UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Extensões da Distribuição de Lindley para Análise de Dados de Sobrevivência

Ana Paula Jorge do Espirito Santo

Orientador: Prof. Dr. Josmar Mazucheli

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Junho de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Extensões da Distribuição de Lindley para Análise de Dados de Sobrevivência

Ana Paula Jorge do Espirito Santo

Orientador: Prof. Dr. Josmar Mazucheli

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Junho de 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

Espirito Santo, Ana Paula Jorge do.
E78e Extensões da distribuição de Lindley para análise de dados de sobrevivência / Ana Paula Jorge do Espirito Santo. - Presidente Prudente : [s.n.], 2014
90 f.

Orientador: Josmar Mazucheli
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Análise de sobrevivência. 2. Modelos de composição. 3. Distribuição de Lindley de um parâmetro. I. Mazucheli, Josmar. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente

BANCA EXAMINADORA

PROF. DR. JOSMAR MAZUCHELI
ORIENTADOR

PROF. DR. SÉRGIO MINORU OIKAWA
FCT/UNESP

PROF. DR. FRANCISCO LOUZADA NETO
USP/ICMC

Ana Paula J. do Espírito Santo
ANA PAULA JORGE DO ESPÍRITO SANTO

Presidente Prudente (SP), 16 de junho de 2014.

RESULTADO: APROVADO

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Seção Técnica de Pós-Graduação
Rua Roberto Simonsen, 305 CEP 19060-900 Presidente Prudente SP
Tel 18 3229-5318 fax 18 3223-4519 posgrad@fct.unesp.br

Ao meu marido, Gabriel,

e ao meu orientador, Josmar,

dedico!

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer a Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades e guiar para o caminho das conquistas.

Agradeço a meu marido, Gabriel, que sempre me apoiou e esteve presente em todos os momentos para a realização desse trabalho.

Agradeço aos meus pais, Mauro e Solange, por acreditar em mim e proporcionar meus estudos. Aos meus irmãos, cunhados, cunhadas, Sogra, Sogro, pois mesmo estando longe sempre se preocuparam comigo.

Agradeço a todos os professores e funcionários do PÓS-MAC / FCT-UNESP, de maneira carinhosa a Cinthia por sempre estar disposta a esclarecer quais os procedimentos burocráticos para a obtenção desse título.

Agradeço aos membros das bancas de qualificação e defesa, Prof. Dr. Francisco Louzada Neto, Prof. Dr. Messias Meneguette Junior, Prof. Dr. Fernando Antonio Moala e Prof. Dr. Sérgio Minoru Oikawa, em especial ao meu orientador Josmar Mazucheli que sempre esteve disposto a sanar minhas dúvidas, com muita paciência e dedicação. Com certeza, Josmar, o professor é em quem me espelho quanto profissional: uma pessoa competente e inteligente! Muito obrigado!

Aos responsáveis por minhas grandes amizades: Suelen Umbelino, Leandro Coladello, Renato Couto, Débora Penha, Pedro Ramos e Taciana Kisaki pelos bons momentos durante o mestrado, não podendo esquecer das horas na biblioteca para resolver as listas de Probabilidade e Estatística. Obrigada por tudo!

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo apoio financeiro.

“Há homens que lutam um dia e são bons.

Há outros que lutam um ano e são melhores.

Há os que lutam muitos anos e são muito bons.

Porém, há os que lutam toda a vida.

Esses são os imprescindíveis.”

Bertolt Brecht

Resumo

A Análise de Sobrevivência é uma das áreas da Estatística que mais tem se desenvolvido nos últimos anos e muitas distribuições de probabilidade tem sido propostas. Neste trabalho, são apresentadas três extensões da distribuição de Lindley de um parâmetro obtidas pelo processo de composição de distribuição considerando as estruturas latentes de ativação , mínimo e máximo. Vale ressaltar que em um contexto de riscos competitivos ou de riscos complementares, quando assume-se que o número de causas de falhas M segue uma distribuição Geométrica, a distribuição obtida pelo processo de composição é um caso particular da distribuição Extendida Marshall-Olkin. As novas distribuições propostas nesse trabalho são: a distribuição Lindley Extendida Marshall-Olkin (Lindley-Geométrica), a distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero e a distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased*. Para caracterização das distribuições foram apresentadas algumas propriedades matemáticas e seis métodos de estimação.

Palavras-chave: Análise de Sobrevivência; Modelos de Composição; Riscos Competitivos; Riscos Complementares; Distribuição de Lindley de um parâmetro.

Abstract

Survival Analysis is an area of Statistics that has developed over the last years and many probability distributions have been proposed . In this work, three extensions of Lindley distribution of one parameter obtained by the composition of the distribution process considering the latent structures of activation , minimum and maximum were presented . It is noteworthy that in a context of competing risks or additional risks where it is assumed that the number of causes of failures M follows a Geometric distribution , the distribution obtained by the composition process is a particular case of Marshall-Olkin Extended distribution . The new distributions proposed in this work are: Marshall-Olkin Extended Lindley distribution (Lindley-Geometric distribution), Zero Truncated Lindley-Poisson distribution and *Size- Biased* Lindley-Poisson distribution. For characterization of distributions some mathematical properties and six estimation methods were presented.

Key words: Survival Analysis; Models Composition; Competing Risks, Complementary Risks, The one parameter Lindley distribution.

Lista de Figuras

2.1 Função densidade de probabilidade e a função de risco da distribuição de Lindley para diferentes valores de θ, respectivamente. 38

2.2 Comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição MOEL para diferentes valores de α e $\theta = 1$. 40

2.3 Comportamento da função de risco da distribuição MOEL para diferentes valores de α e $\theta = 1$. 40

2.4 Comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero para diferentes valores de λ e $\theta = 0.5$ se $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$. . . . 50

2.5 Comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero para diferentes valores de λ e $\theta = 2.0$ se $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$. . . . 50

2.6 Comportamento da função de risco da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero para diferentes valores de λ e $\theta = 1$. 53

2.7 Comportamento da função de risco da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero para diferentes valores de λ, $\theta = 1$ e $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$. 54

2.8 Comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* para diferentes valores de λ e $\theta = 0.5$ se $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$. 61

2.9 Comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* para diferentes valores de λ e $\theta = 2.0$ se $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$. 62

2.10 Comportamento da função de risco da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* para diferentes valores de λ e $\theta = 1$. 64

Lista de Tabelas

1.1 Novas distribuições apresentadas na literatura segundo o processo de composição. 7

2.1 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\alpha = 0.5$. 46
2.2 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\alpha = 0.8$. 47
2.3 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\alpha = 1.5$. 47
2.4 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\alpha = 3.0$. 48
2.5 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\alpha = 5.0$. 48
2.6 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 0.5$. 55
2.7 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 1.0$. 56
2.8 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 2.0$. 56
2.9 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 3.0$. 57
2.10 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 5.0$. 57
2.11 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 0.5$. 58
2.12 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 1.0$. 58
2.13 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 2.0$. 59
2.14 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 3.0$. 59
2.15 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 5.0$. 60
2.16 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 0.5$. 65
2.17 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 1.0$. 66
2.18 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 2.0$. 66
2.19 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 3.0$. 67
2.20 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 5.0$. 67
2.21 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 0.5$. 68

2.22 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 1.0$. 69
2.23 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 2.0$. 69
2.24 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 3.0$. 70
2.25 Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 5.0$. 70

Sumário

Introdução **1**

1 Formulação dos Modelos **4**

1.1 Composição via a distribuição Geométrica 6

1.1.1 Riscos Competitivos 7

1.1.2 Riscos Complementares 9

1.1.3 Caso Geral 10

1.1.4 Estimação dos Parâmetros 11

1.2 Composição via a distribuição de Poisson Truncada no Zero 17

1.2.1 Riscos Competitivos 18

1.2.2 Riscos Complementares 19

1.2.3 Caso Geral 20

1.2.4 Estimação dos Parâmetros 21

1.3 Composição via a distribuição de Poisson *Size-Biased* 27

1.3.1 Riscos Competitivos 27

1.3.2 Riscos Complementares 29

1.3.3 Estimação dos Parâmetros 30

1.4 Comentários 35

2 Extensões da Distribuição de Lindley de um parâmetro **37**

2.1 Distribuição de Lindley de um parâmetro 37

2.2 Distribuição Lindley Extendida Marshall-Olkin 38

2.2.1 Função Quantil 41

2.2.2 Momentos da distribuição MOEL 42
2.2.3 Simulação 44
2.3 Distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero 49
2.3.1 Função Quantil 52
2.3.2 Simulação 54
2.4 Distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* 60
2.4.1 Simulação 63
2.5 Comentários 71

3 Considerações Finais **73**

Introdução

A Análise de Sobrevivência pode ser definida como um conjunto de procedimentos utilizados para estudar situações em que a variável resposta é o tempo até a ocorrência de um determinado evento de interesse. A variável resposta é positiva, na maioria das vezes univariada e contínua na presença ou não de censura. Censura é definida como a observação parcial da resposta (LAWLESS, 2003).

O que diferencia a Análise de Sobrevivência das demais técnicas estatísticas é a presença de observações censuradas (LAWLESS, 2003). Em acompanhamentos clínicos, por exemplo, é muito comum a interrupção do tratamento sem a autorização médica, ao contrário de outras técnicas estatísticas, a Análise de Sobrevivência incorpora essas informações à análise.

Análise de Sobrevivência pode ser utilizada em muitas áreas do conhecimento: nas ciências biomédicas, em campanhas de prevenções de doenças, na indústria, em estudos de confiabilidade de equipamentos, na demografia, em análises da duração do casamento, podendo chegar até a economia.

Seja em nível teórico ou de aplicações, a Análise de Sobrevivência é uma das áreas da estatística que mais tem se desenvolvido nos últimos anos e buscando contribuir ainda mais para esse crescimento, esta dissertação tem por objetivo principal a formulação de novas distribuições de probabilidade.

Existem muitas distribuições de probabilidade utilizadas na análise de dados de vida (dados de sobrevivência). Por exemplo, se o interesse é descrever o "tempo até a falha" pode-se destacar alguns modelos importantes, como: o Exponencial, o de Weibull e o Log-normal. As distribuições Binomial, Normal (Gaussiana), Gama, Log-gama, Rayleigh, Normal Inversa e a Gompertz também são distribuições importantes na Análise de Sobrevivência.

Geralmente, os estudos de dados de vida são realizados a partir de algumas funções, tais como: a função de sobrevivência, a função de risco, conhecida também por função taxa de falha, entre outras. A distribuição de Weibull é uma distribuição bastante popular devido ao fato de apresentar função de sobrevivência e função de risco expressa em forma fechada, ao contrário da Gama e Log-normal.

A distribuição Exponencial Exponenciada introduzida por Gupta e Kundu (1999) possui propriedades similares à distribuição Gama com a vantagem de possuir forma fechada para a função de risco.

Em termos matemáticos, o modelo Exponencial é o modelo mais simples utilizado para descrever dados do tempo de falha, pois ele possui apenas um parâmetro e função de risco constante. Outras distribuições como a Exponencial Exponenciada e a Gama incorporam o comportamento constante para a função de risco como um caso particular (RISTIĆ; NADARAJAH, 2012). Na prática, dificilmente tem-se esse tipo de dados de vida.

Por outro lado, a distribuição de Lindley de um parâmetro pode ser utilizada como uma alternativa à distribuição Exponencial, pois a mesma possui apenas um parâmetro e a sua função de risco não se restringe ao comportamento constante.

A distribuição de Lindley de um parâmetro foi introduzida por Lindley (1958, 1965) para analisar dados de tempo de vida, especialmente em modelagem de confiabilidade *stress-strength* (tensão-força)(KUNDU; GUPTA, 2006).

Ghitany, Atieh e Nadarajah (2008) estudaram as propriedades da distribuição de Lindley com um tratamento matemático rigoroso. A distribuição Lindley Generalizada, que tem como casos especiais as distribuições Exponencial e a Gama, foi estudada por Zakerzadeh e Dolati (2009) e uma versão bivariada dessa distribuição foi proposta. Enquanto Nadarajah, Bakouch e Tahmasbi (2011) introduziram a distribuição Lindley Generalizada.

Sankaran (1970) introduziu a distribuição Poisson-Lindley discreta para a modelagem de dados de contagem e Ghitany e Al-Mutari (2008) consideraram a distribuição Poisson-Lindley com aplicações em conjuntos de dados reais.

Algumas propriedades da distribuição Poisson-Lindley e distribuições derivadas foram estudadas por Borah e Begum (2002), enquanto Borah e Deka (2001a) apresentaram a distribuição Poisson-Lindley e algumas distribuições de mistura. A distribuição Poisson-Lindley inflacionada no zero foi apresentada por Borah e Deka (2001b), já Zamani e Ismail (2010) consideraram a distribuição Binomial-Negativa Lindley.

Mahmoudi e Zakerzadeh (2010) apresentaram a distribuição Poisson-Lindley generalizada. A distribuição Poisson-Lindley Truncada no Zero foi apresentada por Ghitany, Al-Mutairi e Nadarajah (2008), que contém comparações entre os estimadores pelo método dos momentos e máxima verossimilhança.

A distribuição Lindley Ponderada de dois parâmetros para a modelagem de dados de sobrevivência foi considerada por Ghitany et al. (2011). Uma vantagem dessa distribuição é a função risco em

forma de banheira, além das formas crescente e decrescente. A distribuição Lindley Extendida e suas propriedades foram estudadas por Bakouch et al. (2012a). A distribuição Lindley de um parâmetro no cenário de riscos competitivos foi considerada por Mazucheli e Achcar (2011).

É fácil ver que embora a distribuição de Lindley de um parâmetro tenha sido criada na década de 60, somente nos últimos anos essa distribuição tem sido explorada. Em termos de análise estatística esse fato pode ser considerado como uma vantagem em relação as demais distribuições pois muitos estudos em termos de aplicações e propriedades matemáticas da mesma ainda podem ser realizados.

Recentemente, uma grande quantidade de novas distribuições têm sido propostas através da composição de distribuições. Outras formas para estender uma distribuição de probabilidade são discutidas por Gupta e Kundu (2009) e Cooray (2006). Neste trabalho, utiliza-se a estrutura de riscos competitivos e riscos complementares, que pressupõe a existência de múltiplos fatores (ou causas) de riscos que podem ocasionar o evento de interesse, com o objetivo de propôr e estudar as extensões da distribuição de Lindley obtidas pelo processo de composição de distribuição. As distribuições são obtidas assumindo que a ocorrência do evento de interesse é explicada por uma estrutura latente de ativação.

No contexto de riscos competitivos e riscos complementares, tem-se que T_j, $j = 1, 2, ..., M$, é uma variável aleatória com distribuição de Lindley de um parâmetro em que se observa o evento $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$ ou $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$ representando, respectivamente, o primeiro e o último tempo até a falha de um dispositivo sujeito a presença de M causas de falha, em que M é uma variável aleatória discreta (Geométrica, Poisson Truncada no Zero e Poisson *Size-Biased*) independente de T_j, $j = 1, 2, ..., M$. Sob essas condições, tem-se o foco desse trabalho, as generalizações da distribuição de Lindley obtidas pelo processo de composição com a pretenção de ampliar o conjunto de possíveis distribuições de probabilidade para a Análise de dados de Sobrevivência.

Para caracterizar as distribuições apresentadas, segue nesse trabalho: o Capítulo 1 apresenta uma formulação geral para as funções de densidade, de distribuição, de sobrevivência e de risco para os três modelos de composição propostos. O Capítulo 2 apresenta os três modelos considerando a distribuição de Lindley de um parâmetro para os tempos de falha. Quando possível, foram apresentadas algumas propriedades matemáticas, alguns gráficos e seis métodos de estimação dos parâmetros, são eles: máxima verossimilhança (MLE), mínimos quadrados (OLS), mínimos quadrados ponderado (WLS), máximo produto de espaçamento (MPS), Anderson-Darling (AD) e Cramér-von Mises (CM). O Capítulo 3 apresenta algumas considerações finais e propostas futuras.

Capítulo

1

Formulação dos Modelos

Pintilie (2006) apresenta a seguinte situação: em um grupo de pacientes diagnosticados com uma doença cardíaca é observada a ocorrência ou não de um infarto do miocárdio. Se, ao final do estudo, o infarto tiver acontecido ou o paciente estiver vivo e bem, técnicas simples de Análise de Sobrevivência podem ser aplicadas. Porém, se um paciente vem a óbito por outra causa antes de sofrer um infarto do miocárdio, existe mais de um risco, pois a morte por outra causa impede o infarto.

Muitas situações em Análise de Sobrevivência partem do pressuposto de que apenas um fator de risco é responsável pela ocorrência do evento de interesse. Entretanto, em muitos casos há mais de um fator competindo para ocasionar o evento, como mostra o exemplo acima. Diante deste cenário são necessários modelos que possam incluir essas informações na análise, uma possibilidade é através dos riscos competitivos e dos riscos complementares.

Na teoria de riscos competitivos e de riscos complementares existem diversas formas de definir múltiplos riscos. Em alguns casos, a ocorrência de um dos riscos impede a ocorrência do outro. As vezes existe uma dependência entre tais riscos de maneira que a ocorrência de um deles acelera a ocorrência do outro (PINTILIE, 2006).

Portanto, na teoria de riscos competitivos e riscos complementares é definido um número M, conhecido, de fatores (ou causas) de risco que podem ocasionar o evento de interesse. Entretanto, nos modelos de composição de distribuições assume-se que esse número de fatores de riscos M é desconhecido. Logo, existe um número M latente de fatores de risco competindo para ocasionar o evento de interesse.

A palavra latente é empregada no sentido de oculto, ou seja, não se conhece o número, nem o

tipo de riscos competindo e nem a quantidade de riscos responsáveis por ocasionar o evento. Portanto, é plausível definir M, $M > 0$, uma variável aleatória latente.

Em geral, as causas competitivas podem ter diferentes mecanismos de ativação e o evento de interesse ocorre quando uma certa quantidade dessas causas é ativada. Nesse trabalho, as variáveis de interesse são definidas por $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$ ou $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$ representando, respectivamente, o primeiro e o último tempo até a falha de um dispositivo sujeito a presença de M causas de falha.

Quando a ocorrência do evento de interesse necessita apenas da ativação da primeira causa de falha, ou seja, o tempo observado coincide com o tempo da ocorrência da primeira causa associada a ele, tem-se o cenário de riscos competitivos latentes. Por outro lado, quando a ocorrência do evento de interesse necessita da ativação de todas as causas de falha, ou seja, o tempo observado é o tempo decorrente até a ativação do último fator de risco, tem-se o cenário de riscos complementares latentes.

Uma situação de riscos competitivos pode ser relacionada a um circuito em série, no qual a falha do circuito ocorre quando o primeiro componente falhar, enquanto um circuito em paralelo representa uma situação de riscos complementares, pois o circuito só para de funcionar quando o último componente do sistema falhar. A ideia associada às situações de riscos competitivos e riscos complementares tem sido utilizada para a geração de novas distribuições através da metodologia de composição de distribuições.

Nos modelos de composição de distribuição, a distribuição de probabilidade é composta por duas distribuições: a "distribuição misturada" (*Mixed distribution*) e a "distribuição de mistura" (*Mixing distribution*). A primeira é a distribuição dos tempos de ativação dos fatores de risco (distribuição de Lindley de um parâmetro) e a segunda representa a distribuição do número de fatores que podem ocasionar a falha (distribuição Geométrica, Poisson Truncada no Zero ou Poisson *Size-Biased*).

Marshall e Olkin (1997) apresentaram a distribuição Exponencial-Geométrica considerando o cenário de riscos competitivos e riscos complementares. A distribuição Exponencial-Geométrica para $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$ foi estudada por Adamidis e Loukas (1998).

A distribuição Valor Extremo Modificada-Exponencial para o mínimo e o máximo foi trabalhada por Adamidis, Dimitrakopoulou e Loukas (2005) e a distribuição Exponencial-Poisson Truncada no cenário de riscos competitivos foi apresentada por Kuş (2007).

As distribuições Exponencial-Logarítmica e Weibull-Logarítmica para o mínimo foram desenvolvidas por Tahmasbi e Rezaei (2008) e Ciumara e Preda (2009), respectivamente. Sob o cenário de riscos complementares, Barreto-Souza e Cribari-Neto (2009) propuseram a distribuição Exponencial-Poisson.

Chahkandi e Ganjali (2009) apresentaram a distribuição Exponencial-Séries Power Truncada no Zero observando $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$. A distribuição Exponencial Exponenciada Geométrica no cenário de riscos complementares latentes foi desenvolvida por Silva, Barreto-Souza e Cordeiro (2010). A distribuição Exponencial Lindley-Poisson no cenário de riscos competitivos foi apresentada por Barreto-Souza e Bakouch (2013).

As distribuições Weibull-Geométrica considerando o mínimo foi desenvolvida por Barreto-Souza, Morais e Cordeiro (2011). Ainda no cenário de mínimo, Cancho, Louzada-Neto e Barriga (2011) desenvolveram a distribuição Exponencial-Poisson, enquanto que Hemmati, Khorram e Rezakhah (2011) desenvolveram a Weibull-Poisson Truncada no Zero. Ainda em 2011, Louzada, Roman e Cancho (2011) propuseram a distribuição Exponencial-Geométrica sob o cenário de riscos complementares e, Morais e Barreto-Souza (2011) propuseram a distribuição Weibull-Séries Power Truncada no Zero no cenário de riscos competitivos.

Bakouch et al. (2012b) apresentaram a distribuição Exponencial Exponenciada Binomial Truncada no cenário de mínimo, enquanto que a distribuição Exponencial Exponenciada Séries Potência Truncada no cenário de máximo foi apresentada por Mahmoudi e Jafari (2012).

A distribuição Exponencial Binomial-Negativa Truncada no Zero no cenário de riscos competitivos e riscos complementares foi desenvolvida por Nadarajah, Jayakumar e Ristić (2013). Considerando $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$, a distribuição Weibull-Poisson Truncada no Zero foi estudada por Ristić e Nadarajah (2012) e também por Lu e Shi (2012).

Mahmoudi e Shiran (2012) e Zakerzadeh e Mahmoudi (2012) propuseram as distribuições Weibull Exponenciada-Geométrica e Lindley-Geométrica, respectivamente, em que a variável observada foi $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$. Por último, a distribuição Exponencial-Poisson Truncada no Zero no cenário de máximo foi descrita por Rezaei e Tahmasbi (2012). A Tabela 1.1 resume muitas das composições consideradas na literatura e a seguir é descrito o primeiro modelo de composição utilizado nessa dissertação.

1.1 Composição via a distribuição Geométrica

Esta seção apresenta a formulação da distribuição de probabilidade obtida pela composição de distribuições em que a ocorrência do evento de interesse está associada a causas de falha latentes, sendo observado a primeira ou a última causa de falha. Nesse contexto, foi proposta uma distribuição considerando que o tempo de ocorrência de cada uma das causas de falha T_j, $j = 1, \ldots, M$, segue uma distribuição $F(t \mid \theta)$ com vetor de parâmetros θ e a quantidade M de causas de falha possui distribuição

Tabela 1.1: Novas distribuições apresentadas na literatura segundo o processo de composição.

Dist. Misturada	Dist. Mistura	Observado	Autor
Exponencial	Geométrica	min / max	Marshall e Olkin (1997)
Exponencial	Geométrica	min	Adamidis e Loukas (1998)
Valor Extremo Modificada	Exponencial	min / max	Adamidis, Dimitrakopoulou e Loukas (2005)
Exponencial	Poisson T.	min	Kuş (2007)
Exponencial	Logarítmica	min	Tahmasbi e Rezaei (2008)
Weibull	Logarítmica	min	Ciumara e Preda (2009)
Exponencial E.	Poisson	max	Barreto-Souza e Cribari-Neto (2009)
Exponencial	Power Series T.	min	Chahkandi e Ganjali (2009)
Exponential E.	Geométrica	max	Silva, Barreto-Souza e Cordeiro (2010))
Exponencial	Lindley-Poisson	min	Barreto-Souza e Bakouch (2013)
Weibull	Geométrica	min	Barreto-Souza, Morais e Cordeiro (2011)
Exponencial	Poisson	min	Cancho, Louzada-Neto e Barriga (2011)
Weibull	Poisson T.	min	Hemmati, Khorram e Rezakhah (2011)
Exponencial	Geométrica	max	Louzada, Roman e Cancho (2011)
Weibull	Power Series T.	min	Morais e Barreto-Souza (2011)
Exponencial E.	Binomial T.	min	Bakouch et al. (2012b)
Exponencial E.	Power Series T.	max	Mahmoudi e Jafari (2012)
Exponencial	Binomial-Negativa T.	min / max	Nadarajah, Jayakumar e Ristić (2013)
Weibull	Poisson T.	min	Ristić e Nadarajah (2012)
Weibull E.	Geométrica	min	Mahmoudi e Shiran (2012)
Lindley	Geométrica	min	Zakerzadeh e Mahmoudi (2012)
Exponencial	Poisson T.	max	Rezaei e Tahmasbi (2012)
Weibull	Poisson T.	min	Lu e Shi (2012)

E: Exponenciada, T: Truncada em zero.

Geométrica, $M \sim Geometrica(\lambda)$, com função de probabilidade dada por:

$$P(M = m) = (1 - \lambda)\lambda^{m-1}, \tag{1.1.1}$$

em que, $m = 1, 2, \ldots$ e $0 < \lambda < 1$ cf. Zakerzadeh e Mahmoudi (2012).

A escolha por tal parametrização é para excluir a possibilidade do número de causas de falha ser igual a zero, $m = 0$, pois se isso acontecer, a formulação do modelo de composição para estender a distribuição $F(t \mid \theta)$ não se faz. Vale ressaltar também, que embora essa expressão para a distribuição Geométrica não seja comum na literatura, ela foi utilizada em alguns dos artigos importantes para a realização desse trabalho, por exemplo, no artigo de Zakerzadeh e Mahmoudi (2012) como mencionado acima.

1.1.1 Riscos Competitivos

Seja T_j, $j = 1, \ldots, M$, os tempos de falha latente de indivíduos sujeito a M riscos, e T_j independente de M, e assuma que é observado $Y = \min(T_1, ..., T_M)$. Sob a suposição que os tempos até a falha T_j, $j = 1, 2, ..., M$, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função distribuição $F(t \mid \theta)$ e vetor de parâmetros θ, a função densidade de probabilidade condicional

de $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ dado $M = m$ é

$$f\left(y \mid M = m, \theta\right) = m\left[S(y \mid \theta)\right]^{m-1} f(y \mid \theta). \tag{1.1.2}$$

Note que (1.1.2) é determinada pela distribuição da função mínimo, isto é, $P(Y \leq t) = 1 - \left[1 - F\left(y \mid \theta\right)\right]^m = 1 - \left[S\left(y \mid \theta\right)\right]^m$, em que $S\left(y \mid \theta\right)$ denota a função de sobrevivência (ARNOLD; BALAKRISHNAN; NAGARAJA, 2008).

Assumindo que o número de causas de falha M é uma variável aleatória com distribuição Geométrica com função de probabilidade dada em (1.1.1) tem-se que a função densidade de probabilidade marginal de Y é:

$$\begin{aligned} f\left(y \mid \theta, \lambda\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} f\left(y \mid M = m, \theta\right)\ P(M = m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m\ \left[S(y \mid \theta)\right]^{m-1}\ f(y \mid \theta)(1-\lambda)\lambda^{m-1} \\ &= \frac{(1-\lambda)\ f(y \mid \theta)}{\lambda S(y \mid \theta)} \sum_{m=1}^{\infty} m\ \left[\lambda S(y \mid \theta)\right]^m. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Sabe-se que $|\lambda S(y \mid \theta)| < 1$, então $\sum_{m=1}^{\infty} m\left[\lambda S(y \mid \theta)\right]^m$ pode ser escrita como a soma de séries geométricas de razão $\lambda S(y \mid \theta)$, que convergem para $\frac{a_1}{1-\lambda S(y \mid \theta)}$, em que a_1 é o primeiro termo da série (SWOKOWSKI, 1983). Logo,

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\left[\lambda S(y \mid \theta)\right]^m = \frac{\lambda S(y \mid \theta)}{\left[1 - \lambda S(y \mid \theta)\right]^2} \tag{1.1.4}$$

Do resultado (1.1.4) tem-se que a função densidade de probabilidade marginal de Y é dada por:

$$\begin{aligned} f\left(y \mid \theta, \lambda\right) &= \frac{(1-\lambda)\, f(y \mid \theta)}{\lambda S(y \mid \theta)}\ \frac{\lambda S(y \mid \theta)}{\left[1 - \lambda S(y \mid \theta)\right]^2} \\ &= \frac{(1-\lambda)\, f(y \mid \theta)}{\left[1 - \lambda S(y \mid \theta)\right]^2}. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Logo, a função de distribuição marginal de $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ pode ser obtida da função densidade (1.1.5) por:

$$F\left(y \mid \theta, \lambda\right) = \int_0^y f\left(w \mid \theta, \lambda\right) dw = \int_0^y \frac{(1-\lambda)\, f(w \mid \theta)}{\left[1 - \lambda S(w \mid \theta)\right]^2} dw.$$

Utilizando a integração pelo método da substituição com $u = 1 - \lambda S(w \mid \theta)$, tem-se:

$$F\left(y \mid \theta, \lambda\right) = \frac{1 - S(y \mid \theta)}{1 - \lambda S(y \mid \theta)} = \frac{F(y \mid \theta)}{1 - \lambda S(y \mid \theta)}. \tag{1.1.6}$$

Da relação $S(y) = 1 - F(y)$, a função de sobrevivência marginal e a função de risco marginal de $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ são apresentadas, respectivamente, por

$$S\left(y \mid \theta, \lambda\right) = 1 - F\left(y \mid \theta, \lambda\right) = \frac{\left(1 - \lambda\right) S(y \mid \theta)}{1 - \lambda S(y \mid \theta)}, \tag{1.1.7}$$

$$h\left(y \mid \theta, \lambda\right) = \frac{h(y \mid \theta)}{1 - \lambda S(y \mid \theta)}. \tag{1.1.8}$$

É importante mencionar que todas as novas distribuições recentemente propostas na literatura (ver Tabela 1.1) que utilizam o processo de composição têm interesse em $Y = \min\left(T_1, ..., T_M\right)$ ou $Y = \max\left(T_1, ..., T_M\right)$ como descrito a seguir.

1.1.2 Riscos Complementares

Considere $Y = \max(T_1, ..., T_M)$ e $M \sim Geometrica(\lambda)$, a função densidade de probabilidade condicional de $Y = \max(T_1, ..., T_M)$ dado $M = m$ é:

$$f\left(y \mid M = m, \theta\right) = m\left[F(y \mid \theta)\right]^{m-1} f(y \mid \theta). \tag{1.1.9}$$

Note que (1.1.9) é determinada pela distribuição do máximo, isto é, $P\left(Y \leq t\right) = \left[F\left(y \mid \theta\right)\right]^m$. Portanto, a função densidade marginal de $Y = \max(T_1, ..., T_M)$ é dada por:

$$\begin{aligned} f\left(y \mid \theta, \lambda\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} f\left(y \mid M = m, \theta\right)\ P(M = m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m\ \left[F(y \mid \theta)\right]^{m-1} f(y \mid \theta)(1 - \lambda)\lambda^{m-1} \\ &= \frac{(1 - \lambda) f(y \mid \theta)}{\lambda F(y \mid \theta)} \sum_{m=1}^{\infty} m\ \left[(\lambda F(y \mid \theta)\right]^m. \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

Do resultado (1.1.4), tem-se que a função densidade de probabilidade marginal de Y é dada por:

$$\begin{aligned} f\left(y \mid \theta, \lambda\right) &= \frac{(1 - \lambda) f(y \mid \theta)}{\lambda F(y \mid \theta)} \frac{\lambda F(y \mid \theta)}{\left[1 - \lambda F(y \mid \theta)\right]^2} \\ &= \frac{(1 - \lambda) f(y \mid \theta)}{\left[1 - \lambda F(y \mid \theta)\right]^2}. \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Utilizando a integração pelo método da substituição com $u = 1 - \lambda F(y \mid \theta)$, a função de distribuição de Y é dada por:

$$\begin{aligned} F(y \mid \theta, \lambda) &= \int_0^w f(w \mid \theta, \lambda)\, dw = \int_0^y \frac{(1-\lambda) f(w \mid \theta)}{[1 - \lambda F(w \mid \theta)]^2} \\ &= \frac{(1-\lambda) F(y \mid \theta)}{1 - \lambda F(y \mid \theta)}. \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

A função de sobrevivência e função de risco são dadas, respectivamente, por:

$$S(y \mid \theta, \lambda) = 1 - F(y \mid \theta, \lambda) = \frac{S(y \mid \theta)}{1 - \lambda F(y \mid \theta)}, \tag{1.1.13}$$

$$h(y \mid \theta, \lambda) = \frac{(1-\lambda) h(y \mid \theta)}{1 - \lambda F(y \mid \theta)}. \tag{1.1.14}$$

1.1.3 Caso Geral

Considere que M segue uma distribuição Geométrica com função de probabilidade dada por $P(M = m) = (1-\lambda)^{m-1}\lambda, m = 1, 2, \ldots$ e $0 < \lambda < 1$. As funções de sobrevivência da distribuição obtida pelo processo de composição de distribuição com estruturas latentes de ativação mínimo e máximo podem ser reescritas, respectivamente, na forma:

$$S_{\min}(y \mid \theta, \lambda) = \frac{\lambda S(y \mid \theta)}{1 - \bar{\lambda} S(y \mid \theta)}, \tag{1.1.15}$$

$$S_{\max}(y \mid \theta, \lambda) = \frac{S(y \mid \theta)}{1 - \bar{\lambda} F(y \mid \theta)}, \tag{1.1.16}$$

em que, $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$. Observe que para obter as funções de sobrevivência em (1.1.15) e (1.1.16) basta substituir $(1-\lambda)$ por λ e vice-versa nas funções de sobrevivência obtidas em (1.1.7) e (1.1.13), respectivamente.

Dadas ambas as funções de sobrevivência, (1.1.15) e (1.1.16), ao considerar a parametrização $\alpha = \frac{1}{\lambda} \geq 1$ $(0 < \lambda < 1)$ pode-se observar que a função de sobrevivência (1.1.16) é a mesma função de sobrevivência em (1.1.15).

Vale ressaltar que Marshall e Olkin (1997) chegou nesse mesmo resultado quando propôs estender distribuições através do acréscimo de um novo parâmetro de forma nas distribuições de probabilidade já existentes, a nova distribuição é conhecida como distribuição Extendida Marshall-Olkin. Portanto,

conclui-se que o modelo obtido pelo processo de composição de distribuição que utiliza como "distribuição de mistura" a distribuição Geométrica é o mesmo modelo proposto por Marshall e Olkin (1997).

