

ELISANGELA PAVANELO RODRIGUES DOS SANTOS

IDEIAS ESSENCIAIS DA ANÁLISE MATEMÁTICA:

um estudo fenomenológico da filosofia de Leibniz

Relatório de Pós-doutorado realizado na
Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Geociências e Ciências
Exatas, Rio Claro.

Supervisor(a): Profa. Dra. Maria
Aparecida Viggiani Bicudo

Rio Claro

2025

1. Sobre a pesquisa

1.1. Retomando o projeto inicial

O objetivo desta pesquisa apresentada no Projeto deste Pós-Doutorado é buscar compreender as ideias essenciais da Análise Matemática, investigando um dos autores mais importantes no cenário de constituição e produção dessa área da Matemática, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), com a intenção de rastrear o modo pelo qual temas invariantes tratados nessa disciplina constam nos trabalhos desse autor.

Para tanto, buscamos:

- a) as ideias subjacentes aos temas e procedimentos metodológicos trabalhados no âmbito da Análise Matemática que se revelam como invariantes no âmbito dessa disciplina;
- b) o modo pelo qual a Análise Matemática se mostra nas obras principais de Leibniz e em estudos realizados por outros autores sobre essas obras.

1.2. Retomando pontos importantes do relatório parcial

No primeiro ano de trabalho nos dedicamos ao estudo de três ideias que compreendemos como centrais no estudo sobre a Matemática de Leibniz:

- a) Compreensão de infinito expressa por Leibniz. Nesse âmbito, orientamos nossos estudos pelas perguntas: que significa, na obra de Leibniz, os infimamente pequenos? Quais ideias ele expõe sobre infinito? O que esse significado (entendido no âmbito da filosofia de Leibniz) influenciou na ideia de diferenciabilidade?

Realizando essa investigação, compreendemos que Leibniz apresenta não apenas uma matemática do infinito, mas também uma filosofia sobre ele.

Obras que estudamos, realizando seminários quinzenais, e que nos conduziram a compreensões de cunho filosófico sobre essas questões:

- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. *Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano*. Tradução de Alexandre de Oliveira Torres. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

Leibniz, em uma obra dialogada, apresenta uma resposta capítulo a capítulo ao Ensaio de Locke. Escreve os Novos Ensaios como uma refutação sistemática da filosofia empirista de John Locke. O livro é estruturado como um diálogo entre dois personagens: Filaletes, que representa Locke; Teófilo, que representa Leibniz.

Leibniz segue, ponto a ponto, a estrutura do Ensaio sobre o Entendimento Humano de Locke, abordando as mesmas questões: ideias, palavras, conhecimento e opinião.

O ponto central do livro é a defesa do inatismo leibniziano¹, em oposição ao empirismo lockeano.

Enquanto Locke defende que a mente é uma tábula rasa, e que todas as ideias provêm da experiência (externa ou interna), Leibniz sustenta que: “Nada há no intelecto que não tenha antes estado nos sentidos, exceto o próprio intelecto.” Essa famosa frase resume o núcleo do livro: a mente possui estruturas internas, disposições, virtualidades, princípios racionais e formas que não são deriváveis da experiência.

Para Leibniz a experiência desperta o conhecimento, mas não o cria, pois as ideias fundamentais (matemáticas, lógicas, morais) já estavam virtualmente presentes na mente.

O livro é dividido em quatro grandes partes: (a) Livro I – Das Ideias Inatas; (b) Livro II – Das Ideias; (c) Livro III – Das Palavras; (d) Livro IV – Do Conhecimento

O livro não é matemático em si; ele é epistemológico, mas toda a filosofia do conhecimento nos Novos Ensaios serve como fundamento para a concepção leibniziana do infinito.

Na obra *Novos Ensaios*², Leibniz argumenta que a matemática não pode vir da experiência, pois suas verdades são necessárias e universais, enquanto a experiência é contingente. Logo, as verdades matemáticas devem estar fundadas em princípios internos, estruturais, racionais — isto é, inatos. Isso prepara o terreno para sua concepção do infinito e sua discussão sobre os infinitésimos.

De acordo com Moreira (2019³), Leibniz compreendeu a proximidade entre a Filosofia e a Matemática, chegando a pensar em ambas como duas instâncias do mesmo gênero de problemas. Para essa autora, muitos dos interesses de Leibniz pela Matemática advieram dos problemas filosóficos que ele pensava compreender melhor, ao relacioná-los com a Matemática, dentre os quais se encontrava o infinito.

¹ O inatismo leibniziano afirma que a mente humana não é uma tábula rasa (como queria Locke), e que existem na alma estruturas, disposições e princípios racionais anteriores à experiência sensível. Essas disposições são chamadas de ideias inatas. Mas, essas ideias não são conteúdos prontos, já formados, pois são disposições, tendências, capacidades estruturais, princípios internos que permitem ao intelecto reconhecer certas verdades. Para Leibniz a experiência desperta, estimula ou ocasiona essas ideias, mas não as cria.

² LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. *Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano*. Tradução de Alexandre de Oliveira Torres. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

³ MOREIRA, V. C. Contínuo e Contingência I: Estrutura e Alçada da Lei da Continuidade na Lógica de Leibniz. Kotter Editorial, 2019.

- LACERDA, T. M. Leibniz: A Infinitude Divina e O Infinito em Nós. *Cadernos Espinosanos*, 34, 39–63. <https://doi.org/10.11606/issn.2447-9012.espinosa.2016.116945>, 2016.

Lacerda (2016) comenta que, além de uma matemática do infinito, ele também apresenta uma filosofia do infinito. Essa autora destaca que o tratamento do infinito, da perspectiva da Matemática, faz às vezes de uma introdução para pensar a infinitude divina e a infinidade de predicados que caracterizam a noção completa da substância criada finita. Argumenta que Leibniz foca a questão do conhecimento, comparando aquele o conhecimento divino com o humano e, nessa comparação, a noção de infinito também se mostra. Considera que em ambas as modalidades de conhecimento, a intuição é crucial, porém no caso do divino ela é infinita e do caso do conhecimento humano ela é eminentemente finita, donde os seres humanos apresentarem uma cognição limitada.

b) A compreensão de função expressa por Leibniz. Para o estudo dessa questão, valemos dos seguintes trabalhos:

- BOYER, C. B. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. New York: Dover, 1959.

O livro de Boyer é uma obra acessível e influente sobre a história do cálculo, escrito com forte rigor histórico-matemático. A obra apresenta o desenvolvimento do cálculo desde a Grécia Antiga até o século XIX, destacando a evolução gradual de conceitos como: infinitesimais, continuidade, derivada, integral, função, rigor matemático.

