



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Maycon César Calixto Assis

Análise da ação da transformação de Möbius em sequências de polinômios que satisfazem relações de recorrência de três termos

Presidente Prudente
2023

Maycon César Calixto Assis

Análise da ação da transformação de Möbius em sequências de polinômios que satisfazem relações de recorrência de três termos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

A848a Assis, Maycon Cesar Calixto

 Análise da ação da transformação de Möbius em sequências de polinômios que satisfazem relações de recorrência de três termos / Maycon Cesar Calixto Assis. -- Presidente Prudente, 2023
 120 p.

 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
 Orientadora: Vanessa Avansini Botta Pirani

 1. Relação de recorrência de três termos. 2. Ortogonalidade matricial. 3. Transformação de Möbius. 4. Zeros de polinômios. 5. Polinômios T-Möbius. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Análise da ação da transformação de Möbius em sequências de polinômios que satisfazem relações de recorrência de três termos

AUTOR: MAYCON CÉSAR CALIXTO ASSIS

ORIENTADORA: VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:



Profa. Dra. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI (Participação Presencial)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Prof. Dr. ALAGACONE SRI RANGA (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas de São José do Rio Preto



Prof. Dr. JOSÉ ROBERTO NOGUEIRA (Participação Presencial)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Presidente Prudente, 06 de março de 2023

*Dedico a todos cujo nome possui uma linha
vermelha nos softwares de edição de texto.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, pelo apoio incondicional.

Agradeço às amizades cultivadas até o presente momento. Citar nominalmente cada qual seria uma tarefa exaustiva, afinal fui feliz em contar com tantas pessoas especiais durante esses anos, mas aqui deixo um singelo obrigado a todos esses que, de alguma forma, se fizeram presentes em minha vida.

À minha orientadora, Professora Dra. Vanessa Botta, pelo incentivo, companheirismo, pela disponibilidade e por, diversas vezes durante os anos, ter sido minha terapeuta. Como uma lembrança vívida me recordo do nervosismo sentido ao te perguntar sobre orientação no início da graduação, logo após uma apresentação sofrível sobre pneum. Desde então trabalhamos juntos e sua orientação não poderia ter sido melhor.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Ah, nós, homens e mulheres, somos cordas retesadas sofrendo puxões de diferentes direções. As lágrimas vêm, então; como a chuva caindo nas cordas, elas nos ajudam a ter força, até que a tensão se torne demasiada e nós rompamos. O riso soberano chega como a luz do sol, porém, relaxando outra vez essa tensão, e nós conseguimos prosseguir em nossa luta, seja ela qual for.”

Bram Stoker

RESUMO

Nesta dissertação analisamos a ação da transformação de Möbius em sequências de polinômios que satisfazem relações de recorrência de três termos. Esta aborda brevemente a teoria dos polinômios ortogonais na reta real, no círculo unitário, os polinômios L-ortogonais e os para-ortogonais, bem como propriedades das transformações de Möbius.

Palavras-Chave: *Relação de recorrência de três termos, Ortogonalidade polinomial, Transformação de Möbius, Zeros de polinômios, Polinômios T-Möbius.*

ABSTRACT

In this dissertation we analyze the action of the Möbius transformation on polynomial sequences that satisfy three-term recurrence relations. It briefly discusses the theory of orthogonal polynomials on the real line, on the unit circle, the L-orthogonal and the para-orthogonal polynomials, as well as properties of the Möbius transformations.

Keywords: *Three-term recurrence relation, Polynomial orthogonality, Möbius transformation, Zeros of polynomials, T-Möbius polynomials.*

LISTA DE FIGURAS

3.1.1	Polinômios de Jacobi de graus 1, 2, 3 e 4 com $\alpha = 2$ e $\beta = 1$	47
3.1.2	Polinômios de Jacobi de grau 3 para $\alpha = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ e $\beta = 1$	47
3.1.3	Polinômios de Jacobi de grau 3 para $\alpha = 1$ e $\beta = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$	48
3.1.4	Polinômios de Legendre de graus 1, 2, 3, 4 e 5.	49
3.1.5	Polinômios de Gegenbauer de graus 1, 2, 3, 4 e 5 com $\lambda = 1$	50
3.1.6	Polinômios de Gegenbauer de grau 5 para $\lambda = 0.5, 1, 1.5, 2$ e 2.5	51
3.1.7	Polinômios de Gegenbauer de graus 1 a 5 para $\lambda = 0.5$	51
3.1.8	Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie de graus 1, 2, 3, 4 e 5.	54
3.1.9	Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie de graus 1, 2, 3, 4 e 5.	56
3.1.10	Polinômios de Laguerre de graus 1 a 5 com $\alpha = 2$	58
3.1.11	Polinômios de Laguerre de grau 5 e com $\alpha = 0, 1, 2, 3$ e 4	59
3.1.12	Polinômios de Hermite de graus 1 a 5.	60
5.2.1	Zeros dos polinômios $\tilde{Q}_6$ e $\tilde{Q}_5$, em vermelho e azul respectivamente. Gerados por $f(z) = \frac{z+2}{z-2}$, $\alpha_m = 1$ e $\beta_m = -1$, $m = 1, 2, \dots, n$	112
5.2.2	Representação dos zeros de $Q_4(z)$ e $Q_3(z)$, em vermelho e azul, respectivamente. Obtidos a partir de $\alpha_{n-1} = 1$ e $\beta_n = -2$, $n = 1, 2, \dots, 4$	114
5.2.3	Representação dos zeros de Q_5 e Q_4 , em vermelho e azul respectivamente, obtidos por $\beta_n = \eta = 2$ e $\alpha_{n-1} = 3$, $n = 1, 2, \dots, 5$	116

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS E POLINÔMIOS T-MÖBIUS	21
2.1	Transformações de Möbius	21
2.2	Polinômios T-Möbius	24
3	POLINÔMIOS ORTOGONAIS	27
3.1	Polinômios ortogonais na reta real	27
3.1.1	Propriedades dos polinômios ortogonais	29
3.1.2	Zeros de polinômios ortogonais	39
3.1.3	Polinômios ortogonais simétricos	40
3.1.4	Polinômios ortogonais clássicos	42
3.2	Polinômios ortogonais no círculo unitário	61
3.2.1	Polinômios inversíveis	64
4	POLINÔMIOS T-MÖBIUS ORTOGONAIS	71
4.1	Propriedades dos polinômios T-Möbius ortogonais	71
4.2	Propriedades dos zeros	76
4.3	Polinômios T-Möbius ortogonais clássicos	76
4.3.1	Polinômios T-Möbius relativos aos polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite e suas relações	83
5	APLICAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO DE MÖBIUS EM OUTRAS CLASSES POLINOMIAIS	87
5.1	Classes polinomiais	87
5.1.1	Polinômios L-ortogonais na reta real	87
5.1.2	Polinômios para-ortogonais	98
5.1.3	Caso geral	108
5.2	Aplicando Möbius	110
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	117
	REFERÊNCIAS	119

Introdução

A presente dissertação, intitulada “Análise da ação da transformação de Möbius em sequências de polinômios que satisfazem relações de recorrência de três termos”, apresenta, como o próprio nome sugere, uma análise das propriedades obtidas ao aplicarmos a transformação de Möbius em sequências polinomiais geradas a partir de uma fórmula de recorrência de três termos.

Integrante de uma área clássica da Análise com grande importância na Matemática, o estudo de propriedades de polinômios algébricos se destaca por sua vasta aplicabilidade e, por vezes, sua complexidade. Tal tema desperta a atenção e curiosidade humana desde o início das civilizações e, mesmo na atualidade, é uma área que apresenta uma inesgotável fonte de pesquisa e inúmeros problemas em aberto.

Inicialmente neste trabalho definimos as transformações de Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $\Delta = ad - bc \neq 0$, onde apresentamos propriedades algébricas e geométricas de tais funções racionais. Em seguida, aplicamos tais transformações em sequências polinomiais, gerando assim nosso principal objeto de estudo neste trabalho, os polinômios T-Möbius.

Além do mais, dentre as classes de polinômios algébricos de destaque neste trabalho temos os polinômios ortogonais, que possuem resultados bem difundidos acerca de seus zeros, sendo estes reais, simples e pertencentes a um intervalo de ortogonalidade. Convém destacar que uma sequência de polinômios ortogonais na reta real, denotada por $\{P_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, satisfaz uma relação de recorrência de três termos da forma

$$P_n(t) = (\gamma_n t - \beta_n)P_{n-1}(t) - \alpha_n P_{n-2}(t), \quad n \geq 1,$$

com $P_{-1}(t) = 0$ e $P_0(t) = 1$, cujos coeficientes γ_n , β_n e α_n são números reais, com $\gamma_n > 0$ e $\alpha_n > 0$ para cada $n \geq 1$. Ainda, dado os polinômios definidos pela relação de recorrência de três termos citada anteriormente, é possível encontrar uma medida positiva $\omega(t)$ com relação à qual esses polinômios são ortogonais, como veremos em capítulo posterior.

Entretanto, há outras classes de polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos do tipo

$$P_{n+1}(z) = (z + \beta_{n+1})P_n(z) - \alpha_{n+1}zP_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

com $P_0(z) = 1$ e $P_1(z) = z + \beta_1$, onde os números complexos $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$, são não nulos. Observe que na relação de recorrência dada acima, o termo z acompanha $P_{n-1}(z)$, fator este que torna as relações de recorrência apresentadas distintas. Dentre as sequências de polinômios que satisfazem a segunda relação, destacam-se os polinômios que satisfazem

certos tipos de ortogonalidade, tanto na reta real quanto no círculo unitário, como é o caso dos polinômios L-ortogonais e os polinômios para-ortogonais.

Ainda, contido no corpo textual do presente trabalho, disponibilizamos uma análise dos polinômios T-Möbius ortogonais, gerados ao aplicarmos as transformações de Möbius em sequências de polinômios ortogonais na reta real, e os polinômios T-Möbius ortogonais clássicos, obtidos de forma similar porém com sequências classificadas como clássicas.

Por fim, a presente dissertação finaliza a exposição dos estudos desenvolvidos com um capítulo generalizando resultados para os zeros dos polinômios T-Möbius gerados a partir de sequências de polinômios obtidos pela segunda fórmula de recorrência de três termos anteriormente apresentada.

Transformações de Möbius e polinômios T-Möbius

Neste capítulo apresentamos um estudo relacionado às principais propriedades da transformação de Möbius, além de uma análise sobre a ação desta transformação sobre polinômios complexos. Tal estudo teve como base os textos [8, 24].

2.1 Transformações de Möbius

Nesta seção apresentamos um estudo relacionado às principais propriedades das transformações de Möbius.

Definidas como uma classe especial de funções complexas de variável complexa, as chamadas transformações de Möbius possuem notáveis propriedades geométricas, algébricas e aritméticas. Algumas dessas são apresentadas a seguir.

Definição 2.1.1. *Uma transformação de Möbius é uma função racional da forma*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

sendo $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Temos como exemplos de transformações de Möbius as seguintes funções, denominadas transformações elementares no plano complexo:

- a) A translação, dada por $T_\beta(z) = z + \beta$, com $\beta \in \mathbb{C}$;
- b) A multiplicação por escalar complexo não nulo $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dada por $H_\alpha(z) = \alpha z$;
- c) A inversão, dada por $J(z) = \frac{1}{z}$.

A condição $\Delta \neq 0$ na definição acima garante que o domínio $D(f)$ de f é um conjunto não vazio, pois $D(f) = \emptyset$ se, e somente se, $cz + d = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Equivalentemente, $c = d = 0$ e então $\Delta = 0$. Por outro lado, sejam z_1 e z_2 elementos de $D(f)$. Observe que $f(z_1) = f(z_2)$ se, e somente se, $(ad - bc)z_1 = (ad - bc)z_2$, o que implica em f injetiva em seu domínio quando $ad - bc \neq 0$. Em particular, f não é constante.

Consideremos dois casos para a análise da imagem de f :

1. Se $c = 0$, $f(z) = \frac{az+b}{d}$, com $a \neq 0$ e $d \neq 0$. Observe que $D(f) = \mathbb{C}$ e f é sobrejetiva.

2. Se $c \neq 0$, $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ e f é sobrejetiva.

Por outro lado, a equação $f(z) = \gamma$, quando $z \in \mathbb{C}$, é equivalente a $(a - \gamma c)z = \gamma d - b$, que só não admite solução quando $\gamma = \frac{a}{c}$. Portanto, o conjunto imagem de f é $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.

Quando compomos transformações de Möbius, há pontos do plano complexo que são problemáticos por não estarem no domínio ou na imagem de algumas delas. Para evitar tais problemas, consideremos o plano complexo estendido, denotado por $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, e por vezes referido como a esfera de Riemann.

Se $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $\Delta \neq 0$ e $c \neq 0$, podemos então definir a transformação de Möbius em $\hat{\mathbb{C}}$ considerando $f(-\frac{d}{c}) = \infty$. O ponto $x = \frac{a}{c}$, que não era imagem de nenhum ponto de $\mathbb{C}$ por f , será considerado como $f(\infty)$, isto é, $f(\infty) = x$. Assim, f passa a ser uma bijeção de $\hat{\mathbb{C}}$ em $\hat{\mathbb{C}}$.

Se $c = 0$, temos que f é uma bijeção de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$. Assim, definindo $f(\infty) = \infty$, temos também que f é uma bijeção de $\hat{\mathbb{C}}$ em $\hat{\mathbb{C}}$.

Desta forma, uma transformação de Möbius será a bijeção $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida por

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ com } \Delta = ad - bc \neq 0, \quad (2.1.1)$$

onde

$$\begin{cases} f(\infty) = \frac{a}{c} \text{ e } f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, & \text{se } c \neq 0, \\ f(\infty) = \infty, & \text{se } c = 0. \end{cases}$$

Para as transformações elementares citadas anteriormente, temos:

- a) para a translação $T_\beta(z) = z + \beta : T_\beta(\infty) = \infty$;
- b) para a multiplicação por $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : H_\alpha(\infty) = \infty$;
- c) para a inversão $J(z) = \frac{1}{z} : J(0) = \infty$ e $J(\infty) = 0$.

Agora é possível compor transformações de Möbius sem nos preocuparmos com os pontos excepcionais, ou seja, com os pontos onde não estavam anteriormente definidas. De fato, vale o seguinte resultado.

Teorema 2.1.1. *Toda transformação de Möbius é obtida por composição de translações, multiplicação por números complexos e a inversão.*

Demonstração. Quando $c = 0$, considerando $f(z) = \alpha z + \beta$, onde $\alpha = \frac{a}{d}$ e $\beta = \frac{b}{d}$, temos $f = T_\beta \circ H_\alpha$.

Se $c \neq 0$, observe que

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}\left(z + \frac{d}{c}\right) - \frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}.$$

Portanto, considerando $\alpha = -\frac{ad-bc}{c^2}$, $\gamma = \frac{d}{c}$ e $\beta = \frac{a}{c}$, segue que $f = T_\beta \circ H_\alpha \circ J \circ T_\gamma$. ■

Como toda transformação de Möbius é composição de transformações elementares, que são transformações inversíveis, segue o resultado abaixo.

Corolário 2.1.1. *Toda transformação de Möbius é inversível.*

Ainda, do Teorema 2.1.1 e sabendo que toda transformação elementar transforma círculos em círculos, em $\hat{\mathbb{C}}$, segue o resultado abaixo.

Proposição 2.1.1. *Toda transformação de Möbius transforma círculos em círculos em $\hat{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.1 toda transformação de Möbius é obtida por composição de transformações elementares, e como essas transformações possuem esta propriedade, o resultado segue. ■

Através de cálculos simples segue que a inversa da transformação de Möbius é dada por

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}, \text{ com } \Delta = ad - bc \neq 0,$$

onde

$$\begin{cases} f^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty \text{ e } f^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}, & \text{se } c \neq 0, \\ f^{-1}(\infty) = \infty, & \text{se } c = 0. \end{cases}$$

Dizemos que um elemento $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ é um ponto fixo da transformação de Möbius f se, e somente se, $f(z_0) = z_0$. De imediato segue que todos os pontos de $\hat{\mathbb{C}}$ são pontos fixos da transformação identidade em $\hat{\mathbb{C}}$.

Proposição 2.1.2. *Uma transformação de Möbius distinta da identidade tem um ou dois pontos fixos em $\hat{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. Para determinar os pontos fixos da transformação $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $\Delta = ad - bc \neq 0$, temos que resolver a equação $\frac{az+b}{cz+d} = z$.

Se $c = 0$, como $f(\infty) = \infty$, segue que ∞ é ponto fixo de f . Além disso, qualquer outro ponto fixo deve satisfazer a equação $(a - d)z = -b$, que em $\mathbb{C}$:

1. tem infinitas soluções se $a = d$ e $b = 0$; neste caso, segue que $f = I_d$, onde I_d representa a transformação identidade;
2. não tem solução quando $a = d$ e $b \neq 0$;
3. tem uma única solução $z = \frac{b}{d-a}$ quando $a \neq d$.

Se $c \neq 0$, os pontos fixos de f devem satisfazer a equação $cz^2 + (d - a)z - b = 0$, que tem uma ou duas raízes em $\mathbb{C}$. ■

Corolário 2.1.2. *Uma transformação de Möbius com mais de dois pontos fixos é a identidade.*

Corolário 2.1.3. *Duas transformações de Möbius que possuem o mesmo valor em três pontos distintos em $\hat{\mathbb{C}}$ são iguais.*

Demonstração. Sejam z_1, z_2 e z_3 três pontos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$ e sejam f e g duas transformações de Möbius tais que $f(z_i) = g(z_i)$, $i = 1, 2, 3$. Logo,

$$(g^{-1} \circ f)(z_i) = g^{-1}(f(z_i)) = z_i,$$

o que implica que a transformação de Möbius $g^{-1} \circ f$ tem três pontos fixos. Pelo Corolário 2.1.2, temos $g^{-1} \circ f = I_d$ e, portanto, $f = g$. ■

Desta forma, dadas duas ternas de pontos distintos z_1, z_2, z_3 e k_1, k_2, k_3 , se existir uma transformação de Möbius f tal que $f(z_i) = k_i$, $i = 1, 2, 3$, ela é única. O próximo resultado mostra que tal transformação existe. Assim, uma transformação de Möbius fica completamente determinada pela ação de três pontos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$.

Teorema 2.1.2. *Dados dois pares de ternas de pontos distintos z_1, z_2, z_3 e k_1, k_2, k_3 de $\hat{\mathbb{C}}$, existe uma única transformação de Möbius f tal que $f(z_i) = k_i$, $i = 1, 2, 3$.*

Demonstração. Já vimos que se f existe, ela é única. Basta mostrarmos a existência de f . Considerando as transformações de Möbius g e h , da forma

$$g(z) = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)} \quad \text{e} \quad h(z) = \frac{(k_2 - k_3)(z - k_1)}{(k_2 - k_1)(z - k_3)},$$

logo $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = 1$, $g(z_3) = \infty$ e $h(k_1) = 0$, $h(k_2) = 1$, $h(k_3) = \infty$. Assim, a transformação de Möbius $f = h^{-1} \circ g$ é tal que $f(z_i) = (h^{-1} \circ g)(z_i) = h^{-1}(g(z_i)) = k_i$, $i = 1, 2, 3$. ■

2.2 Polinômios T-Möbius

Analisemos agora alguns resultados sobre a transformação de Möbius aplicada a polinômios, de modo geral. Seja $P_n(z)$ um polinômio complexo de grau n . Aplicando a transformação de Möbius $f(z)$ em $P_n(z)$, obtemos uma função denominada neste trabalho como função racional T-Möbius

$$R_n(z) = P_n(f(z)). \quad (2.2.1)$$

Então, multiplicando $R_n(z)$ por $(cz + d)^n$, um novo polinômio é obtido

$$Q_n(z) = (cz + d)^n R_n(z) = (cz + d)^n P_n(f(z)), \quad (2.2.2)$$

este, por sua vez, denominamos como polinômio T-Möbius relacionado a $P_n(z)$. Desta forma,

$$R_n(z) = \frac{Q_n(z)}{(cz + d)^n} \quad (2.2.3)$$

e o polinômio originário pode ser obtido através de $R_n(z)$ e $Q_n(z)$, pela relação

$$P_n(z) = R_n(f^{-1}(z)) = \frac{Q_n(f^{-1}(z))}{(cf^{-1}(z) + d)^n} = \frac{(-1)^n}{\Delta^n} (cz - a)^n Q_n(f^{-1}(z)). \quad (2.2.4)$$

As relações dadas acima também serão válidas quando estivermos trabalhando com polinômios de variáveis reais.

Ainda, os polinômios T-Möbius, como definidos anteriormente, nem sempre terão grau igual ao do polinômio originário. Uma condição necessária e suficiente para que isto aconteça é apresentada no teorema a seguir.

Teorema 2.2.1. *Seja $P_n(z)$ um polinômio complexo de grau n . Então o polinômio T-Möbius $Q_n(z) = (cz + d)^n P_n(f(z))$ tem grau n se, e somente se, $c = 0$ ou, ainda, se $c \neq 0$ e $P_n(\frac{a}{c}) \neq 0$.*

Demonstração. Sejam $P_n(z) = p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n$, com $p_n \neq 0$, onde $p_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \dots, n$, e $Q_n(z)$ seu respectivo polinômio T-Möbius. Ressaltamos que Q_n terá grau n se, e somente se, seu coeficiente dominante for não nulo. Assim, se $c = 0$, temos $Q_n(z) = d^n P_n(f(z))$ e, de imediato, concluimos que o grau deste é igual a n .

Consideremos então $c \neq 0$. Assim, desenvolvendo $Q_n(z)$ e denotando por q_n seu coeficiente dominante, obtemos

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \sum_{i=0}^n p_i (cz + d)^{n-i} (az + b)^i \\ &= p_n (az + b)^n + p_{n-1} (az + b)^{n-1} (cz + d) + \cdots + p_1 (az + b) (cz + d)^{n-1} + p_0 (cz + d)^n \\ &= (p_n a^n + p_{n-1} a^{n-1} c + \cdots + p_1 a c^{n-1} + p_0 c^n) z^n + \cdots, \end{aligned}$$

ou seja,

$$q_n = \sum_{k=0}^n p_k a^k c^{n-k} = c^n \sum_{i=0}^n p_i \left(\frac{a}{c}\right)^i = c^n \left[p_0 + \cdots + p_n \left(\frac{a}{c}\right)^n \right] = c^n P_n\left(\frac{a}{c}\right).$$

Portanto, $q_n \neq 0$ se, e somente se, $P_n\left(\frac{a}{c}\right) \neq 0$. ■

Além do grau, também é possível relacionar os zeros de $Q_n(z)$ com os zeros do polinômio originário $P_n(z)$, através do seguinte resultado.

Teorema 2.2.2. *Sejam $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ os zeros de $P_n(z)$ e $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ os respectivos zeros do polinômio $Q_n(z) = (cz + d)^n P_n(f(z))$. Então, para cada zero ξ_k de $P_n(z)$, $\xi_k \neq \frac{a}{c}$, existe um zero ζ_k de $Q_n(z)$ tal que $\zeta_k = f^{-1}(\xi_k)$.*

Demonstração. Para qualquer zero ξ_k de $P_n(z)$, $k = 1, 2, \dots, n$, com $\xi_k \neq \frac{a}{c}$, temos de (2.2.4) que

$$\begin{aligned} P_n(\xi_k) &= \frac{(-1)^n}{\Delta^n} (c\xi_k - a)^n Q_n(f^{-1}(\xi_k)) = 0 \iff Q_n(f^{-1}(\xi_k)) = 0 \\ &\iff f^{-1}(\xi_k) = \zeta_k. \end{aligned}$$

Logo, ζ_k são os zeros de $Q_n(z)$ sempre que $\xi_k \neq \frac{a}{c}$. ■

A partir de tal resultado podemos concluir que o polinômio T-Möbius $Q_n(z)$ tem grau $(n - m)$ sempre que o polinômio originário $P_n(z)$, de grau n , possuir um zero de multiplicidade m no ponto $z = \frac{a}{c}$. Isso, é claro, decorre do cancelamento dos m polos gerados pela aplicação $f\left(\frac{a}{c}\right) = \infty$ com os m zeros correspondentes dos fatores $(c\xi - a)$, gerados pela ação da transformação de Möbius sobre $P_n(z)$.

Polinômios ortogonais

Com uma aplicação ampla nos campos da Matemática Pura e Aplicada, os polinômios ortogonais são ferramentas essenciais para a solução de muitos problemas e vêm contribuindo nos estudos relacionados à frações contínuas e estabilidade numérica, entre outros.

As aplicações de tais polinômios associados às medidas clássicas, como as de Jacobi, Laguerre e Hermite, têm, particularmente, papel fundamental em alguns dos problemas das ciências e das engenharias. Bem como os polinômios ortogonais no círculo unitário, também referenciados como polinômios de Szegő em homenagem a G. Szegő.

Neste capítulo apresentamos um estudo relacionado às definições e propriedades dos polinômios ortogonais, tanto na reta real quanto no círculo unitário. Tal estudo teve como base os textos [1, 6, 18].

3.1 Polinômios ortogonais na reta real

Definição 3.1.1. *Seja $\phi(t)$ uma função real, não decrescente, definida em (l, r) . Um ponto $\xi \in (l, r)$ é chamado de ponto de aumento de ϕ se $\phi(\xi + \epsilon) - \phi(\xi - \epsilon) > 0$, para todo $\epsilon > 0$.*

Definição 3.1.2. *Sejam (l, r) um intervalo real, $-\infty \leq l < r \leq \infty$, e $\phi(t)$ uma função real limitada, não decrescente e com infinitos pontos de aumento em (l, r) . Se os momentos definidos por*

$$\mu_s = \int_l^r t^s d\phi(t)$$

existem para $s = 0, 1, 2, \dots$, então $d\phi(t)$ é chamada distribuição (medida positiva) em (l, r) .

Se

$$\mu_s = \int_l^r t^s d\phi(t)$$

existem para $s = 0, 1, \dots$, então dizemos que ϕ é uma distribuição forte em (l, r) .

O número infinito de pontos de aumento na Definição (3.1.1) garante

$$\int_l^r (g(\tau))^2 d\phi(\tau) > 0$$

para qualquer função contínua e não identicamente nula em (l, r) . Ainda, seja $d\phi$ uma medida positiva. Se $d\phi(t) = w(t)dt$, então $w(t) \geq 0$ em (l, r) , mas não identicamente nula, e é denominada função peso. Nesta seção consideraremos apenas o caso $d\phi(t) = w(t)dt$ daqui por diante e o produto escalar definido em $C[l, r]$ por:

$$\langle f, g \rangle = \int_l^r f(t)g(t)w(t)dt. \quad (3.1.1)$$

Definição 3.1.3. (Sequência de Polinômios Ortogonais). *Dada a sequência de polinômios $\{P_n(t)\}_{n=0}^\infty$, dizemos que esta é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso $w(t)$ no intervalo (l, r) se*

$$\begin{aligned} (i) \quad & P_n(t) \text{ é de grau exatamente } n, \quad n \geq 0; \\ (ii) \quad & \langle P_n, P_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } n = m. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Notemos que, neste caso, $\rho_n > 0$, pois $P_n^2(t)w(t) \geq 0$ em (l, r) . E temos que (ii) também pode ser expresso por

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_l^r P_n(t)P_m(t)w(t)dt = \delta_{nm}\rho_n, \quad (3.1.3)$$

onde δ_{nm} denota o delta de Kronecker, sendo

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = m, \\ 0, & \text{se } n \neq m. \end{cases}$$

Definição 3.1.4. (Sequência de Polinômios Ortonormais). *Dada uma sequência de polinômios ortogonais, dizemos que esta é uma sequência de polinômios ortonormais, denotada por $\{P_n^*(t)\}_{n=0}^\infty$, se $\rho_n = 1$.*

Vamos denotar os polinômios ortogonais de grau n , $P_n(t)$, por

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n a_{n,i}t^i, \quad a_{n,n} \neq 0.$$

Uma maneira de se construir uma sequência de polinômios ortogonais com relação ao produto interno (3.1.1) é através do Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt. Para isso, podemos tomar uma base $b_k(t) = t^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, e calcular $P_k(t)$, da seguinte forma:

$$P_0(t) = b_0(t) = t^0 = 1$$

e, para $k = 1, 2, 3, \dots$,

$$P_k(t) = t^k + \alpha_{k,0}P_0(t) + \alpha_{k,1}P_1(t) + \dots + \alpha_{k,k-1}P_{k-1}(t),$$

onde

$$\alpha_{k,i} = -\frac{\langle t^k, P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Podemos tomar outras bases $\{b_k(t)\}$ desde que cada polinômio $b_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, seja de grau exatamente k .

3.1.1 Propriedades dos polinômios ortogonais

Nesta seção veremos propriedades gerais dos polinômios ortogonais.

Teorema 3.1.1. *Se $P_0(t), P_1(t), \dots, P_m(t)$ pertencem a uma sequência de polinômios ortogonais, então eles são linearmente independentes.*

Demonstração. Sejam a_j , $j = 0, 1, \dots, m$, constantes reais tais que $\sum_{j=0}^m a_j P_j(t) = 0$.

Então, para cada polinômio $P_k(t)$, $0 \leq k \leq m$, obtemos

$$\left\langle \sum_{j=0}^m a_j P_j(t), P_k \right\rangle = \langle 0, P_k \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{j=0}^m a_j \langle P_j, P_k \rangle = 0. \quad (3.1.4)$$

Por definição, $\langle P_j, P_k \rangle = 0$ para $j \neq k$ e $\langle P_k, P_k \rangle \geq 0$. Então, por (3.1.4),

$$0 = \sum_{j=0}^m a_j \langle P_j, P_k \rangle = a_k \langle P_k, P_k \rangle.$$

Portanto, $a_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m$. ■

Teorema 3.1.2. *Sejam $\{P_n(t)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios e $w(t)$ uma função peso no intervalo (l, r) . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\{P_n(t)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso $w(t)$ em (l, r) , ou seja, $\langle P_m, P_n \rangle = \delta_{mn} \rho_n$, onde $\rho_n \neq 0$.
- (ii) $\langle P_n, \pi \rangle = 0$, $\forall \pi(t) \in \mathbb{P}_{n-1}$, $n \geq 1$.
- (iii) $\langle t^m, P_n \rangle = \int_l^r t^m P_n(t) w(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq m \leq n-1, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$

Demonstração. $(i) \implies (ii)$

Seja $\pi(t)$ um polinômio de grau menor ou igual a $n-1$. Por definição, temos

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_l^r P_n(t) P_m(t) w(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Como $\{P_n(t)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais, pelo Teorema 3.1.1, $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ formam uma base para $\mathbb{P}_{n-1}$.

1. Assim, para $\pi(t) \in \mathbb{P}_{n-1}$, podemos escrever $\pi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(t)$. Como, pelo item

(i), $\langle P_n, P_k \rangle = 0$ para $k \neq n$, então

$$\langle P_n, \pi \rangle = \left\langle P_n, \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(t) \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \langle P_n, P_k \rangle = 0.$$

2. Suponhamos, agora, $\pi(t)$ polinômio de grau exatamente n .

Então, podemos escrever $\pi(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(t)$, onde $\alpha_n \neq 0$. Pelo item (i),

$\langle P_n, P_k \rangle = 0$, $k \neq n$. Assim,

$$\langle P_n, \pi \rangle = \left\langle P_n, \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(t) \right\rangle = \sum_{k=0}^n \alpha_k \langle P_n, P_k \rangle = \alpha_n \langle P_n, P_n \rangle = \alpha_n \rho_n \neq 0.$$

(ii) $\implies$ (iii)

1. Por hipótese $\langle P_n, \pi \rangle = 0$, $\forall \pi(t)$ de grau menor ou igual a $n-1$. Assim, $\langle P_n, t^m \rangle = 0$ se $m < n$.

2. Consideremos, agora, $m = n$. Então, $\pi(t) = t^n \in \mathbb{P}_n$. Logo,

$$t^n = \sum_{j=0}^n \alpha_j P_j(t), \quad \alpha_n \neq 0,$$

e, como $\langle P_n, P_j \rangle = 0$, $j < n$,

$$\langle P_n, t^m \rangle = \sum_{j=0}^n \alpha_j \langle P_n, P_j \rangle \stackrel{(ii)}{=} \alpha_n \langle P_n, P_n \rangle \neq 0.$$

(iii) $\implies$ (i)

1. Consideremos $m < n$ e $P_m(t) = \sum_{k=0}^m a_{m,k} t^k$, $a_{m,m} \neq 0$. Então, como $m < n$,

$$\langle P_m, P_n \rangle = \sum_{k=0}^m a_{m,k} \langle t^k, P_n \rangle \stackrel{(iii)}{=} 0.$$

Considerando $m > n$ teremos um processo análogo.

2. Se $m = n$, então

$$\langle P_n, P_n \rangle = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \langle t^k, P_n \rangle \stackrel{(iii)}{=} a_{n,n} \langle t^n, P_n \rangle = a_{n,n} \tilde{\rho}_n \neq 0.$$

■

Corolário 3.1.1. *Sejam $\{S_n(t)\}_{n=0}^\infty$ e $\{P_n(t)\}_{n=0}^\infty$ duas sequências de polinômios ortogonais, no intervalo (l, r) com relação à função peso $w(t)$. Então,*

$$S_j(t) = c_j P_j(t), \quad j = 0, 1, \dots,$$

onde c_j é uma constante que depende apenas de j .

Demonstração. Seja $S_j(t) \in \{S_n(t)\}_{n=0}^\infty$. Como $P_0(t), P_1(t), \dots, P_j(t)$ formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a j , podemos escrever $S_j(t)$ como uma combinação linear desses polinômios. Assim,

$$S_j(t) = \sum_{i=0}^j c_i P_i(t), \quad c_j \neq 0.$$

Mas $\langle S_j, \pi \rangle = 0$, para todo polinômio $\pi(t)$ de grau menor ou igual a $j-1$. Logo,

$$\langle S_j, P_0 \rangle = \langle S_j, P_1 \rangle = \dots = \langle S_j, P_{j-1} \rangle = 0.$$

Portanto, para $k = 0, 1, \dots, j-1$,

$$0 = \langle S_j, P_k \rangle = \sum_{i=0}^j c_i \langle P_i, P_k \rangle = c_k \langle P_k, P_k \rangle,$$

pois $\langle P_i, P_k \rangle = 0$ para $i \neq k$.

Como $\langle P_k, P_k \rangle > 0$, então $c_k = 0$, $k = 0, \dots, j-1$. Portanto,

$$S_j(t) = c_j P_j(t).$$

■

Podemos obter os respectivos valores de c_j fazendo

$$\langle S_j, P_j \rangle = \sum_{i=0}^j c_i \langle P_i, P_j \rangle = c_j \langle P_j, P_j \rangle \implies c_j = \frac{\langle S_j, P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle}.$$

É visível que, a menos de um fator, a sequência de polinômios ortogonais com relação a um determinado produto interno, se existir, é única. Precisaremos do conceito de determinante de Hankel para mostrarmos que tal sequência sempre existe.

Definição 3.1.5. (Determinantes de Hankel). *Dada uma sequência de números reais $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$, definimos determinante de Hankel de ordem $n+1$ por*

$$H_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (3.1.5)$$

Para uma sequência de números reais $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^\infty$, definimos determinantes generalizados de Hankel de ordem $n+1$ por

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \dots & \mu_{m+n} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \dots & \mu_{m+n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n} & \mu_{m+n+1} & \dots & \mu_{m+2n} \end{vmatrix}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \quad (3.1.6)$$

sendo $H_{-1}^{(m)} = 0$ e $H_0^{(m)} = 1$. Observe que $H_n^{(0)} = H_n$ e μ_s são os momentos definidos na Definição 3.1.2.

Teorema 3.1.3. *Se os momentos μ_s , $s = 0, 1, \dots, 2n$, existem, o determinante de Hankel H_n , definido em (3.1.5), é diferente de zero.*

Demonstração. Tomemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} \mu_0 a_{n,0} + \mu_1 a_{n,1} + \dots + \mu_n a_{n,n} = 0 \\ \mu_1 a_{n,0} + \mu_2 a_{n,1} + \dots + \mu_{n+1} a_{n,n} = 0 \\ \vdots \\ \mu_n a_{n,0} + \mu_{n+1} a_{n,1} + \dots + \mu_{2n} a_{n,n} = 0 \end{cases},$$

que na forma matricial $H_n A = 0$ é escrito como

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que o determinante da matriz dos coeficientes é H_n . Mostremos que a única solução do sistema linear acima é $a_{n,0} = a_{n,1} = \dots = a_{n,n} = 0$. Dessa forma temos $H_n \neq 0$.