Desta forma, a distribuição Extendida Marshall-Olkin possui função densidade de probabilidade dada por:

$$f\left(y \mid \theta, \alpha\right) = \frac{\alpha f(y \mid \theta)}{[1 - \bar{\alpha} S(y \mid \theta)]^2}, \tag{1.1.17}$$

em que, $\alpha > 0$, $\theta > 0$, $-\infty < y < \infty$ e $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$. Quando $\alpha = 1$, tem-se a distribuição inicial como caso particular $f\left(y \mid \theta, \alpha = 1\right) = f(y \mid \theta)$.

Consequentemente, as funções de distribuição, de sobrevivência e de risco, são dadas, respectivamente, por:

$$F\left(y \mid \theta, \alpha\right) = \frac{F(y \mid \theta)}{1 - \bar{\alpha} S(y \mid \theta)}, \tag{1.1.18}$$

$$S\left(y \mid \theta, \alpha\right) = \frac{\alpha S(y \mid \theta)}{1 - \bar{\alpha} S(y \mid \theta)}, \tag{1.1.19}$$

$$h\left(y \mid \theta, \alpha\right) = \frac{h(y \mid \theta)}{1 - \bar{\alpha} S(y \mid \theta)}. \tag{1.1.20}$$

O parâmetro de forma adicional α é conhecido por "parâmetro *tilt*". Em geral, a adição do parâmetro *tilt* faz com que as distribuições resultantes (famílias ou extensões Marshall-Olkin) possuam mais flexibilidade na modelagem dos dados, pois possuem mais comportamentos para a função densidade de probabilidade e para a função de risco que a distribuição (conhecidas também por distribuições base) de que são derivadas.

Esse método também possui a propriedade de estabilidade, ou seja, se o método for aplicado duas vezes, nada de novo é obtido na segunda vez (GHITANY et al., 2012). As distribuições Extendidas Marshall-Olkin possuem a distribuição original como caso especial (GHITANY; AL-HUSSAINI; AL-JARALLAH, 2005).

1.1.4 Estimação dos Parâmetros

Nessa seção apresentam-se seis métodos de estimação para estimar os parâmetros θ e α da distribuição Extendida Marshall-Olkin, são eles: máxima verossimilhança (MLE), mínimos quadrados (OLS), mínimos quadrados ponderado (WLS), máximo produto de espaçamento (MPS), Anderson-Darling (AD) e Cramér-von Mises (CM). Para todos os métodos considerou-se que ambos os parâmetros θ e α são des-

conhecidos.

Máxima Verossimilhança

A inferência de verossimilhança pode ser considerada como um processo de obtenção da informação sobre um vetor de parâmetro θ, a partir de um ponto y do espaço amostral, através da função de verossimilhança. Nesse sentido, o método de máxima verossimilhança objetiva escolher o valor de θ que fornece a chance mais provável de ocorrer a amostra novamente. Portanto, para estimar o verdadeiro valor dos parâmetros escolhe-se aquele vetor de parâmetros que maximiza a função de verossimilhança no espaço paramétrico.

Seja $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra aleatória com valores observados $y_1, \ldots, y_n$ da distribuição Extendida Marshall-Olkin $F(y \mid \theta, \alpha)$ com vetor de parâmetros $(\theta,\alpha)'$. A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta,\alpha \mid \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i \mid \theta, \alpha) = \alpha^n \sum_{i=1}^{n} \frac{f(y_i \mid \theta)}{[1 - \bar{\alpha} S(y_i \mid \theta)]^2}, \tag{1.1.21}$$

com função log-verossimilhança:

$$l(\theta,\alpha \mid \mathbf{y}) = n \log(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} \log[f(y_i \mid \theta)] - 2 \sum_{i=1}^{n} \log[1 - \bar{\alpha} S(y_i \mid \theta)], \tag{1.1.22}$$

em que, $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$, $\alpha > 0$ e $-\infty < y < \infty$.

Diferenciando (1.1.22) com relação aos parâmetros de interesse, θ e α, tem-se o vetor escore com componentes:

$$U_\theta(\theta,\alpha \mid \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(y_i \mid \theta)}{f(y_i \mid \theta)} - 2(1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} \frac{f(y_i \mid \theta)}{1 - \bar{\alpha} S(y_i \mid \theta)}, \tag{1.1.23}$$

$$U_\alpha(\theta,\alpha \mid \mathbf{y}) = \frac{n}{\alpha} - 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{S(y_i \mid \theta)}{1 - \bar{\alpha} S(y_i \mid \theta)}, \tag{1.1.24}$$

em que, $f'(y_i \mid \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(y_i \mid \theta)$.

As expressões (1.1.23) e (1.1.24) quando igualadas a zero são denominadas equações de verossimilhança. Nesse caso, essas equações não podem ser obtidas explicitamente, assim o estimador de máxima verossimilhança de $(\theta,\alpha)'$, denotado $\left(\hat{\theta},\hat{\alpha}\right)'$, pode ser obtido resolvendo simultaneamente as equações não lineares $U_\theta(\theta,\alpha \mid \mathbf{y}) = 0$ e $U_\alpha(\theta,\alpha \mid \mathbf{y}) = 0$ por métodos iterativos como o Algoritmo de Newton-Raphson.

Para amostras grandes e algumas condições de regularidade satisfeitas, basicamente, que o su-

porte $A(y) = \{y,\, f\,(\theta,\alpha \mid \mathbf{y}) > 0\}$ seja independente de (θ,α) e que seja possível a troca das ordens das operações de derivação e de integração sob a distribuição da variável aleatória Y, tem-se que os estimadores de máxima verossimilhança são aproximadamente não viciados, com matriz de covariâncias apresentada pela inversa da matriz informação de Fisher observada $I\,(\theta,\alpha \mid \mathbf{y})$, dada por:

$$I\,(\theta,\alpha \mid \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.1.25}$$

na qual, $I_{jk} = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{\Theta}_j \mathbf{\Theta}_k} l\,(\theta,\alpha \mid \mathbf{y})\,, j,k = 1,2.$

As derivadas de segunda ordem são:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{f''\,(y_i \mid \theta)}{f\,(y_i \mid \theta)} - \left(\frac{f'\,(y_i \mid \theta)}{f\,(y_i \mid \theta)}\right)^2\right] + \\
&\quad + 2\alpha\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{f'\,(y_i \mid \theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_i \mid \theta)} - \bar{\alpha}\left(\frac{f\,(y_i \mid \theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_i \mid \theta)}\right)^2\right], \\
I_{22} &= -\frac{n}{\alpha^2} - 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{S\,(y_i \mid \theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_i \mid \theta)}\right)^2, \\
I_{12} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{f\,(y_i \mid \theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_i \mid \theta)}\left[1 + \frac{\bar{\alpha}S(y_i \mid \theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_i \mid \theta)}\right].
\end{aligned}$$

Portanto, os intervalos de confiança $100 \times (1-\alpha)\,\%$ para θ e α podem ser obtidos da normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança com $Var(\hat{\theta})$ e $Var(\hat{\alpha})$ estimadas a partir da inversa da matriz informação de Fisher observada, isto é, a inversa da matriz de derivadas de segunda ordem da função log-verossimilhança em $\hat{\theta}$ e $\hat{\alpha}$.

Mínimos Quadrados

Seja $y_{1:n} < y_{2:n} < ... < y_{n:n}$ uma amostra aleatória ordenada de tamanho n com função de distribuição $F(y)$, então:

$$E\left[F(y_{(i:n)})\right] = \frac{i}{n+1} \quad , \qquad V\left[F(y_{(i:n)})\right] = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)}, \tag{1.1.26}$$

e

$$Cov\left[F(y_{(i:n)}), F(y_{(k:n)})\right] = \frac{i(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)} \qquad para \quad k < i, \tag{1.1.27}$$

Para a distribuição Extendida Marshall-Olkin $F\left(y \mid \theta, \alpha\right)$, as estimativas de mínimos quadrados $\hat{\theta}$ e $\hat{\alpha}$ dos parâmetros θ e α, respectivamente, são obtidas minimizando

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_{i:n} \mid \theta)}-\frac{i}{n+1}\right)^{2}, \tag{1.1.28}$$

em que, $\bar{\alpha}=1-\alpha$, $\alpha>0$ e $-\infty<y<\infty$.

Essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_{i:n} \mid \theta)}-\frac{i}{n+1}\right)\Delta_{1}\left(y_{i:n} \mid \theta, \alpha\right) = 0, \tag{1.1.29}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_{i:n} \mid \theta)}-\frac{i}{n+1}\right)\Delta_{2}\left(y_{i:n} \mid \theta, \alpha\right) = 0, \tag{1.1.30}$$

no qual:

$$\Delta_{1}\left(y_{i:n} \mid \theta, \alpha\right) = \frac{\left(1-\bar{\alpha}S(y_{i:n} \mid \theta)\right)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}F(y_{i:n} \mid \theta)\right]+\bar{\alpha}F(y_{i:n} \mid \theta)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}S(y_{i:n} \mid \theta)\right]}{\left[1-\bar{\alpha}S(y_{i:n} \mid \theta)\right]^{2}}, \tag{1.1.31}$$

$$\Delta_{2}\left(y_{i:n} \mid \theta, \alpha\right) = -\frac{S(y_{i:n} \mid \theta)F(y_{i:n} \mid \theta)}{\left[1-\bar{\alpha}S(y_{i:n} \mid \theta)\right]^{2}}. \tag{1.1.32}$$

Observe que (1.1.31) e (1.1.32) são as derivadas de primeira ordem da função de distribuição em relação aos parâmetros θ e α, respectivamente.

Mínimos Quadrados Ponderado

A linearidade, homocedasticidade, não tendenciosidade, variância mínima e consistência são algumas das características apresentadas pelo estimador de mínimos quadrados, porém, na prática, nem sempre essas suposições são válidas. Por isso, foram desenvolvidos métodos alternativos como o estimador de mínimos quadrados ponderados que corrige a falta de homocedasticidade (variâncias iguais).

Para a distribuição Extendida Marshall-Olkin $F\left(y \mid \theta, \alpha\right)$, as estimativas de mínimos quadrados ponderado $\hat{\theta}$ e $\hat{\alpha}$ dos parâmetros θ e α, respectivamente, são obtidas minimizando:

$$\sum_{i=1}^{n} w_{i}\left(\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_{i:n} \mid \theta)}-\frac{i}{n+1}\right)^{2}, \tag{1.1.33}$$

em que, $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$, $\alpha > 0$ e $-\infty < y < \infty$, com fator de correção w_i dado por

$$w_i = \frac{1}{V\left[F(y_{(i:n)})\right]} = \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}. \tag{1.1.34}$$

Essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,(n-i+1)} \left(\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)}{1 - \bar{\alpha} S(y_{i:n} \mid \theta)} - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_1 \left(y_{i:n} \mid \theta, \alpha \right) = 0, \tag{1.1.35}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,(n-i+1)} \left(\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)}{1 - \bar{\alpha} S(y_{i:n} \mid \theta)} - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_2 \left(y_{i:n} \mid \theta, \alpha \right) = 0, \tag{1.1.36}$$

em que, $\Delta_1 \left(y_{i:n} \mid \theta, \alpha \right)$ e $\Delta_2 \left(y_{i:n} \mid \theta, \alpha \right)$ são dadas por (1.1.31) e (1.1.32), respectivamente.

Máximo Produto de Espaçamentos

Cheng e Amin (1979, 1983) introduziram o método máximo produto de espaçamentos (MPS) como uma alternativa ao método de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros de distribuições univariadas contínuas. Ranneby (1984) desenvolveu independentemente o mesmo método como uma aproximação da medida de informação de Kullback-Leibler. A informação de Kullback-Leibler é uma medida de distância entre duas distribuições de probabilidade, também conhecida como entropia relativa.

Considere $y_{1:n} < y_{2:n} < ... < y_{n:n}$ uma amostra aleatória ordenada de tamanho n de uma população com função de distribuição Extendida Marshall-Olkin $F\left(y_{i:n} \mid \theta, \alpha \right)$. Define-se como espaçamentos uniformes da amostra ou espaçamentos de primeira ordem, as quantidades $D_1 = F\left(y_{i:n} \mid \theta, \alpha \right)$, $D_i = F\left(y_{i:n} \mid \theta, \alpha \right) - F\left(y_{(i-1):n} \mid \theta, \alpha \right)$ e $D_{n+1} = 1 - F\left(y_{n:n} \mid \theta, \alpha \right)$, para $i = 2, 3, ..., n$. Observe que existem $(n+1)$ espaçamentos de primeira ordem.

O método MPS consiste em encontrar os valores de θ e α que maximizam a média geométrica dos espaçamentos dada por:

$$G\left(\theta, \alpha \mid \mathbf{y}^* \right) = \left(\prod_{i=1}^{n+1} D_i \right)^{\frac{1}{n+1}}, \tag{1.1.37}$$

ou, equivalentemente, o logarítmo $H = \log(G)$.

Se $0 = F\left(y_{0:n} \mid \theta, \alpha \right) < F\left(y_{1:n} \mid \theta, \alpha \right) < \cdots < F\left(y_{n:n} \mid \theta, \alpha \right) < F\left(y_{(n+1):n} \mid \theta, \alpha \right) = 1$, a quantidade $H = \log(G)$ pode ser escrita como:

$$H\left(\theta, \alpha \mid \mathbf{y}^* \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \log\left[D_i \right]. \tag{1.1.38}$$

As estimativas para θ e α podem ser obtidas resolvendo, respectivamente, em θ e α as equações não lineares:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}H\left(\theta,\alpha \mid \mathbf{y}^{*}\right) = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{D_i}\Delta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}F\left(y_{i:n} \mid \theta,\alpha\right)\right] = 0, \tag{1.1.39}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}H\left(\theta,\alpha \mid \mathbf{y}^{*}\right) = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{D_i}\Delta\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}F\left(y_{i:n} \mid \theta,\alpha\right)\right] = 0, \tag{1.1.40}$$

em que, Δ é o primeiro operador diferença.

Cheng e Amin (1983) demonstraram que maximizar H como um método para estimar os parâmetros é tão eficiente quanto o estimador de máxima verossimilhança, além disso, as estimativas MPS são consistentes sob condições mais gerais do que as estimativas de máxima verossimilhança.

Portanto, as estimativas $\hat{\theta}$ e $\hat{\alpha}$, pelo método MPS podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}H\left(\theta,\alpha \mid \mathbf{y}^{*}\right) = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{D_i}\Delta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_{i:n} \mid \theta)}\right)\right] = 0, \tag{1.1.41}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}H\left(\theta,\alpha \mid \mathbf{y}^{*}\right) = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{D_i}\Delta\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_{i:n} \mid \theta)}\right)\right] = 0. \tag{1.1.42}$$

Essas derivadas de primeira ordem da função de distribuição em relação aos parâmetros θ e α são calculadas em (1.1.31) e (1.1.32), respectivamente.

Anderson-Darling

O Anderson-Darling é um método de estimação de minimização da distância mínima através da estatística *goodness-of-fit*, essa estatística baseia-se na diferença entre a estimativa da função distribuição acumulada e a distribuição empírica, (LUCENO, 2006).

Portanto, as estimativas Anderson-Darling $\hat{\theta}$ e $\hat{\alpha}$ dos parâmetros θ e α, respectivamente, são obtidas minimizando, com respeito a θ e α, a função:

$$A\left(\theta,\alpha\right) = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2i-1\right)\log\left\{F\left(y_{i:n} \mid \theta,\alpha\right)\left[1-F\left(y_{n+1-i:n} \mid \theta,\alpha\right)\right]\right\}. \tag{1.1.43}$$

Essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[\frac{\Delta_1\left(y_{i:n}\mid\theta,\alpha\right)}{F\left(y_{i:n}\mid\theta,\alpha\right)}-\frac{\Delta_1\left(y_{n+1-i:n}\mid\theta,\alpha\right)}{F\left(y_{n+1-i:n}\mid\theta,\alpha\right)}\right] = 0, \tag{1.1.44}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[\frac{\Delta_2\left(y_{i:n}\mid\theta,\alpha\right)}{F\left(y_{i:n}\mid\theta,\alpha\right)}-\frac{\Delta_2\left(y_{n+1-i:n}\mid\theta,\alpha\right)}{F\left(y_{n+1-i:n}\mid\theta,\alpha\right)}\right] = 0, \tag{1.1.45}$$

em que, $\Delta_1\left(\cdot\mid\theta,\alpha\right)$ e $\Delta_2\left(\cdot\mid\theta,\alpha\right)$ são dadas por (1.1.31) e (1.1.32), respectivamente.

Cramér-von Mises

Assim como o Anderson-Darling, o método Cramér-von Mises baseia-se na minimização da estatística *goodness-of-fit*. As estimativas Cramér-von Mises $\hat{\theta}$ e $\hat{\alpha}$ dos parâmetros θ e α, respectivamente, são obtidas minimizando a função:

$$C\left(\theta,\alpha\right)=\frac{1}{12n}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{F(y_{i:n}\mid\theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_{i:n}\mid\theta)}-\frac{2i-1}{2n}\right)^2. \tag{1.1.46}$$

Portanto, essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{F(y_{i:n}\mid\theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_{i:n}\mid\theta)}-\frac{2i-1}{2n}\right)\Delta_1\left(y_{i:n}\mid\theta,\alpha\right) = 0, \tag{1.1.47}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{F(y_{i:n}\mid\theta)}{1-\bar{\alpha}S(y_{i:n}\mid\theta)}-\frac{2i-1}{2n}\right)\Delta_2\left(y_{i:n}\mid\theta,\alpha\right) = 0, \tag{1.1.48}$$

em que, $\Delta_1\left(\cdot\mid\theta,\alpha\right)$ e $\Delta_2\left(\cdot\mid\theta,\alpha\right)$ são dadas por (1.1.31) e (1.1.32), respectivamente.

1.2 Composição via a distribuição de Poisson Truncada no Zero

Esta seção apresenta a formulação da distribuição de probabilidade obtida pela composição de distribuições em que a ocorrência do evento de interesse está associada a causas de falha latentes, sendo observado a primeira ou a última causa de falha. Nesse contexto, foi proposta uma distribuição considerando que o tempo de ocorrência de cada uma das causas de falha T_j, $j=1,\ldots,M$, segue uma distribuição $F(t\mid\theta)$ com vetor de parâmetros θ e a quantidade M de causas de falha possui distribuição

de Poisson Truncada no Zero, $M \sim PoissonTrunc(\lambda)$, com função de probabilidade dada por:

$$P(M = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!(1 - e^{-\lambda})}, \tag{1.2.1}$$

em que, $m = 1, 2, \ldots$ e $\lambda > 0$ (REZAEI; TAHMASBI, 2012).

Como uma variável com distribuição de Poisson pode assumir o valor zero, seria incoerente considerar tal distribuição para a formulação do modelo de composição desde que se o número de causas de falha for igual a zero tem-se o modelo $F(t \mid \theta)$. Uma forma de corrigir esse problema é considerar a distribuição de Poisson Truncada no Zero, que exclui a possibilidade de $m = 0$.

1.2.1 Riscos Competitivos

Seja T_j, $j = 1, \ldots, M$, os tempos de falha latente de indivíduos sujeito a M riscos, e T_j independente de M, e assuma que é observado $Y = \min(T_1, ..., T_M)$. Sob a suposição que os tempos até a falha T_j, $j = 1, 2, ..., M$, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função distribuição $F(t \mid \theta)$ e vetor de parâmetros θ, a função densidade de probabilidade condicional de $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ dado $M = m$ é

$$f\left(y \mid M = m, \theta\right) = m\left[S(y \mid \theta)\right]^{m-1} f(y \mid \theta). \tag{1.2.2}$$

Assumindo que o número de causas de falha M é uma variável aleatória com distribuição de Poisson Truncada no Zero, com função de probabilidade dada em (1.2.1) tem-se que a função densidade de probabilidade marginal de Y é:

$$\begin{aligned} f\left(y \mid \theta, \lambda\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} f\left(y \mid M = m, \theta\right)\ P(M = m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m\left[S(y \mid \theta)\right]^{m-1} f(y \mid \theta) \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!(1 - e^{-\lambda})} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda} f(y \mid \theta)}{(1 - e^{-\lambda})} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[\lambda S(y \mid \theta)\right]^{m-1}}{(m-1)!} \\ &= \frac{\lambda f(y \mid \theta) e^{-\lambda F(y \mid \theta)}}{1 - e^{-\lambda}}. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Utilizando a integração pelo método da substituição com $u = -\lambda F(y \mid \theta)$, a função de distri-

buição marginal de Y é definida por:

$$\begin{aligned} F\left(y \mid \theta, \lambda\right) &= \int_0^y \frac{\lambda f(w \mid \theta) e^{-\lambda F(w \mid \theta)}}{(1-e^{-\lambda})} dw \\ &= \frac{1-e^{-\lambda F(y \mid \theta)}}{1-e^{-\lambda}}. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

A função de sobrevivência marginal e a função de risco marginal de Y são dadas, respectivamente, por:

$$S\left(y \mid \theta, \lambda\right) = 1 - F\left(y \mid \theta, \lambda\right) = \frac{e^{-\lambda F(y \mid \theta)} - e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}, \tag{1.2.5}$$

$$h\left(y \mid \theta, \lambda\right) = \frac{\lambda f(y \mid \theta) e^{-\lambda F(y \mid \theta)}}{e^{-\lambda F(y \mid \theta)} - e^{-\lambda}}. \tag{1.2.6}$$

1.2.2 Riscos Complementares

Considere $Y = \max(T_1, ..., T_M)$ e $M \sim PoissonTrunc(\lambda)$, a função densidade de probabilidade condicional de $Y = \max(T_1, ..., T_M)$ dado $M = m$ é:

$$f\left(y \mid M = m, \theta\right) = m\left[F(y \mid \theta)\right]^{m-1} f(y \mid \theta). \tag{1.2.7}$$

A função densidade de probabilidade marginal de Y é dada por:

$$\begin{aligned} f\left(y \mid \theta, \lambda\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} f\left(y \mid M = m, \theta\right)\ P(M = m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m\left[F(y \mid \theta)\right]^{m-1} f(y \mid \theta) \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!(1-e^{-\lambda})} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda} f(y \mid \theta)}{(1-e^{-\lambda})} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[\lambda F(y \mid \theta)\right]^{m-1}}{(m-1)!} \\ &= \frac{\lambda f(y \mid \theta) e^{-\lambda S(y \mid \theta)}}{1-e^{-\lambda}}. \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Utilizando a integração pelo método da substituição com $u = -\lambda S(y \mid \theta)$, a função de distri-

buição marginal de Y é definida por:

$$\begin{aligned} F\left(y \mid \theta, \lambda\right) &= \int_0^y \frac{\lambda f(w \mid \theta) e^{-\lambda S(w \mid \theta)}}{(1-e^{-\lambda})} dw \\ &= \frac{e^{-\lambda S(y \mid \theta)} - e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}. \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

A função de sobrevivência marginal e a função de risco marginal de Y são dadas, respectivamente, por:

$$S\left(y \mid \theta, \lambda\right) = 1 - F\left(y \mid \theta, \lambda\right) = \frac{1-e^{-\lambda S(y \mid \theta)}}{1-e^{-\lambda}}, \tag{1.2.10}$$

$$h\left(y \mid \theta, \lambda\right) = \frac{\lambda f(y \mid \theta) e^{-\lambda S(y \mid \theta)}}{1-e^{-\lambda F(y \mid \theta)}}. \tag{1.2.11}$$

1.2.3 Caso Geral

Substituindo o parâmetro λ por $-\lambda$ na função de sobrevivência no cenário de riscos competitivos dada em (1.2.5) tem-se a mesma expressão da função de sobrevivência obtida no cenário de riscos complementares dada em (1.2.10). Portanto, é possível encontrar um caso geral para o modelo obtido pelo processo de composição via a distribuição de Poisson Truncada no Zero.

A nova distribuição possui função densidade de probabilidade dada por:

$$f\left(y \mid \theta, \alpha\right) = \frac{\alpha f(y \mid \theta) e^{-\alpha F(y \mid \theta)}}{1-e^{-\alpha}} \tag{1.2.12}$$

em que $\alpha = \lambda > 0$ se $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ e $\alpha = -\lambda < 0$ se $Y = \max(T_1, ..., T_M)$.

Consequentemente, as funções de distribuição, de sobrevivência e de risco são dadas, respectivamente, por:

$$F\left(y \mid \theta, \alpha\right) = \frac{1-e^{-\alpha F(y \mid \theta)}}{1-e^{-\alpha}}, \tag{1.2.13}$$

$$S\left(y \mid \theta, \alpha\right) = \frac{e^{-\alpha F(y \mid \theta)} - e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}, \tag{1.2.14}$$

$$h\left(y \mid \theta, \alpha\right) = \frac{\alpha f(y \mid \theta) e^{-\alpha F(y \mid \theta)}}{e^{-\alpha F(y \mid \theta)} - e^{-\alpha}}. \tag{1.2.15}$$

Mesmo sendo possível obter um caso geral para o modelo de composição de distribuição via a distribuição de Poisson Truncada no Zero trabalhou-se com ambos os casos (mínimo e máximo) separados. A escolha de trabalhar separadamente fundamenta-se nas limitações encontradas nas simulações, ao contrário da simulação do modelo de composição de distribuição via a distribuição Geométrica, modelo Extendido Marshall-Olkin, que mostrou-se ser eficiente.

1.2.4 Estimação dos Parâmetros

Nessa seção apresentam-se seis métodos para estimar os parâmetros da distribuição obtida pelo processo de composição, que considera que o número de fatores de risco possui uma distribuição de Poisson Truncada no Zero, são eles: máxima verossimilhança (MLE), mínimos quadrados (OLS), mínimos quadrados ponderado (WLS), máximo produto de espaçamento (MPS), Anderson-Darling (AD) e Cramér-von Mises (CM). Para todos os métodos considerou-se que ambos os parâmetros θ e λ são desconhecidos .

Máxima Verossimilhança

Seja $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra aleatória com valores observados $y_1, \ldots, y_n$ da $F\left(y \mid \theta, \lambda\right)$, obtida pelo processo de composição em que $M \sim PoissonTrunc(\lambda)$, com vetor de parâmetros $(\theta, \lambda)'$. A função de verossimilhança é dada por:

$$L\left(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}\right) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i \mid \theta, \lambda) = \frac{\lambda^n \prod_{i=1}^{n} f\left(y_i \mid \theta\right)\ e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} F_p(y_i \mid \theta)}}{\left(1 - e^{-\lambda}\right)^n}, \tag{1.2.16}$$

e, sua função log-verossimilhança:

$$l\left(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}\right) = n \log \lambda - n \log\left(1 - e^{-\lambda}\right) + \sum_{i=1}^{n} \log f\left(y_i \mid \theta\right) - \lambda \sum_{i=1}^{n} F_p\left(y_i \mid \theta\right), \tag{1.2.17}$$

em que,

i) $F_p\left(y_i \mid \theta\right) = F\left(y_i \mid \theta\right)$ se $Y = \min\left(T_1, \ldots, T_M\right)$

ii) $F_p\left(y_i \mid \theta\right) = 1 - F\left(y_i \mid \theta\right)$ se $Y = \max\left(T_1, \ldots, T_M\right)$

Diferenciando (1.2.17) com relação aos parâmetros de interesse θ e λ, temos o vetor escore com componentes:

$$U_\theta(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(y_i \mid \theta)}{f(y_i \mid \theta)} - \lambda \sum_{i=1}^{n} F_p'(y_i \mid \theta), \tag{1.2.18}$$

$$U_\lambda(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}) = \frac{n}{\lambda} - \frac{ne^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})} - \sum_{i=1}^{n} F_p(y_i \mid \theta), \tag{1.2.19}$$

com $f'(y_i \mid \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} f(y_i \mid \theta)$ e $F_p'(y_i \mid \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} F_p(y_i \mid \theta)$.

As equações (1.2.18) e (1.2.19) não possuem solução analítica. Portanto, os estimadores de máxima verossimilhança, $\left(\hat{\theta}, \hat{\lambda}\right)'$, podem ser obtidos resolvendo simultaneamente as equações não lineares $U_\theta(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}) = 0$ e $U_\lambda(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}) = 0$ por métodos iterativos como o Algoritmo de Newton-Raphson.

Nesse caso, a matriz informação de Fisher observada, $I(\theta, \lambda \mid \mathbf{y})$, é dada por

$$I(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.2.20}$$

com $I_{jk} = \frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\Theta}_j \boldsymbol{\Theta}_k} l(\theta, \lambda \mid \mathbf{y})$, $j, k = 1, 2$.

As derivadas de segunda ordem são:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{f''(y_i \mid \theta)}{f(y_i \mid \theta)} - \left(\frac{f'(y_i \mid \theta)}{f(y_i \mid \theta)}\right)^2\right] - \lambda \sum_{i=1}^{n} F_p''(y_i \mid \theta), \\ I_{22} &= \frac{n}{\lambda^2} + \frac{ne^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}, \\ I_{12} &= -\sum_{i=1}^{n} F_p'(y_i \mid \theta). \end{aligned}$$

Os intervalos de confiança $100 \times (1-\alpha)\,\%$ para θ e λ podem ser obtidos da normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança com $Var(\hat{\theta})$ e $Var(\hat{\lambda})$ estimadas a partir da inversa da matriz informação de Fisher observada, isto é, a inversa da matriz de segundas derivadas da função log-verossimilhança em $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$.

Mínimos Quadrados

Seja $y_{1:n} < y_{2:n} < ... < y_{n:n}$ uma amostra aleatória ordenada de tamanho n de uma função de distribuição $F(.)$, então:

$$E(F(y_{i:n})) = \frac{i}{n+1} \quad , \qquad V(F(y_{i:n})) = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)},$$

e

$$Cov(F(y_{i:n}), F(y_{k:n})) = \frac{i(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)} \qquad para \quad k < i. \tag{1.2.21}$$

Para $F\left(y \mid \theta, \lambda\right)$, obtida pelo processo de composição em que $M \sim PoissonTrunc(\lambda)$, as estimativas de mínimos quadrados $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$ dos parâmetros θ e λ, respectivamente, são obtidas minimizando:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1 - e^{-\lambda F(y_{i:n} \mid \theta)}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{i}{n+1} \right)^2, \tag{1.2.22}$$

quando $Y = \min\left(T_1, \ldots, T_M\right)$ e, minimizando:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{-\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)} - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{i}{n+1} \right)^2, \tag{1.2.23}$$

quando $Y = \max\left(T_1, \ldots, T_M\right)$.

Portanto, se $Y = \min\left(T_1, \ldots, T_M\right)$, essas estimativas de mínimos quadrados podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1 - e^{-\lambda F(y_{i:n} \mid \theta)}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_1\left(y_{i:n} \mid \theta, \lambda\right) = 0, \tag{1.2.24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1 - e^{-\lambda F(y_{i:n} \mid \theta)}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_2\left(y_{i:n} \mid \theta, \lambda\right) = 0, \tag{1.2.25}$$

em que:

$$\Delta_1\left(y_{i:n} \mid \theta, \lambda\right) = \frac{\lambda \left[\frac{\partial}{\partial \theta} F(y_{i:n} \mid \theta)\right] e^{-\lambda F(y_{i:n} \mid \theta)}}{(1 - e^{-\lambda})}, \tag{1.2.26}$$

$$\Delta_2\left(y_{i:n} \mid \theta, \lambda\right) = \frac{F(y_{i:n} \mid \theta) e^{-\lambda F(y_{i:n} \mid \theta)}}{(1 - e^{-\lambda})} - \frac{\left(1 - e^{-\lambda F(y_{i:n} \mid \theta)}\right) e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2}. \tag{1.2.27}$$

E, quando $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$, essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{-\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)} - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_1 (y_{i:n} \mid \theta, \lambda) = 0, \tag{1.2.28}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{-\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)} - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_2 (y_{i:n} \mid \theta, \lambda) = 0, \tag{1.2.29}$$

em que:

$$\Delta_1 (y_{i:n} \mid \theta, \lambda) = -\frac{\lambda \left[\frac{\partial}{\partial \theta} S(y_{i:n} \mid \theta) \right] e^{-\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)}}{(1 - e^{-\lambda})}, \tag{1.2.30}$$

$$\Delta_2 (y_{i:n} \mid \theta, \lambda) = \frac{-S(y_{i:n} \mid \theta) e^{-\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)}}{(1 - e^{-\lambda})} - \frac{\left(e^{-\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)} - e^{-\lambda} \right) e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2}. \tag{1.2.31}$$

Mínimos Quadrados Ponderado

Para $F(y \mid \theta, \lambda)$, obtida pelo processo de composição em que $M \sim PoissonTrunc(\lambda)$, as estimativas de mínimos quadrados ponderado $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$ dos parâmetros θ e λ, respectivamente, são obtidas minimizando:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \left(\frac{1 - e^{-\lambda F(y \mid \theta)}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{i}{n+1} \right)^2, \tag{1.2.32}$$

se $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$ ou minimizando:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \left(\frac{e^{-\lambda S(y \mid \theta)} - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{i}{n+1} \right)^2, \tag{1.2.33}$$

se $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$, com fator de correção w_i dado em (1.1.34).

Se $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$, essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(n-i+1)} \left(\frac{1 - e^{-\lambda F(y \mid \theta)}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_1 (y_{i:n} \mid \theta, \lambda) = 0, \tag{1.2.34}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(n-i+1)} \left(\frac{1 - e^{-\lambda F(y \mid \theta)}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_2 (y_{i:n} \mid \theta, \lambda) = 0, \tag{1.2.35}$$

em que, $\Delta_1 (\cdot \mid \theta, \lambda)$ e $\Delta_2 (\cdot \mid \theta, \alpha)$ são dadas, respectivamente, por (1.2.26) e (1.2.27).

Se $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$, essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,(n-i+1)} \left(\frac{e^{-\lambda S(y \mid \theta)} - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_1 \left(y_{i:n} \mid \theta, \lambda \right) = 0, \tag{1.2.36}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,(n-i+1)} \left(\frac{e^{-\lambda S(y \mid \theta)} - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_2 \left(y_{i:n} \mid \theta, \lambda \right) = 0, \tag{1.2.37}$$

em que, $\Delta_1 (\cdot \mid \theta, \lambda)$ e $\Delta_2 (\cdot \mid \theta, \alpha)$ são dadas, respectivamente, por (1.2.30) e (1.2.31).

