



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Câmpus de São José do Rio Preto

Ricardo Luís Bertolucci Filho

Operadores Semi-Fredholm e Soluções Periódicas

São José do Rio Preto
2024

Ricardo Luís Bertolucci Filho

Operadores Semi-Fredholm e Soluções Periódicas

Dissertação de Mestrado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof^ª. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita

Financiadora: CNPq

São José do Rio Preto
2024

F481o

Filho, Ricardo Luís Bertolucci

Operadores semi-Fredholm e soluções periódicas / Ricardo Luís Bertolucci Filho. -- São José do Rio Preto, 2024
79 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Andréa Cristina Prokopczyk Arita

1. Equações abstratas. 2. Operadores semi-Fredholm. 3. Soluções periódicas. 4. Pontos fixos. 5. Teoria de perturbação. I. Título.

Ricardo Luís Bertolucci Filho

Operadores Semi-Fredholm e Soluções Periódicas

Dissertação de Mestrado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPq

Comissão Examinadora

Prof^a. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
Orientadora

Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) - USP

Prof^a. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (IBILCE) - UNESP

São José do Rio Preto
19 de dezembro de 2024

Aos meus pais e à Milena.

AGRADECIMENTOS

Início este espaço agradecendo às pessoas mais importantes da minha vida: meus pais, Denise e Ricardo.

Não tenho palavras que expressem todo o apoio, sabedoria e incentivo que me deram desde que me conheço por gente. Nos momentos difíceis, suas palavras me proporcionaram resiliência e determinação para prosseguir, transformaram a fadiga em afinho e o desencanto em perspectiva.

Vocês foram meu porto seguro e abrigo emocional quando mais precisei, moldando a pessoa que sou hoje.

Agradeço, também:

À Prof^a. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita, por ser minha orientadora desde a graduação, por toda sua dedicação, conhecimento, paciência, solidariedade e prontidão, além de ter aceitado conduzir nossas reuniões de maneira remota, algo pelo qual serei eternamente grato.

Aos meus professores do Departamento de Matemática, por todas as aulas e ensinamentos, que me proporcionaram uma sólida base sobre a qual posso me apoiar em quaisquer estudos e empreitadas futuras. Em especial, agradeço ao Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz, por seu conhecimento e entusiasmo, transmitidos em todas as disciplinas que tive o privilégio de cursar com ele.

À Milena, por me apoiar em quaisquer de minhas decisões, por tornar cada passo de minha jornada mais leve e agradável, por me motivar com sua força e gentileza, e, principalmente, por ser minha eterna companheira, estando ao meu lado nos momentos de alegria e superação.

Aos amigos que o IBILCE me deu, em especial Lucas, Osvaldo, Tiago, Bernardo, Marlon, Henry e Caíque, com os quais partilhei bons momentos, troquei conhecimentos e vivi experiências que enriqueceram minha jornada.

A todos os integrantes da banca examinadora, por terem aquiescido fazer parte deste momento: Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto, Prof^a. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira, Prof^a. Dra. Marta Cilene Gadotti e Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz.

A todas as pessoas, sejam elas alunos, funcionários ou demais membros da comunidade, com quem convivi durante minha estadia no IBILCE até aqui.

Este trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), que financiou meus estudos por intermédio do processo 131408/2022-4.

*“The road goes ever on and on,
down from the door where it began.
Now far ahead the road has gone,
and I must follow, if I can.”*

— *J. R. R. Tolkien, **The Lord of the Rings***
([24], 2004, p. 35).

RESUMO

Neste trabalho, lidamos com a equação linear não-homogênea de retardo infinito

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + B(t, x_t) + F(t), \quad (L)$$

na qual A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ num espaço de Banach E . Assumindo que esta admite uma solução limitada, nosso objetivo é obter critérios para a existência de soluções periódicas para a equação em questão no espaço de fase abstrato $\mathcal{B}$.

Com esse propósito, empregaremos a teoria de perturbação dos operadores denominados *semi-Fredholm*, para mostrarmos que uma determinada aplicação linear afim definida em $\mathcal{B}$ satisfaz o teorema de ponto fixo estabelecido por Chow e Hale ([5], Theorem 4.1, página 36).

Provaremos que a existência de pontos fixos para a aplicação linear afim supracitada é equivalente a existência de solução periódica para a equação em questão.

A elaboração deste texto tem, em [22], sua primordial referência.

Palavras-chave: Equação Abstrata. Operadores Semi-Fredholm. Soluções Periódicas. Pontos Fixos. Teoria de Perturbação.

ABSTRACT

In this work, we deal with the inhomogeneous linear equation with infinite delay

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + B(t, x_t) + F(t), \quad (\text{L})$$

in which A is the infinitesimal generator of a C_0 -semigroup $(T(t))_{t \geq 0}$ on a Banach space E .

Assuming that it admits a bounded solution, our objective is to obtain criteria on the existence of periodic solutions for the aforementioned equation in the abstract phase space $\mathcal{B}$.

Therefore, we will employ the perturbation theory of operators so called semi-Fredholm operators, to show that a certain affine linear map defined in $\mathcal{B}$ satisfies the fixed point theorem by Chow and Hale ([5], Theorem 4.1, page 36).

We will prove that the existence of fixed points for the aforementioned affine linear application is equivalent to the existence of a periodic solution for the given equation.

The development of this text has, in [22], its primary reference.

Keywords: Abstract Equation. Semi-Fredholm Operators. Periodic Solutions. Fixed Points. Perturbation Theory.

Sumário

1	Introdução	11
2	Preliminares	14
2.1	Teoria geral de semigrupos fortemente contínuos	14
2.2	Operadores e semigrupos compactos	17
2.3	Medida de Kuratowski de não-compacidade	20
2.4	Medida de Kuratowski de não-compacidade de operadores	26
2.5	O espaço de fase $\mathcal{B}$	31
2.6	Operadores semi-Fredholm	35
3	Equações diferenciais lineares não-homogêneas	41
3.1	Existência de solução	41
3.2	Estimativa da solução em $\mathcal{B}$	46
3.3	Operador solução	50
4	Existência de solução periódica	59
4.1	Preliminares	59
4.2	Existência de solução periódica	63
5	Considerações finais	67
5.1	Considerações Finais	67
	Referências	68
	Apêndice A: Análise funcional e topologia	70
	Apêndice B: Cálculo diferencial e integral	72

1 Introdução

Considerando um espaço de Banach E , seja a equação diferencial abstrata com retardo (ou delay) infinito

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + B(t, x_t) + F(t), \quad (L)$$

em que A é gerador de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$, sendo $\mathcal{L}(E)$ a álgebra de Banach dos operadores lineares limitados em E , e $x_t: (-\infty, 0] \rightarrow E$ a função definida por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, para todo $\theta \in (-\infty, 0]$, denominada *história*. Nessa, temos que $B: \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow E$ é uma função contínua, sendo $\mathcal{B}$ o *espaço de fase* relacionado ao problema, cujos elementos são funções $\psi: (-\infty, 0] \rightarrow E$ que satisfazem um determinado conjunto de axiomas (ver Seção 2.5), e linear em sua segunda variável, e $F: \mathbb{R} \rightarrow E$ contínua. Se as funções $B(\cdot, \psi)$ e $F(\cdot)$ na equação (L) forem ω -periódicas, com $\omega > 0$, a denotaremos por $(P_\omega L)$ e, se $F \equiv 0$, denotamos as equações (L) e $(P_\omega L)$ por (L_0) e $(P_\omega L_0)$, respectivamente.

O intuito deste trabalho é, assumindo que a equação $(P_\omega L)$ admite uma solução limitada, obter condições acerca da existência e unicidade de soluções ω -periódicas. Para tanto, faremos uso da teoria de perturbação de uma classe de operadores denominados operadores *semi-Fredholm*, os quais gozam de vantajosas propriedades no que tange tal teoria.

A elaboração deste trabalho tem, no artigo [22], de Shin e Naito, sua primordial referência.

Chow e Hale (em [5], Theorem 4.1 e Corollary 4.1, página 36), com relação a este assunto, obtiveram os seguintes teoremas de ponto fixo para uma aplicação afim $T = L + z$ num espaço de Banach E , com $L \in \mathcal{L}(E)$ e $z \in E$ fixado:

Teorema A. *Se $\text{Im}(I - L)$ é fechado e existe $x_0 \in E$ tal que $\{x_0, T(x_0), T^2(x_0), \dots\}$ é limitado, então T admite um ponto fixo.*

Teorema B. *Se existe $x_0 \in E$ tal que $\{x_0, T(x_0), T^2(x_0), \dots\}$ é relativamente compacto em E , então T admite ponto fixo em E .*

As demonstrações dos Teoremas A e B acima se baseiam, respectivamente, nos teoremas de Hahn-Banach e ponto fixo de Schauder.

Chow e Hale aplicaram o Teorema A a equação $(P_\omega L)$, de retardo finito, no caso em que $A \equiv 0$ e $E = \mathbb{R}^n$ para provar que, se essa admite uma solução limitada, então existe uma solução ω -periódica. Motivados por isso, enunciaremos uma propriedade similar para a equação $(P_\omega L)$ em nosso contexto:

(BP) Se a equação $(P_\omega L)$ admite uma solução limitada em $\mathcal{B}$, então existe uma solução ω -periódica para a equação $(P_\omega L)$.

A propriedade (BP) exposta acima não vale, em geral, para a equação com retardo infinito. Nosso propósito primário é, pois bem, descobrir sob quais condições a equação (L) apresenta a propriedade (BP), em relação a soluções mild (ver Capítulo 3).

Na demonstração de [5], é essencial a hipótese de que L seja uma α -contração (ver Seção 2.4), para que a imagem $\text{Im}(I - L)$ seja fechada em E . Porém, no caso da equação $(P_\omega L)$, nem sempre o operador $L \in \mathcal{L}(E)$ será uma α -contração.

Mais recentemente utilizando o Teorema B, Hino, Murakami e Yoshizawa demonstraram, em [12], que, se $\mathcal{B}$ é um espaço com memória amortecida, se o C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto, para $t > 0$, então a equação (L) admite uma solução mild ω -periódica, desde que admita uma solução mild que seja limitada em E ; aqui, a compacidade do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ mostra-se essencial. Similarmente, Li, Lin e Li, em [13], obtiveram condições para a existência de soluções periódicas para a equação (L) com retardo para o caso em que $A \equiv 0$ e $E = \mathbb{R}^n$. Contudo, o Teorema B mostra-se insuficiente até mesmo para o caso em que $B(t, \cdot)$ é compacto, para cada $t \in \mathbb{R}$, ou quando o C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto para $t \geq t_0$, em que $t_0 > 0$.

No presente trabalho, lidaremos com a propriedade (BP) para a $(P_\omega L)$, utilizando o Teorema A, que se mostrará útil, inclusive, nos casos mencionados no último parágrafo acima. É difícil, em geral, garantir que a imagem $\text{Im}(I - L)$ seja fechada em E , como requerido no Teorema A, pois L pode não ser uma α -contração, como mencionado acima. Sendo assim, pode parecer que o Teorema A não é útil o suficiente para nosso propósito. Entretanto, aplicando a teoria dos operadores semi-Fredholm (Seção 2.6), provaremos que o Teorema A é, de fato, eficaz no que tange a equação $(P_\omega L)$.

O resultado principal desse texto é o Teorema 4.1, cujo enunciado lê-se:

Teorema 4.1 (Teorema de existência de soluções periódicas). *Suponha que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo compacto em E , ou que $B(t, \cdot)$ é um operador compacto, para cada $t \in \mathbb{R}$. Se $\hat{\tau} < 0$ e a equação $(P_\omega L)$ admite uma solução $\mathcal{B}$ -limitada, então ela admite uma solução ω -periódica.*

A demonstração do teorema acima requer diversos pré-requisitos, os quais serão, de maneira cuidadosa, consolidados ao longo da dissertação.

Uma vez desenvolvida a teoria dos operadores semi-Fredholm, o Teorema A acima reescreve-se na forma do Teorema 2.52:

Teorema 2.52. *Seja $T = L + z$ uma aplicação linear afim no espaço de Banach E , em que $L \in \mathcal{L}(E)$ e $z \in E$ fixado. Se $I - L \in \Phi_+(E)$ e existe $x_0 \in E$ tal que $\{x_0, T(x_0), T^2(x_0), \dots\}$ é limitado, então $\mathcal{F}(T) \neq \emptyset$ e $\dim(\mathcal{F}(T)) < \infty$.*

Acima, $I - L \in \Phi_+(E)$ significa que o operador $I - L$ pertence a classe dos operadores semi-Fredholm em E , em que I é o operador idêntico em E , $L \in \mathcal{L}(E)$, e $\mathcal{F}(T)$ é o conjunto dos pontos fixos de T . Sendo assim, fornecida uma condição inicial $x_0 = \phi \in \mathcal{B}$, então a equação $(P_\omega L_0)$ admite uma única solução mild $x(\cdot, 0, \phi)$ (Teorema 3.4). Veremos (Seção 3.3) que o operador solução $U(t, 0)$ da equação $(P_\omega L_0)$, tal que $U(t, 0)\phi = x_t(0, \phi)$, para $t \geq 0$, pode ser decomposto na forma $U(t, 0)\phi = \hat{T}(t)\phi + K(t, 0)\phi$, em que $(\hat{T}(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathcal{B})$ é um C_0 -semigrupo em $\mathcal{B}$, definido por

$$(\hat{T}(t)\phi)(\theta) := \begin{cases} T(t + \theta)\phi(0), & t + \theta \geq 0, \\ \phi(t + \theta), & t + \theta \leq 0, \end{cases}$$

e $K(t, 0): \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um operador tal que

$$(K(t, 0)\phi)(\theta) = \begin{cases} \int_0^{t+\theta} T(t+\theta-s) B(s, x_s(0, \phi)) ds, & t+\theta \geq 0, \\ 0, & t+\theta \leq 0. \end{cases}$$

Provaremos, no Capítulo 4, que a existência de soluções periódicas para a equação $(P_\omega L)$ será equivalente a existência de pontos fixos para a aplicação afim

$$\psi \in \mathcal{B} \longmapsto U(\omega, 0)\psi + \phi \in \mathcal{B},$$

em que $\phi \in \mathcal{B}$ é uma função fixa, determinada por uma solução específica da equação $(P_\omega L)$. Seguirá, portanto, do Teorema 2.52, que, se $I - U(\omega, 0) \in \Phi_+(\mathcal{B})$, então a equação $(P_\omega L)$ admite a propriedade (BP) enunciada anteriormente.

A teoria dos operadores semi-Fredholm implicará o Teorema 2.53 a seguir:

Teorema 2.53. *Suponha que $I - \hat{T}(\omega) \in \Phi_+(\mathcal{B})$. Então:*

1. *Se $K(\omega, 0)$ é um operador compacto, então a equação $(P_\omega L)$ admite a propriedade (BP);*
2. *Existe $\eta > 0$ tal que, se $\|K(\omega, 0)\| < \eta$, então a equação $(P_\omega L)$ admite a propriedade (BP), e o conjunto de suas soluções periódicas tem a estrutura de um espaço linear afim de dimensão $\leq \dim(\text{Ker}(I - \hat{T}(\omega)))$.*

Sendo assim, temos dois problemas a nossa frente. O primeiro consiste em verificarmos sob quais condições é válido que $I - \hat{T}(\omega) \in \Phi_+(\mathcal{B})$. Para tanto, utilizaremos a α -medida de não-compacidade no espaço de fase abstrato $\mathcal{B}$. Em particular, provaremos, na Seção 2.6, que, se o raio espectral essencial $r_e(L)$, de um operador $L \in \mathcal{L}(E)$, for tal que $r_e(L) < 1$, então $I - L \in \Phi_+(E)$. Diante disso, na Seção 3.3, utilizaremos este resultado em nosso contexto, obtendo condições para que $I - \hat{T}(\omega) \in \Phi_+(\mathcal{B})$.

O segundo problema consiste na investigação de propriedades de perturbação do operador $K(\omega, 0)$. Caso os operadores $T(t)$ e $B(t, \cdot)$ na equação $(P_\omega L)$ sejam compactos, veremos que $K(\omega, 0)$ também o será (vide a Proposição 3.10). Caso contrário, voltamos-nos a norma $\|K(\omega, 0)\|$, que é estimada em termos de $\|T(t)\|$ e $\|B(t, \cdot)\|$.

Combinando estes resultados, estaremos aptos para a consolidação da propriedade (BP) para a equação $(P_\omega L)$, que florescerá na forma do Teorema 4.1.

2 Preliminares

A finalidade deste capítulo é estruturar o arcabouço teórico necessário para a análise da existência e unicidade de soluções periódicas para a equação (L). Nas seções 2.1 e 2.2, relembramos alguns resultados da teoria de C_0 -semigrupos e operadores lineares compactos, respectivamente.

As seções 2.3 e 2.4 são dedicadas ao estudo da medida de Kuratowski de não-compacidade de conjuntos limitados de espaços métricos e operadores em espaços de Banach, nessa ordem. Por fim, nas seções 2.5 e 2.6, introduzimos o espaço de fase $\mathcal{B}$ relativo a equação (L), e os operadores semi-Fredholm, cuja teoria de perturbação será empregada para atingirmos nossos objetivos.

2.1 Teoria geral de semigrupos fortemente contínuos

Para nossos fins, tratemos de algumas definições e resultados clássicos da teoria de C_0 -semigrupos de operadores lineares limitados, que podem ser encontrados em [19].

No que segue, E é um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, munido da norma $\|\cdot\|$.

Denotemos por $\mathcal{L}(E)$ a álgebra de Banach dos operadores lineares limitados em E , na norma de operador $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} := \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

Definição 2.1 (Semigrupo de operadores lineares limitados). Seja a aplicação $t \in [0, +\infty) \longrightarrow T(t) \in \mathcal{L}(E)$. Dizemos que a família $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ é um *semigrupo de operadores lineares limitados* em E quando:

1. $T(0) = I$, em que I é o operador idêntico em E ;
2. $T(s)T(t) = T(s+t)$, para todos $s, t \in [0, +\infty)$ (propriedade de semigrupo).

Definição 2.2 (Gerador infinitesimal). O operador linear A , definido por

$$A(x) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)(x) - x}{t},$$

para $x \in \mathcal{D}(A) = \left\{ x \in E : \text{existe } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)(x) - x}{t} \right\}$, é chamado de *gerador infinitesimal* do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$.

Definição 2.3 (C_0 -Semigrupo). Dizemos que um semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ é *fortemente contínuo* (ou um C_0 -semigrupo) quando

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)(x) = x,$$

para todo $x \in E$.

Teorema 2.4 (Limitação exponencial). *Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ para as quais $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Ver [19], Theorem 2.2, página 4. $\square$

Corolário 2.5. *Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, então, para todo $x \in E$, a aplicação $t \in [0, +\infty) \mapsto T(t)(x) \in E$ é contínua.*

Teorema 2.6. *Se $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ é um C_0 -semigrupo cujo gerador infinitesimal é A , são válidas as afirmações:*

1. Para todo $x \in E$,

a) a aplicação $s \in [0, +\infty) \mapsto T(s)(x) \in E$ é Bochner-integrável em qualquer intervalo compacto da forma $[t, t+h]$, com $t, h \geq 0$, e

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)(x) ds = T(t)(x);$$

b) $\int_0^t T(s)(x) ds \in D(A)$ e

$$A \left(\int_0^t T(s)(x) ds \right) = T(t)(x) - x.$$

2. Para todos $x \in D(A)$ e $t \in [0, +\infty)$,

a) $T(t)(x) \in D(A)$ e a aplicação $t \in [0, +\infty) \mapsto T(t)(x) \in E$ é diferenciável, com

$$\frac{d}{dt} T(t)(x) = AT(t)(x) = T(t) A(x);$$

b)

$$T(t)(x) - T(s)(x) = \int_s^t AT(u)(x) du = \int_s^t T(u) A(x) du.$$

Demonstração: Ver [19], Theorem 2.4, página 4. $\square$

Corolário 2.7. *Se A é o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, então o domínio de A , $D(A)$, é denso em E e A é um operador linear fechado.*

Teorema 2.8. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ C_0 -semigrupos cujos geradores infinitesimais são A e B , respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Ver [19], Theorem 2.6, página 6. $\square$

Teorema 2.9. *Seja A o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$. Se $D(A^n)$ denota o domínio do operador A^n , então $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em E .*

Demonstração: Ver [19], Theorem 2.7, página 6. $\square$

Definição 2.10 (Valor regular, resolvente e espectro). Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um *valor regular* do operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se $T - \lambda I$ é bijetiva e $(T - \lambda I)^{-1}: F \rightarrow E$ é contínua. O conjunto de todos os valores regulares de T é chamado de *conjunto resolvente* de T , e é denotado por $\rho(T)$.

O complementar de $\rho(T)$, $\mathbb{C} \setminus \rho(T)$, é denominado *espectro* de T , e é denotado por $\sigma(T)$.

Quando E e F são espaços de Banach, temos, do *Teorema da aplicação aberta* (ver Corolário A.5), que $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: (T - \lambda I) \text{ é bijetiva}\}$. Assim sendo, $\sigma(T)$ é constituído pelos escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais $T - \lambda I$ não é limitado ou bijetivo.

Definição 2.11 (C_0 -Semigrupo de contrações). Dizemos que um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é de *contrações* se, na limitação $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, ilustrada no Teorema 2.4, se tem, para todo $t \geq 0$, que $\omega = 0$ e $M = 1$.

Definição 2.12 (Família resolvente). Seja $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear em E , não necessariamente limitado. A família $\{R(\lambda, A)\}_{\lambda \in \rho(A)} \subset \mathcal{L}(E)$, de operadores lineares limitados em E , em que $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$ e $\lambda \in \rho(A)$, é chamada *família resolvente* de A .

Teorema 2.13 (Hille-Yosida). Um operador linear A , de domínio $D(A) \subset E$, não necessariamente limitado, é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$ se, e somente se:

1. A é fechado e $D(A)$ é denso em E ;
2. O conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, é tal que $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ (isto é, $\rho(A)$ contém a semirreta positiva, com exceção do 0) e, para todo $\lambda > 0$, se tem

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Ver [19], Theorem 3.1, páginas 8 (condição necessária) e 10 (condição suficiente). $\square$

Corolário 2.14. Se A é o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$, então o conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, contém o semiplano direito aberto do plano complexo, i.e., $\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(\lambda) > 0\}$ e, para tais λ , é válido que

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)}.$$

Corolário 2.15 (Teorema de Hille-Yosida generalizado). Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$, se, e somente se:

1. A é fechado e $D(A)$ é denso em E ;
2. O conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, contém o intervalo $(\omega, +\infty)$ e, para $\lambda > \omega$, se tem

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Ver [19], Theorem 5.3, página 20. $\square$

2.2 Operadores e semigrupos compactos

Sejam E e F espaços vetoriais normados, $B_E := \{x \in E: \|x\| \leq 1\}$ a bola unitária fechada em E e $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço dos operadores lineares limitados de E em F .

Definição 2.16 (Operadores compactos). Um operador linear $T: E \rightarrow F$, em que E e F são espaços vetoriais normados, é *compacto* se a imagem da bola unitária fechada $B_E \subset E$ é um conjunto relativamente compacto de F (isto é, $\overline{T(B_E)}$ é compacto em F).

Podemos estabelecer, de imediato, os seguintes resultados:

Proposição 2.17. a) *Todo operador compacto é contínuo.*
 b) *Todo operador linear contínuo de posto finito¹ é compacto.*
 c) *O espaço normado E possui dimensão finita se, e somente se, o operador idêntico I em E é compacto.*

Demonstração: a) Sendo $T: E \rightarrow F$ compacto, segue que $\overline{T(B_E)}$ é compacto em F .

Então, $\overline{T(B_E)}$ é fechado e limitado em F , de modo que $T(B_E)$ também é limitado.

Como um operador linear é contínuo se, e somente se, leva subconjuntos limitados de E em subconjuntos limitados de F , conclui-se que T é contínuo.

b) Segue do fato que, em dimensão finita, os conjuntos compactos são precisamente aqueles que são fechados e limitados.

c) Segue do fato que um espaço normado é de dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada nesse é compacta (Lema de Riesz, Teorema A.1). $\square$

Proposição 2.18. *Se E e F são espaços normados, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *T é compacto.*
 b) *$\overline{T(A)}$ é compacto em F , para todo $A \subset E$ limitado.*
 c) *Para toda sequência limitada (x_n) em E , a sequência $(T(x_n))$ admite subsequência convergente em F .*

Demonstração: (a) $\implies$ (b) Seja $A \subset E$ limitado, de modo que $\|x\| \leq M$, para algum $M > 0$, para todo $x \in A$. Logo, $\frac{1}{M}A \subseteq B_E$ e $\frac{1}{M}\overline{T(A)} = \overline{\frac{1}{M}T(A)} \subseteq \overline{T(B_E)}$, de forma que $\frac{1}{M}\overline{T(A)}$ é compacto, pois é um subconjunto fechado do compacto $\overline{T(B_E)}$.

(b) $\implies$ (c) Segue, pois, em espaços métricos, toda sequência num conjunto compacto admite subsequência convergente.

(c) $\implies$ (a) Considere (y_n) uma sequência em $\overline{T(B_E)}$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_E$ tal que $\|T(x_n) - y_n\| < 1/n$.

Seja $(T(x_{n_j}))$ subsequência de $(T(x_n))$ tal que $T(x_{n_j}) \rightarrow y$, para algum $y \in F$. Como

$$\|y_{n_j} - y\| \leq \|y_{n_j} - T(x_{n_j})\| + \|T(x_{n_j}) - y\| \leq 1/n_j + \|T(x_{n_j}) - y\|,$$

segue, fazendo $j \rightarrow \infty$, que $y_{n_j} \rightarrow y$. Assim, a sequência (y_n) em $\overline{T(B_E)}$ admite subsequência (y_{n_j}) convergente, o que conclui a demonstração de que T é compacto. $\square$

¹ O *posto* de um operador linear $T: E \rightarrow F$, entre espaços normados E e F , é definido como sendo a dimensão da imagem $\text{Im}(T) \subseteq F$.

Veremos, a seguir, que o conjunto $\mathcal{K}(E, F)$, dos operadores compactos entre os espaços normados E e F , é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E, F)$. Começemos verificando que, de fato, $\mathcal{K}(E, F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E, F)$.

Lema 2.19. *Se $T, S: E \rightarrow F$ são operadores compactos, então $T + \alpha S$ também o é, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Sendo assim, o espaço $\mathcal{K}(E, F)$, dos operadores compactos entre E e F , constitui um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Demonstração: Sabemos que $\mathcal{K}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$, pelo item (a) da Proposição 2.17.

Dito isso, é suficiente a verificação do lema para $\alpha = 1$. Seja, então, (x_n) uma sequência limitada em E .

Pela compacidade do operador T , a sequência $(T(x_n))$ admite subsequência $(T(x_{n_k}))$ convergente; então, a subsequência $(S(x_{n_k}))$ de $(S(x_n))$ admite uma outra subsequência, $(S(x_{n_{k_j}}))$, digamos, convergente. Com isso, $(T(x_{n_{k_j}}))$ é subsequência convergente de $(T(x_n))$, de modo que $((T + S)(x_{n_{k_j}}))$ é subsequência convergente de $((T + S)(x_n))$ e, por conseguinte, $T + S$ é compacto, vide a Proposição 2.18, o que conclui a demonstração. $\square$

Proposição 2.20. *Se F é um espaço de Banach, $\mathcal{K}(E, F)$ é fechado em $\mathcal{L}(E, F)$.*

Demonstração: Seja uma sequência (T_n) de operadores em $\mathcal{K}(E, F)$ (ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, T_n é compacto), tal que $T_n \rightarrow T \in \mathcal{L}(E, F)$; provemos que $T \in \mathcal{K}(E, F)$.

Para tanto, seja uma sequência limitada (x_m) em E , satisfazendo $\|x_m\| \leq M$, para algum $M > 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Em vista da Proposição 2.18, basta verificarmos que $(T(x_m))$ admite subsequência convergente em F .

Pois bem, como T_1 é compacto, a sequência $(T_1(x_{1,m}))$ é de Cauchy em F , sendo $(x_{1,m})$ subsequência de (x_m) . Da mesma forma, a sequência $(x_{1,m})$ possui subsequência $(x_{2,m})$ tal que $(T_2(x_{2,m}))$ é de Cauchy em F .

Prosseguindo assim, indefinidamente, visto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_{n,m})$ é limitada e $(T_n(x_{n,m}))$ é de Cauchy em F , podemos considerar a sequência diagonal

$$(y_m) = (x_{1,1}, x_{2,2}, \dots).$$

Vemos que (y_m) é subsequência de (x_m) (satisfazendo $\|y_m\| \leq M$, para todo $m \in \mathbb{N}$, portanto), e satisfaz, para cada $n \in \mathbb{N}$, que $(T_n(y_m))$ é uma sequência de Cauchy em F .

Portanto, uma vez que $T_n \rightarrow T$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual

$$\|T_{n_0} - T\| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Além disso, como $(T_{n_0}(y_m))$ é de Cauchy, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_{n_0}(y_j) - T_{n_0}(y_k)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

sempre que $j, k \geq n_1$. Por fim,

$$\begin{aligned} \|T(y_j) - T(y_k)\| &\leq \|T(y_j) - T_{n_0}(y_j)\| + \|T_{n_0}(y_j) - T_{n_0}(y_k)\| + \|T_{n_0}(y_k) - T(y_k)\| \\ &\leq \|T - T_{n_0}\| \|y_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_{n_0} - T\| \|y_k\| < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todos $j, k \leq n_1$, o que verifica que $(T(y_m))$ é de Cauchy e, portanto, convergente em F , finalizando a demonstração. $\square$

Exemplo 2.21 (Operador Integral de Hilbert-Schmidt). Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $\kappa: K \times K \rightarrow \mathbb{C}$ contínua. Definamos $T: C(K, \mathbb{C}) \rightarrow C(K, \mathbb{C})$ tal que

$$T(f)(y) = \int_K \kappa(x, y) f(x) dx,$$

para todo $y \in K$, em que $C(K, \mathbb{C})$ é o espaço das funções contínuas de K em $\mathbb{C}$, munido da norma da convergência uniforme. Veremos que T é compacto; antes, porém, verifiquemos que T está bem-definido (isso é, que $T(f) \in C(K, \mathbb{C})$, para toda $f \in C(K, \mathbb{C})$).