Substituindo os momentos no sistema linear pela sua definição, obtemos

$$\begin{cases} a_{n,0} \int_l^r t^0 w(t) dt + \dots + a_{n,n} \int_l^r t^n w(t) dt = 0 \\ a_{n,0} \int_l^r t^1 w(t) dt + \dots + a_{n,n} \int_l^r t^{n+1} w(t) dt = 0 \\ \vdots \\ a_{n,0} \int_l^r t^n w(t) dt + \dots + a_{n,n} \int_l^r t^{2n} w(t) dt = 0 \end{cases}.$$

Multiplicando, respectivamente, por $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}$ as equações do sistema e somando-as, temos

$$\begin{aligned} & a_{n,0}^2 \int_l^r w(t) dt + a_{n,1}^2 \int_l^r t^2 w(t) dt + \dots + a_{n,n}^2 \int_l^r t^{2n} w(t) dt + \\ & + 2a_{n,0}a_{n,1} \int_l^r t w(t) dt + \dots + 2a_{n,0}a_{n,n} \int_l^r t^n w(t) dt + \\ & + 2a_{n,1}a_{n,n} \int_l^r t^{n+1} w(t) dt + \dots = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_l^r (a_{n,0} + a_{n,1}t + \dots + a_{n,n}t^n)^2 w(t) dt = 0.$$

Se $S_n(t) = \sum_{i=0}^n a_{n,i}t^i$, então

$$\int_l^r [S_n(t)]^2 w(t) dt = \langle S_n(t), S_n(t) \rangle = 0 \iff S_n(t) \equiv 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

isto é, $a_{n,0} = a_{n,1} = \dots = a_{n,n} = 0$. ■

Demonstraremos agora a existência de uma sequência de polinômios ortogonais.

Teorema 3.1.4. *Os determinantes de Hankel H_n são diferentes de zero para $n = 0, 1, 2, \dots$, se, e somente se, existe uma única sequência de polinômios ortogonais no intervalo (l, r) relativamente à função peso $w(t)$.*

Demonstração. Seja $P_n(t) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} t^k$, $a_{n,n} \neq 0$. Se $P_n(t)$ pertence a alguma sequência de polinômios ortogonais, pelo Teorema 3.1.2,

$$\langle t^m, P_n \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \langle t^m, P_n \rangle &= \int_l^r t^m (a_{n,n} t^n + a_{n,n-1} t^{n-1} + \cdots + a_{n,1} t + a_{n,0}) w(t) dt \\ &= a_{n,n} \int_l^r t^{m+n} w(t) dt + a_{n,n-1} \int_l^r t^{m+n-1} w(t) dt + \cdots \\ &\quad + a_{n,1} \int_l^r t^{m+1} w(t) dt + a_{n,0} \int_l^r t^m w(t) dt \\ &= a_{n,n} \mu_{m+n} + a_{n,n-1} \mu_{m+n-1} + \cdots + a_{n,1} \mu_{m+1} + a_{n,0} \mu_m. \end{aligned}$$

Logo, fazendo $m = 0, 1, 2, \dots, n$, obtemos, respectivamente,

$$\begin{cases} a_{n,n} \mu_n + \cdots + a_{n,1} \mu_1 + a_{n,0} \mu_0 = 0 \\ a_{n,n} \mu_{n+1} + \cdots + a_{n,1} \mu_2 + a_{n,0} \mu_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{n,n} \mu_{2n} + \cdots + a_{n,1} \mu_{n+1} + a_{n,0} \mu_n = \tilde{\rho}_n \neq 0 \end{cases}.$$

Na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \tilde{\rho}_n \neq 0 \end{pmatrix}.$$

($\Rightarrow$) Supondo que os determinantes de Hankel são diferentes de zero, a solução do sistema acima é única e, assim, existe uma única sequência de polinômios ortogonais onde $\langle t^n, P_n \rangle = \tilde{\rho}_n$. Além disso, $a_{n,n} \neq 0$, pois, pela Regra de Crammer, $a_{n,n} = \frac{\tilde{\rho}_n H_{n-1}}{H_n}$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, supondo que existe uma única sequência de polinômios ortogonais, então existem únicos $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}$, com $a_{n,n} \neq 0$, que satisfazem o sistema linear acima. Portanto, os determinantes de Hankel de ordem $n+1$, $n > 0$, são diferentes de zero. ■

Os polinômios ortogonais possuem a propriedade de satisfazerem uma relação de recorrência de três termos, o que facilita a sua geração. Muitas outras propriedades são também satisfeitas por consequência dessa relação.

Teorema 3.1.5. (Relação de Recorrência de Três Termos). *Consideremos $\{P_n(t)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais em (l, r) relativamente à função peso $w(t)$. Então,*

$$P_{n+1}(t) = (\gamma_{n+1} t - \beta_{n+1}) P_n(t) - \alpha_{n+1} P_{n-1}(t), \quad n \geq 0, \quad (3.1.7)$$

com $P_0(t) = 1$, $P_{-1}(t) = 0$, $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1} \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, e

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, & \beta_{n+1} &= \gamma_{n+1} \frac{\langle t P_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \\ \alpha_{n+1} &= \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Demonstração. Como $tP_n(t)$ é um polinômio de grau $n+1$, podemos escrever

$$tP_n(t) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(t).$$

Igualando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade acima, temos

$$a_{n,n} = b_{n+1}a_{n+1,n+1} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Porém, das relações de ortogonalidade, vem

$$\langle tP_n, P_j \rangle = \int_l^r P_n(t)tP_j(t)w(t)dt = 0 \quad \text{para } j \leq n-2.$$

Assim,

$$\langle tP_n, P_j \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_j \rangle = b_j \langle P_j, P_j \rangle = 0 \quad \text{para } j \leq n-2.$$

Logo, $b_j = 0$ se $j \leq n-2$. Portanto,

$$tP_n(t) = b_{n+1}P_{n+1}(t) + b_nP_n(t) + b_{n-1}P_{n-1}(t),$$

que pode ser escrito como

$$P_{n+1}(t) = \frac{1}{b_{n+1}}tP_n(t) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(t) - \frac{b_n}{b_{n+1}}P_n(t),$$

ou seja,

$$P_{n+1}(t) = (\gamma_{n+1}t - \beta_{n+1})P_n(t) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(t),$$

com

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \quad \beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}.$$

Agora, calculemos os valores de γ_{n+1} , α_{n+1} e β_{n+1} . Como $b_{n+1} = a_{n,n}/a_{n+1,n+1}$, temos $\gamma_{n+1} = a_{n+1,n+1}/a_{n,n}$. De

$$P_{n+1}(t) = (\gamma_{n+1}t - \beta_{n+1})P_n(t) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(t),$$

obtemos

$$0 = \langle P_{n+1}, P_n \rangle = \gamma_{n+1} \langle tP_n, P_n \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_n \rangle.$$

Daí,

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle tP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

Analogamente,

$$0 = \langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = \gamma_{n+1} \langle tP_n, P_{n-1} \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_{n-1} \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle.$$

Logo,

$$\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle tP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Mas, como $P_n(t) = (\gamma_n t - \beta_n)P_{n-1}(t) - \alpha_n P_{n-2}(t)$, obtemos

$$tP_{n-1}(t) = \frac{1}{\gamma_n} P_n(t) + \frac{\beta_n}{\gamma_n} P_{n-1}(t) + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} P_{n-2}(t).$$

Porém,

$$\langle tP_n, P_{n-1} \rangle = \int_l^r P_n(t) t P_{n-1}(t) w(t) dt = \langle P_n, tP_{n-1} \rangle,$$

e, então,

$$\langle P_n, tP_{n-1} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-1} \rangle + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-2} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle.$$

Portanto,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

■

Dizemos que uma família de polinômios está em sua forma mônica quando seus coeficientes que acompanham o termo de maior grau são iguais a 1 ($a_{n,n} = 1$, $n = 0, 1, \dots$). Considerando $\{P_n(t) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} t^k\}_{n=0}^\infty$ a sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso $w(t)$, podemos construir a sequência de polinômios ortogonais mônicos, denotados por $\{\hat{P}_n(t)\}_{n=0}^\infty$, com relação a $w(t)$, dividindo cada P_n pelo correspondente coeficiente do termo de maior grau, ou seja,

$$\hat{P}_n(t) = \frac{P_n(t)}{a_{n,n}}, \quad n \geq 1. \quad (3.1.9)$$

E sua relação de recorrência de três termos é obtida dividindo a relação (3.1.7) por $a_{n+1,n+1}$, obtendo

$$\frac{P_{n+1}(t)}{a_{n+1,n+1}} = (\gamma_{n+1}t - \beta_{n+1}) \frac{P_n(t)}{a_{n+1,n+1}} - \alpha_{n+1} \frac{P_{n-1}(t)}{a_{n+1,n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Assim, para $n \geq 0$,

$$\hat{P}_{n+1}(t) = (\gamma_{n+1}t - \beta_{n+1}) \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} \hat{P}_n(t) - \alpha_{n+1} \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n+1,n+1}} \hat{P}_{n-1}(t).$$

Como $\frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} = \frac{1}{\gamma_{n+1}}$, então, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \hat{P}_{n+1}(t) &= \left(t - \frac{\beta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}\right) \hat{P}_n(t) - \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma_n \gamma_{n+1}} \hat{P}_{n-1}(t) \\ &= \left(t - \hat{\beta}_{n+1}\right) \hat{P}_n(t) - \hat{\alpha}_{n+1} \hat{P}_{n-1}(t), \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

em que

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{n+1} &= \frac{\beta_{n+1}}{\gamma_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1}} \frac{\langle tP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \\ &= \frac{\langle ta_{n,n}\hat{P}_n, a_{n,n}\hat{P}_n \rangle}{\langle a_{n,n}\hat{P}_n, a_{n,n}\hat{P}_n \rangle} = \frac{\langle t\hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}, \\ \hat{\alpha}_{n+1} &= \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma_n\gamma_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{1}{\gamma_n\gamma_{n+1}} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \\ &= \frac{1}{\gamma_n^2} \frac{\langle a_{n,n}\hat{P}_n, a_{n,n}\hat{P}_n \rangle}{\langle a_{n-1,n-1}\hat{P}_{n-1}, a_{n-1,n-1}\hat{P}_{n-1} \rangle} \\ &= \frac{a_{n-1,n-1}^2}{a_{n,n}^2} \frac{a_{n,n}^2}{a_{n-1,n-1}^2} \frac{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \rangle} = \frac{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \rangle}.\end{aligned}$$

A relação (3.1.10) pode também ser escrita como

$$t\hat{P}_n(t) = \hat{\alpha}_{n+1}\hat{P}_{n-1}(t) + \hat{\beta}_{n+1}\hat{P}_n(t) + \hat{P}_{n+1}(t).$$

A recíproca desse resultado também é verdadeira e é conhecida na literatura como Teorema de Favard.

Teorema 3.1.6. (Teorema de Favard). *Sejam $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ seqüências de números reais arbitrários, com $\alpha_n > 0$ para $n \geq 0$ e seja $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios definida pela fórmula de recorrência*

$$S_n(t) = (t - \beta_n)S_{n-1}(t) - \alpha_n S_{n-2}(t), \quad n \geq 1,$$

com $S_{-1}(t) = 0$ e $S_0(t) = 1$. Então, existe uma medida positiva ϕ tal que

$$\int_l^r d\phi(t) = \alpha_1 \quad e \quad \int_l^r S_m(t)S_n(x)d\phi(t) = 0, \quad \text{para } m \neq n.$$

ϕ é quase-definida e $\{S_n\}$ é a correspondente seqüência de polinômios ortogonais mônicos se, e somente se, $\alpha_n \neq 0$, enquanto que ϕ é definida positiva se, e somente se, os coeficientes β_n são reais e $\alpha_n > 0$ para $n \geq 1$.

Demonstraremos a seguir uma importante identidade consequência da relação de recorrência de três termos.

Teorema 3.1.7. (Identidade de Christoffel-Darboux). *Seja $\{\hat{P}_n(t)\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios ortogonais na forma mônica. Então,*

$$\sum_{k=0}^n \frac{\hat{P}_k(t)\hat{P}_k(s)}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\cdots\hat{\alpha}_{k+1}} = \frac{\hat{P}_{n+1}(t)\hat{P}_n(s) - \hat{P}_n(t)\hat{P}_{n+1}(s)}{(\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\cdots\hat{\alpha}_{n+1})(t-s)}. \quad (3.1.11)$$

Demonstração. Pela relação (3.1.10) temos, para $m \geq 0$, as seguintes identidades:

$$t\hat{P}_m(t)\hat{P}_m(s) = \hat{P}_{m+1}(t)\hat{P}_m(s) + \hat{\beta}_{m+1}\hat{P}_m(t)\hat{P}_m(s) + \hat{\alpha}_{m+1}\hat{P}_{m-1}(t)\hat{P}_m(s),$$

$$s\hat{P}_m(s)\hat{P}_m(t) = \hat{P}_{m+1}(s)\hat{P}_m(t) + \hat{\beta}_{m+1}\hat{P}_m(s)\hat{P}_m(t) + \hat{\alpha}_{m+1}\hat{P}_{m-1}(s)\hat{P}_m(t).$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$(t-s)\hat{P}_m(t)\hat{P}_m(s) = \hat{P}_{m+1}(t)\hat{P}_m(s) - \hat{P}_{m+1}(s)\hat{P}_m(t) \\ - \hat{\alpha}_{m+1}[\hat{P}_m(t)\hat{P}_{m-1}(s) - \hat{P}_m(s)\hat{P}_{m-1}(t)].$$

Agora, se denotarmos o lado direito de (3.1.11) por $F_n(t, s)$ e dividirmos a última equação por $(\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\ldots\hat{\alpha}_{m+1})(t-s)$, obtemos

$$\frac{\hat{P}_m(t)\hat{P}_m(s)}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\ldots\hat{\alpha}_{m+1}} = F_m(t, s) - F_{m-1}(t, s), \quad m \geq 0.$$

Por fim, somando-se a última expressão com m variando de 0 até n (e observando que $F_{-1}(t, s) = 0$), obtemos o resultado desejado. ■

Podemos, além da sequência de polinômios ortogonais mônicos, utilizar a sequência de polinômios ortonormais $\{P_n^*(t)\}_{n=0}^\infty$. Sequência essa que é obtida a partir dos polinômios ortogonais P_n , dividindo-se cada P_n por sua respectiva norma. Logo,

$$P_n^*(t) = \frac{P_n(t)}{\|P_n(t)\|}, \quad n \geq 1,$$

onde $\|P_n(t)\| = \sqrt{\langle P_n, P_n \rangle}$.

Teorema 3.1.8. (Identidade de Christoffel-Darboux). *Seja $\{P_n^*(t)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortonormais. Então, eles satisfazem à seguinte identidade*

$$\sum_{k=0}^n P_k^*(t)P_k^*(u) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \frac{P_{n+1}^*(t)P_n^*(u) - P_n^*(t)P_{n+1}^*(u)}{t-u}. \quad (3.1.12)$$

Demonstração. A partir da fórmula de recorrência de três termos enunciada em (3.1.7), temos que

$$P_{n+1}^*(t)P_n^*(u) - P_n^*(t)P_{n+1}^*(u) = [(\gamma_{n+1}^*t - \beta_{n+1}^*)P_n^*(t) - \alpha_{n+1}^*P_{n-1}^*(t)]P_n^*(u) \\ - P_n^*(t)[(\gamma_{n+1}^*u - \beta_{n+1}^*)P_n^*(u) - \alpha_{n+1}^*P_{n-1}^*(u)] \\ = (t-u)\gamma_{n+1}^*P_n^*(t)P_n^*(u) + \alpha_{n+1}^*(P_{n+1}^*(t)P_n^*(u) - P_n^*(t)P_{n+1}^*(u)).$$

Mas,

$$\alpha_{n+1}^* = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*} \frac{\langle P_n^*, P_n^* \rangle}{\langle P_{n-1}^*, P_{n-1}^* \rangle} = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*}.$$

Assim,

$$P_{n+1}^*(t)P_n^*(u) - P_n^*(t)P_{n+1}^*(u) = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*} \{P_n^*(t)P_{n-1}^*(u) - P_{n-1}^*(t)P_n^*(u)\} \\ + (t-u)\gamma_{n+1}^*P_n^*(t)P_n^*(u). \quad (3.1.13)$$

Analogamente,

$$P_n^*(t)P_{n-1}^*(u) - P_{n-1}^*(t)P_n^*(u) = \frac{\gamma_n^*}{\gamma_{n-1}^*} \{P_{n-1}^*(t)P_{n-2}^*(u) - P_{n-2}^*(t)P_{n-1}^*(u)\} \\ + (t-u)\gamma_n^*P_{n-1}^*(t)P_{n-1}^*(u). \quad (3.1.14)$$

Substituindo (3.1.14) em (3.1.13), obtemos

$$\begin{aligned} P_{n+1}^*(t)P_n^*(u) - P_n^*(t)P_{n+1}^*(u) &= \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*} \left\{ \frac{\gamma_n^*}{\gamma_{n-1}^*} [P_{n-1}^*(t)P_{n-2}^*(u) - P_{n-2}^*(t)P_{n-1}^*(u)] \right. \\ &\quad \left. + (t-u)\gamma_n^* P_{n-1}^*(t)P_{n-1}^*(u) \right\} + (t-u)\gamma_{n+1}^* P_n^*(t)P_n^*(u) \\ &= \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_{n-1}^*} [P_{n-1}^*(t)P_{n-2}^*(u) - P_{n-2}^*(t)P_{n-1}^*(u)] \\ &\quad + \gamma_{n+1}^*(t-u) [P_{n-1}^*(t)P_{n-1}^*(u) + P_n^*(t)P_n^*(u)]. \end{aligned}$$

Usando esse raciocínio n vezes, temos:

$$\begin{aligned} P_{n+1}^*(t)P_n^*(u) - P_n^*(t)P_{n+1}^*(u) &= \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_1^*} [P_1^*(t)P_0^*(u) - P_0^*(t)P_1^*(u) \\ &\quad + \gamma_1^*(t-u) \sum_{k=1}^n P_k^*(t)P_k^*(u)]. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Mas, $P_1^* = a_{1,1}^* + a_{1,0}^*$ e $P_0^* = a_{0,0}^*$. Então,

$$P_0^*(t)P_1^*(u) - P_1^*(t)P_0^*(u) = a_{0,0}^*a_{1,1}^*(t-u).$$

Substituindo em (3.1.15), obtemos

$$P_{n+1}^*(t)P_n^*(u) - P_n^*(t)P_{n+1}^*(u) = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_1^*} \left[a_{0,0}^*a_{1,1}^* + \gamma_1^* \sum_{k=1}^n P_k^*(t)P_k^*(u) \right] (t-u).$$

Como $\gamma_1^* = \frac{a_{1,1}^*}{a_{0,0}^*}$ e $P_0^*(t) = P_0^*(u) = a_{0,0}^*$, segue que

$$\begin{aligned} P_{n+1}^*(t)P_n^*(u) - P_n^*(t)P_{n+1}^*(u) &= \gamma_{n+1}^* \frac{a_{0,0}^*}{a_{1,1}^*} \left[a_{0,0}^*a_{1,1}^* + \frac{a_{0,0}^*}{a_{1,1}^*} \sum_{k=1}^n P_k^*(t)P_k^*(u) \right] (t-u) \\ &= \gamma_{n+1}^* \left[(a_{0,0}^*)^2 + P_0^*(t)P_0^*(u) - P_0^*(t)P_0^*(u) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n P_k^*(t)P_k^*(u) \right] (t-u) \\ &= \gamma_{n+1}^*(t-u) \left[(a_{0,0}^*)^2 - (a_{0,0}^*)^2 + \sum_{k=0}^n P_k^*(t)P_k^*(u) \right] \Rightarrow \\ \sum_{k=0}^n P_k^*(t)P_k^*(u) &= \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \frac{P_{n+1}^*(t)P_n^*(u) - P_n^*(t)P_{n+1}^*(u)}{(t-u)}. \end{aligned}$$

■

Se somarmos e subtrairmos $P_{n+1}^*(t)P_n^*(t)$ ao numerador da Identidade de Christoffel-Darboux (3.1.12), obtemos

$$\sum_{k=0}^n P_k^*(t)P_k^*(u) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \left\{ \frac{P_n^*(t)(P_{n+1}^*(t) - P_{n+1}^*(u)) - P_{n+1}^*(t)(P_n^*(t) - P_n^*(u))}{t-u} \right\}.$$

Fazendo $u \rightarrow t$ em ambos os membros da igualdade acima, chegamos à seguinte identidade, conhecida como Fórmula Confluente:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow t} \sum_{k=0}^n P_k^*(t) P_k^*(u) &= \sum_{k=0}^n P_k^*(t) \lim_{u \rightarrow t} P_k^*(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow t} \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \left\{ \frac{P_n^*(t)(P_{n+1}^*(t) - P_{n+1}^*(u))}{(t-u)} - \frac{P_{n+1}^*(t)(P_n^*(t) - P_n^*(u))}{(t-u)} \right\} \\ &= \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \left\{ P_n^*(t) \lim_{u \rightarrow t} \frac{(P_{n+1}^*(t) - P_{n+1}^*(u))}{(t-u)} - P_{n+1}^*(t) \lim_{u \rightarrow t} \frac{(P_n^*(t) - P_n^*(u))}{(t-u)} \right\}, \end{aligned}$$

e então,

$$\sum_{k=0}^n (P_k^*(t))^2 = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} [P_n^*(t)(P_{n+1}^*(t))' - P_{n+1}^*(t)(P_n^*(t))'] > 0, \quad (3.1.16)$$

que é válida para todo $t \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Zeros de polinômios ortogonais

Como primeira propriedade dos zeros de polinômios ortogonais, apresentaremos a seguir uma consequência da Fórmula Confluente.

Teorema 3.1.9. *Seja $\{P_j(t)\}_{j=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, dois polinômios consecutivos, $P_n(t)$ e $P_{n-1}(t)$, não têm zeros em comum.*

Demonstração. Sejam $t_{n,1} < t_{n,2} < \dots < t_{n,n}$ os zeros de $P_n(t)$ em ordem crescente. Substituindo esses zeros em (3.1.16) com $n-1$ no lugar de n , obtemos

$$P_n(t_{n-1,k})P_{n-1}'(t_{n-1,k}) < 0. \quad (3.1.17)$$

Portanto, $P_n(t_{n-1,k}) \neq 0$, $k = 1, \dots, n-1$. ■

Teorema 3.1.10. *Seja $P_n(t)$, $n \geq 1$, uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (l, r) com relação à função peso $w(t)$. Então, os zeros de $P_n(t)$ são reais, simples e pertencem ao intervalo (l, r) .*

Demonstração. Suponha que $P_n(t)$ não muda de sinal em (l, r) . Então ou $P_n(t) \geq 0$ (mas não identicamente nulo) em (l, r) , o que implica em $\int_l^r P_n(t)w(t)dt > 0$, ou $P_n(t) \leq 0$ (mas não identicamente nulo) em (l, r) , de onde segue que $\int_l^r P_n(t)w(t)dt < 0$. Mas, da relação de ortogonalidade, segue que

$$\int_l^r P_n(t)w(t)dt = \int_l^r 1 \cdot P_n(t)w(t)dt = 0.$$

Logo, temos um absurdo. Assim, $P_n(t)$ deve mudar de sinal em (l, r) pelo menos uma vez, logo existe pelo menos um zero real de $P_n(t)$ de multiplicidade ímpar em (l, r) .

Suponhamos que $t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,r}$ ($r < n$) são os zeros distintos de multiplicidade ímpar de $P_n(t)$ em (l, r) . Então,

$$P_n(t) = (t - t_{n,1})(t - t_{n,2}) \dots (t - t_{n,r})Q(t) = R(t)Q(t),$$

onde $R(t)$ é um polinômio de grau $r < n$ com zeros $t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,r}$ e $Q(t)$ é um polinômio de grau $(n - r)$ que tem somente zeros complexos ou zeros de multiplicidade par em (l, r) ou zeros fora de (l, r) . Logo, $Q(t)$ não muda de sinal em (l, r) .

Porém, como $r < n$, pela relação de ortogonalidade,

$$\int_l^r R(t)P_n(t)w(t)dt = 0. \quad (3.1.18)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_l^r R(t)P_n(t)w(t)dt &= \int_l^r R(t)R(t)Q(t)w(t)dt \\ &= \int_l^r R(t)^2Q(t)w(t)dt \neq 0. \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Por (3.1.18) e (3.1.19) temos um absurdo. Assim, $P_n(t)$ tem $r \geq n$ zeros de multiplicidade ímpar em (l, r) . Mas como $P_n(t)$ é um polinômio de grau n , então $r = n$. Sendo assim, $P_n(t)$ tem n zeros de multiplicidade ímpar em (l, r) , da seguinte forma:

$$P_n(t) = (t - t_{n,1})^{i_1}(t - t_{n,2})^{i_2} \cdots (t - t_{n,r})^{i_n}.$$

Como $i_1, i_2, \dots, i_n$ são índices positivos e ímpares e $i_1 + i_2 + \dots + i_n = n$, temos que $i_1 = i_2 = \dots = i_n = 1$. ■

Temos como consequência da desigualdade (3.1.17) também o fato dos zeros serem simples, uma vez que $P'(t_{n-1,k}) \neq 0$, $k = 1, \dots, n-1$.

A propriedade que veremos a seguir é também consequência da Fórmula Confluente.

Teorema 3.1.11. *Seja $\{P_j(t)\}_{j=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, entre dois zeros consecutivos de grau $n-1$, $P_{n-1}(t)$, existe somente um zero de $P_n(t)$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que os polinômios $P_j(t)$ sejam ortonormais com $a_{j,j} > 0$, $j = 0, 1, \dots$. Sejam $t_{n-1,1} < t_{n-1,2} < \dots < t_{n-1,n-1}$ os zeros de $P_{n-1}(t)$ em ordem crescente. Tomemos $t_{n-1,k}$ e $t_{n-1,k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n-2$, dois zeros consecutivos de $P_{n-1}(t)$. Substituindo esses zeros em (3.1.16) com n substituído por $n-1$, obtemos

$$P_n(t_{n-1,k})P'_{n-1}(t_{n-1,k}) < 0 \quad \text{e} \quad P_n(t_{n-1,k+1})P'_{n-1}(t_{n-1,k+1}) < 0.$$

Como $P'_{n-1}(t_{n-1,k})$ e $P'_{n-1}(t_{n-1,k+1})$ possuem sinais opostos, então $P_n(t_{n-1,k})$ e $P_n(t_{n-1,k+1})$ também possuem. Logo, existe pelo menos um ponto em $(t_{n-1,k}, t_{n-1,k+1})$ onde $P_n(t)$ muda de sinal. Portanto, existe pelo menos um zero de $P_n(t)$ entre $t_{n-1,k}$ e $t_{n-1,k+1}$. Dois zeros de $P_n(t)$ estão em $(a, t_{n-1,1})$ e $(t_{n-1,n-1}, b)$, respectivamente. Como $a_{j,j} > 0$, $j = 0, 1, \dots$, temos que $P_j(b) > 0$. Logo, $P'_{n-1}(t_{n-1,n-1}) > 0$. De (3.1.16), $P_n(t_{n-1,n-1}) < 0$. Portanto, $P_n(t)$ muda de sinal entre $x_{n-1,n-1}$ e b . De modo análogo mostramos que existe um zero de $P_n(t)$ entre a e $x_{n-1,1}$. Basta lembrar que $\text{sin}al[P_j(a)] = (-1)^j$. Como $P_n(t)$ tem n zeros, o resultado está demonstrado. ■

3.1.3 Polinômios ortogonais simétricos

Definição 3.1.6. *Uma função peso $w(t)$ definida em um intervalo da forma $[-l, l]$ é chamada par se $w(t) = w(-t)$.*

Teorema 3.1.12. *Se uma função peso $w(t)$ definida em $[-l, l]$ é par, então os momentos de ordem ímpar são nulos, ou seja, $\mu_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Além disso, se $\{P_n(t)\}_{n=0}^\infty$ é a sequência de polinômios ortogonais relativa a $w(t)$, então $P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$, $n \geq 0$.*

Demonstração. Temos que $w(t) = w(-t)$ e $\mu_{2n+1} = \int_{-l}^l t^{2n+1} w(t) dt$. Se fizermos $t = -u$, temos

$$\mu_{2n+1} = \int_{-l}^l t^{2n+1} w(t) dt = \int_b^{-b} (-u)^{2n+1} w(-u) d(-u) = - \int_{-l}^l u^{2n+1} w(u) du = -\mu_{2n+1}.$$

Logo $\mu_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Para a segunda parte do teorema, basta observar que

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \hat{P}_m(-t) \hat{P}_n(-t) w(t) dt &\stackrel{(t=-u)}{=} \int_l^{-l} \hat{P}_m(u) \hat{P}_n(u) w(-u) d(-u) \\ &\stackrel{(w \text{ par})}{=} \int_{-l}^l \hat{P}_m(u) \hat{P}_n(u) w(u) du \\ &= \int_{-l}^l \hat{P}_m(t) \hat{P}_n(t) w(t) dt. \end{aligned}$$

Pelo Corolário 3.1.1, $\hat{P}_n(-t) = c_n \hat{P}_n(t)$, onde c_n é uma constante. Assim, como

$$\hat{P}_n(t) = t^n + a_{n,n-1} t^{n-1} + \dots + a_{n,1} t + a_{n,0},$$

ao compararmos os coeficientes dos termos de maior grau de $\hat{P}_n(-t)$ e de $c_n \hat{P}_n(t)$, teremos que

$$c_n = (-1)^n.$$

Portanto, $\hat{P}_n(-t) = (-1)^n \hat{P}_n(t)$, $n \geq 0$. ■

Teorema 3.1.13. *Seja $\{P_n(t)\}$ uma sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso $w(t)$. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (i) $P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$, $n \geq 0$;
- (ii) Na fórmula de recorrência (3.1.7), $\beta_n = 0$, $n \geq 1$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, utilizaremos os polinômios ortogonais na forma mônica.

Usando a fórmula de recorrência (3.1.7) e sabendo que $\hat{P}_n(t)$ é mônico para todo n , temos, a partir de (3.1.10), que

$$\begin{aligned} \hat{P}_n(t) &= (t - \beta_n) \hat{P}_{n-1}(t) - \alpha_n \hat{P}_{n-2}(t) \Rightarrow \\ (-1)^n \hat{P}_n(-t) &= (-1)^n (-t - \beta_n) \hat{P}_{n-1}(-t) - (-1)^n \alpha_n \hat{P}_{n-2}(-t) \Rightarrow \\ (-1)^n \hat{P}_n(-t) &= (-1)^{n-1} (t + \beta_n) \hat{P}_{n-1}(-t) - (-1)^{n-2} \alpha_n \hat{P}_{n-2}(-t). \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

Seja $\hat{S}_n(t) = (-1)^n \hat{P}_n(-t)$. Então

$$\hat{S}_n(t) = (t + \beta_n) \hat{S}_{n-1}(t) - \alpha_n \hat{S}_{n-2}(t). \tag{3.1.21}$$

(i $\Rightarrow$ ii) Temos que $\hat{P}_n(t) = (-1)^n \hat{P}_n(-t)$, então $\hat{S}_n(t) = \hat{P}_n(t)$, $\forall n$. Substituindo (3.1.20) em (3.1.21) obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{S}_n(t) - \hat{P}_n(t) = (t + \beta_n) \hat{S}_{n-1}(t) - \alpha_n \hat{S}_{n-2}(t) - (t - \beta_n) \hat{P}_{n-1}(t) + \alpha_n \hat{P}_{n-2}(t) \\ &= t \hat{S}_{n-1}(t) + \beta_n \hat{S}_{n-1}(t) + \beta_n \hat{P}_{n-1}(t) - t \hat{P}_{n-1}(t) \\ &= 2\beta_n \hat{P}_{n-1}(t). \end{aligned}$$

De onde segue que $\beta_n = 0$, para todo $n \geq 1$.

(ii $\Rightarrow$ i) Temos que $\beta_n = 0$, $n \geq 1$. Seja $\hat{S}_n(t) = (-1)^n \hat{P}_n(-t)$, então por (3.1.21), temos

$$\hat{S}_n(t) = (t + \beta_n) \hat{S}_{n-1}(t) - \alpha_n \hat{S}_{n-2}(t).$$

Como $\beta_n = 0$, temos

$$\hat{S}_n(t) = t \hat{S}_{n-1}(t) - \alpha_n \hat{S}_{n-2}(t),$$

e, pela fórmula de recorrência (3.1.10), com $\beta_n = 0$,

$$\hat{P}_n(t) = t \hat{P}_{n-1}(t) - \alpha_n \hat{P}_{n-2}(t).$$

Temos que $\hat{S}_n(t)$ e $\hat{P}_n(t)$ satisfazem a mesma fórmula de recorrência e, além disso,

$$\hat{S}_{-1}(t) = \hat{P}_{-1}(t) \text{ e } \hat{S}_0(t) = \hat{P}_0(t).$$

Assim, $\hat{P}_n(t) = \hat{S}_n(t) = (-1)^n \hat{P}_n(-t)$, $n \geq 0$. ■

Então chegamos à conclusão de que se w for par e se $t_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, com $t_{n,1} < t_{n,2} < \dots < t_{n,n}$, forem os zeros de $P_n(t)$, então $t_{n,k} = -t_{n,n-k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n/2$, mas se n for ímpar teremos $t_{n,[n/2]+1} = 0$.

3.1.4 Polinômios ortogonais clássicos

Nesta seção são apresentados conceitos relacionados a alguns polinômios classificados como polinômios ortogonais clássicos, sendo estes os polinômios de Jacobi (e seus casos especiais de Legendre, de Gegenbauer, de Chebyshev de 1^a e 2^a espécies), de Laguerre e de Hermite. Neste estudo foram utilizados os textos [1, 6].

Definição 3.1.7. *Polinômios ortogonais com respeito ao produto interno (3.1.2) no intervalo (l, r) são chamados de polinômios ortogonais clássicos se a função peso $w(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial*

$$\frac{d}{dt}(M(t)w(t)) = N(t)w(t),$$

onde

$$M(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{se } (l, r) = (-1, 1) \\ t, & \text{se } (l, r) = (0, \infty) \\ 1, & \text{se } (l, r) = (-\infty, \infty) \end{cases}$$

e $N(t)$ é um polinômio de grau 1.

Ainda, é bem difundido o resultado que garante que qualquer sequência $P = \{P_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinômios ortogonais clássicos satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem da forma

$$p(t)P_n''(t) + g(t)P_n'(t) + h_n P_n(t) = 0. \quad (3.1.22)$$

Tais soluções polinomiais existem somente quando $p(t)$, $g(t)$ e $h_n(t)$ são polinômios de graus 2, 1 e 0, respectivamente, onde $h_n(t)$ pode ser diferente para cada n , [3, 4, 16].

Além disso, as únicas soluções polinomiais de (3.1.22) são as sequências dos polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, Laguerre e Hermite, além de outras poucas sequências de polinômios que, no entanto, não são ortogonais na reta real no sentido habitual.

A função peso $w(t)$ de qualquer polinômio ortogonal clássico também satisfaz uma equação diferencial. Neste caso, no entanto, temos a seguinte equação diferencial homogênea de primeira ordem

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{g(t) - p'(t)}{p(t)}, \quad (3.1.23)$$

onde $p(t)$ e $g(t)$ são os mesmos polinômios aparecendo em (3.1.22). De fato, a equação (3.1.23) é obtida como uma condição para a equação diferencial (3.1.22) ser escrita em sua forma auto-adjunta

$$\frac{d}{dt} \left[p(t) \frac{dy(t)}{dx} \right] + q_n(t)y(t) = 0. \quad (3.1.24)$$

Sabemos que qualquer equação diferencial de segunda ordem pode ser dada em sua forma auto-adjunta ao multiplicarmos esta por algum fator integrando $w(t)$. Desta forma, multiplicando (3.1.22) por $w(t)$ e comparando com (3.1.24), concluímos que $p(t) = w(t)p(t)$, $p'(t) = w(t)g(t)$ e $q_n(t) = w(t)h(t)$, então a relação $w(t)g(t) = [w(t)p(t)]'$ se verifica, da qual (3.1.23) segue imediatamente. Então, supondo que uma sequência polinomial $P = \{P_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz um problema de Sturm-Liouville bem definido cuja equação diferencial é como apresentado em (3.1.24), a teoria de Sturm-Liouville garante que tal sequência será de fato uma sequência de polinômios ortogonais cujas funções peso correspondem ao mesmo fator integrante $w(t)$ e o intervalo de ortogonalidade $I = (l, r) \in \mathbb{R}$ será determinado pelas condições

$$\lim_{t \rightarrow l} p(t)w(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow r} p(t)w(t) = 0,$$

ou seja, pela região em que a função $p(t)w(t)$ não muda seu sinal.

Sequências de polinômios ortogonais clássicos também podem ser obtidos por fórmulas de recorrência denominadas fórmulas de Rodrigues. De modo geral, se $P = \{P_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais clássicos, então os polinômios $P_n(t) \in P$ podem ser encontrados tomando as derivadas

$$P_n(t) = \frac{\epsilon_n}{w(t)} \frac{d^n}{dt^n} [p(t)^n w(t)], \quad (3.1.25)$$

onde ϵ_n são constantes padronizadas, $w(t)$ a função peso correspondente e $p(t)$ é o polinômio que aparece na equação diferencial (3.1.22).