Máximo Produto de Espaçamento

Se $Y = \min(T_1, ..., T_M)$, as estimativas MPS dos parâmetro θ e λ da distribuição $F(y \mid \theta, \lambda)$ obtida pelo processo de composição em que $M \sim PoissonTrunc(\lambda)$, são obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} H \left(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}^* \right) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{D_i} \Delta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1 - e^{-\lambda F(y_{i:n} \mid \theta)}}{1 - e^{-\lambda}} \right) \right] = 0, \tag{1.2.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} H \left(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}^* \right) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{D_i} \Delta \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1 - e^{-\lambda F(y_{i:n} \mid \theta)}}{1 - e^{-\lambda}} \right) \right] = 0, \tag{1.2.39}$$

em que, Δ é o primeiro operador diferença. Essas derivadas de primeira ordem da função de distribuição em relação aos parâmetros θ e λ são calculadas em (1.2.26) e (1.2.27), respectivamente.

Se $Y = \max(T_1, ..., T_M)$, as estimativas MPS dos parâmetros θ e λ da distribuição $F(y \mid \theta, \lambda)$ obtida pelo processo de composição em que $M \sim PoissonTrunc(\lambda)$, são obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} H \left(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}^* \right) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{D_i} \Delta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{e^{-\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)} - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \right) \right] = 0, \tag{1.2.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} H \left(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}^* \right) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{D_i} \Delta \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{e^{-\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)} - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \right) \right] = 0, \tag{1.2.41}$$

em que, Δ é o primeiro operador diferença. Essas derivadas de primeira ordem da função de distribuição em relação aos parâmetros θ e λ são calculadas em (1.2.30) e (1.2.31), respectivamente.

Anderson-Darling

As estimativas Anderson-Darling $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$ dos parâmetros θ e λ, respectivamente, são obtidas minimizando a função:

$$A(\theta,\lambda) = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\log\left\{F(y_{i:n} \mid \theta,\lambda)\left[1 - F(y_{n+1-i:n} \mid \theta,\lambda)\right]\right\}. \tag{1.2.42}$$

Essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[\frac{\Delta_1(y_{i:n} \mid \theta,\lambda)}{F(y_{i:n} \mid \theta,\lambda)} - \frac{\Delta_1(y_{n+1-i:n} \mid \theta,\lambda)}{F(y_{n+1-i:n} \mid \theta,\lambda)}\right] = 0, \tag{1.2.43}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[\frac{\Delta_2(y_{i:n} \mid \theta,\lambda)}{F(y_{i:n} \mid \theta,\lambda)} - \frac{\Delta_2(y_{n+1-i:n} \mid \theta,\lambda)}{F(y_{n+1-i:n} \mid \theta,\lambda)}\right] = 0, \tag{1.2.44}$$

em que, as expressões $\Delta_1(\cdot \mid \theta,\lambda)$ e $\Delta_2(\cdot \mid \theta,\lambda)$ são dadas, respectivamente, por (1.2.26) e (1.2.27) se $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ e, respectivamente, por (1.2.30) e (1.2.31) se $Y = \max(T_1, ..., T_M)$.

Cramér-von Mises

As estimativas Cramér-von Mises $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$ dos parâmetros θ e λ, respectivamente, são obtidas minimizando a função:

$$C(\theta,\lambda) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left(F(y_{i:n} \mid \theta,\lambda) - \frac{2i-1}{2n}\right)^2. \tag{1.2.45}$$

Portanto, essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(F(y_{i:n} \mid \theta,\lambda) - \frac{2i-1}{2n}\right)\Delta_1(y_{i:n} \mid \theta,\lambda) = 0, \tag{1.2.46}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(F(y_{i:n} \mid \theta,\lambda) - \frac{2i-1}{2n}\right)\Delta_2(y_{i:n} \mid \theta,\lambda) = 0, \tag{1.2.47}$$

em que, as expressões $\Delta_1(\cdot \mid \theta,\lambda)$ e $\Delta_2(\cdot \mid \theta,\lambda)$ são dadas, respectivamente, por (1.2.26) e (1.2.27) se $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ e, respectivamente, por (1.2.30) e (1.2.31) se $Y = \max(T_1, ..., T_M)$.

1.3 Composição via a distribuição de Poisson *Size-Biased*

Esta seção apresenta a formulação da distribuição de probabilidade obtida pela composição de distribuições em que a ocorrência do evento de interesse está associada a causas de falha latentes, sendo observado a primeira ou a última causa de falha. Nesse contexto, foi proposta uma distribuição considerando que o tempo de ocorrência de cada uma das causas de falha T_j, $j = 1, \ldots, M$, segue uma distribuição $F(t \mid \theta)$ com vetor de parâmetros θ e a quantidade M de causas de falha possui distribuição de Poisson *Size-Biased*, $M \sim PoissonSB(\lambda)$.

As distribuições de probabilidade *Size-Biased* são casos especiais das distribuições ponderadas. Se a variável aleatória X tem função densidade $f(x \mid \theta)$, com vetor de parâmetro θ desconhecido, então a correspondente distribuição *Size-Biased* é da forma:

$$f^*(x \mid \theta) = \frac{x^\alpha f(x \mid \theta)}{E(X^\alpha)},$$

com $E(X^\alpha) < \infty$ (MIR; AHMAD, 2009).

Quando $\alpha = 1$, têm-se as distribuições *Size-Biased* simples. Portanto, para uma variável aleatória M com distribuição de Poisson, a correspondente distribuição *Size-Biased*, conhecida por distribuição de Poisson *Size-Biased*, é definida por:

$$P(M = m) = \frac{\lambda^{m-1} e^{-\lambda}}{(m-1)!}, \tag{1.3.1}$$

para $m = 1, 2, ...$ e $\lambda > 0$ (MIR; AHMAD, 2009). Observe que a distribuição de Poisson *Size-Biased* definida em (1.3.1) exclui naturalmente $m = 0$.

1.3.1 Riscos Competitivos

Seja T_j, $j = 1, \ldots, M$, os tempos de falha latente de indivíduos sujeito a M riscos, e T_j independente de M, e assuma que é observado $Y = \min(T_1, ..., T_M)$. Sob a suposição que os tempos até a falha T_j, $j = 1, 2, ..., M$, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função distribuição $F(t \mid \theta)$ e vetor de parâmetros θ, a função densidade de probabilidade condicional de $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ dado $M = m$ é

$$f(y \mid M = m, \theta) = m\,[S(y \mid \theta)]^{m-1} f(y \mid \theta). \tag{1.3.2}$$

Assumindo que o número de causas de falha M é uma variável aleatória com distribuição de Poisson *Size-Biased* com função de probabilidade (1.3.1), tem-se que a função densidade de probabilidade marginal de Y é definida por:

$$\begin{aligned} f\left(y \mid \theta, \lambda\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} f\left(y \mid M=m, \theta\right)\ P(M=m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m\left[S(y \mid \theta)\right]^{m-1} f(y \mid \theta) \frac{\lambda^{m-1} e^{-\lambda}}{(m-1)!} \\ &= f(y \mid \theta) e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\left[\lambda S(y \mid \theta)\right]^{m-1}}{(m-1)!} \\ &= f(y \mid \theta) e^{-\lambda}\left[e^{\lambda S(y \mid \theta)}\left(1+\lambda S(y \mid \theta)\right)\right] \\ &= \frac{f(y \mid \theta)\left(1+\lambda S(y \mid \theta)\right)}{e^{\lambda F(y \mid \theta)}}. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Desde que, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k z^k}{k!} = z e^z$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$ cf. (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2007). Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\left[\lambda S(y \mid \theta)\right]^{m-1}}{(m-1)!} &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{m\left[\lambda S(y \mid \theta)\right]^{m}}{m!}+\frac{\left[\lambda S(y \mid \theta)\right]^{m}}{m!}\right) \\ &= e^{\lambda S(y \mid \theta)}\left(1+\lambda S(y|\theta)\right) \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Portanto, a função de distribuição marginal de Y, utilizando a substituição $u = 1 + \lambda S(y \mid \theta)$, é dada por:

$$\begin{aligned} F\left(y \mid \theta, \lambda\right) &= \int_0^y \frac{f(w \mid \theta)\left(1+\lambda S(w \mid \theta)\right)}{e^{\lambda F(w \mid \theta)}} dw \\ &= 1-\frac{S(y \mid \theta)}{e^{\lambda F(y \mid \theta)}}. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Imediantamente, a função de sobrevivência marginal e a função de risco marginal de Y são definidas, respectivamente, por:

$$S\left(y \mid \theta, \lambda\right) = 1 - F\left(y \mid \theta, \lambda\right) = \frac{S(y \mid \theta)}{e^{\lambda F(y \mid \theta)}}, \tag{1.3.6}$$

$$h\left(y \mid \theta, \lambda\right) = \frac{f(y \mid \theta)\left(1+\lambda S(y \mid \theta)\right)}{S(y \mid \theta)}. \tag{1.3.7}$$

1.3.2 Riscos Complementares

Considere que $Y = \max(T_1, ..., T_M)$ e $M \sim PoissonSB(\lambda)$, a função densidade de probabilidade condicional de $Y = \max(T_1, ..., T_M)$ dado $M = m$ é:

$$f\left(y \mid M = m, \theta\right) = m\left[F(y \mid \theta)\right]^{m-1} f(y \mid \theta). \tag{1.3.8}$$

A função densidade de probabilidade marginal de Y é dada por

$$\begin{aligned} f\left(y \mid \theta, \lambda\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} f\left(y \mid M = m, \theta\right)\ P(M = m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m\left[F(y \mid \theta)\right]^{m-1} f(y \mid \theta) \frac{\lambda^{m-1} e^{-\lambda}}{(m-1)!} \\ &= f(y \mid \theta) e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\left[\lambda F(y \mid \theta)\right]^{m-1}}{(m-1)!} \\ &= f(y \mid \theta) e^{-\lambda} \left[e^{\lambda F(y \mid \theta)}\left(1 + \lambda F(y \mid \theta)\right)\right] \\ &= \frac{f(y \mid \theta)\left(1 + \lambda F(y \mid \theta)\right)}{e^{\lambda S(y \mid \theta)}}. \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Utilizando a integração pelo método da substituição com $u = 1 + \lambda F(y \mid \theta)$, a função de distribuição marginal de Y é expressa por:

$$\begin{aligned} F\left(y \mid \theta, \lambda\right) &= \int_0^y \frac{f(w \mid \theta)\left(1 + \lambda F(w \mid \theta)\right)}{e^{\lambda S(w \mid \theta)}} dw \\ &= \frac{F(y \mid \theta)}{e^{\lambda S(y \mid \theta)}}. \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Imediantamente, a função de sobrevivência marginal e a função de risco marginal de Y são definidas, respectivamente, por:

$$S\left(y \mid \theta, \lambda\right) = 1 - F\left(y \mid \theta, \lambda\right) = 1 - \frac{F(y \mid \theta)}{e^{\lambda S(y \mid \theta)}}, \tag{1.3.11}$$

$$h\left(y \mid \theta, \lambda\right) = \frac{f(y \mid \theta)\left(1 + \lambda F(y \mid \theta)\right)}{e^{\lambda S(y \mid \theta)} - F(y \mid \theta)}. \tag{1.3.12}$$

Nota-se que o processo de composição utilizando a distribuição de Poisson *Size-Biased* como "distribuição de mistura" tem a "distribuição misturada" como caso particular, ou seja, $f\left(y \mid \theta, \lambda = 0\right) = f\left(y \mid \theta\right)$. Esse fato não ocorre quando a "distribuição de mistura" é uma Poisson Truncada no Zero.

1.3.3 Estimação dos Parâmetros

Nessa seção apresentam-se seis métodos para estimar os parâmetros da distribuição obtida pelo processo de composição, que considera que o número de fatores de risco possui uma distribuição de Poisson *Size-Biased*, são eles: máxima verossimilhança (MLE), mínimos quadrados (OLS), mínimos quadrados ponderado (WLS), máximo produto de espaçamento (MPS), Anderson-Darling (AD) e Cramér-von Mises (CM). Para todos os métodos considerou-se que ambos os parâmetros θ e λ são desconhecidos .

Máxima Verossimilhança

Seja $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra aleatória com valores observados $y_1, \ldots, y_n$ da $F(y \mid \theta, \lambda)$, obtida pelo processo de composição em que $M \sim PoissonSB(\lambda)$, com vetor de parâmetros $(\theta, \lambda)'$. A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i \mid \theta, \lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(y_i \mid \theta) \ (1 + \lambda S_{SB}(y_i \mid \theta))}{e^{\lambda \sum_{i=1}^{n} F_{SB}(y_i \mid \theta)}}, \tag{1.3.13}$$

e, sua função log-verossimilhança:

$$l(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \log f(y_i \mid \theta) + \sum_{i=1}^{n} \log [1 + \lambda S_{SB}(y_i \mid \theta)] - \lambda \sum_{i=1}^{n} F_{SB}(y_i \mid \theta), \tag{1.3.14}$$

em que,

i) $F_{SB}(y_i \mid \theta) = F(y_i \mid \theta)$ e $S_{SB}(y_i \mid \theta) = 1 - F(y_i \mid \theta)$ se $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$

ii) $F_{SB}(y_i \mid \theta) = 1 - F(y_i \mid \theta)$ e $S_{SB}(y_i \mid \theta) = F(y_i \mid \theta)$ se $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$

Diferenciando $(1.3.14)$ com relação aos parâmetros de interesse θ e λ, tem-se o vetor escore com componentes:

$$U_{\theta}(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(y_i \mid \theta)}{f(y_i \mid \theta)} + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{S'_{SB}(y_i \mid \theta)}{[1 + \lambda S_{SB}(y_i \mid \theta)]} - \lambda \sum_{i=1}^{n} F'_{SB}(y_i \mid \theta), \tag{1.3.15}$$

$$U_{\lambda}(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_{SB}(y_i \mid \theta)}{[1 - \lambda S_{SB}(y_i \mid \theta)]} - \sum_{i=1}^{n} F_{SB}(y_i \mid \theta), \tag{1.3.16}$$

em que, $f'(y_i \mid \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(y_i \mid \theta)$, $F'_{SB}(y_i \mid \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} F_{SB}(y_i \mid \theta)$ e $S'_{SB}(y_i \mid \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} S_{SB}(y_i \mid \theta)$.

As equações (1.3.15) e (1.3.16) não possuem solução analítica. Portanto, os estimadores de máxima verossimilhança, $\left(\hat{\theta}, \hat{\lambda}\right)'$, podem ser obtidos resolvendo simultaneamente as equações não lineares

$U_\theta(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}) = 0$ e $U_\lambda(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}) = 0$ por métodos iterativos como o Algoritmo de Newton-Raphson.

Nesse caso, a matriz informação de Fisher observada, $I(\theta, \lambda \mid \mathbf{y})$, é dada por:

$$I(\theta,\lambda \mid \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.3.17}$$

na qual, $I_{jk} = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{\Theta}_j \mathbf{\Theta}_k} l(\theta,\lambda \mid \mathbf{y})$, $j, k = 1, 2$.

As derivadas de segunda ordem são:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{f''(y_i \mid \theta)}{f(y_i \mid \theta)} - \left(\frac{f'(y_i \mid \theta)}{f(y_i \mid \theta)}\right)^2\right] + \\ &\quad + \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{S''_{SB}(y_i \mid \theta)}{[1 + \lambda S_{SB}(y_i \mid \theta)]} - \lambda \left(\frac{S'_{SB}(y_i \mid \theta)}{1 + \lambda S_{SB}(y_i \mid \theta)}\right)^2\right], \\ I_{22} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{S_{SB}(y_i \mid \theta)}{1 + \lambda S_{SB}(y_i \mid \theta)}\right)^2, \\ I_{12} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{S'_{SB}(y_i \mid \theta)}{[1 + \lambda S_{SB}(y_i \mid \theta)]} - \sum_{i=1}^{n} F'_{SB}(y_i \mid \theta). \end{aligned}$$

Portanto, os intervalos de confiança $100 \times (1 - \lambda)\,\%$ para θ e λ podem ser obtidos da normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança com $Var(\hat{\theta})$ e $Var(\hat{\lambda})$ estimadas a partir da inversa da matriz informação de Fisher observada, isto é, a inversa da matriz de derivadas de segunda ordem da função log-verossimilhança em $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$.

Mínimos Quadrados

Seja $y_{1:n} < y_{2:n} < ... < y_{n:n}$ uma amostra aleatória ordenada de tamanho n de uma função de distribuição $F(.)$, então:

$$E(F(y_{i:n})) = \frac{i}{n+1} \quad , \qquad V(F(y_{i:n})) = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

e

$$Cov(F(y_{i:n}), F(y_{k:n})) = \frac{i(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)} \qquad para \quad k < i, \tag{1.3.18}$$

Para a distribuição $F(y \mid \theta, \lambda)$, obtida pelo processo de composição em que $M \sim PoissonSB(\lambda)$, as estimativas de mínimos quadrados $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$ dos parâmetros θ e λ, respectivamente, são obtidas minimi-

zando:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left[1-\frac{S(y_{i:n}\mid\theta)}{e^{\lambda F(y_{i:n}\mid\theta)}}\right]-\frac{i}{n+1}\right)^2, \tag{1.3.19}$$

quando $Y=\min(T_1,\ldots,T_M)$ e, minimizando:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{F(y_{i:n}\mid\theta)}{e^{\lambda S(y_{i:n}\mid\theta)}}-\frac{i}{n+1}\right)^2, \tag{1.3.20}$$

quando $Y=\max(T_1,\ldots,T_M)$.

Portanto, se $Y=\min(T_1,\ldots,T_M)$, essas estimativas de mínimos quadrados podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left[1-\frac{S(y_{i:n}\mid\theta)}{e^{\lambda F(y_{i:n}\mid\theta)}}\right]-\frac{i}{n+1}\right)\Delta_1(y_{i:n}\mid\theta,\lambda) = 0, \tag{1.3.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left[1-\frac{S(y_{i:n}\mid\theta)}{e^{\lambda F(y_{i:n}\mid\theta)}}\right]-\frac{i}{n+1}\right)\Delta_2(y_{i:n}\mid\theta,\lambda) = 0, \tag{1.3.22}$$

em que:

$$\Delta_1(y_{i:n}\mid\theta,\lambda) = \frac{\left[-\frac{\partial}{\partial\theta}S(y_{i:n}\mid\theta)+\lambda S(y_{i:n}\mid\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}F(y_{i:n}\mid\theta)\right]}{e^{\lambda F(y_{i:n}\mid\theta)}}, \tag{1.3.23}$$

$$\Delta_2(y_{i:n}\mid\theta,\lambda) = \frac{F(y_{i:n}\mid\theta)S(y_{i:n}\mid\theta)}{e^{\lambda F(y_{i:n}\mid\theta)}}. \tag{1.3.24}$$

E, quando $Y=\max(T_1,\ldots,T_M)$, essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{F(y_{i:n}\mid\theta)}{e^{\lambda S(y_{i:n}\mid\theta)}}-\frac{i}{n+1}\right)\Delta_1(y_{i:n}\mid\theta,\lambda) = 0, \tag{1.3.25}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{F(y_{i:n}\mid\theta)}{e^{\lambda S(y_{i:n}\mid\theta)}}-\frac{i}{n+1}\right)\Delta_2(y_{i:n}\mid\theta,\lambda) = 0, \tag{1.3.26}$$

em que:

$$\Delta_1\left(y_{i:n} \mid \theta, \lambda\right) = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}F(y_{i:n} \mid \theta) - \lambda F(y_{i:n} \mid \theta)\frac{\partial}{\partial\theta}S(y_{i:n} \mid \theta)\right]}{e^{\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)}}, \tag{1.3.27}$$

$$\Delta_2\left(y_{i:n} \mid \theta, \lambda\right) = -\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)S(y_{i:n} \mid \theta)}{e^{\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)}}. \tag{1.3.28}$$

Mínimos Quadrados Ponderado

Para a distribuição $F\left(y \mid \theta, \lambda\right)$, obtida pelo processo de composição em que $M \sim PoissonSB(\lambda)$, as estimativas de mínimos quadrados ponderado $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$ dos parâmetros θ e λ, respectivamente, são obtidas minimizando:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \left(\left[1 - \frac{S(y_{i:n} \mid \theta)}{e^{\lambda F(y_{i:n} \mid \theta)}}\right] - \frac{i}{n+1}\right)^2, \tag{1.3.29}$$

se $Y = \min\left(T_1, \ldots, T_M\right)$ ou minimizando:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \left(\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)}{e^{\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)}} - \frac{i}{n+1}\right)^2, \tag{1.3.30}$$

se $Y = \max\left(T_1, \ldots, T_M\right)$, com fator de correção w_i dado em (1.1.34).

Se $Y = \min\left(T_1, \ldots, T_M\right)$, essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\left(n-i+1\right)} \left(\left[1 - \frac{S(y_{i:n} \mid \theta)}{e^{\lambda F(y_{i:n} \mid \theta)}}\right] - \frac{i}{n+1}\right) \Delta_1\left(y_{i:n} \mid \theta, \lambda\right) = 0, \tag{1.3.31}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\left(n-i+1\right)} \left(\left[1 - \frac{S(y_{i:n} \mid \theta)}{e^{\lambda F(y_{i:n} \mid \theta)}}\right] - \frac{i}{n+1}\right) \Delta_2\left(y_{i:n} \mid \theta, \lambda\right) = 0, \tag{1.3.32}$$

em que, $\Delta_1\left(\cdot \mid \theta, \lambda\right)$ e $\Delta_2\left(\cdot \mid \theta, \lambda\right)$ são dadas, respectivamente, por (1.3.23) e (1.3.24).

Se $Y = \max\left(T_1, \ldots, T_M\right)$, essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\left(n-i+1\right)} \left(\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)}{e^{\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)}} - \frac{i}{n+1}\right) \Delta_1\left(y_{i:n} \mid \theta, \lambda\right) = 0, \tag{1.3.33}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\left(n-i+1\right)} \left(\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)}{e^{\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)}} - \frac{i}{n+1}\right) \Delta_2\left(y_{i:n} \mid \theta, \lambda\right) = 0, \tag{1.3.34}$$

em que, $\Delta_1(\cdot \mid \theta, \lambda)$ e $\Delta_2(\cdot \mid \theta, \lambda)$ são dadas, respectivamente, por (1.3.27) e (1.3.28).

Máximo Produto de Espaçamentos

Se $Y = \min(T_1, ..., T_M)$, as estimativas MPS dos parâmetro θ e λ da distribuição $F(y \mid \theta, \lambda)$ obtida pelo processo de composição em que $M \sim PoissonSB(\lambda)$, são obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}H(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}^*) = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{D_i}\Delta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(1 - \frac{S(y_{i:n} \mid \theta)}{e^{\lambda F(y_{i:n} \mid \theta)}}\right)\right] = 0, \tag{1.3.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}H(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}^*) = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{D_i}\Delta\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(1 - \frac{S(y_{i:n} \mid \theta)}{e^{\lambda F(y_{i:n} \mid \theta)}}\right)\right] = 0, \tag{1.3.36}$$

em que, Δ é o primeiro operador diferença. Essas derivadas de primeira ordem da função de distribuição em relação aos parâmetros θ e λ são calculadas em (1.3.23) e (1.3.24, respectivamente.

Se $Y = \max(T_1, ..., T_M)$, as estimativas MPS dos parâmetros θ e λ da distribuição $F(y \mid \theta, \lambda)$ obtida pelo processo de composição em que $M \sim PoissonSB(\lambda)$, são obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}H(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}^*) = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{D_i}\Delta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)}{e^{\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)}}\right)\right] = 0, \tag{1.3.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}H(\theta, \lambda \mid \mathbf{y}^*) = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{D_i}\Delta\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{F(y_{i:n} \mid \theta)}{e^{\lambda S(y_{i:n} \mid \theta)}}\right)\right] = 0, \tag{1.3.38}$$

em que, Δ é o primeiro operador diferença. Essas derivadas de primeira ordem da função de distribuição em relação aos parâmetros θ e λ são calculadas em (1.3.27) e (1.3.28), respectivamente.

Anderson-Darling

As estimativas Anderson-Darling $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$ dos parâmetros θ e λ, respectivamente, são obtidas minimizando, a função:

$$A(\theta, \lambda) = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\log\left\{F(y_{i:n} \mid \theta, \lambda)\left[1 - F(y_{n+1-i:n} \mid \theta, \lambda)\right]\right\}. \tag{1.3.39}$$

Essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[\frac{\Delta_1\left(y_{i:n}\mid\theta,\lambda\right)}{F\left(y_{i:n}\mid\theta,\lambda\right)}-\frac{\Delta_1\left(y_{n+1-i:n}\mid\theta,\lambda\right)}{F\left(y_{n+1-i:n}\mid\theta,\lambda\right)}\right] = 0, \tag{1.3.40}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[\frac{\Delta_2\left(y_{i:n}\mid\theta,\lambda\right)}{F\left(y_{i:n}\mid\theta,\lambda\right)}-\frac{\Delta_2\left(y_{n+1-i:n}\mid\theta,\lambda\right)}{F\left(y_{n+1-i:n}\mid\theta,\lambda\right)}\right] = 0, \tag{1.3.41}$$

em que, as expressões $\Delta_1\left(\cdot\mid\theta,\lambda\right)$ e $\Delta_2\left(\cdot\mid\theta,\lambda\right)$ são dadas, respectivamente, por (1.3.23) e (1.3.24) se $Y=\min(T_1,...,T_M)$ e, respectivamente, por (1.3.27) e (1.3.28) se $Y=\max(T_1,...,T_M)$.

Cramér-von Mises

As estimativas Cramér-von Mises $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$ dos parâmetros θ e λ, respectivamente, são obtidas minimizando a função:

$$C\left(\theta,\lambda\right)=\frac{1}{12n}+\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(y_{i:n}\mid\theta,\lambda\right)-\frac{2i-1}{2n}\right)^2. \tag{1.3.42}$$

Portanto, essas estimativas podem ser obtidas resolvendo as equações não lineares:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(y_{i:n}\mid\theta,\lambda\right)-\frac{2i-1}{2n}\right)\Delta_1\left(y_{i:n}\mid\theta,\lambda\right) = 0, \tag{1.3.43}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(y_{i:n}\mid\theta,\lambda\right)-\frac{2i-1}{2n}\right)\Delta_2\left(y_{i:n}\mid\theta,\lambda\right) = 0, \tag{1.3.44}$$

em que, as expressões $\Delta_1\left(\cdot\mid\theta,\lambda\right)$ e $\Delta_2\left(\cdot\mid\theta,\lambda\right)$ são dadas, respectivamente, por (1.3.23) e (1.3.24) se $Y=\min(T_1,...,T_M)$ e, respectivamente, por (1.3.27) e (1.3.28) se $Y=\max(T_1,...,T_M)$.

1.4 Comentários

A apresentação dos modelos de composição de forma genérica deixa evidente a formulação dos modelos de composição considerando a ideia de riscos competitivos e riscos complementares, o que nem sempre acontece quando são apresentados diretamente, ou seja, quando assume-se uma determinada distribuição para os tempos de falha T_j. Além disso, possibilita a utilização dos modelos em outros trabalhos.

Essa forma de apresentar os modelos de composição facilita a visualização da relação do modelo

proposto com a distribuição dos tempos de falha. Por exemplo, a função de densidade de probabilidade do modelo de composição via a distribuição Geométrica no contexto de mínimo utiliza a informação da distribuição de sobrevivência dos tempos T_j, já no contexto de máximo, utiliza a informação da função de distribuição acumulada dos tempos T_j.

Esse resultado é inverso quando comparamos a função de densidade de probabilidade do modelo de composição via a distribuição de Poisson Truncada no Zero, ou seja, no contexto de mínimo a função de densidade utiliza a informação da distribuição acumulada, enquanto no contexto de máximo, utiliza a informação da sobrevivência.

No modelo de composição via a distribuição de Poisson *Size-Biased*, em ambos os contextos, mínimo e máximo, a função de densidade de probabilidade utiliza a informação das funções de sobrevivência e de distribuição acumulada.

Capítulo

2

Extensões da Distribuição de Lindley de um parâmetro

Este capítulo apresenta os três modelos de composição descritos nas seções anteriores assumindo que a distribuição dos tempos de falha, $F(t \mid \theta)$, é uma distribuição de Lindley de um parâmetro e portanto, tem-se as extensões da distribuição de Lindley obtidas pelo processo de composição. Para tanto uma breve caracterização da distribuição de Lindley é necessária e, posteriormente as extensões são apresentadas.

2.1 Distribuição de Lindley de um parâmetro

Considerando $T_1, ..., T_M$ variáveis aleatórias independentes e indenticamente distribuídas com distribuição de Lindley de um parâmetro θ, a função densidade de probabilidade e a função de distribuição são dadas, respectivamente, por:

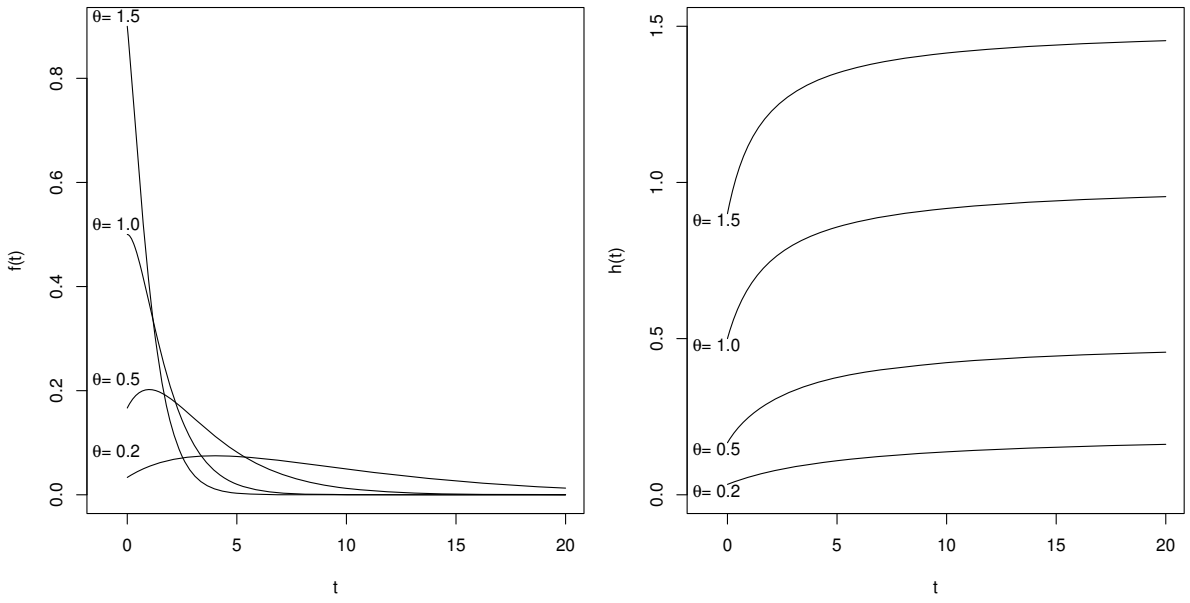
$$f(t \mid \theta) = \frac{\theta^2}{(1+\theta)}(1+t)e^{-\theta t} \tag{2.1.1}$$

e

$$F(t \mid \theta) = 1 - \left(1 + \frac{\theta t}{1+\theta}\right) e^{-\theta t} \tag{2.1.2}$$

em que, $t \geq 0$ e $\theta > 0$.

A primeira derivada da função (2.1.1) é dada por $\frac{d}{dt} f(t \mid \theta) = \frac{\theta^2}{(1+\theta)}(1-\theta-\theta t)e^{-\theta t}$. Portanto, se $\theta < 1$ então $\frac{d}{dt} f(t \mid \theta) = 0$ para $t_0 = \frac{1-\theta}{\theta}$, o que implica que t_0 é o único ponto crítico e que $f(t \mid \theta)$



(a) (b)

Figura 2.1: Função densidade de probabilidade e a função de risco da distribuição de Lindley para diferentes valores de θ, respectivamente.

é maximizada. Mas, se $\theta \geq 1$, $\frac{d}{dt} f(t \mid \theta) \leq 0$. Portanto, para uma variável aleatória T com distribuição de Lindley de um parâmetro, a função densidade de probabilidade em (2.1.1) é unimodal para $0 < \theta < 1$ e decrescente para $\theta \geq 1$, como mostra a Figura 2.1-a.

A função de risco é uma função crescente em t e θ, como mostra a Figura 2.1-b e é expressa por:

$$h\left(t \mid \theta\right) = \frac{\theta^2 \left(1 + t\right)}{\left(1 + \theta + \theta t\right)}. \tag{2.1.3}$$

2.2 Distribuição Lindley Extendida Marshall-Olkin

Considerando que $S(y \mid \theta)$ é a função de sobrevivência de uma variável aleatória com distribuição de Lindley de um parâmetro tem-se que a função de sobrevivência, dada em (1.1.19), denominada função de sobrevivência da distribuição Lindley Extendida Marshall-Olkin (MOEL) ou distribuição Lindley-Geométrica por Zakerzadeh e Mahmoudi (2012), pode ser escrita na forma:

$$S_{MOEL}\left(y \mid \theta, \alpha\right) = \frac{\alpha \left(1 + \frac{\theta y}{1+\theta}\right) e^{-\theta y}}{1 - \bar{\alpha} \left(1 + \frac{\theta y}{1+\theta}\right) e^{-\theta y}}, \tag{2.2.1}$$

com $\alpha, \theta > 0$, $y > 0$ e $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$.

A função densidade de probabilidade e a função de risco são dadas, respectivamente, por:

$$f_{MOEL}\left(y \mid \theta, \alpha\right) = \frac{\alpha\theta^2(1+y)e^{-\theta y}}{(1+\theta)\left[1-\bar{\alpha}\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right]^2}, \tag{2.2.2}$$

$$h_{MOEL}\left(y \mid \theta, \alpha\right) = \frac{\theta^2\left(1+y\right)}{(1+\theta+\theta y)\left[1-\bar{\alpha}\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right]}. \tag{2.2.3}$$

Note que as funções $f_{MOEL}\left(0 \mid \theta, \alpha\right) = h_{MOEL}\left(0 \mid \theta, \alpha\right) = \frac{\theta^2}{\alpha(1+\theta)}$, $f_{MOEL}\left(\infty \mid \theta, \alpha\right) = 0$ e $h_{MOEL}\left(\infty \mid \theta, \alpha\right) = \theta$. Para valores de α próximo de 1, a curva assemelha-se ao comportamento da distribuição de Lindley de um parâmetro, enquanto que para $\alpha \longrightarrow \infty$, a curva tende a ser simétrica, ver Figura 2.2.

