^2\dot{\phi}[(SZ^1 - CU^1)Z^2 - (CZ^1 + SU^1)U^2] \end{aligned} \right\}$$

Para a análise da estabilidade do elo inferior basta verificar o sinal de c_2 que corresponde a segunda linha do vetor $-M^{-1}h_2$, de modo que:

$$c_2 = \frac{1}{M^2U^2U^2} \left\{ \begin{aligned} & -2M^2Z^2S(\dot{\phi} + \dot{U}^1) - 2M^2U^2Z^2\dot{\beta} + 2M^2Z^2\dot{\phi}(SZ^1 - CU^1) + \\ & 2M^2(SZ^2 - CU^2)(\dot{\phi} + \dot{U}^1) - 2M^2U^2(\dot{U}^2 + \dot{\beta}) - \\ & 2M^2\dot{\phi}[(SZ^1 - CU^1)Z^2 - (CZ^1 + SU^1)U^2] \end{aligned} \right\}$$

O termo c_2 será dado por:

$$c_2 = \frac{1}{M^2U^2U^2} \left[\begin{aligned} & -2M^2U^2C(\dot{\phi} + \dot{U}^1) + 2M^2U^2\dot{\phi}(CZ^1 + SU^1) - \\ & 2M^2U^2[(Z^2 + 1)\dot{\beta} + \dot{U}^2] \end{aligned} \right] \quad (126)$$

Esta é a expressão de c_2 para a análise do elo inferior, no entanto, para a efetivação da análise, as variáveis deverão ser substituídas pelos valores nominais em torno dos quais foi feita a linearização.

4.5.2 Aplicação da condição de estabilidade $\tilde{c}_2 < 0$:

Embora mais simples, a expressão de c_2 para o elo inferior guarda certa semelhança com a expressão de c_2 para o elo superior. Como se observa todos os termos são relativos às velocidades de rotação e deformação. Além disso todos os termos assumem valores positivos e negativos ao longo do percurso do elo. A conclusão, portanto, é a mesma do elo superior, ou seja quanto maior forem as velocidades de deformação e de rotação maior tendência à instabilidade terá o elo.

Finalmente, analisando as condições do movimento dos dois elos pode-se avaliar sobre o comportamento do sistema com um todo. Portanto, por meio do estudo analítico do sistema pode-se saber o grau de estabilidade ou instabilidade do sistema e, desta forma, atuar com um dispositivo de controle adequado de modo que o mecanismo estudado se comporte da maneira que se deseja.

Da análise da estabilidade feita até aqui, verifica-se que ela depende do sistema, ou seja, das massas dos elos, dos atuadores e da carga colocada na extremidade livre, do tipo de material dos elos (caracterizado pela sua rigidez), das características geométricas dos elos e, também, das características do movimento (posição, velocidade, aceleração, torque aplicado e intensidade da deformação sofrida pelos elos).

Deste modo, de posse de algumas informações sobre o sistema é possível prever o seu comportamento e, até mesmo comprovar esse resultado, comparando-o com trabalhos práticos de laboratório ou com simulações feitas por computador.



5 CONCLUSÕES

Foi possível determinar o modelo matemático de um braço robótico formado por dois elos não rígidos, unidos por juntas revolutas e sujeito à ação da gravidade baseando-se na formulação de Newton-Euler associada com a teoria elementar das vigas e o método de elementos finitos.

As equações que descrevem o comportamento do sistema foram determinadas, no entanto, a análise do movimento, à luz destas equações, tornou-se muito difícil, já que elas são formadas por um número muito grande de termos. Daí surgiu a necessidade de se empregar certos recursos como a representação matricial das equações e o desacoplamento do sistema para o estudo dos elos.

O emprego do cálculo matricial também foi fundamental para o desenvolvimento matemático do problema. O emprego deste recurso permitiu que as numerosas equações que constituem o modelo matemático do braço robótico se reduzissem a uma única equação formada de poucos termos.

O método de elementos finitos demonstrou ser particularmente útil para o equacionamento do sistema e para a aplicação de técnicas numéricas por meio do computador.

A linearização das equações que governam o sistema é necessária para a aplicação do primeiro método de Liapunov, que serve para a análise da estabilidade do braço robótico. A técnica de linearização empregada foi o desenvolvimento em série de Taylor, em torno de um valor nominal, considerando-se somente os termos de primeiro grau.

Em sistemas de equações simples, mesmo que sejam não lineares, a sua matriz de Jacobi pode ser determinada pela derivação direta conforme estabelece a sua própria definição. Porém, para sistema não lineares complexos, nos quais as equações dinâmicas apresentam muitos e variados termos, torna-se muito difícil obter a matriz de Jacobi por este processo. Por isso, o método alternativo proposto por Hongzhao; Xianmim e Weiquing (1994) e que foi desenvolvido no corpo deste trabalho demonstrou ser uma solução possível para a determinação da matriz de Jacobi nos casos em que o processo tradicional das derivadas não pode ser aplicado.

No tocante à estabilidade, o primeiro fator de importância é o entendimento do que vem a ser estabilidade para sistemas dinâmicos. No caso do braço robótico não rígido, não há dúvidas que a instabilidade está relacionada com as deflexões da extremidade de cada elo ou, mais propriamente, está relacionada com a vibração a que fica sujeita o braço não rígido durante o deslocamento. Porém o fato do braço vibrar não quer dizer que ele seja instável. O conceito de estabilidade de Liapunov está relacionado com a trajetória no espaço dos estados e isto significa que a posição do braço está variando continuamente em função do seu deslocamento angular e da deformação a que fica sujeito durante o movimento. De acordo com o critério de Liapunov, o sistema é considerado estável se, partindo do ponto inicial, caminhar numa região ϵ do espaço de estado e retornar a uma região, mais restrita, δ , em torno do ponto de equilíbrio. Este deslocamento no espaço de estado indica que a estabilidade admite a existência de vibrações ou oscilações desde que ocorram dentro dos limites estabelecidos no projeto.

O estudo individualizado de cada elo do braço robótico caracterizou-se como uma boa alternativa para a análise da estabilidade de tais sistemas. As equações originais eram muito extensas para permitir qualquer tipo de análise, porém, após a separação dos elos elas se tornaram mais compactas. Embora tenha sido possível fazer o estudo da estabilidade dos elos, ele está longe de ser simples, tendo em vista a grande quantidade de termos que fazem parte das equações necessárias para a análise do sistema. A análise

independente dos elos só foi viável porque a redução das matrizes de quarta ordem do braço robótico para matrizes de segunda ordem dos elos foi feita sem descaracterizar a expressão geral do sistema e foi feita, também, levando-se em consideração as interações entre os elos.

No desenvolvimento deste trabalho, constatou-se que existe possibilidade de identificação dos parâmetros que influenciam na estabilidade de um braço robótico não rígido, sendo possível também determinar as velocidades críticas, que estão associadas com a frequência natural do sistema. O estabelecimento destas características do sistema é obtido através da análise dos autovalores da matriz de Jacobi.

O estudo de mecanismos não rígidos não é novo, mas é um tema que pode ser considerado atual e importante para ser pesquisado. Para levar este trabalho a termo, foi necessário fazer uma pesquisa bastante aprofundada. O aprendizado relacionado com este tipo de sistema foi grande, no entanto, ele é pequeno se comparado com tudo o que ainda pode ser feito nesta direção. Por isso, esta dissertação pode ser vista como um ponto de partida de um trabalho que, se pretende, será muito mais completo e profundo. E que Deus nos ajude para que possamos ser capazes de contribuir para um mundo melhor e mais justo.

REFERÊNCIAS

BADLANI, M.; KLEINHENZ, W. Dynamic stability of elastic mechanisms. **Journal of Mechanical Design – Transactions of the ASME**, New York: v.101, n.1, p. 149-153, jan. 1979.

CANNON, R. H.; SCHMITZ, E. Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot. **International Journal of Robotics Research**, Cambridge: v.3, n.3, p.62-75. 1984.

CLEGHORN, W. L.; TABARROK, B.; FENTON, R. G. Critical running speeds and stability of high-speed flexible Mechanism. **Mechanism and machine theory**, Oxford: v.19, n.3, p.307-317, 1984.