Estes também podem ser obtidos a partir de funções geradoras, dadas da seguinte forma

$$\phi(t, s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) s^k \quad \text{ou} \quad \psi(t, s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \frac{s^k}{k!}. \quad (3.1.26)$$

Nas próximas seções apresentamos um estudo breve dos polinômios ortogonais clássicos. E no capítulo posterior propriedades similares as apresentadas anteriormente são encontradas na teoria dos polinômios T-Möbius.

3.1.4.1 Polinômios de Jacobi, Legendre, Gegenbauer e Chebyshev

Polinômios de Jacobi

O matemático Carl Gustav Jacob Jacobi¹ (10 de dezembro de 1804 - 18 de fevereiro de 1851), comumente chamado apenas de Jacobi, é o segundo dentre quatro irmãos alemães de filiação judaica e realizou contribuições fundamentais em alguns estudos, tais como funções elípticas e equações diferenciais.

Introduzidos por Jacobi e denotados por $J_n^{(\alpha, \beta)}(t)$, os polinômios de Jacobi podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues dada por

$$J_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \frac{d^n}{dt^n} [(1-t)^{\alpha+n} (1+t)^{\beta+n}],$$

e esses polinômios são ortogonais com relação à função peso $w(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, no intervalo $(-1, 1)$. E o coeficiente de maior grau dos polinômios de Jacobi é dado por

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! (n-k)!} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + k + 1)} \frac{\Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma(\beta + n - k + 1)}. \quad (3.1.27)$$

Proposição 3.1.1. *O coeficiente do termo de maior grau do polinômio de Jacobi $a_{n,n}$ também pode ser dado por*

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}.$$

Demonstração. Se α e β forem inteiros, então de (3.1.27) temos

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! (n-k)!} \frac{(\alpha + n)!}{(\alpha + k)!} \frac{(\beta + n)!}{(\beta + n - k)!} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha + n}{n-k} \binom{\beta + n}{k} \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{\alpha + \beta + 2n}{n} = \frac{1}{2^n} \frac{(\alpha + \beta + 2n)!}{n! (\alpha + \beta + n)!} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}. \end{aligned}$$

■

Utilizando o seguinte produto interno podemos mostrar o resultado a seguir.

$$\langle J_n^{(\alpha, \beta)}, J_m^{(\alpha, \beta)} \rangle = \int_{-1}^1 J_n^{(\alpha, \beta)}(t) J_m^{(\alpha, \beta)}(t) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt.$$

Teorema 3.1.14. *Os polinômios de Jacobi satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade*

$$\langle J_n^{(\alpha, \beta)}, J_m^{(\alpha, \beta)} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1) n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

¹Mais informações sobre o matemático Jacobi podem ser encontradas em [11].

Demonstração. Consideremos, sem perda de generalidade, $n \leq m$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle J_n^{(\alpha,\beta)}, J_m^{(\alpha,\beta)} \rangle &= \int_{-1}^1 J_n^{(\alpha,\beta)}(t) J_m^{(\alpha,\beta)}(t) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ J_n^{(\alpha,\beta)}(t) \frac{(-1)^m}{2^m m!} (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \right. \\ &\quad \times \frac{d^m}{dt^m} [(1-t)^{\alpha+m} (1+t)^{\beta+m}] (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt \Big\} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^m m!} \int_{-1}^1 J_n^{(\alpha,\beta)}(t) \frac{d^m}{dt^m} [(1-t)^{\alpha+m} (1+t)^{\beta+m}] dt. \end{aligned}$$

Fazendo $u_m(t) = (1-t)^{\alpha+m} (1+t)^{\beta+m}$ e integrando m vezes por partes, obtemos

$$\langle J_n^{(\alpha,\beta)}, J_m^{(\alpha,\beta)} \rangle = \frac{1}{2^m m!} \int_{-1}^1 \frac{d^m}{dt^m} (J_n^{(\alpha,\beta)}(t)) u_m(t) dt. \quad (3.1.28)$$

1. Seja $n < m$. Como $\frac{d^m}{dt^m} (J_n^{(\alpha,\beta)}(t)) = 0$, então, por (3.1.28),

$$\langle J_n^{(\alpha,\beta)}, J_m^{(\alpha,\beta)} \rangle = 0.$$

2. Seja $n = m$. Então, de (3.1.28),

$$\begin{aligned} \langle J_n^{(\alpha,\beta)}, J_n^{(\alpha,\beta)} \rangle &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dt^n} (J_n^{(\alpha,\beta)}(t)) u_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dt^n} (J_n^{(\alpha,\beta)}(t)) (1-t)^{\alpha+n} (1+t)^{\beta+n} dt. \end{aligned}$$

Mas $\frac{d^n}{dt^n} (J_n^{(\alpha,\beta)}(t)) = a_{n,n} n!$. Então,

$$\langle J_n^{(\alpha,\beta)}, J_n^{(\alpha,\beta)} \rangle = \frac{a_{n,n}}{2^n} \int_{-1}^1 (1-t)^{\alpha+n} (1+t)^{\beta+n} dt.$$

Fazendo $t = 2s - 1$ na integral anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \langle J_n^{(\alpha,\beta)}, J_n^{(\alpha,\beta)} \rangle &= \frac{a_{n,n}}{2^n} \int_0^1 (2-2s)^{\alpha+n} (2s)^{\beta+n} 2ds \\ &= \frac{2a_{n,n}}{2^n} \int_0^1 2^{\alpha+n} (1-s)^{\alpha+n} 2^{\beta+n} s^{\beta+n} ds \\ &= 2a_{n,n} \int_0^1 \frac{2^{\alpha+\beta+2n}}{2^n} (1-s)^{\alpha+n} s^{\beta+n} ds \\ &= 2^{\alpha+\beta+n+1} a_{n,n} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+n} s^{\beta+n} ds. \end{aligned}$$

Utilizando da função Beta, definida como $B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du$, temos que

$$\langle J_n^{(\alpha,\beta)}, J_n^{(\alpha,\beta)} \rangle = 2^{\alpha+\beta+n+1} a_{n,n} B(\beta+n+1, \alpha+n+1).$$

E, usufruindo da relação $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, que determina a função Beta em termos da função Gama, obtemos

$$\langle J_n^{(\alpha, \beta)}, J_n^{(\alpha, \beta)} \rangle = 2^{\alpha+\beta+n+1} a_{n,n} \frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

Por fim, substituindo nesta equação o termo de maior grau, temos:

$$\begin{aligned} \langle J_n^{(\alpha, \beta)}, J_n^{(\alpha, \beta)} \rangle &= \frac{2^{\alpha+\beta+n+1}}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)} \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+n+1}}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)} \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!} \frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \end{aligned}$$

■

A relação de recorrência de três termos para os Polinômios de Jacobi é dada da seguinte forma:

$$J_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(t) = (\gamma_{n+1}t - \beta_{n+1})J_n^{(\alpha, \beta)}(t) - \alpha_{n+1}J_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(t), \quad n \geq 0,$$

onde $J_0^{(\alpha, \beta)}(t) = 1$, $J_{-1}^{(\alpha, \beta)}(t) = 0$,

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \frac{1}{2(n+1)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+3)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}, \\ \beta_{n+1} &= \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)}, \end{aligned}$$

e

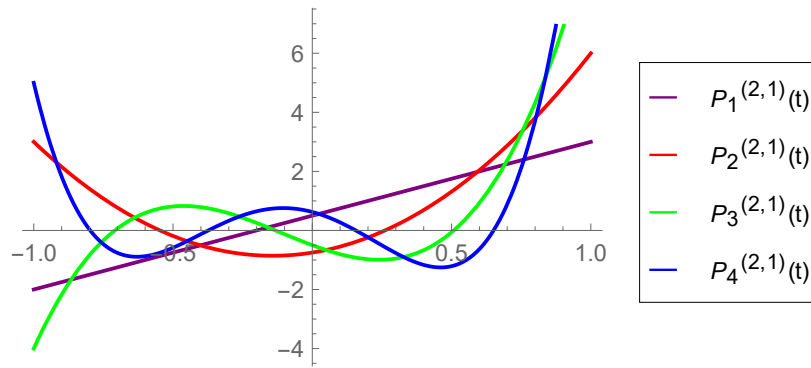
$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)}{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)}.$$

Mostraremos a seguir exemplos de polinômios de Jacobi.

a) Tomando $\alpha = 2$, $\beta = 1$ e calculando os polinômios de Jacobi de graus 1 a 4 temos

$$\begin{aligned} J_1^{(2,1)}(t) &= \frac{1}{2}(1+5t); \\ J_2^{(2,1)}(t) &= \frac{3}{4}(7t^2+2t-1); \\ J_3^{(2,1)}(t) &= \frac{1}{2}(21t^3+7t^2-7t-1); \\ J_4^{(2,1)}(t) &= \frac{5}{8}(33t^4+12t^3-18t^2-4t+1). \end{aligned}$$

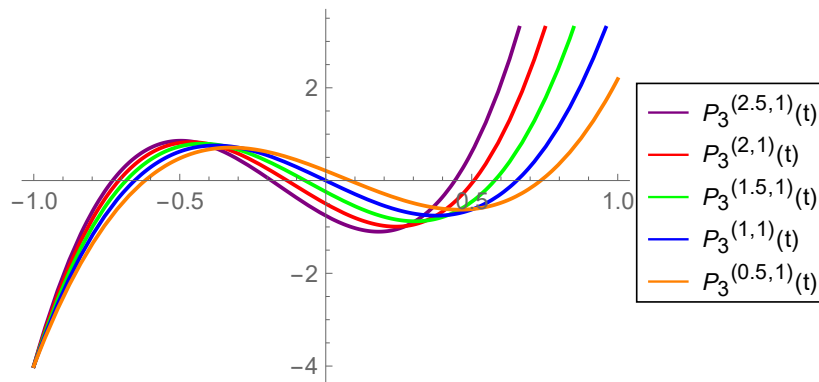
Representados graficamente pela Figura 3.1.1.

Figura 3.1.1 – Polinômios de Jacobi de graus 1, 2, 3 e 4 com $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos observar que os zeros de polinômios de graus consecutivos se entrelaçam, assim como provado no Teorema 3.1.11.

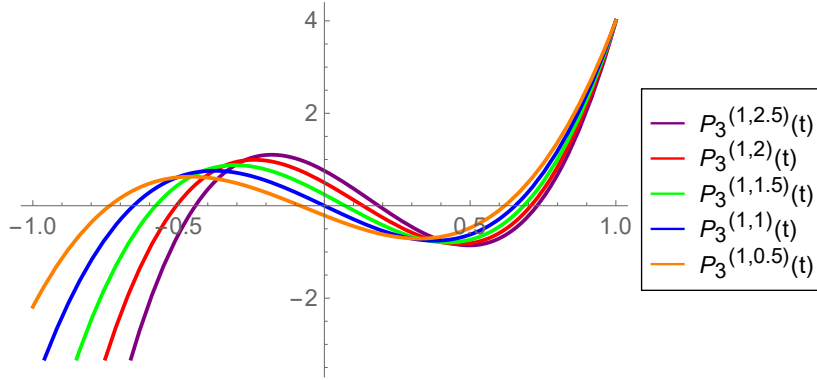
b) Sendo $J_3^{(\alpha,1)}(t)$ um polinômio de Jacobi de grau 3 com o valor de β fixo em 1 e o valor de α variando, seu gráfico será representado pela Figura 3.1.2.

Figura 3.1.2 – Polinômios de Jacobi de grau 3 para $\alpha = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ e $\beta = 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Notemos que à medida que o valor de α cresce, os zeros $t_{3,i}$ decrescem, para cada i , $i = 1, 2, 3$.

c) Sendo $J_3^{(\alpha,\beta)}(t)$ um polinômio de Jacobi de grau 3 com o valor de α fixo em 1 e o valor de β variando, seu gráfico será da seguinte forma:

Figura 3.1.3 – Polinômios de Jacobi de grau 3 para $\alpha = 1$ e $\beta = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Notemos que à medida que o valor de β cresce, para cada $i, i = 1, 2, 3$, o zero $t_{3,i}$ também cresce.

Polinômios de Legendre

O francês Adrien-Marie Legendre² (18 de setembro de 1752 - 10 de janeiro de 1833), foi um importante matemático do século XVII, porém a maior parte do seu trabalho foi aperfeiçoada por outros matemáticos. Ele é nomeador dos polinômios de Legendre, e estes são um caso especial dos polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 0$ e são denotados por $P_n(t)$.

Logo, temos que a função peso que o acompanha será dada por $w(t) = 1$. Assim, da fórmula de Rodrigues para os polinômios de Jacobi, temos

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(1-t)^n (1+t)^n] \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(-1)(1-t)(1+t)]^n \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \end{aligned}$$

Do coeficiente do termo de maior grau para os polinômios de Jacobi, obtemos

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n [n!]^2}. \end{aligned}$$

Sua relação de ortogonalidade é dada por

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

E, por fim, para obtermos a relação de recorrência de três termos, tomamos $\alpha = \beta = 0$ nos coeficientes $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ e γ_{n+1} dados na relação de recorrência de três termos dos polinômios de Jacobi. Assim,

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} = \frac{[2(n+1)]!}{2^{n+1} [(n+1)!]^2} \frac{2^n [n!]^2}{(2n)!} = \frac{2n+1}{n+1},$$

²Mais informações sobre o matemático Legendre podem ser encontradas em [10].

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} = \frac{2n+1}{n+1} \frac{n}{2n-1} \frac{2}{2n+1} \frac{2n-1}{2} = \frac{n}{n+1}$$

e

$$\beta_{n+1} = \frac{(0)(2n+1)}{2(n+1)(n+1)(2n)} = 0.$$

Portanto,

$$P_{n+1}(t) = \frac{2n+1}{n+1} t P_n(t) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(t), \quad n \geq 1, \quad (3.1.29)$$

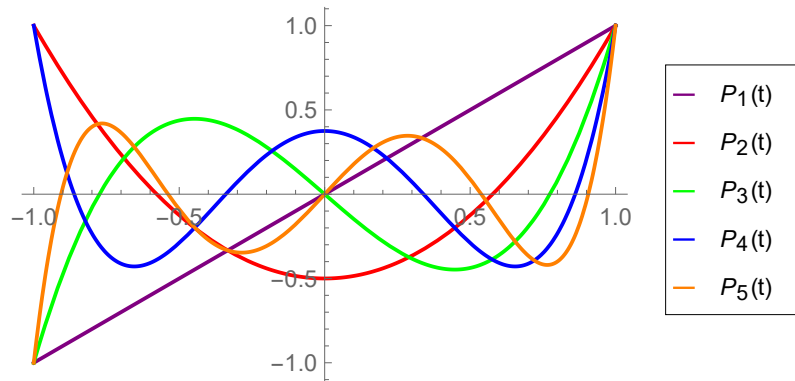
onde, pela fórmula de Rodrigues, $P_0(t) = 1$ e $P_1(t) = t$.

De (3.1.29) temos que os polinômios de Legendre com graus de 1 a 5 são dados por

$$\begin{aligned} P_1(t) &= t; \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1); \\ P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t); \\ P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3); \\ P_5(t) &= \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t). \end{aligned}$$

A figura a seguir representa graficamente tais polinômios, e é possível observar que seus zeros pertencem ao intervalo de ortogonalidade, são reais e possuem a propriedade de entrelaçamento conforme demonstrado no Teorema 3.1.11.

Figura 3.1.4 – Polinômios de Legendre de graus 1, 2, 3, 4 e 5.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Polinômios de Gegenbauer

Austríaco e famoso por ter sido um grande algebrista, Leopold Bernhard Gegenbauer³ (2 de fevereiro de 1849 - 3 de junho de 1903) é lembrado pelos polinômios de Gegenbauer, ou polinômios Ultraesféricos, uma classe de polinômios ortogonais que ele introduziu em sua tese de doutorado de 1875 - em particular provando sua fórmula de adição - e também estudou em vários trabalhos.

³Mais informações sobre o matemático Gegenbauer podem ser encontradas em [14].

Tais polinômios são um caso especial dos polinômios de Jacobi, com $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2} > -1$. Eles são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso $w(t) = (1 - t^2)^{\lambda-1/2}$, sendo sua notação usual dada por $G_n^\lambda(t)$ e caracterizado pela seguinte igualdade

$$G_n^{(\lambda)}(t) = \binom{2\alpha}{\alpha}^{-1} \binom{n+2\alpha}{\alpha} J_n^{(\alpha, \alpha)}(t),$$

onde $J_n^{(\alpha, \alpha)}(t)$ são polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta$.

Sabendo que

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}, \quad a \geq b,$$

podemos então reescrever os polinômios de Gegenbauer, com $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G_n^{(\lambda)}(t) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} J_n^{(\alpha, \alpha)}(t) \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})} J_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(t). \end{aligned}$$

Sua relação de recorrência de três termos é da forma

$$(n+1)G_{n+1}^{(\lambda)}(t) = 2(n+\lambda)tG_n^{(\lambda)}(t) - (n+2\lambda-1)G_{n-1}^{(\lambda)}(t), \quad n \geq 0,$$

sendo $G_{-1}^{(\lambda)}(t) = 0$ e $G_0^{(\lambda)}(t) = 1$.

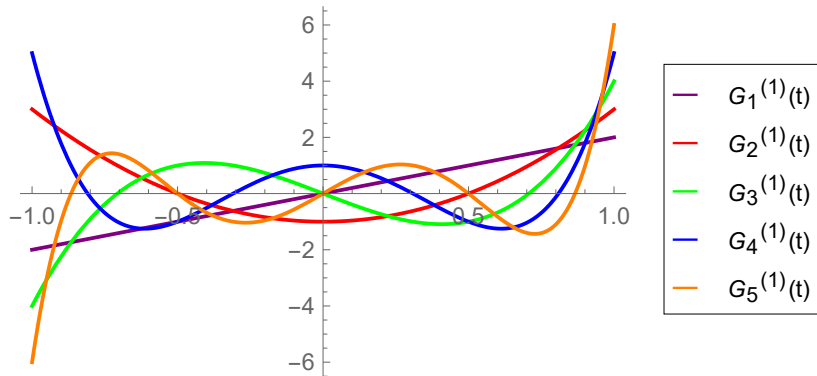
Mostraremos a seguir exemplos de polinômios de Gegenbauer.

a) Tomando $\lambda = 1$ e calculando os polinômios de Gegenbauer de graus 1 a 5 temos

$$\begin{aligned} G_1^{(1)}(t) &= 2t; \\ G_2^{(1)}(t) &= 4t^2 - 1; \\ G_3^{(1)}(t) &= 8t^3 - 4t; \\ G_4^{(1)}(t) &= 16t^4 - 12t^2 + 1; \\ G_5^{(1)}(t) &= 32t^5 - 32t^3 + 6t. \end{aligned}$$

Representados graficamente pela Figura 3.1.5.

Figura 3.1.5 – Polinômios de Gegenbauer de graus 1, 2, 3, 4 e 5 com $\lambda = 1$.

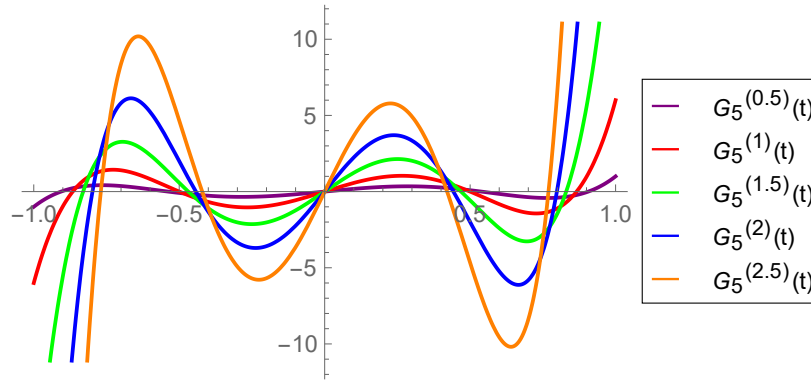


Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos notar que os zeros dos polinômios de graus consecutivos se entrelaçam, assim como provado no Teorema 3.1.11.

b) Sendo $G_5^{(\lambda)}(t)$ um polinômio de Gegenbauer de grau 5 com o parâmetro λ variando, sua representação gráfica é vista na Figura 3.1.6.

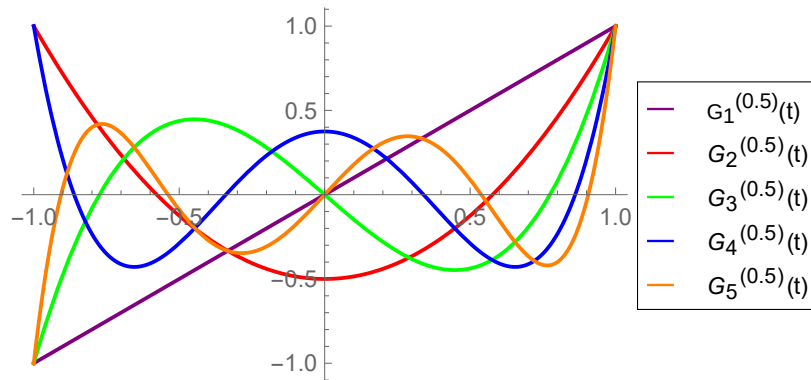
Figura 3.1.6 – Polinômios de Gegenbauer de grau 5 para $\lambda = 0.5, 1, 1.5, 2$ e 2.5 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

c) Sendo $G_n^{(1/2)}(t)$ um polinômio de Gegenbauer de graus 1 a 5 com o parâmetro $\lambda = \frac{1}{2}$ temos que $G_n^{(1/2)}(t) = J_n(t)$, onde $J_n(t)$ são os polinômios de Legendre. Portanto, os gráficos das Figuras 3.1.7 e 3.1.4 serão iguais.

Figura 3.1.7 – Polinômios de Gegenbauer de graus 1 a 5 para $\lambda = 0.5$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Polinômios de Chebyshev

De família de militares e sendo um entre nove filhos, Pafnuty Lvovich Chebyshev⁴ (16 de maio de 1821 - 8 de dezembro de 1894) foi um matemático russo responsável por notáveis descobertas no estudo do cálculo avançado e da matemática aplicada.

Chebyshev, em “*Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*” publicada em 1854, apresentou pela primeira vez os polinômios de título homônimo. E, após tal publicação, desenvolveu uma teoria geral de polinômios ortogonais, sendo o primeiro matemático a reconhecer tal conceito geral.

⁴Mais informações sobre o matemático Chebyshev podem ser encontradas em [15].

Os polinômios de Chebyshev possuem quatro classificações, primeira, segunda, terceira e quarta espécie, cada qual com suas particularidades. Porém, nesta dissertação, serão apresentados apenas os polinômios de primeira e os de segunda espécie.

Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie

Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie são denotados por $T_n(t)$, são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso $w(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ e são definidos por

$$T_n(t) = \cos(n \arccos(t)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Usando a seguinte relação trigonométrica $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$ e fazendo $t = \cos(\theta)$ na equação acima, obtemos a relação de recorrência de três termos

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) &= 2\cos(n\theta)\cos(\theta) \Rightarrow \\ \cos((n+1)\arccos(t)) + \cos((n-1)\arccos(t)) &= 2\cos(n\arccos(t))\cos(\arccos(t)) \Rightarrow \\ T_{n+1}(t) + T_{n-1}(t) &= 2T_n(t)t, \end{aligned}$$

ou seja,

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n \geq 1,$$

com $T_0(t) = 1$ e $T_1(t) = t$.

Calculando os primeiros polinômios, veremos como se comportam os coeficientes dos termos de maior grau. Assim,

$$\begin{aligned} T_0(t) &= \cos(0 \arccos(t)) = 1 \\ T_1(t) &= \cos(\arccos(t)) = t = 2^0 t \\ T_2(t) &= 2tT_1(t) - T_0(t) = 2t^2 - 1 \\ T_3(t) &= 2tT_2(t) - T_1(t) = 2t(2t^2 - 1) - t = 2^2 t^3 - 3t \\ &\vdots \\ T_n(t) &= 2^{n-1} t^n + \dots \quad (\text{por recorrência}). \end{aligned}$$

Portanto, $a_{n,n} = 2^{n-1}$, $n \geq 1$.

Teorema 3.1.15. *Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie satisfazem*

$$\langle T_n, T_m \rangle = \begin{cases} \pi, & \text{se } m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n > 0, \\ 0, & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle &= \int_{-1}^1 T_n(t)T_m(t)w(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 \cos(n \arccos(t)) \cos(m \arccos(t)) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $t = \cos(\theta)$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m \rangle &= - \int_{\pi}^0 \frac{\cos(n\theta) \cos(m\theta) \sin(\theta)}{\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta.\end{aligned}$$

a) Se $m = n = 0$,

$$\langle T_0, T_0 \rangle = \int_0^{\pi} \cos^2(0) d\theta = \pi.$$

b) Se $m = n > 0$,

$$\langle T_m, T_m \rangle = \int_0^{\pi} \cos^2(m\theta) d\theta.$$

Logo, integrando por partes, temos

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(n\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\theta) n \sin(n\theta)}{n} d\theta = \int_0^{\pi} [1 - \cos^2(n\theta)] d\theta,$$

ou seja,

$$\int_0^{\pi} \cos^2(n\theta) d\theta = \int_0^{\pi} d\theta - \int_0^{\pi} \cos^2(n\theta) d\theta.$$

Assim,

$$2 \int_0^{\pi} \cos^2(n\theta) d\theta = \int_0^{\pi} d\theta = \pi.$$

Portanto,

$$\langle T_m, T_m \rangle = \frac{\pi}{2}.$$

c) Seja $m \neq n$. Consideremos as seguintes identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos((m+n)\theta) &= \cos(m\theta) \cos(n\theta) - \sin(m\theta) \sin(n\theta); \\ \cos((m-n)\theta) &= \cos(m\theta) \cos(n\theta) + \sin(m\theta) \sin(n\theta).\end{aligned}$$

Somando e integrando os membros da equação resultante, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} [\cos((m+n)\theta) + \cos((m-n)\theta)] d\theta &= 2 \int_0^{\pi} \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta \\ &= 2 \langle T_n, T_m \rangle.\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}2 \langle T_n, T_m \rangle &= \int_0^{\pi} \cos((m+n)\theta) d\theta + \int_0^{\pi} \cos((m-n)\theta) d\theta \\ &= \left. \frac{\sin((m+n)\theta)}{m+n} \right|_0^{\pi} + \left. \frac{\sin((m-n)\theta)}{m-n} \right|_0^{\pi} \\ &= \frac{\sin((m+n)\pi)}{m+n} - \frac{\sin((m+n)0)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)\pi)}{m-n} - \frac{\sin((m-n)0)}{m-n} = 0.\end{aligned}$$

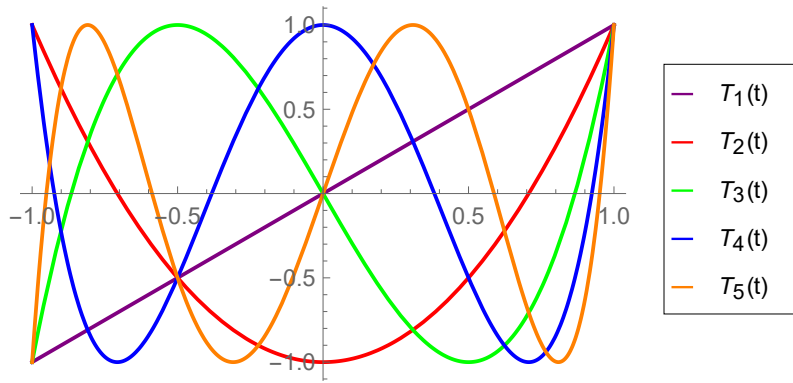


Calculando os polinômios de Chebyshev de graus 1 a 5 temos

$$\begin{aligned} T_1(t) &= t; \\ T_2(t) &= 2t^2 - 1; \\ T_3(t) &= 4t^3 - 3t; \\ T_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1; \\ T_5(t) &= 16t^5 - 20t^3 + 5t. \end{aligned}$$

Na figura a seguir tais polinômios estão representados e é possível observar que seus zeros pertencem ao intervalo de ortogonalidade e possuem a propriedade de entrelaçamento conforme demonstrado no Teorema 3.1.11.

Figura 3.1.8 – Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie de graus 1, 2, 3, 4 e 5.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É interessante notar que os mínimos e máximos dos polinômios de Chebyshev no intervalo $(-1, 1)$ são todos iguais a 1.

Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie

Os polinômios de Chebyshev de segunda espécie são denotados por $U_n(t)$, são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso $w(t) = \sqrt{1-t^2}$ e são definidos por

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1) \arccos(t))}{\sqrt{1-t^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Usando a seguinte relação trigonométrica $\sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta) = 2 \cos(\theta) \sin((n+1)\theta)$ e fazendo $t = \cos \theta$ na equação acima, obtemos a relação de recorrência de três termos

$$\begin{aligned} \sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta) &= 2 \cos(\theta) \sin((n+1)\theta) \Rightarrow \\ \sin((n+2) \arccos(t)) + \sin(n \arccos(t)) &= 2t \sin((n+1) \arccos(t)) \Rightarrow \\ \frac{\sin((n+2) \arccos(t)) + \sin(n \arccos(t))}{\sqrt{1-t^2}} &= 2t \frac{\sin((n+1) \arccos(t))}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow \\ U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t) &= 2tU_n(t). \end{aligned}$$

Então,

$$U_{n+1}(t) = 2tU_n(t) - U_{n-1}(t), \quad n \geq 1,$$

com $U_0(t) = 1$ e $U_1(t) = 2t$.

Calculando os primeiros polinômios, vemos como se comportam os coeficientes dos termos de maior grau.

$$\begin{aligned} U_0(t) &= 1 \\ U_1(t) &= 2t \\ U_2(t) &= 2tU_1(t) - U_0(t) = 2^2t^2 - 1 \\ U_3(t) &= 2tU_2(t) - U_1(t) = 2t[2^2t^2 - 1] - 2t = 2^3t^3 - 4t \\ &\vdots \\ U_n(t) &= 2^nt^n + \dots \quad (\text{por recorrência}). \end{aligned}$$

Portanto, $a_{n,n} = 2^n$, $n \geq 0$.

Teorema 3.1.16. *A relação de ortogonalidade para os polinômios de Chebyshev de segunda espécie é dada por*

$$\langle U_n, U_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_m \rangle &= \int_{-1}^1 U_n(t)U_m(t)w(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\sin((n+1)\arccos(t))}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\sin((m+1)\arccos(t))}{\sqrt{1-t^2}} \sqrt{1-t^2} dt. \end{aligned}$$

Fazendo $t = \cos(\theta)$ na integral acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_m \rangle &= - \int_{\pi}^0 \frac{\sin((n+1)\theta) \sin((m+1)\theta)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} \sin(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sin((n+1)\theta) \sin((m+1)\theta) d\theta. \end{aligned}$$

a) Se $m = n$.

$$\langle U_m, U_m \rangle = \int_0^{\pi} \sin((m+1)\theta) \sin((m+1)\theta) d\theta.$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \langle U_m, U_m \rangle &= \int_0^{\pi} \cos((m+1)\theta) \cos((m+1)\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \{1 - \sin^2((m+1)\theta)\} d\theta \\ &= \pi - \int_0^{\pi} \sin^2((m+1)\theta) d\theta \\ &= \pi - \langle U_m, U_m \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle U_m, U_m \rangle = \frac{\pi}{2}.$$

b) Seja $m \neq n$. Como

$$\langle U_n, U_m \rangle = \int_0^\pi \sin((n+1)\theta) \sin((m+1)\theta) d\theta,$$

integrando duas vezes por partes, temos

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_m \rangle &= \left(\frac{n+1}{m+1} \right)^2 \int_0^\pi \sin((n+1)\theta) \sin((m+1)\theta) d\theta \\ &= \left(\frac{n+1}{m+1} \right)^2 \langle U_n, U_m \rangle. \end{aligned}$$

Como $m \neq n$, então $\left(\frac{n+1}{m+1} \right)^2 \neq 1$. Logo, $\langle U_n, U_m \rangle = 0$. ■

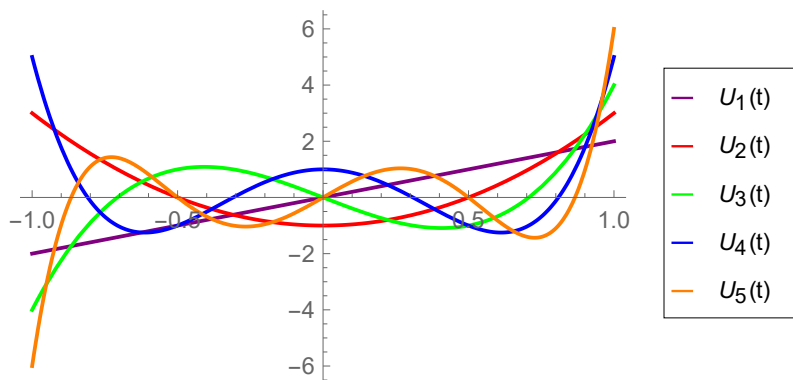
Os polinômios de Chebyshev são múltiplos dos polinômios de Jacobi, sendo os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie múltiplos para $\alpha = \beta = -1/2$ e os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie múltiplos para $\alpha = \beta = 1/2$.

A seguir temos a Figura 3.1.9 representando os polinômios de Chebyshev de segunda espécie de graus 1 a 5, dados por

$$\begin{aligned} U_1(t) &= 2t; \\ U_2(t) &= 4t^2 - 1; \\ U_3(t) &= 8t^3 - 4t; \\ U_4(t) &= 16t^4 - 12t^2 + 1; \\ U_5(t) &= 32t^5 - 32t^3 + 6t, \end{aligned}$$

nesta é possível observar que os zeros destes polinômios pertencem ao intervalo de ortogonalidade e possuem a propriedade de entrelaçamento dos zeros de polinômios de graus consecutivos conforme demonstrado no Teorema 3.1.11.

Figura 3.1.9 – Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie de graus 1, 2, 3, 4 e 5.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É interessante notar que os polinômios de Chebyshev de segunda espécie são iguais aos polinômios de Gegenbauer quando o parâmetro λ assume o valor igual a 1, $U_n(t) = G_n^{(1)}(t)$, sendo assim as representações gráficas das Figuras 3.1.9 e 3.1.5 são iguais.

3.1.4.2 Polinômios de Laguerre

Matemático francês, Edmond Nicolas Laguerre⁵ (9 de abril de 1834 - 14 de agosto de 1886) estudou métodos de aproximação e é melhor lembrado por conta das funções especiais dos polinômios de Laguerre, que são soluções das equações diferenciais de Laguerre.

Os polinômios de Laguerre são denotados por $L_n^{(\alpha)}(t)$, são ortogonais no intervalo $(0, \infty)$ com relação à função peso $w(t) = t^\alpha e^{-t}$, $\alpha > -1$, podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues dada por

$$L_n^{(\alpha)}(t) = (-1)^n t^{-\alpha} e^t \frac{d^n}{dt^n} [t^{\alpha+n} e^{-t}],$$

e, assim como definidos acima, são mônicos, ou seja, $a_{n,n} = 1$.

Teorema 3.1.17. *A relação de ortogonalidade para os polinômios de Laguerre é dada por*

$$\begin{aligned} \langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle &= \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(t) L_m^{(\alpha)}(t) t^\alpha e^{-t} dt \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ n! \Gamma(n + \alpha + 1), & \text{se } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Demonstração. Consideremos, sem perda de generalidade, $m \leq n$.

$$\begin{aligned} \langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle &= \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(t) L_m^{(\alpha)}(t) t^\alpha e^{-t} dt \\ &= (-1)^n \int_0^\infty \frac{d^n}{dt^n} [t^{\alpha+n} e^{-t}] L_m^{(\alpha)}(t) dt. \end{aligned}$$

Considerando $u_n(t) = t^{\alpha+n} e^{-t}$, obtemos $\frac{d^n}{dt^n} [t^{\alpha+n} e^{-t}] = u_n^{(n)}(t)$. Logo,

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(t) (-1)^n u_n^{(n)}(t) dt.$$

Integrando n vezes por partes, obtemos

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^\infty \frac{d^n}{dt^n} [L_m^{(\alpha)}(t)] u_n(t) dt.$$

a) Para $m < n$.

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^\infty [L_m^{(\alpha)}(t)]^{(n)} u_n(t) dt = 0,$$

pois $[L_m^{(\alpha)}(t)]^{(n)} \equiv 0$.

b) Para $m = n$,

$$\begin{aligned} \langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle &= \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(t)]^{(n)} u_n(t) dt \\ &= \int_0^\infty a_{n,n} n! u_n(t) dt \\ &= n! \int_0^\infty t^{n+\alpha} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

⁵Mais informações sobre o matemático Laguerre podem ser encontradas em [13].

Como $\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1} e^{-t} dt$, $u > 0$, então,

$$\int_0^\infty t^{n+\alpha} e^{-t} dt = \Gamma(n + \alpha + 1)$$

e chegamos ao resultado desejado. ■

A função peso $\omega(t)$ apresentada para os polinômios de Laguerre é um tipo especial de função peso, sendo esta denominada função peso variável. Quando ocorre, tais funções dependem de parâmetros polinomiais apresentados na relação de ortogonalidade.