Com efeito, seja dada $f \in C(K, \mathbb{C})$. Como $K \times K$ é compacto e $\kappa: K \times K \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, temos que κ é uniformemente contínua. De maneira análoga, a função $(x, y) \in K \times K \mapsto \kappa(x, y) f(x) \in \mathbb{C}$ também o é. Com isso, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ para o qual $|\kappa(x, y) f(x) - \kappa(x', y') f(x')| < \varepsilon/m(K)$ sempre que $\|(x, y) - (x', y')\|_2 < \delta$, em que $m(K)$ denota a medida de Lebesgue do compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, $(x, y), (x', y') \in K \times K$ e $\|\cdot\|_2$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Desse modo, se $y, y_0 \in K$ são tais que $\|y - y_0\| < \delta$, então $\|(x, y) - (x, y_0)\|_2 < \delta$, do que segue que

$$\begin{aligned} |T(f)(y) - T(f)(y_0)| &= \left| \int_K (\kappa(x, y) f(x) - \kappa(x, y_0) f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_K |\kappa(x, y) - \kappa(x, y_0)| |f(x)| dx < \int_K \varepsilon/m(K) dx = \varepsilon/m(K) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluimos, à luz do raciocínio acima, que, para toda $f \in C(K, \mathbb{C})$, a aplicação $T(f): K \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, de tal maneira que T está bem-definido.

A fim de demonstrarmos que T é compacto, lançaremos mão do *Teorema de Arzelà-Ascoli* (ver Teorema A.9 e Corolário A.10). Pois bem, utilizaremos a Proposição 2.18 para verificar que, para toda sequência (f_n) na bola $B_{C(K, \mathbb{C})}$, a sequência $(T(f_n))$ admite subsequência convergente. Consideremos, então, a sequência (f_n) em $B_{C(K, \mathbb{C})}$, tal que $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in K} |f_n(x)| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Verifiquemos que a família $(T(f_n))$ é equicontínua em $C(K, \mathbb{C})$. Com efeito, como κ é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ para o qual $|\kappa(x, y) - \kappa(x, y_0)| < \varepsilon/m(K)$, para todos $x, y, y_0 \in K$ tais que $\|y - y_0\| < \delta$, de maneira que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|T(f_n)(y) - T(f_n)(y_0)| \leq \|f_n\|_\infty \int_K |\kappa(x, y) - \kappa(x, y_0)| dx < \varepsilon/m(K) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K dx = \varepsilon.$$

Portanto, concluimos que $(T(f_n))$ é uma sequência equicontínua em $C(K, \mathbb{C})$. Além disso, para $y \in K$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$|T(f_n)(y)| \leq \int_K |\kappa(x, y)| |f_n(x)| dx \leq \|f_n\|_\infty \int_K |\kappa(x, y)| dx \leq \int_K |\kappa(x, y)| dx.$$

Como $\kappa: K \times K \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua num compacto, é limitada, de forma a existir $M > 0$ tal que $|\kappa(x, y)| \leq M$, para todo $(x, y) \in K \times K$, de modo que podemos reescrever, para todo $n \in \mathbb{N}$, a desigualdade acima como

$$|T(f_n)(y)| \leq M \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K dx = M m(K).$$

Sendo $(T(f_n))$ equicontínua e uniformemente limitada, o Teorema de Arzelà-Ascoli garante que $(T(f_n))$ admite uma subsequência convergente. Enfim, pela Proposição 2.18, podemos concluir que T é compacto.

Finalizamos a seção introduzindo a noção de semigrupo compacto:

Definição 2.22 (Semigrupo compacto). Um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ chama-se um C_0 -semigrupo compacto para $t > t_0$ se existe $t_0 > 0$ tal que, para todo $t > t_0$, $T(t)$ é um operador compacto. O semigrupo é chamado *compacto* se $T(t)$ é compacto para todo $t > 0$.

2.3 Medida de Kuratowski de não-compacidade

Nessa seção, introduziremos a *Medida de Kuratowski de não-compacidade* (ou α -medida de não-compacidade) de subconjuntos de um dado espaço métrico. A discussão apresentada aqui, bem como seu devido aprofundamento, pode ser encontrada em [2].

Fixemos um espaço métrico (M, d) arbitrário.

Definição 2.23 (Medida de Kuratowski de não-compacidade). Seja $B \subset M$ limitado. A *medida de Kuratowski de não-compacidade* de B (ou simplesmente α -medida), denotada por $\alpha(B)$, é definida como

$$\alpha(B) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \text{existem } S_i \subset M, 1 \leq i \leq r, \text{ com } \text{diam}(S_i) < \varepsilon, \text{ tais que } B \subset \bigcup_{i=1}^r S_i \right\}.$$

Claramente, temos $\alpha(B) \leq \text{diam}(B)$, para cada $B \subset M$ limitado; denotemos por $\mathcal{M}_B$ a classe de todos os subconjuntos limitados de M .

Façamos uma breve digressão, pois necessitamos reaver alguns fatos sobre compacidade, no contexto dos espaços métricos. Começemos, pois então, recordando a definição, bem como alguns resultados, sobre espaços métricos *totalmente limitados*.

Definição 2.24 (Espaço métrico totalmente limitado). Dizemos que M é *totalmente limitado* se, para todo $\varepsilon > 0$, existirem $S_i \subset M$, com $1 \leq i \leq r$, para algum inteiro positivo r , satisfazendo $\text{diam}(S_i) < \varepsilon$, tais que $M \subset \bigcup_{i=1}^r S_i$.

A proposição a seguir permite que, na Definição 2.24, dado $\varepsilon > 0$, utilizemos bolas abertas de raio ε ao invés de subconjuntos arbitrários de M que possuem diâmetro inferior a ε .

Proposição 2.25. *A fim de que M seja totalmente limitado, é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$, existam pontos $x_i \in M$, com $1 \leq i \leq r$, para algum inteiro positivo r , tais que $M \subset \bigcup_{i=1}^r B(x_i, \varepsilon)$, em que $B(x_i, \varepsilon) = \{x \in M : d(x, x_i) < \varepsilon\}$.*

Demonstração: Como M é totalmente limitado, então, em vista da Definição 2.24, dado $\varepsilon > 0$, temos que $M \subset \bigcup_{i=1}^r S_i$, com $\text{diam}(S_i) < \varepsilon$, para todo $1 \leq i \leq r$.

Uma vez que $\text{diam}(S_i) < \varepsilon$, então $d(x_i, x'_i) < \varepsilon$, para todos $x_i, x'_i \in S_i$ e $1 \leq i \leq r$, de modo que $x'_i \in B(x_i, \varepsilon)$; ou seja, $S_i \subset B(x_i, \varepsilon)$.

Noutros termos, temos $M \subset \bigcup_{i=1}^r B(x_i, \varepsilon)$.

Reciprocamente, dado $\varepsilon > 0$, existem $x_i \in M$, com $1 \leq i \leq s$, para algum inteiro positivo s , tais que $M \subset \bigcup_{i=1}^s B(x_i, \varepsilon/3)$, e cada bola aberta $B(x_i, \varepsilon/3)$ possui diâmetro menor do que ε . Segue, portanto, que M é totalmente limitado. $\square$

O mesmo argumento da Proposição 2.25 pode ser utilizado para reescrever, de uma forma equivalente, a Definição 2.23. Isto é,

$$\alpha(B) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \text{existem } x_i \in M, 1 \leq i \leq r, \text{ tais que } B \subset \bigcup_{i=1}^r B(x_i, \varepsilon) \right\}.$$

Proposição 2.26. *Se $S \subset M$ é totalmente limitado, então seu fecho $\overline{S}$ também o é.*

Demonstração: Como S é totalmente limitado, dado $\varepsilon > 0$, existem pontos $x_i \in M$, $1 \leq i \leq r$, tais que $S \subset \bigcup_{i=1}^r B(x_i, \varepsilon/2)$. Após passagem para o fecho, ficamos com $\overline{S} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^r B(x_i, \varepsilon/2)} = \bigcup_{i=1}^r \overline{B(x_i, \varepsilon/2)}$.

Como $\overline{B(x_i, \varepsilon/2)} \subset B(x_i, \varepsilon)$, segue que $\overline{S} \subset \bigcup_{i=1}^r B(x_i, \varepsilon)$, do que resulta que $\overline{S}$ é totalmente limitado, como desejado. $\square$

O próximo teorema é clássico, e terá sua demonstração omitida.

Teorema 2.27. *O espaço métrico M é compacto se, e somente se, é completo e totalmente limitado.*

Demonstração: Ver [14], Proposição 7, página 222. $\square$

Definição 2.28 (Subconjunto relativamente compacto). Dizemos que $S \subset M$ é relativamente compacto em M se $\overline{S}$ é compacto.

Proposição 2.29. *Seja $S \subset M$. Se S é relativamente compacto, então S é totalmente limitado.*

Se M é completo, então S é relativamente compacto se, e somente se, S é totalmente limitado.

Demonstração: Claramente, devemos assumir $S \neq \emptyset$.

Começamos provando que, se S é relativamente compacto, então S é totalmente limitado. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, seja $x_1 \in S$ arbitrário.

Se $d(x, x_1) < \varepsilon$, para todo $x \in S$, então $S \subset B(x_1, \varepsilon)$. Caso contrário, seja $x_2 \in S$ tal que $d(x_2, x_1) \geq \varepsilon$.

Se $d(x, x_i) < \varepsilon$, para todo $x \in S$, com $1 \leq i \leq 2$, então $S \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$. Do contrário, seja $x_3 \in S$ tal que $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon$ e $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon$.

Se $d(x, x_i) < \varepsilon$, para todo $x \in S$ e $1 \leq i \leq 3$, então $S \subset \bigcup_{i=1}^3 B(x_i, \varepsilon)$.

Caso contrário, continuamos o processo selecionando $x_4 \in S$ tal que $d(x_4, x_i) \geq \varepsilon$, para $1 \leq i \leq 3$, e assim por diante. Afirmamos que deve existir um inteiro positivo r tal que $d(x, x_i) < \varepsilon$, para todo $x \in S$ e $1 \leq i \leq r$.

De fato, se tal r não existisse, seria possível obter uma sequência (x_n) em S tal que $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$, para todos $j, k \in \mathbb{N}$, de modo que (x_n) não admitiria nenhuma subsequência de Cauchy. Logo, (x_n) não admitiria subsequência convergente, contrariando o fato de S ser relativamente compacto, pois toda sequência em S admite subsequência convergente em M .

Agora, resta provar que, considerando M completo, se S é totalmente limitado, então S é relativamente compacto. Como $\overline{S}$ é fechado e M é completo, segue que $\overline{S}$ é completo.

Assim, pelo Teorema 2.27, $\overline{S}$ é completo e totalmente limitado; compacto, portanto, finalizando a demonstração. $\square$

Terminada essa digressão, listamos algumas propriedades da medida de Kuratowski de não-compacidade.

Proposição 2.30. *Sejam B , B_1 e B_2 subconjuntos limitados de um espaço métrico completo M . Então:*

1. $\alpha(B) = 0$ se, e somente se, $\overline{B}$ é compacto (regularidade);
2. $\alpha(B) = \alpha(\overline{B})$ (invariância mediante passagem para o fecho);
3. Se $B_1 \subset B_2$, então $\alpha(B_1) \leq \alpha(B_2)$ (monotonicidade);
4. $\alpha(B_1 \cup B_2) = \max \{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\}$ (propriedade do máximo);
5. $\alpha(B_1 \cap B_2) \leq \min \{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\}$.

Demonstração: Evidentemente, o item (3) segue de imediato da Definição 2.23.

(1) Temos que $\alpha(B) = 0$ se, e somente se, para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \delta$, bem como subconjuntos $S_i \subset M$, com $\text{diam}(S_i) < \varepsilon$ e $1 \leq i \leq r$, para algum inteiro positivo r , tais que $B \subset \bigcup_{i=1}^r S_i$. Logo, para todo $\delta > 0$, temos $B \subset \bigcup_{i=1}^r S_i$, com $\text{diam}(S_i) < \delta$, do que segue que B é totalmente limitado e, em vista da Proposição 2.29, segue que $\overline{B}$ é compacto.

(2): Como $B \subseteq \overline{B}$, temos que $\alpha(B) \leq \alpha(\overline{B})$. Seja, então, $\varepsilon > 0$, de modo que existem $S_i \subset M$ limitados, tais que $\text{diam}(S_i) < \varepsilon$, para $1 \leq i \leq n$, e $B \subset \bigcup_{i=1}^n S_i$.

Passando para o fecho, ficamos com $\overline{B} \subset \overline{\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right)} = \bigcup_{i=1}^n \overline{S_i}$ e, em vista do fato de que $\text{diam}(S_i) = \text{diam}(\overline{S_i})$, obtemos $\alpha(\overline{B}) \leq \alpha(B)$, o que demonstra a igualdade $\alpha(B) = \alpha(\overline{B})$.

(4): Do item (3), temos $\alpha(B_1) \leq \alpha(B_1 \cup B_2)$ e $\alpha(B_2) \leq \alpha(B_1 \cup B_2)$, uma vez que $B_1, B_2 \subset B_1 \cup B_2$. Então, temos $\max \{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\} \leq \alpha(B_1 \cup B_2)$.

Por outro lado, suponha que B_1 e B_2 podem ser cobertos por uma quantidade finita de subconjuntos de diâmetro menor que $s + \varepsilon$, sendo $s = \max \{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\}$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como a união dessas coberturas é uma cobertura finita de $B_1 \cup B_2$, ficamos com $\alpha(B_1 \cup B_2) \leq s + \varepsilon$.

Em vista da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, concluímos que $\alpha(B_1 \cup B_2) = \max \{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\}$.

(5): De $B_1 \cap B_2 \subset B_1, B_2$, temos que $\alpha(B_1 \cap B_2) \leq \alpha(B_1)$ e $\alpha(B_1 \cap B_2) \leq \alpha(B_2)$, de modo que $\alpha(B_1 \cap B_2) \leq \min \{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\}$, como queríamos.

Assim, está completa a demonstração. $\square$

Lema 2.31 (Cantor-Kuratowski). *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e (F_n) uma sequência decrescente (ou seja, $F_{n+1} \subset F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$) de subconjuntos não-vazios, fechados e limitados de M , tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(F_n) = 0$. Então, a intersecção $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ é um subconjunto não-vazio e compacto de M .*

Demonstração: Seja $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Vemos que F é fechado, pois é intersecção enumerável de fechados. Além disso, como $F \subset F_n$, o item (3) da Proposição 2.30 garante que $\alpha(F) \leq \alpha(F_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que, fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos $\alpha(F) = 0$, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(F_n) = 0$. Pelo item (1) da Proposição 2.30, segue que F é compacto, pois $F = \overline{F}$.

Verifiquemos, agora, que $F \neq \emptyset$. Consideremos $x_n \in F_n$, para $n \in \mathbb{N}$, e coloquemos $X_n := \{x_k : k \geq n\}$. Como $X_n \subset F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos $\alpha(X_n) \leq \alpha(F_n)$; ainda, como $X_n \subset X_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\alpha(X_n) \leq \alpha(X_1)$ e, uma vez que X_1 está, a menos de uma quantidade finita de pontos, contido em X_n (de fato, temos $X_1 \setminus \{x_i\}_{i=1}^{n-1} \subset X_n$), obtemos $\alpha(X_1) \leq \alpha(X_n)$, já que não é difícil de verificar que, a menos de uma quantidade finita de pontos, a α -medida não se altera.²

Temos, então, que $\alpha(X_1) = \alpha(X_n) \leq \alpha(F_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ nessa última desigualdade, obtemos $\alpha(X_1) = 0$, do que segue, pelo item (1) da Proposição 2.30, que X_1 é relativamente compacto.

Assim sendo, a sequência (x_n) admite uma subsequência convergente (x_{n_k}) , tal que $x = \lim x_{n_k} \in M$. Como F_n é fechado, temos que $x \in F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de maneira que $x \in F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Concluimos, portanto, que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ é não-vazio e compacto, como queríamos. $\square$

Estudaremos, na sequência, a α -medida no contexto dos espaços normados, e veremos que ela possui propriedades compatíveis com a estrutura linear do espaço.

Antes, porém, é necessário que revisitemos o conceito de *convexidade*, bem como seus principais resultados.

Fixemos, por ora, um espaço vetorial real E .

Definição 2.32. Dizemos que o subconjunto $S \subset E$ é *convexo* se, para todos $x, y \in S$, o segmento $[x, y] = (1 - t)x + ty$ está contido em S , para todo $t \in [0, 1]$.

É bem conhecido o fato de que, se $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família qualquer de subconjuntos convexos de E , então a intersecção $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ é um conjunto convexo. Também sabe-se que,

se $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é a família de todos os subconjuntos convexos de E tais que $S \subset S_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, então $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ é o *menor* subconjunto convexo de E que contém S , no sentido de

que, se $S \subset C$ e C é convexo, então $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \subset C$.

Isso nos leva a importante definição de *envoltória convexa*:

Definição 2.33 (Envoltória convexa). Se $S \subset E$, a intersecção de todos os subconjuntos convexos de E que contém S é chamada de *envoltória convexa* de S , e a denotaremos por $\text{co}(S)$. Em notação matemática, se $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é a família de todos os subconjuntos convexos de E tais que $S \subset S_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, então $\text{co}(S) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$.

² Com efeito, se F é finito e $F \subset B$, em que $B \subset M$ é um conjunto limitado qualquer, então $\alpha(F) = 0$, pelo item (1) da Proposição 2.30, pois F é compacto. Logo, escrevendo $B = (B \setminus F) \cup F$, o item (4) da Proposição 2.30 nos dá $\alpha(B) = \max \{\alpha(B \setminus F), \alpha(F)\} = \alpha(B \setminus F)$, de maneira que, a menos de um conjunto finito $F \subset B$, a α -medida de B não se altera.

Apresentaremos, agora, o conceito de *combinação convexa*, para que possamos provar o próximo resultado. Uma *combinação convexa* de elementos de $S \subset E$ é uma soma finita do tipo $\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i$, com $\lambda_i \geq 0$ e $x_i \in S$, para todo $1 \leq i \leq r$, em que r é um inteiro positivo qualquer, tal que $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$.

Denotemos por $\text{cvx}(S)$ o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de S .

Proposição 2.34. *Se $S, S_1, \dots, S_r, r \in \mathbb{N}$, são subconjuntos convexas de E e $Q \subset E$ é qualquer, então:*

1. $\text{cvx}(S) \subset S$;
2. $\text{co}(Q) = \text{cvx}(Q)$;
3. $\text{co}\left(\bigcup_{i=1}^r S_i\right) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i S_i : \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq r, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \right\}$.

Demonstração: (1) É suficiente verificar que, para todo $r \geq 2$, é válido que, se $x_i \in S$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$, então $\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i \in S$, o que será feito por indução matemática.

Suponha que o fato acima ocorra para algum $r \geq 2$. Se $x_i \in S$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i = 1$, temos dois casos a considerar: se $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 0$, então $\lambda_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq r$, de modo que $\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i x_i = x_{r+1} \in S$.

Se $\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \neq 0$, então $\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i x_i = \lambda \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \lambda^{-1} x_i \right) + \lambda_{r+1} x_{r+1} \in S$, uma vez que $\lambda + \lambda_{r+1} = 1$ e S é convexo, finalizando a demonstração de (1).

(2) Como $Q \subset \text{co}(Q)$, então $\text{cvx}(Q) \subset \text{cvx}(\text{co}(Q)) \subset \text{co}(Q)$, em vista do item (1).

Para a inclusão contrária, como $\text{co}(Q)$ é convexo, basta provarmos que $\text{cvx}(Q)$ é convexo.

Pois bem, se $x, y \in \text{cvx}(Q)$, existem inteiros positivos r e s , seqüências $(x_i)_{i=1}^r$ e $(y_j)_{j=1}^s$ de elementos de Q , bem como seqüências $(\alpha_i)_{i=1}^r$ e $(\beta_j)_{j=1}^s$ de escalares positivos, com $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e $\sum_{j=1}^s \beta_j = 1$, tais que $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i$ e $y = \sum_{j=1}^s \beta_j y_j$. Seja $\lambda \in (0, 1)$ arbitrário.

Como $(1 - \lambda) \sum_{i=1}^r \alpha_i + \lambda \sum_{j=1}^s \beta_j = 1$, então $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \text{cvx}(Q)$, verificando que $\text{cvx}(Q)$ é convexo, como desejado.

(3) Seja $T = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i S_i : \lambda_i > 0, 1 \leq i \leq r, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \right\}$. Vemos que $T \subseteq \text{co}\left(\bigcup_{i=1}^r S_i\right)$, pois, dado $X = \sum_{i=1}^r \lambda_i S_i$, para certos $\lambda_i > 0, 1 \leq i \leq r$, e $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$, se $x \in X$, então existem $x_i \in S_i, 1 \leq i \leq r$, tais que $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i$. Logo, temos $x \in \text{cvx}\left(\bigcup_{i=1}^r S_i\right) = \text{co}\left(\bigcup_{i=1}^r S_i\right)$.

Para a inclusão contrária, basta verificarmos que T é convexo. Pois bem, sejam $\lambda \in (0, 1)$ e $x, y \in T$, de modo que existem escalares positivos α_i, β_i , $1 \leq i \leq r$, satisfazendo $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e $\sum_{i=1}^r \beta_i = 1$, tais que $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i S_i$ e $y = \sum_{i=1}^r \beta_i S_i$.

Coloquemos $\gamma_i = \lambda \alpha_i + (1 - \lambda) \beta_i$, $1 \leq i \leq r$. Assim, $\gamma_i > 0$, para $1 \leq i \leq r$, e $\sum_{i=1}^r \gamma_i = \lambda \sum_{i=1}^r \alpha_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^r \beta_i = 1$.
Logo,

$$\begin{aligned} \lambda x + (1 - \lambda)y &= \lambda \sum_{i=1}^r \alpha_i S_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^r \beta_i S_i \\ &= \sum_{i=1}^r (\lambda \alpha_i + (1 - \lambda) \beta_i) S_i \\ &= \sum_{i=1}^r \gamma_i S_i \in T. \end{aligned}$$

Segue, portanto, que T é convexo, de maneira que $\text{co} \left(\bigcup_{i=1}^r S_i \right) = T$, finalizando a demonstração. $\square$

Podemos, agora, apresentar as propriedades da α -medida de Kuratowski no âmbito dos espaços normados. Fixemos um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$, sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Além daquelas apresentadas na Proposição 2.30, são válidas:

Proposição 2.35. *Sejam B, B_1 e B_2 subconjuntos limitados de E . Então:*

1. $\alpha(B_1 + B_2) \leq \alpha(B_1) + \alpha(B_2)$ (sub-aditividade algébrica);
2. $\alpha(B + x) = \alpha(B)$, para todo $x \in E$ (invariância por translação);
3. $\alpha(\lambda B) = |\lambda| \alpha(B)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ (semi-homogeneidade).

Demonstração: (1) Dado $\varepsilon > 0$, sejam $S_i \subset E$, com $\text{diam}(S_i) < \varepsilon$, para todo $1 \leq i \leq r$, tais que $B_1 \subset \bigcup_{i=1}^r S_i$. Da mesma forma, dado $\delta > 0$, sejam $T_j \subset E$, com $\text{diam}(T_j) < \delta$,

para todo $1 \leq j \leq s$, tais que $B_2 \subset \bigcup_{j=1}^s T_j$.

Então, $B_1 + B_2 \subset \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{j=1}^s (S_i + T_j)$, com $\text{diam}(S_i + T_j) < \varepsilon + \delta$.

Logo, ficamos com $\alpha(B_1 + B_2) < \varepsilon + \delta$, de modo que $\alpha(B_1 + B_2) \leq \alpha(B_1) + \alpha(B_2)$, como queríamos.

(2) Seja $x \in E$. Do item (1), temos $\alpha(B + x) \leq \alpha(B) + \alpha(\{x\}) = \alpha(B)$, bem como

$$\alpha(B) = \alpha((B + x) + (-x)) \leq \alpha(B + x) + \alpha(\{-x\}) = \alpha(B + x).$$

Portanto, temos $\alpha(B + x) \leq \alpha(B)$ e $\alpha(B) \leq \alpha(B + x)$, de modo que $\alpha(B + x) = \alpha(B)$, finalizando a demonstração de (2).

(3) Para $\lambda = 0$, claramente a igualdade desejada é verdadeira.

Suponhamos, então, $\lambda \neq 0$, seja dado $\varepsilon > 0$, e consideremos $S_i \subset E$, para $1 \leq i \leq r$, tais que $\text{diam}(S_i) < \varepsilon$ e $B \subset \bigcup_{i=1}^r S_i$. Então, temos, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, que $\lambda B \subset \bigcup_{i=1}^r \lambda S_i$ e $\text{diam}(\lambda S_i) = |\lambda| \text{diam}(S_i)$, resultando em $\alpha(\lambda B) \leq |\lambda| \alpha(B)$.

Por outro lado, como λ é não-nulo, temos $\alpha(B) = \alpha(\lambda^{-1}(\lambda B)) \leq |\lambda^{-1}| \alpha(\lambda B)$, ou seja, $|\lambda| \alpha(B) \leq \alpha(\lambda B)$.

Dessas desigualdades, concluímos que $\alpha(\lambda B) = |\lambda| \alpha(B)$, como desejado, finalizando a demonstração da proposição. $\square$

Verifica-se, também, que $\alpha(B) = \alpha(\text{co}(B))$, ou seja, a α -medida de não-compacidade é invariante mediante passagem a envoltória convexa (ver [2], Lemma 5.7, página 152).

Terminado este exórdio sobre a medida de Kuratowski em espaços métricos e normados, nosso próximo passo é traduzir este conceito para operadores em espaços de Banach.

2.4 Medida de Kuratowski de não-compacidade de operadores

Nesta seção, trataremos da medida de não-compacidade para operadores em espaços de Banach, e exploraremos suas principais propriedades, além de definirmos os conceitos de operadores contrativos e condensantes.

Sejam, pois então, espaços de Banach E e F , e medidas de não-compacidade μ_1 e μ_2 definidas em $\mathcal{M}_E$ e $\mathcal{M}_F$, em que $\mathcal{M}_E$ e $\mathcal{M}_F$ representam as classes de conjuntos limitados em E e F , respectivamente.

Definição 2.36 (Operadores contrativos e condensantes). Seja $L: E \rightarrow F$ um operador entre E e F (não-necessariamente linear). Dizemos que:

1. L é (μ_1, μ_2) -contrativo, com constante $k > 0$ (ou simplesmente k -(μ_1, μ_2)-contrativo) se L é contínuo e

$$\mu_2(L(B)) \leq k \mu_1(B), \quad \text{para cada } B \in \mathcal{M}_E.$$

Em particular, se $E = F$ e $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, dizemos que L é k - μ -contrativo ou, simplesmente, que L é uma μ -contração.

Dizemos, também, que $L: E \rightarrow F$ é k -(μ_1, μ_2)-contrativo quando leva conjuntos limitados de E em conjuntos limitados de F .

2. L é (μ_1, μ_2) -condensante, com constante $k > 0$ (ou simplesmente k -(μ_1, μ_2)-condensante) se L é contínuo e

$$\mu_2(L(B)) < k \mu_1(B), \quad \text{para cada } B \in \mathcal{M}_E \text{ relativamente compacto.}$$

Em particular, se $E = F$ e $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, dizemos que L é k - μ -condensante. Mais ainda, se $k = 1$, então dizemos que L é μ -condensante.

Definição 2.37 (Medida de não-compacidade de um operador L). Se o operador $L: E \rightarrow F$ é (μ_1, μ_2) -contrativo, o número

$$\alpha(L) := \inf \{k > 0: \mu_2(L(B)) \leq k \mu_1(B), \text{ para todo } B \in \mathcal{M}_E\}$$

é chamado de (μ_1, μ_2) -medida de não-compacidade de L .

Se $E = F$ e $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, dizemos que $\alpha(L)$ é a α -medida de não-compacidade de L , ou simplesmente medida de não-compacidade de L .

Para o resultado a seguir, diremos que o operador $L: E \rightarrow F$ (novamente, não-necessariamente linear) é *compacto* se leva subconjuntos limitados de E em subconjuntos relativamente compactos de F (nos moldes da Definição 2.16, porém num possível caso não-linear).

Proposição 2.38. *Se $L: E \rightarrow F$ é contínuo e (μ_1, μ_2) -contrativo, então:*

1. *L é compacto se, e somente se, $\alpha(L) = 0$;*

2. *Se L é linear, então $\alpha(L) \leq \|L\|$.*

Demonstração: (1) Seja $B \in \mathcal{M}_E$.

Como L é compacto, então, mediante a definição anterior, temos que $L(B) \subset F$ é relativamente compacto.

Assim, segue, pela Proposição 2.30, que $\mu_2(L(B)) = 0$, de modo que, para todo $k > 0$, $k \mu_1(B) \geq 0$, que é equivalente a afirmar que $\alpha(L) = 0$.

Reciprocamente, como $\alpha(L) = 0$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $k > 0$, com $k < 1/n$, tal que $\mu_2(L(B)) \leq k \mu_1(B) < (1/n) \mu_1(B)$, com $B \in \mathcal{M}_E$.