Boyer apresenta um panorama contínuo da matemática, enfatizando que o cálculo não surgiu de maneira súbita, mas como síntese de métodos de quadratura, indivisíveis, séries infinitas e relações funcionais — exatamente um dos eixos desenvolvidos nesta pesquisa.

- BOS, H. J. M. Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 14, 1974, p. 1–90.

Este livro é considerado uma importante referência sobre o cálculo de Leibniz. Bos reconstrói, de forma rigorosa, como Leibniz concebia: o diferencial dx e dy ; os diferenciais de ordem superior; a derivada como razão de diferenciais; o uso sistemático de ficções úteis; a coerência interna do método diferencial, mesmo sem definição formal de limite.

Do ponto de vista destacado por Bos (1974), Leibniz não vê infinitesimais como números, mas como entidades auxiliares⁴ para expressar relações de variação. Já a derivada é sempre tratada como razão entre variações infinitesimais — não como limite de quocientes finitos. Bos demonstra que o sistema leibniziano é coerente e funcional, apesar de não possuir fundamento aritmético moderno. Além disso, mostra que Leibniz operava com uma geometria de processos, não com uma lógica formal de limites.

O texto de Bos (1974), foi uma importante fonte para explicitar o funcionamento técnico do cálculo leibniziano e defender a legitimidade conceitual dos infinitesimais como ferramentas operatórias.

- ARTHUR, R. *Leibniz on Time, Space and the Continuum*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

O livro de Arthur (2001) é uma obra importante da historiografia recente sobre Leibniz. Ele analisa como Leibniz compreende: o contínuo (como infinitamente divisível e “indefinido”); o tempo e o espaço como ordens de relações, não substâncias; o infinito como potencial e “sincategoremático”; a relação entre matemática, metafísica.

Arthur (2001) esclarece a distinção entre infinito atual x potencial, mostrando que o contínuo leibniziano não é composto de partes, mas é uma idealização racional. Nos mostra também que as grandezas infinitesimais não são *coisas* do mundo, mas sim, ferramentas conceituais, bem como a metafísica das mônadas⁵ fundamenta as ideias do contínuo e das funções.

- c) A notação de Leibniz como algo forte e consistente no desenvolvimento da Matemática.
- Para o estudo dessa questão, valemo-nos dos seguintes trabalhos:

⁴ Para Leibniz, *entidades auxiliares* (*entia auxiliares*) são seres conceituais, ficções operatórias ou construções mentais que não possuem existência real (nem física, nem metafísica), mas são indispensáveis para o raciocínio matemático. Elas têm função epistemológica, não ontológica. Trata-se de uma das ideias mais originais e sofisticadas da matemática leibniziana, permitindo que ele use infinitesimais, números negativos, irracionais, limites implícitos e curvas infinitamente dobradas sem comprometer sua metafísica racionalista. Um exemplo de entidades auxiliares em Leibniz são os infinitesimais.

⁵ Para Leibniz, mônadas são substâncias simples, sem partes (LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. *Monadologia*. Tradução, apresentação e notas de Sérgio Kreitlon. São Paulo: Editora Unesp, 2010), centros de percepção que espelham o universo (LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. *Ensaio de Teodiceia sobre a bondade de Deus, a liberdade do homem e a origem do mal*. Tradução de William de Siqueira Piauí e Juliana Cecci Silva, São Paulo: Estação Liberdade, 2017), elas não compõem o contínuo — que é uma idealidade — mas fundamentam a visão leibniziana segundo a qual a realidade é constituída por relações e variações internas, o que se reflete diretamente na concepção de infinitesimais, de função e da análise diferencial.

- BOYER, C. B. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. New York: Dover, 1959.
- BOS, H. J. M. Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 14, 1974, p. 1–90.
- CAJORI, Florian. *A History of Mathematical Notations*. Vol. I e Vol. II. Chicago: Open Court, 1928–1929.

A obra de Florian Cajori (1928–1929), publicada em dois volumes entre 1928 e 1929, é reconhecida por ser um estudo detalhado e sistemático sobre a história das notações matemáticas. O mapeamento histórico que Cajori (1928–1929) realiza — desde os primórdios da aritmética e geometria gregas até o simbolismo moderno do cálculo infinitesimal, da álgebra, da teoria dos números e da análise. Sua abordagem combina pesquisa histórica, análise filológica, comparação de manuscritos e uma síntese que mostra como as notações evoluem não apenas por razões técnicas, mas também culturais, filosóficas e pedagógicas.

O livro de Cajori (1928–1929) é essencial para nossa pesquisa, pois mostra como e por que Leibniz criou sua notação diferencial e evidencia que sua escolha era superior à de Newton por ser universal, simétrica e analítica.

Cajori (1928–1929) documenta a rápida adoção da notação leibniziana por Euler, Bernoulli, Lagrange, Laplace e mostra que demonstra que $\int$ e dy/dx se tornaram parte da linguagem da matemática mundial, sustentando historicamente a tese de que a notação de Leibniz é uma das invenções linguísticas mais bem-sucedidas da história da ciência.

Para nossa pesquisa, Cajori (1928–1929) fornece respaldo direto a afirmações como: a notação leibniziana expressa melhor a variação que as fluxões de Newton; os diferenciais funcionam como entidades auxiliares generalizáveis; a simplicidade simbólica explica a adoção quase universal da notação; a notação de Leibniz se integra naturalmente ao conceito de função.

Em relação à nossa questão sobre a força e a consistência das notações do Cálculo Infinitesimal de Leibniz, entendemos que se tornou dominante na tradição do cálculo não apenas por razões históricas, mas sobretudo por sua consistência conceitual, operacional e epistemológica. Como mostram Bos (1974) e Cajori (1928-1929), essa notação se apoia em uma teoria implícita das entidades auxiliares, permitindo que os diferenciais sejam tratados como ficções racionais manipuláveis, sem comprometer a consistência interna do sistema. Boyer (1959) observa que, ao representar diretamente a razão de variação entre grandezas,

a notação leibniziana expressa com clareza a própria ideia de dependência funcional, antecipando o conceito moderno de função e favorecendo uma álgebra da variação. Arthur (2001) acrescenta que essa notação reflete a metafísica leibniziana do contínuo — infinitamente divisível. Cajori (1928–1929), em seu estudo, nos mostra que a escolha simbólica de Leibniz não foi arbitrária: tratava-se de uma linguagem projetada para ser universal, simétrica e extensível, adequada às operações algébricas, às mudanças de variáveis e ao tratamento de grandezas múltiplas. Entendemos que a notação diferencial realiza o projeto leibniziano de um *cálculo universal*, permitindo transformar relações geométricas e físicas em regras formais manipuláveis.