Temos também que a relação de três termos para os polinômios de Laguerre é dada por

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(t) = [t - (2n + \alpha + 1)]L_n^{(\alpha)}(t) - n(n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(t), \quad n \geq 1,$$

sendo $L_0^{(\alpha)}(t) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(t) = t - \alpha - 1$.

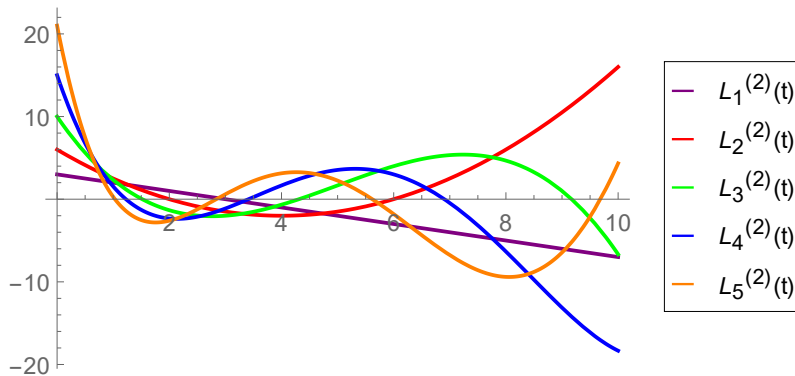
Mostraremos a seguir exemplos de polinômios de Laguerre.

a) Tomando $\alpha = 2$ e calculando os polinômios de Laguerre de graus 1 a 5 temos

$$\begin{aligned} L_1^{(2)}(t) &= -t + 3; \\ L_2^{(2)}(t) &= \frac{1}{2}(t^2 - 8t + 12); \\ L_3^{(2)}(t) &= \frac{1}{6}(-t^3 + 15t^2 - 60t + 60); \\ L_4^{(2)}(t) &= \frac{1}{24}(t^4 - 24t^3 + 180t^2 - 480t + 360); \\ L_5^{(2)}(t) &= \frac{1}{120}(-t^5 + 35t^4 - 420t^3 + 2100t^2 - 4200t + 2520). \end{aligned}$$

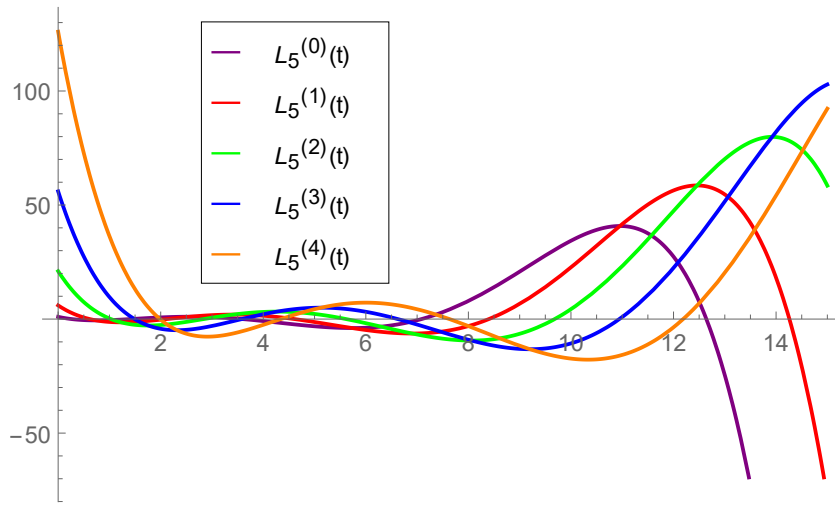
Fica evidente na Figura 3.1.10 que seus zeros possuem a propriedade de entrelaçamento demonstrada no Teorema 3.1.11.

Figura 3.1.10 – Polinômios de Laguerre de graus 1 a 5 com $\alpha = 2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

b) Sendo $L_5^{(\alpha)}(t)$ um polinômio de Laguerre de grau 5 com o parâmetro α variando, seu gráfico será representado pela Figura 3.1.11.

Figura 3.1.11 – Polinômios de Laguerre de grau 5 e com $\alpha = 0, 1, 2, 3$ e 4.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Notemos que à medida que o valor de α cresce, para cada $i, 1 \leq i \leq 5$, o zero $t_{3,i}$ também cresce.

3.1.4.3 Polinômios de Hermite

Sexto filho de uma família francesa com sete, Charles Hermite⁶ (24 de dezembro de 1822 - 14 de janeiro de 1901) nasceu com uma deficiência que o obrigou a usar bengala por toda a vida, porém tal problema físico não o impediu de se tornar um notório matemático com contribuições importantes para a teoria dos números e álgebra, funções elípticas e polinômios ortogonais, tendo inclusive uma classe de polinômios ortogonais com seu nome.

Os polinômios de Hermite, denotados por $H_n(t)$, são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$ com relação à função peso $w(t) = e^{-t^2}$ e podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues dada por

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} [e^{-t^2}].$$

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Hermite, obtida através da equação acima e das equações (3.1.7) e (3.1.8), é dada por

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t), \quad n \geq 1,$$

com $H_0(t) = 1$ e $H_1(t) = 2t$.

Em posse de tais equações podemos obter o coeficiente do termo de maior grau calculando os primeiros polinômios

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 = 2^0 \\ H_1(t) &= 2t = 2^1 t \\ H_2(t) &= 4t^2 - 2 = 2^2 t^2 - 2 \\ &\vdots \\ H_n(t) &= 2^n t^n + \dots \end{aligned}$$

Logo, por recorrência, $a_{n,n} = 2^n$.

⁶Mais informações sobre o matemático Hermite podem ser encontradas em [12].

Teorema 3.1.18. *Os polinômios de Hermite satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade*

$$\langle H_n, H_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Demonstração. Consideremos, sem perda de generalidade, $m \leq n$.

a) Seja $m < n$. Substituindo $H_n(t)$ por sua fórmula de Rodrigues e chamando $\phi(t) = e^{-t^2}$, obtemos

$$\langle H_n, H_m \rangle = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) \phi^{(n)}(t) dt.$$

Integrando por partes,

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(t) H_m(t) e^{-t^2} dt = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(n-1)}(t) H'_m(t) dt.$$

Logo, após integrar n vezes por partes, temos

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(n)}(t) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(n)}(t) e^{-t^2} dt = 0,$$

visto que $H_m^{(n)}(t) = 0$.

b) Se $m = n$,

$$\langle H_m, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \underbrace{H_m^{(m)}(t)}_{2^m m!} dt = 2^m m! \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt}_{\sqrt{\pi}} = 2^m m! \sqrt{\pi}.$$

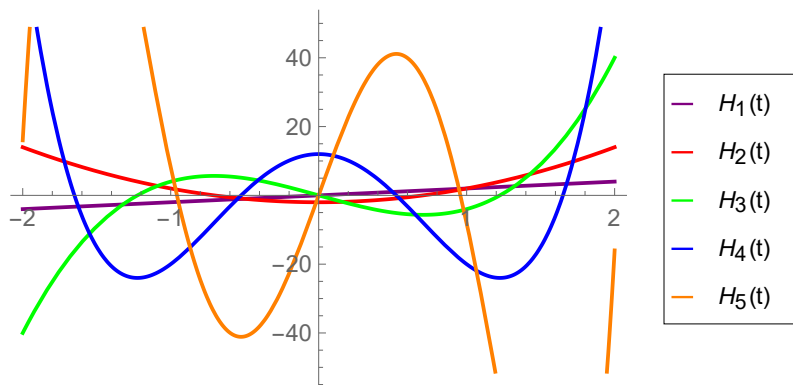
■

Na Figura 3.1.12 temos a representação gráfica dos polinômios de Hermite de graus variando de 1 a 5, dados por

$$\begin{aligned} H_1(t) &= 2t; \\ H_2(t) &= 4t^2 - 2; \\ H_3(t) &= 8t^3 - 12t; \\ H_4(t) &= 16t^4 - 48t^2 + 12; \\ H_5(t) &= 32t^5 - 160t^3 + 120t, \end{aligned}$$

nesta podemos observar a propriedade de entrelaçamento de seus zeros, conforme demonstrado no Teorema 3.1.11.

Figura 3.1.12 – Polinômios de Hermite de graus 1 a 5.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Polinômios ortogonais no círculo unitário

Os polinômios para-ortogonais são polinômios que, sob certas condições, satisfazem uma relação de recorrência de três termos da forma

$$P_{n+1}(z) = (z + \beta_{n+1})P_n(z) - \alpha_{n+1}zP_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.2.1)$$

com $P_0(z) = 1$ e $P_1(z) = z + \beta_1$, onde os números complexos $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$ são não nulos.

Como estes polinômios estão associados aos polinômios ortogonais no círculo unitário, faremos nesta seção um breve estudo sobre eles, utilizando a referência [18]. Introduzidos por G. Szegő na primeira metade do século XX, os polinômios ortogonais no círculo unitário não satisfazem a uma relação de recorrência da forma (3.2.1).

Consideremos ψ uma medida positiva no círculo unitário

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

ou seja, $\psi(e^{i\theta})$, definida em $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é uma função real, limitada e não decrescente, com infinitos pontos de aumento em $\mathcal{C}$, onde os momentos (trigonométricos) são dados por

$$\mu_m = \int_{\mathcal{C}} z^{-m} d\psi(z), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Em alguns trabalhos sobre o assunto, os momentos trigonométricos são, equivalentemente, definidos por

$$\mu_m = \int_{\mathcal{C}} z^{-m} d\psi(z) = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} d\psi(e^{i\theta}). \quad (3.2.2)$$

Observe que

$$\bar{\mu}_{-n} = \int_0^{2\pi} \overline{e^{in\theta}} d\psi(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\psi(e^{i\theta}) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.3)$$

A medida $\psi(e^{i\theta})$ induz outra medida $\tilde{\psi}(\theta)$, com suporte em $[0, 2\pi]$, que chamaremos, simplesmente, de $\psi(\theta)$ e esta será a notação que adotaremos neste texto.

Em posse da medida ψ , definimos o seguinte funcional linear

$$\mathcal{L}[z^m] = \int_{\mathcal{C}} z^m d\psi(z) = \mu_{-m}. \quad (3.2.4)$$

Como o suporte da medida ψ é infinito, isto é, o número de pontos de aumento de ψ em $[0, 2\pi]$ é infinito, para qualquer $g(e^{i\theta}) \geq 0$, $g(e^{i\theta}) \not\equiv 0$ e contínua no suporte de ψ , temos

$$\mathcal{L}[g] = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) d\psi(\theta) > 0.$$

Se g é um polinômio,

$$\mathcal{L}[|g|^2] = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\psi(\theta) > 0.$$

Usando o funcional $\mathcal{L}$, definimos o seguinte produto interno:

$$\langle g, h \rangle = \mathcal{L}\left[g(e^{i\theta}) \overline{h(e^{i\theta})}\right] = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) \overline{h(e^{i\theta})} d\psi(\theta). \quad (3.2.5)$$

Se $g(z) = \sum_{j=p}^q c_j z^j$, com $p \leq q \in \mathbb{Z}$ e $c_j \in \mathbb{C}$, temos, de (3.2.4),

$$\mathcal{L}[g] = \mathcal{L} \left[\sum_{j=p}^q c_j z^j \right] = \sum_{j=p}^q c_j \mu_{-j}.$$

A seguinte matriz, conhecida como matriz de Toeplitz, é correspondente à sequência de momentos $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$:

$$T_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix},$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$. Seu determinante, conhecido como determinante de Toeplitz, é definido por

$$\Delta_{-1} = 1 \quad \text{e} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (3.2.6)$$

Definição 3.2.1. Um funcional linear $\mathcal{L}$, onde $\mu_m = \mathcal{L}[z^{-m}]$, é positivo-definido se

$$\Delta_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e quase-definido se

$$\Delta_n \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sendo $\pi(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$, com $c_j \in \mathbb{C}$ e $c_n \neq 0$, um polinômio de grau n , $n \geq 0$, temos de (3.2.4) e (3.2.5) que

$$\begin{aligned} 0 < \|\pi\|^2 &= \langle \pi, \pi \rangle = \mathcal{L} \left[\overline{\pi(z)} \pi(z) \right] = \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^n \overline{c_k z^k} \sum_{j=0}^n c_j z^j \right] \\ &= \mathcal{L} \left[\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \overline{c_k} c_j z^{j-k} \right] = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \overline{c_k} c_j \mu_{k-j}, \end{aligned}$$

e então,

$$\|\pi\| = \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \overline{c_k} c_j \mu_{k-j} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Escrevendo $\|\pi\|^2$ na forma matricial, temos

$$\|\pi\|^2 = (\overline{c_0} \quad \overline{c_1} \quad \cdots \quad \overline{c_n}) \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} > 0,$$

ou seja,

$$(\overline{c_0} \quad \overline{c_1} \quad \cdots \quad \overline{c_n}) T_n \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} > 0.$$

Dessa forma, concluímos que a matriz T_n é positiva-definida, e então, $\Delta_n > 0$, para $n \geq 0$, o que implica que $\mathcal{L}$ é um funcional linear positivo-definido.

Definição 3.2.2. Uma sequência $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números complexos é hermitiana se, para $n = 0, 1, 2, \dots$, vale $\mu_n = \overline{\mu_{-n}}$, e é hermitiana positiva-definida se $\Delta_n > 0$, $n \geq 0$.

Temos então, de (3.2.3), que, dada uma medida positiva no círculo unitário, a sequência de momentos $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ definidos por (3.2.2) forma uma sequência hermitiana positiva-definida. Temos também que a matriz T_n é hermitiana, ou seja, $T_n = \overline{T_n^t}$.

Definição 3.2.3. Dado um funcional linear $\mathcal{L}$ positivo-definido (quase-definido), uma sequência de polinômios $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação à $\mathcal{L}$, se

$$\langle S_n, S_m \rangle = \mathcal{L}[S_n(z) \overline{S_m(z)}] = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \kappa_n^2 \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

A partir de agora consideramos apenas polinômios S_n mônicos.

É possível provar, assim como para os polinômios ortogonais na reta real, que sendo $\pi_m \in \mathbb{P}_m$, $m \leq n$,

$$\langle S_n, \pi_m \rangle = \mathcal{L}[S_n(z) \overline{\pi_m(z)}] = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \hat{\kappa}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Escrevendo, para $n \geq 0$,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n c_{k,n} z^k, \quad c_{k,n} \in \mathbb{C}, \quad c_{n,n} = 1,$$

e usando (3.2.7) para $m = 0, 1, \dots, n$, obtemos

$$\langle S_n, z^m \rangle = \mathcal{L}\left[S_n(z) \frac{1}{z^m}\right] = \sum_{k=0}^n c_{k,n} \mu_{m-k} = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \tilde{\kappa}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Note que (3.2.7) e (3.2.9) são definições equivalentes para os polinômios de Szegő.

Fazendo $m = 0, 1, \dots, n$ em (3.2.9), obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_1 & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{0,n} \\ c_{1,n} \\ \vdots \\ c_{n-1,n} \\ c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{\kappa}_n \end{pmatrix}. \quad (3.2.10)$$

Calculando $c_{n,n}$ pela regra de Cramer, temos

$$1 = c_{n,n} = \frac{\tilde{\kappa}_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \implies \tilde{\kappa}_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Logo,

$$\langle S_n, z^m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, \dots, n-1 \\ \Delta_n / \Delta_{n-1}, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (3.2.11)$$

Substituindo a última linha do sistema (3.2.10) por $S_n(z) = \sum_{k=0}^n c_{k,n} z^k$, obtemos o novo sistema linear

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{0,n} \\ c_{1,n} \\ \vdots \\ c_{n-1,n} \\ c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ S_n(z) \end{pmatrix}.$$

Calculando $c_{n,n}$ pelo mesmo método anterior, podemos escrever o polinômio S_n da seguinte forma

$$S_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}. \quad (3.2.12)$$

A relação (3.2.12) mostra a existência e unicidade dos polinômios de Szegő na forma mônica, pois $\Delta_{n-1} \neq 0$, e também é uma forma de se construir esses polinômios.

3.2.1 Polinômios inversíveis

A seguir definimos os polinômios inversíveis. Tais polinômios possuem um papel importante na teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário.

Definição 3.2.4. Se q_n é um polinômio de grau no máximo n , então o seu polinômio inversível é definido por

$$q_n^*(z) = z^n \overline{q_n(1/\bar{z})}.$$

Escrevendo $q_n = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, obtemos

$$q_n^*(z) = z^n \overline{\sum_{k=0}^n a_k (1/\bar{z}^k)} = z^n \sum_{k=0}^n \bar{a}_k (1/z^k) = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k z^{n-k}.$$

Usando a notação $\bar{q}_n$, que é o polinômio obtido de q_n conjugando apenas seus coeficientes, podemos escrever

$$q_n^*(z) = z^n \bar{q}_n(1/z).$$

Note que $(q_n^*)^* = q_n$. Quando $q_n^* = q_n$, dizemos que q_n é auto-inversível. Com essa notação e como no círculo unitário $\bar{z} = 1/z$, podemos escrever

$$\langle S_n, S_m \rangle = \mathcal{L} \left[S_n(z) \overline{S_m(z)} \right] = \mathcal{L} \left[S_n(z) \bar{S}_m(\bar{z}) \right] = \mathcal{L} \left[S_n(z) \bar{S}_m(1/z) \right].$$

Utilizando a forma (3.2.12) para S_n , temos o polinômio inversível de S_n dado por

$$S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(1/\bar{z})} = \frac{z^n}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \bar{\mu}_0 & \bar{\mu}_{-1} & \cdots & \bar{\mu}_{-n} \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_0 & \cdots & \bar{\mu}_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mu}_{n-1} & \bar{\mu}_{n-2} & \cdots & \bar{\mu}_{-1} \\ 1 & 1/z & \cdots & 1/z^n \end{vmatrix}.$$

Lembrando que $\Delta_n > 0$ e que $\mu_n = \bar{\mu}_{-n}$ para $n = 0, 1, \dots$, então

$$S_n^*(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_1 \\ z^n & z^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.2.13)$$

Usando as definições de polinômio inversível e do funcional (3.2.13), e como $|z| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle S_n^*, z^m \rangle &= \left\langle z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}, z^m \right\rangle = \mathcal{L} \left[z^n \overline{S_n(1/\bar{z})} \bar{z}^m \right] = \mathcal{L} \left[z^n \overline{S_n(z)} \frac{1}{z^m} \right] \\ &= \mathcal{L} \left[z^{n-m} \overline{S_n(z)} \right] = \langle z^{n-m}, S_n \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle S_n^*, z^m \rangle = \begin{cases} \Delta_n / \Delta_{n-1}, & \text{se } m = 0, \\ 0, & \text{se } m = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Como $S_m(z) = z^m + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,m} z^k$, então

$$\begin{aligned} \langle S_n, S_m \rangle &= \left\langle S_n, z^m + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,m} z^k \right\rangle \\ &= \langle S_n, z^m \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,m} \langle S_n, z^k \rangle = \langle S_n, z^m \rangle, \quad m = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle S_n, S_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, \dots, n-1, \\ \Delta_n / \Delta_{n-1}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Consideremos agora α_n definidos por

$$\bar{\alpha}_n = -S_{n+1}(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.14)$$

Os coeficientes α_n são chamados coeficientes de reflexão e serão extremamente úteis neste estudo. Segundo as referências [18, 19], há pelo menos quatro diferentes denominações para os coeficientes de reflexão α_n : coeficientes de Verblunsky, coeficientes de Schur, coeficientes de Szegő e coeficientes de Geronimus. Para a explicação sobre cada um desses termos veja [18, p. 10].

De (3.2.12), obtemos

$$S_{n+1}(0) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} & \mu_{-n-1} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} & \mu_{-2} \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$\bar{\alpha}_n = \frac{(-1)^n}{\Delta_n} \begin{vmatrix} \mu_{-1} & \mu_{-2} & \cdots & \mu_{-n} & \mu_{-n-1} \\ \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-2} & \mu_{n-3} & \cdots & \mu_{-1} & \mu_{-2} \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \end{vmatrix}. \quad (3.2.15)$$

Podemos então demonstrar o importante resultado a seguir.

Teorema 3.2.1. *Os polinômios mônicos de Szegő satisfazem às seguintes relações para $n \geq 1$,*

$$S_n^*(z) = S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}zS_{n-1}(z), \quad (3.2.16)$$

$$S_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2)zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}S_n^*(z), \quad (3.2.17)$$

com condições iniciais $S_0(z) = 1$ e $S_0^*(z) = 1$.

Demonstração. De (3.2.5), segue que

$$\langle zg, z^n \rangle = \mathcal{L}[zg(z)\bar{z}^n].$$

Mas, como $|z| = 1$,

$$\langle zg, z^n \rangle = \mathcal{L}\left[zg(z) \frac{1}{z^n} \right] = \mathcal{L}\left[g(z) \frac{1}{z^{n-1}} \right] = \mathcal{L}[g(z)\bar{z}^{n-1}].$$

Novamente de (3.2.5) obtemos

$$\langle zg, z^n \rangle = \langle g, z^{n-1} \rangle. \quad (3.2.18)$$

Para $n \geq 1$, seja $A_n(z) = S_n^*(z) - \gamma_n z S_{n-1}(z) - S_{n-1}^*(z)$, com

$$\gamma_n = -\frac{\langle S_{n-1}^*, z^n \rangle}{\langle z S_{n-1}, z^n \rangle}. \quad (3.2.19)$$

Os coeficientes γ_n estão bem definidos, pois de (3.2.18)

$$\langle z S_{n-1}, z^n \rangle = \langle S_{n-1}, z^{n-1} \rangle = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De $S_n^*(0) = S_{n-1}^*(0) = 1$, pois S_n é um polinômio mônico, segue que $A_n(0) = 0$, e isto significa que o polinômio A_n não possui termo independente. Portanto,

$$A_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^k.$$

Como A_n não tem termo independente,

$$A_n^*(z) = z^n \overline{A_n(1/\bar{z})} \in \mathbb{P}_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.20)$$

Logo, A_n^* pode ser escrito da forma

$$A_n^*(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k S_k(z). \quad (3.2.21)$$

De (3.2.20) e (3.2.21), para $n \geq 1$ obtemos

$$\begin{aligned} A_n(z) &= z^n \overline{A_n^*(1/\bar{z})} = \sum_{k=0}^{n-1} z^n \bar{b}_k \overline{S_k(1/\bar{z})} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1} \bar{b}_k z^k \overline{S_k(1/\bar{z})} = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{b}_k z^{n-k} S_k^*(z). \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

A escolha de γ_n assegura que $\langle A_n, z^n \rangle = 0$, pois, de (3.2.19)

$$\begin{aligned} \langle A_n, z^n \rangle &= \langle S_n^*(z) - \gamma_n z S_{n-1}(z) - S_{n-1}^*(z), z^n \rangle \\ &= \langle S_n^*, z^n \rangle + \frac{\langle S_{n-1}^*, z^n \rangle}{\langle z S_{n-1}, z^n \rangle} \langle z S_{n-1}, z^n \rangle - \langle S_{n-1}^*, z^n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Dessa equação, da definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e de (3.2.22), obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \langle A_n, z^n \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} \bar{b}_k \langle z^{n-k} S_k^*, z^n \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{b}_k \mathcal{L} \left[z^{n-k} S_k^*(z) \frac{1}{z^n} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \bar{b}_k \mathcal{L} \left[S_k^*(z) \frac{1}{z^k} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{b}_k \langle S_k^*, z^k \rangle = \bar{b}_0 \mu_0. \end{aligned}$$

Como $\mu_0 = \Delta_0 \neq 0$, concluímos que $b_0 = 0$. Mas,

$$\begin{aligned} \langle A_n, z^{n-1} \rangle &= \langle S_n^*, z^{n-1} \rangle - \gamma_n \langle z S_{n-1}, z^{n-1} \rangle - \langle S_{n-1}^*, z^{n-1} \rangle \\ &= -\gamma_n \mathcal{L} \left[z S_{n-1}(z) \frac{1}{z^{n-1}} \right] = -\gamma_n \mathcal{L} \left[S_{n-1}(z) \frac{1}{z^{n-2}} \right] \\ &= -\gamma_n \langle S_{n-1}, z^{n-2} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 = \langle A_n, z^{n-1} \rangle &= \sum_{k=1}^{n-1} \bar{b}_k \langle z^{n-k} S_k^*, z^{n-1} \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{b}_k \mathcal{L} \left[z^{n-k} S_k^*(z) \frac{1}{z^{n-1}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \bar{b}_k \langle S_k^*, z^{k-1} \rangle = \bar{b}_1 \langle S_1^*, 1 \rangle, \end{aligned}$$

ou seja, $b_1 = 0$. Continuando da mesma forma, obtemos $b_2 = b_3 = \dots = b_{n-1} = 0$. Logo, $A_n(z) \equiv 0$ e, de (3.2.19),

$$S_n^*(z) = \gamma_n z S_{n-1}(z) + S_{n-1}^*(z). \quad (3.2.23)$$

Comparando os coeficientes de z^n em (3.2.23), concluímos que $\gamma_n = \bar{S}_n(0) = -\alpha_{n-1}$, $n \geq 1$. Logo, $S_n^*(z) = S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1} z S_{n-1}(z)$, como em (3.2.16).

Definindo $C_n(z) = S_n(z) + \bar{\alpha}_{n-1} S_n^*(z) - \gamma_n z S_{n-1}(z)$, agora com $\gamma_n = \frac{\langle S_n, z^n \rangle}{\langle z S_{n-1}, z^n \rangle}$, e procedendo de maneira completamente análoga à anterior, encontramos

$$S_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2) z S_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} S_n^*(z),$$

concluindo, assim, a demonstração de (3.2.17). ■

Se substituirmos S_n^* , dada pela equação (3.2.16), em (3.2.17), obtemos

$$S_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2) z S_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} [S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1} z S_{n-1}(z)],$$

ou seja,

$$S_n(z) = z S_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} S_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1. \quad (3.2.24)$$

Pelas relações de recorrência, podemos ver que os polinômios mônicos de Szegő são completamente determinados pelos coeficientes de reflexão α_n . Esses coeficientes podem ser calculados por (3.2.15) ou pelo método dado no próximo teorema, onde também mostramos que $|\alpha_n| < 1$.

Teorema 3.2.2. *Sejam $\mathcal{L}$ um funcional linear definido positivo, Δ_n o determinante de Toeplitz (3.2.6) e $\{\alpha_n\}_n^\infty$ a sequência definida por (3.2.14). Então, para $n \geq 1$,*

$$\bar{\alpha}_{n-1} = \frac{\langle z S_{n-1}, 1 \rangle}{\langle S_{n-1}^*, 1 \rangle}, \quad (3.2.25)$$

$$1 - |\alpha_{n-1}|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-1}}{\Delta_{n-1}^2} > 0. \quad (3.2.26)$$

Demonstração. Fazendo o produto escalar $\langle S_n, 1 \rangle$, por (3.2.24) obtemos

$$\langle S_n, 1 \rangle = \langle z S_{n-1}, 1 \rangle - \bar{\alpha}_{n-1} \langle S_{n-1}^*, 1 \rangle, \quad n \geq 1.$$

Como $\langle S_n, 1 \rangle = 0$, chegamos em (3.2.25).

Por fim, utilizando a relação de ortogonalidade (3.2.11) e a relação de recorrência (3.2.17), obtemos

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \langle S_n, z^n \rangle = (1 - |\alpha_{n-1}|^2) \langle z S_{n-1}, z^n \rangle - \bar{\alpha}_{n-1} \langle S_n^*, z^n \rangle.$$

Logo,

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = (1 - |\alpha_{n-1}|^2) \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}.$$

Como estamos trabalhando com um funcional definido positivo, então $\Delta_n > 0$ para $n \geq 0$, concluindo, assim, a demonstração do teorema. ■

Da relação (3.2.26), observamos que $|\alpha_n| < 1$, para $n \geq 0$. Esta é uma importante característica dos polinômios de Szegő.

Quando $\mathcal{L}$ é um funcional linear positivo-definido, é possível mostrar que os zeros dos polinômios de Szegő S_n estão todos no disco unitário aberto $|z| < 1$, assim como o próximo resultado demonstra.

Teorema 3.2.3. *Os zeros do polinômio de Szegő S_n , $n \geq 1$, estão todos no disco unitário aberto $|z| < 1$.*

Demonstração. Sejam $z_1, z_2, \dots, z_n$ os zeros do polinômio de Szegő S_n , $n \geq 1$. Logo, podemos escrever $S_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$.

Sem perda de generalidade, escolhemos um zero de S_n , por exemplo, z_1 . Seja π o polinômio de grau $n - 1$ dado por

$$\pi(z) = \frac{S_n(z)}{z - z_1} = (z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Assim, $S_n(z) = (z - z_1)\pi(z) = z\pi(z) - z_1\pi(z)$ e, portanto, $S_n(z) + z_1\pi(z) = z\pi(z)$. Logo, $\|S_n + z_1\pi\|^2 = \|z\pi\|^2$, isto é,

$$\langle S_n, S_n \rangle + 2\langle S_n, z_1\pi \rangle + \langle z_1\pi, z_1\pi \rangle = \langle z\pi, z\pi \rangle.$$

Daí, obtemos

$$\|S_n\|^2 + 2\langle S_n, z_1\pi \rangle + \|z_1\pi\|^2 = \|z\pi\|^2.$$

Como, por (3.2.8), $\langle S_n, z_1\pi \rangle = 0$ e $\|z\pi\|^2 = \langle z\pi, z\pi \rangle = \mathcal{L}[z\pi\bar{z}\pi] = \mathcal{L}[\pi\bar{\pi}] = \|\pi\|^2$, pois $|z| = 1$ em $\mathcal{C}$. Então, $\|S_n\|^2 + \|z_1\pi\|^2 = \|\pi\|^2$. Logo,

$$\|S_n\|^2 = (1 - |z_1|^2)\|\pi\|^2 > 0$$

e, portanto, $1 - |z_1|^2 > 0$, ou seja, $|z_1|^2 < 1$.

Assim, para qualquer zero de S_n , $|z_k|^2 < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. ■

O resultado a seguir é semelhante ao Teorema de Favard. Ele usa o fato de que os polinômios ortogonais no círculo unitário são determinados pelos coeficientes de Verblunsky α_n .

Teorema 3.2.4. *Dada uma sequência arbitrária de números complexos $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, onde $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$, então associada a esta sequência existe uma única medida de probabilidade não trivial, definida no círculo unitário, tal que os polinômios mônicos $\{S_n\}$ gerados por (3.2.24) são os respectivos polinômios ortogonais no círculo unitário.*

Maiores detalhes e a demonstração de tal resultado podem ser encontradas em [5].

Polinômios T-Möbius ortogonais

O objetivo deste capítulo é apresentar as propriedades dos polinômios T-Möbius, obtidos a partir da aplicação da transformação de Möbius em sequências de polinômios ortogonais na reta real. Além disso, estudaremos as funções racionais T-Möbius obtidas de forma similar.

Considerando uma sequência de polinômios ortogonais $P = \{P_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ em um dado intervalo $(l, r) \in \mathbb{R}$, com respeito a uma função peso $w(t)$ dada, temos que cada polinômio $P_n(t)$ possui grau n e estes satisfazem a relação de ortogonalidade (3.1.3).

Compondo cada polinômio $P_n(t) \in P$ com a transformação de Möbius, dada por (2.1.1), obtemos uma sequência $R = \{R_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ de funções racionais, onde $R_n(t) = P_n(f(t))$, $n \geq 0$.

Multiplicando cada função racional $R_n(t)$ pelo fator $(ct + d)^n$, uma sequência de polinômios T-Möbius $Q = \{Q_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ é obtida, como em (2.2.2). Ainda, a relação dada por (2.2.4) também representa a relação entre $P_n(t)$, $R_n(t)$ e $Q_n(t)$.

A seguir apresentamos propriedades de tais sequências polinomiais.

4.1 Propriedades dos polinômios T-Möbius ortogonais

O Teorema a seguir apresenta as relações de ortogonalidade satisfeitas pelas funções racionais e pelo polinômios T-Möbius.

Teorema 4.1.1. *Seja $P = \{P_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais na reta real cujos termos $P_n(t)$ satisfazem a relação de ortogonalidade (3.1.3) para uma dada função peso $w(t)$ não nula no intervalo de ortogonalidade $I = (l, r) \in \mathbb{R}$. Então, a sequência $R = \{R_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ de funções racionais T-Möbius, definidas como em (2.2.1), satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade:*

$$\int_{\Gamma} R_m(t) R_n(t) \omega(t) dt = K_m \delta_{m,n}, \quad (4.1.1)$$

onde

$$\omega(t) = w(f(t)) f'(t) = \Delta \frac{w(f(t))}{(ct + d)^2}. \quad (4.1.2)$$

De forma similar, a sequência $Q = \{Q_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinômios T-Möbius $Q_n(t)$, definidos como em (2.2.2), satisfazem relações de ortogonalidade da forma

$$\int_{\Gamma} Q_m(t) Q_n(t) \omega_{m,n}(t) dt = K_m \delta_{m,n}, \quad (4.1.3)$$

onde

$$\omega_{m,n}(t) = \frac{\omega(t)}{(ct+d)^{m+n}} = \frac{\Delta w(f(t))}{(ct+d)^{m+n+2}}. \quad (4.1.4)$$

Em ambos os casos o caminho de integração é

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = f^{-1}(t), \lambda < z < \rho\}, \quad (4.1.5)$$

onde $\lambda = f^{-1}(l)$ e $\rho = f^{-1}(r)$, o que corresponde a uma curva no plano complexo cujos pontos inicial e final são λ e ρ , respectivamente. Por fim, as novas funções peso $\omega(t)$ e $\omega_{m,n}(t)$ são não nulas na curva Γ , exceto no infinito.

Demonstração. Utilizando da relação de ortogonalidade dos polinômios ortogonais na reta real, dada por (3.1.3), e da mudança de variável $t = f(y)$ obtemos um novo intervalo de ortogonalidade, dado por

$$\begin{cases} t = f(y) = l \implies y = f^{-1}(l) = \lambda \\ t = f(y) = r \implies y = f^{-1}(r) = \rho \end{cases},$$

e $dt = d(f(y)) = f'(y)dy$. Assim, encontramos que

$$\begin{aligned} \int_l^r P_m(t)P_n(t)w(t)dt &= \int_\lambda^\rho P_m(f(y))P_n(f(y))w(f(y))f'(y)dy \\ &= \int_\Gamma R_m(y)R_n(y)\omega(y)dy = K_m\delta_{m,n}. \end{aligned}$$

Ainda, multiplicando e dividindo por $(cy+d)^{m+n}$ a integral anterior obtemos, pela equação (2.2.3), o seguinte resultado.

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{(cy+d)^{m+n}}{(cy+d)^{m+n}} R_m(y)R_n(y)\omega(y)dy &= \int_\Gamma (cy+d)^m R_m(y)(cy+d)^n R_n(y) \frac{\omega(y)}{(cy+d)^{m+n}} dy \\ &= \int_\Gamma Q_m(y)Q_n(y)\omega_{m,n}(y)dy = K_m\delta_{m,n}, \end{aligned}$$

tomando $\omega_{m,n}(y) = \frac{\omega(y)}{(cy+d)^{m+n}}$.

Considerando o ponto z na curva Γ , temos $z = f^{-1}(t)$, com $t \in I$, logo a equação (4.1.2) resulta em

$$\omega(z) = \omega(f^{-1}(t)) = w(f(f^{-1}(t)))f'(f^{-1}(t)) = \frac{-w(t)(ct-a)^2}{\Delta}.$$

Portanto, como $w(t)$ é não nulo em I por hipótese, concluímos que $\omega(f^{-1}(t))$ é nulo somente em $t = a/c$, porém temos que $z = f^{-1}(a/c) = \infty$, sendo assim $\omega(z)$ se anula em Γ somente quando $z = \infty$. O mesmo raciocínio se aplica a $\omega_{m,n}(t)$. ■

É importante termos em mente que as integrais representadas em (4.1.1) e (4.1.3) são consideradas como integrais de contorno complexas. Sempre que o ponto $t = a/c$ não pertencer ao intervalo I , $I = (l, r) \subseteq \mathbb{R}$, não há nada com o que nos preocuparmos, visto que neste caso a curva de ortogonalidade Γ será finita, aberta e conectada, assim tais integrais dependerão somente de seus pontos extremos $\lambda = f^{-1}(l)$ e $\rho = f^{-1}(r)$.

No entanto, precisamos nos atentar para o caso contrário. De fato, se $t = a/c$ em I , então a curva Γ não será conectada. Em vez disso, esta será constituída por duas linhas retas disjuntas no plano complexo, passando pelo ponto $f^{-1}(a/c) = \infty$. Iniciando a

primeira destas em $\lambda = f^{-1}(l)$ e seguindo até o infinito complexo, enquanto a outra inicia no infinito e termina em $\rho = f^{-1}(r)$.

Notemos ainda que se I compreende toda a reta real, então Γ se torna uma reta infinita ou um círculo no plano complexo. Realmente, temos que $f^{-1}(-\infty) = f^{-1}(\infty) = -d/c$. Desta forma temos que Γ , no plano complexo estendido, será sempre uma curva conectada.

A função peso variável $\omega_{m,n}(t)$, dada em (4.1.4), depende dos índices m e n dos polinômios $Q_m(t)$ e $Q_n(t)$, respectivamente.