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos $\mu_2(L(B)) = 0$, de maneira que, pela Proposição 2.30, $\overline{L(B)}$ é compacto, finalizando a demonstração.

(2) Suponhamos L linear e seja $B \in \mathcal{M}_E$; tomemos $\varepsilon > 0$ tal que existam $S_i \subset E$ limitados, com $\text{diam}(S_i) < \varepsilon$, para todo $1 \leq i \leq r$, tais que $B \subset \bigcup_{i=1}^r S_i$. Então, temos

$L(B) \subset \bigcup_{i=1}^r L(S_i)$, com $\text{diam}(L(S_i)) < \|L\| \varepsilon$, que nos dá $\mu_2(L(B)) \leq \|L\| \varepsilon$.

Observando que $\mu_2(L(B))/\|L\|$ é uma cota inferior para o conjunto

$$\left\{ \varepsilon > 0: \text{existem } S_i \subset E, 1 \leq i \leq r, \text{ com } \text{diam}(S_i) < \varepsilon, \text{ tais que } B \subset \bigcup_{i=1}^r S_i \right\},$$

ficamos com $\mu_2(L(B)) \leq \|L\| \mu_1(B)$.

Dessa última desigualdade, concluímos que $\alpha(L) \leq \|L\|$, como queríamos. $\square$

Para operadores $L \in \mathcal{L}(E)$, será de fundamental importância a *Fórmula de Nussbaum*, que relaciona o *raio do espectro essencial* com sua medida de não-compacidade. Exploraremos essa ideia na próxima seção, em nosso tratamento da teoria dos *Operadores Semi-Fredholm*.

Finalizamos nossa exposição sobre a medida de não-compacidade de operadores com dois lemas técnicos, que serão utilizados na demonstração do resultado principal que almejamos neste trabalho. Antes, porém, é necessário que introduzamos algumas notações pertinentes.

Consideremos o espaço $C([a, b], E)$, das funções contínuas $f: [a, b] \rightarrow E$, na usual norma da convergência uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} \|f(t)\|$, para toda $f \in C([a, b], E)$.

Para um subconjunto limitado $\mathcal{H} \subset C([a, b], E)$, e para $t \in [a, b]$, escrevemos

$$\omega(\delta; t, \mathcal{H}) := \sup \{ \|g(\tau) - g(s)\| : \tau, s \in [t - \delta, t + \delta], g \in \mathcal{H} \},$$

$$\omega(t, \mathcal{H}) := \inf_{\delta > 0} \omega(\delta; t, \mathcal{H}) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(\delta; t, \mathcal{H}),$$

$$\omega(\mathcal{H}) = \sup_{a \leq t \leq b} \omega(t, \mathcal{H}).$$

Se $\mathcal{H}$ é uniformemente equicontínuo, ou seja, se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda função $g \in \mathcal{H}$ e $x, y \in [a, b]$, se tem $\|g(x) - g(y)\| < \varepsilon$ desde que $|x - y| < \delta$, então $\omega(\mathcal{H}) = 0$.

Para $\delta > 0$ e $t \in [a, b]$, colocamos $\alpha(t, \delta; \mathcal{H}) = \alpha(\mathcal{H} \mid [t - \delta, t + \delta])$, em que³

$$\mathcal{H} \mid [t - \delta, t + \delta] = \left\{ g|_{[t - \delta, t + \delta]} \in C([t - \delta, t + \delta], E) : g \in \mathcal{H} \right\},$$

e definimos

$$\alpha(t; \mathcal{H}) = \inf_{\delta > 0} \alpha(t, \delta; \mathcal{H}) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \alpha(t, \delta; \mathcal{H}).$$

Lema 2.39. *Sejam $\mathcal{H} \subset C([a, b], E)$ limitado e $\alpha(t; \mathcal{H})$ estabelecido como acima.*

Então, $\alpha(\mathcal{H}) = \sup_{a \leq t \leq b} \alpha(t; \mathcal{H})$.

Demonstração: Ver [16], Lemma 1, página 601. □

Seja $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ um C_0 -semigrupo. Para $u \in C([a, b], E)$, definimos

$$(T * u)(t) := \int_a^t T(t - s) u(s) ds, \quad t \in [a, b], \quad (2.1)$$

em que a integral (2.1) deve ser entendida no sentido de Bochner.

Para um subconjunto $\mathcal{U} \subset C([a, b], E)$, definimos $T * \mathcal{U} := \{T * u : u \in \mathcal{U}\}$.

À luz dessas definições, são válidos:

Lema 2.40. *Sejam $\mathcal{U} \subset C([a, b], E)$ limitado e $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo em E . Então,*

$$\frac{1}{2\gamma_T} \omega(t, T * \mathcal{U}) \leq \sup_{a \leq \tau \leq t} \alpha(T * \mathcal{U}(\tau)) \leq \alpha((T * \mathcal{U} \mid [a, t])) \leq \gamma_T \sup_{a \leq \tau \leq t} \alpha((T * \mathcal{U})(\tau)), \quad (2.2)$$

para todo $t \in [a, b]$, em que $\gamma_T = \limsup_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)\|$.

Em particular, se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações em E , então

$$\alpha((T * \mathcal{U} \mid [a, t])) = \sup_{a \leq \tau \leq t} \alpha((T * \mathcal{U})(\tau)). \quad (2.3)$$

Demonstração: Como $\mathcal{U}$ é um subconjunto limitado de $C([a, b], E)$, existe $L > 0$ para o qual $\|f\|_\infty < L$, para toda $f \in \mathcal{U}$. Coloquemos $\mathcal{K} := T * \mathcal{U}$.

Para todos $\varepsilon > 0$ e $t \in (a, b]$, com $t - \varepsilon > a$, existem subconjuntos $\mathcal{K}_i(t - \varepsilon) \subset \mathcal{K}(t - \varepsilon)$, $1 \leq i \leq m$, em que $\mathcal{K}(t - \varepsilon) = \{(T * u)(t - \varepsilon) : u \in \mathcal{U}\}$, para os quais

$$\text{diam}(\mathcal{K}_i(t - \varepsilon)) < \alpha(\mathcal{K}(t - \varepsilon)) + \varepsilon/6, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \text{e} \quad \mathcal{K}(t - \varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^m \mathcal{K}_i(t - \varepsilon). \quad (2.4)$$

Colocando

$$\mathcal{K}_i \mid [t - \varepsilon, t + \varepsilon] = \left\{ T * h|_{[t - \varepsilon, t + \varepsilon]} \in \mathcal{K} \mid [t - \varepsilon, t + \varepsilon] : T * h(t - \varepsilon) \in \mathcal{K}_i(t - \varepsilon) \right\},$$

³ Mais geralmente, dado um subconjunto $\mathcal{H} \subset C([a, b], E)$, bem como $K \subseteq [a, b]$, escrevemos $\mathcal{H} \mid K$ para denotar $\{f|_K \in C(K, E) : f \in \mathcal{H}\}$.

segue que

$$\mathcal{K} \mid [t - \varepsilon, t + \varepsilon] = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{K}_i \mid [t - \varepsilon, t + \varepsilon].$$

Provaremos, agora, a primeira desigualdade em (2.2). Para qualquer $T * f \in \mathcal{K}$, existe $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $T * f \mid [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \in \mathcal{K}_j \mid [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$.

Seja, também, $T * g$ de modo que $T * g \mid [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \in \mathcal{K}_j \mid [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$. Dado que $T * g$ é uniformemente contínua em $[a, b]$, existe $\hat{\delta} > 0$ tal que $\|T * g(\tau) - T * g(s)\| < \varepsilon/3$ sempre que $|\tau - s| < \hat{\delta}$. Logo, tomando $\delta > 0$, com $\delta < \min\{\varepsilon, \hat{\delta}/2\}$, para $\tau, s \in [t - \delta, t + \delta]$, temos

$$\|T * f(\tau) - T * f(s)\| \leq \|T * g(\tau) - T * f(\tau)\| + \|T * g(s) - T * f(s)\| + \varepsilon/3. \quad (2.5)$$

Para estimarmos o primeiro termo do segundo membro da desigualdade (2.5) acima, prosseguimos da seguinte maneira. Se $C = \sup_{0 \leq s \leq b-a} \|T(s)\|$, então

$$\begin{aligned} \|T * g(\tau) - T * f(\tau)\| &= \left\| \int_a^\tau T(\tau - s) g(s) ds - \int_a^\tau T(\tau - s) f(s) ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_a^{t-\varepsilon} T(\tau - s) g(s) ds - \int_a^{t-\varepsilon} T(\tau - s) f(s) ds \right\| \\ &\quad + \left\| \int_{t-\varepsilon}^\tau T(\tau - s) g(s) ds - \int_{t-\varepsilon}^\tau T(\tau - s) f(s) ds \right\|, \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que utilizamos a aditividade da integral, $\int_a^\tau = \int_a^{t-\varepsilon} + \int_{t-\varepsilon}^\tau$.

Para a primeira norma da desigualdade acima, fazemos

$$\begin{aligned} &\left\| \int_a^{t-\varepsilon} T(\tau - s) g(s) ds - \int_a^{t-\varepsilon} T(\tau - s) f(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_a^{t-\varepsilon} T(\tau - t + \varepsilon) T(t - \varepsilon - s) g(s) ds - \int_a^{t-\varepsilon} T(\tau - t + \varepsilon) T(t - \varepsilon - s) f(s) ds \right\| \\ &\leq \|T(\tau - t + \varepsilon)\| \left\| \int_a^{t-\varepsilon} T(t - \varepsilon - s) g(s) ds - \int_a^{t-\varepsilon} T(t - \varepsilon - s) f(s) ds \right\|. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para a segunda,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{t-\varepsilon}^\tau T(\tau - s) g(s) ds - \int_{t-\varepsilon}^\tau T(\tau - s) f(s) ds \right\| = \left\| \int_{t-\varepsilon}^\tau T(\tau - s) (g(s) - f(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t-\varepsilon}^\tau \|T(\tau - s)\| \|g(s) - f(s)\| ds \leq C \int_{t-\varepsilon}^\tau \|g(s) - f(s)\| ds \leq 2CL(\tau - t + \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.8)$$

de modo que

$$\begin{aligned} &\|T * g(\tau) - T * f(\tau)\| \\ &\leq \|T(\tau - t + \varepsilon)\| \left\| \int_a^{t-\varepsilon} T(t - \varepsilon - s) g(s) ds - \int_a^{t-\varepsilon} T(t - \varepsilon - s) f(s) ds \right\| \\ &\quad + 2CL(\tau - t + \varepsilon) \\ &\leq \sup_{0 \leq \gamma \leq \varepsilon_1} \|T(\gamma)\| \|T * g(t - \varepsilon) - T * f(t - \varepsilon)\| + 2CL\varepsilon_1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

em que $\varepsilon_1 = \varepsilon + \delta$. Como o segundo termo da desigualdade (2.5) pode ser estimado de maneira análoga, podemos reescrevê-la como

$$\|T * f(\tau) - T * f(s)\| \leq 2 \sup_{0 \leq \gamma \leq \varepsilon_1} \|T(\gamma)\| \|T * g(t - \varepsilon) - T * f(t - \varepsilon)\| + 4CL\varepsilon_1 + \varepsilon/3. \quad (2.10)$$

Por (2.4) e pelo fato de $\delta < \varepsilon$, temos, uma vez que $\varepsilon_1 = \varepsilon + \delta < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \|T * f(\tau) - T * f(s)\| &\leq 2 \sup_{0 \leq \gamma \leq 2\varepsilon} \|T(\gamma)\| \operatorname{diam}(K_j(t - \varepsilon)) + 4CL\varepsilon_1 + \varepsilon/3 \\ &\leq 2 \sup_{0 \leq \gamma \leq 2\varepsilon} \|T(\gamma)\| \sup_{a \leq \tau \leq t} \alpha(\mathcal{K}(\tau)) + 8CL\varepsilon + \varepsilon/2, \end{aligned}$$

de maneira que

$$\omega(\delta; t, \mathcal{K}) \leq 2 \sup_{0 \leq \gamma \leq 2\varepsilon} \|T(\gamma)\| \sup_{a \leq \tau \leq t} \alpha(\mathcal{K}(\tau)) + 8CL\varepsilon + \varepsilon/2.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$ em ambos os membros da desigualdade acima, ficamos com

$$\omega(t, \mathcal{K}) \leq 2\gamma_T \sup_{a \leq \tau \leq t} \alpha(\mathcal{K}(\tau)),$$

como desejado.

A seguir, estabeleceremos a desigualdade do meio em (2.2). Notemos que, dados $t \in [a, b]$ e $\varepsilon > 0$ tal que existam $W_i \subset C([a, t], E)$, $1 \leq i \leq m$, com $\operatorname{diam}(W_i) < \varepsilon$ e $T * \mathcal{U} \mid [a, t] \subset \bigcup_{i=1}^m W_i$, tomando $W_i(\tau) = \{h(\tau) : h \in W_i\} \subset E$, para $\tau \in [a, t]$, obtemos

$$T * \mathcal{U}(\tau) \subset \bigcup_{i=1}^m W_i(\tau).$$

Além disso, como a norma em $C([a, t], E)$ é a da convergência uniforme, ficamos com

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(W_i(\tau)) &= \sup \{\|f(\tau) - g(\tau)\| : f, g \in W_i\} \\ &\leq \sup \{\|f - g\|_\infty : f, g \in W_i\} = \operatorname{diam}(W_i) < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Desse modo, $\alpha(T * \mathcal{U}(\tau)) \leq \varepsilon$, qualquer que seja $\varepsilon > 0$. Isso implica que

$$\alpha(T * \mathcal{U}(\tau)) \leq \alpha(T * \mathcal{U} \mid [a, t]), \quad \text{para todo } \tau \in [a, t]$$

e, portanto, temos

$$\sup_{a \leq \tau \leq t} \alpha(T * \mathcal{U}(\tau)) \leq \alpha(T * \mathcal{U} \mid [a, t]),$$

como queríamos.

Por fim, estabeleceremos a terceira desigualdade em (2.2). Em vista das desigualdades (2.14) a (2.17), segue, para todos $T * f|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}, T * h|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]} \in \mathcal{K}_i \mid [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$, que

$$\begin{aligned} &\sup \{\|T * f(s) - T * h(s)\| : t - \varepsilon \leq s \leq t + \varepsilon\} \\ &= \|T * f(\tau) - T * h(\tau)\|, \quad \text{para algum } \tau \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \\ &\leq \sup_{0 \leq \gamma \leq \varepsilon_1} \|T(\gamma)\| \|T * g(t - \varepsilon) - T * f(t - \varepsilon)\| + 2CL\varepsilon_1 \end{aligned}$$

de tal modo que

$$\begin{aligned}\alpha(t, \varepsilon; \mathcal{K}) &= \alpha(\mathcal{K} \mid [t - \varepsilon, t + \varepsilon]) = \alpha\left(\bigcup_{i=1}^m \mathcal{K}_i \mid [t - \varepsilon, t + \varepsilon]\right) \\ &= \max_{1 \leq i \leq m} \alpha(\mathcal{K}_i \mid [t - \varepsilon, t + \varepsilon]) \\ &\leq \text{diam}(\mathcal{K}_i \mid [t - \varepsilon, t + \varepsilon]) \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 2\varepsilon} \|T(\tau)\| \sup_{a \leq s \leq t} \alpha(\mathcal{K}(s)) + 4CL\varepsilon + \varepsilon/6,\end{aligned}$$

donde podemos concluir que

$$\alpha(t, \mathcal{K}) \leq \gamma_T \sup_{a \leq s \leq t} \alpha(\mathcal{K}(s)).$$

Pelo Lema 2.39, obtemos

$$\alpha(\mathcal{K} \mid [a, t]) = \sup_{a \leq \tau \leq t} \alpha(\tau, \mathcal{K}) \leq \gamma_T \sup_{a \leq \tau \leq t} \alpha(\mathcal{K}(\tau)),$$

como queríamos.

Se $T(t)$ é um C_0 -semigrupo de contrações em E , então temos que $\|T(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$, de forma que $\gamma_T \leq 1$ e, pela desigualdade (2.2), segue que $\gamma_T = 1$, finalizando a demonstração. $\square$

Lema 2.41. *Seja $W = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família enumerável de funções fortemente mensuráveis $x^n: [a, b] \rightarrow E$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assuma que exista uma função $\mu = \mu(t)$, integrável em $[a, b]$, tal que $\|x^n(t)\| \leq \mu(t)$ quase sempre em $[a, b]$.*

Então, $\alpha(W(t))$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\alpha\left(\left\{\int_a^b x^n(t) dt : n \in \mathbb{N}\right\}\right) \leq 2 \int_a^b \alpha(W(t)) dt.$$

Demonstração: Ver [9], Theorem 2.1, página 1357. $\square$

2.5 O espaço de fase $\mathcal{B}$

Como mencionado na seção de introdução, estamos lidando, neste trabalho, com a equação de retardo infinito

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + B(t, x_t) + F(t). \quad (\text{L})$$

Consideremos $a > 0$. De posse da função x , a função $x_t: (-\infty, 0] \rightarrow E$, para cada $t \in [0, a)$, é definida por $x_t(\theta) := x(t + \theta)$, para todo $\theta \in (-\infty, 0]$.

Descreveremos, nessa seção, de maneira axiomática, o espaço $\mathcal{B}$, sobre o qual será feita a análise a respeito da equação (L), que tem como elementos as funções x_t , para cada $t \in [0, a)$.

Mediante isso, $\mathcal{B}$ será denominado de *espaço de fase* associado a equação (L).

Definição 2.42 (Espaço de fase). Seja $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ um espaço normado, cujos elementos são funções $\psi: (-\infty, 0] \rightarrow E$, que satisfazem os seguintes axiomas introduzidos por Hale e Kato em [8]:

(B1). Se uma função $x: (-\infty, \sigma + a) \rightarrow E$ é contínua em $[\sigma, \sigma + a]$ e $x_\sigma \in \mathcal{B}$, então

1. $x_t \in \mathcal{B}$, para todo $t \in [\sigma, \sigma + a]$, e a função $t \mapsto x_t$ é contínua em $[\sigma, \sigma + a]$;
2. $H^{-1} \|x(t)\| \leq \|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t - \sigma) \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\| + M(t - \sigma) \|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}$, para todo $t \in [\sigma, \sigma + a]$, em que $H > 0$ é constante, $K: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é contínua, $M: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é mensurável, localmente limitada, e H e M ambas independem de x .

(B2). $\mathcal{B}$ é completo.

Qualquer espaço $\mathcal{B}$ satisfazendo os axiomas acima será chamado de *espaço de fase* associado a equação (L), e os elementos de $\mathcal{B}$ serão chamados de *histórias*.

Em consonância com a Definição 2.42, a função $t \in [\sigma, \sigma + a] \mapsto x_t \in \mathcal{B}$ é chamada de *história* associada a função x até o *instante* t . Assumimos, além disso, que a equação (L) *sempre* satisfaz as seguintes condições:

- (H1). $A: \mathcal{D}(A) \subset E \rightarrow E$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em E ;
- (H2). $B: \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow E$ é contínua e, para cada $t \in \mathbb{R}$, $B(t, \cdot): \mathcal{B} \rightarrow E$ é linear;
- (H3). $F: \mathbb{R} \rightarrow E$ é contínua.

Se $B(\cdot, \psi)$ e $F(\cdot)$ na equação (L) são funções periódicas, com período $\omega > 0$, denotamos a equação (L) por $(P_\omega L)$. Se $F \equiv 0$, denotamos as equações (L) e $(P_\omega L)$ por (L_0) e $(P_\omega L_0)$, respectivamente.

Vários espaços de funções podem assumir o papel de $\mathcal{B}$, como, por exemplo,

$$\begin{aligned} \text{BC} &= \{\phi \in C((-\infty, 0], E) : \|\phi(\theta)\| \text{ é limitada em } (-\infty, 0]\}; \\ \text{BU} &= \{\phi \in \text{BC} : \phi \text{ é uniformemente contínua em } (-\infty, 0]\}; \\ \text{C}_{00} &= \{\phi \in \text{BC} : \phi \text{ possui suporte compacto}\}; \\ \text{C}^{00} &= \left\{ \phi \in \text{BC} : \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \phi(\theta) \in E \right\}; \\ \text{C}^0 &= \left\{ \phi \in \text{BC} : \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \phi(\theta) = 0 \right\}, \end{aligned}$$

estando, todos esses, munidos da norma $\|\phi\|_{\mathcal{B}} = \|\phi\|_\infty = \sup_{\theta \leq 0} \|\phi(\theta)\|$.

Além disso, considerando um espaço de fase abstrato $\mathcal{B}$ qualquer, vemos que $\text{C}_{00} \subset \mathcal{B}$, vide o axioma (B1)(1) da Definição 2.42.

Agora, sob um axioma adicional (C), que será exposto a seguir, temos que o espaço BC está contido em $\mathcal{B}$. Na realidade, na presença de (C), BC está *topologicamente mergulhado*⁴ em $\mathcal{B}$ ($\text{BC} \hookrightarrow \mathcal{B}$):

(C). Se uma sequência uniformemente limitada (ϕ^n) em C_{00} converge uniformemente, em todo subconjunto compacto de $(-\infty, 0]$, para uma função ϕ , então $\phi \in \mathcal{B}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi^n - \phi\|_{\mathcal{B}} = 0$.

⁴ Recordemos que, se X e Y são espaços topológicos, um *mergulho* de X em Y é uma aplicação contínua e injetiva $\varphi: X \rightarrow Y$ tal que φ é um homeomorfismo sobre sua imagem $\text{Im}(\varphi) \subset Y$; se existe tal φ , escrevemos $X \hookrightarrow Y$.

Lema 2.43. *Se o espaço de fase $\mathcal{B}$ satisfaz o axioma C, então $BC \subset \mathcal{B}$ e existe uma constante $J > 0$ tal que $\|\phi\|_{\mathcal{B}} \leq J \|\phi\|_{\infty}$, para toda função $\phi \in BC$.*

Demonstração: Ver [11], Proposition 1.1, página 187. $\square$

Uma vez verificado que $BC \subset \mathcal{B}$, o Lema 2.43 estabelece que a inclusão $\iota: BC \hookrightarrow \mathcal{B}$ é contínua.

Agora, para cada $b \in E$, definamos a aplicação constante $\bar{b}(\theta) = b$, para $\theta \in (-\infty, 0]$, de modo que $\|\bar{b}\|_{\mathcal{B}} \leq J \|b\|$, pelo Lema 2.43. Para $t \geq 0$, definamos operadores $S(t): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, no espaço de fase $\mathcal{B}$, da seguinte forma:

$$(S(t)\phi)(\theta) := \begin{cases} \phi(0), & -t \leq \theta \leq 0, \\ \phi(t + \theta), & \theta \leq -t. \end{cases}$$

Seja $S_0(t)$ a restrição de $S(t)$ a $\mathcal{B}_0 := \{\phi \in \mathcal{B}: \phi(0) = 0\}$. Se a função $x: \mathbb{R} \rightarrow E$ é contínua em $[\sigma, +\infty)$ e $x_{\sigma} \in \mathcal{B}$, consideramos a função $y: \mathbb{R} \rightarrow E$ tal que

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \geq \sigma, \\ x(\sigma), & t \leq \sigma. \end{cases}$$

Note que, para cada $t \geq \sigma$, $y_t \in BC$ e, assim, do Lema 2.43, $y_t \in \mathcal{B}$, para todo $t \geq \sigma$, e podemos decompor x_t como segue:

$$x_t = y_t + S_0(t - \sigma)(x_{\sigma} - \overline{x(\sigma)}), \quad t \in [0, +\infty). \quad (2.11)$$

De fato, fixado $t \in [0, +\infty)$ e tomando $\theta \in (-\infty, 0]$, temos dois casos a analisar:

1. Se $t + \theta \geq \sigma$, então $t \geq \sigma$ e $\theta \geq \sigma - t = -(t - \sigma)$. Desse modo,

$$\begin{aligned} y_t(\theta) + [S_0(t - \sigma)(x_{\sigma} - \overline{x(\sigma)})](\theta) &= y(t + \theta) + [S_0(t - \sigma)(x_{\sigma} - \overline{x(\sigma)})](\theta) \\ &= x(t + \theta) + [x_{\sigma} - \overline{x(\sigma)}](0) = x_t(\theta) + (x_{\sigma}(0) - x_{\sigma}(0)) = x_t(\theta). \end{aligned}$$

2. Se $t + \theta \leq \sigma$, então $\theta \leq \sigma - t = -(t - \sigma)$ e, assim,

$$\begin{aligned} y_t(\theta) + [S_0(t - \sigma)(x_{\sigma} - \overline{x(\sigma)})](\theta) &= y(t + \theta) + [S_0(t - \sigma)(x_{\sigma} - \overline{x(\sigma)})](\theta) \\ &= x(\sigma) + [x_{\sigma} - \overline{x(\sigma)}](t - \sigma + \theta) = x(\sigma) + x_{\sigma}(t - \sigma + \theta) - x(\sigma) \\ &= x(\sigma + t - \sigma + \theta) = x(t + \theta) = x_t(\theta). \end{aligned}$$

Portanto, vale a igualdade (2.11).

Ainda pelo Lema 2.43, temos

$$\begin{aligned} \|x_t\|_{\mathcal{B}} - \|S_0(t - \sigma)(x_{\sigma} - \overline{x(\sigma)})\|_{\mathcal{B}} &\leq \|y_t\|_{\mathcal{B}} \leq J \|y_t\|_{\infty} \\ &= J \sup_{\theta \leq 0} \|y(t + \theta)\| = J \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\|, \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq J \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\| + \|S_0(t - \sigma)(x_{\sigma} - \overline{x(\sigma)})\|_{\mathcal{B}}. \quad (2.12)$$

Se o espaço de fase $\mathcal{B}$ também satisfaz o axioma (C) e $S_0(t)(\phi) \rightarrow 0$, a medida que $t \rightarrow \infty$, para cada $\phi \in \mathcal{B}_0$, dizemos que $\mathcal{B}$ é um espaço de *memória amortecida* (*fading memory space* – FMS).

Se $\mathcal{B}$ é um FMS, então, pelo *Princípio da Limitação Uniforme* (Teorema A.2), $\|S_0(t)\|$ é limitada para $t \geq 0$, e

$$\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq J \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\| + M \|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}, \quad (2.13)$$

em que $M = (1 + HJ) \sup_{t \geq 0} \|S_0(t)\|$.

Com efeito, da desigualdade (2.12), temos que

$$\begin{aligned} \|x_t\|_{\mathcal{B}} &\leq J \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\| + \|S_0(t - \sigma)(x_\sigma - \overline{x(\sigma)})\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq J \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\| + \|S_0(t - \sigma)\| \|x_\sigma - \overline{x(\sigma)}\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq J \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\| + \sup_{t \geq 0} \|S_0(t)\| (\|x_\sigma\|_{\mathcal{B}} + \|\overline{x(\sigma)}\|_{\mathcal{B}}) \\ &\leq J \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\| + \sup_{t \geq 0} \|S_0(t)\| (\|x_\sigma\|_{\mathcal{B}} + J \|\overline{x(\sigma)}\|_{\infty}) \\ &\leq J \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\| + \sup_{t \geq 0} \|S_0(t)\| (\|x_\sigma\|_{\mathcal{B}} + J \|x(\sigma)\|_{\infty}) \\ &\leq J \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\| + \sup_{t \geq 0} \|S_0(t)\| (\|x_\sigma\|_{\mathcal{B}} + JH \|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}) \\ &= J \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\| + M \|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

com $M = (1 + HJ) \sup_{t \geq 0} \|S_0(t)\|$.

Posto isso, estamos em condição para estabelecer o último resultado da seção.

Faremos, para tanto, uso das seguintes notações: se $\mathcal{X}$ é um conjunto de funções $x: (-\infty, \sigma + a) \rightarrow E$, em que $0 < a \leq \infty$, tal que, para todo $\sigma \in (-\infty, \sigma + a)$, $x_\sigma \in \mathcal{B}$ e x é contínua em $[\sigma, \sigma + a]$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t) &= \{x(t) \in E: x \in \mathcal{X}\}, \quad \mathcal{X}_t = \{x_t \in \mathcal{B}: x \in \mathcal{X}, t \in [\sigma, \sigma + a]\}, \\ \mathcal{X} \mid [c, d] &= \{x|_{[c, d]} \in C([c, d], E): x \in \mathcal{X}\}, \end{aligned}$$

em que $\sigma \leq c \leq d < \sigma + a$.

Lema 2.44. *Seja $t \geq \sigma$. Se $\mathcal{X}_\sigma$ e $\mathcal{X} \mid [\sigma, t]$ são limitadas em $\mathcal{B}$ e $C([\sigma, t], E)$, respectivamente, então:*

1. $H^{-1} \alpha(\mathcal{X}(t)) \leq \alpha(\mathcal{X}_t) \leq K(t - \sigma) \alpha(\mathcal{X} \mid [\sigma, t]) + M(t - \sigma) \alpha(\mathcal{X}_\sigma);$
2. *Se o espaço de fase $\mathcal{B}$ satisfaz o axioma (C), então, estando J nos conformes do Lema 2.43,*

$$\alpha(\mathcal{X}_t) \leq J \alpha(\mathcal{X} \mid [\sigma, t]) + (1 + HJ) \alpha(S_0(t - \sigma)) \alpha(\mathcal{X}_\sigma).$$

Demonstração: O item (1) segue da definição da α -medida e do axioma (B1). Para a demonstração completa, ver [21], Theorem 2.1, página 21.

