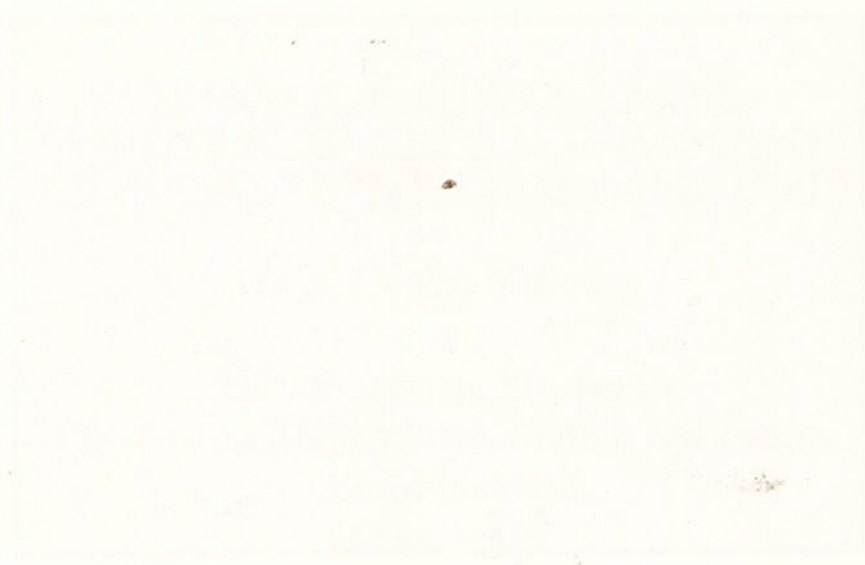


José Carlos Taveira

**Métodos de Construção de Limites de
Tolerância Unilaterais em Modelos
com um Fator Aleatório**

2
47



1910000805



**MÉTODOS DE CONSTRUÇÃO DE
LIMITES DE TOLERÂNCIA UNILATERAIS
EM MODELOS COM UM FATOR ALEATÓRIO**

José Carlos Taveira

**Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e
Computacional.**

MAC - 030

Métodos de Construção de Limites de Tolerância Unilaterais em Modelos com um Fator Aleatório

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP – para obtenção do grau de Mestre em Ciências Matemáticas, Área de Concentração: Matemática Aplicada e Computacional.



805/98

José Carlos Taveira

sob orientação do Prof. Dr. Fernando Ferrari
São José do Rio Preto – SP, fevereiro de 1998.



*“ Formemos não somente grupos de indagação intelectual
ou de críticas nem sempre construtivas,
mas, sobretudo ergamos um templo interior à bondade,
porque sem espírito de amor
todas as nossas obras falham na base ... ”*

(Bezerra de Menezes)



Agradecimentos

À minha família e
à minha noiva Luciane,
dedico.

Agradecimentos

Gostaria de deixar aqui registrado o meu mais profundo reconhecimento a todos aqueles que, de alguma forma, foram importantes colaboradores na realização dessa dissertação.

Aos meus pais e à minha noiva pelo apoio e carinho, constantes em cada momento de minha vida.

Em especial ao Prof. Dr. Fernando Ferrari que, com sabedoria, dedicação e disponibilidade, não poupou esforços para orientar-me na elaboração deste trabalho.

A todos os funcionários, professores do DCCE e amigos pós-graduandos, pelo incentivo e companheirismo.

À Missão Salesiana de Mato Grosso – Colégio Dom Bosco, pela confiança e doação das passagens.

A Deus, por tudo.

Resumo

A Construção de Limites de Tolerância Unilaterais em Modelos Lineares de Efeitos Aleatórios com um fator tem sido aplicada em diversas áreas de pesquisa. Neste trabalho abordamos alguns métodos de determinação desses limites, considerando tanto os delineamentos balanceados como os não-balanceados. Estes métodos são comparados entre si através da apresentação de exemplos numéricos, utilizando-se o pacote computacional SAS.

Abstract

The Construction of One-sided Tolerance Intervals for the One-way ANOVA with random effects has been applied in several areas of research. In this work we broach some methods of determining these limits, considering both the balanced and unbalanced designs. These methods are compared to each other through the presentation of numerical examples, using the SAS computer package.