Nesse contexto, essa notação provou sua flexibilidade histórica: ela se adaptou tanto ao rigor analítico do século XIX quanto às formulações modernas da análise, sendo um dos raros exemplos de símbolo matemático que atravessa diferentes paradigmas sem perda de eficácia. Assim, a notação leibniziana não é apenas um meio de escrever relações diferenciais, mas um modo de pensar o processo contínuo de variação — motivo pelo qual sua permanência na matemática é, ao mesmo tempo, histórica e conceitualmente necessária.

No segundo ano deste estágio, avançamos em direção ao aprofundamento do estudo sobre o método de cálculo de Leibniz para encontrar a reta tangente a uma curva. Para isso nos aprofundamos no texto:

- LEIBNIZ, G. W. *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illi calculi genus*⁶, publicado em outubro de 1684, na revista da *Acta Eruditorum*, número X, no original⁷.
- LEIBNIZ, G. W. Escritos matemáticos (7A). Trad. M. S. de Mora Charles. Espanha: Comares, 2014.
- LEIBNIZ, G. W. Escritos matemáticos (7B). Trad. M. S. de Mora Charles. Espanha: Comares, 2014.

De acordo com Charles (2014), os escritos matemáticos publicados por Leibniz durante sua vida foram poucos: alguns artigos em periódicos, como o *Journal des Sçavans*, o *Acta Eruditorum* (fundado por ele mesmo), o *Nouvelles de la République des Lettres*, o *Journal de Trevoux*, o *Philosophical Transactions*, etc.; alguns livros como, por exemplo, *Da Arte Combinatória*, escrito como consequência de sua tese de doutorado, e os resumos

⁶ Um novo método para máximos e mínimos, bem como tangentes, que não é impedido nem por quantidades fracionárias nem por quantidades irracionais, e um tipo singular de cálculo para isso.

⁷ LEIBNIZ, G. W. *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*. *Acta Eruditorum*, Leipzig, v. X, p. 467-473, 1684.

ou explicações enviadas em sua correspondência para que seus correspondentes pudessem entendê-los. Postumamente, e após um certo período (até alguns séculos), começaram a surgir as edições oficiais de diferentes autores e, sobretudo,

Os trabalhos intitulados *Escritos Matemáticos 7A* e *Escritos Matemáticos 7B* envolvem os textos de Leibniz que tratam da Matemática e, na sua introdução, destacam que a Academia de Ciências de Berlim está começando a realizar uma compilação dos trabalhos de Leibniz, organizando-os em uma Série, que ainda será publicada e que incluirá manuscritos matemáticos inéditos, devendo consistir em cerca de 30 volumes, do qual, até o momento foram publicados apenas cinco. Cada um dos volumes, que serão publicados pela Academia de Ciência de Berlim, terá cerca de 800 páginas e, portanto, o total atingirá, cerca de 24 mil páginas. O material a ser publicado trará também as correspondências sobre matemática, onde muitos aspectos das ideias de Leibniz se revelam.

A importância das publicações *Escritos Matemáticos 7A* e *Escritos Matemáticos 7B* para o desenvolvimento deste trabalho de pós-doutorado se dá pela nossa busca às obras originais de Leibniz que dizem respeito tanto à sua Matemática e à sua Filosofia, bem como a relação existente entre ambas. Os textos apresentados nesses livros são traduções para o espanhol diretas dos originais de Leibniz do latim. Nossa investigação, conduziu-nos a entrar em contato com a editora destas duas obras, a professora Mary Sol de Mora Charles⁸.

Por meio da professora Mary Sol Charles, conheci os estudos realizados pela “Cátedra de Filosofia G.W. Leibniz”. Ela foi criada na Universidade de Granada com o objetivo primordial de promover a pesquisa e a divulgação de estudos sobre Leibniz e a Modernidade até os dias atuais. Para atingir seus objetivos, organizara atividades em diversas áreas filosóficas, científicas, políticas, econômicas, religiosas e culturais. Seu propósito é contribuir, tanto historiográfica quanto sistematicamente, para a análise crítica da sociedade europeia e global contemporânea a partir de uma perspectiva filosófica. O professor Juan A. Nicolás, é dos que organizam algumas atividades desenvolvidas na Cátedra, como por exemplo, as reuniões do Seminário Internacional Leibniz, que foram realizadas mensalmente até julho de 2026. Ao participar dessas reuniões mensais tivemos o privilégio de ter contato com pesquisadores brasileiros que são autores de textos lidos no

⁸ Catedrática de História da Filosofia e da Ciência da Universidade Complutense de Madri.

desenvolvimento desta pesquisa, como por exemplo, Vivianne de Castilho Moreira⁹ e William de Siqueira Piauí¹⁰.

Desse modo, desde outubro de 2025, participamos das atividades mensais da Cátedra que são desenvolvidas de modo on-line¹¹.

1.3. O que foi desenvolvido no estágio de Pós-Doc aqui relatado

Sobre texto original de Leibniz: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illi calculi genus*, publicado em outubro de 1684, na revista da *Acta Eruditorum*, número X.

Nesta publicação Leibniz faz uma exposição definitiva de seu Cálculo, apresenta uma nova notação para se referir ao cálculo da derivada, como também regras gerais para a diferenciação e introduz o termo “Cálculo Diferencial”. Nele, Leibniz define dx como um infinitésimo arbitrário, ou seja, uma "diferença" infinitamente pequena em x e dy como a mudança correspondente em y , governada pela regra da tangente. Ao publicar a notação $\frac{dx}{dy}$, Leibniz não apresenta apenas uma *ideia*, mas uma ferramenta de cálculo consistente. Essa notação trata a derivada como uma razão de infinitésimos, permitindo assim, sua manipulação algorítmica.

Boyer (2012), destaca que este artigo de Leibniz, juntamente com o posterior sobre as regras de integração escrito em 1686, foi muito lido pelos matemáticos da Europa continental, inclusive pelos irmãos Jacob Bernoulli e Johann Bernoulli¹² que após dominarem o método de Leibniz e se tornaram seus maiores divulgadores.