CLOUGH, R.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. New York: McGraw-hill. 1982.

D'AZZO, J.J.; HOUPIS, C.H. **Análise e projeto de sistemas de controle linear**. Rio de Janeiro: Guanabara. 1984. 660 p.

COOK, R. D. **Finite element modeling for stress analysis**. New York: Wiley. 1995.

HARASHIMA, E.; UESHIBA, T. Adaptive control of flexible arm using the end-point sensing. In: SYMPOSIUM ON FLEXIBLE AUTOMATION, 1986. Osaka, Japan. **Proceedings ... Japão**: [s.n.], [1986?], p. 225-229.

HONGZHAO, L., XIANMIM, Z.; WEIQUING. C. Stability analysis of a flexible arm. In: CONFERENCE MINNEAPOLIS, 1994, Minesota, **Proceedings...** [s.l.: s.n.],[1994?], p. 11-14.

JANDRASITS, W.G.; LOWEN, G. G. The elastic-dynamic behavior of a counterweighted rocker link with an overhanging endmass in a four-bar linkage, Part. I: theory. **Journal of Mechanical Design – Transactions of the ASME**, New York: v.100, n.1, p. 77-88. 1979.

KALAYCIOGLU, S.; BAGCI, C. Determination of the critical operating speeds of planar mechanisms by the finite element method using planar actual line elements and lumped mass systems. **Journal of Mechanical Design – Transactions of the ASME**, New York: v.100, n.2, p. 210-223, 1979.

LEE, J.D., et al. **Control of flexible robot arm, modeling and control of robotic manipulators and manufacturing processes**. New York: AMSE, 1987.

LEE, J. D.; WANG, B. L. Optimal control of a flexible robot arm. **Computers structures**, Oxford: v.29, n.3, p. 459-467. 1988.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. Rio de Janeiro: Prentice-hall do Brasil Ltda, 1997.

PHILLIPS, C.L.; HARBOR, R.D. **Sistemas de controle e realimentação**. São Paulo: Makron Books, 1996.

SANGVERAPHUNSIRI, V. **The optimal control and design of a flexible manipulator arm**. 1984. Thesis - School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA.

SHABANA, A. A. **Theory of vibration**. New York: Springer-Velag, 1991.



TOBIAS, J. R. Stability analysis of a beam element in a planar mechanism. In: WIDWESTERN CONFERENCE ON DEVELOPMENTS IN MECHANICS, 12. 1971, **Proceedings...**[s.l.: s.n.], [1971?], p. 607-620.

USORO, P. B.; NADIRA R.; MAHIL, S. S. A finite element/Lagrange approach to modeling ligtheigth flexible manipulator. **Jounal of Dynamic Systems Measurement and Control - Transaction of the ASME**, New York: v.108, n.3, p. 198-225, set. 1986.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

AGRAWAL, O. P.; SHABANA, A. A. Dynamic analysis of multibody systems using component modes. **Computers Structures**, Oxford: v. 21, n.6, p. 1303-1312, 1985.

BALAS, M. J. Feedback Control of flexible systems. In: **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York: v. 23, n. 4, p. 673-679, 1978.

BOOK, W. J. Recursive lagrangian dynamics of flexible manipulator arms. **International Journal of Robotics Research**, Cambridge: v. 3, n. 3, p. 87-101, 1984.

CENTINKUNT, S.; BOOK, J. W. Performance limitations of joints variable-feedback controller due to manipulator structural flexibility. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, New York: v. 6, n. 2, p. 209-231, abr. 1990.

CHANG, L. W.; HAMILTON, J. F. Dynamics of robotic manipulators with flexible links. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control - Transaction of the ASME**, New York: v. 113, n.1, p.54-59, mar. 1991.

HASTINGS, G. G.; BOOK, W. J. Verification of a linear dynamic model for flexible robotic manipulators. **IEEE Control systems Magazine**, New York: v. 7, p.61-64, 1987.

HAUG, E. J.; SHIH, C. W.; SUNG-SONG, K. Dynamics of flexible bodies: A variational approach. In: BIANCHI, G.; SCHIEHLEN, W. (Eds.). **Dynamics of multibody systems**. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

JONKER, B. A finite element dynamic of spatial mechanisms with flexible links. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Lauseanne: v.76, n. 1, p. 17-40, nov. 1989.



JONKER, B. A finite element dynamic analysis of flexible manipulators. **The International Journal of Robotics Research**, Cambridge: v. 9, n. 4, p. 59-74, ago. 1990.

KANE, T. R.; LEVINSON, D. A. The use of Kane's dynamical equation in robotics. **International Journal of Robotics Research**, Cambridge: v. 2, n. 3, p. 3-21, 1983.

LEE, J.O. Application of optimal control theory to flexible robotic manipulators. **Robotics & Computer - Integrated Manufacturing**, New York: v. 7, n. 3/4, p. 327-335, 1990.

LOW, K.H.; VIDYASAGAR, M. A Lagrangian formulation of the dynamic model for flexible manipulator systems. **Journal of Dynamic Systems Measurement and Control - Transactions of the ASME**, New York: v.110, n.2, p.175-181, jun. 1988.

MANDHAVAN, S. K.; SING, S. N. Variable structure trajectory control of an elastic robot arm. **Journal of Robotics Systems**, New York: v.10, n.1, p. 23-44, 1993.

NAGANATHAN, G.; SONI, A. H. Coupling effects of Kinematics and flexibility in manipulators. **International Journal of Robotic Research**, Cambridge: v. 6, n. 1, p. 75-85, 1987.

NICOSIA, S., TOMEI, P.; TORNAMBE, A. Dynamic modeling of flexible manipulators. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 1986, San Francisco, **Proceedings...** Washington: IEEE Computer Society Press, 1986, p. 365-372.

OACLEY, C. M.; CANNON, R. H. Jr. Equation of motion for a experimental planar two-link flexible manipulator. In: ASME WINTER ANNUAL MEETING, 1989. São Francisco. **Proceedings...**NewYork: Asme, 1984, p. 267-278,

ROSADO, V. O. G., et al. Automation and Cybernetics: Control of a flexible one-link manipulator. **The International Journal of Systems & Cybernetics – KYBERNETES**, United Kingdom: v. 25, n. 5, p. 38-47, 1996.

ROSADO, V. O. G.; YUHARA, E. A. O. Dynamics modeling and simulation of a flexible robotic manipulator. **Robótica**, Cambridge: v. 17, p. 523-528, 1999.

SHABANA, A. A. **Dynamic of multibody systems**. New York: Wiley. 1989.

SHABANA, A. A. Dynamics of flexible bodies using generalized Newton-Euler equations. **Journal of Dynamics Systems Measurement and Control – transactions of the ASME**, New York: v. 112, n.3, p. 496-503, set. 1990.

SILVER, W. M. On the equivalence of Lagrange and Newton-Euler dynamics for manipulator. **International Journal of Robotics Research**, Cambridge: v. 1, n. 2, p. 60-70, 1982.

SONG, J. O. ; HAUG, E. J. Dynamic analysis of planar flexible mechanisms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Lauseanne: v. 24, n. 3, p. 359-381, 1980.

SUNADA, W.; DUBOWSKY, S. The application of finite element nethods to the dynamics analysis of flexible spatial and coplanar linkage system. **Journal of Mechanical design – Transactions of the ASME**, New York: v. 103, n. 3, p.643-651, 1981.

SUNADA, W.; DUBOWSKY, S. On the dynamic analysis and behavior of industrial robotic manipulators with elastic members. **Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design**, New York: v. 105, n. 1, p. 42-51, 1983.

USORO, P.B.; NADIRA, R.; MAHIL, S.S. A finite element/Lagrange approach to modeling lightweight flexible manipulators. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control – transactions of the ASME**, New York: v. 108, n.3, p. 198-205, set. 1986.

WERFF K. van der. ; JONKER, J.B. Dynamics of flexible mechanisms. In: NATO ADVANCED STUDY INST. ON COMPUTER AIDED ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF MECHANICAL SYSTEMS DYNAMICS, 1983. Iowa-City. **Proceedings...**[s.l.: s.n.],[1983?], p. 381-400.