Índice

1 Introdução	10
2 Definições Iniciais	13
2.1 Definição do Modelo	13
2.2 O caso balanceado	14
2.3 O caso não-balanceado	16
2.4 Limites de Tolerância Unilaterais	18
3 Métodos de Construção de Limites de Tolerância em Modelos Balanceados	19
3.1 Método de Lemon	19
3.1.1 Descrição do Método	19
3.1.2 Algumas Consequências dos Resultados	24
3.2 Método de Mee-Owen	24
3.2.1 Descrição do Método	24
3.2.2 Limites de Tolerância quando R é desconhecida	25
3.2.3 Limites de Tolerância quando R é conhecida	31
3.2.4 Determinação de K_S e K_R por Interpolação	33
3.3 Exemplo de aplicação dos métodos	33



4 Métodos de Construção de Limites de Tolerância em Modelos Não-balanceados	35
4.1 Resultados e Definições	35
4.2 O Método de Bhaumik-Kulkarni	37
4.2.1 Descrição do Método	37
4.2.2 Limites de Tolerância quando R é conhecida	38
4.2.3 Limites de Tolerância quando R é desconhecida	39
4.3 Exemplo	41
5 Um Método Exato de Construção de Limites de Tolerância em Modelos com fator aleatório	44
5.1 Considerações Iniciais	44
5.2 Limites de Tolerância quando R é conhecida	45
5.3 Estudos de Simulações quando R é desconhecida	48
5.4 Exemplos	51
5.4.1 Exemplo 1	51
5.4.2 Exemplo 2	52
6 Conclusão	54
7 Apêndices:	57
7.1 Resultados do SAS	57
7.2 Tabelas	61
8 Bibliografia	81



Capítulo 1

Introdução

O problema da construção de limites de tolerância em modelos de efeitos aleatórios tem sido estudado nas últimas décadas por diversos autores. Basicamente a idéia é determinar um limite (limites) tal (tais) que, pelo menos uma proporção β da população exceda o limite (ou esteja entre os limites) com probabilidade γ .

Consideremos um exemplo (dado por Bhaumik e Kulkarni, 1996, [2]) que ilustra o uso de tais intervalos:

Considera-se o interesse em estudar a intensidade de relâmpagos na região sul dos Estados Unidos, perto do Golfo do México, muito comuns durante os meses de verão. Em tal situação o modelo de efeitos aleatórios é o mais apropriado, pois, devido à vasta área considerada, pode-se selecionar aleatoriamente k localidades na região e instalar estações para rastrear a intensidade causada pelo relâmpago. Também é natural que o número de relâmpagos observados em cada uma dessas k estações de rastreamento seja diferente. Desse modo, o delineamento será não-balanceado. Além disso, tem-se interesse em prever a intensidade desses relâmpagos com alta precisão.

Para o caso de uma distribuição normal com média e variância conhecidas, Wilks (1942) [26] definiu e construiu limites de tolerância, que foram posteriormente estendidos para o caso bivariado por Paulson (1943) [17].

Fertin e Mann (1974) [4] trataram da estimação pontual de percentis para o modelo balanceado com um fator aleatório. Eles discutiram em termos reais do dia-a-dia um exemplo,



o qual envolveu uma estimação do primeiro percentil da resistência material, avaliadas em testes realizados em amostras de vários grupos diferentes. Eles também se reportaram à situações industriais, genéticas e agrícolas.

Fraser e Guttman (1956 e 1970) [5] [6] definiram e construíram "bons" limites de tolerância. Muitos autores se preocuparam com procedimentos para construir tais limites (por exemplo Wallis (1951) [24] , Liberman e Miller (1963) [10] , Lemon (1977) [11], Mee e Owen (1983) [13] , Beckman e Tietjen (1989) [3] , Bhaumik e Kulkarni (1991) [1], Kulkarni e Kushary (1991) [9] , e Wang e Iyer (1994) [25]).

Na maioria dos trabalhos mencionados acima, os autores usaram uma aproximação estabelecida por Satterthwaite (1946) [21] para deduzir intervalos de tolerância para a razão das variâncias, R (a ser definida a seguir) conhecida. Para R desconhecida, Mee e Owen (1983) [13] sugeriram métodos condicionais de construção de intervalos com R estimada, e estudaram o efeito da estimação na cobertura desses intervalos. Seus estudos de simulações indicaram que o nível de confiança atingido foi menor do que o nível efetivo quando uma estimativa pontual de R foi usada. Dessa forma eles construíram limites de tolerância para R , e usaram o limite superior como a estimativa de R para obter intervalos de tolerância conservativos (ou seja, intervalos que mantivessem a confiança igual ou maior do que a confiança especificada).