⁹ Professora Titular de Filosofia dos cursos de graduação e pós-graduação em Filosofia (Mestrado e Doutorado) da Universidade Federal do Paraná. Atua nas áreas de Filosofia Antiga, notadamente Aristóteles, e Filosofia Moderna, notadamente Leibniz, com foco em filosofia da linguagem e filosofia da lógica. Co-fundadora do GT Leibniz da ANPOF, do qual foi Coordenadora no biênio 2020-2022.

¹⁰ Possui graduação em Filosofia - FFLCH Universidade de São Paulo (1998), mestrado em Filosofia - FFLCH/USP (2002) e doutorado em Filosofia - FFLCH/USP (2009), Licenciatura em Matemática IME-USP/UNIT (2014). Atualmente é professor efetivo - adjunto 1 da Universidade Federal de Sergipe (UFS) e pesquisador do Grupo de Estudos Conhecimento e Ciência GE2C (UFS), integra o Grupo de Pesquisa em Estoicismo e Cinismo VIVAVOX (UFS), além de ser membro colaborador do Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa (CFCUL-Pt) e ser o líder do Grupo de Estudos de Filosofia da Linguagem da UFS (GEFILUFS). No momento suas principais áreas de interesse são: História da Filosofia Moderna, Filosofia da Linguagem, Linguagens Artificiais, História e Filosofia da Matemática, História e Filosofia da Lógica, História e Filosofia da Ciência. Piauí traduziu para o português, diretamente do latim, a obra de Leibniz, *Ensaio de Teodiceia sobre a bondade de Deus, a liberdade do homem e a origem do mal*; publicada em 2022.

¹¹ <https://leibniz.es/reuniones-seminario-permanente-leibniz/>

¹² Jacob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), dois irmãos matemáticos suíços do século XVII e XVIII cujas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento do cálculo, incluindo a introdução do termo "integral" e a resolução de problemas de equações diferenciais. Jacob foi pioneiro na teoria da probabilidade e descobriu a constante e os números de Bernoulli, enquanto Johann foi um dos fundadores do cálculo das variações e desenvolveu a equação de Bernoulli.

Entretando, ao iniciar o estudo dessa obra, demo-nos conta da presença de outras ideias e conceitos, que clamavam por compreensões. Essa clareza nos levou a realizar estudos e pesquisas buscando por compreensões matemáticas e não matemáticas do termo análise, sobre ideias de Leibniz a respeito de combinatória e a passagem para o contínuo, e as propriedades que envolvem a ideia do triângulo característico.

Nesse procedimento investigativo, revelou-se nosso modo de pesquisar: o fenomenológico. Tomamos ciência, mediante um pensar que se voltou sobre o realizado, refletindo sobre o feito, e entendemos que o fenômeno investigado foi se mostrando de diferentes perspectivas, as quais, à medida que a perseguimos, procurando entendê-la à luz de nossa intenção de pesquisa, o pensar de Leibniz sobre Cálculo Diferencial foi se revelando. Nesse movimento, ideias-chaves ou nucleares ao pensamento desse autor, quanto ao por nós investigado, foram sendo desveladas, ou seja, tiradas da zona obscura de encobrimento do seu pensar.

1) Resumo geral do trabalho realizado

LEIBNIZ, OS INFINITESIMAIS E A ESTRUTURA DO CÁLCULO: UMA SÍNTESE AMPLIADA

A construção do Cálculo Diferencial por Gottfried Wilhelm Leibniz constitui um dos momentos mais significativos da história da matemática, não apenas por sua força técnica, mas por sua originalidade conceitual e filosófica. A partir dos estudos de Boyer, Bos, Arthur e Cajori, é possível compreender como as três dimensões fundamentais do pensamento leibniziano — os infinitesimais, a notação diferencial e a concepção pré-moderna de função — se articulam para formar uma estrutura coerente de análise da variação contínua. Este texto apresenta uma síntese ampliada desses elementos, percorrendo sua fundamentação histórica e filosófica.

Infinitesimais como estrutura do cálculo

A teoria dos infinitesimais de Leibniz desempenha papel central na constituição do cálculo diferencial. Segundo a reconstrução técnica realizada por Bos, os infinitesimais funcionam como entidades auxiliares (*entia rationis*), isto é, como ficções conceituais destinadas a permitir a representação simbólica da variação contínua¹³. Eles não são considerados partes mínimas do contínuo físico, tampouco elementos ontologicamente reais; são, antes, instrumentos formais, concebidos para operar em um nível ideal em que a razão é capaz de descrever fenômenos de mudança.

¹³ BOS, H. J. M. *Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus*. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 14, 1974, p. 1–90.

Bos (1974) demonstra que o cálculo leibniziano possui coerência interna independentemente do rigor *epsilônico*¹⁴ posterior, pois os diferenciais (dx) e (dy) são manipulados sistematicamente como quantidades simbólicas cujas propriedades derivam de regras operatórias consistentes². Essa abordagem permitiu a Leibniz desenvolver o método diferencial de modo flexível, aplicável a problemas de tangência, máximos e mínimos, quadraturas e curvatura.

Ao contrário da leitura que considera o sistema leibniziano como impreciso ou inconsistente, Bos sustenta que a teoria leibniziana dos infinitesimais é compatível com uma lógica formal de operações diferenciais, baseada no princípio de que a razão ($\frac{dy}{dx}$) representa a relação entre mudanças infinitesimais, antecipando a derivada moderna. Essa razão infinitesimal é um símbolo que captura a estrutura de dependência entre grandezas, ainda que o limite não esteja explicitamente formulado.

Tal posição se articula com a filosofia do contínuo apresentada por Arthur (2001)¹⁵. Em seu extenso estudo sobre tempo, espaço e continuidade em Leibniz, Arthur argumenta que o filósofo rejeita a existência das partes indivisíveis do contínuo, concebendo-o como infinitamente divisível e indefinido. Os infinitesimais, portanto, não são constituintes do contínuo, mas representações racionais que tornam possível descrevê-lo. A adequação dos infinitesimais ao cálculo está no fato de que eles são meios pelos quais o entendimento apreende processos que, no real, são contínuos e não discretizados.

Essa compreensão confere à teoria leibniziana dos infinitesimais um caráter duplamente epistemológico: por um lado, eles representam a variação contínua que não pode ser reduzida a grandezas finitas; por outro, constituem instrumentos formais que permitem operar com essa variação de maneira sistemática. Assim, os infinitesimais são análogos aos números irracionais ou imaginários: entidades que não possuem existência concreta, mas são indispensáveis à estrutura da matemática.