YIM, W.; ZUANG, J.; SINGH, S. N. Experimental two-axis vibration suppression and control of a flexible robot arm. **Journal of Robotics Systems**, New York: v. 10, n.3, p. 321-343, 1993.

APÊNDICE A - Determinação das matrizes de rotação e suas derivadas

1 Determinação da matriz de rotação do elo superior - Matriz Q^1 .

O elo superior, inicialmente na posição vertical e para baixo, tem o seu movimento executado no sentido anti-horário. A matriz de rotação, neste caso, pode ser extraída da figura abaixo.

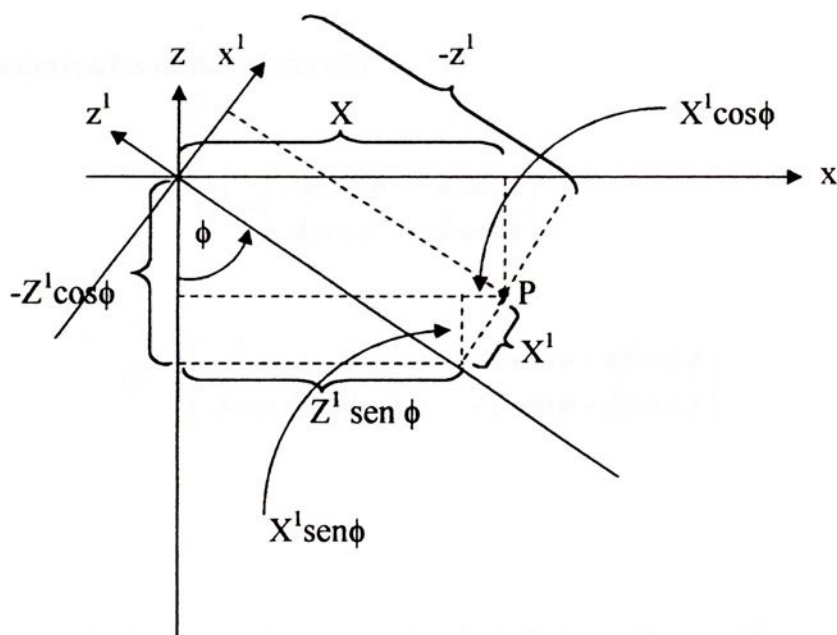


Figura A-1 –Representação das coordenadas nos sistemas global e local

As equações correspondentes são:

$$\begin{cases} X = X^1 \cos \phi - Z^1 \sin \phi \\ -Z = -X^1 \sin \phi - Z^1 \cos \phi \end{cases} \quad \text{ou, de outra forma} \quad \begin{cases} X = X^1 \cos \phi - Z^1 \sin \phi \\ Z = X^1 \sin \phi + Z^1 \cos \phi \end{cases}$$

Escrevendo o sistema acima na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ z^1 \end{bmatrix} \quad (\text{A1})$$

Na equação (A1) destaca-se a matriz $\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = Q^1$, que é a matriz rotação do elo superior.

As derivadas desta matriz são:

$$\dot{Q}^1 = \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi & -\dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{\phi} \cos \phi & -\dot{\phi} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (\text{A2})$$

$$\ddot{Q}^1 = \begin{bmatrix} -\ddot{\phi} \sin \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos \phi & -\ddot{\phi} \cos \phi + \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \phi \\ \ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \phi & -\ddot{\phi} \sin \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

2 Determinação da matriz de rotação do elo inferior - Matriz Q^2 .

A figura que representa o elo inferior é exatamente igual à figura do item anterior, mudando-se apenas o ângulo “ ϕ ” pelo ângulo “ β ”. Assim, por analogia:

$$Q^2 = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (\text{A4})$$

As derivadas desta nova matriz de rotação são:

$$\dot{Q}^2 = \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \operatorname{sen} \beta & -\dot{\beta} \cos \beta \\ \dot{\beta} \cos \beta & -\dot{\beta} \operatorname{sen} \beta \end{bmatrix} \quad (\text{A5})$$

$$\ddot{Q}^2 = \begin{bmatrix} -\ddot{\beta} \operatorname{sen} \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos \beta & -\ddot{\beta} \cos \beta + \dot{\beta} \dot{\beta} \operatorname{sen} \beta \\ \ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \operatorname{sen} \beta & -\ddot{\beta} \operatorname{sen} \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos \beta \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$

APÊNDICE B - Operações com as matrizes de rotação

1 Determinação do produto $(Q^1)^T \cdot (\ddot{Q}^1)$

$$\begin{aligned}
 (Q^1)^T \cdot (\ddot{Q}^1) &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\ddot{\phi} \sin \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos \phi & -\ddot{\phi} \cos \phi + \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \phi \\ \ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \phi & -\ddot{\phi} \sin \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos \phi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\ddot{\phi} \sin \phi \cos \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos^2 \phi + \ddot{\phi} \sin \phi \cos \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \sin^2 \phi & \dots \\ \ddot{\phi} \sin^2 \phi + \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + \ddot{\phi} \cos^2 \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi & \dots \\ \dots & -\ddot{\phi} \cos^2 \phi + \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi - \ddot{\phi} \sin^2 \phi \\ \dots & \ddot{\phi} \sin \phi \cos \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \sin^2 \phi - \ddot{\phi} \sin \phi \cos \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos^2 \phi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \dot{\phi} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) & -\ddot{\phi} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \\ \ddot{\phi} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) & -\dot{\phi} \dot{\phi} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \dot{\phi} & -\ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & -\dot{\phi} \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (B1)
 \end{aligned}$$

2 Determinação do produto $(Q^1)^T \cdot (\dot{Q}^1)$

$$\begin{aligned}
 (Q^1)^T \cdot (\dot{Q}^1) &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi & -\dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{\phi} \cos \phi & -\dot{\phi} \sin \phi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi & -\dot{\phi} \cos^2 \phi - \dot{\phi} \sin^2 \phi \\ \dot{\phi} \sin^2 \phi + \dot{\phi} \cos^2 \phi & \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi - \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\ \dot{\phi} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} \\ \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (B2)
 \end{aligned}$$

3 Determinação do produto $(Q^1)^T \cdot (Q^1)$

$$\begin{aligned}
 (Q^1)^T \cdot (Q^1) &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos^2 \phi + \sin^2 \phi & -\cos \phi \sin \phi + \sin \phi \cos \phi \\ -\sin \phi \cos \phi + \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B3)
 \end{aligned}$$

4 Determinação do produto $(Q^1)^T \cdot (\ddot{Q}^2)$

$$\begin{aligned}
 (Q^1)^T \cdot (\ddot{Q}^2) &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\ddot{\beta} \sin \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos \beta & -\ddot{\beta} \cos \beta + \dot{\beta} \dot{\beta} \sin \beta \\ \ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \sin \beta & -\ddot{\beta} \sin \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\ddot{\beta} \cos \phi \sin \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos \phi \cos \beta + \ddot{\beta} \sin \phi \cos \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \sin \phi \sin \beta & \dots \\ \ddot{\beta} \sin \phi \sin \beta + \dot{\beta} \dot{\beta} \sin \phi \cos \beta + \ddot{\beta} \cos \phi \cos \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos \phi \sin \beta & \dots \\ \dots & -\ddot{\beta} \cos \phi \cos \beta + \dot{\beta} \dot{\beta} \cos \phi \sin \beta - \ddot{\beta} \sin \phi \sin \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \sin \phi \cos \beta \\ \dots & \ddot{\beta} \sin \phi \cos \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \sin \phi \sin \beta - \ddot{\beta} \cos \phi \sin \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos \phi \cos \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \ddot{\beta}(\sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta}(\cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta) & \dots \\ \ddot{\beta}(\sin \phi \sin \beta + \cos \phi \cos \beta) + \dot{\beta} \dot{\beta}(\sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta) & \dots \\ \dots & -\ddot{\beta}(\sin \phi \sin \beta + \cos \phi \cos \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta}(\sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta) \\ \dots & \ddot{\beta}(\sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta}(\sin \phi \sin \beta + \cos \phi \cos \beta) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \sin(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos(\phi - \beta) & -\ddot{\beta} \cos(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta} \sin(\phi - \beta) \\ \ddot{\beta} \cos(\phi - \beta) + \dot{\beta} \dot{\beta} \sin(\phi - \beta) & \ddot{\beta} \sin(\phi - \beta) - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos(\phi - \beta) \end{bmatrix} \quad (B4)
 \end{aligned}$$