Mee e Owen (1983) [13] investigaram várias técnicas para determinar limites de tolerância inferiores para modelos de efeitos aleatórios balanceados (mesmo número de repetições em todos os níveis do fator). Beckman e Tietjen (1989) [3] generalizaram os resultados de Mee e Owen [13]. Eles construíram limites de tolerância bilaterais para modelos de efeitos aleatórios para vários fatores. Ambos os trabalhos, como já mencionado anteriormente, são baseados em uma aproximação da distribuição χ^2 de Satterthwaite (1946) [21]. A aproximação de Satterthwaite aplica-se apenas para o caso balanceado, não podendo ser estendida para casos não-balanceados. Na prática, contudo, muitas vezes não é possível obter exatamente o mesmo número de observações para cada tratamento. Para casos não-balanceados, Thomas e Hulthquist (1978) [23] deduziram uma estatística M , cuja distribuição é aproximada por uma χ^2 Central. Eles utilizaram essa distribuição para construir limites de tolerância tanto para a razão das variâncias como para a correlação intraclasses. Bhaumik e Kulkarni (1991) [1] forneceram um método para construção de limites de tolerância para modelos não-balanceados de efeitos aleatórios com um fator. Eles deduziram limites de tolerância como uma função dos n_i 's, isto é, dos números de repetições nos níveis do fator. As técnicas básicas de construção dos limites de tolerância são praticamente as



mesmas das de Mee e Owen (1983) [13], porém, utiliza-se a aproximação χ^2 de Thomas e Hultquist (1978) [23] ao invés da de Satterthwaite (1946) [21].

Mee e Owen (1983) [13] também discutiram a construção de limites de tolerância quando R é desconhecida. A literatura tanto da estimação pontual como da estimação por intervalo de R é bem ampla. Como referência, podemos citar, dentre outros, Sahai, Khuri e Kapadia (1985) [20].

O artigo mais recente, de Bhaumik e Kulkarni (1996) [2], serve a dois propósitos:

O primeiro deles, fornecer um procedimento direto para construir intervalos de tolerância quando R é conhecida. Diferentemente dos procedimentos de outros autores mencionados anteriormente que usaram uma aproximação para construir um intervalo de confiança, esse procedimento é exato e retém um número de graus de liberdade para a distribuição t envolvida, que é o máximo possível. Também fornece intervalos de tolerância incondicionais, diferentemente daqueles sugeridos por Mee e Owen (1983) [13]. Mais ainda, esse método é geral, ou seja, serve tanto para os casos balanceados como para os não-balanceados.

O segundo, quando R é desconhecida, consiste em substituir R por um estimador não viesado aproximado e estuda-se o comportamento dos intervalos de tolerância através de simulação. Quando esse estimador de R é usado, a simulação mostra o nível de confiança atingido com menor valor que o nível efetivo, tal como foi também observado por Mee e Owen (1983) [13]. Entretanto, à medida que o número de níveis do fator aumenta, o estimador de R é melhor, e dessa forma o nível de confiança atingido fica mais próximo do nível efetivo. Isto também foi verificado através de simulação.

No capítulo 2 são dadas algumas definições iniciais do modelo e de limites de tolerância, considerando os casos balanceados e não-balanceados. Os métodos de construção desses limites para o modelo balanceado são tratados, de modo especial, no capítulo 3, onde esses métodos são comparados através de um mesmo exemplo numérico. No capítulo 4 é tratado o caso não-balanceado. E, finalmente, no capítulo 5 discute-se um método simples e exato que se aplica tanto para os casos balanceados como para os casos não-balanceados.



Capítulo 2

Definições Iniciais

2.1 DEFINIÇÃO DO MODELO

Suponhamos que uma população seja constituída de muitos grupos independentes. Escolhemos aleatoriamente I desses grupos, e do i^o grupo retiramos uma amostra aleatória consistindo de J observações (caso balanceado) ou de n_i observações (caso não-balanceado). O modelo com um fator aleatório a ser considerado é dado por:

$$x_{ij} = \mu + b_i + \xi_{ij} \quad (2.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, I;$$

$$j = 1, 2, \dots, J : \text{caso balanceado};$$

$$j = 1, 2, \dots, n_i : \text{caso não-balanceado};$$

onde x_{ij} denota a j^a observação do i^o grupo, μ é a média geral, $\mu + b_i$ é a média do i^o grupo e ξ_{ij} é o correspondente erro aleatório não observável. Assumimos que os b_i 's e ξ_{ij} 's são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas com média zero e variâncias σ_b^2 e σ_e^2 respectivamente; ou seja, este modelo apresenta duas fontes de variação aleatória: a primeira delas é geralmente referida como variação entre grupos e a segunda como variação intra grupos.

Então, sob o modelo (2.1) temos que a variável aleatória x_{ij} tem média μ e variância igual à soma das variâncias entre e intra grupos, isto é, considerando-se x uma observação futura, tem-se:

$$E(x) = \mu \quad e$$

$$\text{var}(x) = \sigma_x^2 = \sigma_b^2 + \sigma_e^2 \quad (2.2)$$

ou ainda

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} \cdot \sigma_e^2 + \sigma_e^2 = \sigma_e^2 (1 + R) \quad (2.3)$$

$$\text{onde } R = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} \quad (2.4)$$

é a razão entre as variâncias entre grupos e intra grupos.