2. Pela decomposição $x_t = y_t + S_0(t - \sigma)(x_\sigma - \overline{x(\sigma)})$ em (2.11), bem como pela estimativa (2.12), isto é,

$$\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq J \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\| + \|S_0(t - \sigma)(x_\sigma - \overline{x(\sigma)})\|_{\mathcal{B}}, \quad (2.12)$$

temos, pelo Lema 2.43, que

$$\alpha(\mathcal{X}_t) \leq \alpha(\{y_t \in \mathcal{B}: x \in \mathcal{X}\}) + \alpha\left(\{S_0(t - \sigma)(x_\sigma - \overline{x(\sigma)}): x \in \mathcal{X}\}\right) \quad (2.14)$$

$$\leq J\alpha(\mathcal{X} \mid [\sigma, t]) + \alpha\left(\{S_0(t - \sigma)(x_\sigma - \overline{x(\sigma)}): x \in \mathcal{X}\}\right) \quad (2.15)$$

$$\leq J\alpha(\mathcal{X} \mid [\sigma, t]) + \alpha(S_0(t - \sigma))(\alpha(\mathcal{X}_\sigma) + J\alpha(\mathcal{X}(\sigma))) \quad (2.16)$$

$$\leq J\alpha(\mathcal{X} \mid [\sigma, t]) + (1 + HJ)\alpha(S_0(t - \sigma))\alpha(\mathcal{X}_\sigma), \quad (2.17)$$

como queríamos. $\square$

2.6 Operadores semi-Fredholm

A ideia principal por trás deste texto é empregar a *teoria de perturbação* dos chamados *operadores semi-Fredholm* para que possamos demonstrar a existência de ponto fixo para uma determinada aplicação linear afim.

Grosso modo, a teoria de perturbação, de maneira geral, consiste em, dado um determinado *problema*, obter soluções aproximadas deste por intermédio de problemas correlatos mais simples.

Para tanto, esta seção será dedicada ao estudo, direcionado para nossos fins, dos operadores de Fredholm e Semi-Fredholm.

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [20, 23].

Fixemos, portanto, espaços de Banach complexos E e F , e seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Definição 2.45 (Operador de Fredholm). Dizemos que o operador T é de *Fredholm* se $\text{Ker}(T)$ e $\text{Coker}(T) = F/\text{Im}(T)$ possuem dimensão finita e $\text{Im}(T)$ é fechado em F .

Pode-se verificar que a condição de que $\text{Im}(T)$ é fechado em F é, na verdade, redundante, visto que é consequência do fato de $\text{Coker}(T) = F/\text{Im}(T)$ possuir dimensão finita.

Com efeito, podemos supor, sem perda de generalidade, que T é injetivo, visto que, caso contrário, basta substituímos T pela aplicação induzida do quociente⁵ $E/\text{Ker}(T)$, em vista do *Teorema do isomorfismo*:

$$E/\text{Ker}(T) \cong \text{Im}(T).$$

Seja C um subespaço complementar fechado de $\text{Im}(T)$ (isto é, tal que $F = \text{Im}(T) \oplus C$) (para a existência de C , ver [23], Theorem 11.2, página 43), e definamos $S: E \times C \rightarrow F$ tal que $S(x, c) := T(x) + c$, para todos $x \in E$ e $c \in C$.

Vemos que S é um isomorfismo linear limitado, logo, pelo *Teorema de Banach da aplicação inversa* (Corolário A.5), S é um isomorfismo topológico.

Assim sendo, $\text{Im}(T) = S(E \times \{0\})$ é fechado.

Definição 2.46 (Operador Semi-Fredholm). Dizemos que o operador T é *semi-Fredholm* se $\text{Ker}(T)$ possui dimensão finita e $\text{Im}(T)$ é fechado em F .

Vemos que um operador semi-Fredholm T é de Fredholm se, e somente se, $\text{Coker}(T)$ possui dimensão finita, bem como todo operador de Fredholm é semi-Fredholm.

Denotemos por $\Phi_+(E, F)$ o conjunto de todos os operadores semi-Fredholm entre E e F , e coloquemos $\Phi_+(E) = \Phi_+(E, E)$.

⁵ Para mais detalhes, ver a discussão sobre operadores com imagem fechada da referência [23], página 216.

Se T é um operador de Fredholm, definimos seu índice, $\text{Ind}(T)$, como sendo a diferença $\dim(\text{Ker}(T)) - \dim(\text{Coker}(T)) \in \mathbb{Z}$.

Se T é semi-Fredholm, definimos

$$\text{Ind}(T) := \begin{cases} \dim(\text{Ker}(T)) - \dim(\text{Coker}(T)), & \text{se } \dim(\text{Ker}(T)), \dim(\text{Coker}(T)) < \infty, \\ +\infty, & \text{se } \dim(\text{Ker}(T)) = \infty, \\ -\infty, & \text{se } \dim(\text{Coker}(T)) = \infty. \end{cases}$$

Exemplo 2.47. Consideremos o espaço ℓ^2 , das sequências $(x_n) = (x_1, x_2, \dots)$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Nesse, seja o operador $S: \ell^2 \rightarrow \ell^2$, denominado *shift unilateral a direita*, tal que $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$.

Temos que S é um operador de Fredholm e, por conseguinte, semi-Fredholm.

De fato, o núcleo de S é trivial, pois S é injetivo.

Agora, como $\text{Coker}(S) = \ell^2 / \text{Im}(S)$, vemos que a classe $[x] \in \text{Coker}(S)$, de um elemento $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$, é formada pelas sequências $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^2$ que possuem primeiro termo igual a x_1 .

Logo, $y = (x_1, y_2, \dots) = (x_1, 0, \dots) + (0, y_2, \dots)$ e $[y] = [(x_1, 0, \dots)]$, o que nos permite concluir que $\text{Coker}(S)$ é gerado pelo elemento $(1, 0, \dots)$; $\dim(\text{Coker}(S)) = 1$, portanto.

O índice de Fredholm de S , então, é igual a $\text{Ind}(S) = 0 - 1 = -1$.

Um raciocínio análogo pode ser empregado para verificar que o operador de *shift a esquerda* $S^*: \ell^2 \rightarrow \ell^2$, tal que $S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ é de Fredholm, com índice $\text{Ind}(S^*) = 1$.

De fato, o núcleo de S^* é unidimensional e S^* é sobrejetivo.

É evidente que, se $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é um isomorfismo, então $\text{Ind}(T) = 0$.

Do mesmo modo, se E e F possuem dimensão finita, qualquer $T: E \rightarrow F$ linear é Fredholm, com índice igual a $\text{Ind}(T) = \dim(E) - \dim(F)$, em decorrência do teorema do núcleo e imagem.

Os operadores semi-Fredholm possuem vantajosas propriedades no que tange a teoria de perturbação, como veremos a seguir.

Todavia, para que possamos estabelecer aquelas que nos serão de maior utilidade, é necessário que olhemos para alguns resultados intermediários.

O próximo teorema, também clássico, fornece condições necessárias e suficientes para que um operador linear $T: E \rightarrow F$ fechado possua imagem fechada em F :

Teorema 2.48. *Se $T: E \rightarrow F$ é um operador linear fechado, então $\text{Im}(T)$ é fechado em F se, e somente se, existe $C > 0$ para o qual $d(x, \text{Ker}(T)) \leq C \|T(x)\|$, para todo $x \in E$, em que $d(x, \text{Ker}(T)) = \inf_{n \in \text{Ker}(T)} \|x - n\|$ denota a distância de $x \in E$ até $\text{Ker}(T)$.*

Demonstração: Ver [20], Theorem 3.14, página 68. □

Observemos que, se $T: E \rightarrow F$ é injetivo, então a desigualdade apresentada acima reduz-se a $\|x\| \leq C \|T(x)\|$, para todo $x \in E$.

Lema 2.49. *Consideremos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $\dim(\text{Ker}(T)) < \infty$. Sejam X_0 um subespaço fechado de E tal que $E = X_0 \oplus \text{Ker}(T)$ e P linear tal que $P = I$ em $\text{Ker}(T)$ e $P = 0$ em X_0 .*

Então, temos que $\text{Im}(T)$ é fechado em F se, e somente se, existe $C > 0$ para o qual $\|(I - P)(x)\| \leq C \|T(x)\|$, para todo $x \in E$.

Demonstração: Se $\text{Im}(T)$ é fechada em F , então a restrição de T a X_0 é injetiva e possui imagem fechada⁶. Então, pelo Teorema 2.48, existe $C > 0$ tal que $\|x\| \leq C \|T(x)\|$, para todo $x \in X_0$.

Mas, para todo $x \in E$, temos que $(I - P)(x) \in X_0$, pois $(I - P)(x_0 + n) = x_0$, para todos $x_0 \in X_0$ e $n \in \text{Ker}(T)$, bem como $T(I - P)(x) = T(x)$, de maneira que

$$\|(I - P)(x)\| \leq C \|T(I - P)(x)\| = C \|T(x)\|,$$

para todo $x \in E$.

Reciprocamente, se $y \in F$ é tal que $T(x_n) \rightarrow y$, com $x_n \in E$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(T(x_n))$ é de Cauchy em F ; como $\|(I - P)(x_n)\| \leq C \|T(x_n)\|$, então $((I - P)(x_n))$ é de Cauchy em E , de modo a existir $x \in E$ tal que $((I - P)(x_n)) \rightarrow x$.

Então, $T(I - P)(x_n) \rightarrow T(x)$, porém, como $T(I - P)(x_n) = T(x_n) \rightarrow y$, temos $T(x) = y \in \text{Im}(T)$, de maneira que $\text{Im}(T)$ é fechado em F , como queríamos. $\square$

Do Lema 2.49, temos, para $T \in \Phi_+(E, F)$, que $\|x\| \leq C \|T(x)\| + \|P(x)\|$. Colocando $\|x\|^* := \|P(x)\|$, para todo $x \in E$, segue que $\|\cdot\|^*$ define uma semi-norma em E (pois $\|P(x)\| = 0$ implica que $x \in X_0$, não sendo, necessariamente verdade, que $x = 0$).

A semi-norma $\|\cdot\|^*$ apresenta a seguinte propriedade: se (x_n) é uma sequência limitada de elementos de E , então (x_n) admite uma subsequência de Cauchy (relativamente a $\|\cdot\|^*$), como consequência da compacidade do operador P (Proposição 2.18).

Diremos, por essa razão, que a semi-norma $\|\cdot\|^*$ é *relativamente compacta* a norma $\|\cdot\|$ de E .

À luz disso, o Lema 2.49 pode ser parafraseado da seguinte maneira:

Se $T \in \Phi_+(E, F)$, então existe uma semi-norma $\|\cdot\|^$, relativamente compacta a norma $\|\cdot\|$ de E , tal que $\|x\| \leq C \|T(x)\| + \|x\|^*$, para todo $x \in E$, para algum $C > 0$.*

A recíproca do resultado mencionado anteriormente também é válida:

Teorema 2.50. *Se $T \in \mathcal{L}(E, F)$, então $T \in \Phi_+(E, F)$ se, e somente se, existe uma semi-norma $\|\cdot\|^*$, relativamente compacta a norma $\|\cdot\|$ de E , tal que $\|x\| \leq C \|T(x)\| + \|x\|^*$, para todo $x \in E$ e para algum $C > 0$.*

Demonstração: A condição necessária é equivalente ao Lema 2.49, e a condição suficiente pode ser encontrada em [20], Theorem 5.21, página 118. $\square$

Proposição 2.51. *Se $T \in \Phi_+(E, F)$ é um operador semi-Fredholm, então:*

1. $T + K \in \Phi_+(E, F)$, para qualquer $K \in \mathcal{K}(E, F)$;
2. Existe uma constante real positiva $\eta > 0$ para a qual, se $S \in \mathcal{L}(E, F)$ é tal que $\|S\| < \eta$, então $T + S \in \phi_+(E, F)$ e $\dim(\text{Ker}(T + S)) \leq \dim(\text{Ker}(T))$.

Demonstração: (1) Como $T \in \Phi_+(E, F)$, temos, pelo Teorema 2.50, que

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq C \|T(x)\| + \|x\|^* \\ &\leq C \|(T + K)(x) - K(x)\| + \|x\|^* \\ &\leq C \|(T + K)(x)\| + C \|K(x)\| + \|x\|^*. \end{aligned}$$

⁶ Como $E = X_0 \oplus \text{Ker}(T)$, então a restrição de T a X_0 , $\tilde{T}$, é tal que $\tilde{T}(x) := T(x)$, para todo $x \in X_0$. Agora, temos que $\text{Im}(T) = \text{Im}(\tilde{T})$, pois, se $y \in \text{Im}(T)$, então $y = T(x)$, para algum $x \in E$; mas, como $x = x_0 + n$, com $x_0 \in X_0$ e $n \in \text{Ker}(T)$, então $y = T(x_0) = \tilde{T}(x_0)$.

Logo, $y \in \text{Im}(\tilde{T})$ e, como $\text{Im}(T)$ é fechado em F , segue que $\text{Im}(\tilde{T})$ também o é.

Coloquemos $\|x\|_0^* := \|x\|^* + C \|K(x)\|$.

Com isso, temos que $\|x\|_0^*$ é uma semi-norma relativamente compacta a $\|\cdot\|$ (pois $\mathcal{K}(E, F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E, F)$, vide o Lema 2.19).

Portanto, concluímos, à luz do Teorema 2.50, que $T + K \in \Phi_+(E, F)$.

(2) Pelo Lema 2.49, temos, para todo $x \in E$, que

$$\|x\| \leq C \|(T + S)(x)\| + C \|S(x)\| + \|P(x)\|.$$

Assim, tomando $\eta = 1/2C$, segue que

$$\|x\| \leq C \|(T + S)(x)\| + \|P(x)\| + 1/2 \|x\|,$$

ou, ainda,

$$\|x\| \leq 2C \|(T + S)(x)\| + 2 \|P(x)\|,$$

para todo $x \in E$, o que nos permite concluir, pelo Teorema 2.50, que $T + S \in \Phi_+(E, F)$.

Além disso, como $P = 0$ em X_0 (Lema 2.49), temos $\|x\| \leq 2C \|(T + S)(x)\|$, para todo $x \in X_0$, de maneira que $\text{Ker}(T + S) \cap X_0 = \{0\}$. Logo, visto que $E = X_0 \oplus \text{Ker}(T)$, obtemos que $\text{Ker}(T + S) \subset \text{Ker}(T)$ e, então, $\dim(\text{Ker}(T + S)) \leq \dim(\text{Ker}(T))$. $\square$

Uma vez estabelecida a porção da teoria de operadores semi-Fredholm da qual necessitamos, podemos, enfim, entrar em detalhes sobre nossos métodos.

Sejam $L \in \mathcal{L}(E)$, $z \in E$ fixado e $T: E \rightarrow E$ a aplicação afim $T = L + z$.

Consideremos, ainda, $\mathcal{F}(T) = \{x \in E: T(x) = x\}$ (isso é, $\mathcal{F}(T)$ denota o conjunto dos pontos fixos de T). Se $\mathcal{F}(T) \neq \emptyset$, então existe $y \in E$ tal que $L(y) + z = y$.

Se $y' \in \mathcal{F}(T)$ é outro ponto fixo de T , então

$$\begin{aligned} y' &= L(y') + z \\ &= L(y') + (y - L(y)) \\ &= y + L(y' - y). \end{aligned}$$

Assim, segue que $L(y' - y) \in \text{Ker}(I - L)$, pois

$$\begin{aligned} (I - L)(L(y' - y)) &= (I - L)(y' - y) \\ &= y' - y - (y' - y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{F}(T) = y + \text{Ker}(I - L)$, de modo que $\mathcal{F}(T)$ possui a estrutura de *espaço afim*⁷.

Coloquemos $\dim(\mathcal{F}(T)) := \dim(\text{Ker}(I - L))$, e relembremos, por uma questão de completude, o Teorema A, exibido na introdução deste texto:

Teorema A. *Seja $T = L + z$ uma aplicação linear afim no espaço de Banach E , em que $L \in \mathcal{L}(E)$ e $z \in E$ fixado. Se $\text{Im}(I - L)$ é fechado e existe $x_0 \in E$ tal que $\{x_0, T(x_0), T^2(x_0), \dots\}$ é limitado, então T admite um ponto fixo.*

Se $I - L \in \Phi_+(E)$, o Teorema A pode ser reformulado da seguinte forma:

⁷ Um *espaço afim* sobre um corpo $\mathbb{K}$ é uma tripla $\mathcal{V} = (P, V, +)$, em que P é um conjunto cujos elementos chamam-se *pontos*, V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, e $(p, v) \in P \times V \mapsto p + v \in P$ uma operação tal que, para todos $p \in P$ e $v, w \in V$: (I) $(p + v) + w = p + (v + w)$, (II) $p + 0 = p$ (0 sendo o vetor nulo de V) e (III) para cada par de pontos $p, q \in P$, existe um único vetor $v \in V$ tal que $q = p + v$. Definimos $\dim(\mathcal{V}) := \dim(V)$ e, se $\mathcal{V} = \{p\}$, com $p \in P$, temos que $\dim(\mathcal{V}) = 0$.

Teorema 2.52. *Seja $T = L + z$ uma aplicação linear afim no espaço de Banach E , em que $L \in \mathcal{L}(E)$ e $z \in E$ fixado. Se $I - L \in \Phi_+(E)$ e existe $x_0 \in E$ tal que $\{x_0, T(x_0), T^2(x_0), \dots\}$ é limitado, então $\mathcal{F}(T) \neq \emptyset$ e $\dim(\mathcal{F}(T)) < \infty$.*

É claro que a demonstração do Teorema 2.52 segue de imediato do Teorema A.

Isso posto, se uma condição inicial $x_0 = \phi \in \mathcal{B}$ é fornecida, em que $\mathcal{B}$ denota nosso espaço de fase abstrato, a equação

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + B(t, x_t), & t \geq 0, \\ x_0 = \phi, \end{cases} \quad (P_\omega L_0)$$

em que B é ω -periódica com relação a sua primeira variável, com $\omega > 0$, admite uma única solução mild $x(t, \phi)$, como veremos no Capítulo 3.

O operador solução da equação $(P_\omega L_0)$, $U(t, 0)$, definido por $U(t, 0)\phi := x_t(\cdot, 0, \phi)$, para $t \geq 0$, pode ser, então, decomposto⁸ como $U(t, 0)\phi = \hat{T}(t)\phi + K(t, 0)\phi$, em que

$$(\hat{T}(t)\phi)(\theta) = \begin{cases} T(t+\theta)\phi(0), & t+\theta \geq 0, \\ \phi(t+\theta), & t+\theta \leq 0, \end{cases}$$

e $K(t, 0): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ é o operador

$$(K(t, 0)\phi)(\theta) = \begin{cases} \int_0^{t+\theta} T(t+\theta-s)F(s, x_s(0, \phi))ds, & t+\theta \geq 0, \\ 0, & t+\theta \leq 0. \end{cases}$$

A existência de soluções periódicas para a equação $(P_\omega L)$ será equivalente a existência de pontos fixos da aplicação linear afim $\psi \mapsto U(\omega, 0)\psi + \phi$ no espaço de fase $\mathcal{B}$, em que $\psi \in \mathcal{B}$ é uma função fixa, determinada por uma solução específica da equação $(P_\omega L)$.

Seguirá, portanto, do Teorema 2.52, que, se $I - U(\omega, 0) \in \Phi_+(\mathcal{B})$, então a equação $(P_\omega L)$ admite a propriedade (BP), isto é, se a equação $(P_\omega L)$ admite uma solução limitada, então admite uma solução periódica.

Nossas considerações teóricas anteriores sobre os operadores semi-Fredholm nos levam naturalmente ao seguinte resultado:

Teorema 2.53. *Suponha que $I - \hat{T}(\omega) \in \Phi_+(\mathcal{B})$. Então:*

1. *Se $K(\omega, 0)$ é um operador compacto, então a equação $(P_\omega L)$ admite a propriedade (BP);*
2. *Existe $\eta > 0$ tal que, se $\|K(\omega, 0)\| < \eta$, então a equação $(P_\omega L)$ admite a propriedade (BP), e o conjunto de suas soluções periódicas tem a estrutura de um espaço linear afim de dimensão menor ou igual a $\dim(\text{Ker}(I - \hat{T}(\omega)))$.*

Voltaremos, no Capítulo 3, ao detalhamento de nosso procedimento.

Encerraremos esta seção lembrando o conceito de *raio do espectro essencial* (ou *raio espectral essencial*) de um operador linear $L \in \mathcal{L}(E)$, $r_e(L)$, bem como a *fórmula de Nussbaum*, que relaciona seu raio do espectro essencial com sua α -medida de não-compacidade.

⁸ Ver a Seção 3.3 para uma discussão mais aprofundada.

Uma vez que existem várias definições⁹ para o espectro essencial do operador $L \in \mathcal{L}(E)$, no espaço de Banach E , adotaremos a seguinte, por ser aquela que mais se adequa às nossas finalidades:

Definição 2.54 (Espectro Essencial). Seja $L \in \mathcal{L}(E)$. O *espectro essencial* de L , denotado por $\sigma_{\text{ess}}(L)$, é o conjunto de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador $\lambda I - L$ não é semi-Fredholm.

Em outras palavras,

$$\sigma_{\text{ess}}(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - L \notin \Phi_+(E)\}.$$

Definimos, agora, o raio espectral essencial do operador L :

Definição 2.55 (Raio do Espectro Essencial). O *raio do espectro essencial* do operador L , $r_e(L)$, é definido como o supremo do conjunto $\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(L)\}$:

$$r_e(L) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(L)\}.$$

O lema a seguir é consequência direta da Definição 2.55 acima:

Lema 2.56. *Seja $L \in \mathcal{L}(E)$. Se $|\lambda| > r_e(L)$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, então a imagem $\text{Im}(\lambda I - L)$ é fechada em E e $\dim(\text{Ker}(\lambda I - L)) < \infty$ (ou seja, $\lambda I - L \in \Phi_+(E)$).*

Demonstração: Se existe $\lambda \in \mathbb{C}$ para o qual $|\lambda| > r_e(L)$, então $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(L)$. Sendo assim, segue que $\lambda I - L \in \Phi_+(E)$, de modo que a imagem $\text{Im}(\lambda I - L)$ é fechada em E e $\dim(\text{Ker}(\lambda I - L)) < \infty$. $\square$

Corolário 2.57. *Se $L \in \mathcal{L}(E)$ e $r_e(L) < 1$, então $I - L \in \Phi_+(E)$.*

Enunciemos, agora, a *fórmula de Nussbaum*:

Teorema 2.58 (Fórmula de Nussbaum). *O limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(L^n)^{1/n}$, em que $\alpha(L)$ denota a α -medida de não-compacidade de L , existe e é igual ao seu raio espectral essencial, isto é:*

$$r_e(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(L^n)^{1/n}.$$

Demonstração: Ver [17], Theorem 1, página 477. $\square$

Pela Definição 2.37, vemos que $\alpha(L^n) \leq \alpha(L)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $r_e(L) \leq \alpha(L)$, pelo Teorema 2.58.

⁹ Definições essas que, em sua maioria, não são equivalentes (ver, por exemplo, [7], seção 2, página 122).

3 Equações diferenciais lineares não-homogêneas

Neste capítulo, faremos algumas considerações a respeito das soluções da equação

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + F(t, x_t), & t > \sigma, \\ x_\sigma = \phi \in \mathcal{B}, \end{cases}$$

em que $\sigma \geq 0$ e a aplicação $F: \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow E$ satisfaz uma determinada propriedade ($\hat{H}$) adicional, que será exposta sem demora.

Nas Seções 3.1 e 3.2, estabelecemos um resultado de *existência e unicidade* de solução do tipo *mild* para essa equação, bem como estimativas para a norma dessa solução no espaço de fase $\mathcal{B}$, respectivamente.

Por fim, na Seção 3.3, introduzimos o chamado *operador solução* da equação, e apresentamos uma notável propriedade deste, que fornece uma expressão explícita para seu raio espectral essencial.

3.1 Existência de solução

Dada $\phi \in \mathcal{B}$, em que $\mathcal{B}$ é um espaço de fase abstrato definido axiomáticamente, como na Seção 2.5, consideremos um espaço de Banach E e a equação (S) dada por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + F(t, x_t), & \sigma < t \leq \sigma + a, \\ x_\sigma = \phi, \end{cases} \quad (\text{S})$$

com $0 \leq \sigma < a$, que satisfaz as seguintes hipóteses:

(H1). $A: \mathcal{D}(A) \subset E \rightarrow E$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em E ;

($\hat{H}$). $F: \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow E$ é contínua, lipschitziana com respeito a segunda variável e, para todo $(t, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B}$, existem funções contínuas $n, f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ tais que

$$\|F(t, \psi)\| \leq n(t) \|\psi\|_{\mathcal{B}} + f(t). \quad (3.1)$$

O fato da aplicação $F: \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow E$ ser lipschitziana em relação a segunda variável significa que, para cada $t \in \mathbb{R}$, a função $F_t: \mathcal{B} \rightarrow E$, tal que $F_t(\psi) := F(t, \psi)$, é lipschitziana.

Definamos, a seguir, o conceito de *solução no sentido clássico* (ou *solução clássica*) para a equação (S).

Definição 3.1 (Solução clássica). Uma função $x: (-\infty, \sigma + a] \rightarrow E$ é uma solução, no sentido clássico, da equação (S), se: x é contínua, $x: (\sigma, \sigma + a) \rightarrow E$ é diferenciável, $x(t) \in \mathcal{D}(A)$, para todo $t \in [\sigma, \sigma + a]$, e x satisfaz a equação (S), com $x_\sigma = \phi$.

Admitindo, então, que x seja uma solução da equação (S), a função $g: [\sigma, t] \rightarrow E$, tal que $g(s) := T(t - s)x(s)$, com $\sigma \leq t \leq \sigma + a$, é diferenciável em (σ, t) , e satisfaz $\frac{dg}{ds} = T(t - s)F(s, x_s)(\star)$, por intermédio da regra da cadeia, bem como do fato de que $\frac{dT}{dt}(t) = AT(t) = T(t)A$ (vide o Teorema 2.6). Integrando $(\star)$ no intervalo $[\sigma, t]$, obtemos que

$$x(t) = T(t - \sigma)x(\sigma) + \int_{\sigma}^t T(t - s)F(s, x_s)ds, \quad (3.2)$$

em que utilizamos o *Teorema fundamental do Cálculo* (Teorema B.29).

Observamos que a fórmula exibida acima está bem-definida mesmo se x não for diferenciável, o que faz de x uma espécie de solução “fraca” da equação (S), sendo requerida apenas sua continuidade; isso nos leva ao conceito de solução *mild*, que será explorado a seguir.

Nosso papel, nesta seção, é estimar a solução mild dada pela fórmula (3.2) acima.

Definição 3.2 (Solução mild). Uma função contínua $x: (-\infty, \sigma + a] \rightarrow E$, que satisfaz a equação integral

$$\begin{cases} x(t) = T(t - \sigma)\phi(0) + \int_{\sigma}^t T(t - s)F(s, x_s)ds, & \sigma \leq t \leq \sigma + a, \\ x_\sigma = \phi \in \mathcal{B}, \end{cases}$$

é chamada de *solução mild* da equação (S), com $x_\sigma = \phi \in \mathcal{B}$, e a denotamos por $x(\cdot, \sigma, \phi)$. A história associada a x , $x_t \in \mathcal{B}$, é denotada por $x_t(\cdot, \sigma, \phi)$.

Uma vez que estamos assumindo a condição $x_\sigma = \phi$, então $x(\sigma) = x_\sigma(0) = \phi(0)$, de modo que a fórmula (3.2) é consistente com a apresentada na Definição 3.2 acima.

Nosso próximo resultado consiste na existência e unicidade de soluções mild, mediante a condição inicial $x_\sigma = \phi \in \mathcal{B}$.

Antes, porém, é necessário que façamos uma observação a respeito da continuidade da aplicação $s \mapsto T(t - s)F(s, x_s)$, para $0 \leq s \leq t$, que figura na expressão da solução mild acima:

Lema 3.3. Se $w: (-\infty, \sigma + a] \rightarrow E$ é uma função contínua em $[\sigma, \sigma + a]$, então, para todo $\sigma \leq t \leq \sigma + a$, a função $g: [\sigma, t] \rightarrow E$, tal que $g(s) := T(t - s)F(s, w_s)$, é contínua.

Demonstração: Pela Definição 2.42, temos que, para todo $s \in [\sigma, \sigma + a]$, a função $s \in [\sigma, \sigma + a] \mapsto w_s \in \mathcal{B}$ é contínua.

Dessa maneira, a função $s \in [\sigma, \sigma + a] \mapsto (s, w_s) \in [\sigma, \sigma + a] \times \mathcal{B}$ também é contínua.

Similarmente, a função $(s, w_s) \in [\sigma, \sigma + a] \times \mathcal{B} \mapsto F(s, w_s) \in E$ é contínua, haja vista a continuidade de F .

Resta verificarmos a continuidade de g . Pois bem, sabemos que, para cada $x \in E$, a função $t \in [0, +\infty) \mapsto T(t)(x) \in E$ é contínua. Ou seja, para cada $x \in E$, e para toda sequência (t_n) em $[0, +\infty)$ tal que $t_n \rightarrow t$, temos que $T(t_n)(x) \rightarrow T(t)(x)$. Sendo assim, consideremos uma sequência (s_n) em $[\sigma, t]$ tal que $s_n \rightarrow s_0$, para algum $s_0 \in [\sigma, t]$.