Teorema 2.2.1. *A função densidade de probabilidade (2.2.2) é decrescente para valores de* $\alpha \leq \frac{2\theta^2}{\theta^2+1}$ *e unimodal para valores de* $\alpha > \frac{2\theta^2}{\theta^2+1}$.

Demonstração: Seja a primeira derivada da função $\log f_{MOEL}\left(y \mid \theta, \alpha\right)$ dada por:

$$\frac{d\log f_{MOEL}\left(y \mid \theta, \alpha\right)}{dy} = \frac{e^{\theta y}\left(1+\theta\right)\left(1-\theta-y\theta\right) - \bar{\alpha}\left(1+\left(1+y\right)^2\theta^2\right)}{\left(1+y\right)\left[e^{\theta y}\left(1+\theta\right) - \bar{\alpha}\left(1+\theta+\theta y\right)\right]}. \tag{2.2.4}$$

É fácil observar que o denominador de (2.2.4) é sempre positivo para todos os valores de y, θ e α. Logo, para estudar o comportamento da $f_{MOEL}\left(y \mid \theta, \alpha\right)$ basta estudar o comportamento do numerador.

Considere as funções $f_1\left(y\right) = e^{\theta y}\left(1+\theta\right)\left(1-\theta-y\theta\right)$ e $f_2\left(y\right) = \bar{\alpha}\left(1+\left(1+y\right)^2\theta^2\right)$. Note que o máximo da função $f_1\left(y\right)$ é dado em $y = 0$, ou seja, $f_1\left(y\right) < f_1\left(0\right)$ para todo $y > 0$. Se se $0 < \alpha \leq 1$, o menor valor que a função $f_2\left(y\right)$ assume é no ponto $y = 0$, ou seja, $f_2\left(y\right) \geq f_2\left(0\right)$ para todo $y > 0$. Se $\alpha > 1$, o maior valor que $f_2\left(y\right)$ assume é no ponto $y = 0$, logo, $f_2\left(y\right) < f_2\left(0\right)$ para todo $y > 0$.

Seja $f_1\left(0\right) = 1-\theta^2$ e $f_2\left(0\right) = \bar{\alpha}\left(1+\theta^2\right)$. Portanto, $f_1\left(y\right)$ é uma função decrescente em y para todos os valores de θ e α. $f_2\left(y\right)$ é uma função crescente em y para todo $0 < \alpha \leq 1$ e $\theta > 0$ e, decrescente para todo valor de $\alpha > 1$ e $\theta > 0$.

Para todos os valores de θ e α tal que $f_1\left(0\right) \leq f_2\left(0\right) \Longrightarrow \alpha \leq \frac{2\theta^2}{\theta^2+1}$ tem-se que $f_1\left(y\right) - f_2\left(y\right) < 0$ e então $\frac{d\log f_{MOEL}(y|\theta,\alpha)}{dy} < 0$ e portanto, $f_{MOEL}\left(y \mid \theta, \alpha\right)$ tem um comportamento decrescente.

Agora, se $f_1\left(0\right) > f_2\left(0\right)$, ou seja, se $\alpha > \frac{2\theta^2}{\theta^2+1}$ tem-se dois casos: para um y tal que $y < y^*$, $f_1\left(y\right) - f_2\left(y\right) > 0$, logo $\frac{d\log f_{MOEL}(y|\theta,\alpha)}{dy} > 0$ e então $f_{MOEL}\left(y \mid \theta, \alpha\right)$ é crescente até y^*; porém, para

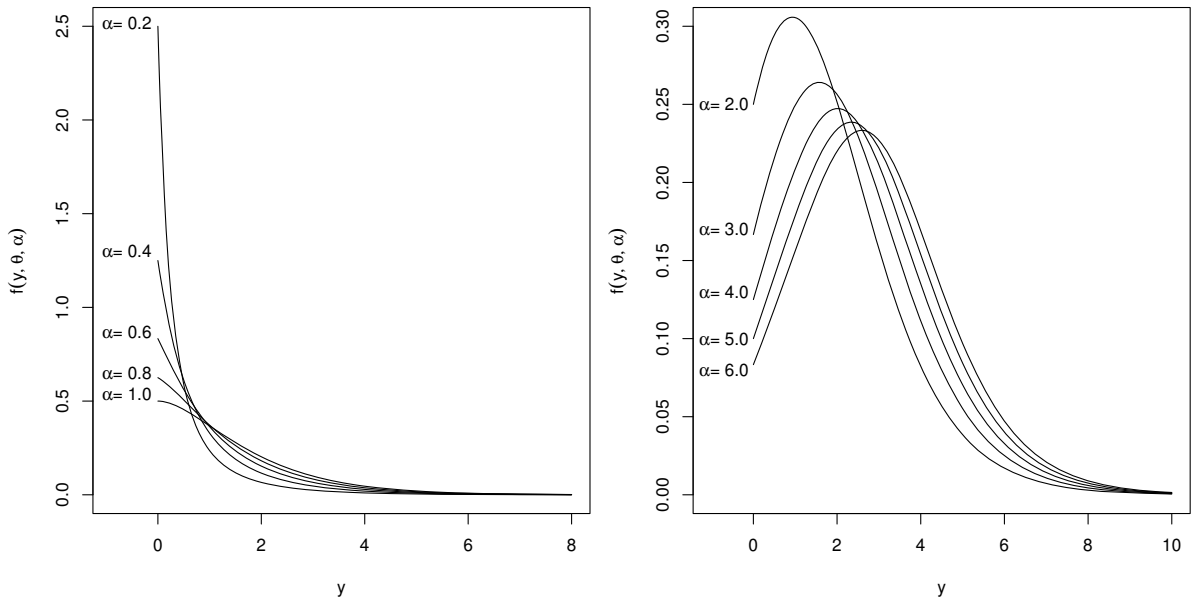


Figura 2.2: Comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição MOEL para diferentes valores de α e $\theta = 1$.

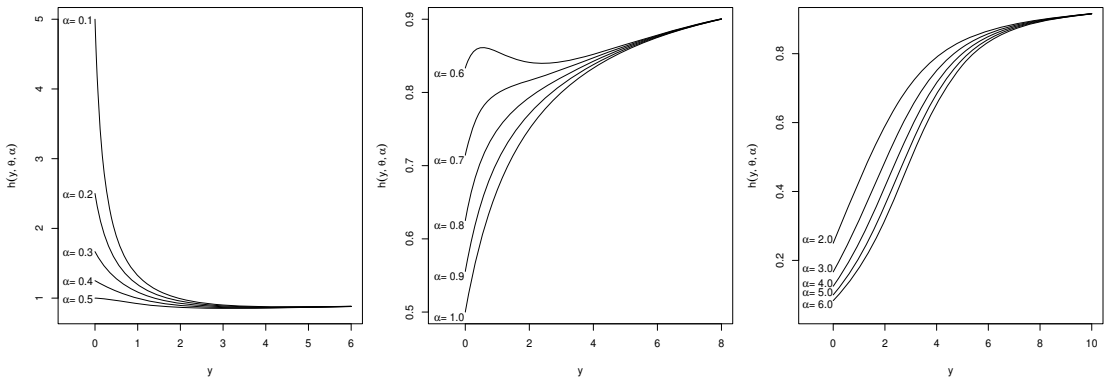


Figura 2.3: Comportamento da função de risco da distribuição MOEL para diferentes valores de α e $\theta = 1$.

um $y \geq y^*$ tem-se $f_1(y) - f_2(y) \leq 0$ e então, $\frac{d \log f_{MOEL}(y|\theta,\alpha)}{dy} \leq 0$, logo a função $f_{MOEL}(y \mid \theta, \alpha)$ é decrescente depois de y^*.

■

A função de risco (2.2.3) é crescente, decrescente-crescente e crescente-decrescente-crescente como mostra a Figura 2.3. Para prova desses resultados, ver Ghitany et al. (2012). Vale ressaltar que a distribuição MOEL possui três formas para a função de risco enquanto que a função de risco da distribuição de Lindley de um parâmetro possui somente forma crescente. O fato da distribuição MOEL possuir somente dois parâmetros mas três formas para a função de risco pode ser uma vantagem na prática.

2.2.1 Função Quantil

Obter variáveis aleatórias de uma distribuição de probabilidade pode não ser simples. Um método muito utilizado baseia-se no teorema fundamental da transformação de probabilidades, que diz que se U é uma variável aleatória uniforme $U(0,1)$ e T uma variável aleatória com função de distribuição F invertível, então $T = F^{-1}(U)$ possui densidade f, sendo F^{-1} a função inversa da função de distribuição F.

Esse método, conhecido por método da transformação inversa, é utilizado quando a função quantil da variável aleatória T pode ser expressa de forma fechada. Para T uma variável aleatória arbitrária com função de distribuição acumulada $F_T(t) = P(T \leq t)$, $t \in \mathbb{R}$, a função quantil é definida por $Q_T(u) = \inf\{t \in \mathbb{R} : F_T(t) \geq u\}$, $0 < u < 1$.

Ghitany, Atieh e Nadarajah (2008) mostraram que o método da transformação inversa não pode ser utilizado para gerar variáveis com distribuição de Lindley de um parâmetro pois sua função quantil não possui forma fechada. Porém, recentemente Jodrá (2010) mostrou que a função quantil da distribuição de Lindley de um parâmetro pode ser escrita de forma fechada em termos da função Lambert W.

A função Lambert W é uma função complexa de vários valores definidos como solução da equação:

$$W(z)\, e^{W(z)} = z \tag{2.2.5}$$

em que z é um número complexo (JODRÁ, 2010).

Se z é um número real desde que $z \geq -\frac{1}{e}$ então, $W(z)$ torna-se uma função real e existem dois ramos reais possíveis. O ramo real com valores em $(-\infty, -1]$ é chamado de ramo negativo e é denotado por W_{-1}. O ramo real com valores em $[-1, \infty)$ é chamado ramo principal e é denotado por W_0. Além disso, a equação (2.2.5) tem duas soluções se $z \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right]$ e uma única solução se $z \geq 0$ (JODRÁ, 2010).

Portanto, a função Lambert W pode ser vista como uma função inversa $f(W(z)) = W(z)\, e^{W(z)}$, em que, f é decrescente para $W(z) < -1$ e crescente para $W(z) > -1$.

Para a distribuição MOEL, tem-se que:

$$-(1+\theta+\theta y)\, e^{-(1+\theta+\theta y)} = \frac{(u-1)(\theta+1)e^{-\theta-1}}{(1-\bar{\alpha}u)}.$$

Portanto, a função quantil da distribuição MOEL é definida:

$$F^{-1}(u) = -1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} W_{-1}\left(\frac{(\theta+1)}{e^{\theta+1}} \frac{(u-1)}{(1-\bar{\alpha}u)}\right) \text{ para } 0 < u < 1,$$

em que, $W_{-1}(\cdot)$ denota o ramo negativo da função Lambert W pois $(1+\theta+\theta y) > 1$ e $\frac{(u-1)(\theta+1)e^{-\theta-1}}{(1-\bar{\alpha}u)} \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$.

2.2.2 Momentos da distribuição MOEL

Seja $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$, com $k \geq 1$, o k-ésimo momento amostral e $\mu_k = E\left(X^k\right)$, com $k \geq 1$, o k-ésimo momento populacional. O método dos momentos consiste em estimar os parâmetros $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r)'$, $r = 1, ..., k$, resolvendo as equações $m_k = \mu_k$ (ROHATGI; SALEH, 2000). Muitas vezes os momentos podem não ser obtidos, então recomenda-se utilizar a função geratriz de momentos, responsável por gerar todos os momentos.

Por definição, "seja X uma variável aleatória definida no espaço paramétrico, a função $M_X(t) = E(e^{tX})$ é conhecida por função geratriz de momentos de X se essa esperança existe em alguma vizinhança da origem (ROHATGI; SALEH, 2000). No caso de X ser uma variável aleatória contínua, a função geratriz de momentos é $M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$, $t \in \Re$. Além disso, "se a função geratriz de momentos $M_X(t)$ de uma variável aleatória X existe para algum t no intervalo $(-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$, as derivadas de todas as ordens existem para $t = 0$ e podem ser calculadas sob o sinal de integração, isto é, $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$ para k um inteiro positivo (ROHATGI; SALEH, 2000).

Inicialmente, considere a função e^x escrita em uma série de Maclaurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Então, e^{tx} pode ser escrita como $e^{tx} = 1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + ... + \frac{(tx)^n}{n!} + ...$

Por outro lado, tem-se que $M_X(t) = E(e^{tX})$ então, a função geratriz de momentos pode ser reescrita da seguinte forma:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + ... + \frac{(tX)^n}{n!} + ...\right).$$

Da propriedade: “o valor esperado da soma é igual a soma dos valores esperados” tem-se:

$$M_X(t) = 1 + tE\left(X\right) + \frac{t^2E\left(X^2\right)}{2!} + ... + \frac{t^nE\left(X^n\right)}{n!} + ... \tag{2.2.6}$$

A derivada primeira da função geratriz de momentos, (2.2.6), calculada para $t = 0$ é $M'(0) = E\left(X\right)$, do mesmo modo que a derivada segunda em $t = 0$ é $M''(0) = E\left(X^2\right)$ e assim por diante. Portanto, pode-se escrever a função geratriz de momentos como uma aproximação da série de Maclaurin:

$$M_X(t) = M_X(0) + \frac{M'_X(0)}{1!}t + \frac{M''_X(0)}{2!}t^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kE(X^k)}{k!}.$$

Antes de apresentar os momentos da distribuição MOEL considere dois resultados importantes que foram utilizados para tal desenvolvimento.

i) a expansão da série:

$$(1-z)^{-w} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(w+j\right)}{\Gamma\left(w\right)j!}z^j, \tag{2.2.7}$$

em que, $|z| < 1$ e $w > 0$.cf. (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2007)

ii) a expansão da expressão binomial:

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}a^j = \\ &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + ... + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

para $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. cf. (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2007)

Demonstração: Considerando a expansão da série em (2.2.7), a função densidade de probabilidade da distribuição MOEL (2.2.2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$q(y) = \frac{\theta^2}{(\theta+1)}\alpha\left(1+y\right)e^{-\theta y} \times \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\left(1-\alpha\right)^j\left(1+\frac{\theta y}{\theta+1}\right)^j e^{-\theta yj}. \tag{2.2.9}$$

Usando (2.2.9) e aplicando a expressão binomial em $\left(1+\frac{\theta y}{\theta+1}\right)^j$ tem-se:

$$q(y)=\frac{\theta^2}{(\theta+1)}\alpha\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(j+1)\,(1-\alpha)^j\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^i(1+y)\,ye^{-(j+1)\theta y}. \tag{2.2.10}$$

Assim, o r-ésimo momento da distribuição MOEL é dado por:

$$\begin{aligned}E(Y^r) &= \frac{\theta^2\alpha}{(\theta+1)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(j+1)\,(1-\alpha)^j\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^i\times\\ &\quad\times\frac{\Gamma\,(r+i+1)}{[\theta(j+1)]^{r+i+1}}\left(1+\frac{r+i+1}{\theta(j+1)}\right).\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Portanto, a função geratriz de momentos da distribuição MOEL é:

$$\begin{aligned}M_Y(t) &= \frac{\theta^2\alpha}{(\theta+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}\frac{t^k}{k!}\binom{j}{i}(j+1)\,(1-\alpha)^j\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^i\times\\ &\quad\times\frac{\Gamma\,(k+i+1)}{[\theta(j+1)]^{k+i+1}}\left(1+\frac{k+i+1}{\theta(j+1)}\right),\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

com esperança dada por:

$$\begin{aligned}E(Y)_{MOEL} &= \frac{\theta^2\alpha}{(\theta+1)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}\frac{(j+1)!}{(j-i)!}(1-\alpha)^j\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^i\\ &\quad\times\frac{(i+1)}{[\theta(j+1)]^{i+2}}\left(1+\frac{i+2}{\theta(j+1)}\right).\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

■

2.2.3 Simulação

Nesta seção apresentam-se alguns resultados de experimentos numéricos para comparar a performace dos diferentes métodos de estimação discutidos anteriormente. Para fins, tomou-se amostras de tamanho $n = 20, 50, 100$ e 200, $\theta = 1$ e $\alpha = 0.5, 0.8, 1.5, 3.0$ e 5.0. Para cada combinação (n, θ, α) gerou-se $B = 500.000$ amostras pseudo-aleatórias da distribuição MOEL usando o algoritmo de Newton-Raphson para resolver a equação não linear $F(y \mid \theta, \alpha) - u = 0$, em que u é uma observação uniforme no intervalo $(0, 1)$.

As estimativas foram obtidas utilizando o programa Ox versão 6.20, uma linguagem de programação matricial orientada a objetos com uma extensa biblioteca de funções matemáticas e estatísticas,

ver Doornik (2007), usando a função *MaxBFGS* nos métodos MLE, OLS, WLS, MPS, AD e CM.

A escolha pelo uso do Ox fundamenta-se nas vantagens fornecidas pelo mesmo, tais como: velocidade, precisão, disponibilidade para diversas plataformas (sistemas operacionais), gratuito, boa seleção de rotinas matemáticas e estatísticas, rotinas de maximização e etc.

Com o objetivo de avaliar o desempenho dos seis métodos descritos, para cada estimativa calculou-se o vício (2.2.14), a raiz do erro quadrático médio (2.2.15), a diferença absoluta média entre as funções de distribuições verdadeira e estimada (2.2.16) e a diferença absoluta máxima entre as funções de distribuições verdadeira e estimada (2.2.17), respectivamente, como:

$$Bias\left(\hat{\theta}\right) = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\left(\hat{\theta}_i - \theta\right), \qquad Bias\left(\hat{\alpha}\right) = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\left(\hat{\alpha}_i - \alpha\right), \tag{2.2.14}$$

$$RMSE\left(\hat{\theta}\right) = \sqrt{\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\left(\hat{\theta}_i - \theta\right)^2}, \quad RMSE\left(\hat{\alpha}\right) = \sqrt{\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\left(\hat{\alpha}_i - \alpha\right)^2}, \tag{2.2.15}$$

$$D_{abs} = \frac{1}{B \times n}\sum_{i=1}^{B}\sum_{j=1}^{n}\left|F\left(y_{ij} \mid \theta, \alpha\right) - F\left(y_{ij} \mid \hat{\theta}, \hat{\alpha}\right)\right|, \tag{2.2.16}$$

$$D_{\max} = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\max_{j}\left|F\left(y_{ij} \mid \theta, \alpha\right) - F\left(y_{ij} \mid \hat{\theta}, \hat{\alpha}\right)\right|. \tag{2.2.17}$$

A seguir descreve-se o esquema utilizado para os estudos numéricos. Seja $S = 50$, $E = 1.0e-4$, $\theta = 1$, $\mathbf{n} = (20, 50, 100, 200)$, $\alpha = (0.5, 0.8, 1.5, 3.0, 5.0)$, $\mathbf{M} = (MLE, MPS, OLS, WLS, CM, AD)$ e $B = 500.000$.

Para $i = 1, ..., comp\left(\alpha\right)$
{
  $\alpha = \alpha\left[i\right]$
  Para $j = 1, ...comp(\mathbf{n})$
  {
    $n = \mathbf{n}\left[j\right]$
    dado $k = 1$
    enquanto $k \leq B$
    {
      simule $(y_1, ..., y_n)$

Para $l = 1, ...comp\,(\mathbf{M})$

{

estime θ e α por $\mathbf{M}\,[l]$

Se $S \leq 50$ ou $E \leq 1.0e-4$ então calcule (2.2.14)–(2.2.17)

output

}

$k = k + 1$

}

}

}

Nas Tabelas 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 calculam-se as medidas de (2.2.14)–(2.2.17). Os valores superescritos indicam o rank obtido por cada um dos métodos considerados. E a linha *total* mostra o rank global de cada método baseado nas medidas (2.2.14)–(2.2.17). Como exemplo, na Tabela 2.1, para $n = 20$, o método MPS possui o valor superescrito igual a 1 e esse valor significa que a soma dos ranks das medidas (2.2.14)–(2.2.17) foi a menor entre todos os métodos.

Tabela 2.1: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\alpha = 0.5$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.2568^{5}	-0.0802^{3}	0.0264^{1}	0.0543^{2}	0.2784^{6}	0.1038^{4}
	$RMSE(\theta)$	0.6385^{2}	0.5440^{1}	0.7550^{5}	0.7306^{4}	0.8798^{6}	0.6431^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.5174^{5}	0.1072^{1}	0.3501^{2}	0.3726^{4}	0.7217^{6}	0.3586^{3}
20	$RMSE(\alpha)$	1.3186^{3}	0.8030^{1}	1.4139^{4}	1.5403^{5}	1.9480^{6}	1.1921^{2}
	D_{abs}	0.0563^{3}	0.0551^{1}	0.0573^{5}	0.0567^{4}	0.0586^{6}	0.0561^{2}
	D_{max}	0.0935^{3}	0.0879^{1}	0.0951^{5}	0.0937^{4}	0.1009^{6}	0.0922^{2}
	$Total$	21^{3}	8^{1}	22^{4}	23^{5}	36^{6}	16^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0964^{6}	-0.0871^{4}	-0.0148^{1}	0.0155^{2}	0.0930^{5}	0.0275^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.3490^{2}	0.3379^{1}	0.4704^{5}	0.4182^{4}	0.4946^{6}	0.3875^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.1654^{5}	-0.0133^{1}	0.1022^{2}	0.1134^{4}	0.2151^{6}	0.1118^{3}
50	$RMSE(\alpha)$	0.4650^{2}	0.3546^{1}	0.5673^{5}	0.5265^{4}	0.6670^{6}	0.4760^{3}
	D_{abs}	0.0353^{2}	0.0350^{1}	0.0368^{5}	0.0360^{4}	0.0371^{6}	0.0357^{3}
	D_{max}	0.0580^{2}	0.0566^{1}	0.0618^{5}	0.0598^{4}	0.0634^{6}	0.0590^{3}
	$Total$	19^{3}	9^{1}	23^{5}	22^{4}	35^{6}	18^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0468^{5}	-0.0693^{6}	-0.0150^{3}	0.0107^{1}	0.0410^{4}	0.0121^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.2347^{1}	0.2421^{2}	0.3332^{5}	0.2810^{4}	0.3383^{6}	0.2693^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.0768^{5}	-0.0302^{1}	0.0427^{2}	0.0544^{4}	0.0960^{6}	0.0518^{3}
100	$RMSE(\alpha)$	0.2713^{2}	0.2349^{1}	0.3469^{5}	0.3101^{4}	0.3776^{6}	0.2928^{3}
	D_{abs}	0.0249^{1}	0.0249^{2}	0.0263^{5}	0.0255^{4}	0.0263^{6}	0.0253^{3}
	D_{max}	0.0407^{2}	0.0405^{1}	0.0443^{5}	0.0423^{4}	0.0448^{6}	0.0419^{3}
	$Total$	16^{2}	13^{1}	25^{5}	21^{4}	34^{6}	17^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0231^{5}	-0.0442^{6}	-0.0084^{2}	0.0084^{3}	0.0196^{4}	0.0060^{1}
	$RMSE(\theta)$	0.1614^{1}	0.1676^{2}	0.2334^{5}	0.1920^{4}	0.2346^{6}	0.1879^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.0372^{5}	-0.0243^{2}	0.0199^{1}	0.0287^{4}	0.0457^{6}	0.0252^{3}
200	$RMSE(\alpha)$	0.1739^{2}	0.1620^{1}	0.2303^{5}	0.2002^{4}	0.2404^{6}	0.1936^{3}
	D_{abs}	0.0176^{1}	0.0176^{2}	0.0186^{5}	0.0180^{4}	0.0187^{6}	0.0179^{3}
	D_{max}	0.0286^{1}	0.0287^{2}	0.0315^{5}	0.0298^{4}	0.0316^{6}	0.0296^{3}
	$Total$	15^{1}	15^{1}	23^{4}	23^{4}	34^{6}	16^{3}

Tabela 2.2: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\alpha = 0.8$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.1888^{5}	-0.0916^{4}	-0.0144^{2}	0.0137^{1}	0.1906^{6}	0.0655^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.5133^{2}	0.4526^{1}	0.6024^{5}	0.5770^{4}	0.6785^{6}	0.5207^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.7257^{5}	0.1283^{1}	0.4359^{2}	0.4754^{3}	0.9372^{6}	0.4954^{4}
20	$RMSE(\alpha)$	1.9591^{4}	1.1850^{1}	1.8712^{3}	2.0616^{5}	2.5606^{6}	1.7316^{2}
	D_{abs}	0.0568^{2}	0.0559^{1}	0.0580^{5}	0.0573^{4}	0.0590^{6}	0.0568^{3}
	D_{max}	0.0950^{3}	0.0900^{1}	0.0968^{5}	0.0954^{4}	0.1018^{6}	0.0941^{2}
	$Total$	21^{3}	9^{1}	22^{5}	21^{3}	36^{6}	17^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0710^{5}	-0.0821^{6}	-0.0215^{3}	0.0069^{1}	0.0651^{4}	0.0196^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.2874^{2}	0.2871^{1}	0.3747^{5}	0.3332^{4}	0.3878^{6}	0.3139^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.2288^{5}	-0.0279^{1}	0.1271^{2}	0.1502^{3}	0.2819^{6}	0.1566^{4}
50	$RMSE(\alpha)$	0.6746^{2}	0.5188^{1}	0.7697^{5}	0.7230^{4}	0.9021^{6}	0.6766^{3}
	D_{abs}	0.0357^{2}	0.0356^{1}	0.0373^{5}	0.0364^{4}	0.0375^{6}	0.0362^{3}
	D_{max}	0.0592^{2}	0.0583^{1}	0.0630^{5}	0.0609^{4}	0.0642^{6}	0.0602^{3}
	$Total$	18^{2}	11^{1}	25^{5}	20^{4}	34^{6}	18^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0350^{5}	-0.0564^{6}	-0.0122^{3}	0.0074^{1}	0.0310^{4}	0.0097^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1953^{1}	0.2016^{2}	0.2608^{5}	0.2248^{4}	0.2642^{6}	0.2176^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.1071^{5}	-0.0391^{1}	0.0572^{2}	0.0748^{4}	0.1284^{6}	0.0741^{3}
100	$RMSE(\alpha)$	0.3964^{2}	0.3442^{1}	0.4743^{5}	0.4335^{4}	0.5150^{6}	0.4169^{3}
	D_{abs}	0.0252^{1}	0.0253^{2}	0.0265^{5}	0.0257^{4}	0.0265^{6}	0.0256^{3}
	D_{max}	0.0416^{2}	0.0416^{1}	0.0449^{5}	0.0430^{4}	0.0452^{6}	0.0426^{3}
	$Total$	16^{2}	13^{1}	25^{5}	21^{4}	34^{6}	17^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0173^{5}	-0.0345^{6}	-0.0062^{3}	0.0056^{2}	0.0151^{4}	0.0047^{1}
	$RMSE(\theta)$	0.1352^{1}	0.1392^{2}	0.1814^{5}	0.1545^{4}	0.1825^{6}	0.1520^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.0520^{5}	-0.0301^{2}	0.0273^{1}	0.0389^{4}	0.0613^{6}	0.0360^{3}
200	$RMSE(\alpha)$	0.2551^{2}	0.2372^{1}	0.3143^{5}	0.2817^{4}	0.3279^{6}	0.2754^{3}
	D_{abs}	0.0177^{1}	0.0178^{2}	0.0187^{5}	0.0181^{4}	0.0187^{6}	0.0181^{3}
	D_{max}	0.0293^{1}	0.0294^{2}	0.0318^{5}	0.0302^{4}	0.0319^{6}	0.0301^{3}
	$Total$	15^{1}	15^{1}	24^{5}	22^{4}	34^{6}	16^{3}

Tabela 2.3: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\alpha = 1.5$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.1329^{6}	-0.0966^{4}	-0.0362^{2}	-0.0067^{1}	0.1239^{5}	0.0407^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.4009^{2}	0.3674^{1}	0.4609^{5}	0.4398^{4}	0.5007^{6}	0.4059^{3}
	$Bias(\alpha)$	1.2371^{5}	0.1714^{1}	0.6473^{2}	0.7603^{3}	1.4537^{6}	0.8431^{4}
20	$RMSE(\alpha)$	3.4898^{5}	1.9987^{1}	2.9325^{2}	3.4810^{4}	3.9899^{6}	3.0004^{3}
	D_{abs}	0.0573^{2}	0.0568^{1}	0.0588^{5}	0.0580^{4}	0.0593^{6}	0.0575^{3}
	D_{max}	0.0965^{3}	0.0926^{1}	0.0986^{5}	0.0971^{4}	0.1024^{6}	0.0961^{2}
	$Total$	23^{5}	9^{1}	21^{4}	20^{3}	35^{6}	18^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0504^{5}	-0.0686^{6}	-0.0186^{3}	0.0035^{1}	0.0463^{4}	0.0144^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.2303^{1}	0.2335^{2}	0.2831^{5}	0.2555^{4}	0.2911^{6}	0.2451^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.3863^{5}	-0.0421^{1}	0.2077^{2}	0.2520^{3}	0.4577^{6}	0.2723^{4}
50	$RMSE(\alpha)$	1.1813^{3}	0.9059^{1}	1.2732^{5}	1.2118^{4}	1.4940^{6}	1.1641^{2}
	D_{abs}	0.0361^{1}	0.0363^{2}	0.0377^{5}	0.0367^{4}	0.0377^{6}	0.0365^{3}
	D_{max}	0.0605^{2}	0.0601^{1}	0.0638^{5}	0.0619^{4}	0.0647^{6}	0.0613^{3}
	$Total$	17^{2}	13^{1}	25^{5}	20^{4}	34^{6}	17^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0247^{5}	-0.0434^{6}	-0.0095^{3}	0.0046^{1}	0.0224^{4}	0.0069^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1576^{1}	0.1616^{2}	0.1956^{5}	0.1741^{4}	0.1982^{6}	0.1701^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.1795^{5}	-0.0537^{1}	0.0948^{2}	0.1253^{3}	0.2074^{6}	0.1274^{4}
100	$RMSE(\alpha)$	0.6927^{2}	0.5995^{1}	0.7768^{5}	0.7282^{4}	0.8434^{6}	0.7100^{3}
	D_{abs}	0.0255^{1}	0.0256^{2}	0.0266^{5}	0.0259^{4}	0.0267^{6}	0.0258^{3}
	D_{max}	0.0426^{1}	0.0426^{2}	0.0452^{5}	0.0436^{4}	0.0456^{6}	0.0434^{3}
	$Total$	15^{2}	14^{1}	25^{5}	20^{4}	34^{6}	18^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0121^{5}	-0.0263^{6}	-0.0048^{3}	0.0034^{2}	0.0109^{4}	0.0034^{1}
	$RMSE(\theta)$	0.1096^{1}	0.1122^{2}	0.1366^{5}	0.1206^{4}	0.1375^{6}	0.1192^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.0865^{5}	-0.0430^{1}	0.0453^{2}	0.0641^{4}	0.0989^{6}	0.0617^{3}
200	$RMSE(\alpha)$	0.4455^{2}	0.4126^{1}	0.5136^{5}	0.4744^{4}	0.5357^{6}	0.4672^{3}
	D_{abs}	0.0180^{1}	0.0181^{2}	0.0188^{5}	0.0183^{4}	0.0188^{6}	0.0182^{3}
	D_{max}	0.0300^{1}	0.0301^{2}	0.0320^{5}	0.0307^{4}	0.0321^{6}	0.0306^{3}
	$Total$	15^{2}	14^{1}	25^{5}	22^{4}	34^{6}	16^{3}

Tabela 2.4: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\alpha = 3.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0978^{6}	-0.0928^{5}	-0.0385^{3}	-0.0111^{1}	0.0848^{4}	0.0286^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.3242^{3}	0.3067^{1}	0.3564^{5}	0.3440^{4}	0.3763^{6}	0.3236^{2}
	$Bias(\alpha)$	2.4791^{5}	0.3098^{1}	1.1323^{2}	1.4817^{3}	2.5623^{6}	1.6698^{4}
20	$RMSE(\alpha)$	7.3190^{6}	4.0607^{1}	5.1862^{2}	6.8683^{4}	6.9413^{5}	5.8643^{3}
	D_{abs}	0.0578^{1}	0.0580^{2}	0.0595^{5}	0.0587^{4}	0.0595^{6}	0.0581^{3}
	D_{max}	0.0980^{3}	0.0951^{1}	0.0995^{5}	0.0984^{4}	0.1023^{6}	0.0974^{2}
	$Total$	24^{5}	11^{1}	22^{4}	20^{3}	33^{6}	16^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0370^{5}	-0.0559^{6}	-0.0148^{3}	0.0018^{1}	0.0351^{4}	0.0108^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1887^{1}	0.1909^{2}	0.2196^{5}	0.2022^{4}	0.2259^{6}	0.1963^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.7454^{5}	-0.0553^{1}	0.4061^{2}	0.4891^{3}	0.8704^{6}	0.5379^{4}
50	$RMSE(\alpha)$	2.3550^{4}	1.7769^{1}	2.4298^{5}	2.3343^{3}	2.8668^{6}	2.2813^{2}
	D_{abs}	0.0363^{1}	0.0367^{2}	0.0377^{5}	0.0369^{4}	0.0378^{6}	0.0367^{3}
	D_{max}	0.0614^{2}	0.0611^{1}	0.0640^{5}	0.0623^{4}	0.0648^{6}	0.0619^{3}
	$Total$	18^{3}	13^{1}	25^{5}	19^{4}	34^{6}	17^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0183^{5}	-0.0341^{6}	-0.0074^{3}	0.0032^{1}	0.0172^{4}	0.0054^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1298^{1}	0.1323^{2}	0.1522^{5}	0.1389^{4}	0.1544^{6}	0.1365^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.3449^{5}	-0.0799^{1}	0.1861^{2}	0.2429^{3}	0.3925^{6}	0.2517^{4}
100	$RMSE(\alpha)$	1.3613^{2}	1.1675^{1}	1.4593^{5}	1.3910^{4}	1.5897^{6}	1.3692^{3}
	D_{abs}	0.0257^{1}	0.0259^{2}	0.0267^{5}	0.0260^{4}	0.0267^{6}	0.0259^{3}
	D_{max}	0.0432^{1}	0.0433^{2}	0.0454^{5}	0.0440^{4}	0.0456^{6}	0.0438^{3}
	$Total$	15^{2}	14^{1}	25^{5}	20^{4}	34^{6}	18^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0093^{5}	-0.0200^{6}	-0.0035^{3}	0.0027^{1}	0.0087^{4}	0.0029^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.0905^{1}	0.0921^{2}	0.1068^{5}	0.0968^{4}	0.1075^{6}	0.0959^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.1675^{5}	-0.0659^{1}	0.0908^{2}	0.1252^{4}	0.1885^{6}	0.1235^{3}
200	$RMSE(\alpha)$	0.8724^{2}	0.8033^{1}	0.9604^{5}	0.9060^{4}	1.0034^{6}	0.8966^{3}
	D_{abs}	0.0182^{1}	0.0182^{2}	0.0189^{5}	0.0184^{4}	0.0189^{6}	0.0184^{3}
	D_{max}	0.0305^{1}	0.0306^{2}	0.0321^{5}	0.0311^{4}	0.0322^{6}	0.0310^{3}
	$Total$	15^{2}	14^{1}	25^{5}	21^{4}	34^{6}	17^{3}

Tabela 2.5: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\alpha = 5.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0840^{6}	-0.0826^{5}	-0.0382^{3}	-0.0092^{1}	0.0646^{4}	0.0244^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.2862^{3}	0.2700^{1}	0.3013^{5}	0.2974^{4}	0.3126^{6}	0.2811^{2}
	$Bias(\alpha)$	4.4562^{6}	0.6396^{1}	1.6651^{2}	2.6590^{3}	3.8004^{5}	2.8700^{4}
20	$RMSE(\alpha)$	13.4363^{6}	7.4136^{1}	7.6407^{2}	11.9698^{5}	10.0108^{4}	9.7100^{3}
	D_{abs}	0.0582^{1}	0.0586^{3}	0.0595^{6}	0.0590^{4}	0.0591^{5}	0.0583^{2}
	D_{max}	0.0987^{3}	0.0960^{1}	0.0993^{5}	0.0988^{4}	0.1012^{6}	0.0978^{2}
	$Total$	25^{5}	12^{1}	23^{4}	21^{3}	30^{6}	15^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0316^{5}	-0.0488^{6}	-0.0120^{3}	0.0017^{1}	0.0310^{4}	0.0097^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1676^{1}	0.1685^{2}	0.1894^{5}	0.1763^{4}	0.1953^{6}	0.1720^{3}
	$Bias(\alpha)$	1.2940^{5}	-0.0454^{1}	0.7333^{2}	0.8626^{3}	1.5143^{6}	0.9525^{4}
50	$RMSE(\alpha)$	4.0846^{4}	3.0191^{1}	4.1388^{5}	3.9926^{3}	4.9254^{6}	3.9157^{2}
	D_{abs}	0.0367^{1}	0.0370^{3}	0.0379^{5}	0.0371^{4}	0.0379^{6}	0.0369^{2}
	D_{max}	0.0620^{2}	0.0618^{1}	0.0642^{5}	0.0627^{4}	0.0650^{6}	0.0624^{3}
	$Total$	18^{3}	14^{1}	25^{5}	19^{4}	34^{6}	16^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0156^{5}	-0.0295^{6}	-0.0061^{3}	0.0027^{1}	0.0151^{4}	0.0048^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1155^{1}	0.1170^{2}	0.1317^{5}	0.1216^{4}	0.1338^{6}	0.1199^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.5920^{5}	-0.1052^{1}	0.3319^{2}	0.4215^{3}	0.6741^{6}	0.4402^{4}
100	$RMSE(\alpha)$	2.3165^{3}	1.9649^{1}	2.4381^{5}	2.3316^{4}	2.6687^{6}	2.3055^{2}
	D_{abs}	0.0259^{1}	0.0261^{2}	0.0268^{6}	0.0262^{4}	0.0268^{5}	0.0261^{3}
	D_{max}	0.0437^{1}	0.0437^{2}	0.0455^{5}	0.0443^{4}	0.0458^{6}	0.0441^{3}
	$Total$	16^{2}	14^{1}	26^{5}	20^{4}	33^{6}	17^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0078^{5}	-0.0173^{6}	-0.0029^{3}	0.0022^{1}	0.0076^{4}	0.0025^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.0806^{1}	0.0817^{2}	0.0924^{5}	0.0848^{4}	0.0931^{6}	0.0841^{3}
	$Bias(\alpha)$	0.2854^{5}	-0.0936^{1}	0.1604^{2}	0.2133^{3}	0.3213^{6}	0.2141^{4}
200	$RMSE(\alpha)$	1.4725^{2}	1.3465^{1}	1.5872^{5}	1.5070^{4}	1.6621^{6}	1.4955^{3}
	D_{abs}	0.0183^{1}	0.0184^{2}	0.0189^{6}	0.0185^{4}	0.0189^{5}	0.0184^{3}
	D_{max}	0.0308^{1}	0.0309^{2}	0.0322^{5}	0.0313^{4}	0.0323^{6}	0.0312^{3}
	$Total$	15^{2}	14^{1}	26^{5}	20^{4}	33^{6}	18^{3}

Pelas simulações pode-se observar que para os diferentes α, o método MPS apresentou o menor rank global. No entanto, a medida que o tamanho da amostra aumenta o método MLE apresenta o segundo menor rank e algumas vezes o menor igualando-se ao MPS. Portanto, o método MPS pode ser considerado como o melhor método para estimar os parâmetros da distribuição MOEL, para amostras grandes o método MLE também é bom.