Das equações (2.2) temos que x_{ij} tem distribuição $N(\mu, \sigma_b^2 + \sigma_e^2)$.

2.2 O CASO BALANCEADO

Considerando o modelo definido em (2.1) para o caso balanceado, definimos:

$$n = I \cdot J$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij} \quad (2.5)$$

$$s = \left(\frac{1}{IJ-1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (x_{ij} - \bar{x})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

E, em consequência das definições acima, temos:

$$\text{var}(\hat{\mu}) = \frac{J \cdot \sigma_b^2 + \sigma_e^2}{n} \quad (2.7)$$

A análise da variância (ANOVA) para esse modelo é bem conhecida e é fornecida na tabela 2.1 a seguir. Equacionando os quadrados médios dessa tabela, as estimativas de σ_x^2 , σ_b^2 e σ_e^2 são obtidas.

Tabela 2.1 – ANOVA para o modelo balanceado com um fator aleatório

Fonte de Variação	Graus de Liberdade	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Esperança do Quadrado Médio
Entre Grupos	$I - 1$	B	$s_b^2 = B / (I - 1)$	$J \cdot \sigma_b^2 + \sigma_e^2$
Intra Grupos	$I(J - 1)$	W	$s_e^2 = W / (I(J - 1))$	σ_e^2
Total	$IJ - 1$	T	$s_T^2 = T / (IJ - 1)$	

onde:

$$B = \sum_{i=1}^I \frac{1}{J} \left(\sum_{j=1}^J x_{ij} \right)^2 - \frac{1}{IJ} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij} \right)^2 \quad (2.8)$$

$$W = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^I \frac{1}{J} \left(\sum_{j=1}^J x_{ij} \right)^2 \quad (2.9)$$

$$T = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij}^2 - \frac{1}{IJ} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij} \right)^2 \quad (2.10)$$

Além disso:

$$\frac{B}{J\sigma_b^2 + \sigma_e^2} \sim \chi_{I-1}^2 \quad (2.11)$$

$$\frac{W}{\sigma_e^2} \sim \chi_{I(J-1)}^2 \quad (2.12)$$

Como W e B são independentes, e consequentemente (2.11) e (2.12) também o são, tem-se que:

$$\frac{s_b^2 / (J\sigma_b^2 + \sigma_e^2)}{s_e^2 / \sigma_e^2} \sim F_{I-1, I(J-1)} \quad (2.13)$$

A inferência sobre os componentes da variância, baseada nestas propriedades distribucionais, bem como o método de construção dos limites de tolerância para esse caso balanceado, serão vistos no capítulo 3.

2.3 O CASO NÃO-BALANCEADO

Considerando o modelo definido em (2.1) para o caso não-balanceado, definimos:

$$n = \sum_{i=1}^I n_i \quad (2.14)$$

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \bar{x}_i \quad (2.15)$$

$$\text{onde } \bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I n_i \cdot \bar{x}_i \quad (2.16)$$

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2} \quad \text{ou então:} \quad (2.17)$$

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{(I-1)} \cdot \left[\sum_{i=1}^I \bar{x}_i^2 - \frac{1}{I} \left(\sum_{i=1}^I \bar{x}_i \right)^2 \right]} \quad (2.18)$$

Daí :

$$\text{var}(\hat{\mu}) = \sigma_1^2 = \frac{\sigma_b^2 + \bar{\lambda} \cdot \sigma_e^2}{I} \quad (2.19)$$

$$\text{onde } \bar{\lambda} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{1}{n_i} \quad (2.20)$$

A análise da variância para esse modelo é fornecida na tabela 2.2 a seguir. Analogamente ao caso balanceado, equacionando os quadrados médios dessa tabela, as estimativas de σ_x^2 , σ_b^2 e σ_e^2 são obtidas.

Tabela 2.2 – ANOVA para o modelo não-balanceado com um fator aleatório

Fonte de Variação	Graus de Liberdade	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Esperança do Quadrado Médio
Entre Grupos	$I - 1$	E	$s_b^2 = E / (I - 1)$	$r \cdot \sigma_b^2 + \sigma_e^2$
Intra Grupos	$n - I$	P	$s_e^2 = P / (n - I)$	σ_e^2
Total	$n - 1$	G	$s_T^2 = G / (n - 1)$	

onde:

$$E = \sum_{i=1}^I \frac{1}{n_i} \left[\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right]^2 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right]^2 \quad (2.21)$$

$$P = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^I \frac{1}{n_i} \left[\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right]^2 \quad (2.22)$$

$$G = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right]^2 \quad (2.23)$$

$$r = \frac{1}{I-1} \cdot \left[n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I n_i^2 \right] \quad (2.24)$$