A notação leibniziana e sua superioridade estrutural

A segunda contribuição fundamental de Leibniz, amplamente reconhecida por historiadores da matemática, é sua notação diferencial: os símbolos (dx), (dy), ($\frac{dy}{dx}$). Boyer (1959)¹⁶ destaca que essa notação supera a de Newton não apenas em simplicidade, mas principalmente por sua consistência com o pensamento analítico e funcional. Ao contrário da notação de fluxões, que expressa uma concepção cinemática e temporal da derivada, a notação leibniziana é simétrica, algébrica e independente de uma variável privilegiada como o tempo.

Boyer argumenta que a clareza conceitual do símbolo (dy/dx) corresponde à concepção leibniziana de razão infinitesimal entre variáveis, o que permite tratar derivadas como frações formais, possibilitando manipulações algébricas diretas que se tornaram essenciais ao desenvolvimento posterior do cálculo.

¹⁴ Se refere ao método formal de definir limites usando ε e δ , garantindo precisão lógica absoluta sem depender de “quantidades infinitamente pequenas”.

¹⁵ ARTHUR, R. T. W. *Leibniz on Time, Space and the Continuum*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

¹⁶ BOYER, C. B. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. New York: Dover, 1959.

A investigação histórica de Cajori (1928-1929)¹⁷, fornece o mapeamento detalhado da evolução dessa notação. Cajori (1928-1929) identifica a rápida difusão da linguagem leibniziana entre Bernoulli, Euler¹⁸ e Cauchy¹⁹, mostrando que sua adoção universal não se deve ao acaso, mas à sua adequação estrutural para representar leis matemáticas gerais. A notação diferencial é flexível, compatível com operações algébricas, apropriada para problemas multivariáveis e adaptável ao rigor do século XIX. Por isso, ela perdura como padrão universal da matemática moderna.

Essa longevidade confirma a tese central de Cajori (1928-1929): notações matemáticas eficientes não são meras convenções, mas expressam modos de pensar. A notação de Leibniz expressa uma concepção da matemática como linguagem simbólica universal, ideia que já estava presente em seu projeto de *characteristica universalis*. Assim, a notação não apenas facilita o cálculo: ela realiza o ideal epistemológico de representar relações de maneira clara, geral e manipulável.

A ideia de função em Leibniz

Embora a definição moderna de função seja obra de Euler e Dirichlet²⁰, Leibniz fornece um conceito intuitivo fundamental para a formação da análise: a função como lei de dependência entre grandezas variáveis. Boyer (1959) identifica, nos manuscritos de Leibniz, a compreensão de que uma curva representa uma relação regular entre quantidades, e que essa relação é o objeto central da análise. A noção de função é, portanto, embrionária, mas já está presente como expressão analítica de uma dependência estruturada.

Bos (1974) reforça essa interpretação ao demonstrar que a derivada é tratada por Leibniz como medida da variação de uma grandeza em relação à outra — isto é, como expressão de uma relação funcional. A análise é, essencialmente, o estudo das relações diferenciais entre variáveis, e é nesse ponto que a função emerge como objeto matemático, ainda sem formalização, mas claramente delineada.

A interpretação filosófica de Arthur (2001) complementa essa visão ao mostrar que, para Leibniz, a função não é um objeto empírico, mas uma estrutura racional correspondente a leis ideais que organizam fenômenos. A curva expressa um aspecto da ordem do mundo; a função é o modo de inteligibilidade dessa ordem.

A síntese: infinitesimais, notação e função como estrutura do cálculo

A partir desses três eixos — infinitesimais, notação e função — compreende-se a originalidade do cálculo leibniziano. Os infinitesimais fornecem o mecanismo conceitual; a notação diferencial oferece a linguagem simbólica adequada; e a ideia de função estabelece o objeto da análise.

¹⁷ CAJORI, F. *A History of Mathematical Notations*. 2 vols. Chicago: Open Court, 1928–1929.

¹⁸ Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço do século XVIII, considerado um dos mais prolíficos e influentes da história, com contribuições em diversas áreas como cálculo, teoria dos números, física e engenharia.

¹⁹ Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês crucial para o desenvolvimento da análise matemática moderna, sendo responsável por introduzir rigor nas áreas de cálculo e análise, formalizando conceitos como limite, integral e continuidade.

²⁰ Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático alemão que fez contribuições significativas para a teoria dos números e a análise matemática. Ele é conhecido pela definição moderna de função.

Essa síntese explica por que o cálculo de Leibniz assumiu papel central na tradição matemática europeia, sendo ampliado por Euler, formalizado por Cauchy e reformulado por Weierstrass²¹, sem perder seus elementos fundamentais. A notação diferencial sobreviveu ao rigor *εpsilônico* e se mostrou compatível até mesmo com a análise não standard moderna.

Assim, entendemos que a obra de Leibniz não é apenas um ponto de partida histórico, mas uma estrutura conceitual duradoura que transformou a matemática ao apresentar um modo novo de pensar a variação contínua.

2) Produção científico acadêmica

- Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), publicação do artigo completo e apresentação de trabalho

Título do trabalho: Estudo sobre Possíveis Relações entre O Método de Arquimedes e o Cálculo Infinitesimal de Leibniz

Resumo: Reporta-se um estudo sobre as possíveis relações entre *O Método* (Arquimedes) e a *Análise Infinitesimal* (Leibniz), as quais serão procuradas examinando alguns dos trabalhos desenvolvidos por eles; no caso de Arquimedes, foram considerados o comprimento do círculo e a área da parábola; em Leibniz, exemplificamos um processo de Cálculo ao se trabalhar com os infinitésimos. Com essa pesquisa, procurou-se compreender como as ideias presentes nos estudos desses dois pensadores se desenvolvem no âmbito da Matemática, mantendo a perspectiva filosófica. A investigação realizada permitiu perceber uma proximidade dos procedimentos usados por Arquimedes aos idealizados por Leibniz no tratamento dado por ele aos conceitos essenciais do Cálculo, mesmo mantendo diferenças em relação às ideias sobre o infinito, assumidas por Arquimedes.

Contribuição deste trabalho para a pesquisa realizada sobre Leibniz:

O trabalho *Estudo sobre Possíveis Relações entre O Método de Arquimedes e o Cálculo Infinitesimal de Leibniz* dialoga diretamente com e a pesquisa realizada ao mostrar que, embora Leibniz inaugure uma nova linguagem analítica baseada em diferenciais e infinitesimais, sua estrutura conceitual permite reinterpretar e unificar procedimentos de decomposição contínua já presentes na geometria arquimediana. Nesse sentido, o estudo evidencia que os infinitesimais conferem ao cálculo uma generalidade e uma sistematicidade ausentes na matemática antiga, transformando métodos de exaustão e processos de soma contínua em operações simbólicas como $\frac{dy}{dx}$. Ao aproximar esses dois modos de tratar o contínuo, a pesquisa revela não apenas uma continuidade histórica entre a tradição geométrica grega e o cálculo moderno, mas também a originalidade filosófica de Leibniz, cuja notação e concepção analítica da função permitem compreender os resultados arquimedianos sob uma forma conceitualmente mais ampla.