Uma observação importante é que para $\alpha > 1$ e $n = 20$, o MLE apresentou o segundo maior rank, melhor somente que o CM, desde que o método CM apresentou o maior rank em todos os casos.

Em geral, o método MPS apresentou a menor raiz do erro quadrático médio. Para o parâmetro α, a estimativa da raiz do erro quadrático médio pelo método MPS foi a menor para todos os α e n. No caso do parâmetro θ, essa estimativa pelo método MPS foi menor somente para $n = 20, 50$ e $\alpha = 0.5, 0.8$, nos outros casos o método MLE obteve o melhor resultado. Por fim, todos os métodos foram eficientes pois apresentaram vícios pequenos.

2.3 Distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero

Suponha que os tempos até a falha T_j, $j = 1, \ldots, M$, possuam distribuição de Lindley de um parâmetro como definida em (2.1.2). A distribuição proposta utilizando a ideia de riscos competitivos e riscos complementares é denominada distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero com funções densidade de probabilidade dadas por:

$$f_{LP\min}(y \mid \theta, \lambda) = \frac{\lambda\theta^2(1+y)e^{-\left[\theta y+\lambda\left(1-\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right)\right]}}{(1+\theta)(1-e^{-\lambda})}, \tag{2.3.1}$$

$$f_{LP\max}(y \mid \theta, \lambda) = \frac{\lambda\theta^2(1+y)e^{-\left[\theta y+\lambda\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right]}}{(1+\theta)(1-e^{-\lambda})}. \tag{2.3.2}$$

Note que, $f_{LP\min}(0 \mid \theta, \lambda) = \frac{\lambda\theta^2}{(1+\theta)\left(1-e^{-\lambda}\right)}$ e $f_{LP\max}(0 \mid \theta, \lambda) = \frac{\lambda\theta^2 e^{-\lambda}}{(1+\theta)\left(1-e^{-\lambda}\right)}$. Por outro lado, $f_{LP\min}(\infty \mid \theta, \lambda) = f_{LP\max}(\infty \mid \theta, \lambda) = 0$. A função densidade de probabilidade da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero é unimodal e decrescente para ambos os casos, $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ e $Y = \max(T_1, ..., T_M)$, (ver Figura 2.4 e 2.5). Para valores de λ próximo de 1, a curva assemelha-se ao comportamento da distribuição de Lindley de um parâmetro. Se $Y = \min(T_1, ..., T_M)$, a curva tende a ser simétrica para $\lambda \longrightarrow 0$ e se $Y = \max(T_1, ..., T_M)$ a curva tende a ser simétrica quando $\lambda \longrightarrow \infty$.

As funções de distribuição e as funções de sobrevivência considerando as estruturas latentes de

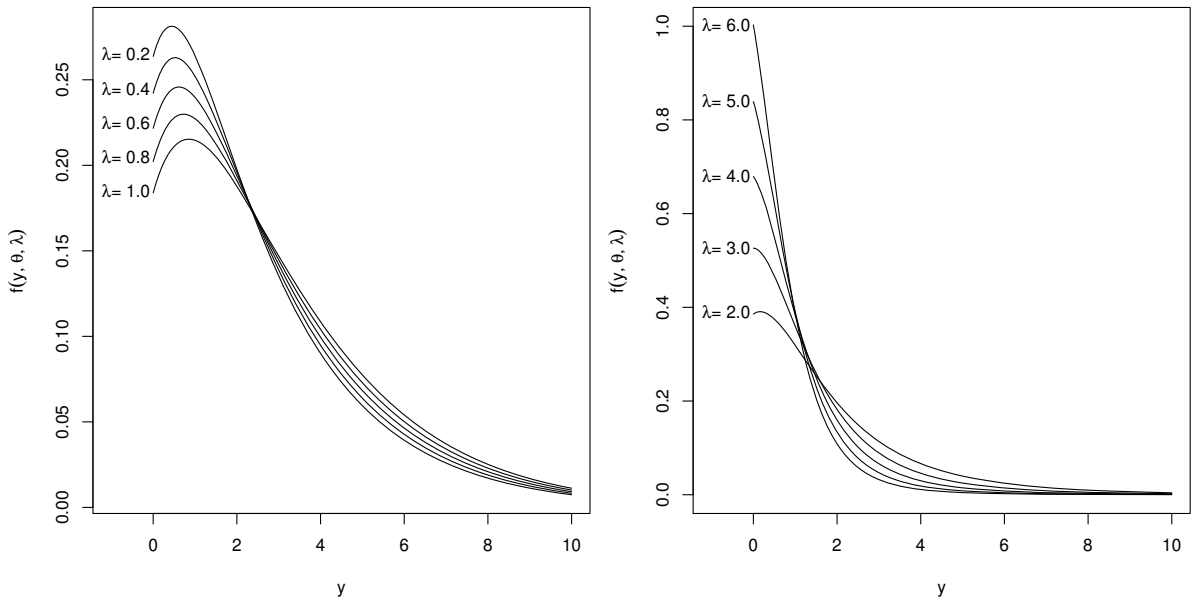


Figura 2.4: Comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero para diferentes valores de λ e $\theta = 0.5$ se $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$.

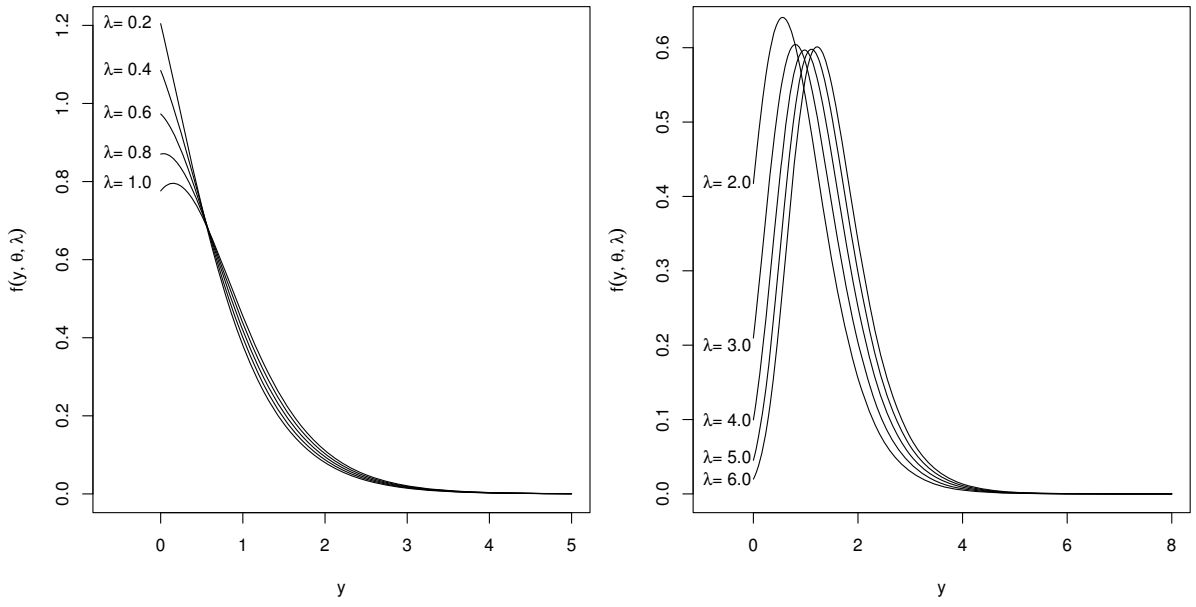


Figura 2.5: Comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero para diferentes valores de λ e $\theta = 2.0$ se $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$.

mínimo e máximo são dadas, respectivamente, por:

$$F_{LP\min}(y \mid \theta,\lambda) = \frac{1-e^{-\lambda\left[1-\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right]}}{1-e^{-\lambda}}, \tag{2.3.3}$$

$$F_{LP\max}(y \mid \theta,\lambda) = \frac{e^{-\lambda\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}}-e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}, \tag{2.3.4}$$

$$S_{LP\min}(y \mid \theta,\lambda) = \frac{e^{-\lambda\left[1-\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right]}-e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}, \tag{2.3.5}$$

$$S_{LP\max}(y \mid \theta,\lambda) = \frac{1-e^{-\lambda\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}}}{1-e^{-\lambda}}. \tag{2.3.6}$$

Consequentemente, as funções de risco para ambas as estruturas latentes são:

$$h_{LP\min}(y \mid \theta,\lambda) = \frac{\lambda\theta^2(1+y)e^{-\left[\theta y+\lambda\left(1-\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right)\right]}}{(\theta+1)\left[e^{-\lambda\left[1-\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right]}-e^{-\lambda}\right]}, \tag{2.3.7}$$

$$h_{LP\max}(y \mid \theta,\lambda) = \frac{\lambda\theta^2(1+y)e^{-\left[\theta y+\lambda\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right]}}{(\theta+1)\left[1-e^{-\lambda\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}}\right]}. \tag{2.3.8}$$

A função de risco $h_{LP\min}(0 \mid \theta,\lambda) = \frac{\lambda\theta^2}{(\theta+1)\left(1-e^{-\lambda}\right)}$ e $h_{LP\max}(0 \mid \theta,\lambda) = \frac{\lambda\theta^2 e^{-\lambda}}{(\theta+1)\left(1-e^{-\lambda}\right)}$. Para $y \longrightarrow \infty$, $h_{LP\min}(\infty \mid \theta,\lambda) = h_{LP\max}(\infty \mid \theta,\lambda) = \theta$. Chechile (2003) e Glaser (1980) apresentaram um estudo de que o comportamento da função de risco pode ser estudado baseando-se em uma função $\eta(y)$ e suas derivadas, em que $\eta(y) = \frac{-f'(y)}{f(y)}$. Devido a complexidade, nesse trabalho somente são apresentadas as funções $\eta(y)$ para ambas as estruturas, mínimo e máximo, são elas:

$$\eta(y)_{LP\min} = \frac{e^{-\theta y}\left[\theta^2\lambda(y+1)^2+(\theta+1)e^{\theta y}(\theta+\theta y-1)\right]}{(\theta+1)(y+1)}, \tag{2.3.9}$$

$$\eta(y)_{LP\max} = -\frac{e^{-\theta y}\left[\theta^2\lambda(y+1)^2-(\theta+1)e^{\theta y}(\theta+\theta y-1)\right]}{(\theta+1)(y+1)}. \tag{2.3.10}$$

As respectivas derivadas são:

$$\eta'(y)_{LP\min} = \frac{e^{-\theta y}\left[(\theta+1)e^{\theta y} - \theta^2\lambda(y+1)^2(\theta+\theta y-1)\right]}{(\theta+1)(y+1)^2},$$

$$\eta'(y)_{LP\max} = -\frac{e^{-\theta y}\left[(\theta+1)e^{\theta y} + \theta^2\lambda(y+1)^2(\theta+\theta y-1)\right]}{(\theta+1)(y+1)^2}.$$

Portanto, as formas da função de risco da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero no cenário de riscos competitivos e de riscos complementares seguem dos resultados de Chechile (2003) e Glaser (1980).

Graficamente, conclui-se que a função de risco (2.3.8) é sempre crescente para diferentes valores de λ, porém, a função de risco (2.3.7) possui comportamentos crescente, decrescente (ver Figura 2.6).

Em ambos os casos, $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ e $Y = \max(T_1, ..., T_M)$, quando $\lambda \longrightarrow 0$ o comportamento da função de risco da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero tende a ser crescente como na distribuição de Lindley de um parâmetro. A medida que λ aumenta a função de risco (2.3.7) torna-se decrescente. Observe que para $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ a função de risco apresenta uma forma crescente-decrescente-crescente quando $\lambda = 1$. Para melhor visualização desse resultado ver Figura 2.7.

2.3.1 Função Quantil

Assim como a distribuição MOEL, a distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero possui inversa em termos da função Lambert W.

Para a distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero tem-se:

$$-(1+\theta+\theta y)e^{-(1+\theta+\theta y)} = -\frac{(\theta+1)\ln\left(u+e^{\lambda}-ue^{\lambda}\right)e^{-\theta-1}}{\lambda},$$

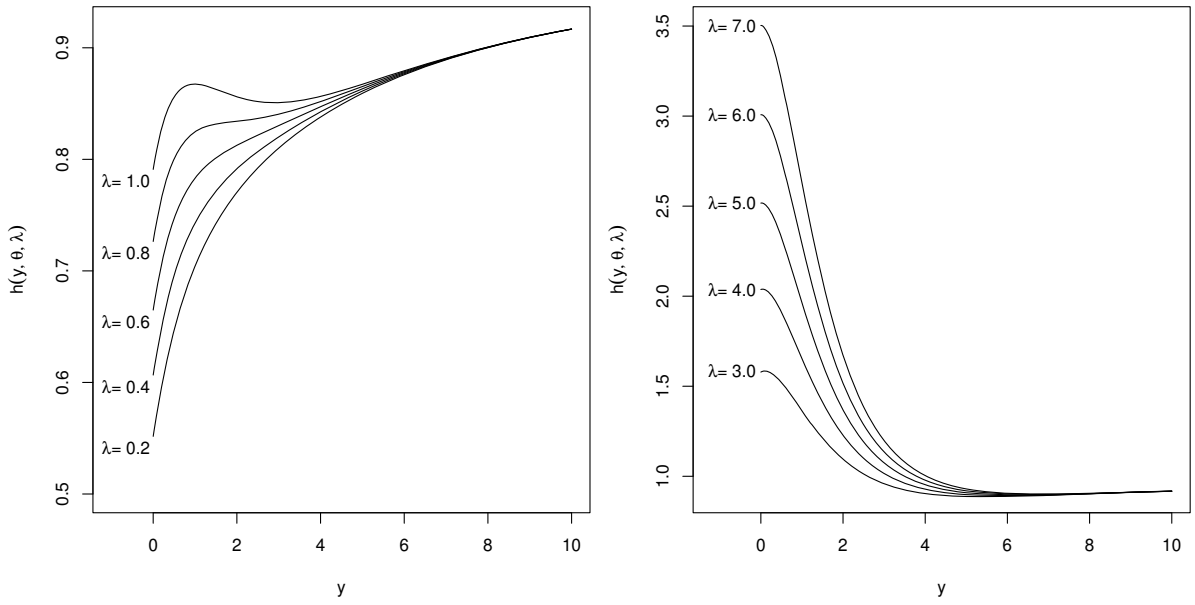
se $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ e,

$$-(1+\theta+\theta y)e^{-(1+\theta+\theta y)} = \frac{(\theta+1)\left[\ln\left(1+ue^{\lambda}-u\right)-\lambda\right]e^{-\theta-1}}{\lambda},$$

se $Y = \max(T_1, ..., T_M)$.

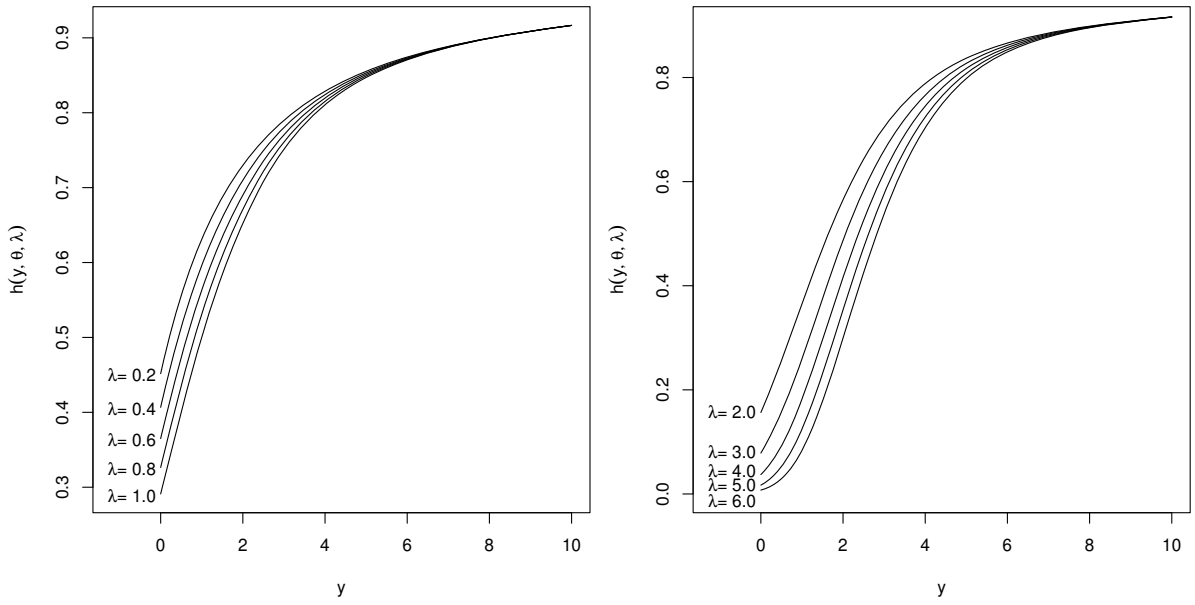
Portanto, a função quantil da distribuição Lindley-Poisson Truncada no zero é definida:

$$F^{-1}(u) = -1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta}W_{-1}\left(-\frac{(\theta+1)}{e^{\theta+1}}\frac{\ln\left(u+e^{\lambda}-ue^{\lambda}\right)}{\lambda}\right) \text{ para } 0 < u < 1,$$



(a) $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$

(b) $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$



(c) $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$

(d) $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$

Figura 2.6: Comportamento da função de risco da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero para diferentes valores de λ e $\theta = 1$.

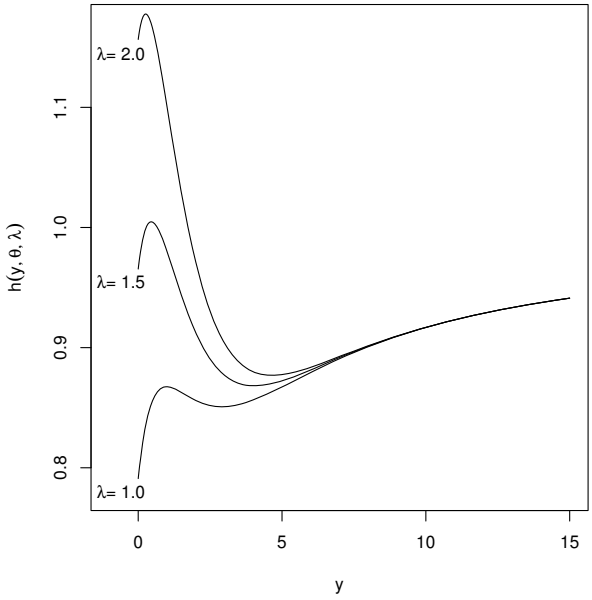


Figura 2.7: Comportamento da função de risco da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero para diferentes valores de λ, $\theta = 1$ e $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$.

se $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ e,

$$F^{-1}(u) = -1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} W_{-1}\left(\frac{(\theta+1)}{e^{\theta+1}} \frac{\left[\ln\left(1 + ue^{\lambda} - u\right) - \lambda\right]}{\lambda}\right) \text{ para } 0 < u < 1,$$

se $Y = \max(T_1, ..., T_M)$.

A função $W_{-1}(\cdot)$ denota o ramo negativo da função Lambert W pois $(1 + \theta + \theta y) > 1$ e também $-\frac{(\theta+1)}{e^{\theta+1}} \frac{\ln\left(u+e^{\lambda}-ue^{\lambda}\right)}{\lambda} \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ e $\frac{(\theta+1)}{e^{\theta+1}} \frac{\left[\ln\left(1+ue^{\lambda}-u\right)-\lambda\right]}{\lambda} \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$.

Para a distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero considerando as estruturas latentes de ativação mínimo e máximo não foi possível obter o método dos momentos de forma explícita.

2.3.2 Simulação

Nesta seção apresentam-se alguns resultados de experimentos numéricos para comparar a performace dos diferentes métodos de estimação discutidos anteriormente. Para fins, tomou-se amostras de tamanho $n = 20, 50, 100$ e 200, $\theta = 1$ e $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ e 5.0. Para cada combinação (n, θ, λ) gerou-se $B = 500.000$ amostras pseudo-aleatórias da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero usando o algoritmo de Newton-Raphson para resolver a equação não linear $F(y \mid \theta, \lambda) - u = 0$, em que u é uma observação uniforme $(0, 1)$.

As estimativas foram obtidas no Ox versão 6.20, ver Doornik (2007), usando a função *MaxBFGS*

nos métodos MLE, OLS, WLS, MPS, AD e CM. Para cada estimativa calculou-se o vício (2.2.14), a raiz do erro quadrático médio (2.2.15), a diferença absoluta média entre as funções de distribuições verdadeira e estimada (2.2.16) e a diferença absoluta máxima entre as funções de distribuições verdadeira e estimada (2.2.17).

As tabelas 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 e 2.10 apresentam as estimativas dos parâmetros da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero no cenário de riscos competitivos.

Pelas simulações, o método MLE mostrou-se ser o mais eficiente para estimar os parâmetros da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero para $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ quando $\lambda = 0.5$ e $\lambda = 1.0$. Para $\lambda = 2.0, 3.0$ e 5.0, o método OLS, em geral, mostrou-se ser melhor.

Vale lembrar que o método CM foi o pior método para estimar os parâmetros da distribuição Lindley Extendida Marshall-Olkin e aqui ele foi o melhor método em vários casos. Enquanto que o método MPS apresentou os piores resultados.

As tabelas 2.11, 2.12, 2.13, 2.14 e 2.15 apresentam as estimativas dos parâmetros da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero no cenário de riscos complementares.

Tabela 2.6: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 0.5$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.1270^{1}	-0.2704^{6}	-0.2096^{4}	-0.2230^{5}	-0.1692^{2}	-0.1978^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.2791^{2}	0.3549^{6}	0.2842^{3}	0.3019^{5}	0.2688^{1}	0.2975^{4}
	$Bias(\lambda)$	1.0086^{1}	1.6417^{6}	1.2324^{3}	1.3480^{5}	1.1070^{2}	1.3152^{4}
20	$RMSE(\lambda)$	1.6054^{3}	2.0924^{6}	1.4874^{2}	1.6620^{4}	1.4262^{1}	1.7573^{5}
	D_{abs}	0.0472^{2}	0.0469^{1}	0.0501^{6}	0.0489^{4}	0.0497^{5}	0.0483^{3}
	D_{max}	0.0739^{2}	0.0710^{1}	0.0776^{5}	0.0760^{4}	0.0786^{6}	0.0757^{3}
	$Total$	11^{1}	26^{5}	23^{4}	27^{6}	17^{2}	22^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.1199^{1}	-0.2432^{6}	-0.1771^{5}	-0.1771^{4}	-0.1497^{2}	-0.1567^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.2453^{2}	0.3336^{6}	0.2475^{3}	0.2580^{5}	0.2337^{1}	0.2487^{4}
	$Bias(\lambda)$	0.8475^{1}	1.5288^{6}	0.9810^{4}	1.0301^{5}	0.8742^{2}	0.9570^{3}
50	$RMSE(\lambda)$	1.5436^{5}	2.1627^{6}	1.3102^{2}	1.4556^{4}	1.2433^{1}	1.4354^{3}
	D_{abs}	0.0309^{2}	0.0306^{1}	0.0323^{6}	0.0316^{4}	0.0322^{5}	0.0315^{3}
	D_{max}	0.0483^{2}	0.0474^{1}	0.0508^{5}	0.0498^{4}	0.0510^{6}	0.0496^{3}
	$Total$	13^{1}	26^{5}	25^{4}	26^{5}	17^{2}	19^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0897^{1}	-0.1926^{6}	-0.1412^{5}	-0.1263^{4}	-0.1208^{3}	-0.1149^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.2063^{3}	0.2941^{6}	0.2163^{5}	0.2129^{4}	0.2046^{1}	0.2053^{2}
	$Bias(\lambda)$	0.6062^{1}	1.2199^{6}	0.7576^{5}	0.7138^{4}	0.6722^{3}	0.6668^{2}
100	$RMSE(\lambda)$	1.3038^{5}	1.9712^{6}	1.1311^{2}	1.1714^{4}	1.0695^{1}	1.1418^{3}
	D_{abs}	0.0223^{2}	0.0223^{1}	0.0233^{6}	0.0227^{4}	0.0232^{5}	0.0227^{3}
	D_{max}	0.0351^{1}	0.0352^{2}	0.0372^{6}	0.0362^{4}	0.0371^{5}	0.0362^{3}
	$Total$	13^{1}	27^{5}	29^{6}	24^{4}	18^{3}	15^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0532^{1}	-0.1255^{6}	-0.0989^{5}	-0.0770^{3}	-0.0849^{4}	-0.0718^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1569^{1}	0.2290^{6}	0.1786^{5}	0.1617^{3}	0.1701^{4}	0.1580^{2}
	$Bias(\lambda)$	0.3469^{1}	0.7737^{6}	0.5174^{5}	0.4219^{3}	0.4576^{4}	0.4002^{2}
200	$RMSE(\lambda)$	0.9570^{5}	1.5332^{6}	0.9079^{4}	0.8508^{2}	0.8606^{3}	0.8323^{1}
	D_{abs}	0.0161^{1}	0.0162^{2}	0.0168^{6}	0.0164^{3}	0.0167^{5}	0.0164^{4}
	D_{max}	0.0257^{1}	0.0261^{2}	0.0273^{6}	0.0265^{4}	0.0272^{5}	0.0264^{3}
	$Total$	10^{1}	28^{5}	31^{6}	18^{3}	25^{4}	14^{2}

Tabela 2.7: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 1.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0539^{1}	-0.2078^{6}	-0.1314^{4}	-0.1538^{5}	-0.0880^{2}	-0.1300^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.2864^{5}	0.3274^{6}	0.2549^{1}	0.2787^{3}	0.2551^{2}	0.2837^{4}
	$Bias(\lambda)$	0.6371^{1}	1.2563^{6}	0.8397^{3}	0.9961^{5}	0.7165^{2}	0.9710^{4}
20	$RMSE(\lambda)$	1.4101^{3}	1.7781^{6}	1.1841^{2}	1.4146^{4}	1.1625^{1}	1.5388^{5}
	D_{abs}	0.0471^{1}	0.0474^{2}	0.0503^{6}	0.0493^{4}	0.0498^{5}	0.0483^{3}
	D_{max}	0.0732^{2}	0.0712^{1}	0.0769^{5}	0.0755^{4}	0.0778^{6}	0.0749^{3}
	$Total$	13^{1}	27^{6}	21^{3}	25^{5}	18^{2}	22^{4}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0596^{1}	-0.1953^{6}	-0.1049^{4}	-0.1218^{5}	-0.0748^{2}	-0.0980^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.2496^{5}	0.3128^{6}	0.2208^{2}	0.2426^{4}	0.2180^{1}	0.2408^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.5523^{2}	1.2346^{6}	0.6322^{3}	0.7659^{5}	0.5252^{1}	0.6770^{4}
50	$RMSE(\lambda)$	1.4219^{5}	1.9128^{6}	1.0698^{2}	1.3248^{4}	1.0372^{1}	1.2955^{3}
	D_{abs}	0.0307^{2}	0.0307^{1}	0.0322^{6}	0.0316^{4}	0.0322^{5}	0.0314^{3}
	D_{max}	0.0478^{2}	0.0470^{1}	0.0497^{5}	0.0490^{4}	0.0501^{6}	0.0487^{3}
	$Total$	17^{2}	26^{5}	22^{4}	26^{5}	16^{1}	19^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0439^{1}	-0.1628^{6}	-0.0781^{4}	-0.0795^{5}	-0.0555^{2}	-0.0670^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.2223^{5}	0.2896^{6}	0.2031^{2}	0.2150^{4}	0.1998^{1}	0.2119^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.4063^{2}	1.0543^{6}	0.4728^{4}	0.5086^{5}	0.3852^{1}	0.4617^{3}
100	$RMSE(\lambda)$	1.2928^{5}	1.8326^{6}	0.9841^{2}	1.1213^{4}	0.9536^{1}	1.1111^{3}
	D_{abs}	0.0223^{2}	0.0222^{1}	0.0231^{6}	0.0227^{4}	0.0231^{5}	0.0226^{3}
	D_{max}	0.0351^{2}	0.0348^{1}	0.0362^{5}	0.0356^{4}	0.0364^{6}	0.0356^{3}
	$Total$	17^{2}	26^{5}	23^{4}	26^{5}	16^{1}	18^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0245^{1}	-0.1194^{6}	-0.0508^{5}	-0.0444^{4}	-0.0340^{2}	-0.0383^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.1894^{5}	0.2513^{6}	0.1848^{4}	0.1847^{3}	0.1823^{1}	0.1824^{2}
	$Bias(\lambda)$	0.2488^{1}	0.7783^{6}	0.3208^{5}	0.3012^{4}	0.2529^{2}	0.2770^{3}
200	$RMSE(\lambda)$	1.0876^{5}	1.5969^{6}	0.8812^{2}	0.9308^{4}	0.8560^{1}	0.9233^{3}
	D_{abs}	0.0162^{2}	0.0162^{1}	0.0167^{5}	0.0164^{4}	0.0167^{6}	0.0164^{3}
	D_{max}	0.0259^{2}	0.0258^{1}	0.0267^{5}	0.0262^{4}	0.0268^{6}	0.0262^{3}
	$Total$	16^{1}	26^{5}	26^{5}	23^{4}	18^{3}	17^{2}