Neste caso $E / (r \cdot \sigma_b^2 + \sigma_e^2)$ tem uma distribuição χ_{I-1}^2 se, e somente se, $\sigma_e^2 = 0$. Uma vez que os métodos para construir estimativas dos intervalos para σ_e^2 , para o caso balanceado, fazem uso do fato de que $B / (J \sigma_b^2 + \sigma_e^2)$ tem uma distribuição χ^2 , aqueles métodos não são aplicáveis às estatísticas provenientes da análise da variância nesse caso. Para alguns delineamentos não-balanceados $E / (r \cdot \sigma_b^2 + \sigma_e^2)$ terá uma distribuição χ_{I-1}^2 aproximada e as mesmas fórmulas dos dados balanceados poderão ser utilizadas; entretanto, a aproximação dada por Thomas e Hultquist [23] fornece uma aproximação consideravelmente melhor para delineamentos não-balanceados com um fator, como veremos no capítulo 4.

2.4 LIMITES DE TOLERÂNCIA UNILATERAIS

Na literatura estatística encontram-se várias tabelas de fatores para limites de tolerância unilaterais. Essas tabelas referem-se ao caso onde uma amostra aleatória $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é considerada com média amostral $\bar{x}$, média geral estimada $\hat{\mu}$ (definida em (2.5) e (2.15)), e desvio padrão amostral s (definido em (2.6)) ou $s_{\bar{x}}$ (definido em (2.18)), e deseja-se obter um limite de tolerância inferior unilateral de forma:

$$\hat{\mu} - ks \quad (2.25)$$

para o caso balanceado.

ou então:

$$\hat{\mu} - ks_{\bar{x}} \quad (2.26)$$

para o caso não-balanceado.

Os fatores $k = k(n, \gamma, \beta)$ são estabelecidos tais que, a probabilidade seja γ de que no mínimo uma proporção β da população esteja acima de (2.25) ou (2.26).

Quando nosso interesse for o limite de tolerância superior, as expressões (2.25) e (2.26) serão substituídas por $\hat{\mu} + k.s$ (caso balanceado) e $\hat{\mu} + k.s_{\bar{x}}$ (caso não-balanceado). E os fatores $k = k(n, \gamma, \beta)$ serão estabelecidos de modo que, a probabilidade seja γ de que no mínimo uma proporção β da população esteja abaixo desses valores.

Esses limites de tolerância seguem uma forma padrão do tipo:

$$(\text{Média Populacional Estimada}) \pm (\text{Fator de Tolerância}) \cdot (\text{Desvio Padrão Populacional Estimado}) \quad (2.27)$$



Capítulo 3

Métodos de Construção de Limites de Tolerância em Modelos Balanceados com um fator aleatório

3.1 MÉTODO DE LEMON (1977)

3.1.1 DESCRIÇÃO DO MÉTODO:

Como citado anteriormente, a questão é encontrar k de tal modo que a probabilidade seja γ de que no mínimo uma dada proporção β da população amostrada esteja acima da quantidade

$$\hat{\mu} - ks \quad (3.1)$$

onde s é uma medida da variação total, dada por:

$$s = \left(\frac{B}{I-1} \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

sendo B definido em (2.8).

Da tabela 2.1 vemos que s_b^2 é uma estimativa da quantidade $(J\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}$ (3.3)



$$\text{Se chamarmos } Y = \frac{\hat{\mu} - k.s - \mu}{(\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}} \sim N(0, 1) \quad (3.4)$$

então devemos obter o fator k tal que:

$$\Pr \{1 - \phi(Y) \geq \beta\} = \gamma \quad (3.5)$$

onde ϕ denota a função de distribuição da variável normal padronizada.

$$\text{Definamos } K_p \text{ tal que } \phi(K_p) = \beta \quad (3.6)$$

$$\text{Então (3.5) pode ser reescrita como } \Pr \{Y \leq -K_p\} = \gamma \quad (3.7)$$

Após certo algebrismo (3.7) pode ser reescrita como

$$\Pr \left\{ \frac{\frac{(\hat{\mu} - \mu)(IJ)^{1/2}}{(J\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}} + K_p(IJ)^{1/2} \frac{(\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}}{(J\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}}}{\frac{(B/(I-1))^{1/2}}{(J\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}}} \leq k(IJ)^{1/2} \right\} = \gamma \quad (3.8)$$

A forma analítica de (3.8) é a mesma de uma variável t não-central com $I - 1$ gl, uma

vez que a quantidade $\frac{(\hat{\mu} - \mu)(IJ)^{1/2}}{(J\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}}$ tem distribuição $N(0,1)$, e $\frac{B}{(J\sigma_b^2 + \sigma_e^2)}$ tem

distribuição qui-quadrado com $I - 1$ gl, como definido em (2.11). (Os cálculos para se obter valores da t não-central são um tanto trabalhosos, e serão utilizadas as tabelas de Pearson e Hartley [18], do apêndice 2).