²¹ Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemão, conhecido como o "pai da análise moderna", que revolucionou a teoria das funções através do rigor e da precisão. Ele é famoso por desenvolver a análise moderna, a teoria das funções e por introduzir conceitos fundamentais como a função contínua e não diferenciável em ponto algum.

- III Seminário Avançado: uma Filosofia Fenomenológica da Educação Matemática, resumo expandido e apresentação de trabalho.

Título do trabalho: Ideias Essenciais da Análise Matemática e Aberturas visualizadas para o seu ensino.

Resumo: A Análise Matemática começou a ser discutida a partir do século XVIII, à medida que se percebeu a necessidade de construir uma base mais rigorosa para o Cálculo Diferencial e Integral. Dois autores, Gottfried Wilhelm Leibniz, Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, são considerados importantes na estruturação do campo de conhecimento da Análise Matemática. O estudo tem como objetivo estudar as principais obras, desses autores, procurando compreender os modos pelos quais ideias nucleares à análise estão presentes em seus escritos. Este estudo pretende avançar, tanto em relação à possíveis pontos de convergências entre Leibniz e Cantor, quanto às aberturas visualizadas para o ensino de Análise.

Contribuição deste trabalho para a pesquisa realizada sobre Leibniz:

O trabalho *Ideias Essenciais da Análise Matemática e Aberturas Visualizadas para o seu Ensino* dialoga com a Matemática e a Filosofia de Leibniz ao mostrar que núcleos conceituais da Análise moderna — continuidade, infinito, função, rigor e estrutura do contínuo — já se encontram implicitamente formulados em sua obra, ainda que em linguagem pré-axiomática. A investigação destaca que a Análise Matemática, enquanto disciplina estruturada, só se consolidou no século XIX, mas seus fundamentos foram preparados por Leibniz, cuja concepção de infinitesimais e cuja notação diferencial possibilitaram a descrição analítica de processos contínuos, antecipando problemas que Cantor mais tarde trataria com ferramentas aritméticas. Ao aproximar Leibniz de Cantor, o estudo evidencia que ambos compartilham uma preocupação comum com a fundamentação do contínuo, embora sigam caminhos distintos: Leibniz apoia-se em uma metafísica da divisibilidade indefinida e na análise das relações diferenciais, ao passo que Cantor introduz uma aritmética transfinita e uma teoria dos conjuntos que concebe novamente a noção de infinito. Essa convergência revela que as questões enfrentadas por Leibniz — especialmente a constituição do contínuo, a natureza das grandezas variáveis e a busca por uma linguagem universal da variação — constituem o solo filosófico sobre o qual a Análise moderna foi edificada. Além disso, ao investigar como essas ideias podem ser apresentadas no ensino, o trabalho mostra que a abordagem leibniziana, com sua ênfase conceitual na dependência funcional e na notação que explicita a variação, permanece pedagógica e epistemologicamente fecunda para introduzir estudantes na lógica da Análise Real.

- IV Seminário Avançado: uma Filosofia Fenomenológica da Educação Matemática, resumo expandido e apresentação de trabalho.

Título do trabalho: Modos de Aparição do Infinitésimo: da filosofia grega aos hiper-reais.

Resumo: Este capítulo tem como objetivo principal desenvolver um estudo de como a ideia dos infinitésimos emerge na história da Matemática e se consolida como algo imprescindível em obras de Leibniz relacionadas ao cálculo infinitesimal. Para tanto, trabalharemos em um enfoque fenomenológico. Para tanto, nossa análise se volta inicialmente a Grécia antiga,

onde se iniciam as contradições e paradoxos que cerceavam as discussões sobre as quantidades infinitamente pequenas. Já, no final do século XVI e início do XVII, momento em que grandes pensadores participaram ativamente para o desenvolvimento das ideias relacionadas ao Cálculo, destacaremos alguns dos principais pensadores como Cavalieri²² e Pascal²³. Chegando, posteriormente, aos trabalhos de Leibniz, propriamente dito, seu entendimento sobre os infinitésimos e o infinito, destacando como esse entendimento contribuiu para o avanço do Cálculo.

Contribuição deste trabalho para a pesquisa realizada sobre Leibniz:

O capítulo *Modos de Aparição do Infinitésimo: da filosofia grega aos hiper-reais* contribui significativamente para a pesquisa sobre a matemática e a filosofia de Leibniz ao reconstruir, em perspectiva histórica e fenomenológica, o percurso das ideias relacionadas ao infinitamente pequeno desde a Grécia Antiga até a formulação moderna dos hiper-reais. A obra evidencia que os paradoxos gregos do contínuo, os debates sobre a divisibilidade indefinida e as tensões entre infinito potencial e atual constituem o pano de fundo conceitual sobre o qual Leibniz elabora sua teoria dos infinitesimais. A análise de autores como Cavalieri e Pascal mostra que, no período pré-leibniziano, já emergiam técnicas de decomposição contínua e raciocínios que sugeriam a necessidade de instrumentos conceituais capazes de lidar com a variação. Nesse contexto, o estudo revela que Leibniz transforma esse legado em um sistema matemático novo, articulado pela noção de infinitesimais e pela introdução de uma notação simbólica capaz de expressar relações diferenciais, contribuindo decisivamente para a consolidação do cálculo. Ao situar a posição de Leibniz no interior dessa genealogia do infinitésimo — que vai dos paradoxos gregos ao aparato lógico dos hiper-reais — o capítulo esclarece tanto a originalidade de sua resposta filosófica ao problema do contínuo quanto a força operatória de sua matemática, oferecendo uma compreensão ampla e historicamente fundamentada de sua obra.

- Revista Educação Matemática Pesquisa, artigo completo.

Título: A hermenêutica e o fazer do professor de Matemática: uma possibilidade de trabalho nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral.

Resumo: Este artigo tem como objetivo apresentar um modo de intervenção em sala de aula, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, de um curso de Licenciatura em Matemática, quando trabalhamos com alunos dessa disciplina o Teorema do Valor Intermediário. Tomamos como base os estudos de Bicudo (1991), Garnica (1992), Garnica e Bicudo (1994) a respeito de uma didática baseada no trabalho hermenêutico com textos de matemática em sala de aula. Relatamos a experiência realizada e nossa compreensão sobre a atividade desenvolvida. Trouxemos as perguntas postas pelos alunos e os indícios de suas compreensões sobre as ideias trazidas no teorema estudado.