Tabela 2.8: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 2.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.1166^{6}	-0.0761^{5}	0.0150^{2}	-0.0271^{3}	0.0546^{4}	-0.0085^{1}
	$RMSE(\theta)$	0.3954^{6}	0.3298^{4}	0.2784^{1}	0.3196^{3}	0.3157^{2}	0.3352^{5}
	$Bias(\lambda)$	-0.0191^{1}	0.6555^{6}	0.2555^{3}	0.5789^{4}	0.1911^{2}	0.5801^{5}
20	$RMSE(\lambda)$	1.4987^{3}	1.6339^{4}	1.0738^{1}	1.6389^{5}	1.2154^{2}	1.7052^{6}
	D_{abs}	0.0477^{1}	0.0487^{3}	0.0505^{6}	0.0505^{5}	0.0499^{4}	0.0486^{2}
	D_{max}	0.0746^{2}	0.0742^{1}	0.0776^{4}	0.0777^{5}	0.0782^{6}	0.0759^{3}
	$Total$	19^{2}	23^{5}	17^{1}	25^{6}	20^{3}	22^{4}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0734^{5}	-0.0902^{6}	0.0068^{2}	-0.0474^{4}	0.0346^{3}	0.0042^{1}
	$RMSE(\theta)$	0.3316^{6}	0.3046^{5}	0.2465^{1}	0.2781^{3}	0.2722^{2}	0.2920^{4}
	$Bias(\lambda)$	0.0558^{1}	0.7365^{6}	0.2347^{3}	0.6228^{5}	0.1677^{2}	0.3702^{4}
50	$RMSE(\lambda)$	1.5182^{3}	1.6644^{5}	1.1754^{1}	1.7368^{6}	1.2564^{2}	1.5471^{4}
	D_{abs}	0.0313^{1}	0.0315^{2}	0.0325^{6}	0.0320^{4}	0.0324^{5}	0.0316^{3}
	D_{max}	0.0493^{2}	0.0490^{1}	0.0501^{4}	0.0502^{5}	0.0506^{6}	0.0496^{3}
	$Total$	18^{2}	25^{5}	17^{1}	27^{6}	20^{4}	19^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0572^{5}	-0.0879^{6}	0.0010^{1}	-0.0335^{4}	0.0206^{2}	0.0237^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.2973^{6}	0.2882^{5}	0.2444^{1}	0.2781^{4}	0.2633^{2}	0.2745^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.0525^{1}	0.7127^{6}	0.2638^{4}	0.5225^{5}	0.2153^{3}	0.1933^{2}
100	$RMSE(\lambda)$	1.4109^{4}	1.6166^{5}	1.2692^{1}	1.6619^{6}	1.3338^{2}	1.3535^{3}
	D_{abs}	0.0227^{1}	0.0227^{2}	0.0232^{5}	0.0232^{4}	0.0233^{6}	0.0230^{3}
	D_{max}	0.0361^{2}	0.0360^{1}	0.0363^{3}	0.0368^{6}	0.0367^{5}	0.0365^{4}
	$Total$	19^{3}	25^{5}	15^{1}	29^{6}	20^{4}	18^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0393^{5}	-0.0813^{6}	-0.0012^{1}	-0.0084^{2}	0.0125^{3}	0.0314^{4}
	$RMSE(\theta)$	0.2584^{4}	0.2624^{5}	0.2393^{1}	0.2627^{6}	0.2538^{3}	0.2463^{2}
	$Bias(\lambda)$	0.0586^{1}	0.6369^{6}	0.2570^{4}	0.3263^{5}	0.2243^{3}	0.0798^{2}
200	$RMSE(\lambda)$	1.2536^{3}	1.4862^{6}	1.2508^{2}	1.4170^{5}	1.3038^{4}	1.1280^{1}
	D_{abs}	0.0164^{2}	0.0164^{1}	0.0167^{5}	0.0167^{3}	0.0168^{6}	0.0167^{4}
	D_{max}	0.0262^{1}	0.0263^{2}	0.0266^{3}	0.0269^{5}	0.0270^{6}	0.0267^{4}
	$Total$	16^{1}	26^{5}	16^{1}	26^{5}	25^{4}	17^{3}

Tabela 2.9: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 3.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.1037^{5}	-0.0823^{4}	0.0490^{3}	-0.0358^{2}	0.0226^{1}	-0.1151^{6}
	$RMSE(\theta)$	0.5168^{6}	0.3539^{5}	0.3152^{1}	0.3266^{2}	0.3389^{3}	0.3473^{4}
	$Bias(\lambda)$	0.7798^{4}	0.9108^{5}	0.0456^{1}	0.6362^{3}	0.3493^{2}	1.2883^{6}
20	$RMSE(\lambda)$	4.1180^{6}	2.9045^{5}	1.5550^{1}	2.2861^{3}	1.8862^{2}	2.7833^{4}
	D_{abs}	0.0490^{3}	0.0522^{6}	0.0496^{5}	0.0495^{4}	0.0483^{1}	0.0489^{2}
	D_{max}	0.0754^{5}	0.0777^{6}	0.0745^{2}	0.0750^{4}	0.0744^{1}	0.0749^{3}
	$Total$	29^{5}	31^{6}	13^{2}	18^{3}	10^{1}	25^{4}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0200^{1}	-0.1466^{4}	-0.0477^{2}	-0.1856^{6}	-0.0719^{3}	-0.1845^{5}
	$RMSE(\theta)$	0.4429^{6}	0.3381^{5}	0.2893^{1}	0.3337^{3}	0.3076^{2}	0.3346^{4}
	$Bias(\lambda)$	1.3368^{3}	1.3400^{4}	0.5880^{1}	1.6653^{5}	0.8170^{2}	1.6955^{6}
50	$RMSE(\lambda)$	4.1031^{6}	3.0049^{5}	1.9332^{1}	2.9905^{4}	2.1363^{2}	2.9661^{3}
	D_{abs}	0.0342^{4}	0.0356^{6}	0.0333^{2}	0.0345^{5}	0.0330^{1}	0.0334^{3}
	D_{max}	0.0535^{4}	0.0543^{6}	0.0509^{1}	0.0538^{5}	0.0513^{2}	0.0523^{3}
	$Total$	24^{3}	30^{6}	8^{1}	28^{5}	12^{2}	24^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0825^{1}	-0.1767^{4}	-0.1367^{2}	-0.2656^{6}	-0.1612^{3}	-0.2358^{5}
	$RMSE(\theta)$	0.4027^{6}	0.3275^{3}	0.3044^{1}	0.3553^{5}	0.3195^{2}	0.3409^{4}
	$Bias(\lambda)$	1.4136^{2}	1.4163^{3}	1.1963^{1}	2.2229^{6}	1.4221^{4}	1.9891^{5}
100	$RMSE(\lambda)$	3.5852^{6}	2.6768^{3}	2.3528^{1}	3.2513^{5}	2.5363^{2}	3.0507^{4}
	D_{abs}	0.0272^{4}	0.0278^{5}	0.0256^{2}	0.0280^{6}	0.0255^{1}	0.0266^{3}
	D_{max}	0.0431^{4}	0.0432^{5}	0.0402^{1}	0.0448^{6}	0.0406^{2}	0.0426^{3}
	$Total$	23^{3}	23^{3}	8^{1}	34^{6}	14^{2}	24^{5}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.1245^{1}	-0.1966^{2}	-0.2086^{3}	-0.3272^{6}	-0.2270^{4}	-0.2816^{5}
	$RMSE(\theta)$	0.3542^{5}	0.3097^{1}	0.3175^{2}	0.3745^{6}	0.3290^{3}	0.3482^{4}
	$Bias(\lambda)$	1.2625^{1}	1.3840^{2}	1.6517^{3}	2.6237^{6}	1.8255^{4}	2.2034^{5}
200	$RMSE(\lambda)$	2.7205^{4}	2.2294^{1}	2.5545^{2}	3.3455^{6}	2.6941^{3}	3.0007^{5}
	D_{abs}	0.0222^{3}	0.0226^{4}	0.0209^{1}	0.0245^{6}	0.0209^{2}	0.0233^{5}
	D_{max}	0.0353^{3}	0.0355^{4}	0.0336^{1}	0.0398^{6}	0.0340^{2}	0.0377^{5}
	$Total$	17^{3}	14^{2}	12^{1}	36^{6}	18^{4}	29^{5}

Tabela 2.10: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 5.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.1802^{6}	-0.1065^{4}	0.0306^{2}	-0.0661^{3}	-0.0110^{1}	-0.1363^{5}
	$RMSE(\theta)$	0.4768^{6}	0.3699^{1}	0.3837^{2}	0.3857^{3}	0.4002^{4}	0.4139^{5}
	$Bias(\lambda)$	3.0350^{6}	0.7518^{4}	-0.4789^{3}	0.3519^{2}	-0.0335^{1}	1.1322^{5}
20	$RMSE(\lambda)$	6.6507^{6}	3.8766^{5}	2.4045^{1}	2.9953^{3}	2.5465^{2}	3.3829^{4}
	D_{abs}	0.0745^{5}	0.0790^{6}	0.0702^{2}	0.0734^{4}	0.0668^{1}	0.0731^{3}
	D_{max}	0.1078^{5}	0.1108^{6}	0.1026^{2}	0.1076^{4}	0.1004^{1}	0.1059^{3}
	$Total$	34^{6}	26^{5}	12^{2}	19^{3}	10^{1}	25^{4}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.3301^{6}	-0.2589^{3}	-0.1945^{1}	-0.2817^{4}	-0.2243^{2}	-0.3043^{5}
	$RMSE(\theta)$	0.4431^{6}	0.3578^{2}	0.3511^{1}	0.3849^{4}	0.3644^{3}	0.3947^{5}
	$Bias(\lambda)$	4.1677^{6}	2.1397^{3}	1.1858^{1}	2.2519^{4}	1.5366^{2}	2.5026^{5}
50	$RMSE(\lambda)$	6.7931^{6}	4.4202^{5}	2.8121^{1}	3.7893^{4}	3.0180^{2}	3.7873^{3}
	D_{abs}	0.0684^{3}	0.0700^{6}	0.0663^{2}	0.0693^{5}	0.0650^{1}	0.0688^{4}
	D_{max}	0.0981^{3}	0.0983^{4}	0.0977^{2}	0.1025^{6}	0.0972^{1}	0.1000^{5}
	$Total$	30^{6}	23^{3}	8^{1}	27^{4}	11^{2}	27^{4}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.4012^{4}	-0.3371^{2}	-0.3355^{1}	-0.4015^{5}	-0.3488^{3}	-0.4153^{6}
	$RMSE(\theta)$	0.4506^{6}	0.3823^{1}	0.3852^{2}	0.4336^{4}	0.3939^{3}	0.4450^{5}
	$Bias(\lambda)$	4.8524^{6}	3.0086^{3}	2.5884^{1}	3.7347^{4}	2.7901^{2}	4.0287^{5}
100	$RMSE(\lambda$	6.9720^{6}	4.8351^{4}	3.4891^{1}	4.7115^{3}	3.6423^{2}	4.9055^{5}
	D_{abs}	0.0679^{3}	0.0682^{4}	0.0667^{2}	0.0710^{5}	0.0662^{1}	0.0719^{6}
	D_{max}	0.0974^{2}	0.0962^{1}	0.0990^{3}	0.1055^{6}	0.0990^{4}	0.1048^{5}
	$Total$	27^{4}	15^{2}	10^{1}	27^{4}	15^{2}	32^{6}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.4311^{3}	-0.3783^{1}	-0.4310^{2}	-0.4743^{6}	-0.4370^{4}	-0.4649^{5}
	$RMSE(\theta)$	0.4542^{4}	0.4000^{1}	0.4441^{2}	0.4848^{6}	0.4492^{3}	0.4747^{5}
	$Bias(\lambda)$	4.8749^{5}	3.3545^{1}	4.0376^{2}	5.0660^{6}	4.1746^{3}	4.8398^{4}
200	$RMSE(\lambda)$	6.4526^{6}	4.6285^{2}	4.5121^{1}	5.7215^{5}	4.6315^{3}	5.3358^{4}
	D_{abs}	0.0680^{4}	0.0675^{3}	0.0669^{2}	0.0727^{6}	0.0665^{1}	0.0707^{5}
	D_{max}	0.0974^{2}	0.0957^{1}	0.1005^{4}	0.1086^{6}	0.1003^{3}	0.1035^{5}
	$Total$	24^{4}	9^{1}	13^{2}	35^{6}	17^{3}	28^{5}

Tabela 2.11: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 0.5$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.2489^{5}	0.1232^{1}	0.2089^{4}	0.2013^{2}	0.2767^{6}	0.2025^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.3215^{2}	0.2776^{1}	0.3791^{5}	0.3644^{4}	0.4401^{6}	0.3470^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.8189^{2}	0.7608^{1}	1.0900^{5}	1.0606^{4}	1.3472^{6}	1.0469^{3}
20	$RMSE(\lambda)$	1.5344^{3}	1.2123^{1}	1.6737^{5}	1.6190^{4}	1.9892^{6}	1.5311^{2}
	D_{abs}	0.1510^{6}	0.0575^{1}	0.0604^{4}	0.0591^{3}	0.0611^{5}	0.0582^{2}
	D_{max}	0.2645^{6}	0.0894^{1}	0.0994^{4}	0.0970^{3}	0.1053^{5}	0.0958^{2}
	$Total$	24^{4}	6^{1}	27^{5}	20^{3}	34^{6}	15^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.2229^{6}	0.0599^{1}	0.1118^{4}	0.1068^{3}	0.1412^{5}	0.1068^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.2810^{6}	0.1673^{1}	0.2200^{4}	0.2093^{3}	0.2428^{5}	0.2036^{2}
	$Bias(\lambda)$	0.5127^{2}	0.3925^{1}	0.5745^{5}	0.5560^{4}	0.6786^{6}	0.5511^{3}
50	$RMSE(\lambda)$	1.3774^{6}	0.7404^{1}	0.9340^{4}	0.9037^{3}	1.0337^{5}	0.8914^{2}
	D_{abs}	0.1190^{6}	0.0352^{1}	0.0369^{4}	0.0361^{3}	0.0374^{5}	0.0358^{2}
	D_{max}	0.2046^{6}	0.0557^{1}	0.0610^{4}	0.0594^{3}	0.0634^{5}	0.0589^{2}
	$Total$	32^{6}	6^{1}	25^{4}	19^{3}	31^{5}	13^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.1806^{6}	0.0305^{1}	0.0667^{4}	0.0623^{3}	0.0827^{5}	0.0621^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.2226^{6}	0.1175^{1}	0.1514^{4}	0.1422^{3}	0.1624^{5}	0.1394^{2}
	$Bias(\lambda)$	0.1451^{1}	0.2106^{2}	0.3412^{5}	0.3244^{4}	0.3990^{6}	0.3207^{3}
100	$RMSE(\lambda)$	0.9812^{6}	0.5223^{1}	0.6462^{4}	0.6216^{3}	0.6946^{5}	0.6140^{2}
	D_{abs}	0.0798^{6}	0.0243^{1}	0.0257^{4}	0.0250^{3}	0.0259^{5}	0.0249^{2}
	D_{max}	0.1335^{6}	0.0390^{1}	0.0425^{4}	0.0412^{3}	0.0436^{5}	0.0409^{2}
	$Total$	31^{5}	7^{1}	25^{4}	19^{3}	31^{5}	13^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.1434^{6}	0.0115^{1}	0.0360^{4}	0.0328^{3}	0.0450^{5}	0.0324^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1642^{6}	0.0848^{1}	0.1064^{4}	0.0988^{3}	0.1115^{5}	0.0974^{2}
	$Bias(\lambda)$	-0.1500^{2}	0.0900^{1}	0.1836^{5}	0.1708^{4}	0.2172^{6}	0.1670^{3}
200	$RMSE(\lambda)$	0.5455^{6}	0.3820^{1}	0.4597^{4}	0.4397^{3}	0.4827^{5}	0.4351^{2}
	D_{abs}	0.0463^{6}	0.0170^{1}	0.0180^{4}	0.0175^{3}	0.0181^{5}	0.0174^{2}
	D_{max}	0.0757^{6}	0.0276^{1}	0.0298^{4}	0.0289^{3}	0.0303^{5}	0.0288^{2}
	$Total$	32^{6}	6^{1}	25^{4}	19^{3}	31^{5}	13^{2}

Tabela 2.12: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 1.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.3030^{6}	0.0523^{1}	0.1225^{3}	0.1195^{2}	0.1905^{5}	0.1284^{4}
	$RMSE(\theta)$	0.3587^{5}	0.2317^{1}	0.3077^{4}	0.2964^{3}	0.3603^{6}	0.2860^{2}
	$Bias(\lambda)$	0.3035^{1}	0.4394^{2}	0.7778^{5}	0.7559^{3}	1.0902^{6}	0.7692^{4}
20	$RMSE(\lambda)$	1.4500^{3}	1.1249^{1}	1.5984^{5}	1.5354^{4}	1.9588^{6}	1.4486^{2}
	D_{abs}	0.1419^{6}	0.0556^{1}	0.0585^{4}	0.0571^{3}	0.0596^{5}	0.0567^{2}
	D_{max}	0.2588^{6}	0.0863^{1}	0.0953^{4}	0.0931^{3}	0.1016^{5}	0.0927^{2}
	$Total$	27^{5}	7^{1}	25^{4}	18^{3}	33^{6}	16^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.2720^{6}	0.0059^{1}	0.0481^{2}	0.0484^{3}	0.0789^{5}	0.0520^{4}
	$RMSE(\theta)$	0.3156^{6}	0.1479^{1}	0.1820^{4}	0.1740^{3}	0.1990^{5}	0.1707^{2}
	$Bias(\lambda)$	-0.0562^{1}	0.1132^{2}	0.2975^{4}	0.2934^{3}	0.4289^{6}	0.3039^{5}
50	$RMSE(\lambda)$	1.3670^{6}	0.7181^{1}	0.8698^{4}	0.8449^{3}	0.9642^{5}	0.8401^{2}
	D_{abs}	0.1039^{6}	0.0344^{1}	0.0361^{4}	0.0353^{3}	0.0367^{5}	0.0352^{2}
	D_{max}	0.1900^{6}	0.0552^{1}	0.0597^{4}	0.0583^{3}	0.0620^{5}	0.0581^{2}
	$Total$	31^{5}	7^{1}	22^{4}	18^{3}	31^{5}	17^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.2281^{6}	-0.0107^{1}	0.0178^{2}	0.0195^{3}	0.0355^{5}	0.0209^{4}
	$RMSE(\theta)$	0.2544^{6}	0.1121^{1}	0.1312^{4}	0.1240^{3}	0.1376^{5}	0.1223^{2}
	$Bias(\lambda)$	-0.4776^{6}	-0.0162^{1}	0.1119^{2}	0.1161^{3}	0.1896^{5}	0.1200^{4}
100	$RMSE(\lambda)$	1.0505^{6}	0.5602^{1}	0.6337^{4}	0.6144^{3}	0.6690^{5}	0.6103^{2}
	D_{abs}	0.0623^{6}	0.0245^{1}	0.0256^{4}	0.0251^{3}	0.0259^{5}	0.0250^{2}
	D_{max}	0.1132^{6}	0.0401^{1}	0.0427^{4}	0.0417^{3}	0.0436^{5}	0.0416^{2}
	$Total$	36^{6}	6^{1}	20^{4}	18^{3}	30^{5}	16^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.1964^{6}	-0.0158^{5}	0.0019^{1}	0.0049^{2}	0.0123^{4}	0.0051^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.2061^{6}	0.0865^{1}	0.0983^{4}	0.0913^{3}	0.1000^{5}	0.0906^{2}
	$Bias(\lambda)$	-0.7545^{6}	-0.0663^{5}	0.0164^{1}	0.0281^{3}	0.0633^{4}	0.0278^{2}
200	$RMSE(\lambda)$	0.8698^{6}	0.4478^{1}	0.4863^{4}	0.4654^{3}	0.4956^{5}	0.4632^{2}
	D_{abs}	0.0340^{6}	0.0178^{1}	0.0184^{4}	0.0180^{3}	0.0185^{5}	0.0180^{2}
	D_{max}	0.0632^{6}	0.0294^{1}	0.0310^{4}	0.0301^{3}	0.0313^{5}	0.0301^{2}
	$Total$	36^{6}	14^{2}	18^{4}	17^{3}	28^{5}	13^{1}

Tabela 2.13: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 2.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.5561^{6}	-0.0306^{3}	0.0246^{1}	0.0305^{2}	0.0950^{5}	0.0450^{4}
	$RMSE(\theta)$	0.6078^{6}	0.2018^{1}	0.2452^{4}	0.2374^{3}	0.2801^{5}	0.2278^{2}
	$Bias(\lambda)$	2.6529^{6}	-0.0483^{1}	0.3488^{2}	0.3745^{3}	0.8225^{5}	0.4129^{4}
20	$RMSE(\lambda)$	5.7000^{6}	1.2598^{1}	1.8160^{4}	1.7827^{3}	2.2937^{5}	1.5761^{2}
	D_{abs}	0.2666^{6}	0.0553^{1}	0.0576^{4}	0.0562^{2}	0.0589^{5}	0.0562^{3}
	D_{max}	0.5405^{6}	0.0872^{1}	0.0940^{4}	0.0919^{2}	0.0998^{5}	0.0921^{3}
	$Total$	36^{6}	8^{1}	19^{4}	15^{2}	30^{5}	18^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.5441^{6}	-0.0400^{5}	-0.0070^{2}	0.0015^{1}	0.0261^{4}	0.0074^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.5956^{6}	0.1429^{1}	0.1583^{4}	0.1496^{3}	0.1642^{5}	0.1465^{2}
	$Bias(\lambda)$	2.4653^{6}	-0.1947^{4}	0.0087^{1}	0.0502^{2}	0.2088^{5}	0.0806^{3}
50	$RMSE(\lambda)$	5.5220^{6}	0.8887^{1}	0.9991^{4}	0.9519^{3}	1.0661^{5}	0.9413^{2}
	D_{abs}	0.2397^{6}	0.0360^{1}	0.0372^{4}	0.0363^{3}	0.0376^{5}	0.0363^{2}
	D_{max}	0.5110^{6}	0.0588^{1}	0.0619^{4}	0.0603^{3}	0.0633^{5}	0.0603^{2}
	$Total$	36^{6}	13^{1}	19^{4}	15^{3}	29^{5}	14^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.6681^{6}	-0.0297^{5}	-0.0087^{3}	-0.0012^{2}	0.0094^{4}	0.0007^{1}
	$RMSE(\theta)$	0.7091^{6}	0.1062^{2}	0.1157^{4}	0.1072^{3}	0.1164^{5}	0.1057^{1}
	$Bias(\lambda)$	5.7622^{6}	-0.1576^{5}	-0.0328^{3}	0.0077^{1}	0.0757^{4}	0.0181^{2}
100	$RMSE(\lambda)$	8.0531^{6}	0.6714^{1}	0.7238^{4}	0.6809^{3}	0.7354^{5}	0.6744^{2}
	D_{abs}	0.3302^{6}	0.0260^{1}	0.0268^{4}	0.0260^{3}	0.0268^{5}	0.0260^{2}
	D_{max}	0.7144^{6}	0.0429^{1}	0.0448^{4}	0.0434^{3}	0.0452^{5}	0.0433^{2}
	$Total$	36^{6}	15^{2}	22^{4}	15^{2}	28^{5}	10^{1}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.7871^{6}	-0.0176^{5}	-0.0051^{4}	-0.0002^{2}	0.0041^{3}	0.0000^{1}
	$RMSE(\theta)$	0.8030^{6}	0.0745^{1}	0.0819^{5}	0.0752^{3}	0.0818^{4}	0.0747^{2}
	$Bias(\lambda)$	9.1652^{6}	-0.0938^{5}	-0.0209^{3}	0.0063^{1}	0.0338^{4}	0.0070^{2}
200	$RMSE(\lambda)$	10.2663^{6}	0.4729^{1}	0.5093^{4}	0.4757^{3}	0.5115^{5}	0.4734^{2}
	D_{abs}	0.4214^{6}	0.0184^{1}	0.0190^{5}	0.0184^{3}	0.0190^{4}	0.0184^{2}
	D_{max}	0.9089^{6}	0.0305^{1}	0.0318^{4}	0.0307^{3}	0.0319^{5}	0.0307^{2}
	$Total$	36^{6}	14^{2}	25^{4}	15^{3}	25^{4}	11^{1}

Tabela 2.14: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 3.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.8247^{6}	-0.0589^{4}	-0.0104^{2}	0.0024^{1}	0.0624^{5}	0.0179^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.8338^{6}	0.1934^{1}	0.2261^{4}	0.2156^{3}	0.2494^{5}	0.2045^{2}
	$Bias(\lambda)$	9.2201^{6}	-0.3015^{3}	0.1933^{1}	0.2768^{2}	0.8875^{5}	0.3340^{4}
20	$RMSE(\lambda)$	11.0600^{6}	1.5584^{1}	2.3313^{3}	2.3513^{4}	3.0018^{5}	1.9532^{2}
	D_{abs}	0.4286^{6}	0.0572^{1}	0.0591^{4}	0.0577^{3}	0.0598^{5}	0.0574^{2}
	D_{max}	0.9199^{6}	0.0907^{1}	0.0965^{4}	0.0942^{3}	0.1010^{5}	0.0937^{2}
	$Total$	36^{6}	11^{1}	18^{4}	16^{3}	30^{5}	15^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.8720^{6}	-0.0426^{5}	-0.0125^{3}	-0.0027^{1}	0.0188^{4}	0.0030^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.8739^{6}	0.1292^{2}	0.1424^{4}	0.1323^{3}	0.1452^{5}	0.1284^{1}
	$Bias(\lambda)$	11.4698^{6}	-0.2674^{5}	-0.0195^{1}	0.0435^{2}	0.2370^{4}	0.0825^{3}
50	$RMSE(\lambda)$	12.4036^{6}	0.9986^{1}	1.1754^{4}	1.0898^{3}	1.2636^{5}	1.0599^{2}
	D_{abs}	0.4824^{6}	0.0368^{2}	0.0380^{4}	0.0368^{3}	0.0381^{5}	0.0367^{1}
	D_{max}	0.9852^{6}	0.0599^{1}	0.0630^{4}	0.0608^{3}	0.0638^{5}	0.0605^{2}
	$Total$	36^{6}	16^{3}	20^{4}	15^{2}	28^{5}	11^{1}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.8932^{6}	-0.0256^{5}	-0.0067^{3}	-0.0002^{1}	0.0089^{4}	0.0011^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.8934^{6}	0.0905^{2}	0.0990^{4}	0.0914^{3}	0.0997^{5}	0.0901^{1}
	$Bias(\lambda)$	14.3461^{6}	-0.1629^{5}	-0.0153^{1}	0.0270^{2}	0.1082^{4}	0.0371^{3}
100	$RMSE(\lambda)$	15.0065^{6}	0.7038^{1}	0.7908^{4}	0.7334^{3}	0.8150^{5}	0.7240^{2}
	D_{abs}	0.5000^{6}	0.0260^{2}	0.0269^{5}	0.0260^{3}	0.0269^{4}	0.0260^{1}
	D_{max}	0.9985^{6}	0.0426^{1}	0.0447^{4}	0.0431^{3}	0.0450^{5}	0.0429^{2}
	$Total$	36^{6}	16^{3}	21^{4}	15^{2}	27^{5}	11^{1}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.9042^{6}	-0.0140^{5}	-0.0032^{3}	0.0007^{2}	0.0045^{4}	0.0007^{1}
	$RMSE(\theta)$	0.9042^{6}	0.0627^{1}	0.0693^{4}	0.0638^{3}	0.0696^{5}	0.0634^{2}
	$Bias(\lambda)$	17.4592^{6}	-0.0880^{5}	-0.0073^{1}	0.0186^{2}	0.0532^{4}	0.0190^{3}
200	$RMSE(\lambda)$	17.9389^{6}	0.4913^{1}	0.5473^{4}	0.5074^{3}	0.5553^{5}	0.5040^{2}
	D_{abs}	0.5016^{6}	0.0183^{1}	0.0190^{5}	0.0184^{3}	0.0190^{4}	0.0184^{2}
	D_{max}	0.9997^{6}	0.0301^{1}	0.0317^{4}	0.0305^{3}	0.0318^{5}	0.0304^{2}
	$Total$	36^{6}	14^{2}	21^{4}	16^{3}	27^{5}	12^{1}

Tabela 2.15: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 5.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
20	$Bias(\theta)$	-0.8996^{6}	-0.0615^{5}	-0.0154^{3}	-0.0030^{1}	0.0543^{4}	0.0123^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.9001^{6}	0.1756^{1}	0.2061^{4}	0.1973^{3}	0.2240^{5}	0.1826^{2}
	$Bias(\lambda)$	12.0483^{6}	-0.4518^{2}	0.4199^{1}	0.5822^{3}	1.6382^{5}	0.6302^{4}
	$RMSE(\lambda)$	13.6893^{6}	2.4622^{1}	3.8755^{3}	4.4187^{4}	5.1322^{5}	3.3243^{2}
	D_{abs}	0.4572^{6}	0.0586^{2}	0.0607^{5}	0.0591^{3}	0.0605^{4}	0.0579^{1}
	D_{max}	0.9920^{6}	0.0925^{1}	0.0984^{4}	0.0958^{3}	0.1011^{5}	0.0936^{2}
	$Total$	36^{6}	12^{1}	20^{4}	17^{3}	28^{5}	13^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
50	$Bias(\theta)$	-0.9176^{6}	-0.0380^{5}	-0.0070^{3}	0.0007^{1}	0.0203^{4}	0.0038^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.9178^{6}	0.1085^{1}	0.1240^{4}	0.1142^{3}	0.1286^{5}	0.1100^{2}
	$Bias(\lambda)$	17.1703^{6}	-0.3598^{4}	0.0956^{1}	0.1594^{2}	0.4949^{5}	0.1863^{3}
	$RMSE(\lambda)$	18.4769^{6}	1.2917^{1}	1.7876^{4}	1.6126^{3}	2.0372^{5}	1.5073^{2}
	D_{abs}	0.4771^{6}	0.0367^{2}	0.0383^{5}	0.0369^{3}	0.0382^{4}	0.0366^{1}
	D_{max}	0.9992^{6}	0.0589^{1}	0.0628^{4}	0.0602^{3}	0.0635^{5}	0.0595^{2}
	$Total$	36^{6}	14^{2}	21^{4}	15^{3}	28^{5}	12^{1}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
100	$Bias(\theta)$	-0.9280^{6}	-0.0228^{5}	-0.0040^{3}	0.0011^{1}	0.0094^{4}	0.0015^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.9280^{6}	0.0750^{1}	0.0858^{4}	0.0782^{3}	0.0872^{5}	0.0767^{2}
	$Bias(\lambda)$	22.5263^{6}	-0.2274^{5}	0.0285^{1}	0.0759^{2}	0.2131^{4}	0.0803^{3}
	$RMSE(\lambda)$	23.4630^{6}	0.8913^{1}	1.1314^{4}	1.0183^{3}	1.2009^{5}	0.9893^{2}
	D_{abs}	0.4781^{6}	0.0257^{1}	0.0270^{5}	0.0260^{3}	0.0270^{4}	0.0259^{2}
	D_{max}	0.9999^{6}	0.0415^{1}	0.0444^{4}	0.0424^{3}	0.0447^{5}	0.0421^{2}
	$Total$	36^{6}	14^{2}	21^{4}	15^{3}	27^{5}	13^{1}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
200	$Bias(\theta)$	-0.9396^{6}	-0.0131^{5}	-0.0022^{3}	0.0008^{2}	0.0044^{4}	0.0005^{1}
	$RMSE(\theta)$	0.9396^{6}	0.0523^{1}	0.0600^{4}	0.0544^{3}	0.0604^{5}	0.0539^{2}
	$Bias(\lambda)$	31.1841^{6}	-0.1367^{5}	0.0051^{1}	0.0364^{3}	0.0943^{4}	0.0331^{2}
	$RMSE(\lambda)$	31.3809^{6}	0.6269^{1}	0.7660^{4}	0.6866^{3}	0.7875^{5}	0.6766^{2}
	D_{abs}	0.4862^{6}	0.0181^{1}	0.0191^{5}	0.0183^{3}	0.0191^{4}	0.0183^{2}
	D_{max}	1.0000^{6}	0.0293^{1}	0.0314^{4}	0.0299^{3}	0.0315^{5}	0.0298^{2}
	$Total$	36^{6}	14^{2}	21^{4}	17^{3}	27^{5}	11^{1}

Em geral, o método MPS mostrou-se ser o melhor método para estimar os parâmetros da distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero para $Y = \max(T_1, ..., T_M)$. O método MLE apresentou os piores resultados mesmo para o tamanho amostral grande.

Para $\lambda = 0.5$ e 1.0 o método MPS apresentou o maior rank e o método AD o segundo maior. Para $\lambda = 3.0$ e 5.0 o AD apresentou o maior rank e o MPS o segundo melhor, somente quando $n = 20$, o MPS foi melhor. E, para $\lambda = 2.0$, o MPS foi melhor para $n = 20$ e 50 enquanto que o AD foi melhor para $n = 100$ e 200.

2.4 Distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased*

Suponha que os tempos até a falha T_j, $j = 1, \ldots, M$, possuem distribuição de Lindley de um parâmetro como definida em (2.1.2). A distribuição proposta utilizando a ideia de riscos competitivos e riscos complementares é denominada distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* com funções densidade

de probabilidade dadas por:

$$f_{LPSB\,\min}(y \mid \theta, \lambda) = \frac{\theta^2(1+y)\left[1+\lambda\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right]e^{-\left[\theta y+\lambda\left(1-\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right)\right]}}{(1+\theta)}, \quad (2.4.1)$$

$$f_{LPSB\,\max}(y \mid \theta, \lambda) = \frac{\theta^2(1+y)\left[1+\lambda\left\{1-\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right\}\right]e^{-\left[\theta y+\lambda\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right]}}{(1+\theta)} \quad (2.4.2)$$

Note que, $f_{LPSB\,\min}(0 \mid \theta, \lambda) = \frac{\theta^2(1+\lambda)}{(1+\theta)}$ e $f_{LPSB\,\max}(0 \mid \theta, \lambda) = \frac{\theta^2 e^{-\lambda}}{(1+\theta)}$. Por outro lado, a função $f_{LPSB\,\min}(\infty \mid \theta, \lambda) = f_{LPSB\,\max}(\infty \mid \theta, \lambda) = 0$. A função densidade de probabilidade da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* é unimodal e decrescente para ambos os casos, $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ e $Y = \max(T_1, ..., T_M)$, (ver Figura 2.8 e 2.9). Para valores de λ próximo de 1, a curva assemelha-se ao comportamento da distribuição de Lindley de um parâmetro. Se $Y = \min(T_1, ..., T_M)$, para $\lambda \longrightarrow 0$ a curva tende a ser simétrica mas se $Y = \max(T_1, ..., T_M)$, a curva tende a ser simétrica quando $\lambda \longrightarrow \infty$.