5 Determinação do produto $(Q^1)^T \cdot (\dot{Q}^2)$

$$\begin{aligned}
 (Q^1)^T \cdot (\dot{Q}^2) &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \sin \beta & -\dot{\beta} \cos \beta \\ \dot{\beta} \cos \beta & -\dot{\beta} \sin \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \cos \phi \sin \beta + \dot{\beta} \sin \phi \cos \beta & -\dot{\beta} \cos \phi \cos \beta - \dot{\beta} \sin \phi \sin \beta \\ \dot{\beta} \sin \phi \sin \beta + \dot{\beta} \cos \phi \cos \beta & \dot{\beta} \sin \phi \cos \beta - \dot{\beta} \cos \phi \sin \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \dot{\beta}(\sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta) & -\dot{\beta}(\sin \phi \sin \beta + \cos \phi \cos \beta) \\ \dot{\beta}(\sin \phi \sin \beta + \cos \phi \cos \beta) & \dot{\beta}(\sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \dot{\beta} \sin(\phi - \beta) & -\dot{\beta} \cos(\phi - \beta) \\ \dot{\beta} \cos(\phi - \beta) & \dot{\beta} \sin(\phi - \beta) \end{bmatrix} \tag{B5}
 \end{aligned}$$

6 Determinação do produto $(Q^1)^T \cdot (Q^2)$

$$\begin{aligned}
 (Q^1)^T \cdot (Q^2) &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta & -\cos \phi \sin \beta + \sin \phi \cos \beta \\ -\sin \phi \cos \beta + \cos \phi \sin \beta & \sin \phi \sin \beta + \cos \phi \cos \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\phi - \beta) & \sin(\phi - \beta) \\ -\sin(\phi - \beta) & \cos(\phi - \beta) \end{bmatrix} \tag{B6}
 \end{aligned}$$

7 Determinação do produto $(Q^2)^T \cdot (\ddot{Q}^1)$

$$(Q^2)^T \cdot (\ddot{Q}^1) = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\ddot{\phi} \sin \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos \phi & -\ddot{\phi} \cos \phi + \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \phi \\ \ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \phi & -\ddot{\phi} \sin \phi - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos \phi \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -\ddot{\phi} \text{sen} \phi \cos \beta - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos \phi \cos \beta + \ddot{\phi} \cos \phi \text{sen} \beta - \dot{\phi} \dot{\phi} \text{sen} \phi \text{sen} \beta & \dots \\ \ddot{\phi} \text{sen} \phi \text{sen} \beta + \dot{\phi} \dot{\phi} \cos \phi \text{sen} \beta + \ddot{\phi} \cos \phi \cos \beta - \dot{\phi} \dot{\phi} \text{sen} \phi \cos \beta & \dots \\ \dots & -\ddot{\phi} \cos \phi \cos \beta + \dot{\phi} \dot{\phi} \text{sen} \phi \cos \beta - \ddot{\phi} \text{sen} \phi \text{sen} \beta - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos \phi \text{sen} \beta \\ \dots & \ddot{\phi} \cos \phi \text{sen} \beta - \dot{\phi} \dot{\phi} \text{sen} \phi \text{sen} \beta - \ddot{\phi} \text{sen} \phi \cos \beta - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos \phi \cos \beta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\ddot{\phi} (\text{sen} \phi \cos \beta - \cos \phi \text{sen} \beta) - \dot{\phi} \dot{\phi} (\text{sen} \phi \text{sen} \beta + \cos \phi \cos \beta) & \dots \\ \ddot{\phi} (\text{sen} \phi \text{sen} \beta + \cos \phi \cos \beta) - \dot{\phi} \dot{\phi} (\text{sen} \phi \cos \beta - \cos \phi \text{sen} \beta) & \dots \\ \dots & -\ddot{\phi} (\text{sen} \phi \text{sen} \beta + \cos \phi \cos \beta) + \dot{\phi} \dot{\phi} (\text{sen} \phi \cos \beta - \cos \phi \text{sen} \beta) \\ \dots & -\ddot{\phi} (\text{sen} \phi \cos \beta - \cos \phi \text{sen} \beta) - \dot{\phi} \dot{\phi} (\text{sen} \phi \text{sen} \beta + \cos \phi \cos \beta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\ddot{\phi} \text{sen}(\phi - \beta) - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) & -\ddot{\phi} \cos(\phi - \beta) + \dot{\phi} \dot{\phi} \text{sen}(\phi - \beta) \\ \ddot{\phi} \cos(\phi - \beta) - \dot{\phi} \dot{\phi} \text{sen}(\phi - \beta) & -\ddot{\phi} \text{sen}(\phi - \beta) - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) \end{bmatrix} \quad (\text{B7})
\end{aligned}$$

8 Determinação do produto $(Q^2)^T \cdot (\dot{Q}^1)$

$$\begin{aligned}
(Q^2)^T \cdot (\dot{Q}^1) &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \text{sen} \beta \\ -\text{sen} \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \text{sen} \beta & -\dot{\phi} \cos \beta \\ \dot{\phi} \cos \beta & -\dot{\phi} \text{sen} \beta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \text{sen} \phi \cos \beta + \dot{\phi} \cos \phi \text{sen} \beta & -\dot{\phi} \cos \phi \cos \beta - \ddot{\phi} \text{sen} \phi \text{sen} \beta \\ \dot{\phi} \text{sen} \phi \text{sen} \beta + \dot{\phi} \cos \phi \cos \beta & \dot{\phi} \cos \phi \text{sen} \beta - \dot{\phi} \text{sen} \phi \cos \beta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\dot{\phi} (\text{sen} \phi \cos \beta - \cos \phi \text{sen} \beta) & -\dot{\phi} (\text{sen} \phi \text{sen} \beta + \cos \phi \cos \beta) \\ \dot{\phi} (\text{sen} \phi \text{sen} \beta + \cos \phi \cos \beta) & -\dot{\phi} (\text{sen} \phi \cos \beta - \cos \phi \text{sen} \beta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \text{sen}(\phi - \beta) & -\dot{\phi} \cos(\phi - \beta) \\ \dot{\phi} \cos(\phi - \beta) & -\dot{\phi} \text{sen}(\phi - \beta) \end{bmatrix} \quad (\text{B8})
\end{aligned}$$

9 Determinação do produto $(Q^2)^T \cdot (Q^1)$

$$\begin{aligned}
 (Q^2)^T \cdot (Q^1) &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta & -\sin \phi \cos \beta + \cos \phi \sin \beta \\ -\cos \phi \sin \beta + \sin \phi \cos \beta & \sin \phi \sin \beta + \cos \phi \cos \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (\sin \phi \sin \beta + \cos \phi \cos \beta) & -(\sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta) \\ (\sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta) & (\sin \phi \sin \beta + \cos \phi \cos \beta) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\phi - \beta) & -\sin(\phi - \beta) \\ \sin(\phi - \beta) & \cos(\phi - \beta) \end{bmatrix} \tag{B9}
 \end{aligned}$$

10 Determinação do produto $(Q^2)^T \cdot (\ddot{Q}^2)$

$$\begin{aligned}
 (Q^2)^T \cdot (\ddot{Q}^2) &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\ddot{\beta} \sin \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos \beta & -\ddot{\beta} \cos \beta + \dot{\beta} \dot{\beta} \sin \beta \\ \ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \sin \beta & -\ddot{\beta} \sin \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos \beta \end{bmatrix} \\
 &\begin{bmatrix} -\ddot{\beta} \sin \beta \cos \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos^2 \beta + \ddot{\beta} \sin \beta \cos \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \sin^2 \beta & \dots \\ \ddot{\beta} \sin^2 \beta + \dot{\beta} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + \ddot{\beta} \cos^2 \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta & \dots \end{bmatrix} \\
 &\dots \begin{bmatrix} -\ddot{\beta} \cos^2 \beta + \dot{\beta} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta - \ddot{\beta} \sin^2 \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta \\ \ddot{\beta} \sin \beta \cos \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \sin^2 \beta - \ddot{\beta} \sin \beta \cos \beta - \dot{\beta} \dot{\beta} \cos^2 \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \dot{\beta} (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) & -\ddot{\beta} (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \\ \ddot{\beta} (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) & -\dot{\beta} \dot{\beta} (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \dot{\beta} & -\ddot{\beta} \\ \ddot{\beta} & -\dot{\beta} \dot{\beta} \end{bmatrix} \tag{B10}
 \end{aligned}$$