²² Bonaventura Cavalieri, matemático italiano (1598-1647), discípulo de Galileu, conhecido por desenvolver o **método dos indivisíveis** e o **Princípio de Cavalieri**, que são precursores do cálculo integral. O princípio afirma que dois sólidos com a mesma altura e cujas seções transversais têm a mesma área em todos os níveis possuem o mesmo volume.

²³ Blaise Pascal (1623-1662), matemático, físico e filósofo francês do século XVII, conhecido por seu trabalho na teoria da probabilidade, na geometria projetiva e na hidráulica.

Contribuição deste trabalho para a pesquisa realizada sobre Leibniz:

Embora o artigo *A hermenêutica e o fazer do professor de Matemática* trate especificamente de uma intervenção didática baseada na leitura hermenêutica do Teorema do Valor Intermediário, ele pode ser relacionado às ideias filosóficas e matemáticas de Leibniz na medida em que ambos colocam a compreensão conceitual e a interpretação do sentido das ideias matemáticas como elementos centrais do fazer matemático. A abordagem hermenêutica defendida por Bicudo e Garnica, que busca fazer o estudante interpretar o texto matemático como construção de sentido e não apenas como técnica algorítmica, aproxima-se da perspectiva leibniziana segundo a qual a matemática é antes de tudo um discurso sobre relações, cuja inteligibilidade depende de captar a estrutura interna dos conceitos — como a continuidade, a variação e a dependência funcional. O próprio Teorema do Valor Intermediário, ao exigir a compreensão do contínuo como algo sem “saltos”, alinha-se ao princípio leibniziano, evidenciando como um fundamento filosófico do cálculo permanece didaticamente relevante. Desse modo, a metodologia hermenêutica aplicada ao ensino de Cálculo vai ao encontro de uma concepção leibniziana de que a matemática não é mero formalismo operativo, mas um campo em que a interpretação, o significado e a clareza conceitual são essenciais para o desenvolvimento da compreensão — e, portanto, oferece um caminho pedagógico coerente com a tradição racionalista e analítica inaugurada por Leibniz.

- Capítulo de livro, no prelo.

Título: Modos de Aparição do Infinitésimo: da filosofia grega aos hiper-reais.

Resumo: Este capítulo tem como objetivo principal explicitar o que diz a ideia dos infinitésimos. O motivo pelo qual este tema se faz importante ao se focar o Cálculo e a Análise está embasado no entendimento de que os infinitésimos constituem, junto a outras ideias, as ideias nucleares dessa região de inquérito da Matemática. Para tanto, a atitude assumida é filosófica fenomenológica, pois estamos em busca de explicitar o trazido na ideia de infinitesimal e de explicitar por quê essa explicitação é importante para a compreensão do Cálculo. A investigação aqui explicitada foca a Grécia antiga, onde se iniciam as contradições e paradoxos que cerceavam as discussões sobre as quantidades infinitamente pequenas. Aqui será explicitado o modo pelo qual os infinitésimos aparecem e o que os autores entendiam e se propunham a discutir. Avança no tempo, e foca, no final do século XVI e início do XVII, momento em que grandes pensadores participaram ativamente para o desenvolvimento das ideias relacionadas ao Cálculo, o apresentado por dois importantes pensadores como Cavalieri e Pascal, novamente destacando as ideias a respeito de infinitésimo por eles compreendidas, bem como o modo pelo qual eram tratadas. Dá-se mais um salto e foca-se os trabalhos de Leibniz, explicitando seu entendimento sobre os infinitésimos e o infinito, expondo o salto que esse autor dá em termos da formalização desse tema, no âmbito do Cálculo.

Contribuição deste trabalho para a pesquisa realizada sobre Leibniz:

O capítulo *Modos de Aparição do Infinitésimo: da filosofia grega aos hiper-reais* relaciona-se diretamente à filosofia e à matemática de Leibniz ao mostrar que sua concepção dos

infinitesimais representa um ponto de inflexão histórico no tratamento do contínuo. Ao reconstruir o percurso que vai dos paradoxos gregos à matemática pré-moderna de Cavalieri e Pascal, o estudo evidencia como Leibniz formaliza pela primeira vez uma teoria sistemática dos infinitamente pequenos, capaz de converter processos geométricos de decomposição contínua em uma linguagem analítica baseada nos diferenciais dx e dy . Assim, o texto destaca o desenvolvimento do trabalho leibniziano não está apenas no uso dos infinitesimais, mas na fundamentação filosófica que lhes confere legitimidade — uma metafísica do contínuo infinitamente divisível — e na criação de uma simbologia que torna a variação um objeto manipulável, marcando o nascimento do cálculo moderno.

- Orientação de Iniciação de Científica

Título: Sobre os métodos, historicamente desenvolvidos, para o cálculo da reta tangente a uma curva.

Orientando: Pedro Augusto Da Cruz Neto

Publicação: Conferência dos 30 anos do Grupo de Pesquisa em História da Matemática, resumo expandido e apresentação de trabalho.

Resumo: De acordo com Carvalho (1919)²⁴ a determinação das tangentes às curvas, que é resolvido com facilidade desde a descoberta do Cálculo Diferencial, era um problema que já interessava muito aos geômetras desde a antiguidade. A pesquisa desenvolvida, que deu origem a este trabalho, teve como objetivo estudo de métodos distintos para encontrar a reta tangente a uma curva, compreendendo suas principais características, semelhanças, diferenças e avanços. Iniciamos nosso estudo na Matemática da Grécia Antiga, até o algoritmo desenvolvido por Leibniz no século XVII. Nossos estudos começam desde as obras de Euclides, Arquimedes e Apolônio, passando depois por Descartes, Fermat, Roberval²⁵, Barrow²⁶ e Newton²⁷, até finalizarmos nos estudos de Leibniz. A conclusão do trabalho nos possibilitou compreender que a transição da Geometria para a Álgebra foi um ponto importante para o avanço em relação ao problema da reta tangente, possibilitando demonstrações de mais simples compreensão e inclusão de um maior número de curvas cujas tangentes poderiam ser encontradas.