Pela continuidade de F , como (s_n, w_{s_n}) é uma sequência de termos em $[\sigma, t] \times \mathcal{B}$ tal que $(s_n, w_{s_n}) \rightarrow (s_0, w_{s_0})$, segue que $F(s_n, w_{s_n}) \rightarrow F(s_0, w_{s_0})$. Pela continuidade forte do C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, bem como sua limitação exponencial $\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}$, vide o Teorema 2.4, para todo $t \geq 0$, temos que

$$T(t - s_n) F(s_0, w_{s_0}) \rightarrow T(t - s_0) F(s_0, w_{s_0}) \quad \text{e} \quad \|T(t - s_n)\| \leq M_\omega e^{\omega(t - s_n)},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \|g(s_n) - g(s_0)\| &= \|T(t - s_n) F(s_n, w_{s_n}) - T(t - s_0) F(s_0, w_{s_0})\| \\ &= \|T(t - s_n)(F(s_n, w_{s_n}) - F(s_0, w_{s_0})) + (T(t - s_n) - T(t - s_0)) F(s_0, w_{s_0})\| \\ &\leq \|T(t - s_n)\| \|F(s_n, w_{s_n}) - F(s_0, w_{s_0})\| + \|(T(t - s_n) - T(t - s_0)) F(s_0, w_{s_0})\| \\ &\leq M_\omega e^{\omega(t - s_n)} \|F(s_n, w_{s_n}) - F(s_0, w_{s_0})\| + \|(T(t - s_n) - T(t - s_0)) F(s_0, w_{s_0})\|. \end{aligned}$$

Uma vez que $F(s_n, w_{s_n}) \rightarrow F(s_0, w_{s_0})$, $T(t - s_n) F(s_0, w_{s_0}) \rightarrow T(t - s_0) F(s_0, w_{s_0})$ e $e^{\omega(t - s_n)} \rightarrow e^{\omega(t - s_0)}$, vide a discussão anterior, concluímos que $g(s_n) \rightarrow g(s_0)$.

Segue, portanto, que g é contínua, como queríamos. $\square$

Teorema 3.4 (Existência e unicidade de solução mild). *A solução mild da equação (S), com $x_\sigma = \phi \in \mathcal{B}$, existe unicamente em $(-\infty, \sigma + a]$, para todo $a > 0$.*

Demonstração: Em vista do lema anterior, comecemos definindo

$$x^0(t) := \begin{cases} \phi(t - \sigma), & t \leq \sigma, \\ T(t - \sigma) \phi(0), & \sigma \leq t \leq \sigma + a, \end{cases}$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$, coloquemos,

$$x^n(t) := \begin{cases} \phi(t - \sigma), & t \leq \sigma, \\ T(t - \sigma) \phi(0) + \int_\sigma^t T(t - s) F(s, x_s^{n-1}) ds, & \sigma \leq t \leq \sigma + a. \end{cases}$$

Como $s \mapsto F(s, x_s^0)$ é contínua, existe $C > 0$ para o qual $\|F(s, x_s^0)\| \leq C$, para $\sigma \leq s \leq \sigma + a$. Adicionalmente, sendo F lipschitziana em relação a sua segunda variável, existe $L > 0$ tal que, para todos $t \in \mathbb{R}$ e $\phi, \psi \in \mathcal{B}$,

$$\|F(t, \phi) - F(t, \psi)\| \leq L \|\phi - \psi\|_{\mathcal{B}}.$$

Desse modo, observemos que, para $\sigma \leq t \leq \sigma + a$, temos

$$\|x^1(t) - x^0(t)\| = \left\| \int_\sigma^t T(t - s) F(s, x_s^0) ds \right\| \leq C \int_\sigma^t \|T(t - s)\| ds \leq M_\omega C (t - \sigma) e^{\omega(t - \sigma)},$$

em vista da limitação exponencial $\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}$ do C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ (Teorema 2.4).

Agora, vejamos que

$$\begin{aligned} \|x^2(t) - x^1(t)\| &= \left\| \int_\sigma^t T(t - s) (F(s, x_s^1) - F(s, x_s^0)) ds \right\| \leq L \int_\sigma^t \|T(t - s)\| \|x_s^1 - x_s^0\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq M_\omega L e^{\omega(t - \sigma)} \int_\sigma^t \|x_s^1 - x_s^0\|_{\mathcal{B}} ds. \end{aligned}$$

Para estimarmos o termo $\|x_s^1 - x_s^0\|_{\mathcal{B}}$ acima, utilizamos os axiomas do espaço de fase $\mathcal{B}$ (Definição 2.42). Pelo axioma (B1)(2), temos

$$\|x_s^1 - x_s^0\|_{\mathcal{B}} \leq K(s - \sigma) \sup_{\sigma \leq h \leq s} \|x^1(h) - x^0(h)\| + M(s - \sigma) \|x_\sigma^1 - x_\sigma^0\|_{\mathcal{B}},$$

em que $K: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é contínua e $M: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é mensurável e localmente limitada.

Coloquemos $\hat{K} = \sup_{0 \leq h \leq \sigma+a} K(h)$, e notemos que $\|x_\sigma^1 - x_\sigma^0\|_{\mathcal{B}} = 0$, pois

$$x_\sigma^0(\theta) = x^0(\sigma + \theta) = \phi(\sigma + \theta - \sigma) = \phi(\theta),$$

da mesma forma que $x_\sigma^n(\theta) = \phi(\theta)$, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $\theta \in (-\infty, 0]$, donde segue que $x_\sigma^1 - x_\sigma^0 = 0$.

Dito isso, ficamos com

$$\|x_s^1 - x_s^0\|_{\mathcal{B}} \leq \hat{K} \sup_{\sigma \leq h \leq s} \|x^1(h) - x^0(h)\| \leq \hat{K} M_\omega C (s - \sigma) e^{\omega(t-\sigma)},$$

de maneira que

$$\|x^2(t) - x^1(t)\| \leq \hat{K} M_\omega^2 C L e^{2\omega(t-\sigma)} \int_\sigma^t (s - \sigma) ds = \frac{\hat{K} M_\omega^2 C L (t - \sigma)^2 e^{2\omega(t-\sigma)}}{2}.$$

Repetindo esse procedimento, não é difícil nos convenceremos, via indução matemática, de que

$$\|x^n(t) - x^{n-1}(t)\| \leq \frac{\hat{K}^{n-1} M_\omega^n C L^{n-1} (t - \sigma)^n e^{n\omega(t-\sigma)}}{n!},$$

em que utiliza-se, também, a condição $x_\sigma = \phi$, para que se tenha $\|x_\sigma^{n-1} - x_\sigma^{n-2}\|_{\mathcal{B}} = 0$.

Assim sendo, dados $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$,

$$\begin{aligned} \|x^m(t) - x^n(t)\| &\leq \|x^m(t) - x^{m-1}(t)\| + \|x^{m-1}(t) - x^{m-2}(t)\| + \dots + \|x^{n+1}(t) - x^n(t)\| \\ &\leq \frac{\hat{K}^{m-1} M_\omega^m C L^{m-1} (t - \sigma)^m e^{m\omega(t-\sigma)}}{m!} + \frac{\hat{K}^{m-2} M_\omega^{m-1} C L^{m-2} (t - \sigma)^{m-1} e^{(m-1)\omega(t-\sigma)}}{(m-1)!} \\ &\quad + \dots + \frac{\hat{K}^n M_\omega^{n+1} C L^n (t - \sigma)^{n+1} e^{(n+1)\omega(t-\sigma)}}{(n+1)!} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\hat{K}^{k-1} M_\omega^k C L^{k-1} (t - \sigma)^k e^{k\omega(t-\sigma)}}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\hat{K}^{k-1} M_\omega^k C L^{k-1} a^k e^{k\omega a}}{k!}. \end{aligned}$$

A série acima converge por uma simples aplicação do teste da razão¹. Assim sendo, a sequência (x^n) é *uniformemente Cauchy*² em E e, portanto, uniformemente convergente.

¹ Com efeito, se $a_k = \frac{\hat{K}^{k-1} M_\omega^k C L^{k-1} (t - \sigma)^k e^{k\omega(t-\sigma)}}{k!}$, então $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\hat{K} M_\omega L (t - \sigma) e^{\omega(t-\sigma)}}{k+1}$ e $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \rightarrow 0$, a medida que $k \rightarrow \infty$, de modo que a série em questão é absolutamente convergente.

² Se S é um conjunto não-vazio e (M, d) é um espaço métrico arbitrário, dizemos que a sequência de funções $(f_n: S \rightarrow M)_{n=1}^\infty$ é *uniformemente Cauchy* se $\sup_{x \in S} d(f_m(x), f_n(x)) \rightarrow 0$ a medida que $m, n \rightarrow \infty$. Se M é completo, então (f_n) é uniformemente Cauchy se, e somente se, é uniformemente convergente.

Desse modo, coloquemos $x(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x^n(t)$, em que $x: (-\infty, \sigma + a] \rightarrow E$ é contínua em $[\sigma, \sigma + a]$.

A função x satisfaz a condição inicial $x_\sigma = \phi \in \mathcal{B}$, pois, para todo $\theta \in (-\infty, 0]$,

$$x_\sigma(\theta) = x(\sigma + \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n(\sigma + \theta) = \phi(\sigma + \theta - \sigma) = \phi(\theta).$$

Posto isso, resta verificarmos que x satisfaz a igualdade apresentada na Definição 3.2. Com efeito, fazemos

$$\begin{aligned} & \left\| x(t) - T(t - \sigma) \phi(0) - \int_\sigma^t T(t - s) F(s, x_s) ds \right\| \\ &= \left\| (x(t) - x^{n+1}(t)) + \left(x^{n+1}(t) - T(t - \sigma) \phi(0) - \int_\sigma^t T(t - s) F(s, x_s) ds \right) \right\| \\ &\leq \left\| x(t) - x^{n+1}(t) \right\| + \left\| \int_\sigma^t T(t - s) (F(s, x_s^n) - F(s, x_s)) ds \right\|. \end{aligned}$$

Sabemos que o primeiro termo acima tende a zero a medida que $n \rightarrow \infty$.

Para o segundo termo, fazemos

$$\left\| \int_\sigma^t T(t - s) (F(s, x_s^n) - F(s, x_s)) ds \right\| \leq M_\omega L e^{\omega(t-\sigma)} \int_\sigma^t \|x_s^n - x_s\|_{\mathcal{B}} ds.$$

Temos, novamente pelo axioma (B1)(2), que

$$\begin{aligned} \|x_s^n - x_s\|_{\mathcal{B}} &\leq K(s - \sigma) \sup_{\sigma \leq h \leq s} \|x^n(h) - x(h)\| + M(s - \sigma) \|x_\sigma^n - x_\sigma\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \hat{K} \sup_{\sigma \leq h \leq t} \|x^n(h) - x(h)\| + M(s - \sigma) \|x_\sigma^n - x_\sigma\|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

donde segue que $\|x_s^n - x_s\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$, pois $\sup_{\sigma \leq h \leq t} \|x^n(h) - x(h)\| \rightarrow 0$, em decorrência da convergência uniforme, bem como do fato de que $x_\sigma^n = x_\sigma = \phi$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, como

$$\left\| x(t) - T(t - \sigma) \phi(0) - \int_\sigma^t T(t - s) F(s, x_s) ds \right\|$$

é uma diferença arbitrariamente pequena, concluimos, como desejado, que

$$x(t) = T(t - \sigma) \phi(0) + \int_\sigma^t T(t - s) F(s, x_s) ds.$$

Por fim, para verificarmos que a solução x é única, suponhamos que y também satisfaz a Definição 3.2. Ou seja, temos $y(t) = T(t - \sigma) \phi(0) + \int_\sigma^t T(t - s) F(s, y_s) ds$, para $\sigma \leq t \leq \sigma + a$, e $y_\sigma = \phi \in \mathcal{B}$, do que segue que

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &= \left\| \int_\sigma^t T(t - s) (F(s, x_s) - F(s, y_s)) ds \right\| \\ &\leq \hat{K} M_\omega L e^{\omega(t-\sigma)} \int_\sigma^t \sup_{\sigma \leq h \leq s} \|x(h) - y(h)\| ds \\ &= \hat{K} M_\omega L e^{\omega(t-\sigma)} \|x - y\|_\infty (t - \sigma) \leq \beta(t - \sigma), \end{aligned}$$

em que $\beta = \hat{K} M_\omega L e^{\omega a} \|x - y\|_\infty$.

Observemos o seguinte, como $T(t - \sigma) \phi(0) = x(t) - \int_\sigma^t T(t - s) F(s, x_s) ds$, então

$$\begin{aligned} \|x^0(t) - y(t)\| &= \|T(t - \sigma) \phi(0) - y(t)\| = \left\| \left(x(t) - \int_\sigma^t T(t - s) F(s, x_s) ds \right) - y(t) \right\| \\ &\leq \|x(t) - y(t)\| + \left\| \int_\sigma^t T(t - s) F(s, x_s) ds \right\| \\ &\leq \beta(t - \sigma) + M_\omega N e^{\omega(t - \sigma)}(t - \sigma) = (\beta + M_\omega N e^{\omega(t - \sigma)})(t - \sigma), \end{aligned}$$

em que $N > 0$ é tal que $\|F(s, x_s)\| \leq N$, para todo $s \in [\sigma, t]$, pela continuidade de x , das funções $s \mapsto x_s$ e F . De maneira análoga,

$$\begin{aligned} \|x^1(t) - y(t)\| &= \left\| \int_\sigma^t T(t - s)(F(s, x_s^0) - F(s, y_s)) ds \right\| \\ &\leq M_\omega L e^{\omega(t - \sigma)} \int_\sigma^t \|x_s^0 - y_s\|_{\mathcal{B}} ds \leq \frac{\hat{K} M_\omega L e^{\omega(t - \sigma)}(\beta + M_\omega N e^{\omega(t - \sigma)})(t - \sigma)^2}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|x^2(t) - y(t)\| &\leq M_\omega L e^{\omega(t - \sigma)} \int_\sigma^t \|x_s^1 - y_s\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq \frac{\hat{K}^2 M_\omega^2 L^2 e^{2\omega(t - \sigma)}(\beta + M_\omega N e^{\omega(t - \sigma)})(t - \sigma)^3}{6}. \end{aligned}$$

De maneira geral, um processo de indução matemática nos revela que

$$\|x^n(t) - y(t)\| \leq \frac{\hat{K}^n M_\omega^n L^n e^{n\omega(t - \sigma)}(\beta + M_\omega N e^{\omega(t - \sigma)})(t - \sigma)^{n+1}}{(n + 1)!},$$

o que nos permite concluir que $y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n(t)$.

Desse modo, temos que $x = y$ e, portanto, a solução para a equação (S) é única, como queríamos, finalizando a demonstração. $\square$

O fato de obtermos existência e unicidade de solução para a Equação (S), para qualquer que seja $a > 0$, nos permite estender tal solução para intervalos cada vez maiores e, assim, garantimos a existência e unicidade de solução “global”, isto é, definida em $\mathbb{R}$, o que será necessário para o estudo das soluções periódicas no Capítulo 4.

3.2 Estimativa da solução em $\mathcal{B}$

Na seção anterior, demonstramos a existência e unicidade de solução mild para a equação (S), a qual denotaremos por $x(\cdot, \sigma, \phi)$.

Na presente seção, buscaremos estimar a norma $\|x_t(\cdot, \sigma, \phi)\|_{\mathcal{B}}$, da história associada a essa solução, obtida no Teorema 3.4.

Para tanto, lançaremos mão da conhecida *Desigualdade de Gronwall*, em sua versão generalizada, a qual é denominada *Desigualdade de Gronwall-Bellman*.

A respeito de generalizações da desigualdade de Gronwall-Bellman, ver [18].

Proposição 3.5 (Desigualdade de Gronwall-Bellman generalizada). *Suponha que $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$ e $G(t)$ são funções não-negativas tais que $u(t)$, $a(t)$ e $b(t)$ são contínuas e $G(t)$ é absolutamente contínua, satisfazendo, para $t \geq \sigma$,*

$$u(t) \leq a(t) G(t) + a(t) \int_{\sigma}^t b(s) u(s) ds.$$

Então, para $t \geq \sigma$, vale que

$$u(t) \leq a(t) G(\sigma) \exp \left(\int_{\sigma}^t a(r) b(r) dr \right) + a(t) \int_{\sigma}^t G'(s) \exp \left(\int_s^t a(r) b(r) dr \right) ds.$$

Proposição 3.6. *Sejam $\omega \in \mathbb{R}$ e $M_{\omega} > 1$ para os quais $\|T(t)\| \leq M_{\omega} e^{\omega t}$, com $t \geq 0$, para o C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ da hipótese (H1), e assuma que vale a condição $(\hat{H})$. Então, a solução $x(\cdot, \sigma, \phi)$ da equação (S) existe e satisfaz*

$$\begin{aligned} \|x_t(\cdot, \sigma, \phi)\|_{\mathcal{B}} &\leq K(t - \sigma) \int_{\sigma}^t N(t, s, \sigma) f(s) ds \\ &+ \|\phi\|_{\mathcal{B}} \left(M(t - \sigma) + K(t - \sigma) \left(HN(t, \sigma, \sigma) + \int_{\sigma}^t N(t, s, \phi) n(s) M(s - \sigma) ds \right) \right), \quad t \geq \sigma, \end{aligned}$$

em que

$$N(t, s, \sigma) := M_{\omega} \exp \left\{ \int_s^t [\omega_+ + M_{\omega} n(r) K(r - \sigma)] dr \right\}$$

e $\omega_+ := \max \{\omega, 0\}$.

Demonstração: Coloquemos, de início, $u(t) := \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\|$, sendo $x = x(\cdot, \sigma, \phi)$ a solução da equação (S), com $x_{\sigma} = \phi$.

Como $x(t) = T(t - \sigma) \phi(0) + \int_{\sigma}^t T(t - s) F(s, x_s) ds$, com $x_{\sigma} = \phi \in \mathcal{B}$, temos

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \left\| T(t - \sigma) \phi(0) + \int_{\sigma}^t T(t - s) F(s, x_s) ds \right\| \\ &\leq \|T(t - \sigma)\| \|\phi(0)\| + \int_{\sigma}^t \|T(t - s)\| \|F(s, x_s)\| ds. \end{aligned}$$

Visto que $\|T(t)\| \leq M_{\omega} e^{\omega t}$, para $t \geq 0$, ficamos com

$$\|x(t)\| \leq M_{\omega} e^{\omega(t - \sigma)} \|\phi(0)\| + M_{\omega} \int_{\sigma}^t e^{\omega(t - s)} \|F(s, x_s)\| ds.$$

Para estimarmos a norma $\|F(s, x_s)\|$, temos, pela condição $(\hat{H})$, que existem funções contínuas $n, f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ tais que $\|F(s, x_s)\| \leq n(s) \|x_s\|_{\mathcal{B}} + f(s)$, de maneira que

$$\|x(t)\| \leq M_{\omega} e^{\omega(t - \sigma)} \|\phi(0)\| + M_{\omega} \int_{\sigma}^t e^{\omega(t - s)} [n(s) \|x_s\|_{\mathcal{B}} + f(s)] ds.$$

Por intermédio do axioma (B1)(2), temos $\|x_s\|_{\mathcal{B}} \leq K(s - \sigma) u(s) + M(s - \sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}}$, em que $u(t) := \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|x(s)\|$, o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq M_{\omega} e^{\omega(t - \sigma)} \|\phi(0)\| \\ &+ M_{\omega} \int_{\sigma}^t e^{\omega(t - s)} \{n(s) [K(s - \sigma) u(s) + M(s - \sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}}] + f(s)\} ds. \end{aligned}$$

Substituindo ω por ω_+ , o segundo membro da desigualdade acima torna-se uma função não-decrescente de t , para $t \geq \sigma$:

$$\begin{aligned} u(t) &\leq M_\omega e^{\omega_+(t-\sigma)} \|\phi(0)\| \\ &+ M_\omega \int_\sigma^t e^{\omega_+(t-s)} \{n(s) [K(s-\sigma) u(s) + M(s-\sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}}] + f(s)\} ds. \end{aligned}$$

Reescrevendo a desigualdade acima, afim de que possamos identificar as funções presentes na Proposição 3.5, temos

$$\begin{aligned} u(t) &\leq M_\omega e^{\omega_+ t} e^{-\omega_+ \sigma} \|\phi(0)\| + \int_\sigma^t M_\omega e^{\omega_+ t} e^{-\omega_+ s} n(s) K(s-\sigma) u(s) ds \\ &+ M_\omega e^{\omega_+ t} \int_\sigma^t e^{-\omega_+ s} [n(s) M(s-\sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}} + f(s)] ds. \end{aligned}$$

Com isso, inferimos que $a(t) = M_\omega e^{\omega_+ t}$, $b(t) = e^{-\omega_+ t} n(t) K(t-\sigma)$ e

$$G(t) = e^{-\omega_+ \sigma} \|\phi(0)\| + \int_\sigma^t e^{-\omega_+ s} (n(s) M(s-\sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}} + f(s)) ds,$$

de maneira que, pela Desigualdade de Gronwall-Bellman (Proposição 3.5),

$$\begin{aligned} u(t) &\leq M_\omega e^{\omega_+ t} e^{-\omega_+ \sigma} \|\phi(0)\| \exp \left(\int_\sigma^t M_\omega e^{\omega_+ r} e^{-\omega_+ r} n(r) K(r-\sigma) dr \right) \\ &+ M_\omega e^{\omega_+ t} \int_\sigma^t e^{-\omega_+ s} (n(s) M(s-\sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}} + f(s)) \\ &\quad \cdot \exp \left(\int_s^t M_\omega e^{\omega_+ r} e^{-\omega_+ r} n(r) K(r-\sigma) dr \right) ds \\ &= M_\omega e^{\omega_+(t-\sigma)} \|\phi(0)\| \exp \left(\int_\sigma^t M_\omega n(r) K(r-\sigma) dr \right) \\ &+ M_\omega e^{\omega_+ t} \int_\sigma^t e^{-\omega_+ s} (n(s) M(s-\sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}} + f(s)) \exp \left(\int_s^t M_\omega n(r) K(r-\sigma) dr \right) ds \\ &\leq H \|\phi\|_{\mathcal{B}} M_\omega e^{\omega_+(t-\sigma)} \exp \left(\int_\sigma^t M_\omega n(r) K(r-\sigma) dr \right) \\ &+ \int_\sigma^t M_\omega e^{\omega_+(t-s)} (n(s) M(s-\sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}} + f(s)) \exp \left(\int_s^t M_\omega n(r) K(r-\sigma) dr \right) ds \\ &= H \|\phi\|_{\mathcal{B}} M_\omega \exp \left\{ \int_\sigma^t [\omega_+ + M_\omega n(r) K(r-\sigma)] dr \right\} \\ &+ \int_\sigma^t M_\omega \exp \left\{ \int_s^t [\omega_+ + M_\omega n(r) K(r-\sigma)] dr \right\} (n(s) M(s-\sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}} + f(s)) ds \\ &= H \|\phi\|_{\mathcal{B}} N(t, \sigma, \sigma) + \int_\sigma^t N(t, s, \sigma) (n(s) M(s-\sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}} + f(s)) ds \\ &= H \|\phi\|_{\mathcal{B}} N(t, \sigma, \sigma) + \|\phi\|_{\mathcal{B}} \int_\sigma^t N(t, s, \sigma) n(s) M(s-\sigma) ds + \int_\sigma^t N(t, s, \sigma) f(s) ds, \end{aligned}$$

em que $N(t, s, \sigma) = M_\omega \exp \left\{ \int_s^t [\omega_+ + M_\omega n(r) K(r-\sigma)] dr \right\}$, $\sigma \leq s \leq t$.

Utilizamos, na passagem para a segunda desigualdade acima, a primeira desigualdade presente no axioma (B1)(2), $\|x(t)\| \leq H \|x_t\|_{\mathcal{B}}$, para todo $t \in [\sigma, \sigma + a)$, de modo que, em nosso contexto, é válido que $\|\phi(0)\| \leq H \|\phi\|_{\mathcal{B}}$.

Para que possamos passar para a norma $\|x_t(\cdot, \sigma, \phi)\|_{\mathcal{B}}$, aplicamos, novamente, o

axioma (B1)(2), de maneira que

$$\begin{aligned}
 & \|x_t(\cdot, \sigma, \phi)\|_{\mathcal{B}} \leq K(t - \sigma) u(t) + M(t - \sigma) \|x_\sigma\|_{\mathcal{B}} \\
 & \leq K(t - \sigma) \left(H \|\phi\|_{\mathcal{B}} N(t, \sigma, \sigma) + \|\phi\|_{\mathcal{B}} \int_{\sigma}^t N(t, s, \sigma) n(s) M(s - \sigma) ds + \int_{\sigma}^t N(t, s, \sigma) f(s) ds \right) \\
 & \quad + M(t - \sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
 & = K(t - \sigma) H \|\phi\|_{\mathcal{B}} N(t, \sigma, \sigma) + K(t - \sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}} \int_{\sigma}^t N(t, s, \sigma) n(s) M(s - \sigma) ds \\
 & \quad + K(t - \sigma) \int_{\sigma}^t N(t, s, \sigma) f(s) ds + M(t - \sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
 & = K(t - \sigma) \int_{\sigma}^t N(t, s, \sigma) f(s) ds \\
 & + \|\phi\|_{\mathcal{B}} \left(K(t - \sigma) H N(t, \sigma, \sigma) + K(t - \sigma) \int_{\sigma}^t N(t, s, \sigma) n(s) M(s - \sigma) ds + M(t - \sigma) \right) \\
 & = K(t - \sigma) \int_{\sigma}^t N(t, s, \sigma) f(s) ds \\
 & + \|\phi\|_{\mathcal{B}} \left(M(t - \sigma) + K(t - \sigma) \left(H N(t, \sigma, \sigma) + \int_{\sigma}^t N(t, s, \sigma) n(s) M(s - \sigma) ds \right) \right).
 \end{aligned}$$

Portanto, obtemos, para a norma $\|x_t(\cdot, \sigma, \phi)\|_{\mathcal{B}}$, a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
 & \|x_t(\cdot, \sigma, \phi)\|_{\mathcal{B}} \leq K(t - \sigma) \int_{\sigma}^t N(t, s, \sigma) f(s) ds \\
 & + \|\phi\|_{\mathcal{B}} \left(M(t - \sigma) + K(t - \sigma) \left(H N(t, \sigma, \sigma) + \int_{\sigma}^t N(t, s, \phi) n(s) M(s - \sigma) ds \right) \right),
 \end{aligned}$$

para $t \geq \sigma$, como queríamos, concluindo a demonstração. $\square$

Corolário 3.7. *Se a função f presente na propriedade $(\hat{H})$ é identicamente nula, então existe uma função localmente integrável $m(\cdot, \sigma): [\sigma, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ tal que*

$$\|x_t(\cdot, \sigma, \phi)\|_{\mathcal{B}} \leq m(t, \sigma) \|\phi\|_{\mathcal{B}},$$

para todo $t \in [\sigma, +\infty)$.

Demonstração: Com efeito, se $f \equiv 0$, a desigualdade que figura na Proposição 3.6 é equivalente a

$$\begin{aligned}
 & \|x_t(\cdot, \sigma, \phi)\|_{\mathcal{B}} \\
 & \leq \|\phi\|_{\mathcal{B}} \left(M(t - \sigma) + K(t - \sigma) \left(H N(t, \sigma, \sigma) + \int_{\sigma}^t N(t, s, \phi) n(s) M(s - \sigma) ds \right) \right).
 \end{aligned}$$

Considerando a aplicação $t \in [\sigma, +\infty) \mapsto m_t \in L^1_{\text{loc}}[\sigma, +\infty)$, tal que $m_t(\sigma) = m(t, \sigma)$, para todo $t \in [\sigma, +\infty)$, com

$$m(t, \sigma) = M(t - \sigma) + K(t - \sigma) \left(H N(t, \sigma, \sigma) + \int_{\sigma}^t N(t, s, \phi) n(s) M(s - \sigma) ds \right),$$

segue o resultado. $\square$

3.3 Operador solução

Na Seção 2.6 do Capítulo 2, fizemos menção ao *operador solução* $U(t, \sigma)$ da equação $(P_\omega L_0)$, bem como a decomposição

$$U(t, 0) \phi = \hat{T}(t) \phi + K(t, 0) \phi.$$

Faremos, agora, uma necessária abordagem mais detalhada destes conceitos.

Sabemos, sob as hipóteses (H1) e $(\hat{H})$, juntamente do Teorema 3.4 que, para cada $\phi \in \mathcal{B}$, a equação (S) admite uma única solução $x(\cdot, \sigma, \phi)$, que podemos considerar definida em toda reta, o que motiva a seguinte definição:

Definição 3.8 (Operador Solução). Para cada par $(t, \sigma) \in [\sigma, +\infty) \times [0, +\infty)$, definimos o *operador solução*, $U(t, \sigma): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, por $U(t, \sigma) \phi := x_t(\cdot, \sigma, \phi)$, para toda $\phi \in \mathcal{B}$.

Para cada $(t, \sigma) \in [\sigma, +\infty) \times [0, +\infty)$, definamos o operador $K(t, \sigma): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que, para $\phi \in \mathcal{B}$ e $\theta \in (-\infty, 0]$,

$$(K(t, \sigma) \phi)(\theta) = \begin{cases} \int_{\sigma}^{t+\theta} T(t+\theta-s) F(s, x_s(\cdot, \sigma, \phi)) ds, & t+\theta \geq \sigma, \\ 0, & t+\theta \leq \sigma. \end{cases}$$

Então, temos

$$U(t, \sigma) = \hat{T}(t-\sigma) + K(t, \sigma), \quad t \geq \sigma,$$

em que a família $\hat{T}(t)$, com $t \geq 0$, é um C_0 -semigrupo em $\mathcal{B}$ (ver Lema 3.9). De fato, como x é solução mild da equação (S), então $x(t) = T(t-\sigma) \phi(0) + \int_{\sigma}^t T(t-s) F(s, x_s) ds$, para $t \geq \sigma$.