Como $\hat{\mu}$ e B são independentes, Owen [16], observou que a expressão (3.8) poderia ser reescrita na seguinte forma:

$$\Pr \{t\text{-não central} \leq k(IJ)^{1/2} | \delta = K_p(IJ)^{1/2} \frac{(\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}}{(J\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}} \} = \gamma \quad (3.9)$$

onde δ é o parâmetro de não-centralidade.

Se $\beta = 0.50$, o parâmetro de não-centralidade em (3.9) é zero, e os fatores k podem ser facilmente encontrados usando tabelas da distribuição t .

Se $\beta \neq 0.50$, o parâmetro de não centralidade δ pode ser expresso na forma

$$\delta = K_p \cdot (IJ)^{1/2} \left(\frac{(J-1)}{J} \cdot \frac{1}{J \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} + 1} + \frac{1}{J} \right)^{1/2} \quad (3.10)$$

Pois:

pela equação (3.9) temos que : $\delta = K_p \cdot (IJ)^{1/2} \frac{(\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}}{(J\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}}$

$$\delta = K_p \cdot I^{1/2} \frac{(J\sigma_b^2 + J\sigma_e^2)^{1/2}}{(J\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}} = K_p \cdot I^{1/2} \left(\frac{J\sigma_b^2 + \sigma_e^2 + J\sigma_e^2 - \sigma_e^2}{J\sigma_b^2 + \sigma_e^2} \right)^{1/2}$$

e, portanto:

$$\delta = K_p \cdot I^{1/2} \left(\frac{(J-1)\sigma_e^2}{J\sigma_b^2 + \sigma_e^2} + \frac{J\sigma_b^2 + \sigma_e^2}{J\sigma_b^2 + \sigma_e^2} \right)^{1/2} = K_p \cdot I^{1/2} \left(\frac{(J-1)}{\frac{J\sigma_b^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2}} + 1 \right)^{1/2}$$

então
$$\delta = K_p \cdot (IJ)^{1/2} \left(\frac{(J-1)}{J} \cdot \frac{1}{J \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} + 1} + \frac{1}{J} \right)^{1/2} \quad (3.10)$$

Relativamente a tabela 2.1, temos:

$$E(s_b^2) = J\sigma_b^2 + \sigma_e^2$$

$$E(s_e^2) = \sigma_e^2$$

Então, $\frac{s_b^2 - s_e^2}{J}$ pode ser usado como estimador de σ_b^2 e s_e^2 como estimador de σ_e^2 .

Portanto, propõe :

$$\hat{\theta} = \frac{s_b^2 - s_e^2}{s_e^2} \text{ como estimador de } \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2}.$$

Mas, da tabela 2.1 temos:

$$\hat{\theta} = \frac{s_b^2 - s_e^2}{Js_e^2} = \frac{\frac{B}{I-1} - \frac{W}{I(J-1)}}{\frac{JW}{I(J-1)}} = \frac{I(J-1)B - (I-1)W}{J(I-1)W} = \frac{I(J-1)B}{J(I-1)W} - \frac{1}{J} \quad (3.11)$$

Sendo $\frac{I(J-1)B}{J(I-1)W} > 0$ então $\hat{\theta} > -1/J$.

Logo um estimador $\hat{\delta}$ de δ é obtido substituindo σ_b^2/σ_e^2 por s_b^2/s_e^2 em (3.10).

Usando (2.13) e (3.11), o quociente $\left(\frac{J.s_b^2}{s_e^2} + 1 \right) / \left(\frac{J.\sigma_b^2}{\sigma_e^2} + 1 \right)$ tem uma distribuição

F com $I-1$ e $I(J-1)$ graus de liberdade, pois:

Da equação (2.13) resulta $\frac{B.I.(J-1)}{(I-1).W} \cdot \frac{1}{\left(\frac{J.\sigma_b^2}{\sigma_e^2} + 1 \right)} \sim F_{I-1, I(J-1)}$, pois da

equação (3.11) temos $\frac{J.s_b^2}{s_e^2} + 1 = \frac{B.I.(J-1)}{(I-1).W}$, logo :

$$\left(\frac{J.s_b^2}{s_e^2} + 1 \right) / \left(\frac{J.\sigma_b^2}{\sigma_e^2} + 1 \right) \sim F_{I-1, I(J-1)}$$

Lemon [11] utilizou-se deste fato para que o viés no termo $\frac{1}{\frac{J.s_b^2}{s_e^2} + 1}$ fosse eliminado

para $I > 3$, resultando em :

$$\hat{\delta}^* = K_p(IJ)^{1/2} \left[\frac{J-1}{J} \frac{(I-3)/(I-1)}{J(s_b^2/s_e^2) + 1} + \frac{1}{J} \right]^{1/2} \quad (3.12)$$

Nota-se que $E(\hat{\delta}^*) < E(\hat{\delta})$ e uma vez que $\delta^2 = E(\hat{\delta}^{*2}) > E^2(\hat{\delta}^*)$, então $E(\hat{\delta}^*) < \delta$.