11 Determinação do produto $(Q^2)^T \cdot (\dot{Q}^2)$

$$\begin{aligned}
 (Q^2)^T \cdot (\dot{Q}^2) &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \sin \beta & -\dot{\beta} \cos \beta \\ \dot{\beta} \cos \beta & -\dot{\beta} \sin \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta & -\dot{\beta} \cos^2 \beta - \dot{\beta} \sin^2 \beta \\ \dot{\beta} \sin^2 \beta + \dot{\beta} \cos^2 \beta & \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta - \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\beta}(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) \\ \dot{\beta}(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\beta} \\ \dot{\beta} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B11})
 \end{aligned}$$

12 Determinação do produto $(Q^2)^T \cdot (Q^2)$

$$\begin{aligned}
 (Q^2)^T \cdot (Q^2) &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos^2 \beta + \sin^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta + \sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta + \sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B12})
 \end{aligned}$$

APÊNDICE C – Determinação das derivadas das matriz $M(\omega)$ e dos vetores $h(\omega)$ e $h(\dot{\omega})$

A derivada neste caso é determinada pela soma das derivadas parciais, conforme sugere Hongzhao; Xianmim; Weiking. (1994), ou seja

$$\frac{\partial M(\omega)}{\partial \omega} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial m_s}{\partial x_i} \quad (C1)$$

Na expressão (C1), m_s são os elementos de $M(\omega)$ e x_j são as variáveis de estado de cada elemento. Supondo que as variáveis de estado são U^1, U^2, β e ϕ e que $f(p)=M^1U^1\phi$, então:

$$\frac{\partial (M^1U^1\phi)}{\partial p} = M^1 \left[\frac{\partial (U^1\phi)}{\partial U^1} + \frac{\partial (U^1\phi)}{\partial \phi} \right] \quad (C2)$$

Dentre os elementos das matrizes M e h , estão os termos C e S , sendo que:

$$S = \text{sen}(\phi - \beta) = \text{sen}\phi \cos \beta - \text{sen}\beta \cos \phi \quad \text{e}$$

$$C = \cos(\phi - \beta) = \cos \phi \cos \beta + \text{sen}\phi \text{sen}\beta$$

As derivadas parciais em relação às variáveis ϕ e β são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \phi} &= -\text{sen}\phi \cos \beta + \cos \phi \text{sen}\beta = (\text{sen}\beta \cos \phi - \text{sen}\phi \cos \beta) \\ &= \text{sen}(\beta - \phi) = -\text{sen}(\phi - \beta) = -S \end{aligned} \quad (C3)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial \beta} &= -\cos \phi \sin \beta + \sin \phi \cos \beta = (\sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta) \\ &= \sin(\phi - \beta) = S\end{aligned}\quad (C4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = \cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta = \cos(\phi - \beta) = C \quad (C5)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \beta} &= -\sin \phi \sin \beta - \cos \phi \cos \beta = -(\cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta) \\ &= -\cos(\phi - \beta) = -C\end{aligned}\quad (C6)$$

Assim, quando se calcula a derivada de C ou de S , usando o conceito da expressão (C1), obtém-se, sempre, um resultado nulo, isto é:

$$\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\partial C}{\partial p} = 0 \quad (C7)$$



APÊNDICE D - Programa MatLab para determinação das acelerações

```
%=====
MODELO DINÂMICO NÃO LINEAR DE UM BRAÇO FLEXÍVEL COM DOIS
ELOS.
```

```
%=====
```

```
%Este modelo está baseado na teoria elementar das vigas proposta por BERNOULLI e
%discretizado pelo método dos elementos finitos, usando o equacionamento de
%NEWTON e representado na forma matricial.
```

```
%Autor: Afonso Henrique Castilho.
```

```
%Orientador: Victor Orlando Gamarra Rosado.
```

```
%Data de início da programação: 09/05/2002.
```

```
%-----
```

```
%Definindo o tamanho do vetor de estado "x".
```

```
%-----
```

```
%O tamanho do vetor de estado obedece a expressão:  $x = [(4*(nel+1)):nel:ve1:ve2]$  que
%mostra que ele depende do numero de elementos (nel) em que foi dividido cada elo.
%Assim se considerarmos que os elos sejam constituídos por apenas um elemento, o
%vetor de estado terá a forma:  $x = [x1, x2, x3, \dots, x9, x10, x11]$ , onde  $x9=1$ . Se os elos
%forem divididos em dois elementos cada um, então:  $x = [x1, x2, x3, \dots, x13, x14, x15]$ ,
%sendo  $x13=2$ . Se, por outro lado, os elos forem divididos em três elementos,  $x = [x1, x2,$ 
 $x3, \dots, x17, x18, x19]$ ,
```

```
%onde  $x17 = 3$ . E assim sucessivamente.
```

```
%-----
```

```
%-----
```

```
%Definindo os elementos do vetor de estado "x".
```

```
%-----
```

%x=[u11, u12, u13,..., u1(n-1), u21, u22, u23,...,u2m, u1n, beta, fi, upt11, upt12, ...,
 %upt1(n-1), upt21, upt22, upt23, ..., upt2m, upt1n, betapt, fipt, nel, ve1, ve2]. Onde:
 % {u11, u12, u13,...,u1(n-1)} são as deflexões dos elementos do elo 1; {u1n} é a deflexão
 %do último elemento do elo 1; {u21, u22, u23,..., u2n} são as deflexões dos elementos do
 %elo 2; "beta" é o ângulo de deflexão da junta 2; "fi", o ângulo de deflexão da junta 1;
 % {upt11, upt12, upt13,...,upt1(n-1)} são as velocidades de deflexão dos elementos do
 %elo1; {upt1n} é a velocidade de deflexão do último elemento do elo 1; {upt21, upt22,
 %upt23,..., upt2n} são as velocidades de deflexão dos elementos do elo 2; "betapt" é a
 %velocidade de rotação da junta 2; "fipt" é a velocidade de rotação da junta 1; "nel" é o
 %número de elementos de cada elo (aqui considerado que m=n); "ve1" é o torque no elo 1
 %e ve2" é o torque no elo 2.

%-----

%-----

%Forma final do vetor "x", quando cada elo é considerado como um elemento.

%-----

%x=[x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11], onde:

%x1 = u2

%x2 = u1

%x3 = beta

%x4 = fi

%x5 = upt2

%x6 = upt1

%x7 = betapt

%x8 = fipt

%x9 = nel

%x10 = ve1

%x11 = ve2.

%-----

%-----

%Forma final do vetor "x", quando cada elo for dividido em dois elementos.

%-----

%x=[x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13, x14, x15], onde:

%x1 = u11

%x2 = u21

%x3 = u22

%x4 = u12 (elemento final do elo 1)

%x5 = beta

%x6 = fi

%x7 = upt11

%x8 = upt21

%x9 = upt22

%x10 = upt12 (elemento final do elo 1)

%x11 = betapt

%x12 = fipt

%x13 = nel

%x14 = vel

%x15 = ve2.

%-----

%-----

%Forma final do vetor "x", quando o elo for dividido em três elementos.

%-----

%x=[x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13, x14, x15, x16, x17, x18,

%x19] onde:

%x1 = u11

%x2 = u12

%x3 = u21


```

%x4 = u22
%x5 = u23
%x6 = u13 (elemento final do elo 1)
%x7 = beta
%x8 = fi
%x9 = upt11
%x10 = upt12
%x11 = upt21
%x12 = upt22
%x13 = upt23
%x14 = upt13 (elemento final do elo 1)
%x15 = betapt
%x16 = fipt
%x17 = nel
%x18 = ve1
%x19 = ve2.
%-----

%-----

%Definindo o os elementos "nel", "ve1" e "ve2" do vetor "x", considerando cada elo
%divido em três elementos.
%-----

x=[0.001 0.001 0.001 0.001 0.001 0.001 0.5 0.8 1 1 1 1 1 1 1 3 5 5]; %arbitrados
n1=length(x)-3;
nel=x(n1+1);
ve1=x(n1+2);
ve2=x(n1+3);
n=nel;
m=n;

```



%-----

%Definindo as propriedades do braço.