Sendo $x_t(\cdot, \sigma, \phi)$ a história associada a solução $x(\cdot, \sigma, \phi)$, dado $\theta \in (-\infty, 0]$, temos $x_t(\theta, \sigma, \phi) = x(t+\theta, \sigma, \phi)$ e, assim,

$$x_t(\sigma, \phi)(\theta) = \begin{cases} T(t+\theta-\sigma) \phi(0) + \int_{\sigma}^{t+\theta} T(t+\theta-s) F(s, x_s(\sigma, \phi)) ds, & t+\theta \geq \sigma, \\ \phi(t+\theta), & t+\theta \leq \sigma. \end{cases}$$

Como $x_t(\sigma, \phi)(\theta) = (U(t, \sigma) \phi)(\theta)$, vide a Definição 3.8, e levando em consideração a definição do operador K acima, obtemos:

1. Se $t+\theta \geq \sigma$, então

$$\begin{aligned} (U(t, \sigma) \phi)(\theta) &= x(t+\theta, \sigma, \phi) \\ &= T(t+\theta-\sigma) \phi(0) + \int_{\sigma}^{t+\theta} T(t+\theta-s) F(s, x_s(\sigma, \phi)) ds \\ &= (\hat{T}(t-\sigma) \phi)(\theta) + (K(t, \sigma) \phi)(\theta). \end{aligned}$$

2. Se $t+\theta \leq \sigma$,

$$\begin{aligned} (U(t, \sigma) \phi)(\theta) &= x(t+\theta, \sigma, \phi) = x(\sigma + (t-\sigma+\theta), \sigma, \phi) \\ &= x_{\sigma}(t-\sigma+\theta, \sigma, \phi) = \phi(t-\sigma+\theta) \\ &= (\hat{T}(t-\sigma) \phi)(\theta). \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$U(t, \sigma) = \hat{T}(t - \sigma) + K(t, \sigma),$$

em que $(\hat{T}(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathcal{B})$ é um C_0 -semigrupo em $\mathcal{B}$ tal que

$$(\hat{T}(t)\phi)(\theta) := \begin{cases} T(t + \theta)\phi(0), & t + \theta \geq 0, \\ \phi(t + \theta), & t + \theta \leq 0, \end{cases}$$

para todo $\theta \in (-\infty, 0]$.

Por uma questão de clareza, verifiquemos, de fato, que a família $(\hat{T}(t))_{t \geq 0}$ define um C_0 -semigrupo em $\mathcal{B}$.

Lema 3.9. *A família $(\hat{T}(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathcal{B})$, tal que*

$$(\hat{T}(t)\phi)(\theta) := \begin{cases} T(t + \theta)\phi(0), & t + \theta \geq 0, \\ \phi(t + \theta), & t + \theta \leq 0, \end{cases}$$

para todos $\phi \in \mathcal{B}$ e $\theta \in (-\infty, 0]$, define um C_0 -semigrupo em $\mathcal{B}$.

Demonstração: Verifiquemos que $(\hat{T}(t))_{t \geq 0}$ verifica as condições da Definição 2.1.

Com efeito, se $t = 0$, então $(\hat{T}(0)\phi)(\theta) = \phi(\theta)$, para todos $\phi \in \mathcal{B}$ e $\theta \in (-\infty, 0]$, de maneira que $\hat{T}(0) = I$, sendo I o operador idêntico em $\mathcal{B}$.

Para comprovarmos que $(\hat{T}(t))_{t \geq 0}$ satisfaz, de fato, a propriedade exponencial de semigrupo, vejamos que

$$(\hat{T}(s+t)\phi)(\theta) = \begin{cases} T(s+t+\theta)\phi(0), & s+t+\theta \geq 0, \\ \phi(s+t+\theta), & s+t+\theta \leq 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Por outro lado,

$$[(\hat{T}(s)\hat{T}(t))\phi](\theta) = \begin{cases} T(s+\theta)(\hat{T}(t)\phi)(0), & s+\theta \geq 0, \\ (\hat{T}(t)\phi)(s+\theta), & s+\theta \leq 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Provemos que as igualdades (3.3) e (3.4) são equivalentes.

No primeiro caso da igualdade (3.4), temos que $(\hat{T}(t)\phi)(0) = T(t)\phi(0)$, de maneira que

$$T(s+\theta)T(t)\phi(0) = T(s+t+\theta)\phi(0) = (\hat{T}(s+t)\phi)(\theta).$$

No segundo caso, temos que

$$(\hat{T}(t)\phi)(s+\theta) := \begin{cases} T(s+t+\theta)\phi(0), & s+t+\theta \geq 0, \\ \phi(s+t+\theta), & s+t+\theta \leq 0. \end{cases}$$

Se $s+t+\theta \geq 0$, então

$$(\hat{T}(t)\phi)(s+\theta) = T(s+t+\theta)\phi(0) = (\hat{T}(s+t)\phi)(\theta)$$

e, se $s+t+\theta \leq 0$, então

$$(\hat{T}(t)\phi)(s+\theta) = \phi(s+t+\theta) = (\hat{T}(s+t)\phi)(\theta).$$

Assim sendo, temos que as igualdades (3.3) e (3.4) acima são, em ambos os casos, equivalentes, o que nos permite concluir que

$$\hat{T}(s)\hat{T}(t)\phi = \hat{T}(s+t)\phi,$$

para toda função $\phi \in \mathcal{B}$, de forma que $(\hat{T}(t))_{t \geq 0}$ satisfaz as propriedades da Definição 2.1.

Provemos, agora, que, para toda função $\phi \in \mathcal{B}$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\hat{T}(t)\phi - \phi\|_{\mathcal{B}} = 0.$$

Pois bem, pelo axioma (B1)(2), temos que

$$\begin{aligned} \|\hat{T}(t)\phi - \phi\|_{\mathcal{B}} &\leq K(t) \sup_{0 \leq s \leq t} \|T(s)\phi(0) - \phi(0)\| + M(t) \|\hat{T}(0)\phi - \phi\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \hat{K} \sup_{0 \leq s \leq t} \|T(s)\phi(0) - \phi(0)\|, \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que $\hat{K} = \sup_{0 \leq s \leq t} K(s)$.

Como $\|T(t)\phi(0) - \phi(0)\| \rightarrow 0$, a medida que $t \rightarrow 0^+$, concluímos, fazendo $t \rightarrow 0^+$ na desigualdade (3.5) acima, que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\hat{T}(t)\phi - \phi\|_{\mathcal{B}} = 0,$$

como queríamos. $\square$

Se $\mathcal{B}$ é um espaço com memória amortecida e $\|T(t)\| \leq M_{\omega} e^{\omega t}$, para $t \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ e $M_{\omega} > 1$, então

$$\|\hat{T}(t)\| \leq (JM_{\omega}H + M)e^{\omega_+ t},$$

em que $J > 0$ está nos conformes do Lema 2.43, $M = (1 + HJ) \sup_{t \geq 0} \|S_0(t)\|$ e ω_+ é tal que $\omega_+ = \max\{\omega, 0\}$.

Com efeito, pela desigualdade (2.13) (Seção 2.5), vem

$$\|\hat{T}(t)\phi\|_{\mathcal{B}} \leq J \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|T(s)\phi(0)\| + M \|\phi\|_{\mathcal{B}} \leq JM_{\omega} e^{\omega_+ t} \|\phi(0)\| + M \|\phi\|_{\mathcal{B}}.$$

Pelo axioma (B1)(2), temos que $\|\phi(0)\| \leq H \|\phi\|_{\mathcal{B}}$, que nos fornece

$$\|\hat{T}(t)\phi\|_{\mathcal{B}} \leq JM_{\omega} e^{\omega_+ t} H \|\phi\|_{\mathcal{B}} + M \|\phi\|_{\mathcal{B}} = (JM_{\omega} e^{\omega_+ t} H + M) \|\phi\|_{\mathcal{B}},$$

de maneira que

$$\|\hat{T}(t)\| \leq JM_{\omega} e^{\omega_+ t} H + M \leq JM_{\omega} e^{\omega_+ t} H + M e^{\omega_+ t} = (JM_{\omega} H + M) e^{\omega_+ t},$$

como desejado.

Nosso próximo resultado diz respeito a compacidade do operador $K(t, \sigma)$.

Para tanto, é necessário que recordemos os Lemas 2.40 e 2.41, que foram vistos na Seção 2.3, bem como a notações $(T * u)(t) := \int_a^t T(t-s)u(s)ds$, para $t \in [a, b]$ e $T * \mathcal{U} := \{T * u : u \in \mathcal{U}\}$, para $\mathcal{U} \subset C([a, b], E)$.

Lema 2.40. *Sejam $\mathcal{U} \subset C([a, b], E)$ limitado e $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo em E . Então,*

$$\frac{1}{2\gamma_T} \omega(t, T * \mathcal{U}) \leq \sup_{a \leq \tau \leq t} \alpha(T * \mathcal{U}(\tau)) \leq \alpha((T * \mathcal{U} | [a, t])) \leq \gamma_T \sup_{a \leq \tau \leq t} \alpha((T * \mathcal{U})(\tau)),$$

para todo $t \in [a, b]$, em que $\gamma_T = \limsup_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)\|$.

Em particular, se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações em E , então

$$\alpha((T * \mathcal{U} | [a, t])) = \sup_{a \leq \tau \leq t} \alpha((T * \mathcal{U})(\tau)).$$

Lema 2.41. *Seja $W = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família enumerável de funções fortemente mensuráveis $x^n: [a, b] \rightarrow E$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assuma que exista uma função $\mu = \mu(t)$, integrável em $[a, b]$, tal que $\|x^n(t)\| \leq \mu(t)$ quase sempre em $[a, b]$.*

Então, $\alpha(W(t))$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\alpha\left(\left\{\int_a^b x^n(t) dt : n \in \mathbb{N}\right\}\right) \leq 2 \int_a^b \alpha(W(t)) dt.$$

De posse desses, temos:

Proposição 3.10. *Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo compacto em E , ou, se $F(t, \cdot)$ é um operador compacto, para cada $t \in \mathbb{R}$, então $\alpha(K(t, \sigma)) = 0$, para todo $t \geq \sigma$.*

Em outras palavras, $K(t, \sigma)$ é um operador compacto.

Demonstração: Como vimos anteriormente, temos que $U(t, \sigma) = \hat{T}(t - \sigma) + K(t, \sigma)$, sendo $(\hat{T}(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathcal{B})$ um C_0 -semigrupo em $\mathcal{B}$.

Começemos observando que, se $t = \sigma$, então o resultado é trivial, pois, uma vez que $U(\sigma, \sigma)\phi = x_\sigma(\cdot, \sigma, \phi) = \phi$, para toda $\phi \in \mathcal{B}$, então $U(\sigma, \sigma) = I$, sendo $I \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ o operador idêntico em $\mathcal{B}$, de modo que $K(\sigma, \sigma) = 0$.

Suponhamos, então, que $t > \sigma$, e seja Ω um subconjunto limitado de $\mathcal{B}$.

Da Proposição 3.6, segue que $x_s(\cdot, \sigma, \phi)$ é uniformemente limitada em $[\sigma, t]$, para toda $\phi \in \Omega$.

Consideremos a família $\mathcal{F}$, cujo parâmetro são as funções $\phi \in \Omega$, e cujos elementos são as funções $f(s) = F(s, x_s(\sigma, \phi))$. Do Lema 2.44, temos

$$\begin{aligned} \alpha(K(t, \sigma)\Omega) &\leq K(t - \sigma) \alpha((T * \mathcal{F}) | [\sigma, t]) + M(t - \sigma) \alpha(K(\sigma, \sigma)\Omega) \\ &= K(t - \sigma) \alpha((T * \mathcal{F}) | [\sigma, t]), \end{aligned}$$

em que $(T * \mathcal{F}) | [\sigma, t] = \{T * f|_{[\sigma, t]} : f \in \mathcal{F}\}$.

Do Lema 2.40, temos

$$\alpha((T * \mathcal{F}) : [\sigma, t]) \leq \gamma_T \sup_{\sigma \leq \tau \leq t} \alpha((T * \mathcal{F})(\tau)).$$

Então, é suficiente verificarmos que, para todo $t > \sigma$, $\alpha((T * \mathcal{F})(t)) = 0$.

De maneira equivalente, pela Proposição 2.30, isso é garantido com a compacidade do conjunto $\overline{(T * \mathcal{F})(t)}$, em que $(T * \mathcal{F})(t) = \{(T * f)(t) \in E : f \in \mathcal{F}\}$. Mais ainda, dizer que este é compacto é equivalente a provarmos que, para toda sequência (ϕ^n) em Ω , a sequência $((T * f^n)(t))$ admite subsequência convergente, em que $f^n(s) = F(s, x_s(\sigma, \phi^n))$.

Dito isso, provemos que

$$\alpha(\{T(t - s)F(s, x_s(\sigma, \phi)) : \phi \in \Omega\}) = 0, \quad \sigma \leq s \leq t,$$

pois, dessa forma, teremos, pelo Lema 2.41, que

$$\alpha(\{(T * f^n)(t)\}) \leq 2 \int_{\sigma}^t \alpha(\{T(t-s)F(s, x_s(\sigma, \phi^n)) : n \in \mathbb{N}\}) ds = 0, \quad (3.6)$$

de modo que o conjunto $\{(T * f^n)(t) : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto, o que equivale a garantir que $((T * f^n)(t))$ admite subsequência convergente, finalizando a demonstração.

Suponhamos, inicialmente, que $T(t-s)$ é compacto, para todo $\sigma \leq s \leq t$; verifiquemos que $\{T(t-s)F(s, x_s(\sigma, \phi)) : \phi \in \Omega\}$ é relativamente compacto.

Uma vez que $F: \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow E$ satisfaz a condição $(\hat{H})$ e $x_s(\cdot, \sigma, \phi)$ é uniformemente limitada em $[\sigma, t]$, para toda $\phi \in \mathcal{B}$, conforme argumentamos inicialmente, obtemos que o conjunto $\{F(s, x_s(\sigma, \phi)) : \phi \in \Omega\}$ é limitado em E . Logo, sendo $T(t-s)$ compacto, segue que $\{T(t-s)F(s, x_s(\sigma, \phi)) : \phi \in \Omega\}$ é relativamente compacto, em vista do item (b) da Proposição 2.18 e, com isso, $\alpha(\{T(t-s)F(s, x_s(\sigma, \phi)) : \phi \in \Omega\}) = 0$.

Assumamos, agora, que $F(s, \cdot)$ é compacto, para cada $s \in \mathbb{R}$, e consideremos o conjunto $\Gamma = \{x_s(\sigma, \phi) : \phi \in \Omega\}$.

Temos que Γ é limitado, em vista da limitação apresentada na Proposição 3.6, de modo que, para cada $s \in \mathbb{R}$, $F(s, \Gamma)$ é relativamente compacto.

Sendo assim, como $T(t-s)$ é contínuo, $T(t-s)F(s, \Gamma)$ é relativamente compacto, para cada $s \in \mathbb{R}$, o que nos permite concluir que $\{T(t-s)F(s, x_s(\sigma, \phi)) : \phi \in \Omega\}$ é relativamente compacto.

Temos, então, que $\alpha(\{T(t-s)F(s, x_s(\sigma, \phi)) : \phi \in \Omega\}) = 0$, em ambos os casos considerados.

Concluimos, portanto, por intermédio de (3.6), e pelo exposto acima, que $K(t, \sigma)$ é compacto, como queríamos. $\square$

Consideremos, agora, o caso em que $\sigma = 0$ e $F(t, \phi) = B(t, \phi)$ na equação (S), isto é, $B(\cdot, \phi)$ é ω -periódica e $B(t, \cdot)$ é linear, e voltemos a nos referir à equação por (L), devido a linearidade de B ; verifiquemos que $K(t, 0)$ é um operador linear em $\mathcal{B}$.

De fato, dadas $\phi, \psi \in \mathcal{B}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, sejam x, y, z soluções mild da equação (L), tais que $x_0 = \phi + \alpha\psi$, $y_0 = \phi$ e $z_0 = \alpha\psi$.

Assim, para $\theta \in (-\infty, 0]$, com $t + \theta \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} & (K(t, 0)(\phi + \alpha\psi))(\theta) - (K(t, 0)\phi)(\theta) - (\alpha K(t, 0)\psi)(\theta) \\ &= \int_0^{t+\theta} T(t+\theta-s)B(s, x_s(0, \phi + \alpha\psi) - B(s, y_s(0, \phi)) - \alpha B(s, z_s(0, \psi))) ds \\ &= \int_0^{t+\theta} T(t+\theta-s)B(s, x_s(0, \phi + \alpha\psi) - y_s(0, \phi) - \alpha z_s(0, \psi)) ds. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para facilitarmos as manipulações, escrevamos apenas x_s, y_s e z_s para denotarmos $x_s(\cdot, 0, \phi + \alpha\psi)$, $y_s(\cdot, 0, \phi)$ e $z_s(\cdot, 0, \psi)$, respectivamente.

Sabendo que x é solução mild da equação (L), temos

$$x(t) = T(t)(\phi + \psi)(0) + \int_0^t T(t-s)B(s, x_s) ds, \quad t \geq 0, \quad (3.8)$$

com $x_0 = \phi + \alpha\psi$.

Consideremos $u: \mathbb{R} \rightarrow E$ dada por

$$u(t) = \begin{cases} \phi(t) + \alpha\psi(t), & t \leq 0, \\ y(t) + \alpha z(t), & t > 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Como y e z são soluções da equação (L), para $t \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(T(t) \phi(0) + \int_0^t T(t-s) B(s, y_s) ds \right) + \left(\alpha T(t) \psi(0) + \alpha \int_0^t T(t-s) B(s, z_s) ds \right) \\ &= T(t)(\phi(0) + \alpha \psi(0)) + \int_0^t T(t-s)(B(s, y_s) + \alpha B(s, z_s)) ds \\ &= T(t)(\phi + \alpha \psi)(0) + \int_0^t T(t-s) B(s, y_s + \alpha z_s) ds. \end{aligned}$$

Notemos, ainda, que, para $0 \leq s \leq t$ e $\theta \in (-\infty, 0]$,

$$(y_s + \alpha z_s)(\theta) = y_s(\theta) + \alpha z_s(\theta) = y(s + \theta) + \alpha z(s + \theta) = u(s + \theta) = u_s(\theta),$$

e, desse modo, temos

$$u(t) = T(t)(\phi + \alpha \psi)(0) + \int_0^t T(t-s) B(s, u_s) ds, \quad t \geq 0.$$

Como $u_0(\theta) = u(\theta) = \phi(\theta) + \alpha \psi(\theta) = (\phi + \alpha \psi)(\theta)$, para $\theta \in (-\infty, 0]$, concluímos que u é uma solução mild da equação (S), tal que $u_0 = \phi + \alpha \psi$.

Temos, então, que x e u são ambas soluções da equação (L) tais que $x_0 = \phi + \alpha \psi$ e $u_0 = \phi + \alpha \psi$. Como, pelo Teorema 3.4, é única a solução da equação (L) tal que $x_0 = \psi + \phi$, isso nos permite inferir que $x = u$.

Assim, retornando à igualdade (3.7), ficamos com

$$\begin{aligned} & (K(t, 0)(\phi + \alpha \psi))(\theta) - (K(t, 0) \phi)(\theta) - (\alpha K(t, 0) \psi)(\theta) \\ &= \int_0^{t+\theta} T(t+\theta-s) B(s, x_s(0, \phi + \alpha \psi) - y_s(0, \phi) - \alpha z_s(0, \psi)) ds \\ &= \int_0^{t+\theta} T(t+\theta-s) B(s, 0) ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $B(t, \cdot)$ é linear, para cada $t \in \mathbb{R}$.

No caso em que $\theta \in (-\infty, 0]$ e $t + \theta \leq 0$, temos

$$\begin{aligned} & (K(t, 0)(\phi + \alpha \psi))(\theta) - (K(t, 0) \phi)(\theta) - (\alpha K(t, 0) \psi)(\theta) \\ &= (\phi + \alpha \psi)(t + \theta) - \phi(t + \theta) - \alpha \psi(t + \theta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Segue, portanto, que $K(t, 0)(\phi + \alpha \psi) = K(t, 0) \phi + \alpha K(t, 0) \psi$, para todo $t \geq 0$, e para todos $\phi, \psi \in \mathcal{B}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, de maneira que $K(t, 0)$ é um operador linear em $\mathcal{B}$.

Coloquemos, pois então,

$$\|B\|_\infty := \sup_{t \geq 0} \|B(t)\|,$$

em que $\|B(t)\|$ denota a norma de operador de $B(t, \cdot)$. Assumindo que $B(t, \cdot)$ é ω -periódica, satisfazendo $B(t + \omega, \phi) = B(t, \phi)$, para cada par $(t, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B}$, inferimos que

$$\|B\|_\infty := \sup_{t \geq 0} \|B(t)\| = \sup_{0 \leq t \leq \omega} \|B(t)\|.$$

Pela continuidade de B , temos que $\sup_{0 \leq t \leq \omega} \|B(t)\| < \infty$.

No caso em que $\mathcal{B}$ é um espaço com memória amortecida, é válida a seguinte estimativa para a norma de $K(t, 0)$:

Proposição 3.11. *Suponha que $\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$, e que $\mathcal{B}$ seja um espaço com memória amortecida. Então, para a equação $(P_\omega L_0)$, temos, para todo $t \geq 0$, que*

$$\|K(t, 0)\| \leq a \int_0^t e^{(a+\omega_+)(t-s)} \|\hat{T}(s)\| ds,$$

em que $a = JM_\omega \|B\|_\infty$ e $\omega_+ = \max\{\omega, 0\}$.

Demonstração: Ver [22], Proposição 3.4, página 417. $\square$

O resultado que abordaremos a seguir, o último desta seção, é o ingrediente que faltava para que possamos demonstrar nosso teorema principal, no próximo capítulo.

Estabelecido o semigrupo $(\hat{T}(t))_{t \geq 0}$ no espaço de fase $\mathcal{B}$, para que possamos aplicar o mencionado teorema, devemos ter $I - \hat{T}(\omega) \in \Phi_+(\mathcal{B})$ (vide o Teorema 2.53), em que ω é o período de $B(\cdot, \phi)$ e $F(\cdot)$, na equação (L).

Para que possamos analisar essa condição, é necessário, antes, que tenhamos algumas considerações adicionais.

Dada uma função subaditiva e localmente limitada $h: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ (isso é, h satisfaz $h(s+t) \leq h(s) + h(t)$, para todos $s, t \geq 0$), o limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t}$ existe e é igual³ a $\inf_{t > 0} \frac{h(t)}{t}$, e esse valor, ou é finito, ou, então, $-\infty$.

Suponhamos, agora, que a função $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ seja localmente limitada e submultiplicativa (isso é, $g(s+t) \leq g(s)g(t)$, para todos $s, t \geq 0$).

Sendo assim, a função $h(t) := \log(g(t))$ é subaditiva, de modo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(g(t))}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log(g(t))}{t}$$

assume algum valor finito ou $-\infty$.

À quantidade $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(g(t))}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log(g(t))}{t}$, possivelmente $-\infty$, daremos o nome de *número de tipo* (*type number*) da função $g(t)$.

Denotemos por $\hat{\tau}$ o número de tipo da função $\alpha(\hat{T}(t))$, ou seja,

$$\hat{\tau} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\alpha(\hat{T}(t)))}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log(\alpha(\hat{T}(t)))}{t}.$$

No artigo de Shin e Naito, [22], são feitos diversos cálculos acerca da α -medida de $\hat{T}(t)$. Para nossos fins, faremos uso apenas da proposição que virá a seguir.

Para a função $M: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, mensurável e localmente limitada, que figura no axioma (B1)(2) da Definição 2.42, definimos a função $\tilde{M}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ por

$$\tilde{M}(t) := \begin{cases} \limsup_{s \rightarrow t^+} M(s), & t > 0, \\ \max \left\{ M(0), \limsup_{s \rightarrow 0^+} M(s) \right\}, & t = 0. \end{cases}$$

Sendo assim:

³ Para uma demonstração rigorosa deste fato, ver [10], Theorem 7.6.1, página 244; para uma discussão profunda a respeito das funções subaditivas e suas propriedades, ver o restante do capítulo 7 (Chapter VII) da mesma referência.

Proposição 3.12. *Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo compacto em E , então é válido que $\alpha(\hat{T}(t)) \leq C_1 \tilde{M}(t)$, sendo $C_1 = HK(0) \delta_T + \tilde{M}(0)$, com $\delta_T = \max \left\{ 1, \limsup_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)\| \right\}$.*

Demonstração: Ver [22], Proposition 4.6, página 423. $\square$

Posto isso, devemos ter $\hat{\tau} < 0$ para que ocorra $I - \hat{T}(\omega) \in \Phi_+(\mathcal{B})$, em nosso teorema principal.

A proposição a seguir fornece condições para que se tenha $\hat{\tau} < 0$:

Proposição 3.13. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo compacto em E , ou um C_0 -semigrupo compacto para $t > t_0$ em E . Se a função M do axioma (B1)(2) é tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = 0$, então $\hat{\tau} < 0$.*

Demonstração: Como $\hat{T}(t - \sigma)^n = \hat{T}(n(t - \sigma))$, para todos $t \geq \sigma$ e $n \in \mathbb{N}$, temos, pela Proposição 3.12, que

$$\alpha(\hat{T}(t - \sigma)^n) = \alpha(\hat{T}(n(t - \sigma))) \leq C_1 \tilde{M}(n(t - \sigma)).$$

Uma vez que $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{M}(t) = 0$, de modo que $C_1 \tilde{M}(n(t - \sigma)) < 1$, para n suficientemente grande⁴.

Sendo assim, ficamos com $\log \alpha(\hat{T}(n(t - \sigma))) < 0$ e $\frac{\log \alpha(\hat{T}(n(t - \sigma)))}{n} < 0$.

Como a desigualdade acima é válida para n suficientemente grande, segue que

$$\hat{\tau} = \inf_{n \geq 1} \frac{\log \alpha(\hat{T}(n(t - \sigma)))}{n} < 0,$$

como queríamos, finalizando a demonstração. $\square$

De posse de $\hat{\tau} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\alpha(\hat{T}(t)))}{t}$, observamos que

$$\hat{\tau} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\alpha(\hat{T}(nt)))}{nt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\alpha(\hat{T}(t)^n))^{1/n}}{t},$$

de maneira que

$$\exp(\hat{\tau}t) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \log(\alpha(\hat{T}(t)^n))^{1/n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(\hat{T}(t)^n)^{1/n}.$$

Pela Fórmula de Nussbaum (Teorema 2.58), concluímos que

$$\exp(\hat{\tau}t) = r_e(\hat{T}(t)), \quad t > 0.$$

Logo, se $\hat{\tau} < 0$, então $r_e(\hat{T}(t)) < 1$ e $I - \hat{T}(\omega) \in \Phi_+(\mathcal{B})$, em vista do Corolário 2.57.

A última proposição deste capítulo é a fórmula para o raio espectral essencial do operador solução da equação $(P_\omega L_0)$. Antes, porém, estabelecemos um lema técnico auxiliar, que diz respeito ao produto de operadores compactos e ao comportamento da α -medida em relação a somas e potências de operadores compactos.

⁴ É conhecido o fato de que, dada uma função $f: S \rightarrow E$, com $S \subseteq \mathbb{R}$ tal que $(s, +\infty) \subset S$, para algum $s \in \mathbb{R}$, e E um espaço normado, se tem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \in E$ se, e somente se, para toda sequência (x_n) em $S \cap (s, +\infty)$ tal que $x_n \rightarrow \infty$, se tem $f(x_n) \rightarrow L$. Desse modo, em nosso contexto, como $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{M}(t) = 0$, a sequência $s_n = n(t - \sigma)$ é tal que $s_n \rightarrow \infty$ e $\hat{M}(n(t - \sigma)) \rightarrow 0$, de forma a existir $N \in \mathbb{N}$ para o qual $C_1 \hat{M}(n(t - \sigma)) < 1$ sempre que $n \geq N$, justificando a passagem em questão.

Lema 3.14. *Sejam E, F e G espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $S \in \mathcal{L}(F, G)$.*

1. *Se S ou T for um operador compacto, então $ST = S \circ T \in \mathcal{L}(E, G)$ é compacto; por conseguinte, se $K \in \mathcal{L}(E, F)$ é compacto, então K^n é compacto, para todo $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Se $E = F = G$, $L \in \mathcal{L}(E)$, $K \in \mathcal{L}(E)$ é compacto e $S = L + K$, então $\alpha(S) = \alpha(L)$ e $\alpha(S^n) = \alpha(L^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: (1) Suponhamos, inicialmente, que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ seja compacto.

Logo, dada uma sequência limitada (x_n) em E , a sequência $(T(x_n))$ admite subsequência convergente; seja $(T(x_{n_k}))$ tal sequência, com $T(x_{n_k}) \rightarrow y \in F$.

Como $S \in \mathcal{L}(F, G)$ é contínuo, temos $S(T(x_{n_k})) \rightarrow S(y) \in G$, de maneira que a sequência $(S(T(x_n))) = ((S \circ T)(x_n))$ admite subsequência convergente e, portanto, $ST = S \circ T$ é compacto.

Suponhamos, agora, que $S \in \mathcal{L}(F, G)$ seja compacto.

Dada uma sequência limitada (x_n) em E , consideremos a sequência $(T(x_n))$ em F .

Como $(T(x_n))$ é limitada, a sequência $(S(T(x_n))) = ((S \circ T)(x_n))$ admite subsequência convergente em G , pois $S \in \mathcal{L}(F, G)$ é compacto.

Sendo assim, segue que $ST = S \circ T \in \mathcal{L}(E, G)$ é compacto.

(2) Pelo item (1) da Proposição 2.35 e a definição de α -medida para operadores, segue que $\alpha(S) \leq \alpha(L) + \alpha(K) = \alpha(L)$, pois K é compacto ($\alpha(K) = 0$). Por outro lado, como $\alpha(L) = \alpha(S - K) \leq \alpha(S) + \alpha(K) = \alpha(S)$, em vista do item (3) da Proposição 2.35, concluímos que $\alpha(S) = \alpha(L + K) = \alpha(K)$.