Observe que as funções de densidade de probabilidade das distribuições Lindley-Poisson Truncada no Zero e Lindley-Poisson *Size-Biased* apresentam os mesmos comportamentos.

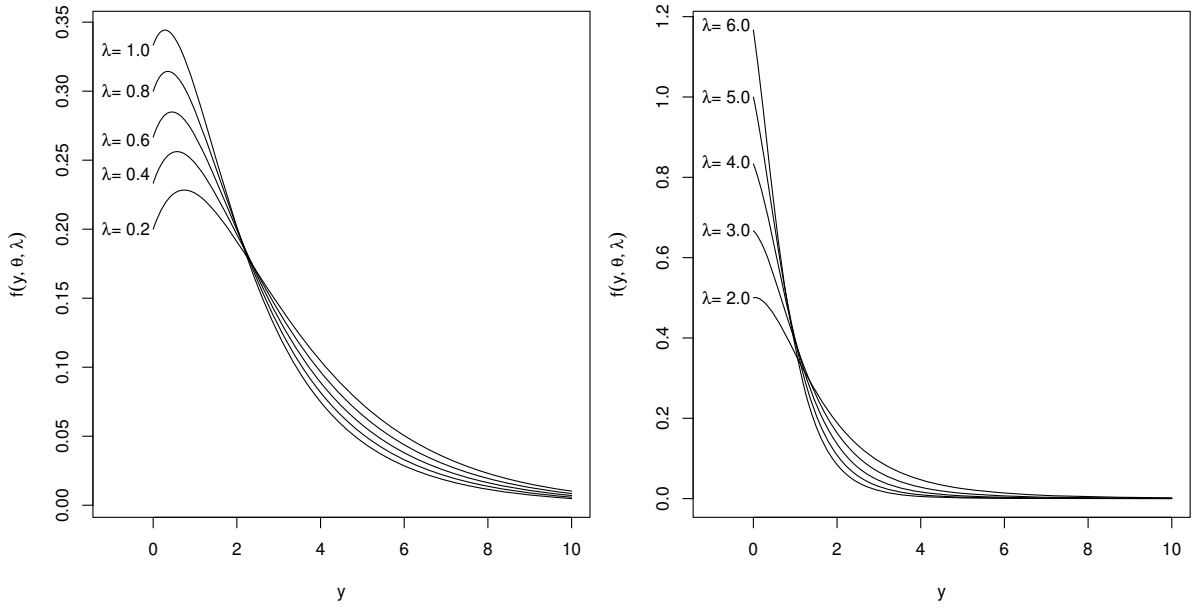


Figura 2.8: Comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* para diferentes valores de λ e $\theta = 0.5$ se $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$.

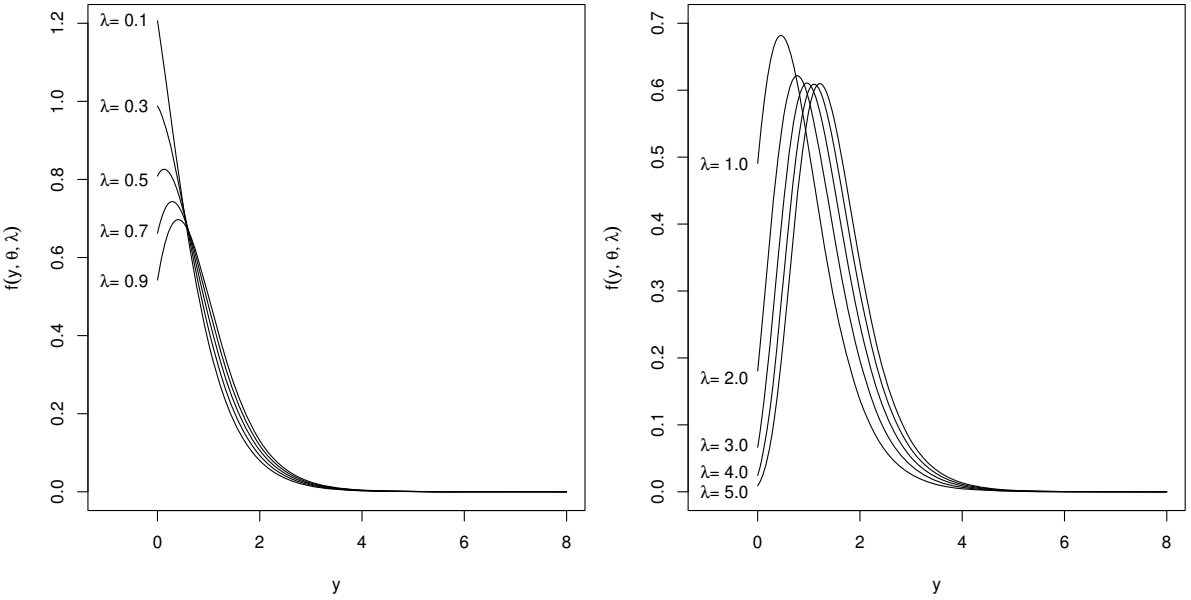


Figura 2.9: Comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* para diferentes valores de λ e $\theta = 2.0$ se $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$.

As funções de distribuição e as funções de sobrevivência considerando as estruturas latentes mínimo e máximo são dadas, respectivamente, por:

$$F_{LPSB\,\min}(y \mid \theta, \lambda) = 1 - \frac{\left(1 + \frac{\theta y}{1+\theta}\right) e^{-\theta y}}{e^{\lambda\left[1-\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right]}}, \tag{2.4.3}$$

$$F_{LPSB\,\max}(y \mid \theta, \lambda) = \frac{\left[1 - \left(1 + \frac{\theta y}{1+\theta}\right) e^{-\theta y}\right]}{e^{\lambda\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}}}, \tag{2.4.4}$$

$$S_{LPSB\,\min}(y \mid \theta, \lambda) = \frac{\left(1 + \frac{\theta y}{1+\theta}\right) e^{-\theta y}}{e^{\lambda\left[1-\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right]}}, \tag{2.4.5}$$

$$S_{LPSB\,\max}(y \mid \theta, \lambda) = 1 - \frac{\left[1 - \left(1 + \frac{\theta y}{1+\theta}\right) e^{-\theta y}\right]}{e^{\lambda\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}}}. \tag{2.4.6}$$

As funções de risco para ambas as estruturas latentes de ativação são definidas como:

$$h_{LPSB\min}(y \mid \theta, \lambda) = \frac{\theta^2(1+y)\left(1+\lambda\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right)}{(1+\theta+\theta y)}, \tag{2.4.7}$$

$$h_{LPSB\max}(y \mid \theta, \lambda) = \frac{\theta^2(1+y)e^{-\theta y}\left[1+\lambda\left(1-\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}\right)\right]}{(\theta+1)e^{\lambda\left(1+\frac{\theta y}{1+\theta}\right)e^{-\theta y}}+\theta y e^{-\theta y}}. \tag{2.4.8}$$

A função de risco $h_{LP\min}(0 \mid \theta, \lambda) = \frac{\theta^2(1+\lambda)}{(\theta+1)}$ e $h_{LP\max}(0 \mid \theta, \lambda) = \frac{\theta^2 e^{-\lambda}}{(\theta+1)}$. Nesse caso, não foi possível reescrever as funções $\eta(y)$ e $\eta'(y)$ em uma expressão sintética como na distribuição Lindley Poisson Truncada no Zero e, portanto, as conclusões quanto ao comportamento da função de risco será apenas baseado nos gráficos.

Graficamente, conclui-se que a função de risco (2.4.8) é sempre crescente para diferentes valores de λ, porém, a função de risco (2.4.7) possui comportamentos crescente, crescente-descrescente-crescente e decrescente (ver Figura 2.10).

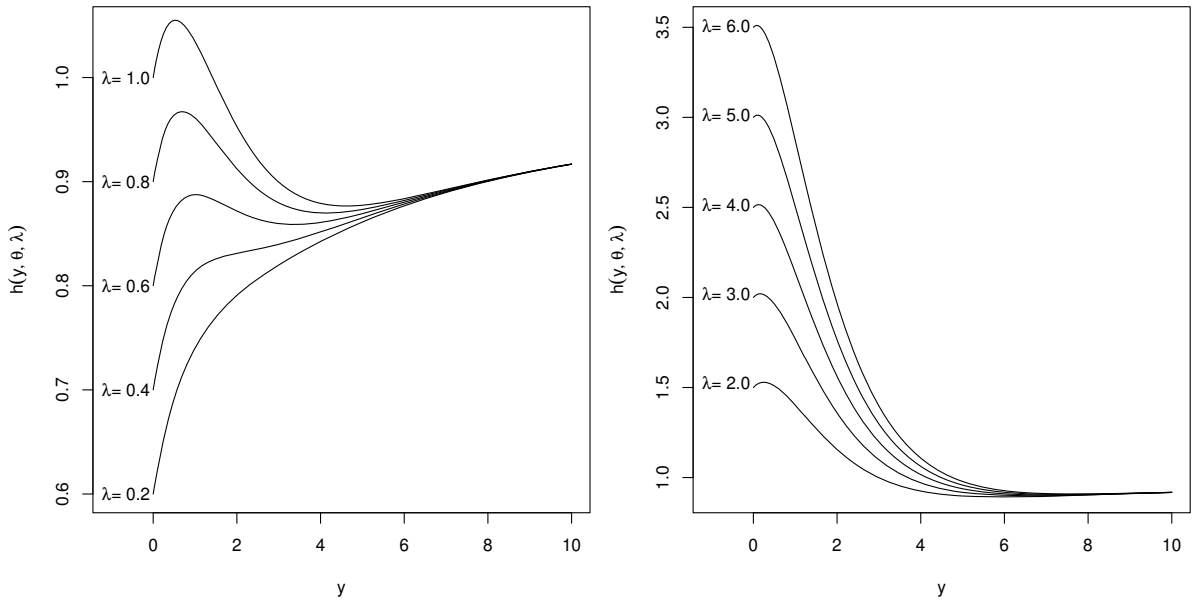
Em ambos os casos, $Y = \min(T_1, ..., T_M)$ e $Y = \max(T_1, ..., T_M)$, quando $\lambda \longrightarrow 0$ o comportamento da função de risco da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* tende a ser crescente como na distribuição de Lindley de um parâmetro. A medida que λ aumenta, a função de risco (2.4.7) torna-se decrescente.

A distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* não possui função inversa expressa analiticamente em termos da função Lambert W como no caso das distribuições de Lindley, Lindley Extendida Marshall-Olkin e Lindley-Poisson Truncada no Zero. Os momentos da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* também não foram obtidos como no caso da distribuição MOEL.

2.4.1 Simulação

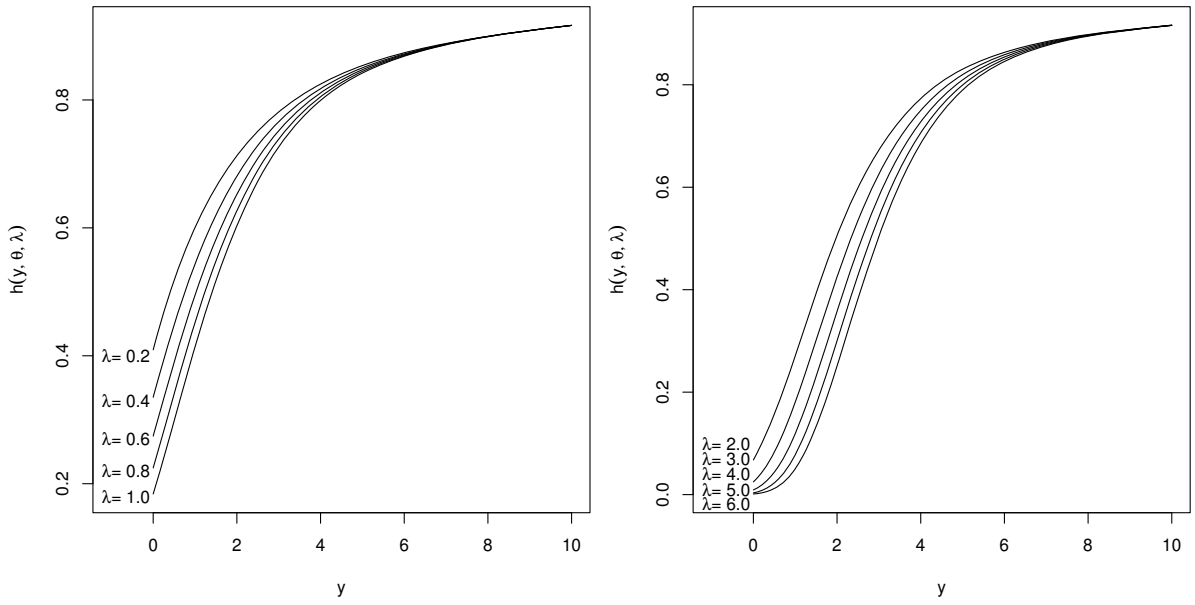
Nesta seção apresentam-se alguns resultados de experimentos numéricos para comparar a performace dos diferentes métodos de estimação discutidos anteriormente. Para fins, tomou-se amostras de tamanho $n = 20, 50, 100$ e 200, $\theta = 1$ e $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ e 5.0. Para cada combinação (n, θ, λ) gerou-se $B = 500.000$ amostras pseudo-aleatórias da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* usando o algoritmo de Newton-Raphson para resolver a equação não linear $F(y \mid \theta, \lambda) - u = 0$, em que u é uma observação uniforme $(0, 1)$.

As estimativas foram obtidas no Ox versão 6.20, ver Doornik (2007), usando a função *MaxBFGS* nos métodos MLE, OLS, WLS, MPS, AD e CM. Para cada estimativa calculou-se o vício (2.2.14), a raiz



(a) $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$

(b) $Y = \min(T_1, \ldots, T_M)$



(c) $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$

(d) $Y = \max(T_1, \ldots, T_M)$

Figura 2.10: Comportamento da função de risco da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* para diferentes valores de λ e $\theta = 1$.

do erro quadrático médio (2.2.15), a diferença absoluta média entre as funções de distribuições verdadeira e estimada (2.2.16) e a diferença absoluta máxima entre as funções de distribuições verdadeira e estimada (2.2.17).

As tabelas 2.16, 2.17, 2.18, 2.19 e 2.20 apresentam as estimativas dos parâmetros da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* no cenário de riscos competitivos.

Em geral, o método MPS não apresentou um bom desempenho como nos outros casos. Até o método MLE não foi tão bom, mesmo para n grande, $n = 100$ e 200. É importante salientar que não existe um padrão quanto a eficiência dos métodos como vinha acontecendo nos demais casos.

Um resultado que chamou a atenção é que para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 1.0$ o método MLE teve um bom desenvolvimento mesmo para n pequeno. Para trabalhos futuros, a simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) pode ser uma boa opção para avaliar a estimação dos parâmetros da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* no cenário de riscos competitivos.

Tabela 2.16: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 0.5$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0538^{1}	-0.1970^{6}	-0.1184^{3}	-0.1453^{5}	-0.0816^{2}	-0.1254^{4}
	$RMSE(\theta)$	0.2740^{5}	0.3099^{6}	0.2401^{1}	0.2672^{3}	0.2414^{2}	0.2693^{4}
	$Bias(\lambda)$	0.4674^{1}	0.8402^{6}	0.5532^{3}	0.6965^{5}	0.4991^{2}	0.6895^{4}
20	$RMSE(\lambda)$	1.0023^{3}	1.1970^{6}	0.8102^{1}	1.0749^{4}	0.8155^{2}	1.1083^{5}
	D_{abs}	0.0468^{1}	0.0473^{2}	0.0504^{6}	0.0492^{4}	0.0501^{5}	0.0484^{3}
	D_{max}	0.0726^{2}	0.0709^{1}	0.0770^{5}	0.0754^{4}	0.0783^{6}	0.0749^{3}
	$Total$	13^{1}	27^{6}	19^{2}	25^{5}	19^{2}	23^{4}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0695^{1}	-0.1950^{6}	-0.1040^{4}	-0.1160^{5}	-0.0777^{2}	-0.1030^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.2418^{5}	0.3001^{6}	0.2053^{2}	0.2253^{3}	0.2034^{1}	0.2290^{4}
	$Bias(\lambda)$	0.4505^{3}	0.8831^{6}	0.4389^{2}	0.5132^{5}	0.3837^{1}	0.5029^{4}
50	$RMSE(\lambda)$	1.0354^{5}	1.3356^{6}	0.7163^{2}	0.8579^{3}	0.7046^{1}	0.9005^{4}
	D_{abs}	0.0303^{1}	0.0304^{2}	0.0321^{6}	0.0314^{4}	0.0321^{5}	0.0311^{3}
	D_{max}	0.0469^{2}	0.0462^{1}	0.0492^{5}	0.0483^{4}	0.0497^{6}	0.0480^{3}
	$Total$	17^{2}	27^{6}	21^{3}	24^{5}	16^{1}	21^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0565^{1}	-0.1696^{6}	-0.0796^{4}	-0.0825^{5}	-0.0604^{2}	-0.0736^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.2202^{5}	0.2846^{6}	0.1884^{2}	0.2027^{3}	0.1868^{1}	0.2032^{4}
	$Bias(\lambda)$	0.3653^{4}	0.8044^{6}	0.3368^{2}	0.3729^{5}	0.2925^{1}	0.3598^{3}
100	$RMSE(\lambda)$	0.9649^{5}	1.3346^{6}	0.6393^{2}	0.7401^{3}	0.6274^{1}	0.7661^{4}
	D_{abs}	0.0219^{2}	0.0218^{1}	0.0229^{6}	0.0224^{4}	0.0229^{5}	0.0223^{3}
	D_{max}	0.0341^{2}	0.0338^{1}	0.0355^{5}	0.0348^{4}	0.0357^{6}	0.0347^{3}
	$Total$	19^{2}	26^{6}	21^{4}	24^{5}	16^{1}	20^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0370^{1}	-0.1317^{6}	-0.0557^{5}	-0.0513^{4}	-0.0413^{2}	-0.0468^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.1922^{5}	0.2550^{6}	0.1734^{2}	0.1785^{4}	0.1713^{1}	0.1782^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.2548^{5}	0.6393^{6}	0.2460^{3}	0.2466^{4}	0.2096^{1}	0.2388^{2}
200	$RMSE(\lambda)$	0.8327^{5}	1.2118^{6}	0.5720^{2}	0.6274^{3}	0.5581^{1}	0.6388^{4}
	D_{abs}	0.0159^{2}	0.0159^{1}	0.0165^{5}	0.0162^{4}	0.0165^{6}	0.0161^{3}
	D_{max}	0.0252^{2}	0.0251^{1}	0.0260^{5}	0.0255^{4}	0.0261^{6}	0.0255^{3}
	$Total$	20^{3}	26^{6}	22^{4}	23^{5}	17^{1}	18^{2}

Tabela 2.17: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 1.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0728^{4}	-0.0985^{6}	-0.0265^{2}	-0.0905^{5}	0.0038^{1}	-0.0497^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.3466^{6}	0.3108^{3}	0.2802^{1}	0.3368^{5}	0.3056^{2}	0.3148^{4}
	$Bias(\lambda)$	0.1967^{1}	0.6732^{4}	0.5116^{2}	1.0885^{6}	0.5273^{3}	0.8017^{5}
20	$RMSE(\lambda)$	1.3927^{1}	1.8658^{4}	1.5294^{2}	2.7543^{6}	1.6871^{3}	2.1953^{5}
	D_{abs}	0.0473^{1}	0.0486^{2}	0.0508^{5}	0.0510^{6}	0.0502^{4}	0.0490^{3}
	D_{max}	0.0737^{2}	0.0736^{1}	0.0777^{4}	0.0786^{6}	0.0785^{5}	0.0763^{3}
	$Total$	15^{1}	20^{4}	16^{2}	34^{6}	18^{3}	23^{5}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0330^{3}	-0.1110^{6}	-0.0393^{4}	-0.0476^{5}	-0.0222^{1}	-0.0330^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.2938^{6}	0.2864^{5}	0.2549^{1}	0.2560^{2}	0.2737^{3}	0.2770^{4}
	$Bias(\lambda)$	0.2341^{1}	0.6694^{6}	0.5540^{4}	0.5379^{2}	0.5750^{5}	0.5474^{3}
50	$RMSE(\lambda)$	1.1889^{1}	1.3325^{2}	1.6655^{4}	1.5561^{3}	1.7909^{6}	1.7068^{5}
	D_{abs}	0.0308^{1}	0.0311^{2}	0.0323^{6}	0.0316^{3}	0.0322^{5}	0.0319^{4}
	D_{max}	0.0480^{2}	0.0478^{1}	0.0500^{5}	0.0491^{3}	0.0506^{6}	0.0497^{4}
	$Total$	14^{1}	22^{3}	24^{5}	18^{2}	26^{6}	22^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0268^{3}	-0.1055^{6}	-0.0312^{5}	-0.0280^{4}	-0.0182^{2}	-0.0006^{1}
	$RMSE(\theta)$	0.2681^{5}	0.2760^{6}	0.2476^{2}	0.2476^{1}	0.2627^{4}	0.2513^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.1919^{1}	0.6439^{6}	0.4784^{4}	0.4004^{3}	0.4882^{5}	0.2846^{2}
100	$RMSE(\lambda)$	1.0664^{1}	1.2690^{3}	1.5331^{5}	1.2973^{4}	1.6285^{6}	1.1394^{2}
	D_{abs}	0.0223^{1}	0.0224^{2}	0.0231^{5}	0.0227^{4}	0.0232^{6}	0.0227^{3}
	D_{max}	0.0351^{2}	0.0350^{1}	0.0363^{5}	0.0356^{4}	0.0368^{6}	0.0356^{3}
	$Total$	13^{1}	24^{4}	26^{5}	20^{3}	29^{6}	14^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0210^{5}	-0.0931^{6}	-0.0125^{3}	-0.0014^{2}	-0.0014^{1}	0.0202^{4}
	$RMSE(\theta)$	0.2411^{4}	0.2576^{6}	0.2387^{3}	0.2340^{2}	0.2503^{5}	0.2320^{1}
	$Bias(\lambda)$	0.1536^{2}	0.5703^{6}	0.3365^{5}	0.2326^{3}	0.3324^{4}	0.1410^{1}
200	$RMSE(\lambda)$	0.9424^{2}	1.1773^{4}	1.2576^{5}	0.9846^{3}	1.3217^{6}	0.8603^{1}
	D_{abs}	0.0161^{1}	0.0161^{2}	0.0167^{5}	0.0164^{4}	0.0167^{6}	0.0163^{3}
	D_{max}	0.0256^{1}	0.0257^{2}	0.0266^{5}	0.0260^{4}	0.0269^{6}	0.0259^{3}
	$Total$	15^{2}	26^{4}	26^{4}	18^{3}	28^{6}	13^{1}

Tabela 2.18: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 2.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0501^{3}	-0.0250^{1}	0.1237^{6}	0.0559^{4}	0.0836^{5}	-0.0388^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.5654^{6}	0.3942^{1}	0.4161^{3}	0.4092^{2}	0.4441^{5}	0.4216^{4}
	$Bias(\lambda)$	3.7568^{6}	1.6456^{4}	0.4265^{1}	0.9758^{3}	0.9485^{2}	1.9304^{5}
20	$RMSE(\lambda)$	10.4295^{6}	5.9594^{5}	2.6258^{1}	3.6556^{3}	3.2777^{2}	4.9113^{4}
	D_{abs}	0.0498^{4}	0.0508^{6}	0.0504^{5}	0.0497^{2}	0.0498^{3}	0.0495^{1}
	D_{max}	0.0782^{6}	0.0769^{3}	0.0771^{4}	0.0764^{1}	0.0782^{5}	0.0769^{2}
	$Total$	31^{6}	20^{3}	20^{3}	15^{1}	22^{5}	18^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0308^{3}	-0.0775^{5}	0.0261^{2}	-0.0532^{4}	-0.0157^{1}	-0.0968^{6}
	$RMSE(\theta)$	0.4798^{6}	0.3464^{1}	0.3737^{3}	0.3685^{2}	0.3965^{5}	0.3846^{4}
	$Bias(\lambda)$	3.1308^{6}	1.5716^{3}	0.9853^{1}	1.5963^{4}	1.4603^{2}	2.0630^{5}
50	$RMSE(\lambda)$	8.5429^{6}	5.0918^{5}	3.1926^{1}	4.1312^{3}	3.7422^{2}	4.7112^{4}
	D_{abs}	0.0333^{6}	0.0330^{5}	0.0329^{3}	0.0328^{1}	0.0329^{4}	0.0329^{2}
	D_{max}	0.0530^{6}	0.0509^{1}	0.0513^{2}	0.0515^{3}	0.0522^{5}	0.0520^{4}
	$Total$	33^{6}	20^{4}	12^{1}	17^{2}	19^{3}	25^{5}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0293^{2}	-0.0846^{4}	-0.0232^{1}	-0.0888^{5}	-0.0589^{3}	-0.1078^{6}
	$RMSE(\theta)$	0.4155^{6}	0.3080^{1}	0.3580^{4}	0.3475^{2}	0.3745^{5}	0.3537^{3}
	$Bias(\lambda)$	1.7764^{6}	1.0757^{1}	1.2088^{2}	1.5907^{4}	1.5709^{3}	1.7557^{5}
100	$RMSE(\lambda)$	5.2804^{6}	3.1356^{1}	3.2967^{2}	3.7888^{4}	3.6796^{3}	3.9894^{5}
	D_{abs}	0.0242^{6}	0.0238^{1}	0.0240^{2}	0.0240^{3}	0.0241^{5}	0.0240^{4}
	D_{max}	0.0387^{5}	0.0372^{1}	0.0382^{2}	0.0384^{3}	0.0388^{6}	0.0385^{4}
	$Total$	31^{6}	9^{1}	13^{2}	21^{3}	25^{4}	27^{5}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0198^{1}	-0.0837^{4}	-0.0497^{2}	-0.0945^{5}	-0.0766^{3}	-0.1005^{6}
	$RMSE(\theta)$	0.3474^{6}	0.2715^{1}	0.3330^{4}	0.3104^{3}	0.3448^{5}	0.3093^{2}
	$Bias(\lambda)$	0.8506^{2}	0.7590^{1}	1.1387^{3}	1.2133^{4}	1.3815^{6}	1.2185^{5}
200	$RMSE(\lambda)$	2.5810^{2}	1.7752^{1}	2.9293^{5}	2.8006^{4}	3.1783^{6}	2.7416^{3}
	D_{abs}	0.0173^{2}	0.0172^{1}	0.0175^{5}	0.0175^{4}	0.0176^{6}	0.0174^{3}
	D_{max}	0.0279^{2}	0.0272^{1}	0.0285^{5}	0.0283^{4}	0.0290^{6}	0.0282^{3}
	$Total$	15^{2}	9^{1}	24^{4}	24^{4}	32^{6}	22^{3}

Tabela 2.19: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 3.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.0529^{2}	0.0359^{1}	0.2242^{6}	0.1481^{4}	0.1848^{5}	0.0570^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.5928^{6}	0.4650^{1}	0.5498^{4}	0.5222^{2}	0.5778^{5}	0.5388^{3}
	$Bias(\lambda)$	5.5887^{6}	1.7376^{4}	0.0596^{1}	0.7420^{3}	0.6296^{2}	1.8174^{5}
20	$RMSE(\lambda)$	13.0109^{6}	7.2416^{5}	3.2708^{1}	4.3917^{3}	3.8298^{2}	5.6435^{4}
	D_{abs}	0.0528^{5}	0.0551^{6}	0.0505^{2}	0.0506^{3}	0.0490^{1}	0.0516^{4}
	D_{max}	0.0822^{6}	0.0822^{5}	0.0775^{2}	0.0775^{3}	0.0772^{1}	0.0790^{4}
	$Total$	31^{6}	22^{4}	16^{1}	18^{3}	16^{1}	23^{5}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.1624^{6}	-0.0835^{4}	0.0309^{2}	-0.0383^{3}	-0.0147^{1}	-0.0860^{5}
	$RMSE(\theta)$	0.5018^{6}	0.3889^{1}	0.4701^{3}	0.4519^{2}	0.4831^{5}	0.4705^{4}
	$Bias(\lambda)$	5.2930^{6}	2.2838^{4}	1.3420^{1}	2.0406^{3}	1.8816^{2}	2.7027^{5}
50	$RMSE(\lambda)$	11.7673^{6}	7.2745^{5}	4.2483^{1}	5.3130^{3}	4.7282^{2}	6.0277^{4}
	D_{abs}	0.0386^{5}	0.0391^{6}	0.0361^{2}	0.0368^{3}	0.0354^{1}	0.0374^{4}
	D_{max}	0.0605^{6}	0.0591^{5}	0.0563^{2}	0.0573^{3}	0.0561^{1}	0.0581^{4}
	$Total$	35^{6}	25^{4}	11^{1}	17^{3}	12^{2}	26^{5}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.2018^{6}	-0.1379^{2}	-0.1267^{1}	-0.1633^{4}	-0.1628^{3}	-0.1800^{5}
	$RMSE(\theta)$	0.4434^{4}	0.3439^{1}	0.4434^{3}	0.4310^{2}	0.4530^{6}	0.4458^{5}
	$Bias(\lambda)$	4.1080^{6}	1.9381^{1}	2.5565^{2}	2.9368^{3}	3.0023^{4}	3.2886^{5}
100	$RMSE(\lambda)$	9.0318^{6}	5.4499^{3}	5.0703^{1}	5.7431^{4}	5.4345^{2}	6.2471^{5}
	D_{abs}	0.0319^{6}	0.0317^{5}	0.0303^{2}	0.0312^{3}	0.0300^{1}	0.0316^{4}
	D_{max}	0.0500^{6}	0.0482^{3}	0.0481^{2}	0.0491^{4}	0.0481^{1}	0.0496^{5}
	$Total$	34^{6}	15^{2}	11^{1}	20^{4}	17^{3}	29^{5}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.2123^{2}	-0.1712^{1}	-0.2677^{5}	-0.2571^{4}	-0.2915^{6}	-0.2525^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.3770^{2}	0.3010^{1}	0.4312^{5}	0.4105^{3}	0.4400^{6}	0.4175^{4}
	$Bias(\lambda)$	2.6270^{2}	1.4910^{1}	3.6800^{5}	3.3866^{3}	4.0181^{6}	3.4635^{4}
200	$RMSE(\lambda)$	5.3122^{2}	3.2193^{1}	5.6856^{4}	5.5888^{3}	5.9641^{6}	5.9027^{5}
	D_{abs}	0.0276^{2}	0.0273^{1}	0.0279^{4}	0.0286^{6}	0.0278^{3}	0.0286^{5}
	D_{max}	0.0430^{2}	0.0416^{1}	0.0447^{3}	0.0452^{6}	0.0447^{4}	0.0450^{5}
	$Total$	12^{2}	6^{1}	26^{4}	25^{3}	31^{6}	26^{4}

Tabela 2.20: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 5.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.1570^{6}	0.0058^{1}	0.1268^{5}	0.0430^{3}	0.0670^{4}	-0.0271^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.6068^{6}	0.5082^{1}	0.5767^{3}	0.5558^{2}	0.5959^{4}	0.6002^{5}
	$Bias(\lambda)$	7.5095^{6}	2.0995^{4}	0.1759^{1}	1.3080^{3}	1.0481^{2}	2.5261^{5}
20	$RMSE(\lambda)$	15.6363^{6}	8.9805^{5}	4.6920^{1}	6.1989^{3}	5.2954^{2}	7.1655^{4}
	D_{abs}	0.0770^{5}	0.0810^{6}	0.0740^{2}	0.0743^{3}	0.0700^{1}	0.0743^{4}
	D_{max}	0.1110^{5}	0.1131^{6}	0.1084^{3}	0.1092^{4}	0.1056^{1}	0.1075^{2}
	$Total$	34^{6}	23^{5}	15^{2}	18^{3}	14^{1}	22^{4}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.3663^{6}	-0.2420^{2}	-0.2153^{1}	-0.2892^{4}	-0.2558^{3}	-0.3270^{5}
	$RMSE(\theta)$	0.5203^{6}	0.4259^{1}	0.4697^{2}	0.4709^{3}	0.4752^{4}	0.5086^{5}
	$Bias(lambda)$	9.8059^{6}	5.0855^{4}	3.3684^{1}	4.8664^{3}	4.0482^{2}	6.0080^{5}
50	$RMSE(\lambda)$	16.8544^{6}	11.6456^{5}	6.3785^{1}	8.2611^{3}	6.9129^{2}	9.3373^{4}
	D_{abs}	0.0734^{5}	0.0747^{6}	0.0711^{2}	0.0722^{3}	0.0692^{1}	0.0734^{4}
	D_{max}	0.1044^{3}	0.1040^{2}	0.1051^{4}	0.1069^{6}	0.1038^{1}	0.1063^{5}
	$Total$	32^{6}	20^{3}	11^{1}	22^{4}	13^{2}	28^{5}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.4595^{4}	-0.3546^{1}	-0.4185^{2}	-0.4601^{5}	-0.4369^{3}	-0.4780^{6}
	$RMSE(\theta)$	0.5221^{5}	0.4341^{1}	0.4795^{2}	0.5058^{4}	0.4894^{3}	0.5251^{6}
	$Bias(\lambda)$	11.4074^{6}	6.4980^{2}	6.2743^{1}	7.8409^{4}	6.7600^{3}	8.8378^{5}
100	$RMSE(\lambda)$	17.9433^{6}	12.2062^{5}	8.1934^{1}	10.1459^{3}	8.5882^{2}	11.2617^{4}
	D_{abs}	0.0734^{4}	0.0733^{3}	0.0723^{2}	0.0740^{5}	0.0714^{1}	0.0750^{6}
	D_{max}	0.1041^{2}	0.1024^{1}	0.1078^{4}	0.1101^{6}	0.1073^{3}	0.1091^{5}
	$Total$	27^{4}	13^{2}	12^{1}	27^{4}	15^{3}	32^{6}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	-0.5057^{2}	-0.4164^{1}	-0.5306^{3}	-0.5565^{5}	-0.5394^{4}	-0.5831^{6}
	$RMSE(\theta)$	0.5371^{2}	0.4559^{1}	0.5443^{3}	0.5696^{5}	0.5519^{4}	0.5967^{6}
	$Bias(\lambda)$	11.8494^{5}	7.1507^{1}	9.2820^{2}	10.9230^{4}	9.7154^{3}	13.4044^{6}
200	$RMSE(\lambda)$	17.3446^{6}	11.9836^{3}	10.4021^{1}	12.3991^{4}	10.7983^{2}	15.4289^{5}
	D_{abs}	0.0736^{4}	0.0728^{2}	0.0731^{3}	0.0759^{5}	0.0725^{1}	0.0772^{6}
	D_{max}	0.1045^{2}	0.1019^{1}	0.1099^{4}	0.1134^{6}	0.1095^{3}	0.1128^{5}
	$Total$	21^{4}	9^{1}	16^{2}	29^{5}	17^{3}	34^{6}

As tabelas 2.21, 2.22, 2.23, 2.24 e 2.25 apresentam as estimativas dos parâmetros da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* no cenário de riscos complementares.