O estimador $\hat{\delta}$ é usado pelo fato de que fornece fatores de tolerância, os quais são apenas levemente mais conservativos para $I > 3$ do que aqueles obtidos usando os viés ajustados dos estimadores.

Se usarmos então $\hat{\delta}$ ao invés de δ em (3.9) o valor esperado e a variância dos fatores $k = k(\hat{\delta})$ deduzidos, podem ser formulados usando a distribuição de s_b^2/s_e^2 , a qual pode ser estabelecida a partir da distribuição F mencionada acima.

Uma integração numérica aproximada foi realizada por Lemon [11], onde $s_b^2/s_e^2 = 0.2, 1, 5$ para $J = 2, 5, 10$; $I = 5, 10$; $\beta = 0.90$; $\gamma = 0.95$; e $\sigma_b^2/\sigma_e^2 = 1$. Em todos os casos, ele obteve $0.99 < E[k(\hat{\delta})]/k(\delta) < 1.0$, e o coeficiente de variação foi menor que 2 %. Isto indica que a variabilidade em δ não é um fator significativo.

Os fatores de tolerância k foram obtidos por Owen [16], encontrando t_0 tal que:

$$\Pr \{ t \text{ não central} \leq t_0 \mid \delta \} = \gamma. \quad (3.13)$$

$$\text{Podemos encontrar } k \text{ ajustando } k(IJ)^{1/2} = t_0. \quad (3.14)$$

A forma do limite de tolerância resultante pode ser expressa como

$$\hat{\mu} - k.s = \hat{\mu} - k \cdot \frac{s}{s_x} \cdot s_x \quad (3.15)$$

onde s (definido em (3.2)) estima $(J\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}$ e, s_x definido por:

$$s_x = \sqrt{s_b^2 + s_e^2} \text{ ou então}$$

$$s_x = \left(\frac{s_b^2 + s_e^2}{s_e^2} \cdot s_e^2 \right)^{1/2}$$

e, pela tabela 2.1, temos:

$$s_x = \left[\left(\frac{s_b^2}{s_e^2} + 1 \right) \cdot \frac{W}{I(J-1)} \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{s_b^2}{s_e^2} + 1 \right) \cdot \frac{W \cdot (I-1)}{I(J-1) \cdot B} \cdot \frac{B}{(I-1)} \right]^{1/2}$$

e, usando (3.11) tem-se:

$$s_x = \left(\frac{B}{I-1} \right)^{1/2} \cdot \left[\left(\frac{s_b^2}{s_e^2} + 1 \right) / \left(\frac{J \cdot s_b^2}{s_e^2} + 1 \right) \right]^{1/2} \quad (3.16)$$

que estima o desvio padrão total da população $\sigma_x = (\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{1/2}$.

$$\text{O lado direito de (3.15) pode ser escrito como } \hat{\mu} - k's_x \quad (3.17)$$

onde $k' = ks/s_x$.

O fator amostral de tolerância ajustado k' é usado porque fornece um limite de tolerância dado por (3.17) que é da forma padrão de (2.27).

Algumas tabelas selecionadas, dos fatores de tolerância k' foram apresentadas por Lemon [11], usando (3.14) e (3.17), e encontram-se no apêndice 2 (tabela 3.1). Essas tabelas



são dadas como uma função de I, J para vários valores de γ, β e s_b^2/s_e^2 . Podem ser usadas extrapolação e interpolação logarítmica para vários valores de J e I (exceto para I igual a 2). Valores intermediários de k' para J e I não fornecidos podem ser obtidos interpolando linearmente em $1/J$ e $1/(I-1)^{1/2}$.

3.1.2. ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DOS RESULTADOS :

Da tabela 3.1, do apêndice 2, nota-se que o fator tabelado k' varia levemente com mudanças em J ou em s_b^2/s_e^2 para valores fixados de I , mas à medida que I aumenta, k' diminui exponencialmente. Isto implica que um limite de tolerância mais significativo possa ser obtido aumentando-se o número de grupos (I) comparado com o aumento do tamanho das amostras (J), dentro de cada grupo. Desse modo, se alterações são permitidas entre o tamanho das amostras nos grupos e o número de grupos, deve ser vantajoso (dependendo dos custos relativos) selecionar mais grupos do que obter grandes amostras intra-grupos.