Como bem sabemos, qualquer sequência $P = \{P_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinômios ortogonais na reta real satisfaz uma relação de recorrência de três termos da forma (3.1.7). Assim como apresentado no Teorema 3.1.5, salvo alterações de índices, tomadas aqui a fim de facilitar a exposição dos cálculos efetuados mais a frente.

A seguir temos um teorema que apresenta resultado semelhante para as novas classes polinomiais abordadas neste capítulo.

Teorema 4.1.2. *Seja $P = \{P_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais na reta real que satisfaz uma relação de recorrência de três termos da forma (3.1.7). Então, a sequência $R = \{R_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ de funções racionais $R_n(t)$ satisfaz uma relação de recorrência de três termos da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} R_n(t) &= [\gamma_n f(t) - \beta_n] R_{n-1}(t) - \alpha_n R_{n-2}(t) \\ &= \left[\gamma_n \left(\frac{at+b}{ct+d} \right) - \beta_n \right] R_{n-1}(t) - \alpha_n R_{n-2}(t), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

com condições iniciais $R_{-1}(t) = 0$ e $R_0(t) = 1$. De modo semelhante, a sequência $Q = \{Q_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinômios T -Möbius $Q_n(t)$ satisfaz a seguinte relação de recorrência de três termos

$$Q_n(t) = (\mathcal{A}_n t - \mathcal{B}_n) Q_{n-1}(t) - \mathcal{C}_n (ct+d)^2 Q_{n-2}(t), \quad n \geq 1, \quad (4.1.6)$$

com condições iniciais $Q_{-1}(t) = 0$ e $Q_0(t) = 1$, sendo

$$\mathcal{A}_n = (a\gamma_n - c\beta_n), \quad \mathcal{B}_n = (d\beta_n - b\gamma_n) \quad e \quad \mathcal{C}_n = \alpha_n.$$

Demonstração. Aplicando (2.2.4), com variável real t , em (4.1.5) segue que

$$R_n(f^{-1}(t)) = (\gamma_n t - \beta_n) R_{n-1}(f^{-1}(t)) - \alpha_n R_{n-2}(f^{-1}(t)).$$

Aplicando a mudança de variável $t = f(y)$, segue que

$$\begin{aligned} R_n(y) &= [\gamma_n f(y) - \beta_n] R_{n-1}(y) - \alpha_n R_{n-2}(y) \\ &= \left[\gamma_n \left(\frac{ay+b}{cy+d} \right) - \beta_n \right] R_{n-1}(y) - \alpha_n R_{n-2}(y). \end{aligned}$$

Assim, fica claro que a relação acima será válida para qualquer $n \geq 1$ desde que definamos $R_{-1}(t) = 0$ e $R_0(t) = 1$. Por fim, a equação (4.1.6) segue após aplicarmos (2.2.3), com variável real t , na expressão acima. De fato,

$$\frac{Q_n(t)}{(ct+d)^n} = \left[\gamma_n \left(\frac{ay+b}{cy+d} \right) - \beta_n \right] \frac{Q_{n-1}(t)}{(ct+d)^{n-1}} - \alpha_n \frac{Q_{n-2}(t)}{(ct+d)^{n-2}},$$

e, ao multiplicarmos por $(ct+d)^n$ ambos os lados da igualdade obtemos

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \left[\gamma_n \left(\frac{ay+b}{cy+d} \right) - \beta_n \right] (ct+d) Q_{n-1}(t) - \alpha_n (ct+d)^2 Q_{n-2}(t) \\ &= [\gamma_n (ay+b) - \beta_n (cy+d)] Q_{n-1}(t) - \alpha_n (ct+d)^2 Q_{n-2}(t) \\ &= [(a\gamma_n - c\beta_n)t + (b\gamma_n - d\beta_n)] Q_{n-1}(t) - \alpha_n (ct+d)^2 Q_{n-2}(t), \end{aligned}$$

que é válida para qualquer $n \geq 1$ desde que definamos $Q_{-1}(t) = 0$ e $Q_0(t) = 1$. $\blacksquare$

Anteriormente, nos Teoremas 3.1.7 e 3.1.8, foram apresentadas as Identidades de Christoffel-Darboux para os polinômios ortogonais na reta real em suas formas mônica e ortonormal, nesta ordem. Utilizando da equação (3.1.11), e das igualdades (3.1.9), $\hat{\alpha}_{n+1} = \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma_n \gamma_{n+1}}$ e $\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1, n+1}}{a_{n, n}}$, retiradas de (3.1.1) e (3.1.8) respectivamente, obtemos a Identidade de Christoffel-Darboux para qualquer sequência de polinômios ortogonais na reta real

$$\sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{k+1}} P_k(t) P_k(s) = \frac{P_{n+1}(t) P_n(s) - P_n(t) P_{n+1}(s)}{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{k+1})(t-s)}. \quad (4.1.7)$$

Sendo assim, a fórmula confluyente correspondente é como segue:

$$\sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{k+1}} P_k^2(t) = \frac{P'_{n+1}(t) P_n(t) - P'_n(t) P_{n+1}(t)}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{k+1}}. \quad (4.1.8)$$

Identidades similares também existem para sequências de polinômios e funções racionais T-Möbius, assim como descrito no resultado a seguir.

Teorema 4.1.3. *Seja $P = \{P_n(t)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais na reta real que satisfazem as Identidades de Christoffel-Darboux (4.1.7) e (4.1.8). Então a sequência $R = \{R_n(t)\}_{n=0}^\infty$ de funções racionais T-Möbius satisfaz as seguintes identidades*

$$\sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1}} R_k(t) R_k(s) = (ct+d)(cs+d) \left[\frac{R_{n+1}(t) R_n(s) - R_n(t) R_{n+1}(s)}{\Delta \cdot (\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1})(t-s)} \right] \quad (4.1.9)$$

e

$$\sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1}} R_k^2(t) = (ct+d)^2 \left[\frac{R'_{n+1}(t) R_n(t) - R'_n(t) R_{n+1}(t)}{\Delta \cdot (\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1})} \right]. \quad (4.1.10)$$

De modo similar, a sequência $Q = \{Q_n(t)\}_{n=0}^\infty$ de polinômios T-Möbius satisfaz as identidades

$$\sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{(\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1})} \frac{Q_k(t)}{(ct+d)^k} \frac{Q_k(s)}{(cs+d)^k} = \frac{Q_{n+1}(t) Q_n(s)(cs+d) - (ct+d) Q_n(t) Q_{n+1}(s)}{\Delta \cdot (\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1})(ct+d)^n (cs+d)^n (t-s)} \quad (4.1.11)$$

e

$$\sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{(\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1})} \frac{Q_k^2(t)}{(ct+d)^{2k}} = \frac{Q'_{n+1}(t) Q_n(t) - Q'_n(t) Q_{n+1}(t) - c Q_{n+1}(t) Q_n(t)}{\Delta \cdot (\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1})(ct+d)^{2n-1}}. \quad (4.1.12)$$

Demonstração. Da equação (2.2.4) temos $P_n(t) = R_n(f^{-1}(t))$, logo, por (4.1.7), temos

$$\sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{k+1}} R_k(f^{-1}(t)) R_k(f^{-1}(s)) = \frac{R_{n+1}(f^{-1}(t)) R_n(f^{-1}(s)) - R_n(f^{-1}(t)) R_{n+1}(f^{-1}(s))}{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{k+1})(t-s)}.$$

Aplicando as mudanças de variáveis $t = f(x)$ e $s = f(y)$, obtemos

$$\sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{k+1}} R_k(x) R_k(y) = \frac{R_{n+1}(x) R_n(y) - R_n(x) R_{n+1}(y)}{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{k+1})(f(x) - f(y))}.$$

Porém,

$$f(x) - f(y) = \frac{\Delta \cdot (x - y)}{(cx + d)(cy + d)},$$

e assim

$$\sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{k+1}} R_k(x) R_k(y) = \frac{(cx + d)(cy + d)(R_{n+1}(x)R_n(y) - R_n(x)R_{n+1}(y))}{\Delta \cdot (x - y)(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{k+1})},$$

e então obtemos (4.1.9). Para provarmos a equação (4.1.10) procedemos de forma similar. De (2.2.4), $P_n(t) = R_n(f^{-1}(t))$, então, da equação (4.1.8), temos

$$\sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1}} R_k^2(f^{-1}(t)) = \frac{\frac{d}{dx}[R_{n+1}(f^{-1}(t))]R_n(f^{-1}(t)) - \frac{d}{dx}[R_n(f^{-1}(t))]R_{n+1}(f^{-1}(t))}{\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1}}.$$

Como $\frac{d}{dx}[R_n(f^{-1}(t))] = [f^{-1}(t)]' R'_n(f^{-1}(t))$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1}} R_k^2(f^{-1}(t)) &= \frac{[f^{-1}(t)]' R'_{n+1}(f^{-1}(t))R_n(f^{-1}(t)) - [f^{-1}(t)]' R'_n(f^{-1}(t))R_{n+1}(f^{-1}(t))}{\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1}} \\ &= \frac{[f^{-1}(t)]'}{\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1}} \left\{ R'_{n+1}(f^{-1}(t))R_n(f^{-1}(t)) - R'_n(f^{-1}(t))R_{n+1}(f^{-1}(t)) \right\} \end{aligned}$$

Ainda, sendo

$$[f^{-1}(t)]' = \frac{-d(ct - a) + c(dt - b)}{(ct - a)^2} = \frac{\Delta}{(ct - a)^2} \implies [f^{-1}(f(t))] = \frac{(ct + d)^2}{\Delta},$$

e assumindo a mudança $t = f(y)$, obtemos a equação (4.1.10):

$$\sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1}} R_k^2(y) = \frac{(cy + d)^2}{\Delta \cdot (\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1})} \left\{ R'_{n+1}(y)R_n(y) - R'_n(y)R_{n+1}(y) \right\}.$$

Finalmente, para provar as equações (4.1.11) e (4.1.12), basta usarmos a equação (2.2.3). Com isso, a equação (4.1.9) se torna

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1}} \frac{Q_k(t)}{(ct + d)^k} \frac{Q_k(s)}{(cs + d)^k} &= \frac{(ct + d)(cs + d)}{\Delta(\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1})(t - s)} \times \\ &\times \left[\frac{Q_{n+1}(t)}{(ct + d)^{n+1}} \frac{Q_n(s)}{(cs + d)^n} - \frac{Q_n(t)}{(ct + d)^n} \frac{Q_{n+1}(s)}{(cs + d)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{Q_{n+1}(t)Q_n(s)(cs + d) - (ct + d)Q_n(t)Q_{n+1}(s)}{\Delta(\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1})(ct + d)^n (cs + d)^n (t - s)}. \end{aligned}$$

Por fim, utilizando da equação (2.2.3) na equação (4.1.10) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1}} \frac{Q_k^2(t)}{(ct + d)^{2k}} &= \frac{(ct + d)^2}{\Delta(\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1})} \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{Q_{n+1}(t)}{(ct + d)^{n+1}} \right] \frac{Q_n(t)}{(ct + d)^n} - \frac{d}{dx} \left[\frac{Q_n(t)}{(ct + d)^n} \right] \frac{Q_{n+1}(t)}{(ct + d)^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{(ct + d)^2}{\Delta(\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1})} \left\{ \frac{Q'_{n+1}(t)Q_n(t) - Q'_n(t)Q_{n+1}(t) - cQ_n(t)Q_{n+1}(t)}{(ct + d)^{2n+1}} \right\} \\ &= \frac{Q'_{n+1}(t)Q_n(t) - Q'_n(t)Q_{n+1}(t) - cQ_n(t)Q_{n+1}(t)}{\Delta(\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1})(ct + d)^{2n-1}}. \end{aligned}$$

■

4.2 Propriedades dos zeros

Os zeros de polinômios que pertencem a uma sequência de polinômios ortogonais na reta real possuem propriedades bem difundidas, como exemplo temos que estes são simples e pertencem ao intervalo de ortogonalidade $I = (l, r) \in \mathbb{R}$. Ainda, para $n > 1$, os zeros de $P_n(t)$ se entrelaçam com os zeros de $P_{n+1}(t)$. A seguir temos um resultado que aborda propriedades similares para os polinômios T-Möbius.

Teorema 4.2.1. *Seja $P_n(t)$ um polinômio de grau $n \geq 1$ que pertence à sequência $P = \{P_n\}_{n=0}^\infty$ de polinômios ortogonais definidos em um dado intervalo $I = (l, r)$ da reta real, tal que $P_n(a/c) \neq 0$ para todo n . Então os zeros dos polinômios T-Möbius $Q_n(t)$ correspondentes, para $n \geq 1$, pertencem à curva de ortogonalidade Γ , como definida em (4.1.5), e são todos simples.*

Demonstração. Dos Teoremas 2.2.1 e 2.2.2, segue que os zeros $\zeta_1^n, \zeta_2^n, \dots, \zeta_n^n$ dos polinômios T-Möbius $Q_n(t)$ são relacionados com os zeros $\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_n^n$ dos polinômios originários $P_n(t)$ pelas relações

$$\zeta_1^n = f^{-1}(\xi_1^n), \zeta_2^n = f^{-1}(\xi_2^n), \dots, \zeta_n^n = f^{-1}(\xi_n^n),$$

desde que a/c não seja um zero de $P_n(t)$. Isto nos mostra que os zeros de $Q_n(t)$ são todos finitos e estão sobre a curva Γ , que corresponde à imagem do intervalo $I = (l, r)$ sob a ação da inversa da transformação de Möbius $f^{-1}(t)$. Ainda, tais zeros também são simples, visto que a transformação de Möbius é bijetiva no plano complexo estendido. ■

Teorema 4.2.2. *Os zeros de quaisquer dois polinômios consecutivos $Q_n(t)$ e $Q_{n+1}(t)$, para $n \geq 1$, que pertencem à sequência $Q = \{Q_n(t)\}_{n=0}^\infty$ de polinômios T-Möbius ortogonais, se entrelaçam na curva de ortogonalidade Γ , dada por (4.1.5).*

Demonstração. As transformações de Möbius são bijetoras em $\hat{\mathbb{C}}$. Em particular, isso implica que a imagem do intervalo $I = (l, r) \in \mathbb{R}$ sobre a aplicação $y = f^{-1}(t)$, que é a curva Γ , é uma curva sem auto-intersecção. Portanto, a ordenação de qualquer conjunto de pontos contido no intervalo I é inalterada ou apenas invertida por uma transformação de Möbius. Devido ao entrelaçamento dos zeros de $P_{n+1}(t)$ com os zeros de $P_n(t)$ em I , podemos concluir a partir do exposto que os zeros do polinômio T-Möbius $Q_{n+1}(t)$ também serão entrelaçados com os zeros de $Q_n(t)$ sobre Γ . ■

4.3 Polinômios T-Möbius ortogonais clássicos

Detalhados na Seção 3.1.4, os polinômios ortogonais clássicos possuem diversas particularidades que chamam a atenção em sua teoria. Esta classe polinomial, por sua vez, foi a primeira a ser sistematicamente estudada, justificando assim sua grande importância no ramo da matemática aplicada, física e engenharia. Suas propriedades por vezes não são satisfeitas por outras classes polinomiais ortogonais: por exemplo, estes satisfazem equações diferenciais de segunda ordem, sua função peso também satisfaz uma equação diferencial, existem relações do tipo Rodrigues e funções geradoras nas quais tais polinômios podem ser obtidos, dentre outras.

Nesta seção mostramos que as funções racionais e polinômios T-Möbius que surgem de sequências de polinômios ortogonais clássicos na reta real satisfazem propriedades similares.

Teorema 4.3.1. *Seja P uma sequência de polinômios ortogonais na reta real tal que cada polinômio $P_n(t)$, para $n \geq 0$, satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem da forma (3.1.22). Então, cada função racional T -Möbius $R_n(t)$ pertencente à sequência $R = \{R_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfará uma equação diferencial de segunda ordem da forma*

$$F(t)R_n''(t) + G(t)R_n'(t) + H_n R_n(t) = 0, \quad (4.3.1)$$

onde $F(t)$ e $G(t)$ são polinômios independentes de n , cujos graus são no máximo 4 e 3, respectivamente, e H_n é uma constante que pode depender de n . Semelhantemente, cada polinômio T -Möbius $Q_n(t)$ pertencente à sequência $Q = \{Q_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem da forma

$$\mathcal{F}(t)Q''(t) + \mathcal{G}_n Q_n'(t) + \mathcal{H}_n(t)Q_n(t) = 0, \quad (4.3.2)$$

onde, agora, $\mathcal{F}(t)$ possui grau no máximo 4 e não depende de n , enquanto $\mathcal{G}_n(t)$ e $\mathcal{H}_n(t)$ são polinômios com graus no máximo 3 e 2, respectivamente, que geralmente dependem de n .

Demonstração. Inserindo a equação (2.2.4), com variável real t , na equação (3.1.22), temos

$$p(t) \left[\frac{d^2}{dt^2} R_n(f^{-1}(t)) \right] + g(t) \left[\frac{d}{dt} R_n(f^{-1}(t)) \right] + h_n R_n(f^{-1}(t)) = 0.$$

Desenvolvendo a segunda derivada com o auxílio da regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} R_n(f^{-1}(t)) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} R_n(f^{-1}(t)) \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{df^{-1}(t)} R_n(f^{-1}(t)) \cdot \frac{d}{dt} f^{-1}(t) \right] \\ &= \frac{d^2}{df^{-1}(t)^2} R_n(f^{-1}(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} f^{-1}(t) \right)^2 + \frac{d}{df^{-1}(t)} R_n(f^{-1}(t)) \frac{d^2}{dt^2} f^{-1}(t), \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} p(t) \left[\frac{d^2 f^{-1}(t)}{dt^2} \frac{dR_n(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)} + \left(\frac{df^{-1}(t)}{dt} \right)^2 \frac{d^2 R_n(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)^2} \right] + \\ + g(t) \left[\frac{df^{-1}(t)}{dt} \frac{dR_n(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)} \right] + h_n R_n(f^{-1}(t)) = 0. \end{aligned}$$

Ainda, utilizando da mudança de variável $t = f(y)$, teremos

$$\begin{aligned} p(f(y)) \left[\frac{d^2 f^{-1}(f(y))}{df(y)^2} \frac{dR_n(f^{-1}(f(y)))}{df^{-1}(f(y))} + \left(\frac{df^{-1}(f(y))}{df(y)} \right)^2 \frac{d^2 R_n(f^{-1}(f(y)))}{df^{-1}(f(y))^2} \right] \\ + g(f(y)) \left[\frac{df^{-1}(f(y))}{df(y)} \frac{dR_n(f^{-1}(f(y)))}{df^{-1}(f(y))} \right] + h_n R_n(f^{-1}(f(y))) = 0 \\ \Rightarrow p(f(y)) \left[\frac{d^2 f^{-1}(f(y))}{df(y)^2} \frac{dR_n(y)}{dy} + \left(\frac{df^{-1}(f(y))}{df(y)} \right)^2 \frac{d^2 R_n(y)}{dy^2} \right] + \\ + g(f(y)) \left[\frac{df^{-1}(f(y))}{df(y)} \frac{dR_n(y)}{dy} \right] + h_n R_n(y) = 0. \end{aligned}$$

E, em posse das relações

$$\frac{df^{-1}(f(y))}{df(y)} = \frac{(cy + d)^2}{\Delta} \quad \text{e} \quad \frac{d^2 f^{-1}(f(y))}{df(y)^2} = \frac{2c(cy + d)^3}{\Delta^2},$$

a equação anterior resulta em

$$\begin{aligned} p(f(y)) \left[\frac{2c(cy+d)^3}{\Delta^2} R_n''(y) + \left(\frac{(cy+d)^2}{\Delta} \right)^2 R_n''(y) \right] + g(f(y)) \left[\frac{(cy+d)^2}{\Delta} R_n'(y) \right] + h_n R_n(y) &= 0 \\ \Rightarrow \left[\frac{(cy+d)^4}{\Delta^2} p(f(y)) \right] R_n''(y) + \left[\frac{2c(cy+d)^3}{\Delta^2} p(f(y)) + \frac{(cy+d)^2}{\Delta} g(f(y)) \right] R_n'(y) + h_n R_n(y) &= 0. \end{aligned}$$

Tal equação possui a forma de (4.3.1), desde que definamos

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{(cy+d)^4}{\Delta^2} p(f(y)), \\ G(y) &= \frac{2c(cy+d)^3}{\Delta^2} p(f(y)) + \frac{(cy+d)^2}{\Delta} g(f(y)), \text{ e} \\ H_n &= h_n. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Agora, como $p(t)$ e $g(t)$ são polinômios com grau no máximo 2 e 1, respectivamente, é conveniente introduzir os polinômios

$$\Phi(t) = (ct+d)^j p(f(t)) \quad \text{e} \quad \Psi(t) = (ct+d)^k g(f(t)), \quad (4.3.4)$$

que são os polinômios T-Möbius de $p(t)$ e $g(t)$, respectivamente. Notemos que $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$ possuem graus j e k , respectivamente, sendo j no máximo 2 e k no máximo 1. Desta forma concluímos que $F(t)$ e $G(t)$ são polinômios com graus no máximo 4 e 3, respectivamente.

Provemos então a equação (4.3.2). Inserindo a equação (2.2.2), com variável real t , em (4.3.1) temos:

$$F(t) \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{Q_n(t)}{(ct+d)^n} \right] + G(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{Q_n(t)}{(ct+d)^n} \right] + H_n \left[\frac{Q_n(t)}{(ct+d)^n} \right] = 0.$$

Calculando as derivadas, temos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{Q_n(t)}{(ct+d)^n} \right] = \frac{Q_n'(t)(ct+d)^n - Q_n(t)cn(ct+d)^{n-1}}{(ct+d)^{2n}} = \frac{Q_n'(t)}{(ct+d)^n} - \frac{cnQ_n(t)}{(ct+d)^{n+1}},$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{Q_n(t)}{(ct+d)^n} \right] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{Q_n'(t)}{(ct+d)^n} - \frac{cnQ_n(t)}{(ct+d)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{Q_n''(t)}{(ct+d)^n} - \frac{cnQ_n'(t)}{(ct+d)^{n+1}} - \frac{cnQ_n'(t)}{(ct+d)^{n+1}} + \frac{c^2n(n+1)Q_n(t)}{(ct+d)^{2n+2}} \\ &= \frac{Q_n''(t)}{(ct+d)^n} - \frac{2cnQ_n'(t)}{(ct+d)^{n+1}} + \frac{c^2n(n+1)Q_n(t)}{(ct+d)^{2n+2}}. \end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned} F(t) \left[\frac{Q_n''(t)}{(ct+d)^n} - \frac{2cnQ_n'(t)}{(ct+d)^{n+1}} + \frac{c^2n(n+1)Q_n(t)}{(ct+d)^{2n+2}} \right] \\ + G(t) \left[\frac{Q_n'(t)}{(ct+d)^n} - \frac{cnQ_n(t)}{(ct+d)^{n+1}} \right] + H_n \left[\frac{Q_n(t)}{(ct+d)^n} \right] = 0 \Rightarrow \\ F(t)Q_n''(t) + \left[\frac{-2cnF(t)}{(ct+d)} + G(t) \right] Q_n'(t) + \left[\frac{c^2n(n+1)F(t)}{(ct+d)^2} - \frac{cnG(t)}{(ct+d)} + H_n \right] Q_n(t) = 0, \end{aligned}$$

que possui a mesma forma que a equação (4.3.2), contanto que definamos

$$\mathcal{F}(t) = F(t) = \frac{(ct + d)^4}{\Delta^2} p(f(t)), \quad (4.3.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &= G(t) - \frac{2cnF(t)}{(ct + d)} \\ &= \frac{2c(ct + d)^3}{\Delta^2} p(f(t)) + \frac{(ct + d)^2}{\Delta} g(f(t)) - \frac{2cn(ct + d)^3}{\Delta^2} p(f(t)) \\ &= \frac{2c(1 - n)(ct + d)^3}{\Delta^2} p(f(t)) + \frac{(ct + d)^2}{\Delta} g(f(t)) \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n(t) &= \frac{c^2n(n + 1)F(t)}{(ct + d)^2} - \frac{cnG(t)}{(ct + d)} + H_n \\ &= \frac{c^2n(n + 1)(ct + d)^2}{\Delta^2} p(f(t)) - \frac{2c^2n(ct + d)^2}{\Delta^2} p(f(t)) - \frac{cn(ct + d)}{\Delta} g(f(t)) + h_n \\ &= \frac{c^2n(n - 1)(ct + d)^2}{\Delta^2} p(f(t)) - \frac{cn(ct + d)}{\Delta} g(f(t)) + h_n. \end{aligned}$$

Note que, em termos dos polinômios T-Möbius $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$, dados na equação (4.3.4), podemos reescrever $\mathcal{F}(t)$, $\mathcal{G}(t)$ e $\mathcal{H}_n(t)$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= \frac{(ct + d)^{4-j}}{\Delta^2} \Phi(t), \\ \mathcal{G}(t) &= \frac{2c(1 - n)(ct + d)^{3-j}}{\Delta^2} \Phi(t) + \frac{(ct + d)^{2-k}}{\Delta} \Psi(t) \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{H}_n(t) = \frac{c^2n(n - 1)(ct + d)^{2-j}}{\Delta^2} \Phi(t) - \frac{cn(ct + d)^{1-k}}{\Delta} \Psi(t) + h_n,$$

provando que $\mathcal{F}(t)$, $\mathcal{G}(t)$ e $\mathcal{H}_n(t)$ são polinômios de graus no máximo 4, 3 e 2, respectivamente. ■

O resultado a seguir nos mostra que funções peso de funções racionais e polinômios T-Möbius ortogonais também satisfazem equações diferenciais de primeira ordem.

Teorema 4.3.2. *Seja $w(t)$ a função peso de uma sequência de polinômios ortogonais clássicos $P = \{P_n(t)\}_{n=0}^\infty$, tal que a equação diferencial de primeira ordem homogênea, dada em (3.1.23), é satisfeita. Então, a correspondente função peso $\omega(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial de primeira ordem:*

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} = \frac{G(t) - F'(t)}{F(t)}, \quad (4.3.7)$$

onde $F(t)$ e $G(t)$ são os mesmos coeficientes que aparecem na equação diferencial (4.3.1). De forma semelhante, a função peso variável $\omega_{m,n}(t)$, associada a sequência $Q = \{Q_n(t)\}_{n=0}^\infty$ de polinômios T-Möbius, satisfaz a seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{\omega'_{m,n}(t)}{\omega_{m,n}(t)} = \frac{\mathcal{G}_{m,n}(t) + \mathcal{F}'(t)}{\mathcal{F}(t)}, \text{ onde } \mathcal{G}_{m,n}(t) = \frac{\mathcal{G}_m(t) - \mathcal{G}_n(t)}{2}, \quad (4.3.8)$$

sendo $\mathcal{F}(t)$, $\mathcal{G}_m(t)$ e $\mathcal{G}_n(t)$ os polinômios definidos em (4.3.5) e (4.3.6), respectivamente.

Demonstração. Invertendo a relação (4.1.2), podemos expressar $w(t)$ em termos de $\omega(f^{-1}(t))$

$$\omega(t) = w(f^{-1}(t))f'(t) \implies w(t) = w(f(f^{-1}(t))) = \frac{\omega(f^{-1}(t))}{f'(f^{-1}(t))} = \frac{\omega(f^{-1}(t))}{\left(\frac{df(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)}\right)}. \quad (4.3.9)$$

Calculando a derivada de $w(t)$, obtemos:

$$w'(t) = \frac{\frac{d\omega(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)}(f^{-1}(t))' \left(\frac{df(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)}\right) - \omega(f^{-1}(t))(f^{-1}(t))' \left(\frac{d^2 f(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)^2}\right)}{\left(\frac{df(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)}\right)^2} \quad (4.3.10)$$

Inserindo as equações (4.3.9) e (4.3.10) em (3.1.23) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{w'(t)}{w(t)} &= \frac{\frac{d\omega(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)}(f^{-1}(t))' \left(\frac{df(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)}\right) - \omega(f^{-1}(t))(f^{-1}(t))' \left(\frac{d^2 f(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)^2}\right)}{\omega(f^{-1}(t)) \left(\frac{df(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)}\right)} \\ &= (f^{-1}(t))' \left[\frac{\left(\frac{d\omega(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)}\right)}{\omega(f^{-1}(t))} - \frac{\left(\frac{d^2 f(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)^2}\right)}{\left(\frac{df(f^{-1}(t))}{df^{-1}(t)}\right)} \right] = \frac{g(t) - p'(t)}{p(t)}. \end{aligned}$$

Ainda, adotando a mudança de variável $t = f(y)$, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{df^{-1}(f(y))}{df(y)} \left[\frac{\left(\frac{d\omega(y)}{dy}\right)}{\omega(y)} - \frac{\left(\frac{d^2 f(y)}{dy^2}\right)}{\left(\frac{df(y)}{dy}\right)} \right] &= \frac{df^{-1}(f(y))}{df(y)} \left[\frac{\omega'(y)}{\omega(y)} - \frac{f''(y)}{f'(y)} \right] \\ &= \frac{1}{\left(\frac{df(y)}{dy}\right)} \left[\frac{\omega'(y)}{\omega(y)} - \frac{f''(y)}{f'(y)} \right] \\ &= \frac{g(f(y)) - \frac{dp(f(y))}{df(y)}}{p(f(y))}, \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{\omega'(y)}{\omega(y)} = \left[\frac{g(f(y)) - \left(\frac{dp(f(y))}{df(y)}\right)}{p(f(y))} \right] f'(y) + \frac{f''(y)}{f'(y)}.$$

Agora, utilizando das relações

$$f'(t) = \frac{\Delta}{(ct + d)^2}, \quad f''(t) = \frac{-2c\Delta}{(ct + d)^3} \quad \text{e} \quad \frac{dp(f(t))}{df(t)} = \frac{1}{f'(t)} \frac{dp(f(t))}{dt},$$

conseguimos verificar, utilizando (4.3.3) neste processo, que

$$\begin{aligned}
\frac{\omega'(y)}{\omega(y)} &= \left[\frac{g(f(y)) - \left(\frac{(cy+d)^2}{\Delta} \frac{dp(f(y))}{dy} \right)}{p(f(y))} \right] \frac{\Delta}{(cy+d)^2} - \frac{-2c\Delta}{(cy+d)^3} \frac{(ct+d)^2}{\Delta} \\
&= \frac{\Delta}{(cy+d)^2} \frac{g(f(y))}{p(f(y))} - \frac{\left(\frac{dp(f(y))}{dy} \right)}{p(f(y))} - \frac{2c}{(cy+d)} \\
&= \frac{\Delta(cy+d)^2 g(f(y)) - (cy+d)^4 \left(\frac{dp(f(y))}{dy} \right) - 2c(cy+d)^3 p(f(y))}{(cy+d)^4 p(f(y))} \\
&= \frac{\frac{1}{\Delta^2} \left(\Delta(cy+d)^2 g(f(y)) - (cy+d)^4 \left(\frac{dp(f(y))}{dy} \right) - 2c(cy+d)^3 p(f(y)) \right)}{\frac{(cy+d)^4 p(f(y))}{\Delta^2}} \\
&= \frac{1}{F(y)} \left\{ \frac{(cy+d)^2 g(f(y))}{\Delta} - \frac{(cy+d)^4 \left(\frac{dp(f(y))}{dy} \right)}{\Delta^2} - \frac{2c(cy+d)^3 p(f(y))}{\Delta^2} \right\} \\
&= \frac{1}{F(y)} \left\{ \frac{(cy+d)^2 g(f(y))}{\Delta} + \frac{2c(cy+d)^3 p(f(y))}{\Delta^2} - \left[\frac{4c(cy+d)^3 p(f(y))}{\Delta^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(cy+d)^4 \left(\frac{dp(f(y))}{dy} \right)}{\Delta^2} \right] \right\} \\
&= \frac{G(y) - F'(y)}{F(y)},
\end{aligned}$$

assim como queríamos. Por fim, (4.3.8), procede de forma similar. De (4.1.4) segue que $\omega(t) = \omega_{m,n}(t)(ct+d)^{m+n}$. Portanto, calculando a derivada, obtemos

$$\omega'(t) = \omega'_{m,n}(t)(ct+d)^{m+n} + c(m+n)(ct+d)^{m+n-1}\omega_{m,n}(t),$$

assim, por (4.3.7), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} &= \frac{\omega'_{m,n}(t)(ct+d)^{m+n} + c(m+n)(ct+d)^{m+n-1}\omega_{m,n}(t)}{\omega_{m,n}(t)(ct+d)^{m+n}} \\
&= \frac{\omega'_{m,n}(t)}{\omega_{m,n}(t)} + \frac{c(m+n)}{(ct+d)} = \frac{G(t) - F'(t)}{F(t)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\omega'_{m,n}(t)}{\omega_{m,n}(t)} = \frac{G(t) - F'(t)}{F(t)} - \frac{c(m+n)}{(ct+d)}.$$

De (4.3.5) segue que $F(t) = \mathcal{F}(t)$ e, portanto, $F'(t) = \mathcal{F}'(t)$. Ainda, de (4.3.6) temos

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{G}_m(t) + \mathcal{G}_n(t)}{2} &= \frac{1}{2} \left[G(t) - \frac{2cm}{(ct+d)} F(t) + G(t) - \frac{2cn}{(ct+d)} F(t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2G(t) - \frac{2c(m+n)}{(ct+d)} F(t) \right] = G(t) - \frac{c(m+n)}{(ct+d)} F(t), \end{aligned}$$

logo,

$$G(t) = \frac{\mathcal{G}_m(t) + \mathcal{G}_n(t)}{2} + \frac{c(m+n)}{(ct+d)} F(t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\omega'_{m,n}(t)}{\omega_{m,n}(t)} &= \frac{\mathcal{G}_m(t) + \mathcal{G}_n(t)}{2F(t)} + \frac{c(m+n)}{(ct+d)} - \frac{F'(t)}{F(t)} - \frac{c(m+n)}{(ct+d)} \\ &= \frac{1}{F(t)} \left[\frac{\mathcal{G}_m(t) + \mathcal{G}_n(t)}{2} - F'(t) \right] = \frac{1}{\mathcal{F}(t)} \left[\frac{\mathcal{G}_m(t) + \mathcal{G}_n(t)}{2} - \mathcal{F}'(t) \right], \end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração. ■

A seguir, fórmulas de Rodrigues para as funções racionais e polinômios T-Möbius são apresentadas.

Teorema 4.3.3. *Seja $P = \{P_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais na reta real que satisfaz uma fórmula de Rodrigues dada em (3.1.25). Então, a função racional T-Möbius $R_n(t)$, definida como em (2.2.1) com variável real t , e os polinômios T-Möbius $Q_n(t)$ satisfazem, respectivamente, as seguintes fórmulas:*

$$R_n(t) = \frac{\Delta^{2n}}{(ct+d)^2} \frac{\epsilon_n}{\omega(t)} D_t^n \left[\frac{F(t)^n}{(ct+d)^{4n-2}} \omega(t) \right]$$

e

$$Q_n(t) = \frac{\Delta^{2n}}{(ct+d)^{n+2}} \frac{\epsilon_n}{\omega_{n,n}(t)} D_t^n \left[\frac{\mathcal{F}(t)^n}{(ct+d)^{2n-2}} \omega_{n,n}(t) \right],$$

onde $F(t) = \mathcal{F}(t)$ é a função definida em (4.3.3), $\omega(t)$ e $\omega_{m,n}(t)$ são as funções peso definidas em (4.1.2) e (4.1.4), respectivamente, e introduzimos o operador diferencial

$$D_t = \frac{1}{f'(t)} \frac{d}{dt} = \frac{(ct+d)^2}{\Delta} \frac{d}{dt}.$$

Demonstração. As fórmulas de Rodrigues apresentadas seguem basicamente da substituição da variável $t = f(y)$ em (3.1.25) e utilizando das igualdades dadas em (2.2.1), com variável real t , (4.1.2) e (4.3.3). De fato, (3.1.25) segue por

$$\begin{aligned} R_n(y) &= P_n(f(y)) = \frac{\epsilon_n}{w(f(y))} \frac{d^n}{df(y)^n} [p(f(y))^n w(f(y))] \\ &= \frac{\Delta}{(cy+d)^2} \frac{\epsilon_n}{\omega(y)} \frac{d^n}{df(y)^n} \left[\left(\frac{\Delta^2 F(y)}{(cy+d)^4} \right)^n \frac{\omega(y)(cy+d)^2}{\Delta} \right] \\ &= \frac{\Delta}{(cy+d)^2} \frac{\epsilon_n}{\omega(y)} \frac{d^n}{df(y)^n} \left[\frac{\Delta^{2n-1} F(y)^n}{(cy+d)^{4n-2}} \omega(y) \right] \\ &= \frac{\Delta^{2n}}{(cy+d)^2} \frac{\epsilon_n}{\omega(y)} \frac{d^n}{df(y)^n} \left[\frac{F(y)^n}{(cy+d)^{4n-2}} \omega(y) \right]. \end{aligned}$$

De forma similar, utilizando das equações (2.2.2), com variável real t , e (4.1.4) em (4.3.3) temos

$$\begin{aligned} Q_n(y) &= (cy + d)^n R_n(y) = (cy + d)^n \frac{\Delta^{2n}}{(cy + d)^2} \frac{\epsilon_n}{\omega(y)} \frac{d^n}{df(y)^n} \left[\frac{F(y)^n}{(cy + d)^{4n-2}} \omega(y) \right] \\ &= \frac{\Delta^{2n}}{(cy + d)^{2-n}} \frac{\epsilon_n}{\omega_{n,n}(y)(cy + d)^{n+n}} \frac{d^n}{df(y)^n} \left[\frac{F(y)^n}{(cy + d)^{4n-2}} \omega_{n,n}(y)(cy + d)^{n+n} \right] \\ &= \frac{\Delta^{2n}}{(cy + d)^{2+n}} \frac{\epsilon_n}{\omega_{n,n}(y)} \frac{d^n}{df(y)^n} \left[\frac{F(y)^n}{(cy + d)^{2n-2}} \omega_{n,n}(y) \right], \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Como propriedade final, apresentamos a existência de funções geradores para funções racionais e polinômios T-Möbius.