%-----

%l = comprimento total de cada elo, medido em metros.

%nel = número de elementos em que cada elo foi dividido.

%elas = módulo de elasticidade de Young do material do braço, medido em N/m^2 .

%mesp = massa específica ou massa por unidade de comprimento do elo, em Kg/m .

%den = densidade ou massa por unidade de volume do elo, em Kg/m^3 .

%ast = área da seção transversal, em m^2 . Sendo que: $\text{ast} = b \cdot h$ e $\text{mesp} = \text{den} \cdot \text{ast}$.

%b = base dos elos, medida em metros (também representado por es = espessura).

%h = altura dos elos, medida em metros.

%iner = momento de inércia em relação a o centro da seção transversal do elo, medido em m^4 . Sabe-se que: $\text{iner} = (h \cdot b^3)/12$.

%carga = massa da carga colocada na extremidade livre do braço, medida em Kg .

%fr = frequência do movimento, em Hz .

%wn = frequência angular do movimento, em rad/s .

%ep = razão de "damping".

%rhu = raio da junta (hub), medido em metros.

%ihu = momento de inércia da junta, em m^4 .

%mat1 = massa do atuador 1, em Kg .

%mat2 = massa do atuador 2, em Kg .

%g = aceleração da gravidade, em m/s^2 .

%-----

%-----

%Definindo os valores das propriedades do braço.

%-----

l=1;

elas=1e+9;

```

iner=0.3e-12;
mesp=0.1;
carga=2*10e-04;
mat2=0.08;
rhu=0.0065;
ihu=7.37e-7;
ep=0.01;
g=9.81;

%-----
%Definindo as formas dos vetores "x" e "xdot".
%-----
x=(1:n1);
xdot=zeros(n1:1);

%-----
%Definindo os comprimentos (li) e as coordenadas z1 (do %elo 1) e z2 (do elo 2).
%-----
if (n==1);
    li=l;
    z1(1)=li+rhu;
    z2(1)=(li+rhu)+(li+2*rhu);
end
if(n>1);
    li=(l/n);
    k=[1:1:n];
    z1(k)=(k*li)+rhu;
    z2(k)=(l+rhu)+(k*li)+(2*rhu);
end

```

```

%-----
%Definindo os elementos do vetor de estado "x".
%-----
for i=1:1:n-1;
    u1(i)=x(i);
    upt1(i)=x(2*n+i+2);
end
for i=1:1:m;
    u2(i)=x(n+i-1);
    upt2(i)=x(3*n+i+1);
end
u1(n)=x(2*n);
upt1(n)=x(4*n+2);
beta=x(2*n+1);
fi=x(2*n+2);
betapt=x(4*n+3);
fipt=x(4*n+4);

%-----
%Definindo a Matriz de Rigidez para este sistema.
%-----
dim=2*n;
kto=zeros(dim,dim);
ki=(elas*iner/(li^3))*[12 -12 6*li 6*li;-12 12 -6*li -6*li;6*li -6*li 4*(li^2) 2*(li^2);...
    6*li -6*li 2*(li^2) 4*(li^2)];
k1=[ki(2,2) ki(2,4); ki(4,2) ki(4,4)];
if(n==1);
    kt=k1;
end

```



```
if(n==2);
    kt=kto+ki;
    kt(1,1)=kt(1,1)+k1(1,1);
    kt(1,3)=kt(1,3)+k1(1,2);
    kt(3,1)=kt(1,3);
    kt(3,3)=kt(3,3)+k1(2,2);
end
if(n>2);
    kt=kto;
    for ii=1:1:n-1;
        kt(ii,ii)=ki(2,2)+ki(1,1);
    end;
    kt(n,n)=ki(2,2);
    for jj=n+1:1:2*n-1;
        kt(jj,jj)=ki(4,4)+ki(3,3);
    end
    kt(2*n,2*n)=ki(4,4);
    for kk=1:1:n-1;
        kt(kk,kk+1)=ki(1,2);
        kt(kk+1,kk)=ki(1,2);
    end
    for ll=1:1:n-1;
        kt(ll,n+ll)=ki(2,4)+ki(1,3);
        kt(n+ll,ll)=ki(2,4)+ki(1,3);
    end
    for mm=1:1:n-1;
        kt(mm,n+1+mm)=ki(1,4);
        kt(n+1+mm,mm)=ki(1,4);
    end
end
```



```

for nn=1:1:n-1;
    kt(nn+1,n+nn)=ki(2,3);
    kt(n+nn,nn+1)=ki(2,3);
end
kt(n,2*n)=ki(2,4);
kt(2*n,n)=ki(2,4);
for pp=n+1:1:2*n-1;
    kt(pp,pp+1)=ki(3,4);
    kt(pp+1,pp)=ki(3,4);
end
end

%-----
%Definindo a matriz de rigidez reduzida k minúsculo barra
%-----
ka=kt(1:n,1:n);
kb=kt(1:n,(n+1):dim);
kc=kt((n+1):dim,1:n);
kd=kt((n+1):dim,(n+1):dim);
ikd=inv(kd);
kbarra=ka-kb*ikd*kc;

%-----
%Definindo a matriz de rigidez do sistema K maiúsculo
%-----
KK=ki(4,4);
if (n==1);
    K=ki(2,4);
end

```

```

if (n>1);
    K=zeros(n,1);
    K(n-1)=ki(1,4);
    K(n)=ki(2,4);
End

```

```

%-----
%Definindo as expressões de "C" e de "S"

```

```

%-----
C=cos(fi-beta);
S=sin(fi-beta);

```

```

%-----
%Definindo as matrizes de massa a1 e a2

```

```

%-----
M1=zeros(n-1,n-1);
M2=zeros(m,m);
if (n>1);
    for t=1:1:(n-1);
        M1(t,t)=(mesp*li/2)+(mesp*li/2);
    end
    for t=1:1:(m-1);
        M2(t,t)=(mesp*li/2)+(mesp*li/2);
    end
end
a1=M1;
M1(n,n)=(mesp*li)+mat2;
M2(m,m)=(mesp*li/2)+carga;
a2=M2;

```

```

%-----
%Determinação da matriz a3
%-----

Mtotal=0;
A2=0;
A3=0;
A14=0;
A24=0;
for j=1:1:m;
    Mtotal=Mtotal+M2(j,j);
end
A1=M1(n,n)+Mtotal;
for j=1:1:m;
    A2=A2+(M2(j,j)*((-z2(j).^2)+(u2(j).^2)));
end
for i=1:1:n;
    A3=A3+(M1(i,i)*((-z1(i).^2)+(u1(i).^2)));
end
A3=A3+Mtotal*((-l^2)+(u1(n)^2));
for j=1:1:m;
    A14=A14+M2(j,j)*z2(j);
    A24=A24+M2(j,j)*u2(j);
end
A4=-C*(A14)+S*(A24);
A5=C*(A14)+S*(A24);
A6=(-(C*(l)-S*(u1(n))))*(A14)+((-S*(l)+C*(u1(n))))*(A24);
A7=l*Mtotal;
A8=(-(C*(l)+S*(u1(n))))*(A14)+((S*(l)+C*(u1(n))))*(A24);
a3=[A1,A4,-l*A1;A5,A2,A6;A7,A8,A3];