Sendo assim, como $S^n = (L + K)^n = L^n + K^n + R(L, K)$, em que $R(L, K)$ é o operador linear formado pelas somas das permutações das potências dos produtos do tipo $L^i K^j$ e $L^j K^i$, com $1 \leq i, j \leq n - 1$, temos que $R(L, K)$ é compacto pois K^n o é, para todo $n \in \mathbb{N}$, em vista do item anterior.

À luz disso, ficamos com $\alpha(S^n) = \alpha((L + K)^n) = \alpha(L^n + K^n + R(L, K)) = \alpha(L^n)$, como queríamos. $\square$

Proposição 3.15. *Suponha que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo compacto em E , ou que $B(t, \cdot)$ é um operador compacto, para cada $t \in \mathbb{R}$. Se $U(t, \sigma)$ é o operador solução da equação (L_0) , então*

$$r_e(U(t, \sigma)) = r_e(\hat{T}(t - \sigma)) = \exp(\hat{\tau}(t - \sigma)), \quad t > \sigma.$$

Demonstração: Começamos percebendo que, em razão da Proposição 3.10, o operador $K(t, \sigma)$ é compacto. Sendo assim, temos $\alpha(K(t, \sigma)) = 0$.

Como $U(t, \sigma) = \hat{T}(t - \sigma) + K(t, \sigma)$, para $t \geq \sigma$, então

$$\alpha(U(t, \sigma)^n) = \alpha(\hat{T}(t - \sigma)^n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela Fórmula de Nussbaum (Teorema 2.58), ficamos com

$$r_e(U(t, \sigma)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(U(t, \sigma)^n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(\hat{T}(t - \sigma)^n)^{1/n} = r_e(\hat{T}(t - \sigma)).$$

Como $r_e(\hat{T}(t - \sigma)) = \exp(\hat{\tau}(t - \sigma))$, em vista das considerações da página anterior, segue que

$$r_e(U(t, \sigma)) = r_e(\hat{T}(t - \sigma)) = \exp(\hat{\tau}(t - \sigma)),$$

como desejado, finalizando a demonstração. $\square$

No próximo capítulo, demonstraremos, enfim, o teorema que motivou o desenvolvimento deste trabalho.

4 Existência de solução periódica

4.1 Preliminares

No presente capítulo, estabeleceremos o resultado principal deste texto: o teorema de existência de solução¹ ω -periódica para a equação $(P_\omega L)$.

Apresentaremos, sem demora, o enunciado do *Teorema de existência de soluções periódicas*; em seguida, faremos algumas considerações convenientes, bem como certos resultados auxiliares, para que possamos elaborar sua demonstração de maneira clara e concisa:

Teorema 4.1 (Teorema de existência de soluções periódicas). *Suponha que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo compacto em E , ou que $B(t, \cdot)$ é um operador compacto, para cada $t \in \mathbb{R}$. Se $\hat{\tau} < 0$ e a equação $(P_\omega L)$ admite uma solução $\mathcal{B}$ -limitada, então ela admite uma solução ω -periódica.*

Enunciado o Teorema 4.1, voltamos, agora, nossa atenção a equação $(P_\omega L)$,

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + B(t, x_t) + F(t), \quad t > \sigma, \quad (P_\omega L)$$

e consideremos as seguintes hipóteses:

(H1). $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow E$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em E ;

(H2). $B: \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow E$ é contínua e, para cada $t \in \mathbb{R}$, $B(t, \cdot): \mathcal{B} \rightarrow E$ é linear;

(H3). $F: \mathbb{R} \rightarrow E$ é contínua;

(H $_\omega$). $B(\cdot, \psi)$ e $F(\cdot)$ são ω -periódicas, com $\omega > 0$.

Vemos que a função $G: \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow E$, tal que

$$G(t, \psi) := B(t, \psi) + F(t),$$

é lipschitziana em relação a $\psi \in \mathcal{B}$, pois $\|G(t, \phi) - G(t, \psi)\| = \|B(t, \phi) - B(t, \psi)\|$ e, como $B(t, \cdot)$ é um operador linear limitado, sabemos que é lipschitziano, donde segue que G é lipschitziana em relação a sua segunda variável.

Também, G satisfaz a propriedade $(\hat{H})$ da equação (S) (ver Seção 3.1), pois

$$\|G(t, \psi)\| \leq \|B(t, \psi)\| + \|F(t)\| \leq \|B\|_\infty \|\psi\|_{\mathcal{B}} + \|F(t)\|,$$

¹ Lembrando que, ao dizermos “solução”, estamos considerando uma solução do tipo mild (Definição 3.2).

em que $\|B\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq \omega} \|B(t)\|$ denota a norma do operador $B(t, \cdot)$, como visto na Seção 3.3 do Capítulo 3.

Desse modo, os resultados vistos no Capítulo 3 se aplicam, *ipsis litteris*, a equação $(P_\omega L)$. Em particular, vamos considerar as soluções globais, ou seja, definidas em $\mathbb{R}$.

Para que possamos diferenciar as soluções das equações $(P_\omega L)$ e $(P_\omega L_0)$, buscando facilitar nossa notação, uma vez que a equação $(P_\omega L)$ possui o termo funcional F não-nulo, dada uma função $u: \mathbb{R} \rightarrow E$, escrevemos $u(\cdot) = x(\cdot, \sigma, \phi, F)$ para dizermos que u é a solução da equação $(P_\omega L)$ tal que $x_\sigma = \phi$.

Se $F \equiv 0$, que é o caso da equação $(P_\omega L_0)$, escrevemos $u(\cdot) = x(\cdot, \sigma, \phi, 0)$ para indicarmos a solução da equação $(P_\omega L_0)$ tal que $x_\sigma = \phi$.

Quanto às histórias associadas a essas funções, escrevemos, respectivamente, $x_t(\cdot, \sigma, \phi, F)$ e $x_t(\cdot, \sigma, \phi, 0)$.

Nosso procedimento, como já elucidado anteriormente, consiste em, de posse de uma solução $x(\cdot, 0, 0, F)$ da equação $(P_\omega L)$, tal que $x_0 = 0$, analisar a existência de pontos fixos da aplicação linear afim $V: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que

$$V(\psi) = U(\omega, 0) \psi + x_\omega(\cdot, 0, 0, F),$$

em que $U(\omega, 0)$ é o operador solução da equação $(P_\omega L_0)$, para toda função $\psi \in \mathcal{B}$.

Veremos que a existência de ponto fixo para a aplicação V será equivalente a existência de solução ω -periódica para a equação $(P_\omega L)$.

Passaremos, agora, a alguns resultados suplementares que nos serão úteis na demonstração do Teorema 4.1.

Denotemos por (L) a equação $(P_\omega L)$ quando as funções $B(\cdot, \psi)$ e F forem gerais, isto é, sem assumirmos sua periodicidade. A proposição a seguir, cuja validade independe da ω -periodicidade de $B(\cdot, \psi)$ e F , ilustra como uma solução $x(\cdot) = x(\cdot, \sigma, \phi, F)$ da equação (L) pode ser decomposta, em termos das soluções $y(\cdot) = x(\cdot, \sigma, \phi, 0)$, da equação (L_0) , com a solução $z(\cdot) = x(\cdot, \sigma, 0, F)$, da equação (L) , com condição inicial nula em σ .

Proposição 4.2. *A solução $x(\cdot) = x(\cdot, \sigma, \phi, F)$ da equação (L) pode ser decomposta na forma*

$$x(\cdot, \sigma, \phi, F) = x(\cdot, \sigma, \phi, 0) + x(\cdot, \sigma, 0, F).$$

Ou seja, a solução $x(\cdot, \sigma, \phi, F)$, da equação (L) , é a soma da solução $y(\cdot) = x(\cdot, \sigma, \phi, 0)$, da equação (L_0) , com a solução $z(\cdot) = x(\cdot, \sigma, 0, F)$, da equação (L) , tal que $z_\sigma = 0$.

Demonstração: De fato, como

$$x(t) = T(t - \sigma) \phi(0) + \int_\sigma^t T(t - s) (B(s, x_s) + F(s)) ds, \quad \text{para } t \geq \sigma,$$

e $x_\sigma = \phi$, consideremos as soluções $y(\cdot) = x(\cdot, \sigma, \phi, 0)$ e $z(\cdot) = x(\cdot, \sigma, 0, F)$, das equações (L_0) e (L) , respectivamente, dadas, para $t \geq \sigma$, por

$$y(t) = T(t - \sigma) \phi(0) + \int_\sigma^t T(t - s) B(s, y_s) ds \quad \text{e} \quad z(t) = \int_\sigma^t T(t - s) (B(s, z_s) + F(s)) ds,$$

com $y_\sigma = \phi$ e $z_\sigma = 0$. Sendo assim, observemos que, pondo $u = y + z$, ficamos com

$$\begin{aligned}
u(t) &= T(t - \sigma) \phi(0) + \int_{\sigma}^t T(t - s) B(s, y_s) ds + \int_{\sigma}^t T(t - s) (B(s, z_s) + F(s)) ds \\
&= T(t - \sigma) \phi(0) + \int_{\sigma}^t T(t - s) (B(s, y_s) + B(s, z_s)) ds + \int_{\sigma}^t T(t - s) F(s) ds \\
&= T(t - \sigma) \phi(0) + \int_{\sigma}^t T(t - s) (B(s, y_s + z_s) + F(s)) ds, \quad t \geq \sigma.
\end{aligned}$$

Uma vez que $u = y + z$, então $u_s = y_s + z_s$, para todo $s \in [\sigma, +\infty)$, bem como $u_{\sigma} = y_{\sigma} + z_{\sigma} = \phi + 0 = \phi$. Desse modo, u é solução da equação (L), com $u_{\sigma} = \phi$.

Pelo Teorema 3.4, devemos ter, via a unicidade de solução, que $x = u$, o que nos permite concluir que

$$x(\cdot, \sigma, \phi, F) = x(\cdot, \sigma, \phi, 0) + x(\cdot, \sigma, 0, F),$$

como desejado. □

Corolário 4.3. *Nas condições da Proposição 4.2, tem-se*

$$x_t(\cdot, \sigma, \phi, F) = x_t(\cdot, \sigma, \phi, 0) + x_t(\cdot, \sigma, 0, F),$$

para todo $t \geq \sigma$.

A próxima proposição, que consiste de dois itens, diz respeito a *perturbação* de soluções das equações (L) e $(P_{\omega} L)$. A argumentação da demonstração, para ambos os itens, baseia-se na unicidade de solução (Teorema 3.4) para a equação $(P_{\omega} L)$.

Ao contrário da Proposição 4.2, o item (2) da vindoura proposição exige a ω -periodicidade das funções $B(t, \cdot)$ e F , sendo válida, portanto, apenas para a equação $(P_{\omega} L)$.

Proposição 4.4. *Acerca das equações (L) e $(P_{\omega} L)$, são válidos os itens:*

1. *Se $\sigma < \tau$ e $x(\cdot, \sigma, \phi, F)$ é solução da equação (L), então*

$$x(\cdot, \sigma, \phi, F) = x(\cdot, \tau, x_{\tau}(\cdot, \sigma, \phi, F), F).$$

2. *Se $x(\cdot, \sigma, \phi, F)$ é solução da equação $(P_{\omega} L)$, então*

$$x(\cdot + \omega, \sigma + \omega, \phi, F) = x(\cdot, \sigma, \phi, F).$$

Demonstração: (1) Consideremos $\eta \in \mathcal{B}$ tal que $\eta = x_{\tau}(\cdot, \sigma, \phi, F)$, de maneira que $\eta(\theta) = x_{\tau}(\theta, \sigma, \phi, F)$, para todo $\theta \leq 0$.

Sejam $u(t) = x(t, \sigma, \phi, F)$ e $v(t) = x(t, \tau, x_{\tau}(\cdot, \sigma, \phi, F), F)$ soluções da equação (L). Supondo, inicialmente, que $\theta \leq \sigma$ (de maneira que $\theta - \sigma \leq 0$), e usando que $\sigma < \tau$, então

$$v(\theta) = v(\tau + (\theta - \tau)) = v_{\tau}(\theta - \tau) = x_{\tau}(\theta - \tau, \sigma, \phi, F) = x(\theta, \sigma, \phi, F).$$

Como $\theta \leq \sigma$, temos $x(\theta, \sigma, \phi, F) = x(\sigma + (\theta - \sigma), \sigma, \phi, F) = x_{\sigma}(\theta - \sigma, \sigma, \phi, F)$, o que nos permite concluir que

$$v(\theta) = x_{\sigma}(\theta - \sigma, \sigma, \phi, F) = \phi(\theta - \sigma), \quad \text{para todo } \theta \leq \sigma. \quad (4.1)$$

Disso, decorre que $v_{\sigma}(\theta) = v(\sigma + \theta) = \phi((\sigma + \theta) - \sigma) = \phi(\theta)$, para todo $\theta \in (-\infty, 0]$, pois, neste caso, $\sigma + \theta \leq \sigma$, donde segue que $v_{\sigma} = \phi$.

Em seguida, investiguemos o que acontecerá quando $t \geq \sigma$; nesse caso, temos duas possibilidades: $\sigma \leq t \leq \tau$ (i) e $t \geq \tau$ (ii).

Em (i), se $\sigma \leq t \leq \tau$ (de modo que $t - \tau \leq 0$), então

$$v(t) = v(\tau + (t - \tau)) = v_\tau(t - \tau) = \eta(t - \tau) = x_\tau(t - \tau, \sigma, \phi, F) = x(t, \sigma, \phi, F) = u(t).$$

Em (ii), se $t \geq \tau$, então, uma vez que $\eta(0) = x_\tau(0, \sigma, \phi, F) = x(\tau, \sigma, \phi, F)$,

$$v(t) = T(t - \tau) x(\tau, \sigma, \phi, F) + \int_\tau^t T(t - s)(B(s, v_s) + F(s)) ds. \quad (4.2)$$

Como $x(\tau, \sigma, \phi, F) = u(\tau) = T(\tau - \sigma) \phi(0) + \int_\sigma^\tau T(\tau - s)(B(s, u_s) + F(s)) ds$, a igualdade (4.2) acima reescreve-se como

$$v(t) = T(t - \sigma) \phi(0) + \int_\sigma^\tau T(t - s)(B(s, u_s) + F(s)) ds + \int_\tau^t T(t - s)(B(s, v_s) + F(s)) ds. \quad (4.3)$$

Temos que $u_s(\theta) = u(s + \theta)$, para $\theta \in (-\infty, 0]$; para $\sigma \leq s \leq \tau$ e $\theta \in (-\infty, 0]$, inspecionemos os casos $s + \theta \leq \sigma$ (a) e $\sigma \leq s + \theta$ (b).

Para (a), temos $s + \theta \leq \sigma$ (o que nos dá $s + \theta - \sigma \leq 0$), de modo que

$$\begin{aligned} u_s(\theta) &= u(s + \theta) = u((s + \theta - \sigma) + \sigma) = u_\sigma(s + \theta - \sigma) \\ &= x_\sigma(s + \theta - \sigma, \sigma, \phi, F) = \phi(s + \theta - \sigma). \end{aligned}$$

Como $\phi(s + \theta - \sigma) = v(s + \theta) = v_s(\theta)$, vide a igualdade (4.1), obtemos que $u_s(\theta) = v_s(\theta)$, para todo $\theta \in (-\infty, 0]$ e $\sigma \leq s \leq \tau$, com $s + \theta \leq \sigma$.

Para (b), se $\sigma \leq s + \theta$, então $\sigma \leq s + \theta \leq s \leq \tau$.

Posto isso, temos, pelo caso (i), que

$$u_s(\theta) = u(s + \theta) = v(s + \theta) = v_s(\theta),$$

para todo $\theta \in (-\infty, 0]$, com $\sigma \leq s + \theta$. De (a) e (b), concluímos que $u_s = v_s$, para $\sigma \leq s \leq \tau$.

Voltando a igualdade (4.3), como $u_s = v_s$, para $\sigma \leq s \leq \tau$, então

$$v(t) = T(t - \sigma) \phi(0) + \int_\sigma^t T(t - s)(B(s, v_s) + F(s)) ds, \quad \text{para todo } t \geq \sigma. \quad (4.4)$$

Além disso, como visto anteriormente, $v_\sigma = \phi$, o que significa que v é solução da equação (L) com condição inicial ϕ em σ . Portanto, pela unicidade de solução (Teorema 3.4), concluímos que $v(\cdot) = x(\cdot, \sigma, \phi, F) = u(\cdot)$, de maneira que, de fato, é válido que

$$x(\cdot, \sigma, \phi, F) = x(\cdot, \tau, x_\tau(\cdot, \sigma, \phi, F), F).$$

(2) Seja $x(\cdot) = x(\cdot, \sigma, \phi, F)$ solução da equação $(P_\omega L)$.

Para $t \geq \sigma$, sabemos que

$$x(t) = T(t - \sigma) \phi(0) + \int_\sigma^t T(t - s)(B(s, x_s) + F(s)) ds. \quad (4.5)$$

Consideremos, agora, $u(\cdot) = x(\cdot, \sigma + \omega, \phi, F)$ e $v(\cdot) := u(\cdot + \omega)$.

Desse modo, temos que $v(t) = x(t + \omega, \sigma + \omega, \phi, F)$; verifiquemos que $v = x$.

Com efeito, começamos observando que, como $u_{\sigma+\omega} = \phi$, então, para $\theta \leq 0$,

$$\phi(\theta) = u_{\sigma+\omega}(\theta) = u(\sigma + \omega + \theta) = x(\sigma + \omega + \theta, \sigma + \omega, \phi, F) = v(\sigma + \theta) = v_\sigma(\theta),$$

o que nos leva a $v_\sigma = \phi$.

Resta verificarmos que v satisfaz a equação integral da Definição 3.2.

De fato, temos, para $t \geq \sigma$, que

$$\begin{aligned} v(t) &= u(t + \omega) = x(t + \omega, \sigma + \omega, \phi, F) \\ &= T(t - \sigma) \phi(0) + \int_{\sigma + \omega}^{t + \omega} T(t + \omega - s)(B(s, u_s) + F(s)) ds. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Fazendo $r = s - \omega$, e utilizando que $B(\cdot, \psi)$ e $F(\cdot)$ são ω -periódicas, reescrevemos a igualdade (4.6) acima como

$$v(t) = T(t - \sigma) \phi(0) + \int_{\sigma}^t T(t - r)(B(r, u_{r+\omega}) + F(r)) dr. \quad (4.7)$$

Agora, como, para $\theta \leq 0$, temos

$$v_r(\theta) = v(\theta + r) = u(\theta + r + \omega) = u_{r+\omega}(\theta),$$

segue que $u_{r+\omega} = v_r$; assim, temos

$$v(t) = T(t - \sigma) \phi(0) + \int_{\sigma}^t T(t - r)(B(r, v_r) + F(r)) dr,$$

bem como $v_\sigma = \phi$, o que significa que v é solução da equação $(P_\omega L)$ com condição inicial ϕ em σ .

Pela unicidade de solução do Teorema 3.4, segue que $v = x$, como desejado, finalizando a demonstração da proposição. $\square$

Estabelecidas as proposições 4.2 e 4.4, estamos aptos para demonstrarmos o Teorema 4.1, na seção a seguir.

4.2 Existência de solução periódica

Consideremos válidas as hipóteses (H1), (H2), (H3) e (H_ω) , e relembremos, vide o final da Seção 3.3, que

$$\hat{\tau} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\alpha(\hat{T}(t)))}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log(\alpha(\hat{T}(t)))}{t}.$$

Teorema 4.1 (Teorema de existência de soluções periódicas). *Suponha que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo compacto em E , ou que $B(t, \cdot)$ é um operador compacto, para cada $t \in \mathbb{R}$. Se $\hat{\tau} < 0$ e a equação $(P_\omega L)$ admite uma solução $\mathcal{B}$ -limitada, então ela admite uma solução ω -periódica.*

Demonstração: Coloquemos $P = U(\omega, 0)$, o operador solução da equação $(P_\omega L_0)$.

Uma vez que $U(\omega, 0) = \hat{T}(\omega) + K(\omega, 0)$, segue que $U(\omega, 0)$ é linear, visto que $\hat{T}(\omega)$ e $K(\omega, 0)$ são ambos lineares (com efeito, $(\hat{T}(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo em $\mathcal{B}$ e a linearidade de $K(t, 0)$ foi verificada na Seção 3.3, página 50).

Como $\hat{\tau} < 0$, temos, pela Proposição 3.15, que $r_e(P) = \exp(\hat{\tau}\omega) < 1$, em que $r_e(P)$ denota o raio espectral essencial de P . Posto isso, temos, pelo Corolário 2.57, que $I - P \in \Phi_+(\mathcal{B})$, garantindo parte das exigências do Teorema 2.52.

Consideremos, agora, a aplicação linear afim $V: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que

$$V(\psi) = U(\omega, 0) \psi + x_\omega(\cdot, 0, 0, F) = P\psi + x_\omega(\cdot, 0, 0, F), \quad \psi \in \mathcal{B}.$$

Observemos que, como $U(t, \sigma)\psi = x_t(\cdot, \sigma, \psi, 0)$, em vista da Definição 3.8, para todo $(t, \sigma) \in [\sigma, +\infty) \times [0, +\infty)$, temos que

$$V(\psi) = U(\omega, 0)\psi + x_\omega(\cdot, 0, 0, F) = x_\omega(\cdot, 0, \psi, 0) + x_\omega(\cdot, 0, 0, F).$$

Logo, pelo Corolário 4.3 da Proposição 4.2, podemos escrever

$$V(\psi) = x_\omega(\cdot, 0, \psi, F).$$

Agora, analisemos as potências V^k , $k \in \mathbb{N}$, da aplicação linear afim V , com o propósito de aplicarmos o Teorema 2.52.

Dessarte, vejamos, de início, que $V^2(\psi) = x_{2\omega}(\cdot, 0, \psi, F)$.

Sabemos que $V^2(\psi) = V(V(\psi)) = V(x_\omega(\cdot, 0, \psi, F)) = x_\omega(\cdot, 0, x_\omega(\cdot, 0, \psi, F), F)$, de modo que, se $u(\cdot) = x(\cdot, 0, \psi, F)$, a Proposição 4.4 nos permite escrever

$$x(\cdot, 0, \psi, F) = x(\cdot, \omega, x_\omega(\cdot, 0, \psi, F), F) \quad (1) \quad \text{e} \quad x(\cdot, 0, \psi, F) = x(\cdot + \omega, \omega, \psi, F) \quad (2).$$

De (2), tomando $x_\omega(\cdot, 0, \psi, F) \in \mathcal{B}$, temos que

$$x(\cdot, 0, x_\omega(\cdot, 0, \psi, F), F) = x(\cdot + \omega, \omega, x_\omega(\cdot, 0, \psi, F), F).$$

Então, para $\theta \in (-\infty, 0]$, adicionando ω , essa última igualdade é equivalente a

$$x(\theta + \omega, 0, x_\omega(\cdot, 0, \psi, F), F) = x(\theta + 2\omega, \omega, x_\omega(\cdot, 0, \psi, F), F).$$

Por (1), obtemos que

$$x(\theta + 2\omega, \omega, x_\omega(\cdot, 0, \psi, F), F) = x(\theta + 2\omega, 0, \psi, F),$$

de modo que $x(\theta + \omega, 0, x_\omega(\cdot, 0, \psi, F), F) = x(\theta + 2\omega, 0, \psi, F)$, para todo $\theta \in (-\infty, 0]$.

Portanto, concluímos que $x_\omega(\cdot, 0, x_\omega(\cdot, 0, \psi, F), F) = x_{2\omega}(\cdot, 0, \psi, F)$, de onde segue que

$$V^2(\psi) = x_\omega(\cdot, 0, x_\omega(0, \psi, F), F) = x_{2\omega}(\cdot, 0, \psi, F),$$

como desejado.

De maneira análoga, verifica-se, via um argumento indutivo, que $V^k(\psi) = x_{k\omega}(\cdot, 0, \psi, F)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos, agora, uma solução $\mathcal{B}$ -limitada $x(\cdot) = x(\cdot, 0, \phi, F)$ da equação $(P_\omega L)$.

Como $V^k(\phi) = x_{k\omega}(\cdot, 0, \phi, F)$, vemos que $(V^k(\phi))$ é uma sequência limitada em $\mathcal{B}$.

Pelo Teorema 2.52, segue que V admite ponto fixo η em $\mathcal{B}$, tal que

$$V(\eta) = x_\omega(\cdot, 0, \eta, F) = \eta.$$

Resta verificarmos que a solução $v(\cdot) = x(\cdot, 0, \eta, F)$ da equação $(P_\omega L)$, tal que $v_0 = \eta$, é ω -periódica. Com efeito, supondo, inicialmente, que $t + \omega \leq 0$ (ou seja, $t \leq -\omega \leq 0$), ficamos com

$$v(t + \omega) = x(t + \omega, 0, \eta, F) = x_\omega(t, 0, \eta, F) = \eta(t) = v_0(t) = v(t),$$

pois $t \leq 0$, de modo que v é ω -periódica em $(-\infty, \omega]$.

Supondo, agora, que $t + \omega > 0$, temos dois casos: $-\omega < t < 0$ (a) e $-\omega < 0 < t$ (b).

Para (a), como $t < 0$, temos

$$v(t + \omega) = x(t + \omega, 0, \eta, F) = x_\omega(t, 0, \eta, F) = \eta(t) = v_0(t) = v(t).$$

Suponhamos que $-\omega < 0 < t$, e consideremos $\tilde{v}(t) := v(t + \omega)$, para todo $t \geq 0$, com $\tilde{v}_0 = \eta$; desse modo, temos

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= v(t + \omega) = T(t + \omega) \eta(0) + \int_0^{t+\omega} T(t + \omega - s)(B(s, v_s) + F(s)) ds \\ &= T(t) T(\omega) \eta(0) + \int_0^\omega T(t + \omega - s)(B(s, v_s) + F(s)) ds \\ &\quad + \int_\omega^{t+\omega} T(t + \omega - s)(B(s, v_s) + F(s)) ds \\ &= T(t) \left(T(\omega) \eta(0) + \int_0^\omega T(\omega - s)(B(s, v_s) + F(s)) ds \right) \\ &\quad + \int_\omega^{t+\omega} T(t + \omega - s)(B(s, v_s) + F(s)) ds. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como $v(\cdot) = x(\cdot, 0, \eta, F)$, temos $v(\omega) = T(\omega) \eta(0) + \int_0^\omega T(\omega - s)(B(s, v_s) + F(s)) ds$. Adicionalmente, observamos que, para todo $\theta \in (-\infty, 0]$,

$$v_\omega(\theta) = v(\theta + \omega) = x(\theta + \omega, 0, \eta, F) = x_\omega(\theta, 0, \eta, F) = \eta(\theta),$$

de modo que $v_\omega = \eta$ e, particularmente, $v(\omega) = v_\omega(0) = \eta(0)$.

Posto isso, a igualdade (4.8), após a mudança $r = s - \omega$, torna-se

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= v(t + \omega) = T(t) v(\omega) + \int_0^t T(t - r)(B(r + \omega, v_{r+\omega}) + F(r + \omega)) dr \\ &= T(t) v_\omega(0) + \int_0^t T(t - r)(B(r, v_{r+\omega}) + F(r)) dr \\ &= T(t) \eta(0) + \int_0^t T(t - r)(B(r, v_{r+\omega}) + F(r)) dr. \end{aligned}$$

Agora, uma vez que

$$v_{r+\omega}(\theta) = v(\theta + r + \omega) = \tilde{v}(\theta + r) = \tilde{v}_r(\theta),$$

para todo $\theta \in (-\infty, 0]$, concluímos que $v_{r+\omega} = \tilde{v}_r$.

Sendo assim, $\tilde{v}(\cdot)$ é solução da equação $(P_\omega L)$, satisfazendo $\tilde{v}_0 = \eta$; pela unicidade de solução do Teorema 3.4, segue que $\tilde{v}(\cdot) = x(\cdot, 0, \eta, F) = v(\cdot)$, de maneira que $\tilde{v} = v$.

À luz disso, temos que

$$v(t + \omega) = v(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, de modo que a solução $v(\cdot) = x(\cdot, 0, \eta, F)$ da equação $(P_\omega L)$, tal que $v_0 = \eta$, é ω -periódica, como queríamos, finalizando a demonstração do teorema. $\square$

Como consequência dos Teoremas 2.52 e 4.1, temos:

Corolário 4.5 (Equivalência entre existência de ponto fixo e solução ω -periódica). *Suponha que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo compacto em E , ou que $B(t, \cdot)$ é um operador compacto, para cada $t \in \mathbb{R}$, e seja $V : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ a aplicação linear afim tal que*

$$V(\psi) = P\psi + x_\omega(\cdot, 0, 0, F), \quad \psi \in \mathcal{B},$$

em que $P = U(\omega, 0)$.

Se $\hat{\tau} < 0$ e a equação $(P_\omega L)$ admite uma solução ω -periódica, então V admite ponto fixo, e o conjunto $\mathcal{F}(V)$, dos pontos fixos de V , possui a estrutura de espaço afim, com $\dim(\mathcal{F}(V)) < \infty$.

Demonstração: Com efeito, uma vez que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo compacto em E , ou $B(t, \cdot)$ é um operador compacto, para cada $t \in \mathbb{R}$, então, pela Proposição 3.15, temos que $r_e(P) = r_e(\hat{T}(\omega)) = \exp(\hat{\tau}\omega)$. Como $\hat{\tau} < 0$, então $r_e(P) = \exp(\hat{\tau}\omega) < 1$, de maneira que, pelo Corolário 2.57, obtemos que $I - P \in \Phi_+(\mathcal{B})$.