Teorema 4.3.4. *Seja $P = \{P_n(t)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais clássicos cuja função geradora é uma das apresentadas em (3.1.26). Então, as correspondentes funções geradoras da sequência $R = \{R_n(t)\}_{n=0}^\infty$ de funções racionais T-Möbius $R_n(t)$ são como seguem:*

$$\Phi(y, s) = \phi(f(y), s) \quad \text{ou} \quad \Psi(y, s) = \psi(f(y), s),$$

respectivamente. De forma semelhante, as funções geradoras correspondentes da sequência $Q = \{Q_n(t)\}_{n=0}^\infty$ de polinômios T-Möbius $Q_n(t)$ são

$$\Phi(y, \tau) = \phi(f(y), (cy + d)\tau) \quad \text{ou} \quad \Psi(y, \tau) = \psi(f(y), (cy + d)\tau),$$

respectivamente.

Demonstração. Temos, de uma só vez, que

$$\Phi(y, s) = \phi(f(y), s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(f(y)) s^n = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(y) s^n$$

e

$$\Psi(y, s) = \psi(f(y), s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(f(y)) \frac{s^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(y) \frac{s^n}{n!}.$$

E, da mesma forma, temos

$$\Phi(y, \tau) = \phi(f(y), (cy + d)\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(f(y)) (cy + d)^n \tau^n = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(y) \tau^n$$

e

$$\Psi(y, \tau) = \psi(f(y), (cy + d)\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(f(y)) \frac{(cy + d)^n \tau^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(y) \frac{\tau^n}{n!}.$$

■

4.3.1 Polinômios T-Möbius relativos aos polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite e suas relações

Nesta subseção apresentamos uma aplicação da teoria desenvolvida anteriormente. Mais especificamente, mostramos que as sequências de polinômios de Hermite, Laguerre e Jacobi são relacionadas entre si por uma transformação de Möbius.

4.3.1.1 Polinômios de Jacobi para Laguerre

As transformações de Möbius são ricas suficientes para mapear qualquer ponto no plano complexo estendido, sendo o infinito apenas mais um ponto neste conjunto. Assim, podemos transformar um dado intervalo finito da linha real em semi-infinito. Seguindo esta ideia, podemos mostrar de maneira simples que os polinômios de Laguerre podem ser obtidos dos polinômios de Jacobi através de uma transformação de Möbius seguida por um limite adequado.

Os polinômios de Laguerre são polinômios ortogonais no intervalo $I = (0, \infty)$ da reta real com respeito à função peso $w(t) = t^\alpha e^{-t}$. Os polinômios de Jacobi são ortogonais no intervalo real $I = (-1, 1)$ com relação à função peso $w(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$. Portanto, definamos os polinômios T-Möbius, relativos aos polinômios de Jacobi, estes serão dados por $\mathcal{J}_n^{(\alpha, \beta)}(t) = (ct + d)^n J_n^{(\alpha, \beta)}(f(t))$. Precisamos então definir uma transformação de Möbius $f^{-1}(t)$ que leve os pontos $l = -1$ e $r = 1$, respectivamente, para $\lambda = 0$ e $\rho = \infty$. De (2.1.1), facilmente vemos que tal condição será satisfeita para $c = a$ e $d = -b$. Com isto, temos que o polinômio T-Möbius de grau 1 será $\mathcal{J}_1^{(\alpha, \beta)}(t) = a(\alpha + 1)t + b(\beta + 1)$. Comparando com o correspondente polinômio de Laguerre de grau 1, dado por $L_1^{(\beta)}(t) = \beta + 1 - t$, concluimos que é suposto $a = -1/(\alpha + 1)$ e $b = 1$ para que sejam iguais os polinômios. Então, podemos verificar que os outros polinômios T-Möbius $\mathcal{J}_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ serão iguais aos polinômios de Laguerre $L_n^{(\beta)}(t)$ após aplicarmos o limite $\alpha \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\begin{aligned} L_n^{(\beta)}(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{t + \alpha + 1}{\alpha + 1} \right)^n (-1)^n J_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{t - \alpha - 1}{t + \alpha + 1} \right) \\ &= (-1)^n \lim_{\alpha \rightarrow \infty} J_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{t - \alpha}{t + \alpha} \right). \end{aligned}$$

Utilizando a relação de simetria $J_n^{(\beta, \alpha)}(t) = (-1)^n J_n^{(\alpha, \beta)}(-t)$ podemos também obter

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{t + \beta + 1}{\beta + 1} \right)^n J_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{\beta + 1 - t}{\beta + 1 + t} \right) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} J_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{\beta - t}{\beta + t} \right).$$

Em resumo, os polinômios de Laguerre $(-1)^n L_n^{(\beta)}(t)$ podem ser obtidos por polinômios de Jacobi $J_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ pela composição com a transformação de Möbius $M_\alpha(t) = (t - \alpha)/(t + \alpha)$ e aplicando o limite $\alpha \rightarrow \infty$. De modo similar, podemos obter $L_n^{(\alpha)}(t)$ compondo os respectivos polinômios de Jacobi por $M_\beta(t) = (-t + \beta)/(t + \beta)$ e aplicando o limite $\beta \rightarrow \infty$.

Por fim, mostremos que a função peso dos polinômios de Laguerre pode ser obtida da função peso dos polinômios de Jacobi a partir do mesmo processo. Notemos que $\Omega_{m, n}(t) \rightarrow \omega(t)$ quando $\alpha \rightarrow \infty$ visto que $c \rightarrow 0$ neste limite. Portanto, é suficiente para provarmos que $w(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ retorna $\omega(t) = t^\beta e^{-t}$ com o limite $\alpha \rightarrow \infty$ após aplicarmos a transformação acima. De (4.3.7), podemos verificar que a função peso transformada é

$$\omega(t) = t^\beta (t + \alpha + 1)^{-\alpha - \beta - 2} \kappa(\alpha, \beta),$$

onde $\kappa(\alpha, \beta)$ é a constante de integração. A partir disso, podemos ver que a função peso de Laguerre é obtida após definirmos $\kappa(\alpha, \beta) = \alpha^{\beta+1}(\alpha + 1)^{\alpha+1}$ e aplicarmos o limite $\alpha \rightarrow \infty$. Todas as propriedades dos polinômios de Laguerre podem ser obtidas das propriedades de Jacobi por argumentos semelhantes.

4.3.1.2 Polinômios de Jacobi para Hermite

De forma semelhante, mostremos que os polinômios de Hermite também podem ser obtidos por polinômios de Jacobi através de uma transformação de Möbius seguida por um limite específico. Neste exemplo, é intuitivo pensar que devemos transformar o intervalo $(-1, 1)$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Porém tal feito não é possível através de transformações de Möbius, visto que estas são bijetivas no plano complexo estendido e os pontos $t = \pm\infty$ são considerados iguais em $\hat{\mathbb{C}}$. Portanto, devemos proceder de uma maneira diferente do caso anterior.

Inicialmente investigamos alguma transformação que leve o intervalo $(-1, 1)$ em $(-\xi, \xi)$ para algum $\xi > 0$ e, então, aplicaremos o limite $\xi \rightarrow 0$. Impondo ainda que o ponto 0 seja levado a 0, descobrimos que a transformação de Möbius ideal será $f^{-1}(t) = a\xi$, cuja inversa é $f(t) = a/\xi$, sendo a arbitrário.

Agora, de acordo com as equações (4.1.2), (4.1.3) ou (4.3.8), temos que a função peso dos polinômios de Jacobi $w(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ serão transformadas em

$$\omega(t) = \frac{1}{\xi} \left(1 - \frac{t}{\xi}\right)^\alpha \left(1 + \frac{t}{\xi}\right)^\beta \kappa(\alpha, \beta),$$

sendo $\kappa(\alpha, \beta)$ a constante de integração. A partir disso, podemos ver claramente que a função peso de Hermite $\omega(t) = e^{-t^2}$ é obtida tomando $\beta = \alpha$, $\kappa(\alpha, \beta) = \xi = \sqrt{\alpha}$ e aplicando o limite $\alpha \rightarrow \infty$. Desta forma, os polinômios T-Möbius serão

$$\mathcal{J}_n^{(\alpha)}(t) = (a^n \sqrt{\alpha}) J_n^{(\alpha, \alpha)}\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Assim, os limites de $\mathcal{J}_n^{(\alpha)}(t)$ para $\alpha \rightarrow \infty$ só existirão se a for inversamente proporcional a α . De fato, se tomarmos $a = 2/\alpha$, aplicando o limite $\alpha \rightarrow \infty$ e multiplicando os polinômios resultantes por $n!$ para normalizá-los, obtemos uma correspondência completa entre os polinômios T-Möbius $\mathcal{J}_n^{(\alpha)}(t)$ e os polinômios de Hermite $H_n(t)$, dada por

$$H_n(t) = n! \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathcal{J}_n^{(\alpha)}(t) = n! \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right)^n J_n^{(\alpha, \alpha)}\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Aplicação da transformação de Möbius em outras classes polinomiais

Neste capítulo apresentamos, de modo geral, a aplicação da transformação de Möbius em algumas classes de polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos da forma (3.2.1).

Ressaltamos ainda que neste estudo apenas tal característica foi analisada, diferentemente do capítulo anterior onde diversos aspectos da classe polinomial originária foram adaptados.

5.1 Classes polinomiais

As classes polinomiais aqui apresentadas satisfazem uma relação de recorrência de três termos da forma (3.2.1).

5.1.1 Polinômios L-ortogonais na reta real

Nesta subseção são apresentados os polinômios L-ortogonais na reta real, em conjunto com definições e propriedades importantes de tais polinômios. Foi utilizado nesta seção o texto [21].

Inicialmente consideremos uma medida forte em (l, r) , $0 \leq l < r \leq \infty$, e os momentos

$$\mu_m^\psi = \int_l^r t^m d\psi(t), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.1.1)$$

Os determinantes de Hankel $H_n^{(m)}$, definidos em (3.1.6), são positivos para m e n inteiros e $n > 0$.

Definição 5.1.1. Sendo ψ uma medida forte no intervalo (l, r) , $0 \leq l < r \leq \infty$, $t \in \mathbb{R}$ e $B_n(t)$ um polinômio mônico de grau exatamente n , dizemos que $B = \{B_n(t)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios L-ortogonais com relação a $d\psi(t)$ em (l, r) se

$$\int_l^r t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n > 0, & \text{se } s = n, \end{cases} \quad (5.1.2)$$

ou, de maneira equivalente,

$$\int_l^r t^k B_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } k = -1, -2, \dots, -n+1, -n, \\ \rho_n > 0, & \text{para } k = 0. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

A existência dos polinômios L-ortogonais $B_n(t)$ também depende dos determinantes de Hankel. Assim, escrevendo $B_n(t)$ em termos de seus coeficientes, ou seja,

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} t^k, \quad \text{com } b_{n,n} = 1, \quad (5.1.4)$$

obtemos

$$\int_l^r t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \mu_{-n+s+k}^\psi = \begin{cases} 0, & \text{se } s = 0, 1, \dots, n-1, \\ \rho_n > 0, & \text{se } s = n. \end{cases} \quad (5.1.5)$$

Fazendo $s = 0, 1, \dots, n-1$, em (5.1.5), obtemos um sistema linear e, acrescentando (5.1.4) como a última linha desse sistema, podemos utilizar a Regra de Cramer para escrever $B_n(t)$ da seguinte forma

$$B_n(t) = \frac{1}{H_n^{(-n)}} \begin{vmatrix} \mu_{-n}^\psi & \mu_{-n+1}^\psi & \cdots & \mu_{-1}^\psi & \mu_0^\psi \\ \mu_{-n+1}^\psi & \mu_{-n+2}^\psi & \cdots & \mu_0^\psi & \mu_1^\psi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1}^\psi & \mu_0^\psi & \cdots & \mu_{n-2}^\psi & \mu_{n-1}^\psi \\ 1 & t & \cdots & t^{n-1} & t^n \end{vmatrix}. \quad (5.1.6)$$

Além disso, se substituirmos a última linha do sistema anterior pela equação obtida quando fazemos $s = n$ em (5.1.5), e o resolvermos pela regra de Cramer, podemos escrever ρ_n como

$$\rho_n = \frac{H_{n+1}^{(-n)}}{H_n^{(-n)}}. \quad (5.1.7)$$

Se tomarmos $t = 0$ na relação (5.1.6), o termo independente de B_n torna-se

$$b_{n,0} = B_n(0) = (-1)^n \frac{H_n^{(-n+1)}}{H_n^{(-n)}} \neq 0. \quad (5.1.8)$$

Logo, $t = 0$ não é zero de $B_n(t)$, $n \geq 1$.

Considerando $s = -1$ na integral em (5.1.2), vamos definir

$$\eta_n = \int_l^r t^{-n-1} B_n(t) d\psi(t).$$

Logo, de (5.1.1) e (5.1.4), obtemos

$$\eta_n = b_{n,n} \mu_{-1}^\psi + b_{n,n-1} \mu_{-2}^\psi + \cdots + b_{n,1} \mu_{-n}^\psi + b_{n,0} \mu_{-n-1}^\psi.$$

Fazendo $s = -1, 0, 1, \dots, n-1$, na integral em (5.1.2), obtemos o sistema

$$\begin{cases} \int_l^r t^{-n-1} B_n(t) d\psi(t) = b_{n,n} \mu_{-1}^\psi + \cdots + b_{n,0} \mu_{-n-1}^\psi = \eta_n \\ \int_l^r t^{-n} B_n(t) d\psi(t) = b_{n,n} \mu_0^\psi + \cdots + b_{n,0} \mu_{-n}^\psi = 0 \\ \vdots \\ \int_l^r t^{-1} B_n(t) d\psi(t) = b_{n,n} \mu_{-1+n}^\psi + \cdots + b_{n,0} \mu_{-1}^\psi = 0 \end{cases},$$

apresentado na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \mu_{-n-1}^\psi & \cdots & \mu_{-1}^\psi \\ \mu_{-n}^\psi & \cdots & \mu_0^\psi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-1}^\psi & \cdots & \mu_{n-1}^\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n,0} \\ b_{n,1} \\ \vdots \\ b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo pela Regra de Cramer, temos

$$B_n(0) = b_{n,0} = \eta_n \frac{H_n^{(-n+1)}}{H_{n+1}^{-(n+1)}}.$$

Utilizando a equação (5.1.8), obtemos

$$\eta_n = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{-(n+1)}}{H_n^{(-n)}}. \quad (5.1.9)$$

Os resultados a seguir discorrem sobre os polinômios associados a $B_n(t)$.

Definição 5.1.2. Os polinômios $C_n(t)$, associados aos polinômios $B_n(t)$, são definidos por

$$C_n(t) = \int_l^r \frac{B_n(s) - B_n(t)}{s - t} d\psi(s). \quad (5.1.10)$$

Teorema 5.1.1. O polinômio associado $C_n(t)$ tem grau $n - 1$, $n \geq 1$.

Demonstração. Seja $B_n(t) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} t^k$. Assim,

$$\begin{aligned} B_n(s) - B_n(t) &= b_{n,n}(s^n - t^n) + b_{n,n-1}(s^{n-1} - t^{n-1}) + \cdots + b_{n,1}(s - t) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{n,k}(s^k - t^k). \end{aligned}$$

Substituindo na equação (5.1.10), desenvolvendo e substituindo pela definição de momento, obtemos

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n b_{n,k} \left(\mu_{k-1}^\psi + \mu_{k-2}^\psi t + \cdots + \mu_1^\psi t^{k-2} + \mu_0^\psi t^{k-1} \right).$$

Desenvolvendo o somatório, encontramos

$$C_n(t) = b_{n,n} \mu_0^\psi t^{n-1} + (b_{n,n} \mu_1^\psi + b_{n,n-1} \mu_0^\psi) t^{n-2} + \cdots + b_{n,1} \mu_0^\psi.$$

Portanto, $C_n(t)$ tem grau $n - 1$. ■

Além da equação (5.1.10), os polinômios $C_n(t)$ também podem ser dados pelo teorema a seguir.

Teorema 5.1.2. Os polinômios $C_n(t)$ satisfazem

$$C_n(t) = \int_l^r s^{-m} \frac{t^m B_n(s) - s^m B_n(t)}{s - t} d\psi(s),$$

sendo $m = 0, 1, \dots, n$.

Demonstração. Para $m = 0$ é imediato, resultando em (5.1.10). Consideremos então $m = 1, 2, \dots, n$. De (5.1.10),

$$C_n(t) = \int_l^r s^{-m} \frac{s^m B_n(s) - s^m B_n(t)}{s - t} d\psi(s).$$

Somando e subtraindo o termo $t^m B_n(s)$, obtemos

$$C_n(t) = \int_l^r s^{-m} \frac{t^m B_n(s) - s^m B_n(t)}{s - t} d\psi(s) + \int_l^r s^{-m} B_n(s) \frac{s^m - t^m}{s - t} d\psi(s).$$

Como $\frac{s^m - t^m}{s - t} = \sum_{k=0}^{m-1} s^k t^{m-1-k}$, então

$$C_n(t) = \int_l^r s^{-m} \frac{t^m B_n(s) - s^m B_n(t)}{s - t} d\psi(s) + \sum_{k=0}^{m-1} t^{m-1-k} \int_l^r s^{k-m} B_n(s) d\psi(s).$$

Mas, como

$$\int_l^r s^{k-m} B_n(s) d\psi(s) = 0,$$

para $m = 1, 2, \dots, n$, e $k = 0, 1, \dots, m-1$, temos que

$$C_n(t) = \int_l^r s^{-m} \frac{t^m B_n(s) - s^m B_n(t)}{s - t} d\psi(s),$$

para $0 \leq m \leq n$. ■

A seguir são exibidos resultados acerca da relação de recorrência de três termos destes polinômios. Mas, primeiramente, apresentamos o seguinte resultado sobre o conjunto de polinômios $\{t^{n-j} B_j\}_{j=0}^n$.

Lema 5.1.1. Para $n \geq 1$, o conjunto de polinômios $\{t^{n-j} B_j\}_{j=0}^n$ é linearmente independente.

Teorema 5.1.3. Os polinômios B_n e C_n satisfazem às seguintes relações de recorrência de três termos, para $n \geq 1$,

$$B_{n+1}(t) = (t - \beta_{n+1})B_n(t) - \alpha_{n+1}tB_{n-1}(t), \quad (5.1.11)$$

$$C_{n+1}(t) = (t - \beta_{n+1})C_n(t) - \alpha_{n+1}tC_{n-1}(t), \quad (5.1.12)$$

com $B_0(t) = 1$, $B_1(t) = t - \beta_1$, $C_0(t) = 0$, $C_1(t) = \mu_0^\psi$ e

$$\beta_1 = \frac{\mu_0^\psi}{\mu_{-1}^\psi}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}, \quad \beta_{n+1} = -\alpha_{n+1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}.$$

Demonstração. Sendo B_n , $n \geq 0$, polinômios mônicos de grau n , o polinômio $B_{n+1}(t) - tB_n(t)$ é de grau no máximo n em t . Dessa forma, pelo Lema 5.1.1, podemos escrever

$$B_{n+1}(t) - tB_n(t) = \sum_{j=0}^n \gamma_j t^{n-j} B_j(t), \quad (5.1.13)$$

e, multiplicando ambos os membros dessa igualdade por t^k e integrando com respeito a ψ em (l, r) , obtemos

$$\int_l^r t^k B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_l^r t^{k+1} B_n(t) d\psi(t) = \sum_{j=0}^n \gamma_j \int_l^r t^{n-j+k} B_j(t) d\psi(t). \quad (5.1.14)$$

- Fazendo $k = -n$ em (5.1.14), obtemos

$$\int_l^r t^{-n} B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_l^r t^{-n+1} B_n(t) d\psi(t) = \sum_{j=0}^n \gamma_j \int_l^r t^{-j} B_j(t) d\psi(t).$$

Note que se $k = 1, 2, \dots, n$, a integral do segundo membro é nula, mas se $k = 0$, por (5.1.3), teremos

$$\sum_{j=0}^n \gamma_j \int_l^r t^{-j} B_j(t) d\psi(t) = \gamma_0 \rho_0,$$

e, ainda por (5.1.3), $0 = \gamma_0 \rho_0$. Assim, como $\rho_0 > 0$, $\gamma_0 = 0$.

- Fazendo $k = -n + 1$ em (5.1.14) e usando o fato de que $\gamma_0 = 0$, obtemos

$$\int_l^r t^{-n+1} B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_l^r t^{-n+2} B_n(t) d\psi(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_j \int_l^r t^{-j+1} B_j(t) d\psi(t).$$

De (5.1.3), temos que $0 = \gamma_1 \rho_1$ e, uma vez que $\rho_1 > 0$, então $\gamma_1 = 0$.

- Analogamente, fazendo $k = -n + 2, -n + 3, \dots, -2$, em (5.1.14), concluimos que $\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_{n-2} = 0$.

Substituindo $\gamma_j = 0$, para $j = 0, 1, \dots, n-2$, em (5.1.13), obtemos

$$B_{n+1}(t) - t B_n(t) = \gamma_n B_n(t) + \gamma_{n-1} t B_{n-1}(t),$$

isto é, os polinômios $\{B_n(t)\}$ satisfazem a uma relação de recorrência de três termos.

Fazendo $k = -1$ em (5.1.14) podemos determinar o valor de γ_{n-1} , ou seja,

$$\int_l^r t^{-1} B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_l^r B_n(t) d\psi(t) = \gamma_n \int_l^r t^{-1} B_n(t) d\psi(t) + \gamma_{n-1} \int_l^r B_{n-1}(t) d\psi(t).$$

Logo,

$$-\int_l^r B_n(t) d\psi(t) = \gamma_{n-1} \int_l^r B_{n-1}(t) d\psi(t),$$

ou seja,

$$\gamma_{n-1} = -\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}.$$

Para obter o valor de γ_n fazemos $k = -(n+1)$ em (5.1.14). Assim,

$$\int_l^r t^{-(n+1)} B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_l^r t^{-n} B_n(t) d\psi(t) = \gamma_n \int_l^r t^{-n-1} B_n(t) d\psi(t) + \gamma_{n-1} \int_l^r t^{-n} B_{n-1}(t) d\psi(t).$$

Logo,

$$0 = \gamma_n \eta_n + \gamma_{n-1} \eta_{n-1} \Rightarrow \gamma_n = -\gamma_{n-1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}.$$

Fazendo, para $n \geq 1$, $\alpha_{n+1} = -\gamma_{n-1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}$ e $\beta_{n+1} = -\alpha_{n+1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}$, obtemos (5.1.11).

As condições iniciais $B_0(t) = 1$ e $B_1(t) = t - \beta_1$ são obtidos do fato de $B_n(t)$ ser mônico e usando

$$0 = \int_l^r t^{-1} B_1(t) d\psi(t) = \int_l^r t^{-1} (t - \beta_1) d\psi(t) = \mu_0^\psi - \beta_1 \mu_{-1}^\psi.$$

Para provar (5.1.12) utilizamos (5.1.11), de onde obtemos

$$B_{n+1}(s) - B_{n+1}(t) = (s - \beta_{n+1})B_n(s) - \alpha_{n+1}sB_{n-1}(s) - (t - \beta_{n+1})B_n(t) + \alpha_{n+1}tB_{n-1}(t).$$

Somando e subtraindo $tB_n(s)$ e $\alpha_{n+1}tB_{n-1}(s)$ no segundo membro da equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} B_{n+1}(s) - B_{n+1}(t) &= (t - \beta_{n+1})(B_n(s) - B_n(t)) - \alpha_{n+1}t(B_{n-1}(s) - B_{n-1}(t)) \\ &\quad + (s - t)(B_n(s) - \alpha_{n+1}B_{n-1}(s)), \end{aligned}$$

e, dividindo ambos os lados por $(s - t)$, multiplicando por s e integrando com relação a ψ no intervalo (l, r) , obtemos

$$C_{n+1}(t) = (t - \beta_{n+1})C_n(t) - \alpha_{n+1}tC_{n-1}(t) + \rho_n - \alpha_{n+1}\rho_{n-1}.$$

Como $\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}$, fica demonstrado o resultado. ■

De (5.1.7) e (5.1.9) obtemos outras formas de escrever os coeficientes α_{n+1} e β_{n+1} , $n \geq 0$, como seguem:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} = \frac{H_{n+1}^{(-n)} H_{n-1}^{(-(n-1))}}{H_n^{(-n)} H_n^{(-(n-1))}}$$

e

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= -\alpha_{n+1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n} = \alpha_{n+1} \frac{H_n^{(-n)} H_n^{(-n)}}{H_{n-1}^{(-(n-1))} H_{n+1}^{(-(n+1))}} \\ &= \frac{H_{n+1}^{(-n)} H_{n-1}^{(-(n-1))}}{H_n^{(-n)} H_n^{(-(n-1))}} \frac{H_n^{(-n)} H_n^{(-n)}}{H_{n-1}^{(-(n-1))} H_{n+1}^{(-(n+1))}} = \frac{H_{n+1}^{(-n)} H_n^{(-n)}}{H_n^{(-(n-1))} H_{n+1}^{(-(n+1))}}. \end{aligned}$$

A seguir temos alguns resultados sobre os zeros de $B_n(t)$.

Teorema 5.1.4. *Os zeros do polinômio $B_n(t)$, $n \geq 1$, são reais, distintos e pertencem ao intervalo (l, r) .*

Demonstração. Mostremos que $B_n(t)$ possui pelo menos um zero em (l, r) , $0 \leq l < r \leq \infty$. Suponhamos que $B_n(t)$ não tenha zeros em (l, r) . Então B_n não muda de sinal em (l, r) , isto é, $B_n(t) > 0$ ou $B_n(t) < 0$, $t \in (l, r)$.

Mas, por definição,

$$\int_l^r t^{-n} B_n(t) d\psi(t) = 0.$$

Porém $t^{-n} > 0$ e $B_n(t)$ não muda de sinal em (l, r) . Logo,

$$\int_l^r t^{-n} B_n(t) d\psi(t) \neq 0,$$

chegando assim em uma contradição. Portanto, $B_n(t)$ muda de sinal pelo menos uma vez em (l, r) . Vamos supor, agora, que $B_n(t)$ muda de sinal k vezes em (l, r) , $r < n$.

Sejam $t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,k}$, os pontos onde $B_n(t)$ muda de sinal. Claramente, $t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,k}$ são zeros de multiplicidade ímpar de $B_n(t)$ em (l, r) . Logo,

$$(t - t_{n,1})(t - t_{n,2}) \cdots (t - t_{n,k}) = \sum_{j=0}^k a_j t^j$$

é um polinômio mônico de grau k . Como $j = 0, 1, \dots, k$ e $k < n$,

$$\sum_{j=0}^k a_j \int_l^r t^{-n+j} B_n(t) d\psi(t) = 0. \quad (5.1.15)$$

Mas $B_n(t) = \sum_{j=0}^k a_j t^j$ é um polinômio cujos zeros têm multiplicidade par em (l, r) ou são complexos. Assim, não muda de sinal em (l, r) e, portanto,

$$\sum_{j=0}^k a_j \int_l^r t^{-n+j} B_n(t) d\psi(t) \neq 0,$$

o que contradiz (5.1.15). Logo, $B_n(t)$ muda de sinal $k \geq n$ vezes em (l, r) e como $B_n(t)$ é um polinômio de grau n , temos que $k = n$. Portanto, todos os zeros de $B_n(t)$ são simples e estão em (l, r) . ■

Consideremos aqui os zeros de B_n ordenados em ordem crescente, ou seja,

$$l < t_{n,1} < t_{n,2} < \cdots < t_{n,n} < r.$$

O resultado a seguir é uma consequência das relações de recorrência (5.1.11) e (5.1.12).

Teorema 5.1.5. *Os polinômios B_n e C_n satisfazem à seguinte relação*

$$C_n(t)B_{n-1}(t) - C_{n-1}(t)B_n(t) = \alpha_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \cdots \alpha_2 \mu_0^\psi t^{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (5.1.16)$$

Além disso, o polinômio G_n , definido por

$$G_n(t) = B'_n(t)B_{n-1}(t) - B'_{n-1}(t)B_n(t), \quad n \geq 1, \quad (5.1.17)$$

satisfaz

$$G_{n+1}(t) = [B_n(t)]^2 + \alpha_{n+1} \beta_n [B_{n-1}(t)]^2 + \alpha_{n+1} \alpha_n t^2 G_{n-1}(t), \quad n \geq 1. \quad (5.1.18)$$

Demonstração. Mostremos a relação (5.1.16). Temos, do Teorema 5.1.3, que

$$\begin{aligned} C_n(t)B_{n-1}(t) - C_{n-1}(t)B_n(t) &= [(t - \beta_n)C_{n-1}(t) - \alpha_n t C_{n-2}(t)]B_{n-1}(t) \\ &\quad - C_{n-1}(t)[(t - \beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)] \\ &= \alpha_n t [C_{n-1}(t)B_{n-2}(t) - C_{n-2}(t)B_{n-1}(t)]. \end{aligned}$$

Observe que obtivemos uma equação de diferenças. Logo,

$$\begin{aligned} C_n(t)B_{n-1}(t) - C_{n-1}(t)B_n(t) &= \alpha_n t [\alpha_{n-1} t (C_{n-2}(t)B_{n-3}(t) - C_{n-3}(t)B_{n-2}(t))] \\ &\quad \vdots \\ &= \alpha_n t \alpha_{n-1} t [\cdots (\alpha_2 t (C_1(t)B_0(t) - C_0(t)B_1(t)))]]. \end{aligned}$$

Como $C_0(t) = 0$, $C_1(t) = \mu_0$, $B_0(t) = 1$ e $B_1(t) = t - \beta_1$, chegamos a

$$C_n(t)B_{n-1}(t) - C_{n-1}(t)B_n(t) = \alpha_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \cdots \alpha_2 \mu_0 t^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Demonstremos (5.1.18). De (5.1.17) e da relação de recorrência de três termos, obtemos

$$\begin{aligned} G_n(t) &= [(t - \beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)]' B_{n-1}(t) \\ &\quad - B_{n-1}'(t)[(t - \beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)]. \end{aligned}$$

Calculando as derivadas, teremos

$$G_n(t) = B_{n-1}^2(t) - \alpha_n B_{n-2}(t)B_{n-1}(t) + \alpha_n t G_{n-1}(t).$$

Logo,

$$G_{n+1}(t) = B_n^2(t) - \alpha_{n+1} B_{n-1}(t)B_n(t) + \alpha_{n+1} t G_n(t).$$

Como $B_n(t) = (t - \beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)$, obtemos

$$G_{n+1}(t) = B_n^2(t) + \alpha_{n+1} \beta_n B_{n-1}^2(t) + \alpha_{n+1} \alpha_n t^2 G_{n-1}(t).$$

■

Usando a relação (5.1.18), obtemos

$$G_{2n+1}(t) = B_{2n}^2(t) + \alpha_{2n+1} \beta_{2n} B_{2n-1}^2(t) + \alpha_{2n+1} \alpha_{2n} t^2 G_{2n-1}(t). \quad (5.1.19)$$

Mas,

$$G_{2n-1}(t) = B_{2n-2}^2(t) + \alpha_{2n-1} \beta_{2n-2} B_{2n-3}^2(t) + \alpha_{2n-1} \alpha_{2n-2} t^2 G_{2n-3}(t)$$

e

$$G_{2n-2}(t) = B_{2n-4}^2(t) + \alpha_{2n-3} \beta_{2n-4} B_{2n-5}^2(t) + \alpha_{2n-3} \alpha_{2n-4} t^2 G_{2n-5}(t).$$

Continuando com o mesmo raciocínio e substituindo em (5.1.19), concluímos que

$$\begin{aligned} G_{2n+1}(t) &= B_{2n}^2(t) + \alpha_{2n+1} \beta_{2n} B_{2n-1}^2(t) + \alpha_{2n+1} \alpha_{2n} t^2 B_{2n-2}^2(t) \\ &\quad + \alpha_{2n+1} \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} \beta_{2n-2} t^2 B_{2n-3}^2(t) + \cdots \\ &\quad + \alpha_{2n+1} \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} \cdots \alpha_4 \alpha_3 \beta_2 t^{2n-2} B_1^2(t) \\ &\quad + \alpha_{2n+1} \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} \cdots \alpha_3 \alpha_2 t^{2n} B_0^2(t). \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

De modo análogo encontramos

$$\begin{aligned} G_{2n}(t) &= B_{2n-1}^2(t) + \alpha_{2n} \beta_{2n-1} B_{2n-2}^2(t) + \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} t^2 B_{2n-3}^2(t) \\ &\quad + \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} \alpha_{2n-2} \beta_{2n-3} t^2 B_{2n-4}^2(t) + \cdots \\ &\quad + \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} \alpha_{2n-2} \cdots \alpha_4 \alpha_3 t^{2n-2} B_1^2(t) \\ &\quad + \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} \alpha_{2n-2} \cdots \alpha_3 \alpha_2 \beta_1 t^{2n-2} B_0^2(t). \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Estamos, agora, em condições de demonstrar o resultado a seguir.

Teorema 5.1.6. *Se $t_{n,k}$ é um zero do polinômio $B_n(t)$, para $n \geq 1$, então ele é diferente dos zeros de $C_n(t)$ e dos zeros de $B_{n-1}(t)$.*

Demonstração. Por hipótese, $t_{n,k}$ é um zero de $B_n(t)$. Então, de (5.1.16),

$$C_n(t_{n,k})B_{n-1}(t_{n,k}) = \alpha_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \cdots \alpha_2 \mu_0^\psi t_{n,k}^{n-1} \neq 0,$$

pois $t_{n,k} > 0$, para $k = 1, 2, \dots, n$. Assim, como $C_n(t_{n,k})B_{n-1}(t_{n,k}) \neq 0$, $t_{n,k}$ não é um zero do polinômio $B_{n-1}(t)$ e nem de $C_n(t)$. ■

Teorema 5.1.7. Para $n \geq 2$, entre dois zeros consecutivos do polinômio $B_{n-1}(t)$ existe um zero de $B_n(t)$.

Demonstração. Seja $t_{n-1,k}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, os zeros de $B_{n-1}(t)$. Logo, por (5.1.20) e (5.1.21), $G_n(t_{n-1,k}) > 0$ e então

$$B'_{n-1}(t_{n-1,k}) \neq 0, \text{ para } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Sejam $t_{n-1,j}$ e $t_{n-1,j+1}$, $j = 1, 2, \dots, n-2$, dois zeros consecutivos de $B_{n-1}(t)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $B'_{n-1}(t_{n-1,j}) > 0$. Então, $B'_{n-1}(t_{n-1,j+1}) < 0$. Assim, de (5.1.17), $B_n(t_{n-1,j}) < 0$ e $B_n(t_{n-1,j+1}) > 0$.

Como $B_n(t)$ é uma função contínua, existe $\tilde{t}$ entre $t_{n-1,j}$ e $t_{n-1,j+1}$ tal que $B_n(\tilde{t}) = 0$ e o resultado do teorema segue imediatamente. ■

Facilmente, podemos também obter o resultado sobre os zeros de dois polinômios de graus consecutivos, $B_n(t)$ e $B_{n+1}(t)$.

Teorema 5.1.8. Para $n \geq 1$, dois polinômios de graus consecutivos $B_n(t)$ e $B_{n+1}(t)$ não possuem zeros em comum.

Demonstração. Suponhamos que existe t tal que $B_1(t) = B_2(t) = 0$, então $\alpha_2 t = 0$. Como $t = 0$ não é zero de $B_n(t)$, $n \geq 1$, isto é uma contradição. Assim $B_1(t)$ e $B_2(t)$ não possuem zeros em comum.