```



```
%-----  
% Definindo as matrizes nulas "Z1" e "Z2".  
%-----  
Z1=zeros(n-1,m);  
Z2=zeros(m,n-1);  
  
%-----  
% Definindo a matriz "b".  
%-----  
b=zeros(n-1,3);  
for t=1:n-1;  
    b(t,3)=M1(t,t)*z1(t);  
end  
  
%-----  
% Definindo as matrizes "c1" e "c2".  
%-----  
c1=zeros(m,3);  
for t=1:m;  
    c1(t,1)=c1(t,1)+C.*M2(t,t);  
    c1(t,2)=c1(t,2)-M2(t,t)*z2(t);  
    c1(t,3)=c1(t,3)-M2(t,t)*((S*(u1(n)))-C*I);  
end  
c2=zeros(3,m);  
for t=1:m;  
    c2(1,t)=c2(1,t)+C.*M2(t,t);  
    c2(2,t)=c2(2,t)+M2(t,t)*z2(t);  
    c2(3,t)=c2(3,t)-M2(t,t)*((S*(u1(n)))-C*I);  
end
```

```

%-----
% Definindo a matriz "Ainv" e a matriz "A".
%-----
Ainv=[a1,Z1,b;Z2,a2,c1;-b',c2,a3];
A=inv(Ainv);

%-----
% Definindo a matriz "ohm" (ômega maiúsculo), que é formada pelos valores de "p", de
%"q" e "gama".
%-----
%-----
% Determinando primeiramente os valores de "p".
%-----
p=zeros(n-1,1);
for i=1:1:n-1;
    pp=0;
    for j=1:1:n;
        pp=pp-(kbarra(i,j)*u1(j));
    end
    p(i)=pp-M1(i,i)*g*sin(fi)+(M1(i,i)*u1(i)*fipt^2)-((K(i)/KK)*ve2);
end

%-----
% Determinando os valores de "q".
%-----
q=zeros(m,1);
for i=1:1:m;
    qq=0;

```

```

for j=1:1:m;
    qq=qq-(kbarra(i,j)*u2(j));
end
q(i)=qq-M2(i,i)*g*sin(beta)+(2*S*upt1(n)*fipt*M2(i,i)+(betapt^2*u2(i)*M2(i,i))-...
    ((S*(l)-C*(u1(n)))*(fipt^2)*M2(i,i)));
end

%-----
% Determinando o valor de "gama1"
%-----
G11=0;
G12=0;
G13=0;
for j=1:1:n;
    G11=G11-(kbarra(n,j)*u1(j));
end
for j=1:1:m;
    G12=G12+(M2(j,j)*upt2(j));
    G13=G13+(S*(z2(j))+C*(u2(j)))*M2(j,j);
end
gama1=G11+((M1(n,n)+Mtotal)*u1(n)*fipt^2);

%-----
% Determinando o valor de "gama2"
%-----
G20=0;
G21=0;
G22=0;
G23=0;

```



```

G24=0;
for j=1:1:m;
    G20=G20+(M2(j,j)*(sin(beta)*z2(j)+cos(beta)*u2(j)));
    G21=G21+(M2(j,j)*(S*z2(j)-C*u2(j)));
    G22=G22+(M2(j,j)*u2(j)*upt2(j));
    G23=G23+(M2(j,j)*((S*I-C*u1(n))*z2(j)-(C*I-S*u1(n))*u2(j)));
    G24=G24+(M2(j,j)*z2(j)*u2(j));
end
gama2=ve2-(g*G20)+(2*upt1(n)*fipt*G21)-(2*betapt*G22)-
((fipt^2)*G23)+(2*(betapt^2)*G24);

%-----
% Determinando o valor de "gama3"
%-----

G30=0;
G31=0;
G32=0;
G33=0;
G34=0;
for i=1:1;n;
    G30=G30+(M1(i,i)*(z1(i)*sin(fi)-u1(i)*cos(fi)));
    G31=G31+(M1(i,i)*u1(i)*upt1(i));
    G34=G34+(M1(i,i)*z1(i)*u1(i));
end
for j=1:1:m;
    G32=G32+(M2(j,j)*upt2(j));
    G33=G33+(M2(j,j)*((C*I-S*u1(n))*u2(j)-(S*I+C*u1(n))*z2(j)));
end

```




```

gama3=ve1-ve2+(g*(Mtotal*(-l*sin(fi)-u1(n)*cos(fi))+G30))-
(2*fip*(Mtotal*u1(n)*upt1(n)+...
    G31))-(2*betapt*(S*l+C*u1(n))*G32)-
((betapt^2)*G33)+((fip^2)*(Mtotal*l*u1(n)+G34));

```

```

%-----

```

```

% Determinando as matrizes "ohm" e "omega"

```

```

%-----

```

```

ohm=[p;q;gama1;gama2;gama3];

```

```

omega=A*ohm;

```

```

%-----

```

```

%=====

```

```

% fim do programa

```

```

%=====

```

```

%-----

```

```

% Os elementos do vetor omega são:

```

```

%-----

```

```

omega =

```

```

    1.0e+003 *

```

```

    0.1320

```

```

   -0.3894

```

```

   -0.7758

```

```

   -0.9843

```

```

   -1.2047

```

```

    3.8966

```

```

   -1.3271

```

```

    0.3264

```

RESULTADO

APÊNDICE E - Determinação da matriz inversa M^{-1} pelo processo dos cofatores.

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (E1)$$

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \quad (E2)$$

$$C_{11} = (a_{22}a_{33}a_{44} + a_{23}a_{34}a_{42} + a_{34}a_{32}a_{43} - a_{22}a_{32}a_{44} - a_{22}a_{34}a_{43} - a_{34}a_{33}a_{42}) \quad (E3)$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$C_{12} = (-1)(a_{21}a_{33}a_{44} + a_{23}a_{34}a_{41} + a_{24}a_{31}a_{43} - a_{23}a_{31}a_{44} - a_{21}a_{34}a_{43} - a_{24}a_{33}a_{41})$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

$$C_{13} = (a_{21}a_{32}a_{44} + a_{22}a_{34}a_{41} + a_{24}a_{31}a_{42} - a_{22}a_{31}a_{44} - a_{21}a_{34}a_{42} - a_{24}a_{32}a_{41})$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

$$C_{14} = (-1)(a_{21}a_{32}a_{43} + a_{22}a_{33}a_{41} + a_{23}a_{31}a_{42} - a_{22}a_{31}a_{43} - a_{21}a_{33}a_{42} - a_{23}a_{32}a_{41})$$

O determinante de M , de acordo com o teorema de Laplace, é dado por:

$$\Delta_M = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14} \quad (\text{E4})$$

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$C_{21} = (-1)(a_{12}a_{33}a_{44} + a_{13}a_{34}a_{42} + a_{14}a_{32}a_{43} - a_{13}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{34}a_{43} - a_{14}a_{33}a_{42})$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$C_{22} = (a_{11}a_{33}a_{44} + a_{13}a_{34}a_{41} + a_{14}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{31}a_{44} - a_{11}a_{34}a_{43} - a_{14}a_{33}a_{41})$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

$$C_{23} = (-1)(a_{11}a_{32}a_{44} + a_{12}a_{34}a_{41} + a_{14}a_{31}a_{42} - a_{12}a_{31}a_{44} - a_{11}a_{34}a_{42} - a_{14}a_{32}a_{41})$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

$$C_{24} = (a_{11}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{31}a_{42} - a_{12}a_{31}a_{43} - a_{11}a_{33}a_{42} - a_{13}a_{32}a_{41})$$

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$C_{31} = (a_{12}a_{23}a_{44} + a_{13}a_{24}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{43} - a_{13}a_{22}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{42})$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$C_{32} = (-1)(a_{11}a_{23}a_{44} + a_{13}a_{24}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{41})$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

$$C_{33} = (a_{11}a_{22}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{41})$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

$$C_{34} = (-1)(a_{11}a_{22}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{41})$$

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$C_{41} = (-1)(a_{12}a_{23}a_{34} + a_{13}a_{24}a_{32} + a_{14}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{34} - a_{12}a_{24}a_{33} - a_{14}a_{23}a_{32})$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$C_{42} = (a_{11}a_{23}a_{34} + a_{13}a_{24}a_{31} + a_{14}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{21}a_{34} - a_{11}a_{24}a_{33} - a_{14}a_{23}a_{31})$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$C_{43} = (-1)(a_{11}a_{22}a_{34} + a_{12}a_{24}a_{31} + a_{14}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{34} - a_{11}a_{24}a_{32} - a_{14}a_{22}a_{31})$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$C_{44} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}).$$