Seja $v(\cdot) = x(\cdot, 0, \eta, F)$ a solução ω -periódica ($\mathcal{B}$ -limitada, portanto) da Equação $(P_\omega L)$, tal que $v_0 = v_\omega = \eta$.

Assim, uma vez que $P\eta = U(\eta, 0)\eta = x_\omega(\cdot, 0, \eta, 0)$, obtemos que

$$V(\eta) = P\eta + x_\omega(\cdot, 0, 0, F) = x_\omega(\cdot, 0, \eta, 0) + x_\omega(\cdot, 0, 0, F).$$

Pelo Corolário 4.3, ficamos com

$$V(\eta) = x_\omega(\cdot, 0, \eta, 0) + x_\omega(\cdot, 0, 0, F) = x_\omega(\cdot, 0, \eta, F),$$

e, como $v_\omega = v_0 = \eta$, segue que

$$V(\eta) = \eta,$$

de maneira que V admite ponto fixo.

Pelo Teorema 2.52, segue que $\dim(\mathcal{F}(V)) < \infty$, como queríamos.

Demonstramos, com isso, que a existência de soluções periódicas para a equação $(P_\omega L)$ é, de fato, equivalente a existência de pontos fixos para a aplicação linear afim V considerada, finalizando nosso trabalho. $\square$

5 Considerações finais

Neste trabalho, obtivemos critérios para a existência de soluções periódicas para a Equação (L), com base na teoria de perturbação dos operadores semi-Fredholm. Esses critérios culminaram nos Teorema 4.1 e Corolário 4.5, que sintetizam as propriedades fundamentais discutidas ao longo do texto e apresentam um notável grau de generalidade, permitindo sua aplicação em uma variedade de cenários e sistemas.

Embora não tenhamos explorado as especificidades de certos espaços de fase concretos, como é feito no artigo original [22] para o espaço $\mathcal{B} = UC_g$, o conjunto das funções contínuas $\psi: (-\infty, 0] \rightarrow E$, munido da norma

$$\|\psi\| = \sup_{\theta \leq 0} \frac{|\psi(\theta)|}{g(\theta)},$$

em que $g: (-\infty, 0] \rightarrow (0, +\infty)$ satisfaz $g(\theta) \rightarrow \infty$ conforme $\theta \rightarrow -\infty$, demonstrou-se suficientemente abrangente para acomodar uma ampla gama de aplicações potenciais.

Assim sendo, a teoria de perturbação dos operadores semi-Fredholm mostra-se uma ferramenta valiosa para a análise das soluções periódicas, tanto no âmbito teórico quanto em suas aplicações.

A área de equações abstratas se confirma como um campo rico para investigações futuras, com conexões relevantes em áreas como sistemas dinâmicos, teoria de controle e modelagem matemática. Pesquisas futuras poderiam explorar a aplicabilidade dos critérios apresentados em contextos mais específicos, incluindo espaços de fase com perturbações não-lineares e memória amortecida, além de investigar suas consequências em equações diferenciais parciais.

Além disso, a exploração das generalizações dos resultados obtidos para soluções quase periódicas (*almost periodic solutions*) e quasi-periódicas, estabilidade, processos evolucionários contínuos e afins poderá ampliar ainda mais as perspectivas dessa pesquisa.

Referências

- [1] ARENDT, W.; BATTY, C. J. K.; HIEBER, M.; NEUBRANDER, F. *Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Monographs in Mathematics. 2 ed. Berlin: Birkhäuser, 2011.
- [2] BANAŚ, J.; MURSALEEN, M. *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness With Applications to Differential and Integral Equations*. 1 ed. New Delhi: Springer-Verlag, 2014.
- [3] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [4] CARTAN, H. *Differential Calculus on Normed Spaces: A Course in Analysis*, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2017.
- [5] CHOW, S. N; HALE, J. K. *Strongly limit-compact maps*. Funkcial. Ekvac, v. 17, n. 1, p. 31-38, 1974.
- [6] DIESTEL, J.; UHL, J. J. *Vector Measures*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 15. Providence: AMS, 1977.
- [7] GUSTAFSON, K.; WEIDMANN, Joachim. *On the essential spectrum*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 25, n. 1, p. 121-127, 1969.
- [8] HALE, J.; KATO, J. *Phase space for retarded equations with infinite delay*, Funkcial. Ekvac. v. 21, n. 1, p. 11-41, 1978.
- [9] HEINZ, H. P. *On the behaviour of measures of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector-valued functions*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, v. 7, n. 12, p. 1351-1371, 1983.
- [10] HILLE, E. C.; PHILLIPS, R. S. *Functional Analysis and Semi-Groups*. 2 ed. Providence: AMS, 1996.
- [11] HINO, Y.; MURAKAMI, S.; NAITO, T. *Functional Differential Equations With Infinite Delay*. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [12] HINO, Y.; MURAKAMI, S.; YOSHIZAWA, T. *Existence of almost periodic solutions of some functional differential equations with infinite delay in a Banach space*. Tohoku Mathematical Journal, Second Series, v. 49, n. 1, p. 133-147, 1997.

-
- [13] LI, Y.; LIN, Z.; LI, Z. *A Massera type criterion for linear functional differential equations with advance and delay*. Journal of mathematical analysis and applications, v. 200, n. 3, p. 717-725, 1996.
 - [14] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020.
 - [15] MUNKRES, J. R. *Topology*. 2 ed. Pearson, 2014.
 - [16] NUSSBAUM, R. D. *A generalization of the Ascoli theorem and an application to functional differential equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 35, n. 3, p. 600-610, 1971.
 - [17] NUSSBAUM, R. D. *The radius of the essential spectrum*. Duke Mathematical Journal, v. 37, n. 3, p. 473-478, 1970.
 - [18] PACHPATTE, B. G. *A note on Gronwall-Bellman inequality*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 44, n. 3, p. 758-762, 1973.
 - [19] PAZY, A. *Semigroup of Linear Operators*. 1 ed. New York: Springer-Verlag, 1983.
 - [20] SCHECHTER, M. *Principles of Functional Analysis*. 2 ed. Providence: AMS, 2002.
 - [21] SHIN, J. S. *An existence theorem of functional differential equations with infinite delay in a Banach space*. Funkcial. Ekvac, v. 30, p. 19-29, 1987.
 - [22] SHIN, J. S.; NAITO, T. *Semi-Fredholm operators and periodic solutions for linear functional differential equations*. Journal of Differential Equations, v. 153, n. 2, p. 407-441, 1999.
 - [23] TAYLOR, A. E; LAY, D. C. *Introduction to Functional Analysis*. 2 ed. Florida: Krieger Publishing Co., Inc., 1986.
 - [24] TOLKIEN, J. R. R. *The Lord of the Rings*. 50th Anniversary ed. London: Harper-Collins, 2004.

Apêndice A: Análise funcional e topologia

Neste primeiro apêndice, estão reunidos os principais resultados de Análise Funcional e Topologia que foram utilizados no preparo deste trabalho.

Fixemos espaços normados E e F , os quais, a depender das hipóteses dos resultados, podem ser espaços de Banach.

Teorema A.1 (Lema de Riesz – [3], Teorema 1.5.4, página 17). *Se o espaço vetorial normado E possui dimensão infinita, então a bola unitária fechada B_E não é compacta.*

Teorema A.2 (Princípio da limitação uniforme – [3], Teorema 2.3.2, página 38). *Consideremos E um espaço de Banach e $\mathcal{F} = (T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de operadores lineares limitados em $\mathcal{L}(E, F)$, em que Λ é um conjunto indexador arbitrário.*

Se, para cada $x \in E$, tem-se $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda(x)\| < \infty$, então $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\| < \infty$.

Ou seja, se $\mathcal{F}$ é pontualmente limitada, então, necessariamente, é uniformemente limitada.

Corolário A.3 (Teorema de Banach-Steinhaus – [3], Corolário 2.3.3, página 39). *Consideremos E um espaço de Banach e $(T_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $\mathcal{L}(E, F)$, pontualmente convergente em F .*

Definindo $T: E \rightarrow F$ por $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, então $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Teorema A.4 (Teorema da aplicação aberta – [3], Teorema 2.4.2, página 42). *Sejam E e F espaços de Banach. Se $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é sobrejetivo, então T é uma aplicação aberta.*

Corolário A.5 (Teorema de Banach da aplicação inversa). *Sejam E e F espaços de Banach. Se $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é bijetivo, então, T é isomorfismo topológico.*

Teorema A.6 (Teorema do isomorfismo para espaços de Banach). *Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se $T(E)$ é fechado em F , então*

$$E/\text{Ker}(T) \cong \text{Im}(T).$$

Definição A.7 (Equicontinuidade). Sejam X um espaço topológico, (M, d) um espaço métrico, e $C(X, M)$ o conjunto das funções contínuas $f: X \rightarrow M$.

Dizemos que um subconjunto $\mathcal{F} \subset C(X, M)$ é *equicontínuo* em $x_0 \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança U de x tal que, para todos $x \in U \cap X$ e $f \in \mathcal{F}$, se tem $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Se $\mathcal{F}$ é equicontínuo em todo $x_0 \in X$, dizemos simplesmente que $\mathcal{F}$ é equicontínuo.

Definição A.8 (Topologia da convergência compacta). Seja M^X o conjunto de todas as funções $f: X \rightarrow M$, entre o espaço de topológico X e o espaço métrico M . Dados $f \in M^X$, $K \subset X$ compacto e $\varepsilon > 0$, denotemos por $B_K(f, \varepsilon)$ o conjunto de todas as funções $g: X \rightarrow M$ tais que $\sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) < \varepsilon$.

Os conjuntos $B_K(f, \varepsilon)$ formam uma base para uma topologia em M^X , denominada *topologia da convergência compacta*, ou *topologia da convergência uniforme nas partes compactas*.

Pode-se provar que uma sequência (f_n) , $f_n: X \rightarrow M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, converge para uma função f na topologia da convergência compacta se, e somente se, a sequência $(f_n|_K)$ converge uniformemente para $f|_K$.

Teorema A.9 (Teorema geral de Arzelà-Ascoli – [15], Theorem 47.1, página 290). Consideremos o espaço $C(X, M)$ na topologia da convergência compacta e $\mathcal{F} \subset C(X, M)$. Se $\mathcal{F}$ é equicontínuo e o conjunto $\mathcal{F}_a = \{f(a): f \in \mathcal{F}\}$ é relativamente compacto, para cada $a \in X$, então $\mathcal{F}$ está contido num subconjunto compacto de $C(X, M)$. A recíproca é válida se X é um espaço de Hausdorff localmente compacto.

Corolário A.10 (Teorema de Arzelà-Ascoli). Consideremos a álgebra $C(X, \mathbb{C})$, das funções contínuas $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, munida da norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Então, um subconjunto $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{C})$ é relativamente compacto se, e somente se, $\mathcal{F}$ é equicontínuo e pontualmente limitado.

Em particular, se $\mathcal{F} = \{f_n: n \in \mathbb{N}\}$, com $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que (f_n) admite uma subsequência convergente se, e somente se, (f_n) é equicontínua e pontualmente limitada.

Apêndice B: Cálculo diferencial e integral

Este último apêndice tem como objetivo apresentar uma parcela funcional do Cálculo diferencial e integral em espaços de Banach, necessária para a compreensão deste trabalho.

A saber, exploraremos os conceitos da *derivada de Fréchet*, que generaliza o conceito de derivada para funções entre espaços de Banach, e da *integral de Bochner-Lebesgue*, que trata da integração de funções a valores vetoriais num espaço de Banach, bem como alguns de seus resultados primordiais.

Começemos, como de praxe, fixando espaços de Banach E e F .

Definição B.11 (Fréchet-diferenciabilidade). Dizemos que a função $f: U \rightarrow F$ é *Fréchet-diferenciável* (ou, simplesmente, *diferenciável*) em $a \in U$, em que U é um subconjunto aberto de E , se existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0, \quad (\text{B.1})$$

em que $h \in E$ é tal que $a+h \in U$. O operador $L \in \mathcal{L}(E, F)$, quando existe, é chamado de *diferencial* ou *derivada de Fréchet* de f em a , e o denotaremos por $Df(a)$.

Definição B.12 (Aplicação derivada e classe C^1). Nas condições da Definição B.11, dizemos que a função $f: U \rightarrow F$ é Fréchet-diferenciável em U quando para todo $x \in U$, existe $Df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$. Em outras palavras, $f: U \rightarrow F$ é Fréchet-diferenciável em U quando o é em todos os pontos desse.

Nesse caso, fica bem-definida a aplicação

$$\begin{aligned} Df: U &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x &\mapsto Df(x), \end{aligned}$$

que associa, a cada $x \in U$, sua diferencial $Df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$.

Tal aplicação é denominada *aplicação derivada* de f .

Quando a aplicação derivada de f é contínua, dizemos que f é uma função de *classe C^1* .

Algumas consequências elementares da Definição B.11 são: se $f: U \rightarrow F$, $U \subseteq E$ aberto, é Fréchet-diferenciável em $a \in U$, então f é contínua em a .

Além disso, a diferencial $Df(a)$ é única, no sentido de que, se $B \in \mathcal{L}(E, F)$ satisfaz a Definição B.11, então $B = Df(a)$.

Adicionalmente, a derivada de Fréchet é linear, de modo que, se $f, g: U \subseteq E \rightarrow F$ são Fréchet-diferenciáveis em $a \in U$, então $f + \alpha g$ é Fréchet-diferenciável em $a \in U$ e $D(f + \alpha g)(a) = Df(a) + \alpha Dg(a)$, para todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, em que $\mathbb{K}$ representa o corpo

dos números reais ou dos números complexos.

Façamos alguns exemplos clássicos.

Consideremos a aplicação constante $f: E \rightarrow F$ tal que $f(x) = v$, para algum $v \in E$.

Então, f é Fréchet-diferenciável em E e $Df(x) \equiv 0$, para todo $x \in E$; com efeito, temos $f(x+h) - f(x) = 0$.

Agora, se $L \in \mathcal{L}(E, F)$ um operador linear contínuo, então L é Fréchet-diferenciável em E e $DL(x) = L$, para todo $x \in E$. Isso é claro, pois $L(x+h) - L(x) - L(h) = 0$.

Por fim, seja $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert real e consideremos $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. Pela bilinearidade do produto interno, escrevemos

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \langle x+h, x+h \rangle - \langle x, x \rangle = \langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle + \langle h, h \rangle \\ &= 2\langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle. \end{aligned}$$

Verifiquemos que $Df(x) = 2\langle x, h \rangle$.

Com efeito,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\langle h, h \rangle|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = 0,$$

de maneira que $Df(x) = 2\langle x, h \rangle$.

De maneira geral, se $(E_1, \|\cdot\|_1)$ e $(E_2, \|\cdot\|_2)$ são espaços de Banach, pode-se verificar que a aplicação bilinear $B: E_1 \times E_2 \rightarrow F$, definida no espaço produto $(E_1 \times E_2, \|\cdot\|)$, tal que $\|(x, y)\| := \|x\|_1 + \|y\|_2$, para todo $(x, y) \in E_1 \times E_2$, é Fréchet-diferenciável em todo ponto $(x, y) \in E_1 \times E_2$ e

$$DB(x, y)(h, k) = B(h, y) + B(x, k).$$

Como, na equação (L), lidamos com funções $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$, em que I é um aberto, é prudente mostrarmos como a noção da derivada de Fréchet se relaciona com a definição clássica, do Cálculo elementar.

Pois bem, seja $f: I \rightarrow E$, em que $I \subseteq \mathbb{R}$ é aberto, Fréchet-diferenciável em $a \in I$.

Logo, existe $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, E)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\|}{|h|} = 0.$$

Temos uma identificação natural $\mathcal{L}(\mathbb{R}, E) \cong E$ por intermédio da aplicação

$$L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, E) \mapsto L(1) \in E,$$

pois $L(h) = h L(1)$.

Logo, $Df(a)(h) = h Df(a)(1)$; chamemos $Df(a)(1)$ de $f'(a)$.

Retornando à igualdade acima, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} \right\| = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right\| = 0,$$

o que nos permite escrever, considerando a topologia da norma em E ,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{df}{dx}(a),$$

em concordância com a notação usual do Cálculo em uma variável.

Podemos aplicar um raciocínio análogo a funções do tipo $f: U \rightarrow E$, em que $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Com efeito, se $f: U \rightarrow E$ é Fréchet-diferenciável em $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$, então $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$.

Dizemos que f admite *derivada parcial* com relação a x_i em a se a função

$$f^i(x_i) := f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n),$$

na variável real x_i , é Fréchet-diferenciável em a_i , conforme o caso anterior.

Denotemos por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, E) \cong E$ o operador linear $Df^i(a_i)$.

Escrevendo $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$, sendo $\{e_i\}_{i=1}^n$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$, temos

$$Df(a)(h) = \sum_{i=1}^n h_i Df(a)(e_i).$$

Não é difícil constatar que $Df(a)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, de maneira que

$$Df(a)(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Utilizando dx_i para denotar os funcionais lineares da base canônica de $(\mathbb{R}^n)^*$ (tais que $dx_i(h) = h_i$, para todo $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, estabelecemos a fórmula

$$Df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i,$$

como é feito no Cálculo em várias variáveis¹.

Pode-se mostrar que, para que f seja Fréchet-diferenciável em a , é suficiente que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, sejam contínuas em a .

Encerramos o apêndice sobre a derivada de Fréchet apresentando, nesse contexto, as conhecidas *regra da cadeia* e *desigualdade do valor médio*:

Teorema B.13 (Regra da cadeia – [4], Theorem 2.2.1, página 27). *Sejam E , F e G espaços de Banach, U e V abertos em E e F , respectivamente, e $f: U \rightarrow F$ e $g: V \rightarrow G$ aplicações, com $f(U) \subseteq V$. Se f é Fréchet-diferenciável em $a \in U$ e g é Fréchet-diferenciável em $f(a) \in V$, então $g \circ f: U \rightarrow G$ é Fréchet-diferenciável em a e*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Teorema B.14 (Desigualdade do valor médio – [4], Proposition 3.3.1, página 40). *Sejam $U \subseteq E$ aberto e $f: U \rightarrow F$ uma aplicação Fréchet-diferenciável.*

Se os pontos x_1 e x_2 de U são tais que $\ell := \{tx_1 + (1-t)x_2: 0 \leq t \leq 1\} \subset U$, então

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \sup_{x \in \ell} \|Df(x)\| \|x_2 - x_1\|.$$

¹ As notações aqui estabelecidas continuam válidas para funções do tipo $f: U \subseteq \prod_{i=1}^n E_i \rightarrow F$, em que cada E_i é um espaço de Banach, para $1 \leq i \leq n$; para mais detalhes, ver [4].

Corolário B.15. *Seja $U \subseteq E$ aberto e conexo. Se $f: U \rightarrow F$ é uma aplicação Fréchet-diferenciável tal que, para todo $x \in U$, $Df(x) = 0$, então f é constante.*

A seguir, faremos um breve tratamento acerca da *integral de Bochner-Lebesgue*, bem como suas principais consequências.

Fixemos um espaço de medida (X, Σ, μ) σ -finito (isto é, existe uma família enumerável $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$, com $\mu(A_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$) e um espaço de Banach real E .

Nosso intuito é construir uma teoria de integração para funções do tipo $f: X \rightarrow E$; essa teoria será chamada de *integração vetorial*.

* Recordemos que: uma certa propriedade P vale μ -quase sempre em X se existe $N \in \Sigma$, com $\mu(N) = 0$, tal que P é válida para todo $x \in X \setminus N$, e que uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *mensurável* se $\{f > \alpha\} = \{x \in X: f(x) > \alpha\}$ é mensurável, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição B.16 (Funções simples e funções mensuráveis). Uma função $f: X \rightarrow E$ é chamada de *simples vetorial* (ou, simplesmente, *simples*) se existem $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$, disjuntos dois a dois, com $\mu(A_i) < \infty$, para todo $1 \leq i \leq n$, e vetores $v_1, \dots, v_n \in E$ para os quais

$$f = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} v_i.$$

Pode-se verificar que, se f e g são simples, então $f + \alpha g$ também o é, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Assim, as funções simples formam um subespaço vetorial de E^X (o espaço de todas as funções $f: X \rightarrow E$), denotado por $\mathcal{S}(X, E, \mu)$.

Definição B.17 (Mensurabilidade fraca e forte). A função $f: X \rightarrow E$ é dita ser *fortemente mensurável* (ou simplesmente *mensurável*) se existe uma sequência (f_n) de funções simples tais que $f_n \rightarrow f$ μ -quase sempre.

Dizemos que f é *fracamente mensurável* se $\varphi \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável, para todo $\varphi \in E'$.

Se $E = \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), a definição acima coincide com a mensurabilidade vista em teoria clássica da medida.

Como no caso escalar, o limite μ -quase sempre de funções mensuráveis é mensurável.

Proposição B.18. *Seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de funções mensuráveis de X em E e $f: X \rightarrow E$. Se $f_n \rightarrow f$ μ -quase sempre, então f é mensurável.*

O próximo resultado, conhecido como *Teorema da mensurabilidade de Pettis*, estabelece equivalências para a mensurabilidade de uma função $f: X \rightarrow E$.

Teorema B.19 (Teorema da Mensurabilidade de Pettis – [3], Teorema 9.7.3, página 279). *Para $f: X \rightarrow E$, são equivalentes:*

1. f é mensurável;
2. f é fracamente mensurável;
3. $\|f\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável.

Corolário B.20. *Seja X é um espaço topológico e μ uma medida nos borelianos de X . Se $f: X \rightarrow E$ é contínua, então f é mensurável.*

Dada uma função simples $f = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} v_i$, nas condições da Definição B.16, definimos sua integral de Bochner-Lebesgue como

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{i=1}^n \mu(A_i) v_i.$$

Definição B.21 (Função Bochner-integrável). Dizemos que a função mensurável $f: X \rightarrow E$ é *Bochner-integrável* quando existe uma sequência de funções simples $f_n: X \rightarrow E$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $f_n \rightarrow f$ μ -quase sempre e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \|f_n - f\| \, d\mu = 0. \quad (\text{B.2})$$

Nesse caso, definimos, para cada $A \in \Sigma$,

$$\int_A f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \chi_A f_n \, d\mu.$$

O limite acima está bem-definido, pois $\left(\int_X \chi_A f_n \, d\mu \right)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em E ; convergente, portanto, pois E é Banach.

Além disso, o limite da Definição B.21 independe da escolha da sequência de funções simples mensuráveis que satisfazem a igualdade (B.2).

O elemento $\int_A f \, d\mu \in E$ é denominado *integral de Bochner-Lebesgue* (ou, simplesmente, *integral de Bochner*) da função f em relação a medida μ . No caso em que $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$, isso é, quando f está definida num subconjunto mensurável I da reta real, em relação a medida de Lebesgue m , escrevemos, para denotar a integral $\int_I f \, dm = \int_{\mathbb{R}} \chi_I f \, dm$,

$$\int_I f(t) \, dt,$$

como de costume.

Teorema B.22 (Bochner – [6], Theorem 2, página 45). *Uma função $f: X \rightarrow E$ mensurável é Bochner-integrável se, e somente se, $\|f\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ é Lebesgue-integrável.*

Corolário B.23. *Se $f: X \rightarrow E$ é uma função Bochner-integrável e A é um conjunto mensurável, então*

$$\left\| \int_A f \, d\mu \right\| \leq \int_A \|f\| \, d\mu.$$

Com efeito, sendo f Bochner-integrável, existe uma sequência de funções simples (f_n) tal que $f_n \rightarrow f$ μ -quase satisfazendo à Definição B.21.

Logo,

$$\left\| \int_A f \, d\mu \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_A f_n \, d\mu \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \|f_n\| \, d\mu = \int_A \|f\| \, d\mu.$$

O próximo teorema reúne alguns fatos elementares sobre a integral de Bochner, os quais possuem análogos conhecidos na integral de Lebesgue:

Teorema B.24 ([6], Theorem 4, página 46). *Se f é uma função Bochner-integrável e $A \in \Sigma$, então:*

1. $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A f \, d\mu = 0$;
2. Se (A_n) é uma família de subconjuntos de Σ , disjuntos dois a dois, e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, então

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu,$$

e a série do segundo membro é absolutamente convergente;

3. Se $F(A) := \int_A f \, d\mu$, então F possui variação limitada e

$$|F|(A) = \int_A \|f\| \, d\mu.$$

Corolário B.25 ([6], Corollary 5, página 47). *Se f e g são funções Bochner-integráveis e $\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$, para cada $A \in \Sigma$, então $f = g$ μ -quase sempre.*

A integral de Bochner admite uma generalização natural do Teorema da convergência dominada de Lebesgue:

Teorema B.26 (Teorema da convergência dominada para a integral de Bochner – [6], Theorem 3, página 45). *Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções Bochner-integráveis de X em E tal que $f_n \rightarrow f$ μ -quase sempre, com $f: X \rightarrow E$. Suponhamos que exista uma função Lebesgue-integrável $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|f_n(x)\| \leq |g(x)|$, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$.*

Então, f é Bochner-integrável e $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \|f_n - f\| \, d\mu = 0$.

Em outras palavras, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

Há uma harmoniosa relação entre a integral de Bochner-Lebesgue e operadores lineares limitados e fechados:

Teorema B.27 (Integral de Bochner-Lebesgue e operador contínuo – [3], Proposição 9.7.8, página 283). *Sejam $T: E \rightarrow F$ um operador linear contínuo, em que F é um espaço de Banach, e $f: X \rightarrow E$ uma função Bochner-integrável. Então, $T \circ f: X \rightarrow F$ é Bochner-integrável e*

$$\int_X (T \circ f) \, d\mu = T \left(\int_X f \, d\mu \right).$$

Teorema B.28 (Lema de Hille – Integral de Bochner-Lebesgue e operador fechado – [6], Theorem 6, página 47). *Sejam $T: D(T) \subseteq E \rightarrow E$ um operador linear fechado e $f: X \rightarrow E$ uma função Bochner-integrável. Suponhamos que $f(x) \in D(T)$, para todo $x \in X$, e que $T \circ f: X \rightarrow E$ seja Bochner-integrável.*

Então, $\int_X f \, d\mu \in D(T)$ e

$$\int_X (T \circ f) \, d\mu = T \left(\int_X f \, d\mu \right).$$

Uma aplicação do Teorema B.27 é a seguinte: consideremos que E tenha dimensão finita, e seja $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma base desse.

Sendo $f: X \rightarrow E$ mensurável, temos $f = (f_1, \dots, f_n)$, de maneira que

$$\int_X f \, d\mu = \left(\int_X f_1 \, d\mu, \dots, \int_X f_n \, d\mu \right).$$

De fato, sendo $\pi_i: E \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção na i -ésima coordenada, temos que

$$\pi_i \left(\int_X f \, d\mu \right) = \int_X (\pi_i \circ f) \, d\mu = \int_X f_i \, d\mu,$$

de forma que $\int_X f \, d\mu = \left(\int_X f_1 \, d\mu, \dots, \int_X f_n \, d\mu \right)$.

Unindo os conceitos da derivada de Fréchet e da integral de Bochner-Lebesgue, pode-se estabelecer uma versão generalizada do *Teorema fundamental do Cálculo*:

Teorema B.29 (Teorema fundamental do cálculo – primeira versão – [1], Proposition 1.2.2, página 16). *Sejam $f: I \rightarrow E$ contínua, em que I é o intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $F: I \rightarrow E$ tal que $F(t) := \int_s^t f(u) \, du$, para cada $[s, t] \subseteq [a, b]$. Nessas condições, é válido que:*

1. F é Fréchet-diferenciável em $\text{Int}(I) = (a, b)$ e $F'(t) = f(t)$;
2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(u) - f(t)\| \, du = 0$, $[t, t+h] \subseteq [a, b]$.

Teorema B.30 (Teorema fundamental do Cálculo – segunda versão – [1], Proposition 1.2.3, página 18). *Nas condições do Teorema B.29,*

$$\int_s^t f(u) \, du = F(t) - F(s),$$

para quaisquer $s, t \in [a, b]$, $s \leq t$.

Definamos, por fim, os espaços L^p no contexto da integral de Bochner: os denominados espaços de *Bochner-Lebesgue*.

Como na teoria de Lebesgue, dadas funções $f, g: X \rightarrow E$, a relação $f \sim g$ se, e somente se, $f = g$ μ -quase sempre, é de equivalência, e denotamos a classe de equivalência da função f através da relação descrita por $[f]$.

Definição B.31 (Espaços de Bochner-Lebesgue). Para $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L^p(X, \Sigma, \mu, E)$ (ou, quando a medida μ está subentendida, $L^p(X, E)$) o espaço de todas as classes de equivalência de funções Bochner-integráveis $f: X \rightarrow E$, mediante a relação acima, tais que

$$\int_X \|f\|^p \, d\mu < \infty.$$

Posto de outra forma, temos que, mediante a norma $\|f\|^p = \left(\int_X \|f\|_p^p \, d\mu \right)^{1/p}$, o espaço $L^p(X, \Sigma, \mu, E)$ torna-se Banach, cuja verificação é análoga a do caso escalar.

Para $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(X, \Sigma, \mu, E)$ (ou $L^\infty(X, E)$) o espaço de todas as classes de equivalência de funções Bochner-integráveis $f: X \rightarrow E$ que são essencialmente limitadas.

Mediante a norma $\|f\|_\infty = \text{ess sup } \|f\| = \inf \{C > 0: \|f(x)\| \leq C \text{ } \mu\text{-quase sempre}\}$, o espaço $L^\infty(X, \Sigma, \mu, E)$ torna-se Banach, cuja verificação também é análoga a do caso escalar clássico.