Agora, seja $n \geq 2$ e suponhamos que $B_{n-1}(t)$ e $B_n(t)$ não possuem zeros em comum. Se $B_n(t) = 0$, então $B_{n-1}(t) \neq 0$ e, de (5.1.11),

$$B_{n+1}(t) = -\alpha_{n+1} t B_{n-1}(t) \neq 0.$$

Isto significa que $B_n(t)$ e $B_{n+1}(t)$ não têm zeros em comum. Assim, por indução matemática, provamos o teorema. ■

Fazendo $m = 1, 2, \dots, n-1$ em (5.1.11), mostra-se que

$$B_n(t) = \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & -\alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -t & t - \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t - \beta_{n-1} & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -t & t - \beta_n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1. \quad (5.1.22)$$

De fato, temos que $B_1(t) = |t - \beta_1| = t - \beta_1$. Suponha que

$$B_{n-1}(t) = \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t - \beta_{n-2} & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -t & t - \beta_{n-1} \end{vmatrix},$$

para $n \geq 2$. Por (5.1.11), $B_n(t) = (t - \beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)$, e assim

$$\begin{aligned}
 B_n(t) &= \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t - \beta_{n-2} & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -t & t - \beta_{n-1} \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \\
 &\quad - \alpha_n t \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t - \beta_{n-3} & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -t & t - \beta_{n-2} \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} \\
 &= \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t - \beta_{n-2} & -\alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -t & t - \beta_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & t - \beta_n & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \\
 &\quad + \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t - \beta_{n-3} & -\alpha_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -t & t - \beta_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\alpha_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -t & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \\
 &= \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & -\alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -t & t - \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t - \beta_{n-1} & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -t & t - \beta_n \end{vmatrix}_{n \times n}
 \end{aligned}$$

Teorema 5.1.9. *Os zeros dos polinômios $B_n(t)$ são os autovalores da matriz de Hessenberg inferior*

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{pmatrix},$$

onde $\eta_m = \alpha_m + \beta_m$, $m = 1, 2, \dots, n$ e $\alpha_1 = 0$.

Demonstração. De (5.1.22), $B_n(t) = \det(tA_n - B_n)$, onde

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_n = \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Observe que, como A_n é não singular, podemos então escrever

$$B_n(t) = \det(A_n) \det(tI - A_n^{-1}B_n).$$

Como $\det(A_n) = 1$ e

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

vemos que $B_n(t)$ é o polinômio característico mônico da matriz de Hessenberg inferior $H_n = A_n^{-1}B_n$, sendo os zeros de $B_n(t)$ os autovalores de tal matriz. Isto completa a prova do teorema. $\blacksquare$

Relações entre polinômios ortogonais e L-ortogonais

Nesta seção são apresentados brevemente alguns resultados sobre as relações entre polinômios ortogonais e L-ortogonais. Encontramos, em [20], estudos sobre certas medidas fortes ψ definidas em (l, r) , $0 \leq l < r \leq \infty$, que satisfazem à seguinte propriedade

$$\frac{d\psi(t)}{\sqrt{t}} = -\frac{d\psi(\beta^2/t)}{\sqrt{\beta^2/t}}, \quad (5.1.23)$$

onde $t \in (l, r)$ e $\beta = \sqrt{lr}$.

Entre outros resultados, foi mostrado que, para os momentos μ_n^ψ associados a ψ e para os polinômios L-ortogonais $B_n^\psi(t)$, que satisfazem

$$B_{n+1}^\psi(t) = (t - \beta_{n+1}^\psi) B_n^\psi(t) - \alpha_{n+1}^\psi t B_{n-1}^\psi(t), \quad n \geq 1,$$

com $B_0^\psi(t) = 1$ e $B_1^\psi(t) = t - \beta_1^\psi$, valem as seguintes propriedades:

- $\mu_n^\psi = \beta^{2n+1} \mu_{-n-1}^\psi, \quad n \geq 0,$
- $\beta_n^\psi = \beta, \quad n \geq 1,$
- $B_n^\psi(t) = \frac{z^n B_n^\psi(\beta^2/t)}{B_n^\psi(0)}, \quad n \geq 1,$
- $t_{n,k} = \beta^2/t_{n,n-k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$ onde $a < t_{n,1} < t_{n,2} < \cdots < t_{n,n} < b$ são os zeros do polinômio B_n^ψ .

Na referência [22] consideram a função

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \left(\sqrt{t} - \beta/\sqrt{t} \right), \quad t \in (0, \infty),$$

que representa uma transformação do intervalo $(0, \infty)$ no intervalo $(-\infty, \infty)$, cuja inversa é dada por $t(x) = \left(\sqrt{\alpha x^2 + \beta} + \sqrt{\alpha}x \right)^2$, $x \in (0, \infty)$. Nesse mesmo trabalho foi mostrado que, se para uma medida forte ψ definida em (l, r) , $0 \leq l < r \leq \infty$, vale

$$d\psi(t) = A \frac{t}{t + \beta} d\phi(x(t)),$$

então ψ possui a propriedade (5.1.23) se, e somente se, ϕ é uma medida simétrica em $[-y, y]$, ou seja, $d\phi(x) = -d\phi(-x)$. Aqui, A é uma constante adequada e $y = x(r) = (r - \beta)/(2\sqrt{\alpha r})$.

Com essa propriedade é possível demonstrar a seguinte relação entre os polinômios L-ortogonais $B_n^\psi(t)$ associados a ψ e os polinômios ortogonais $P_n^\phi(t)$ associados a ϕ :

$$B_n^\psi(t) = \left(2\sqrt{\alpha t} \right)^n P_n^\phi(x(t)).$$

Além disso, os coeficientes α_{n+1}^ϕ da relação de recorrência de $P_n^\phi(t)$ e os coeficientes α_{n+1}^ψ da relação de recorrência de $B_n^\psi(t)$ satisfazem

$$\alpha_{n+1}^\psi = 4\alpha\alpha_{n+1}^\phi, \quad n \geq 1.$$

5.1.2 Polinômios para-ortogonais

Nesta subseção são apresentados os polinômios para-ortogonais reais. Tais polinômios recebem esse nome devido às deficiências em suas propriedades de ortogonalidade. Vamos continuar utilizando aqui a medida ψ , definida em (3.2.2) e o produto interno definido em (3.2.5).

Definição 5.1.3. *Uma sequência $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida ψ se, para $n \geq 0$, X_n é um polinômio de grau $n \geq 0$ que satisfaz*

$$\begin{aligned} \langle X_n, 1 \rangle &\neq 0, \\ \langle X_n, z^m \rangle &= 0, \\ \langle X_n, z^n \rangle &\neq 0, \end{aligned}$$

com $m = 1, 2, \dots, n-1$.

Observe que $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{S_n^*\}_{n=0}^\infty$ não são sequências de polinômios para-ortogonais com respeito a ψ , uma vez que, de (3.2.11), $\langle S_n, 1 \rangle = \langle S_n, z^0 \rangle = 0$ e $\langle S_n^*, z^n \rangle = 0$.

Definição 5.1.4. *Para $\kappa \in \mathbb{C}$, $\kappa \neq 0$, um polinômio X é κ -invariante se*

$$X^*(z) = \kappa X(z),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. A sequência $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ é $\{\kappa_n\}_{n=0}^\infty$ -invariante se, para cada n , X_n é κ_n -invariante.

Podemos obter seqüências $\{\kappa_n\}_{n=0}^\infty$ -invariantes de polinômios para-ortogonais tomando funções da forma

$$S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_n S_n^*(z), \quad (5.1.24)$$

onde $z, w_n \in \mathbb{C}$, $|w_n| = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

De fato, $S_n(w_n, z)$ satisfaz a definição de polinômios para-ortogonais com relação à medida ψ , pois, de (3.2.11), temos

$$\begin{aligned} \langle S_n(w_n, z), 1 \rangle &= \langle S_n(z), 1 \rangle + w_n \langle S_n^*(z), 1 \rangle = w_n \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \neq 0, \\ \langle S_n(w_n, z), z^m \rangle &= \langle S_n(z), z^m \rangle + w_n \langle S_n^*(z), z^m \rangle = 0, \\ \langle S_n(w_n, z), z^n \rangle &= \langle S_n(z), z^n \rangle + w_n \langle S_n^*(z), z^n \rangle = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \neq 0. \end{aligned}$$

O resultado a seguir nos fornece uma caracterização dos polinômios para-ortogonais κ -invariantes e garante que toda seqüência de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida ψ é obtida a partir de (5.1.24). Observe que

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} [S_n(z) + w_n S_n^*(z)] d\psi(z) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5.1.25)$$

Teorema 5.1.10. *Seja $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios de Szegő com relação a uma medida ψ .*

- (i) *Se $c_n, w_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$, com $c_n \neq 0$ e $|w_n| = 1$, e se $\kappa_n = \bar{c}_n \bar{w}_n / c_n$, então $\{c_n S_n(w_n, z)\}_{n=0}^\infty$ é uma seqüência $\{\kappa_n\}_{n=0}^\infty$ -invariante de polinômios para-ortogonais com respeito a ψ e $|\kappa_n| = 1$, $n \geq 0$.*
- (ii) *Se $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ é uma seqüência de polinômios para-ortogonais com respeito a ψ , então para $n \geq 0$,*

$$X_n(z) = c_n S_n(w_n, z), \quad z \in \mathbb{C},$$

onde

$$c_n = \frac{\langle X_n, S_n \rangle}{\langle S_n, S_n \rangle} - d_n \frac{\langle S_n^*, S_n \rangle}{\langle S_n, S_n \rangle} \neq 0 \quad e \quad w_n = \frac{d_n}{c_n},$$

com

$$d_n = \frac{\langle X_n, 1 \rangle}{\langle S_n^*, 1 \rangle} \neq 0.$$

Para cada $n \geq 0$, se X_n é também κ_n -invariante, então

$$|w_n| = 1, \quad \kappa_n = \frac{\bar{c}_n \bar{w}_n}{c_n} \quad e \quad |\kappa_n| = 1.$$

Podemos representar os polinômios para-ortogonais dados por (5.1.24) de outra forma. Substituindo (3.2.16) e (3.2.17) em (5.1.24), temos

$$\begin{aligned} S_n(w_n, z) &= z S_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} S_{n-1}^*(z) + w_n [S_{n-1}^*(z) - \alpha_n z S_{n-1}(z)] \\ &= z(1 - w_n \alpha_{n-1}) S_{n-1}(z) + (w_n - \bar{\alpha}_{n-1}) S_{n-1}^*(z) \\ &= (1 - w_n \alpha_{n-1}) \left[z S_{n-1}(z) + \frac{w_n - \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - w_n \alpha_{n-1}} S_{n-1}^*(z) \right]. \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

Denotando

$$\tau_n = \frac{w_n - \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - w_n \alpha_{n-1}} = \frac{w_n(1 - \bar{w}_n \bar{\alpha}_{n-1})}{1 - w_n \alpha_{n-1}},$$

observamos que, como $|w_n| = 1$, então $|\tau_n| = 1$.

Assim, tomando o polinômio (5.1.26) na forma mônica, obtemos

$$S_n(\tau_n, z) = zS_{n-1}(z) + \tau_n S_{n-1}^*(z),$$

com $|\tau_n| = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

O resultado a seguir mostra o comportamento dos zeros dos polinômios para-ortogonais.

Teorema 5.1.11. *Seja $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência $\{\kappa_n\}_{n=0}^\infty$ -invariante de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida positiva ψ . Então, para cada $n \geq 1$, os n zeros de X_n são simples e estão no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Demonstração. Para $n \geq 1$, podemos escrever

$$X_n(z) = c_{n,0} + c_{n,1}z + \dots + c_{n,n}z^n,$$

com $c_{n,n} \neq 0$ e $c_{n,k} \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Logo, por hipótese,

$$X_n^*(z) = \bar{c}_{n,0}z^n + \bar{c}_{n,1}z^{n-1} + \dots + \bar{c}_{n,n} = \kappa_n X_n(z), \quad \kappa_n \neq 0.$$

Observe que

$$c_{n,0} = X_n(0) = \kappa_n^{-1} X_n^*(0) = \frac{\bar{c}_{n,n}}{\kappa_n} \neq 0.$$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ os zeros de multiplicidade ímpar de X_n em $\mathcal{C}$, contadas as suas multiplicidades. Se esses zeros não existem, então $p = 0$, caso contrário, $1 \leq p \leq n$. Para demonstrar o teorema é suficiente mostrar que $p = n$.

Se β é um zero de X_n que não está em $\mathcal{C}$, então, como X_n é κ -invariante, $1/\bar{\beta}$ é um zero de X_n e $1/\bar{\beta}$ também não está em $\mathcal{C}$. Assim, os zeros de X_n que não pertencem a $\mathcal{C}$ ocorrem em pares $(\beta, 1/\bar{\beta})$.

Se β é um zero de X_n em $\mathcal{C}$, então $\beta = 1/\bar{\beta}$. Existe, assim, um número par de zeros de X_n em $\mathcal{C}$ mas que não estão no conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$. Segue, então, que os zeros de X_n que não estão em $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ ocorrem em pares $(\beta, 1/\bar{\beta})$. Denotemos todos os zeros que ocorrem em pares $(\beta, 1/\bar{\beta})$ pelos $2q$ números

$$\beta_1, \frac{1}{\bar{\beta}_1}, \beta_2, \frac{1}{\bar{\beta}_2}, \dots, \beta_q, \frac{1}{\bar{\beta}_q},$$

que podem estar em $\mathcal{C}$ ou não. Se não existem tais zeros, tomaremos $q = 0$. Claramente $p + 2q = n$. Como $X_n(0) \neq 0$, temos que $\beta_j \neq 0$ para $j = 1, 2, \dots, q$. Consideremos os polinômios

$$\begin{aligned} A(z) &= \begin{cases} (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_p), & \text{se } p \geq 1, \\ 1, & \text{se } p = 0, \end{cases} \\ B(z) &= \begin{cases} (z - \beta_1) \cdots (z - \beta_q), & \text{se } q \geq 1, \\ 1, & \text{se } q = 0, \end{cases} \\ C(z) &= z^q A(z). \end{aligned}$$

Note que

$$X_n(z) = A(z)B(z)(z - 1/\bar{\beta}_1) \cdots (1 - 1/\bar{\beta}_q).$$

Suponha $p < n$ e, assim, $q \geq 1$. Então, de (3.2.5) e das expressões anteriores para $X_n(z)$ e $C(z)$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle X_n, C \rangle &= \int_{\mathcal{C}} X_n(z) \overline{C(z)} d\psi(z) \\ &= \int_{\mathcal{C}} A(z)B(z) \left(z - \frac{1}{\bar{\beta}_1}\right) \cdots \left(z - \frac{1}{\bar{\beta}_q}\right) \overline{A(z)} \frac{1}{z^q} d\psi(z) \\ &= \int_{\mathcal{C}} A(z)B(z) \overline{A(z)} (-1)^q \frac{(1 - \bar{\beta}_1 z) \cdots (1 - \bar{\beta}_q z)}{\bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_q z^q} d\psi(z) \\ &= \frac{(-1)^q}{\bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_q z^q} \int_{\mathcal{C}} A(z)B(z) \overline{A(z)B(z)} d\psi(z) \\ &= \frac{(-1)^q}{\bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_q z^q} \langle AB, AB \rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Como $C(z)$ é um polinômio de grau $p + q$ e $\langle X_n, C \rangle \neq 0$, as condições de para-ortogonalidade implicam que o grau de C é n . Como tomamos $q \geq 1$, isto é impossível, pois o grau de C é igual a $p + q$ que é menor do que $p + 2q = n$. Portanto, $q = 0$ e $p = n$. ■

Como os zeros dos polinômios para-ortogonais estão no círculo unitário, eles são utilizados para construir fórmulas de quadratura no círculo unitário.

5.1.2.1 Polinômios para-ortogonais reais

Estudaremos nesta seção a equação dada por

$$R_{n+1}(z) = (z + 1)R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z),$$

$n \geq 1$, com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = z + 1$, com o objetivo de encontrar a sequência $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfaz tal relação de recorrência.

Consideremos o círculo unitário $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Seja ψ uma medida simétrica definida em $\mathcal{C}$, isto é,

$$d\psi\left(\frac{1}{z}\right) = -d\psi(z)$$

ou, de forma equivalente, $\psi(e^{i\theta})$ satisfaz

$$d\psi(e^{i(2\pi-\theta)}) = -d\psi(e^{i\theta}),$$

pois $z = e^{i\theta}$, com $0 < \theta < 2\pi$.

Para uma medida simétrica, os momentos trigonométricos

$$\mu_n = \int_{\mathcal{C}} z^{-n} d\psi(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

são reais e $\mu_{-n} = \mu_n$, para $n \geq 1$. De fato,

$$\mu_{-n} = \int_{\mathcal{C}} z^n d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} -\frac{1}{z^n} d\psi\left(\frac{1}{z}\right) = -\int_{\mathcal{C}} z^{-n} (-d\psi(z)) = \int_{\mathcal{C}} z^{-n} d\psi(z) = \mu_n.$$

Assim,

$$\bar{\mu}_n = \int_{\mathcal{C}} \overline{z^{-n}} d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z^n} d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} z^n d\psi(z) = \mu_{-n} = \mu_n.$$

A sequência de polinômios de Szegő $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ associada a ψ , que é ortogonal em $\mathcal{C}$, é definida por

$$\int_{\mathcal{C}} S_n(z) \overline{S_m(z)} d\psi(z) = 0,$$

para $n \neq m$. De (3.2.15), os coeficientes de reflexão $\alpha_n = -S_{n+1}(0)$ também são reais e, consequentemente, de (3.2.16) e (3.2.17), os polinômios de Szegő associados a ψ são reais.

Consideremos, agora, duas sequências de polinômios para-ortogonais especiais, denotadas por

$$\{S_n(1, z)\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{e} \quad \{S_n(-1, z)\}_{n=0}^{\infty},$$

obtidas fazendo $w_n = 1$ e $w_n = -1$ em (5.1.24), respectivamente. A partir delas, construímos outras duas sequências de polinômios mônicos, $\{R_n^{(1)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{R_n^{(2)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, definidas da seguinte maneira:

$$R_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(1, z)}{1 + S_n(0)} = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)}, \quad n \geq 0, \quad (5.1.27)$$

e

$$R_n^{(2)}(z) = \frac{S_{n+1}(-1, z)}{(z-1)(1 - S_{n+1}(0))} = \frac{S_{n+1}(z) + S_{n+1}^*(z)}{(z-1)(1 - S_{n+1}(0))}, \quad n \geq 0. \quad (5.1.28)$$

Do Teorema 5.1.11 sabemos que todos os zeros dos polinômios para-ortogonais são simples e estão no círculo unitário. Assim, os zeros dos polinômios $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$ também são simples e estão no círculo unitário.

O resultado abaixo mostra que os polinômios de Szegő podem ser escritos em termos dos polinômios $R_n^{(1)}(z)$ e $R_{n-1}^{(2)}(z)$.

Teorema 5.1.12. *Os polinômios $S_n(z)$, $R_n^{(1)}(z)$ e $R_{n-1}^{(2)}(z)$ satisfazem à seguinte relação*

$$2zS_{n-1}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1.$$

Demonstração. De (5.1.27) e (5.1.28), como $\alpha_{n-1} = -S_n(0)$ é real, temos

$$R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}} + \frac{S_n(z) - S_n^*(z)}{1 + \alpha_{n-1}},$$

ou seja,

$$R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z) = \frac{2}{1 - \alpha_{n-1}^2} (S_n(z) + \alpha_{n-1}S_n^*(z)).$$

Usando a relação de recorrência (3.2.17), ou seja, usando que

$$S_n(z) = (1 - \alpha_{n-1}^2)zS_{n-1}(z) - \alpha_{n-1}S_n^*(z), \quad n \geq 1,$$

chegamos ao resultado desejado. ■

O resultado a seguir apresenta a relação de recorrência de três termos para os polinômios $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Teorema 5.1.13. *Os polinômios mônicos para-ortogonais $R_n^{(1)}(z)$ e $R_n^{(2)}(z)$, satisfazem às relações de recorrência de três termos*

$$R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)R_n^{(i)}(z) - 4d_{n+1}^{(i)}zR_{n-1}^{(i)}(z), \quad (5.1.29)$$

sendo $n \geq 1$, $i = 1, 2$, com condições iniciais $R_0^{(i)}(z) = 1$ e $R_1^{(i)}(z) = z+1$. Além disso,

$$d_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - \alpha_{n-2})(1 + \alpha_{n-1}) \quad e \quad d_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{4}(1 + \alpha_{n-1})(1 - \alpha_n).$$

Demonstração. Vamos demonstrar apenas para $R_{n+1}^{(1)}$. Sendo $S_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)}$ um polinômio para-ortogonal mônico, podemos escrever, de (5.1.27), $R_n^{(1)}(z) = S_n^{(1)}(z)$. Assim, basta mostrarmos que $S_n^{(1)}$ satisfaz à relação de recorrência

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z+1)S_n^{(1)}(z) - (1 - \alpha_{n-2})(1 + \alpha_{n-1})zS_{n-1}^{(1)}(z),$$

para $n \geq 1$, com $\alpha_{-1} = -1$, $S_0^{(1)}(z) = 1$ e $S_1^{(1)}(z) = z+1$.

Para isso, utilizaremos as relações de recorrência para os polinômios de Szegő dadas em (3.2.16) e (3.2.24).

Da definição de $S_n^{(1)}$, obtemos

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= \frac{zS_n(z) - \alpha_n S_n^*(z) + S_n^*(z) - \alpha_n z S_n(z)}{1 - \alpha_n} \\ &= zS_n(z) + S_n^*(z) = \frac{(1 - \alpha_{n-1})(zS_n(z) + S_n^*(z))}{1 - \alpha_{n-1}} \\ &= \frac{(z - \alpha_{n-1}z + 1 - 1)S_n(z)}{1 - \alpha_{n-1}} + \frac{(1 - \alpha_{n-1} + z - z)S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}} \\ &= (z+1) \left(\frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}} \right) - \frac{(1 + \alpha_{n-1}z)S_n(z) + (\alpha_{n-1} + z)S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}}. \end{aligned}$$

Utilizando novamente (3.2.16) e (3.2.24) temos que

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= (z+1) \left(\frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}} \right) - \frac{(1 + \alpha_{n-1}z)[zS_{n-1}(z) - \alpha_{n-1}S_{n-1}^*(z)]}{1 - \alpha_{n-1}} \\ &\quad - \frac{(\alpha_{n-1} + z)[S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}zS_{n-1}(z)]}{1 - \alpha_{n-1}}. \end{aligned}$$

Colocando $S_{n-1}(z) + S_{n-1}^*(z)$ em evidência e utilizando a definição de $S_n^{(1)}$, chegamos ao resultado desejado. Para finalizar, basta tomarmos $4d_{n+1}^{(1)} = (1 - \alpha_{n-2})(1 + \alpha_{n-1})$. A demonstração para $R_{n+1}^{(2)}$ será omitida por ser análoga. ■

Os polinômios $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, satisfazem a uma propriedade auto-inversiva, ou seja,

$$z^n R_n^{(i)}(1/z) = R_n^{(i)}(z).$$

De fato, das relações de recorrência (5.1.29), obtemos

$$R_{n+1}^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{z} + 1\right)R_n^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right) - 4d_{n+1}^{(i)}\frac{1}{z}R_{n-1}^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Multiplicando ambos os membros por z^{n+1} , obtemos

$$z^{n+1}R_{n+1}^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{z} + 1\right)z^n R_n^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right) - 4d_{n+1}^{(i)}z^2 z^{n-1}R_{n-1}^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right)$$

ou seja,

$$z^{n+1}R_{n+1}^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right) = (z+1)z^n R_n^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right) - 4d_{n+1}^{(i)} z z^{n-1} R_{n-1}^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Assim, como $z^n R_n^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right)$ satisfaz a mesma relação de recorrência de três termos que $R_n^{(i)}(z)$ e com as mesmas condições iniciais, então elas são idênticas.

O teorema a seguir garante que os polinômios $R_n^{(i)}(z)$, $i = 1, 2$, satisfazem as relações de L-ortogonalidade.

Teorema 5.1.14. *Os polinômios mônicos $R_n^{(i)}(z)$, $i = 1, 2$, satisfazem às relações de L-ortogonalidade*

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad (5.1.30)$$

e

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(2)}(z) (z-1) d\psi(z) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1. \quad (5.1.31)$$

Demonstração. De (5.1.27) e (5.1.25), temos

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-(n+1)+s} R_n^{(2)}(z-1) d\psi(z) = 0, \quad 1 \leq s \leq n, \quad (5.1.32)$$

que equivale a (5.1.31).

Para mostrar (5.1.30), novamente de (5.1.25) obtemos

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n} P_{n,s}(z) R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad (5.1.33)$$

onde $P_{n,s}(z) = (z-1)z^{s-1}$, $s = 1, 2, \dots, n-1$.

Mostremos que, se tomarmos $P_{n,n}(z) = z + z^{n-1}$, então a relação (5.1.33) também vale para $s = n$. De (5.1.32),

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{1}{z-1} d\psi(z), \quad 1 \leq s \leq n-1.$$

Substituindo z por $1/z$ no lado direito da expressão anterior, usando a propriedade de simetria da medida e a propriedade auto-inversiva de $R_n^{(\psi,1)}$, obtemos

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n} [z^s + z^{n-s}] R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1.$$

Assim, $P_{n,n}$ é obtida fazendo $s = 1$ na expressão $z^s + z^{n-s}$.

Podemos verificar que o conjunto de polinômios $P_{n,s}$, $s = 1, 2, \dots, n$, de grau menor ou igual a $n-1$, forma um conjunto linearmente independente. Em particular, para cada monômio z^s , $0 \leq s \leq n-1$, temos uma única combinação linear do tipo $z^s = d_1^{(s)} P_{n,1}(z) + d_2^{(s)} P_{n,2}(z) + \dots + d_{n-1}^{(s)} P_{n,n-1}(z) + \frac{1}{2} P_{n,n}(z)$. Consequentemente de (5.1.33) segue o resultado (5.1.30). ■

Relação entre polinômios ortogonais e polinômios para-ortogonais

Podemos relacionar os polinômios $R_n^{(i)}(z)$, $i = 1, 2$, definidos por (5.1.27) e (5.1.28), com polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ através da transformação

$$x = x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2}), \quad (5.1.34)$$

inicialmente estudada em [7] (ver, também, [22]). Note que, como $z = e^{i\theta}$, podemos escrever

$$x = \cos(\theta/2),$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$. A relação (5.1.34) é uma transformação do círculo unitário no intervalo $[-1, 1]$. Utilizando esta é possível relacionar polinômios para-ortogonais no círculo unitário com polinômios ortogonais em $[-1, 1]$. Os resultados a seguir, encontrados em [2], serão necessários para descrevê-los.

Primeiramente, consideremos ϕ_1 e ϕ_2 duas medidas simétricas no intervalo $[-1, 1]$ satisfazendo

$$d\phi_2(x) = (1 - x^2)d\phi_1(x). \quad (5.1.35)$$

Vamos utilizar a notação $\{P_n^{\phi_i}\}_{n=0}^{\infty}$ para a sequência de polinômios ortogonais com relação à medida ϕ_i , $i = 1, 2$.

Se conhecermos a sequência de polinômios ortogonais com relação a uma das medidas, por exemplo ϕ_1 , podemos obter informações sobre a sequência de polinômios ortogonais com relação à outra medida, ϕ_2 .

A fórmula de Christoffel (ver [23, p. 29]) fornece a seguinte representação para os polinômios $P_n^{\phi_2}$ como combinação dos polinômios $P_n^{\phi_1}$,

$$(1 - x^2)P_n^{\phi_2}(x) = \frac{-1}{P_n^{\phi_1}(1)} \left\{ P_n^{\phi_1}(1)P_{n+2}^{\phi_1}(x) - P_{n+2}^{\phi_1}(1)P_n^{\phi_1}(x) \right\}.$$

Para obtermos uma representação para os polinômios $P_n^{\phi_1}$ em termos de $P_n^{\phi_2}$, vamos expressar $P_n^{\phi_1}$ como combinação linear de $P_j^{\phi_2}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Assim,

$$P_n^{\phi_1}(x) = \sum_{k=0}^n d_{n-k} P_{n-k}^{\phi_2}(x).$$

Utilizando a ortogonalidade e a simetria desses polinômios, podemos escrever a expressão anterior como

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_2}(x) + d_{n-2}P_{n-2}^{\phi_2}(x), \quad n \geq 2,$$

onde

$$d_{n-2} = \frac{\int_{-1}^1 P_n^{\phi_1}(x)P_{n-2}^{\phi_2}(x)d\phi_2(x)}{\int_{-1}^1 (P_{n-2}^{\phi_2}(x))^2 d\phi_2(x)} = -\frac{\int_{-1}^1 (P_n^{\phi_1}(x))^2 d\phi_1(x)}{\int_{-1}^1 (P_{n-2}^{\phi_2}(x))^2 d\phi_2(x)}, \quad n \geq 2.$$

Obtemos, então, as seguintes relações entre os coeficientes d_n , $\alpha_n^{\phi_1}$ e $\alpha_n^{\phi_2}$,

$$\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_2}}, \quad n \geq 2$$

e

$$d_{n-1} - d_{n-2} = \alpha_{n+1}^{\phi_2} - \alpha_{n+1}^{\phi_1}, \quad n \geq 2,$$

$$\text{com } d_0 = -\frac{\alpha_3^{\phi_1} \alpha_2^{\phi_1} \alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_2}} = \alpha_2^{\phi_2} - \alpha_2^{\phi_1}.$$

Consideremos, agora, a sequência de números reais $\{l_n\}$ definida da seguinte forma

$$(l_{n+1} - 1) = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_2}} (l_{n-1} - 1), \quad n \geq 2,$$

$$\text{com } l_0 = 1, (l_1 - 1) = -2\alpha_2^{\phi_1} \text{ e } (l_2 - 1) = \frac{-2\alpha_3^{\phi_1} \alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_2}}.$$

Podemos verificar facilmente que a sequência $\{l_n\}$ satisfaz às relações

$$\begin{aligned} \frac{(l_{n+1} - 1)}{(l_{n-1} - 1)} &= \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}, \quad n \geq 2, \\ (l_{n+1} - 1)(l_n - 1) &= -4d_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Além dessas duas, os elementos da sequência $\{l_n\}$ satisfazem

$$\frac{(l_{2n+1} - 1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+2}^{\phi_1} \alpha_{2n}^{\phi_1} \cdots \alpha_2^{\phi_1}}{\alpha_{2n}^{\phi_2} \alpha_{2n-2}^{\phi_2} \cdots \alpha_2^{\phi_2}}, \quad \frac{(l_{2n} - 1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_1} \alpha_{2n-1}^{\phi_1} \cdots \alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_2} \alpha_{2n-3}^{\phi_2} \cdots \alpha_1^{\phi_2}}$$

e

$$\frac{(l_{2n-1} + 1)}{2} = \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_2} \alpha_{2n-3}^{\phi_2} \cdots \alpha_1^{\phi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1} \alpha_{2n-3}^{\phi_1} \cdots \alpha_1^{\phi_1}}, \quad \frac{(l_{2n} + 1)}{2} = \frac{\alpha_{2n}^{\phi_2} \alpha_{2n-2}^{\phi_2} \cdots \alpha_2^{\phi_2}}{\alpha_{2n}^{\phi_1} \alpha_{2n-2}^{\phi_1} \cdots \alpha_2^{\phi_1}}. \quad (5.1.36)$$

Agora, se ϕ_1 e ϕ_2 satisfazem (5.1.35), podemos demonstrar que existe uma sequência de números reais $\{l_n\}$ tal que, para $n \geq 1$,

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = -\frac{1}{4}(l_n - 1)(l_{n-1} + 1), \quad \alpha_{n+1}^{\phi_2} = -\frac{1}{4}(l_n - 1)(l_{n+1} + 1) \quad (5.1.37)$$

e

$$d_{n-1} = -\frac{1}{4}(l_n - 1)(l_{n+1} - 1), \quad n \geq 1,$$

$$\text{com } l_0 = 1 \text{ e } l_1 = 1 - 2\alpha_2^{\phi_2}.$$

Em posse desses resultados, podemos demonstrar o teorema a seguir, que fornece uma relação entre os polinômios $P_n^{\phi_i}$ e $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, ou melhor, uma relação entre as respectivas medidas e, também, entre as respectivas fórmulas de recorrências.

Teorema 5.1.15. (i) *Seja ψ uma medida positiva no círculo unitário tal que os polinômios de Szegő S_n , $n \geq 0$, são reais. Sejam*

$$4\alpha_{n+1}^{\phi_1} = (1 - \alpha_{n-2})(1 + \alpha_{n-1}) > 0 \quad \text{e} \quad 4\alpha_{n+1}^{\phi_2} = (1 + \alpha_{n-1})(1 - \alpha_n) > 0,$$

com $n \geq 1$, e as medidas positivas ϕ_1 e ϕ_2 definidas por

$$d\phi_1(x(z)) = -d\psi(z) \quad \text{e} \quad d\phi_2(x(z)) = -(1 - x^2)d\psi(z),$$

com $x(z) = (1/2)(z^{1/2} + z^{-1/2})$, cujos suportes estão contidos em $[-1, 1]$. Então, para $i = 1, 2$, as sequências de polinômios $\{P_n^{\phi_i}\}_{n=0}^\infty$, definidas por

$$P_n^{\phi_i}(x) = (4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z), \quad n \geq 0,$$

são sequências de polinômios ortogonais mônicos com relação à medida ϕ_i e satisfazem às relações de recorrência

$$P_{n+1}^{\phi_i}(x) = xP_n^{\phi_i}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_i} P_{n-1}^{\phi_i}(x), \quad n \geq 1, \quad (5.1.38)$$

com as condições iniciais $P_0^{\phi_i}(x) = 1$ e $P_1^{\phi_i}(x) = x$.

(ii) Reciprocamente, sejam ϕ_1 e ϕ_2 duas medidas positivas definidas em $[-1, 1]$, tais que $d\phi_2(x) = (1 - x^2)d\phi_1(x)$. Suponhamos que os respectivos polinômios ortogonais mônicos $P_n^{\phi_1}$ e $P_n^{\phi_2}$ satisfaçam

$$P_{n+1}^{\phi_i}(x) = xP_n^{\phi_i}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_i} P_{n-1}^{\phi_i}(x), \quad n \geq 1.$$

Então, os coeficientes de reflexão α_n dos polinômios de Szegő S_n , associados à medida positiva $d\psi(z) = -d\phi_1(x(z))$, satisfazem

$$\alpha_{n-1} = -1 + \frac{4\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{1 - \alpha_{n-2}} \quad e \quad \alpha_n = 1 - \frac{4\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{1 + \alpha_{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

com $\alpha_{-1} = 1$. Explicitamente, podem ser dados por

$$\alpha_{2n-2} = 1 - 2 \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_2} \alpha_{2n-3}^{\phi_2} \cdots \alpha_3^{\phi_2} \alpha_1^{\phi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1} \alpha_{2n-3}^{\phi_1} \cdots \alpha_3^{\phi_1} \alpha_1^{\phi_1}} \quad e \quad \alpha_{2n-1} = 1 - 2 \frac{\alpha_{2n}^{\phi_2} \alpha_{2n-2}^{\phi_2} \cdots \alpha_2^{\phi_2}}{\alpha_{2n}^{\phi_1} \alpha_{2n-2}^{\phi_1} \cdots \alpha_2^{\phi_1}}, \quad n \geq 1,$$

com

$$R_n^{(i)}(z) = (4z)^{n/2} P_n^{\phi_i}(x(z)), \quad i = 1, 2.$$

Demonstração. (i) Multiplicando ambos os lados de (5.1.29) por $(4z)^{-(n+1)/2}$, obtemos

$$(4z)^{-(n+1)/2} R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)(4z)^{-(n+1)/2} R_n^{(i)}(z) - 4d_{n+1}^{(i)} z (4z)^{-(n+1)/2} R_{n-1}^{(i)}(z),$$

com $R_0^{(i)}(z) = 1$ e $(4z)^{-1/2} R_1^{(i)}(z) = (4z)^{-1/2}(z+1)$, para $i = 1, 2$. Usando o fato de que $(z+1)(4z)^{-1/2} = (1/2)(z^{1/2} + z^{-1/2}) = x(z) = x$ e lembrando que $(4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z) = P_n^{\phi_i}(x)$, obtemos

$$P_{n+1}^{\phi_i}(x) = xP_n^{\phi_i}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_i} P_{n-1}^{\phi_i}(x),$$

com $P_0^{\phi_i}(x) = 1$ e $P_1^{\phi_i}(x) = x$.

Portanto, temos que $P_n^{\phi_i}(x) = (4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z)$ satisfazem às relações de recorrência de três termos (5.1.38).

Observemos, agora, que as sequências $\{g_n^{\phi_1} = (1 + \alpha_{n-1})/2\}$ e $\{g_n^{\phi_2} = (1 - \alpha_n)/2\}$ satisfazem

$$\left(1 - g_{n-1}^{\phi_1}\right) g_n^{\phi_1} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\alpha_{n-2}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_{n-1}}{2}\right) = \frac{1}{4} (1 - \alpha_{n-2})(1 + \alpha_{n-1}) = \alpha_{n+1}^{\phi_1}$$

e

$$(1 - g_{n-1}^{\phi_2})g_n^{\phi_1} = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_n}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 + \alpha_{n-1})(1 - \alpha_n) = \alpha_{n+1}^{\phi_2}.$$

Assim, concluímos que $\{\alpha_{n+1}^{\phi_1}\}$ e $\{\alpha_{n+1}^{\phi_2}\}$ são sequências encadeadas com sequências de parâmetros dadas, respectivamente, por $\{g_n^{\phi_1}\}$ e $\{g_n^{\phi_2}\}$.