A matriz de cofatores $\bar{C}$ é dada por:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{E5})$$

A matriz adjunta é a transposta da matriz de cofatores, ou seja:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{E6})$$

A matriz inversa M^{-1} é calculada usando-se a expressão $\frac{\tilde{C}}{\Delta_M}$, então:

$$M^{-1}(\omega) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_M} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{E7})$$

APÊNDICE F - Determinação dos autovalores da matriz de Jacobi

A matriz de Jacobi para o braço robótico leve deste trabalho foi determinada no capítulo 3 e possui os elementos previstos nas expressões de (90) a (98). Assim, a matriz de Jacobi pode ser escrita como:

$$J(t, \tilde{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \quad (F1)$$

Para determinar os autovalores da matriz de Jacobi deve-se aplicar a relação:

$$|J(t, \tilde{y}) - \lambda I| = 0 \quad (F2)$$

Substituindo-se a expressão (F1) na expressão (F2), obtem-se:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & -\lambda & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & -\lambda & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & -\lambda & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 & c_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (F3)$$

Aplicando a regra de Chio com base no elemento da primeira linha e quinta coluna do determinante da equação (F3), este determinante se reduz de uma ordem e toma a forma:

$$(+1) \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & -\lambda & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & -\lambda & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & c_4 - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{F4})$$

Aplicando-se, novamente, a regra de Chio com base no elemento da primeira linha e da quinta coluna, obtém-se:

$$(+1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & -\lambda & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & c_4 - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{F5})$$

Aplicando-se mais uma vez a regra de Chio, tomando-se por base o elemento situado na primeira linha e na quinta coluna, o determinante resultante terá a forma:

$$(+1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \quad (\text{F6})$$

Aplicando-se a regra de Chio pela última vez, tomando-se por base o elemento da primeira linha e da quinta coluna chega-se a uma matriz de quarta ordem que pode ser escrita como:

$$(+1) \begin{vmatrix} -\lambda^2 & 0 & 0 & (b_1 + c_1\lambda) \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & (b_1 + c_1\lambda) \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & (b_1 + c_1\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & (b_1 + c_1\lambda) \end{vmatrix} \quad (\text{F7})$$

Usando-se o teorema de Laplace na última linha do determinante da expressão (F7), obtém-se:

$$(b_4 + c_4\lambda - \lambda^2) \begin{vmatrix} -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \end{vmatrix} \quad (\text{F8})$$

Aplicando-se novamente o teorema de Laplace, agora, tomando-se por base a primeira linha do determinante da expressão (F8) tem-se por resultado:

$$(b_4 + c_4\lambda - \lambda^2)(-\lambda^2) \begin{vmatrix} -\lambda^2 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 \end{vmatrix} \quad (\text{F9})$$

Resolvendo-se expressão (F9), obtém-se o produto:

$$(b_4 + c_4\lambda - \lambda^2)(-\lambda^6) \quad (\text{F10})$$

Assim, a solução da equação (F2) é:

$$\lambda^6(\lambda^2 - c_4\lambda - b_4) = 0 \quad (\text{F11})$$



APÊNDICE G – Formulação da matriz de rigidez de um elemento de viga plano.

A Figura G1 apresenta um elemento de viga plano, de comprimento L , com módulo de elasticidade E e momento de inércia I . Nessa figura, (a) representa o elemento de viga plano, (b), os esforços atuantes na viga (forças e momentos) e (c), (d), (e) e (f), os modos de vibrar da viga.

O eixo longitudinal da viga tem um deslocamento $v = v(x)$. De acordo com a teoria elementar das vigas, $v(x)$ é cúbico para uma viga prismática uniforme submetida a carga somente em sua extremidade, conforme indicado em (b). Conforme estabelecido em Cook (1995), a matriz de rigidez K é determinada em função dos polinômios cúbicos de Hermite representados em (c), (d), (e) e (f), que aproximam um elemento discreto às *Funções de forma*, as quais satisfazem as condições nodais e de continuidade.

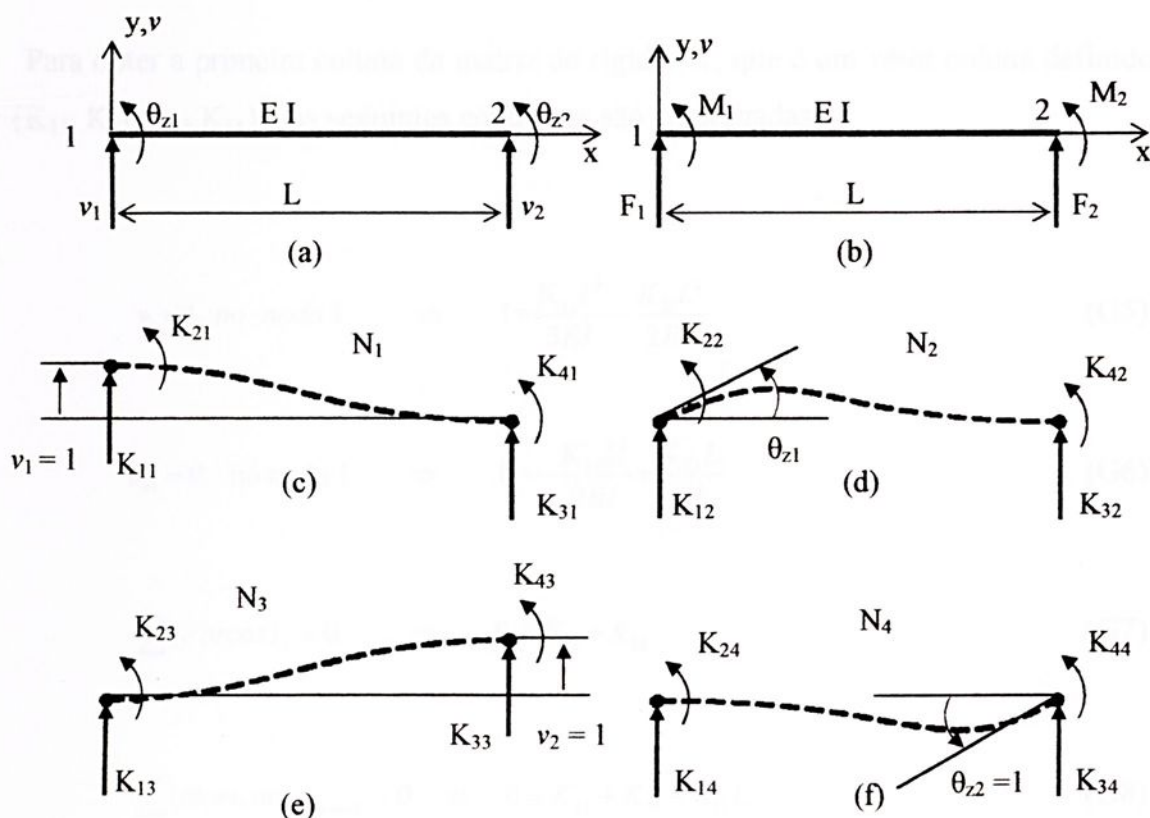


Figura G1 - Polinômios cúbicos de Hermite

As expressões dos N_i representados na Figura G1 são:

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (G1)$$

$$N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (G2)$$

$$N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (G3)$$

$$N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (G4)$$

Para obter a primeira coluna da matriz de rigidez K , que é um vetor coluna definido por $\{K_{11}, K_{22}, K_{33}, K_{44}\}^T$, as seguintes condições são empregadas:

$$v_1 = 1, \text{ no nodo 1} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{K_{11}L^3}{3EI} - \frac{K_{21}L^2}{2EI} \quad (G5)$$

$$\theta_{z1} = 0, \text{ no nodo 1} \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{K_{11}L^2}{2EI} + \frac{K_{21}L}{EI} \quad (G6)$$

$$\sum (Forças)_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = K_{11} + K_{31} \quad (G7)$$

$$\sum (momentos)_{nodo2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = K_{21} + K_{41} - K_{11}L \quad (G8)$$

Procedendo de maneira análoga pode-se determinar as demais colunas da matriz K . O resultado deste processo é uma matriz que tem a seguinte representação:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (G9)$$