Em geral, o método MPS apresentou o menor rank. É interessante observar que embora o método MPS tenha apresentado o menor rank total, os métodos WLS e OLS apresentaram menor vício nos estimadores do parâmetro θ. Somente no caso $\lambda = 0.5$ e $n = 200$, o método AD teve menor vício.

Para os estimadores do parâmetro λ, o método MPS apresentou o menor vício e o OLS ficou em segunda posição sendo menor que o MPS somente quando $\lambda = 0.5$ e $n = 200$.

Além disso, os estimadores dos parâmetros obtidos via os métodos MLE, CM e AD são positivamente tendenciosos, isto é, os estimadores excedem o verdadeiro valor dos parâmetros. Por outro lado, os estimadores obtidos pelo método MPS são negativamente tendenciosos, isto é, o verdadeiro valor do parâmetro é maior que o estimado. Já os métodos OLS e WLS apresentam estimadores positivamente e negativamente tendenciosos.

Tabela 2.21: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 0.5$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.2571^{5}	-0.0939^{3}	0.0099^{1}	0.0402^{2}	0.2727^{6}	0.0958^{4}
	$RMSE(\theta)$	0.6373^{2}	0.5517^{1}	0.7615^{5}	0.7310^{4}	0.8930^{6}	0.6443^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.5192^{5}	0.0988^{1}	0.3505^{2}	0.3609^{4}	0.7570^{6}	0.3534^{3}
20	$RMSE(\lambda)$	1.3087^{3}	0.7940^{1}	1.6955^{5}	1.5746^{4}	2.5401^{6}	1.1941^{2}
	D_{abs}	0.0567^{3}	0.0555^{1}	0.0578^{5}	0.0571^{4}	0.0590^{6}	0.0566^{2}
	D_{max}	0.0940^{3}	0.0885^{1}	0.0957^{5}	0.0943^{4}	0.1015^{6}	0.0929^{2}
	$Total$	21^{3}	8^{1}	23^{5}	22^{4}	36^{6}	16^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0967^{6}	-0.0875^{4}	-0.0197^{2}	0.0141^{1}	0.0901^{5}	0.0274^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.3494^{2}	0.3393^{1}	0.4710^{5}	0.4179^{4}	0.4932^{6}	0.3877^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.1671^{5}	-0.0123^{1}	0.0991^{2}	0.1133^{4}	0.2134^{6}	0.1131^{3}
50	$RMSE(\lambda)$	0.4678^{2}	0.3568^{1}	0.5658^{5}	0.5256^{4}	0.6648^{6}	0.4780^{3}
	D_{abs}	0.0353^{2}	0.0351^{1}	0.0368^{5}	0.0360^{4}	0.0372^{6}	0.0358^{3}
	D_{max}	0.0581^{2}	0.0566^{1}	0.0619^{5}	0.0599^{4}	0.0634^{6}	0.0591^{3}
	$Total$	19^{3}	9^{1}	24^{5}	21^{4}	35^{6}	18^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0479^{5}	-0.0682^{6}	-0.0149^{3}	0.0116^{1}	0.0412^{4}	0.0129^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.2348^{1}	0.2418^{2}	0.3335^{5}	0.2810^{4}	0.3385^{6}	0.2693^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.0789^{5}	-0.0284^{1}	0.0441^{2}	0.0562^{4}	0.0975^{6}	0.0536^{3}
100	$RMSE(\lambda)$	0.2722^{2}	0.2349^{1}	0.3480^{5}	0.3105^{4}	0.3790^{6}	0.2936^{3}
	D_{abs}	0.0249^{1}	0.0249^{2}	0.0263^{5}	0.0255^{4}	0.0264^{6}	0.0253^{3}
	D_{max}	0.0407^{2}	0.0405^{1}	0.0443^{5}	0.0423^{4}	0.0448^{6}	0.0419^{3}
	$Total$	16^{2}	13^{1}	25^{5}	21^{4}	34^{6}	17^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0234^{5}	-0.0439^{6}	-0.0087^{3}	0.0083^{2}	0.0193^{4}	0.0059^{1}
	$RMSE(\theta)$	0.1615^{1}	0.1675^{2}	0.2342^{5}	0.1924^{4}	0.2353^{6}	0.1882^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.0377^{5}	-0.0237^{2}	0.0201^{1}	0.0289^{4}	0.0458^{6}	0.0254^{3}
200	$RMSE(\lambda)$	0.1739^{2}	0.1619^{1}	0.2310^{5}	0.2003^{4}	0.2412^{6}	0.1937^{3}
	D_{abs}	0.0175^{1}	0.0176^{2}	0.0186^{5}	0.0180^{4}	0.0186^{6}	0.0179^{3}
	D_{max}	0.0286^{1}	0.0287^{2}	0.0315^{5}	0.0298^{4}	0.0316^{6}	0.0296^{3}
	$Total$	15^{1}	15^{1}	24^{5}	22^{4}	34^{6}	16^{3}

Tabela 2.22: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 1.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.1687^{6}	-0.0972^{4}	-0.0279^{2}	0.0024^{1}	0.1668^{5}	0.0555^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.4705^{2}	0.4246^{1}	0.5558^{5}	0.5252^{4}	0.6214^{6}	0.4784^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.8771^{5}	0.1374^{1}	0.5354^{2}	0.5595^{3}	1.1987^{6}	0.5985^{4}
20	$RMSE(\lambda)$	2.4637^{3}	1.4126^{1}	2.8324^{5}	2.7797^{4}	4.1466^{6}	2.2403^{2}
	D_{abs}	0.0571^{2}	0.0564^{1}	0.0586^{5}	0.0578^{4}	0.0595^{6}	0.0573^{3}
	D_{max}	0.0958^{3}	0.0912^{1}	0.0981^{5}	0.0964^{4}	0.1028^{6}	0.0953^{2}
	$Total$	21^{4}	9^{1}	24^{5}	20^{3}	35^{6}	17^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0622^{5}	-0.0779^{6}	-0.0220^{3}	0.0050^{1}	0.0562^{4}	0.0171^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.2646^{1}	0.2665^{2}	0.3384^{5}	0.3021^{4}	0.3484^{6}	0.2865^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.2701^{5}	-0.0360^{1}	0.1448^{2}	0.1761^{3}	0.3265^{6}	0.1862^{4}
50	$RMSE(\lambda)$	0.8112^{3}	0.6244^{1}	0.9101^{5}	0.8612^{4}	1.0663^{6}	0.8097^{2}
	D_{abs}	0.0357^{1}	0.0358^{2}	0.0374^{5}	0.0365^{4}	0.0375^{6}	0.0362^{3}
	D_{max}	0.0595^{2}	0.0589^{1}	0.0632^{5}	0.0612^{4}	0.0643^{6}	0.0605^{3}
	$Total$	17^{2}	13^{1}	25^{5}	20^{4}	34^{6}	17^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0306^{5}	-0.0513^{6}	-0.0112^{3}	0.0063^{1}	0.0273^{4}	0.0086^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1801^{1}	0.1856^{2}	0.2337^{5}	0.2042^{4}	0.2367^{6}	0.1983^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.1258^{5}	-0.0452^{1}	0.0656^{2}	0.0875^{4}	0.1484^{6}	0.0875^{3}
100	$RMSE(\lambda)$	0.4774^{2}	0.4147^{1}	0.5568^{5}	0.5149^{4}	0.6042^{6}	0.4978^{3}
	D_{abs}	0.0252^{1}	0.0254^{2}	0.0265^{5}	0.0257^{4}	0.0265^{6}	0.0256^{3}
	D_{max}	0.0419^{1}	0.0419^{2}	0.0450^{5}	0.0431^{4}	0.0453^{6}	0.0428^{3}
	$Total$	15^{2}	14^{1}	25^{5}	21^{4}	34^{6}	17^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0159^{5}	-0.0303^{6}	-0.0043^{1}	0.0058^{3}	0.0147^{4}	0.0053^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1257^{1}	0.1289^{2}	0.1634^{5}	0.1416^{4}	0.1646^{6}	0.1394^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.0629^{5}	-0.0327^{1}	0.0345^{2}	0.0480^{4}	0.0742^{6}	0.0451^{3}
200	$RMSE(\lambda)$	0.3103^{2}	0.2880^{1}	0.3728^{5}	0.3389^{4}	0.3889^{6}	0.3319^{3}
	D_{abs}	0.0178^{1}	0.0179^{2}	0.0187^{5}	0.0182^{4}	0.0187^{6}	0.0181^{3}
	D_{max}	0.0295^{1}	0.0296^{2}	0.0318^{5}	0.0304^{4}	0.0319^{6}	0.0303^{3}
	$Total$	15^{2}	14^{1}	23^{4}	23^{4}	34^{6}	17^{3}

Tabela 2.23: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 2.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.1159^{6}	-0.0975^{4}	-0.0355^{3}	-0.0090^{1}	0.1133^{5}	0.0350^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.3640^{2}	0.3404^{1}	0.4226^{5}	0.3973^{4}	0.4598^{6}	0.3677^{3}
	$Bias(\lambda)$	1.6474^{5}	0.2113^{1}	1.0014^{2}	1.0510^{3}	2.2407^{6}	1.1404^{4}
20	$RMSE(\lambda)$	4.9548^{3}	2.6917^{1}	5.8481^{4}	6.2846^{5}	8.3994^{6}	4.5566^{2}
	D_{abs}	0.0575^{2}	0.0574^{1}	0.0594^{5}	0.0585^{4}	0.0598^{6}	0.0579^{3}
	D_{max}	0.0972^{3}	0.0938^{1}	0.0998^{5}	0.0980^{4}	0.1034^{6}	0.0969^{2}
	$Total$	21^{3}	9^{1}	24^{5}	21^{3}	35^{6}	16^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0445^{5}	-0.0622^{6}	-0.0171^{3}	0.0027^{1}	0.0405^{4}	0.0127^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.2109^{1}	0.2137^{2}	0.2527^{5}	0.2299^{4}	0.2597^{6}	0.2219^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.5068^{5}	-0.0439^{1}	0.2707^{2}	0.3291^{3}	0.5903^{6}	0.3583^{4}
50	$RMSE(\lambda)$	1.5661^{3}	1.1947^{1}	1.6574^{5}	1.5790^{4}	1.9511^{6}	1.5227^{2}
	D_{abs}	0.0362^{1}	0.0365^{2}	0.0377^{5}	0.0368^{4}	0.0377^{6}	0.0366^{3}
	D_{max}	0.0609^{2}	0.0606^{1}	0.0639^{5}	0.0621^{4}	0.0647^{6}	0.0616^{3}
	$Total$	17^{2}	13^{1}	25^{5}	20^{4}	34^{6}	17^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0221^{5}	-0.0384^{6}	-0.0084^{3}	0.0040^{1}	0.0199^{4}	0.0064^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1448^{1}	0.1478^{2}	0.1745^{5}	0.1572^{4}	0.1769^{6}	0.1542^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.2368^{5}	-0.0596^{1}	0.1248^{2}	0.1646^{3}	0.2678^{6}	0.1697^{4}
100	$RMSE(\lambda)$	0.9114^{2}	0.7850^{1}	0.9981^{5}	0.9441^{4}	1.0849^{6}	0.9256^{3}
	D_{abs}	0.0255^{1}	0.0257^{2}	0.0266^{5}	0.0259^{4}	0.0266^{6}	0.0259^{3}
	D_{max}	0.0429^{1}	0.0429^{2}	0.0452^{5}	0.0438^{4}	0.0455^{6}	0.0436^{3}
	$Total$	15^{2}	14^{1}	25^{5}	20^{4}	34^{6}	18^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0107^{5}	-0.0233^{6}	-0.0044^{3}	0.0028^{1}	0.0097^{4}	0.0030^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1009^{1}	0.1029^{2}	0.1222^{5}	0.1093^{4}	0.1230^{6}	0.1081^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.1137^{5}	-0.0502^{1}	0.0599^{2}	0.0837^{4}	0.1279^{6}	0.0818^{3}
200	$RMSE(\lambda)$	0.5874^{2}	0.5424^{1}	0.6609^{5}	0.6174^{4}	0.6896^{6}	0.6095^{3}
	D_{abs}	0.0181^{1}	0.0182^{2}	0.0189^{5}	0.0184^{4}	0.0189^{6}	0.0183^{3}
	D_{max}	0.0303^{1}	0.0304^{2}	0.0321^{5}	0.0310^{4}	0.0322^{6}	0.0309^{3}
	$Total$	15^{2}	14^{1}	25^{5}	21^{4}	34^{6}	17^{3}

Tabela 2.24: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 3.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0972^{6}	-0.0941^{4}	-0.0330^{3}	-0.0101^{1}	0.0967^{5}	0.0296^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.3248^{2}	0.3082^{1}	0.3690^{5}	0.3473^{4}	0.3993^{6}	0.3261^{3}
	$Bias(\lambda)$	2.5329^{5}	0.3200^{1}	1.5306^{2}	1.6084^{3}	3.4187^{6}	1.7872^{4}
20	$RMSE(\lambda)$	8.2576^{3}	4.1980^{1}	8.6988^{4}	9.4400^{5}	12.7687^{6}	7.2832^{2}
	D_{abs}	0.0579^{1}	0.0581^{2}	0.0598^{5}	0.0588^{4}	0.0600^{6}	0.0582^{3}
	D_{max}	0.0981^{3}	0.0952^{1}	0.1004^{5}	0.0986^{4}	0.1037^{6}	0.0976^{2}
	$Total$	20^{3}	10^{1}	24^{5}	21^{4}	35^{6}	16^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0368^{5}	-0.0561^{6}	-0.0140^{3}	0.0023^{1}	0.0359^{4}	0.0111^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1888^{1}	0.1911^{2}	0.2200^{5}	0.2025^{4}	0.2266^{6}	0.1965^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.7479^{5}	-0.0538^{1}	0.4162^{2}	0.4967^{3}	0.8827^{6}	0.5436^{4}
50	$RMSE(\lambda)$	2.3463^{4}	1.7702^{1}	2.4371^{5}	2.3265^{3}	2.8853^{6}	2.2713^{2}
	D_{abs}	0.0364^{1}	0.0368^{2}	0.0379^{5}	0.0370^{4}	0.0379^{6}	0.0368^{3}
	D_{max}	0.0615^{2}	0.0613^{1}	0.0642^{5}	0.0626^{4}	0.0651^{6}	0.0621^{3}
	$Total$	18^{3}	13^{1}	25^{5}	19^{4}	34^{6}	17^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0189^{5}	-0.0334^{6}	-0.0063^{3}	0.0041^{1}	0.0183^{4}	0.0062^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1300^{1}	0.1322^{2}	0.1522^{5}	0.1390^{4}	0.1545^{6}	0.1366^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.3532^{5}	-0.0723^{1}	0.1959^{2}	0.2523^{3}	0.4029^{6}	0.2606^{4}
100	$RMSE(\lambda)$	1.3678^{2}	1.1714^{1}	1.4655^{5}	1.3956^{4}	1.5974^{6}	1.3729^{3}
	D_{abs}	0.0257^{1}	0.0259^{2}	0.0267^{5}	0.0261^{4}	0.0267^{6}	0.0260^{3}
	D_{max}	0.0433^{1}	0.0434^{2}	0.0454^{5}	0.0441^{4}	0.0457^{6}	0.0439^{3}
	$Total$	15^{2}	14^{1}	25^{5}	20^{4}	34^{6}	18^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0095^{5}	-0.0198^{6}	-0.0032^{3}	0.0029^{1}	0.0090^{4}	0.0031^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.0904^{1}	0.0918^{2}	0.1063^{5}	0.0965^{4}	0.1071^{6}	0.0956^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.1686^{5}	-0.0645^{1}	0.0916^{2}	0.1258^{4}	0.1894^{6}	0.1240^{3}
200	$RMSE(\lambda)$	0.8717^{2}	0.8020^{1}	0.9570^{5}	0.9031^{4}	1.0000^{6}	0.8940^{3}
	D_{abs}	0.0182^{1}	0.0183^{2}	0.0189^{5}	0.0184^{4}	0.0189^{6}	0.0184^{3}
	D_{max}	0.0306^{1}	0.0306^{2}	0.0321^{5}	0.0311^{4}	0.0322^{6}	0.0310^{3}
	$Total$	15^{2}	14^{1}	25^{5}	21^{4}	34^{6}	17^{3}

Tabela 2.25: Resultados das simulações para $\theta = 1.0$ e $\lambda = 5.0$.

n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0855^{6}	-0.0832^{4}	-0.0269^{2}	-0.0073^{1}	0.0850^{5}	0.0279^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.2885^{3}	0.2724^{1}	0.3178^{5}	0.3010^{4}	0.3444^{6}	0.2861^{2}
	$Bias(\lambda)$	4.5633^{5}	0.6744^{1}	2.7352^{2}	2.9426^{3}	6.1029^{6}	3.2333^{4}
20	$RMSE(\lambda)$	16.0412^{3}	19.6448^{5}	14.5284^{2}	18.3800^{4}	22.4466^{6}	13.5087^{1}
	D_{abs}	0.0582^{1}	0.0586^{3}	0.0601^{5}	0.0591^{4}	0.0602^{6}	0.0585^{2}
	D_{max}	0.0988^{3}	0.0962^{1}	0.1006^{5}	0.0990^{4}	0.1038^{6}	0.0981^{2}
	$Total$	21^{4}	15^{2}	21^{4}	20^{3}	35^{6}	14^{1}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0327^{5}	-0.0477^{6}	-0.0111^{3}	0.0026^{1}	0.0320^{4}	0.0107^{2}
	$RMSE(\theta)$	0.1683^{1}	0.1686^{2}	0.1904^{5}	0.1771^{4}	0.1966^{6}	0.1727^{3}
	$Bias(\lambda)$	1.3143^{5}	-0.0304^{1}	0.7628^{2}	0.8863^{3}	1.5532^{6}	0.9742^{4}
50	$RMSE(\lambda)$	4.1378^{4}	3.0503^{1}	4.3400^{5}	4.0929^{3}	5.2075^{6}	3.9928^{2}
	D_{abs}	0.0367^{1}	0.0370^{3}	0.0379^{5}	0.0371^{4}	0.0379^{6}	0.0369^{2}
	D_{max}	0.0620^{2}	0.0618^{1}	0.0643^{5}	0.0628^{4}	0.0651^{6}	0.0624^{3}
	$Total$	18^{3}	14^{1}	25^{5}	19^{4}	34^{6}	16^{2}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0164^{5}	-0.0286^{6}	-0.0053^{2}	0.0035^{1}	0.0160^{4}	0.0056^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.1158^{1}	0.1171^{2}	0.1320^{5}	0.1219^{4}	0.1342^{6}	0.1201^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.6042^{5}	-0.0943^{1}	0.3453^{2}	0.4345^{3}	0.6884^{6}	0.4529^{4}
100	$RMSE(\lambda)$	2.3229^{3}	1.9679^{1}	2.4526^{5}	2.3456^{4}	2.6858^{6}	2.3136^{2}
	D_{abs}	0.0259^{1}	0.0261^{2}	0.0268^{5}	0.0262^{4}	0.0268^{6}	0.0261^{3}
	D_{max}	0.0437^{1}	0.0437^{2}	0.0456^{5}	0.0443^{4}	0.0458^{6}	0.0442^{3}
	$Total$	16^{2}	14^{1}	24^{5}	20^{4}	34^{6}	18^{3}
n	Qtd	MLE	MPS	OLS	WLS	CM	AD
	$Bias(\theta)$	0.0084^{5}	-0.0167^{6}	-0.0025^{1}	0.0026^{2}	0.0080^{4}	0.0029^{3}
	$RMSE(\theta)$	0.0808^{1}	0.0817^{2}	0.0926^{5}	0.0850^{4}	0.0933^{6}	0.0844^{3}
	$Bias(\lambda)$	0.2928^{5}	-0.0861^{1}	0.1660^{2}	0.2187^{3}	0.3270^{6}	0.2200^{4}
200	$RMSE(\lambda)$	1.4742^{2}	1.3471^{1}	1.5907^{5}	1.5101^{4}	1.6663^{6}	1.4987^{3}
	D_{abs}	0.0183^{1}	0.0184^{2}	0.0189^{5}	0.0185^{4}	0.0189^{6}	0.0185^{3}
	D_{max}	0.0309^{1}	0.0309^{2}	0.0322^{5}	0.0313^{4}	0.0323^{6}	0.0313^{3}
	$Total$	15^{2}	14^{1}	23^{5}	21^{4}	34^{6}	19^{3}

2.5 Comentários

O método de estimação por máxima verossimilhança possui propriedade de ser consistente, assintoticamente normal e assintoticamente eficiente em condições muito gerais. No entanto, em algumas situações, tais como na estimação dos parâmetros de mistura de distribuições contínuas, distribuições com caudas pesadas com parâmetros de escala e de locação desconhecidos o estimador MLE pode ser inconsistente ou nem existir.

Frequentemente o estimador MPS existe e é consistente mesmo quando o estimador MLE pode não existir. Espera-se que o estimador MPS seja mais eficiente que o estimador MLE em pequenas amostras, quando a função de densidade é enviesada e/ou as caudas são pesadas.

Neste trabalho, o método de estimação via MPS mostrou-se ser um bom estimador para os parâmetros das extensões da distribuição de Lindley de um parâmetro obtidas pelo processo de composição. Além disso, o estimador MPS apresentou-se ser mais eficiente que o estimador MLE para pequenas amostras.

Pelas simulações, tem-se algumas conclusões da estimação dos parâmetros das três distribuições apresentadas, são elas: distribuição Lindley Extendida Marshall-Olkin, Lindley-Poisson Truncada no Zero e Lindley-Poisson *Size-Biased*.

(i) os vícios para todos os estimadores tendem a zero para n grande, isto é, os estimadores são assintoticamente não viciados;

(ii) os RMSE para todos os estimadores dos parâmetros tendem a zero para n grande, isto é, todos os estimadores são consistentes;

(iii) o método MPS apresentou o menor rank total em quase todos estimadores dos parâmetros, exceto para os estimadores da distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased* no cenário de riscos competitivos;

(iv) as três distribuições apresentam função de densidade (f.d.p.) com comportamentos decrescente e unimodal;

(v) as três distribuições apresentam função de risco com comportamentos crescente, decrescente e crescente-decrescente-crescente;

Um fator relevante foi a eficiência do programa Ox nas simulações. Como mencionado anteriormente, para cada distribuição, foram geradas 500.000 pseudo-amostras e, o programa Ox apresentou todas as estimativas. Dificilmente outro programa conseguiria um resultado tão satisfatório.

Pode-se observar que as distribuições Lindley-Poisson Truncada no Zero e a Lindley-Poisson *Size-Biased* apresentam expressões mais complexas para as funções de densidade, de distribuição, de sobrevivência e de risco, o que dificulta os estudos das suas propriedades matemáticas. E portanto, não foi possível obter algumas expressões analiticamente como aconteceu com a distribuição Extendida Marshall-Olkin. Para trabalhos futuros, estudar essas expressões mais delicadamente pode ser um boa opção.

Capítulo

3

Considerações Finais

Nesse trabalho apresentou-se três possíveis distribuições de probabilidade para a análise de dados de vida, são elas: a distribuição Extendida Marshall-Olkin, a distribuição Lindley-Poisson Truncada no Zero e a distribuição Lindley-Poisson *Size-Biased*. Para a formulação dos modelos, utilizou-se da teoria de processo de composição.

Quando uma nova distribuição de probabilidade é obtida, geralmente apresenta mais de uma forma para a função de risco, no entanto, pode tornar-se um modelo com muitos parâmetros, como exemplo, na composição de distribuições de dois parâmetros cada, o modelo resultante terá quatro parâmetros. Se a função de distribuição não possui forma fechada o gasto computacional pode ser muito grande.

A vantagem em utilizar a distribuição de Lindley de um parâmetro na composição de distribuição é que todas as distribuições propostas possuem apenas dois parâmetros e mais de uma forma para a função de risco. Mesmo não podendo ser expressas de forma fechada, elas possuem vários comportamentos para a função de risco, são eles: comportamento crescente, decrescente e crescente-decrescente-crescente.

O objetivo de extender a distribuição de Lindley de um parâmetro através do modelo de composição de distribuição foi alcançado. Mas vale ressaltar, que ainda há muito o que estudar sobre tais distribuições, por exemplo, obter outras propriedades matemáticas, utilizar outros métodos de estimação, aplicar a metodologia desenvolvida em dados reais da literatura e estudar via Simulação Monte-Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) algumas propriedades dos estimadores.

Referências Bibliográficas

ADAMIDIS, K.; DIMITRAKOPOULOU, T.; LOUKAS, S. On an extension of the Exponential-Geometric distribution. *Statistics & Probability Letters*, v. 73, p. 259–269, 2005.

ADAMIDIS, K. E.; LOUKAS, S. A lifetime distribution with decreasing failure rate. *Statistics & Probability Letters*, v. 39, n. 1, p. 35–42, 1998.

ARNOLD, B. C.; BALAKRISHNAN, N.; NAGARAJA, H. N. *A first course in order statistics*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008. (Classics in Applied Mathematics, v. 54).

BAKOUCH, H. S. et al. An extended Lindley distribution. *Journal of the Korean Statistical Society*, v. 41, n. 1, p. 75 – 85, 2012.

BAKOUCH, H. S. et al. An exponentiated Exponential Binomial distribution with application. *Statistics & Probability Letters*, v. 82, n. 6, p. 1067 – 1081, 2012.

BARRETO-SOUZA, W.; BAKOUCH, H. S. A new lifetime model with decreasing failure rate. *Statistics: A Journal of Theoretical and Apllied Statistics*, v. 47, n. 2, p. 465–476, 2013.

BARRETO-SOUZA, W.; CRIBARI-NETO, F. A generalization of the Exponential-Poisson distribution. *Statistics & Probability Letters*, v. 79, n. 24, p. 2493–2500, 2009.

BARRETO-SOUZA, W.; MORAIS, A. L.; CORDEIRO, G. M. The Weibull-Geometric distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 81, n. 5, p. 645–657, 2011.

BORAH, M.; BEGUM, R. A. Some properties of Poisson-Lindley and its derived distributions. *Journal of the Indian Statistical Association*, v. 40, n. 1, p. 13–25, 2002.

BORAH, M.; DEKA, N. A. Poisson-Lindley and some of its mixture distributions. *Pure and Applied Mathematika Sciences*, v. 53, n. 1-2, p. 1–8, 2001.

BORAH, M.; DEKA, N. A. A study on the inflated Poisson Lindley distribution. *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics*, v. 54, n. 3, p. 317–323, 2001.

CANCHO, V. G.; LOUZADA-NETO, F.; BARRIGA, G. D. C. The Poisson-Exponential lifetime distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 55, n. 1, p. 677–686, 2011.

CHAHKANDI, M.; GANJALI, M. On some lifetime distributions with decreasing failure rate. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 53, n. 12, p. 4433–4440, 2009.

CHECHILE, R. A. Mathematical tools for hazard function analysis. *Journal of Mathematical Psychology*, v. 47, n. 5 - 6, p. 478 – 494, 2003.

CHENG, R. C. H.; AMIN, N. A. K. *Maximum product-of-spacings estimation with applications to the lognormal distribution*. [S.l.], 1979.

CHENG, R. C. H.; AMIN, N. A. K. Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, v. 45, n. 3, p. 394–403, 1983.

CIUMARA, R.; PREDA, V. The Weibull-Logarithmic distribution in lifetime analysis and its properties. *in The XIIIth International Conference Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 2009.

COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. *Análise de Sobrevivência Aplicada*. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

COORAY, K. Generalization of the Weibull distribution: the odd Weibull family. *Statistical Modelling. An International Journal*, v. 6, n. 3, p. 265–277, 2006.

DOORNIK, J. A. *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox, 3rd ed.* London: Timberlake Consultants Press and Oxford, 2007.

GHITANY, M. E.; AL-HUSSAINI, E. K.; AL-JARALLAH, R. A. Marshall-Olkin extended Weibull distribution and its application to censored data. *Journal of Applied Statistics*, v. 32, n. 10, p. 1025–1034, 2005.

GHITANY, M. E. et al. Marshall-Olkin extended Lindley distribution and its application. *International Journal of Applied Mathematics*, v. 25, n. 5, p. 709–721, 2012.

GHITANY, M. E.; AL-MUTAIRI, D. K.; NADARAJAH, S. Zero-truncated Poisson-Lindley distribution and its application. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 79, n. 3, p. 279–287, 2008. ISSN 0378-4754.

GHITANY, M. E.; AL-MUTARI, D. K. Size-biased Poisson-Lindley distribution and its application. *METRON - International Journal of Statistics*, v. 66, n. 3, p. 299–311, 2008.

GHITANY, M. E. et al. A two-parameter weighted Lindley distribution and its applications to survival data. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 81, p. 1190–1201, 2011.

GHITANY, M. E.; ATIEH, B.; NADARAJAH, S. Lindley distribution and its application. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 78, n. 4, p. 493–506, 2008.

GLASER, R. E. Bathtub and related failure rate characterizations. *Journal of the American Statistical Association*, v. 75, n. 371, p. 667–672, 1980.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products*. Amsterdam: Elsevier - Academic Press, 2007. ISBN 978-0-12-373637-6; 0-12-373637-4.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized exponential distributions. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, v. 41, n. 2, p. 173–188, 1999.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Introduction of shape/skewness parameter(s) in a probability distribution. *Journal of Applied Statistical Science*, v. 7, n. 2, p. 153–171, 2009.

HEMMATI, F.; KHORRAM, E.; REZAKHAH, S. A new three-parameter ageing distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, v. 141, n. 7, p. 2266–2275, 2011.

JODRÁ, P. Computer generation of random variables with Lindley or Poisson-Lindley distribution via the Lambert w function. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 81, n. 4, p. 851–859, 2010.

KUNDU, D.; GUPTA, R. D. Estimation of p(y<x) for weibull distributions. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 55, n. 2, p. 270–280, 2006.

KUŞ, C. A new lifetime distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 51, n. 9, p. 4497–4509, 2007.

LAWLESS, J. F. *Statistical models and methods for lifetime data*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2003.

LINDLEY, D. *Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint, Part II: Inference*. New York: Cambridge University Press, 1965.

LINDLEY, D. V. Fiducial distributions and Bayes' theorem. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Methodological*, v. 20, p. 102–107, 1958.

LOUZADA, F.; ROMAN, M.; CANCHO, V. G. The complementary Exponential Geometric distribution: Model, properties, and a comparison with its counterpart. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 55, n. 8, p. 2516–2524, 2011.

LU, W.; SHI, D. A new compounding life distribution: the Weibull-Poisson distribution. *Journal of Applied Statistics*, v. 39, n. 1, p. 21–38, 2012.

LUCENO, A. Fitting the generalized pareto distribution to data using maximum goodness-of-fit estimators. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 51, n. 2, p. 904 – 917, 2006.

MAHMOUDI, E.; JAFARI, A. A. A generalized Exponential-Power series distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 56, n. 1, p. 4047–4066, 2012.

MAHMOUDI, E.; SHIRAN, M. Exponentiated Weibull-Geometric distribution and its applications. *arXiv:1206.4008v1*, 2012.

MAHMOUDI, E.; ZAKERZADEH, H. Generalized Poisson Lindley distribution. *Communications in Statistics Theory and Methods*, v. 39, p. 1785–1798, 2010.

MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, v. 84, n. 3, p. 641–652, 1997. ISSN 0006-3444.

MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. The Lindley distribution applied to competing risks lifetime data. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, XX, p. 000–000, 2011.

MIR, K. A.; AHMAD, M. Size-biased distributions and their applications. *Pakistan Journal of Statistics*, v. 25, n. 3, p. 283–294, 2009.

MORAIS, A. L.; BARRETO-SOUZA, W. A compound class of Weibull and power series distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 55, n. 3, p. 1410–1425, 2011.

NADARAJAH, S.; BAKOUCH, H. S.; TAHMASBI, R. A generalized Lindley distribution. *Sankhyã, B*, v. 73, n. 2, p. 331–359, 2011.

NADARAJAH, S.; JAYAKUMAR, K.; RISTIĆ, M. M. A new family of lifetime models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 83, n. 8, p. 1–16, 2013.

PINTILIE, M. *Competing Risks - A Practical Perspective*. Southern Gate, Chichester: John Wiley & Sons, 2006.

RANNEBY, B. The maximum spacing method. An estimation method related to the maximum likelihood method. *Scandinavian Journal of Statistics. Theory and Applications*, v. 11, n. 2, p. 93–112, 1984.

REZAEI, S.; TAHMASBI, R. A new lifetime distribution with increasing failure rate: Exponential truncated Poisson. *Journal of Basic and Applied Scientific Research*, v. 2, n. 2, p. 1749–1762, 2012.

RISTIĆ, M. M.; NADARAJAH, S. A new lifetime distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, iFirst, p. 1–16, 2012.

ROHATGI, V. K.; SALEH, A. K. M. E. *An Introduction to Probability and Statistics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000.

SANKARAN, M. The discrete Poisson-Lindley distribution. *Biometrics*, v. 26, p. 145–149, 1970.

SILVA, R. B.; BARRETO-SOUZA, W.; CORDEIRO, G. M. A new distribution with decreasing, increasing and upside-down bathtub failure rate. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 54, n. 4, p. 935–944, 2010.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria analítica*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.

TAHMASBI, R.; REZAEI, S. A two-parameter lifetime distribution with decreasing failure rate. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 52, n. 8, p. 3889–3901, 2008.

ZAKERZADEH, H.; DOLATI, A. Generalized Lindley distribution. *Journal of Mathematical Extension*, v. 3, p. 13–25, 2009.

ZAKERZADEH, H.; MAHMOUDI, E. A new two parameter lifetime distribution: model and properties. *arXiv:1204.4248v1*, 2012.

ZAMANI, H.; ISMAIL, N. Negative Binomial-Lindley distribution and its application. *Journal of Mathematics and Statistics*, v. 6, n. 1, p. 4–9, 2010.