Contribuição deste trabalho para a pesquisa realizada sobre Leibniz:

O trabalho: *Sobre os métodos, historicamente desenvolvidos, para o cálculo da reta tangente a uma curva* está relacionado à matemática de Leibniz ao mostrar que sua formulação do Cálculo Diferencial representa o momento de ruptura e consolidação de um método geral para a determinação de tangentes. Ao percorrer a trajetória que vai da

²⁴ CARVALHO, G. de, A. S. A teoria das tangentes antes do cálculo diferencial e integral. Dissertação para o doutoramento- Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Coimbra (Portugal), 1919.

²⁵ Gilles Personne de Roberval, matemático e físico francês (1602–1675) conhecido por seus avanços no cálculo e geometria, incluindo métodos para determinar tangentes e áreas de sólidos.

²⁶ Isaac Barrow, teólogo e matemático inglês, frequentemente creditado por seu papel inicial no desenvolvimento do cálculo, especialmente por sua prova do Teorema Fundamental do Cálculo. Ele foi um professor influente que incentivou os estudos de Isaac Newton, para quem renunciou à sua cátedra de matemática em Cambridge.

²⁷ Isaac Newton, uma figura central para a matemática, principalmente por ter desenvolvido o cálculo infinitesimal, uma área fundamental usada em diversas ciências.

geometria grega aos métodos pré-modernos de Fermat, Roberval e Descartes, o estudo evidencia que Leibniz dá o passo decisivo ao introduzir uma linguagem analítica baseada nos diferenciais dx e dy , convertendo problemas geométricos tradicionais de tangência em operações simbólicas universalizáveis. Assim, a pesquisa destaca que o algoritmo leibniziano para a reta tangente não apenas simplifica procedimentos anteriores, mas inaugura um novo paradigma matemático no qual a variação é tratada de forma sistemática, permitindo que a determinação de tangentes deixe de depender de construções geométricas específicas e passe a integrar uma teoria geral da derivada.

- Orientação de Mestrado

Título: Compreendendo Conceito de Limite: Uma abordagem investigativa na Formação de Professores e Professoras de Matemática

Orientanda: Ana Vitória de Souza

Resumo: Esta pesquisa é guiada pela interrogação “*Como se mostra a compreensão de licenciandos e licenciandas sobre o conceito de Limite ao explorar tarefas investigativas, que abordam das ideias intuitivas a sua definição formal?*”. Para conduzir a investigação, adotamos uma abordagem qualitativa de postura fenomenológica, entendida como um percurso de abertura ao fenômeno, permitindo que ele se revele na medida em que nos voltamos intencionalmente a ele. Diante do interrogado, tornou-se necessário explicitar os referenciais que fundamentam a investigação. Nesse movimento, discutimos sobre a formação de professores e professoras de Matemática, em especial na disciplina de Cálculo, assumindo uma concepção fenomenológica de forma/ação, compreendida como processo de *devenir*. Expomos o que temos compreendido por intuição, nos aproximando da ideia fenomenológica husserliana. Além disso, problematizamos a definição formal e o formalismo na Matemática em sua relação com a intuição; e discutimos sobre as tarefas investigativas como possibilidade de favorecer a emergência de compreensões sobre o conceito de Limite e de abertura a forma/ação. A pesquisa se deu junto com estudantes de uma turma da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no curso de Licenciatura em Matemática de uma faculdade da Universidade Estadual Paulista (UNESP). A análise dos dados está em sua fase ideográfica, buscando compreender como o conceito de Limite se mostra aos estudantes e de que modo os movimentos de intuição e formalização se articulam no processo de compreensão. Os resultados preliminares apontam para a emergência de ideias relacionadas ao conceito de Limite, evidenciando o potencial da abordagem.

Contribuição deste trabalho para a pesquisa realizada sobre Leibniz:

O trabalho *Compreendendo o Conceito de Limite: uma abordagem investigativa na formação de professores e professoras de Matemática* está relacionado e contribui com a matemática de Leibniz na medida em que ambos colocam a variação contínua e a interpretação conceitual do comportamento das funções no centro do pensamento matemático. Embora o limite, em sua formulação epsilonica, seja posterior a Leibniz, o estudo evidencia que muitos obstáculos conceituais encontrados pelos estudantes refletem precisamente os desafios enfrentados pelo próprio Leibniz ao tentar descrever o “aproximar-se” sem recorrer a quantidades finitas — desafio que ele resolve por meio de infinitesimais

e da notação diferencial $\frac{dy}{dx}$. Assim, a abordagem investigativa do ensino dialoga com o espírito leibniziano ao enfatizar a necessidade de compreender o sentido da passagem ao limite, permitindo que futuros professores construam significado para ideias fundamentais do cálculo, como continuidade, aproximação e dependência funcional.

Referências

- ARTHUR, R. *Leibniz on Time, Space and the Continuum*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- BOYER, C. B. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. New York: Dover, 1959.
- BOS, H. J. M. Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 14, 1974, p. 1–90.
- CAJORI, Florian. *A History of Mathematical Notations*. Vol. I e Vol. II. Chicago: Open Court, 1928–1929.
- CARVALHO, G. de, A. S. *A teoria das tangentes antes do cálculo diferencial e integral*. Dissertação para o doutoramento- Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Coimbra (Portugal), 1919.
- LACERDA, T. M. Leibniz: *A Infinitude Divina e O Infinito em Nós*. Cadernos Espinosanos, 34, 39–63. <https://doi.org/10.11606/issn.2447-9012.espinosa.2016.116945>, 2016.
- LEIBNIZ, G. W. *Escritos matemáticos (7A)*. Trad. M. S. de Mora Charles. Espanha: Comares, 2014.
- LEIBNIZ, G. W. *Escritos matemáticos (7B)*. Trad. M. S. de Mora Charles. Espanha: Comares, 2014.
- LEIBNIZ, G. W. *Ensaio de Teodiceia sobre a bondade de Deus, a liberdade do homem e a origem do mal*. Tradução de William de Siqueira Piauí e Juliana Cecci Silva, São Paulo: Estação Liberdade, 2017.
- LEIBNIZ, G. W. *Monadologia*. Tradução, apresentação e notas de Sérgio Kreitlon. São Paulo: Editora Unesp, 2010.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. *Novos Ensaio sobre o Entendimento Humano*. Tradução de Alexandre de Oliveira Torres. São Paulo: Nova Cultural, 1999.
- LEIBNIZ, G. W. *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*. Acta Eruditorum, Leipzig, v. X, p. 467-473, 1684.

MOREIRA, V. C. *Contínuo e Contingência I: Estrutura e Alçada da Lei da Continuidade na Lógica de Leibniz*. Kotter Editorial, 2019.