Dessa forma, concluímos que os zeros de $P_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, estão em $(-1, 1)$ e, pelo Teorema de Favard 3.1.6, formam uma sequência de polinômios ortogonais.

Para obtermos as medidas ϕ_1 e ϕ_2 , basta tomarmos $d\phi_1(x) = -d\psi_1(x)$ e lembrarmos que

$$\begin{aligned} \int_C z^{-n+s} R_n^{(2)}(z)(z-1)d\psi(z) &= \int_C z^{-n+s} R_n^{(2)}(z) \frac{z}{z-1} \frac{z-1}{z} (z-1)d\psi(z) \\ &= \int_C z^{-n+s} R_n^{(2)}(z) \frac{z}{z-1} d\phi_2(z), \end{aligned}$$

onde

$$d\phi_2(z) = \frac{(z-1)^2}{z} d\psi(z) = -(1-x)^2 d\psi(z).$$

Fazendo $l_{2n-1} = -\alpha_{2n-2}$ e $l_{2n} = -\alpha_{2n-1}$ nas equações (5.1.36), obtemos a segunda parte do item (ii).

Para a demonstração da primeira parte em (ii), tomamos $l_n = -\alpha_{n-1}$ em (5.1.37). ■

5.1.3 Caso geral

Nesta seção são apresentados alguns resultados gerais sobre sequências polinomiais que satisfazem a relação de recorrência de três termos da forma (3.2.1). Os textos utilizados foram [9, 17].

Ressaltamos que as classes polinomiais apresentadas neste capítulo, nominalmente os L-ortogonais e os para-ortogonais, satisfazem tal fórmula de recorrência de três termos. Porém aqui, apresentaremos um caso geral onde os coeficientes α_n, β_{n+1} são números complexos, não sendo estes necessariamente os mesmos apresentados anteriormente. Sendo assim, os resultados a seguir também abrangem as classes anteriores.

Desta forma, consideremos $P = \{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência que satisfaz a relação de recorrência de três termos dada por (3.2.1), ou seja,

$$P_{n+1}(z) = (z + \beta_{n+1})P_n(z) - \alpha_{n+1}zP_{n-1}(z),$$

$n = 1, 2, \dots$, com $P_0(z) = 1$ e $P_1(z) = z + \beta_1$, onde os números complexos $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$, são não nulos.

Na referência [9] é mostrado que, se $\alpha_{n+1} > 0$ e $\beta_{n+1} < 0$, $n = 1, 2, \dots$, então os zeros dos polinômios $P_n(z)$ são reais e simples, além disso estão todos localizados no eixo real positivo e se entrelaçam com os zeros de $P_{n-1}(z)$.

Ainda, quando as condições $\alpha_{n+1} > 0$ e $\beta_{n+1} < 0$ são válidas, os polinômios gerados pela relação de recorrência satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade

$$\int z^{-m+s} P_m(z) d\phi(t) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n-1,$$

sendo $d\phi$ uma medida positiva forte definida no eixo real positivo tal que os momentos $\mu_m = \int z^m d\phi(z)$, $m \in \mathbb{Z}$, existem.

De modo similar, é fácil mostrar que se $\alpha_{n+1} < 0$ e $\beta_{n+1} > 0$, $n = 1, 2, \dots$, os zeros de $P_n(z)$ são reais, simples, estão localizados no eixo real negativo e se entrelaçam com os zeros de $P_{n-1}(z)$.

Outra relação interessante sobre a sequência P surge de $P_n(0)$. Claramente, de (3.2.1), temos que $P_n(0) = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n \neq 0$, $n \geq 1$. Além disso, é possível obter

$$\begin{aligned} \alpha_2 z &= (z + \beta_2)P_1(z) - P_2(z), \\ \alpha_{n+1} z &= (z + \beta_{n+1}) \frac{P_n(z)}{P_{n-1}(z)} - \frac{P_{n+1}(z)}{P_{n-1}(z)}, \end{aligned} \quad (5.1.39)$$

com $m \geq 2$. A partir de tal relação podemos demonstrar o seguinte resultado.

Lema 5.1.2. *Para qualquer $n \geq 1$, os polinômios consecutivos $P_n(z)$ e $P_{n+1}(z)$ não possuem zeros em comum.*

Resultado similar foi apresentado anteriormente na teoria dos polinômios L-ortogonais, mais precisamente no Teorema 5.1.8, porém tal representação se faz importante uma vez que tal propriedade é garantida para toda e qualquer sequência que satisfaz (3.2.1).

O resultado a seguir nos fornece informações sobre os zeros dos polinômios $P_n(z)$ quando todos os valores de α_{n+1} são positivos e todos os valores de β_{n+1} são iguais a alguma constante positiva.

Teorema 5.1.16. *Seja $\beta_k = \beta > 0$, para $k = 1, 2, \dots, n$, e $\alpha_k > 0$, para $k = 2, \dots, n$. Então os zeros de qualquer $P_k(z)$, $1 \leq k \leq n$, são simples (exceto por um possível zero de multiplicidade 2 em $z = \beta$) e estão localizados em $\mathfrak{C}(\beta) \cup (0, \infty)$, sendo $\mathfrak{C}(\beta) \equiv \{z : z = \beta e^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi\}$.*

Demonstração. Considere $x = x(\beta, z) = \frac{1}{2}(\beta^{-1/2} z^{1/2} + \beta^{1/2} z^{-1/2})$. Então o polinômio $S_k(x) = (4\beta z)^{-k/2} P_k(z)$, $0 \leq k \leq n$, satisfaz $S_0(x) = 1$, $S_1(x) = x$ e

$$S_{k+1}(x) = xS_k(x) - \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} S_{k-1}(x), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Deste resultado temos que os zeros de S_k são reais, simples e são simétricos pela origem. Se escrevermos $S_{2k}(x) = \prod_{j=1}^k (x^2 - x_{2k,j}^2)$ e $S_{2k+1}(x) = x \prod_{j=1}^k (x^2 - x_{2k+1,j}^2)$ então, de $P_k(z) = (4\beta z)^{k/2} S_k(x(\beta, z))$, temos que

$$\begin{aligned} P_{2k}(z) &= \prod_{j=1}^k [(z - z_{2k,j})] \left(z - \frac{\beta^2}{z_{2k,j}} \right), \\ P_{2k+1}(z) &= (z + \beta) \prod_{j=1}^k [(z - z_{2k+1,j})] \left(z - \frac{\beta^2}{z_{2k+1,j}} \right), \end{aligned}$$

onde $z_{k,j}/\beta = (2x_{k,j}^2 - 1) + \sqrt{x_{k,j}^2(x_{k,j}^2 - 1)}$. Sendo assim, se $x_{k,j}^2 < 1$ então $z_{k,j}$ e $\beta^2/z_{k,j}$ são um par de zeros conjugados de P_k no círculo $\mathfrak{C}(\beta)$ e se $x_{k,j}^2 > 1$ então são dois zeros positivos de P_k , inversos sobre o ponto β . Assim, concluímos que os zeros de P_k estão ou no círculo $\mathfrak{C}(\beta)$ ou no eixo positivo real. Se $z = \beta$ é um zero de P_k então este possui multiplicidade 2. ■

Logo, os polinômios T-Möbius correspondentes à relação de recorrência de três termos dada em (3.2.1) são dados por

$$Q_n(z) = (cz + d)^n P_n(f(z)). \quad (5.1.40)$$

Portanto, das equações (2.1.1), (3.2.1) e (5.1.40), temos

$$\begin{aligned}
 Q_{n+1}(z) &= (cz + d)^{n+1} P_{n+1}(f(z)) \\
 &= (cz + d)^{n+1} (f(z) + \beta_{n+1}) P_n(f(z)) - \alpha_{n+1} f(z) (cz + d)^{n+1} P_{n-1}(f(z)) \\
 &= \left[\left(\frac{az + b}{cz + d} \right) + \beta_{n+1} \right] (cz + d) Q_n(z) - \alpha_{n+1} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) (cz + d)^2 Q_{n-1}(z) \\
 &= [az + b + \beta_{n+1}(cz + d)] Q_n(z) - \alpha_{n+1} (az + b)(cz + d) Q_{n-1}(z) \\
 &= [(a + c\beta_{n+1})z + (b + d\beta_{n+1})] Q_n(z) - \alpha_{n+1} (acz^2 + (ad + bc)z + bd) Q_{n-1}(z),
 \end{aligned} \tag{5.1.41}$$

$n = 1, 2, \dots$, com condições iniciais $Q_0(z) = 1$ e $Q_1(z) = (a + c\beta_1)z + (b + d\beta_1)$, onde α_n e β_{n+1} são números complexos não nulos.

A partir da relação de recorrência encontrada para os polinômios T-Möbius em (5.1.41) somos capazes de obter uma fórmula de recorrência para o coeficiente dominante de $Q_n(z)$, dada por

$$q_{n+1,n+1} = (a + c\beta_{n+1})q_{n,n} - \alpha_{n+1}acq_{n-1,n-1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Considerando a sequência de polinômios $Q = \{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ gerada pela relação de recorrência (5.1.41), tal que $P_n(a/c) \neq 0$, com $c \neq 0$, segue que $q_{n,n} \neq 0$, sendo assim $Q_n(z)$ é um polinômio de grau exatamente n .

5.2 Aplicando Möbius

Nesta seção, em conjunto com os resultados apresentados na seção anterior, apresentamos alguns exemplos da ação da transformação de Möbius em sequências geradas pela fórmula de recorrência (3.2.1), e analisamos as novas fórmulas de recorrências geradas, bem como os polinômios T-Möbius e seus coeficientes diretores.

Inicialmente, considerando $\beta_{n+1} = -\frac{a}{c}$, $n = 0, 1, \dots$, com $c \neq 0$, e consequentemente $a \neq 0$ visto que β_{n+1} é não nulo, obtemos a sequência $\tilde{Q} = \{\tilde{Q}_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, dada por

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q}_{n+1}(z) &= \left[\left(a - c \left(\frac{a}{c} \right) \right) z + \left(b - d \left(\frac{a}{c} \right) \right) \right] \tilde{Q}_n(z) - \alpha_{n+1} (acz^2 + (ad + bc)z + bd) \tilde{Q}_{n-1}(z) \\
 &= \left(\frac{bc - ad}{c} \right) \tilde{Q}_n(z) - \alpha_{n+1} (acz^2 + (ad + bc)z + bd) \tilde{Q}_{n-1}(z) \\
 &= -\frac{\Delta}{c} \tilde{Q}_n(z) - \alpha_{n+1} (acz^2 + (ad + bc)z + bd) \tilde{Q}_{n-1}(z),
 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

$n = 1, 2, \dots$, sendo $\tilde{Q}_0(z) = 1$ e $\tilde{Q}_1(z) = -\frac{\Delta}{c}$, onde os números complexos α_n e β_{n+1} são todos não nulos. Temos assim que se a sequência $\tilde{Q}_j(z)$ possui grau j se j for par e grau $j - 1$ se j for ímpar.

De fato, com $\beta_n = -\frac{a}{c}$, temos que todo polinômio gerado a partir da equação (3.2.1) $P_j(z)$, com j ímpar, tem em $z = \frac{a}{c}$ um zero.

Além disso, através do Teorema 2.2.2, observe que o zero $z = \frac{a}{c}$ de $P_j(z)$, pela transformação de Möbius $f(z)$, é levado no ponto $f^{-1}(z)\left(\frac{a}{c}\right) = \infty$. Portanto, qualquer polinômio $\tilde{Q}_j(z)$, com j ímpar, possui grau $j - 1$, ou seja, $j - 1$ zeros.

Ainda, se $ad + bc = 0$, a sequência $\tilde{Q} = \{\tilde{Q}_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ será formada por polinômios pares, isto é, $\tilde{Q}_j(z) = \tilde{Q}_j(-z)$. De fato, através da equação (5.2.1) temos

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_0(-z) &= 1 = \tilde{Q}_0(z) \\ \tilde{Q}_1(-z) &= -\frac{\Delta}{c} = \tilde{Q}_1(z) \\ \tilde{Q}_2(-z) &= -\frac{\Delta}{c}\tilde{Q}_1(-z) - \alpha_2(ac(-z)^2 + bd)\tilde{Q}_0(-z) \\ &= -\frac{\Delta}{c}\tilde{Q}_1(z) - \alpha_2(ac(z)^2 + bd)\tilde{Q}_0(z) = \tilde{Q}_2(z) \\ &\vdots \\ \tilde{Q}_{n+1}(-z) &= \tilde{Q}_{n+1}(z).\end{aligned}$$

O resultado a seguir discorre sobre os zeros dos polinômios T-Möbius $Q_n(z)$, obtidos a partir das propriedades dos zeros de $P_n(z)$.

Lema 5.2.1. *Seja $P = \{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios complexos, gerada por (3.2.1) com $P_n(a/c) \neq 0$ e $c \neq 0$, e $Q = \{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ sua respectiva sequência de polinômios T-Möbius. Para qualquer $n \geq 1$, os polinômios consecutivos $Q_n(z)$ e $Q_{n+1}(z)$ não têm zeros em comum.*

Demonstração. Sejam $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ os zeros de $P_n(z)$ e $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ os respectivos zeros do polinômio T-Möbius $Q_n(z)$. Do Teorema 2.2.2 segue que os zeros ζ_k do polinômio $Q_n(z)$ estão relacionados aos zeros ξ_k de $P_n(z)$ pela relação

$$\zeta_k = f^{-1}(\xi_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Como a transformação de Möbius é bijetora e, pelo Lema 5.1.2, $P_n(z)$ e $P_{n+1}(z)$ não possuem zeros em comum, segue o resultado. ■

A fim de exemplificar os resultados expostos, consideremos $f(z) = \frac{z+2}{z-2}$, sendo assim $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ e $d = -2$. Com $\beta_m = -1$ e $\alpha_{m-1} = 1$, $m = 1, 2, \dots, 5$, temos que $\tilde{Q}_n(z)$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, são da forma

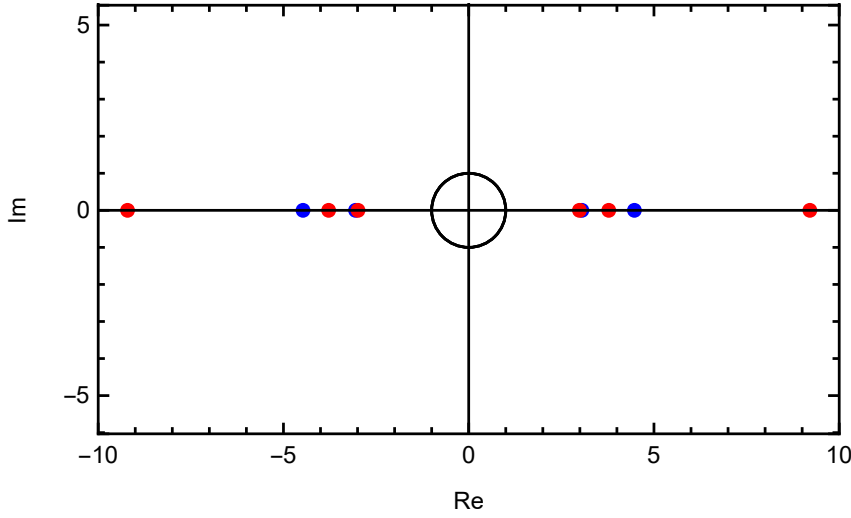
$$\begin{aligned}\tilde{Q}_0(z) &= 1 \text{ e } \tilde{Q}_1(z) = 4; \\ \tilde{Q}_2(z) &= -z^2 + 20; \\ \tilde{Q}_3(z) &= -8z^2 + 96; \\ \tilde{Q}_4(z) &= z^4 - 56z^2 + 464; \\ \tilde{Q}_5(z) &= 12z^4 - 352z^2 + 2240.\end{aligned}$$

De fato, a deficiência no grau se comprova ao notarmos que os polinômios $\tilde{Q}_j$ possuem grau $j - 1$ quando j é ímpar. Ainda, podemos concluir, a partir da representação gráfica dos zeros de $\tilde{Q}_6$ e de $\tilde{Q}_5$, em vermelho e azul respectivamente, que estes não coincidem, assim como o resultado anterior demonstra.

Considerando a transformação de Möbius que mapeia o círculo de raio η na reta real, dada por

$$f(z) = -\eta i \frac{(z - \eta)}{(z + \eta)}, \quad (5.2.2)$$

Figura 5.2.1 – Zeros dos polinômios $\tilde{Q}_6$ e $\tilde{Q}_5$, em vermelho e azul respectivamente. Gerados por $f(z) = \frac{z+2}{z-2}$, $\alpha_m = 1$ e $\beta_m = -1$, $m = 1, 2, \dots, n$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

temos que $a = -\eta i$, $b = \eta^2 i$, $c = 1$ e $d = \eta$. Então, substituindo tais valores na relação (5.1.41) obtemos

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(z) &= [(-\eta i + \beta_{n+1})z + (\eta^2 i + \eta \beta_{n+1})]Q_n(z) - \alpha_{n+1}(-\eta i z^2 + \eta^3 i)Q_{n-1}(z) \\ &= [(\beta_{n+1} - \eta i)z + \eta(\eta i + \beta_{n+1})]Q_n(z) + \alpha_{n+1}\eta i(z^2 - \eta^2)Q_{n-1}(z), \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

$n = 1, 2, \dots$, com condições iniciais dadas por $Q_0(z) = 1$ e $Q_1(z) = (\beta_1 - \eta i)z + \eta(\beta_1 + \eta i)$, onde os números complexos α_{n+1} e β_{n+1} são todos não nulos. Além do mais, da condição $P_n(\frac{a}{c}) \neq 0$ segue que os coeficientes dominantes serão da forma

$$q_{n+1,n+1} = (\beta_{n+1} - \eta i)q_{n,n} + \alpha_{n+1}\eta i q_{n-1,n-1}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

e não nulos, com $q_{-1,-1} = 0$ e $q_{0,0} = 1$. Portanto, $Q_n(z)$ será um polinômio de grau n .

A seguir temos um resultado sobre o comportamento dos zeros do polinômio $Q_n(z)$ em um caso específico.

Teorema 5.2.1. *Se α_{n+1} e β_{n+1} são números reais e possuem sinais opostos para $n = 1, 2, \dots$, os zeros do polinômio $Q_n(z)$, gerado pela relação de recorrência de três termos (5.2.3) são simples e estão localizados no círculo de raio η . Além disso, os zeros de $Q_n(z)$ e $Q_{n+1}(z)$ satisfazem a propriedade de entrelaçamento.*

Demonstração. Sejam ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, os zeros do polinômio $P_n(z)$ e ζ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, os respectivos zeros do polinômio T-Möbius $Q_n(z)$. Assim como citado anteriormente, quando os sinais de α_{n+1} e β_{n+1} diferem, os zeros de P_n , da sequência $P = \{P_n(z)\}_{n=0}^\infty$ gerada por (3.2.1), são reais, simples e também satisfazem a propriedade de entrelaçamento com os zeros de $P_{n+1}(z)$.

Assumindo $f(z)$ como em (5.2.2), temos que sua inversa será dada por

$$f^{-1}(t) = -\eta \frac{(t - \eta i)}{(t + \eta i)}, \quad (5.2.4)$$

esta, por sua vez, mapeia a reta real no círculo de raio η . Assim, do Teorema 2.2.2 e de (5.2.4) segue que os zeros ζ_j , de $Q_n(z)$, estão relacionados com os zeros ξ_j de $P_n(t)$ pela relação $\zeta_j = f^{-1}(\xi_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Notemos que $P_n(a/c) = P_n(-\eta i) \neq 0$. Assim, todos

os zeros de $Q_n(z)$ estão localizados no círculo de raio η . Como a transformação de Möbius é bijetora, segue que os zeros ζ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, de $Q_n(z)$ são simples. Ainda, a imagem do intervalo $I = (l, r) \in \mathbb{R}$ sobre $f^{-1}(t)$ será uma curva sem auto-intersecção. Portanto, como visto anteriormente, a ordenação de qualquer conjunto de pontos contido em I é inalterada ou apenas invertida. Assim, pelo Lema 5.1.2, como os zeros de $P_n(t)$ e $P_{n+1}(t)$ se entrelaçam, o mesmo ocorre com os zeros de $Q_n(z)$ e $Q_{n+1}(z)$. ■

Teorema 5.2.2. *A sequência de polinômios $Q = \{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$ gerada pela relação de recorrência de três termos (5.2.3) é uma classe de polinômios auto-inversível se $\eta = 1$ e α_{n+1} e β_n , $n = 1, 2, \dots$, são números reais. Além disso, no caso em que α_{n+1} e β_n são reais e possuem sinais opostos, todos os zeros de $Q_n(z)$ estão localizados no círculo unitário.*

Demonstração. De (5.2.3), para qualquer $m = 1, 2, \dots, n$,

$$\overline{z^m Q_m\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = [(\beta_m - i)z + (\beta_m + i)] \overline{z^{m-1} Q_{m-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + \alpha_m i (z^2 - 1) \overline{Q_{m-2}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

Desta forma, como $\overline{z^m Q_m\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ satisfaz a mesma relação de recorrência que $Q_m(z)$ com as mesmas condições iniciais, segue que $Q_m(z) = \overline{z^m Q_m\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, ou seja, é um polinômio auto-inversível.

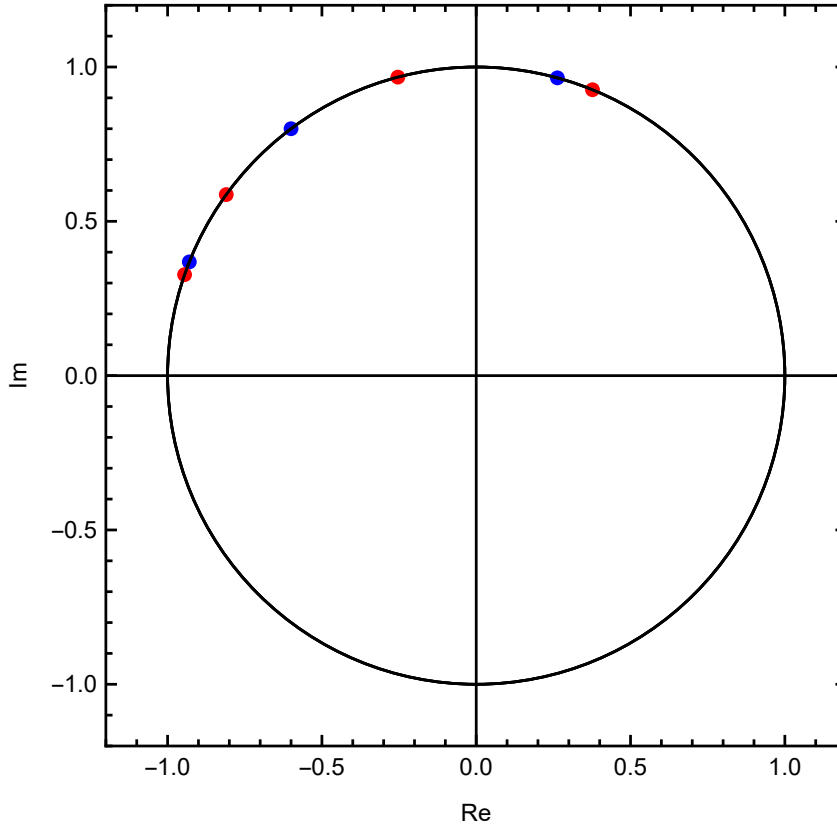
Por fim, do Teorema 5.2.1, temos garantido que os zeros de $Q_n(z)$ estão localizados no círculo unitário. ■

Considerando $\eta = 1$, $\beta_n = -2$ e $\alpha_{n-1} = 1$, para $n = 1, 2, \dots, 4$ obtemos

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= 1; \\ Q_1(z) &= -(2 + i)z + (-2 + i); \\ Q_2(z) &= (3 + 5i)z^2 + 10z + (3 - 5i); \\ Q_3(z) &= -15iz^3 - (32 + 19i)z^2 - (32 - 19i)z + 15i; \\ Q_4(z) &= -(20 - 33i)z^4 + (60 + 110i)z^3 + 172z^2 + (60 - 110i)z + (-20 - 33i). \end{aligned}$$

Na figura a seguir são exibidos os zeros de Q_4 e Q_3 , em vermelho e azul, respectivamente. Fica evidente que tais zeros estão localizados no círculo unitário, são simples e se entrelaçam.

Figura 5.2.2 – Representação dos zeros de $Q_4(z)$ e $Q_3(z)$, em vermelho e azul, respectivamente. Obtidos a partir de $\alpha_{n-1} = 1$ e $\beta_n = -2$, $n = 1, 2, \dots, 4$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Da demonstração anterior, consideremos a transformação dada por (5.2.4). Notemos que $a = -\eta$, $b = \eta^2 i$, $c = 1$ e $d = \eta i$. Neste caso, o polinômio T-Möbius relacionado à sequência de polinômios $P = \{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfaz a relação de recorrência de três termos (3.2.1) será da forma $Q_n(t) = (t + \eta i)^n P_n(z)$.

De (5.1.41) segue que

$$Q_{n+1}(t) = [(-\eta + \beta_{n+1})t + \eta i(\eta + \beta_{n+1})]Q_n(t) + \alpha_{n+1}\eta(t^2 + \eta^2)Q_{n-1}(t), \quad (5.2.5)$$

$n = 1, 2, \dots$, cujas condições iniciais são $Q_0(t) = 1$ e $Q_1 = (-\eta + \beta_1)t + \eta i(\eta + \beta_1)$, onde os números complexos α_{n+1} e β_n , $n = 1, 2, \dots$, são todos não nulos. Além disso, da condição $P_n(\frac{a}{c}) \neq 0$ segue que

$$q_{n+1,n+1} = (-\eta + \beta_{n+1})q_{n,n} + \alpha_{n+1}\eta q_{n-1,n-1} \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.2.6)$$

sendo $q_{j,j}$ o coeficiente dominante do polinômio $Q_j(z)$, $j = 1, 2, \dots$, com $q_{-1,-1} = 0$ e $q_{0,0} = 1$.

Tomando $\beta_n = \eta > 0$, $n = 1, 2, \dots$, obtemos de (5.2.5) uma sequência de polinômios $\tilde{Q} = \{\tilde{Q}_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $\tilde{Q}_j(t)$ tem grau j , se j for par, e grau $j - 1$, se j for ímpar. Além disso, como $ad + bc = 0$, a sequência $\tilde{Q}$ é formada por polinômios pares, de forma similar ao apresentado anteriormente. Ainda, sua relação de recorrência é dada por

$$\tilde{Q}_{n+1}(t) = 2\eta^2 i \tilde{Q}_n(t) + \alpha_{n+1}\eta(t^2 + \eta^2)\tilde{Q}_{n-1}(t), \quad (5.2.7)$$

$n = 1, 2, \dots$, com $\tilde{Q}_0(t) = 1$ e $\tilde{Q}_1(t) = 2\eta^2 i$, sendo α_{n+1} , $n = 1, 2, \dots$, números complexos não nulos.

Por fim, seus coeficientes dominantes podem ser obtidos ao substituirmos $\beta_n = \eta > 0$, $n = 1, 2, \dots$, em (5.2.6), assim

$$\tilde{q}_{j,j} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \text{ for ímpar,} \\ \alpha_2 \alpha_4 \cdots \alpha_j \eta^{j/2}, & \text{se } j \text{ for par} \end{cases}.$$

Além disso, para $n + 1$ ímpar,

$$\tilde{q}_{n+1,n} = \eta(\eta + \beta_{n+1})i\tilde{q}_{n,n} + \alpha_{n+1}\eta\tilde{q}_{n-1,n-2}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

com $\tilde{q}_{1,0} = 2\eta^2 i$ e $\tilde{q}_{2,2} = \alpha_2 \eta$.

O resultado a seguir apresenta o comportamento dos zeros dos polinômios gerados pela relação de recorrência obtida em (5.2.7), quando $\alpha_{n+1} > 0$, $n = 1, 2, \dots$.

Teorema 5.2.3. *Se $\alpha_{n+1} > 0$ e $\beta_n = \eta$, $k = 1, 2, \dots$, os zeros do polinômio $\tilde{Q}_n(t)$ gerado pela relação de recorrência de três termos (5.2.7) são simples, salvo o caso de um possível zero de multiplicidade dois no ponto $t = 0$, e estão localizados na reta real e no eixo imaginário.*

Demonstração. Sejam ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n$ os zeros do polinômio $P_n(z)$ e ζ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, os respectivos zeros do polinômio T-Möbius $\tilde{Q}_n$. De acordo com o Teorema (5.1.16), se $\alpha_{k+1} > 0$ e $\beta_k = \eta > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, os zeros de $P_n(z)$ são simples, exceto por um possível zero duplo em $z = \eta$, e estão localizados em $\mathfrak{C}(\eta) \cup (0, \infty)$, onde $\mathfrak{C}(\eta) \equiv \{z : z = \eta e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi\}$.

Do Teorema 2.2.2 e de (5.2.2) segue que os zeros ζ_j , do polinômio $\tilde{Q}_n(t)$ estão relacionados aos zeros ξ_j , de $P_n(t)$ pela relação $\zeta_j = f(\xi_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Além disso, como $\beta_k = \eta$, $k = 1, 2, \dots, n$, temos que $t = -\eta$ é zero de qualquer polinômio $P_n(t)$ gerado pela fórmula de recorrência (3.2.1), para n ímpar. Desta forma $\zeta_n = f(-\eta) = \infty$, para k ímpar.

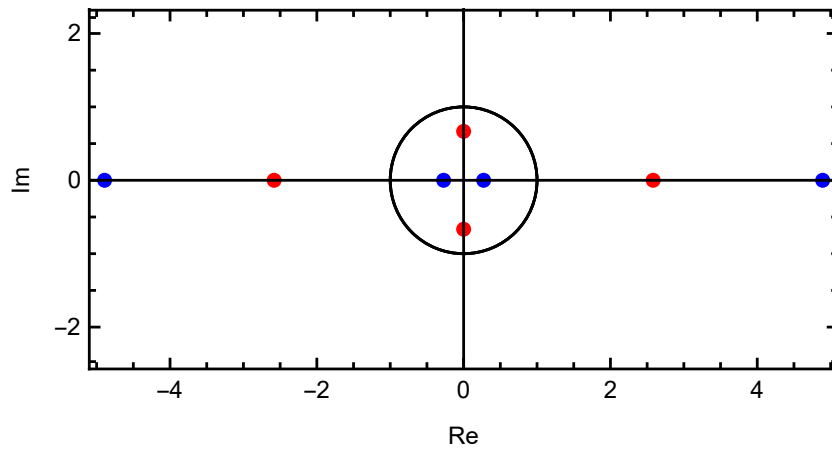
Como a transformação (5.2.2) leva os elementos que estão no círculo de raio η na reta real e os elementos do intervalo $(0, \infty)$ no eixo imaginário, segue o resultado. Como a transformação de Möbius é bijetora, segue que os zeros ζ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, de $\tilde{Q}_n(t)$ são simples. Notemos que o zero de multiplicidade 2 de $P_n(z)$ ocorre quando $z = \zeta$, o que implica que o zero de multiplicidade 2 de $\tilde{Q}_n(t)$ ocorrerá no ponto $t = 0$. ■

Por fim, no exemplo a seguir utilizamos de $\beta_n = \eta = 2$ e $\alpha_{n-1} = 3$, $n = 1, 2, \dots, 5$, obtendo assim

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= 1; \\ Q_1(z) &= 8i; \\ Q_2(z) &= 6z^2 - 40; \\ Q_3(z) &= 96iz^2 - 128i; \\ Q_4(z) &= 36z^4 - 864z^2 + 64; \\ Q_5(z) &= 864iz^4 - 5376iz^2 - 2560i. \end{aligned}$$

A deficiência nos graus de Q_n fica evidente, visto que seu grau é igual a $n - 1$ quando n é ímpar. Ainda, os zeros de Q_5 e Q_4 , representados em vermelho e azul respectivamente, estão localizados na reta real e no eixo imaginário, como o último resultado garante.

Figura 5.2.3 – Representação dos zeros de Q_5 e Q_4 , em vermelho e azul respectivamente, obtidos por $\beta_n = \eta = 2$ e $\alpha_{n-1} = 3$, $n = 1, 2, \dots, 5$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerações finais

O presente trabalho apresentou o estudo da ação da transformação de Möbius em determinadas sequências polinomiais que satisfazem relações de recorrência de três termos, dentre as quais podemos citar as sequências de polinômios ortogonais na reta real.

Os polinômios T-Möbius, gerados a partir de tal composição, possuem diversas propriedades similares a seus polinômios originários e neste estudo tais características se evidenciam. Ainda, um estudo mais abrangente foi apresentado com relação aos polinômios ortogonais clássicos

Um dos itens a serem explorados no projeto de pesquisa original incluía o estudo dos polinômios T-Möbius gerados a partir de sequências de polinômios L-ortogonais e para-ortogonais, porém, durante o desenvolvimento deste trabalho, foi visto que esta teoria era muito ampla, demandando assim estudos mais avançados.

Porém a extensão deste estudo, apesar do encerramento deste ciclo acadêmico, desperta especial interesse visto que esta é uma área que pode ser muito explorada, gerando assim diversos resultados, não somente com relação as classes polinomiais anteriormente citadas.

Referências

- [1] ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F.; RAFAELI, F. R. *Introdução aos Polinômios Ortogonais*. Notas em Matemática Aplicada, SBMAC, v. 64, 2012.
- [2] BERTI, A. C.; SRI RANGA, A. *Companion orthogonal polynomials: some applications*. Applied numerical mathematics, v. 39, n. 2, p. 127-149, 2001.
- [3] BOCHNER, S. *Über sturm-liouvillesche polynomsysteme*. Mathematische Zeitschrift, v. 29, n. 1, p. 730-736, 1929.
- [4] BRENKE, W. C. *On polynomial solutions of a class of linear differential equations of the second order*. Bull. Amer. Math. Soc., v. 36, p. 77-84, 1930.
- [5] CASTILLO, K.; COSTA, M. S.; SRI RANGA, A.; VERONESE, D. O. *A Favard type theorem for orthogonal polynomials on the unit circle from a three term recurrence formula*. Journal of Approximation Theory, v. 184, p. 146-162, 2014.
- [6] CHIHARA, T. S. *An introduction to orthogonal polynomials*. Gordon and Breach Science Publishers, 1978.
- [7] DELSARTE, P.; GENIN, Y. *The split Levinson algorithm*. IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing, v. 34, n. 3, p. 470-478, 1986.
- [8] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. *Polinômios e equações algébricas*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [9] JONES, W. B.; THRON, W. J.; WAADELAND, H. *A strong Stieltjes moment problem*, Transactions of the american mathematical society, v. 261, n. 2, p. 503-528, 1980.
- [10] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E. F. Adrien-Marie Legendre. MacTutor. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Legendre/>>. Acesso em: 22 de abr. de 2022.
- [11] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E. F. Carl Gustav Jacob Jacobi. MacTutor. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jacobi/>>. Acesso em: 22 de abr. de 2022.
- [12] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E. F. Charles Hermite. MacTutor. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hermite/>>. Acesso em: 22 de abr. de 2022.
- [13] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E. F. Edmond Nicolas Laguerre. MacTutor. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laguerre/>>. Acesso em: 22 de abr. de 2022.

- [14] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E. F. Leopold Bernhard Gegenbauer. MacTutor. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gegenbauer/>>. Acesso em: 22 de abr. de 2022.
- [15] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E. F. Pafnuty Lvovich Chebyshev. MacTutor. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Chebyshev/>>. Acesso em: 22 de abr. de 2022.
- [16] ROUTH, E. J. *On some properties of certain solutions of a differential equation of the second order*. Proceedings of the London Mathematical Society, v. 1, n. 1, p. 245-262, 1884.
- [17] DA SILVA, A. P.; SRI RANGA, A. *Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros*, Linear algebra and its applications, v. 397, p. 299-324, 2005.
- [18] SIMON, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle: Part 1: Classical Theory*. Providence, RI: American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 54, 2004.
- [19] SIMON, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle: Part 2: Spectral Theory*. Providence, RI: American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 54, 2004.
- [20] SRI RANGA, A. *Another quadrature rule of highest algebraic degree of precision*. Numerische Mathematik, v. 68, n. 2, 1994, p. 283-294.
- [21] SRI RANGA, A.; BRACCIALI, C. F.; ANDRADE, E. X. L. *Polinômios que satisfazem uma Relação de Recorrência de Três Termos*, Notas em Matemática Aplicada, SBMAC, v. 74, 2012.
- [22] SRI RANGA, A. *Symmetric orthogonal polynomials and the associated orthogonal L -polynomials*. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 123, n. 10, p. 3135-3141, 1995.
- [23] SZEGÖ, G. *Orthogonal Polynomials*. Providence, RI: American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 23, 1975.
- [24] VIEIRA, R. S.; BOTTA, V. *Orthogonal polynomials and Möbius transformations*. Computational and Applied Mathematics, v.40, n. 6, p. 181, 2021.