Percebe-se que o caso $J = 1$ reduz-se à situação discutida anteriormente, onde aqui a única observação de cada grupo é considerada para constituir uma amostra de tamanho I de uma população homogênea, isto é; no caso degenerado, estimativas separadas de σ_b^2 e σ_e^2 não podem ser obtidas, e a variância das observações estima $\sigma_b^2 + \sigma_e^2$. Isto é devido ao fato de que a primeira linha de todas as partes da tabela 3.1 (do apêndice 2) coincidem, para γ e β fixados, ou seja, esta linha é completamente independente de s_b^2/s_e^2 .

3.2 MÉTODO DE MEE-OWEN (1983)

3.2.1 DESCRIÇÃO DO MÉTODO:



Mee e Owen [13] encontraram fatores considerados melhorados em relação aos fatores apresentados por Lemon [11]. Vimos anteriormente que Lemon encontrou limites de tolerância unilaterais (para uma população consistindo de muitos grupos) baseando-se no quadrado médio entre grupos, diferentemente de Mee e Owen [13] que utilizaram uma combinação linear dos quadrados médios dada por:

$$s_x^2 = \frac{s_b^2}{J} + \left(1 - \frac{1}{J}\right) s_e^2 \quad (3.18)$$

A princípio a idéia é a mesma que a de Lemon [11] , isto é, determina-se um limite de tolerância inferior $\hat{\mu} - k.s_x$ tal que a probabilidade seja γ de que no mínimo uma proporção β da população exceda esse limite, ou seja:

$$\Pr_{\hat{\mu}, s_x} \left\{ \Pr_x \{x > \hat{\mu} - k.s_x \mid \hat{\mu}, s_x\} \geq \beta \right\} = \gamma \quad (3.19)$$

onde x é normalmente distribuída com média μ e variância σ_x^2 .

Descreveremos o Método de Mee-Owen [13] em duas seções; na primeira (3.2.2) será deduzido o fator para o limite de tolerância quando a razão da variância $R = \sigma_b^2 / \sigma_e^2$ é desconhecida, e na seção 3.2.3, quando R é conhecida. Na seção 3.3 aplicaremos os métodos estudados nas seções 3.1 e 3.2 para um mesmo exemplo.

3.2.2 LIMITES DE TOLERÂNCIA QUANDO R É DESCONHECIDA:

Determinaremos agora o fator $k = k_s$ tal que a equação (3.19) seja satisfeita.

Usando K_p para denotar o $100P^\circ$ percentil para a distribuição normal padronizada, podemos reescrever a equação (3.19) como sendo:

$$\Pr_{\hat{\mu}, s_x} \left\{ \hat{\mu} - k_s.s_x < \mu - K_p.\sigma_x \right\} = \gamma$$

Definindo $Z = \frac{\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu)}{\sigma}$ e $\delta = \frac{\sqrt{n}.K_p.\sigma_x}{\sigma}$, k_s deve satisfazer:



$$\Pr \left[\frac{Z + \delta}{s_x / \sigma_x} < k_s \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma_x / \sigma \right] = \gamma \quad (3.20)$$

Pois:

$$\begin{aligned} & \left\{ \hat{\mu} - k_s \cdot s_x < \mu - k_p \cdot \sigma_x \right\} = \\ & = \left\{ \hat{\mu} - \mu - k_s \cdot s_x < \mu - \mu - k_p \cdot \sigma_x \right\} \\ & = \left\{ \hat{\mu} - \mu + k_p \cdot \sigma_x < k_s \cdot s_x \right\} \\ & = \left\{ \frac{(\hat{\mu} - \mu) \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma_x}{\sigma} + \frac{K_p \cdot \sigma_x \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma_x}{\sigma} < \frac{k_s \cdot s_x \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma_x}{\sigma} \right\} \\ & = \left\{ \frac{\frac{(\hat{\mu} - \mu) \cdot \sqrt{n}}{\sigma} + \frac{K_p \cdot \sigma_x \cdot \sqrt{n}}{\sigma}}{\frac{s_x}{\sigma_x}} < \frac{k_s \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma_x}{\sigma} \right\} \\ & = \left\{ \frac{Z + \delta}{s_x / \sigma_x} < \frac{k_s \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma_x}{\sigma} \right\} = \gamma \quad \text{onde } \frac{Z + \delta}{s_x / \sigma_x} \text{ tem distribuição t-não central} \end{aligned}$$

com f graus de liberdade e parâmetro de não centralidade δ , indicada por $t_f(\delta, \gamma)$.

Usando o resultado de Satterthwaite [21], tem-se que s_x^2 / σ_x^2 é aproximadamente distribuído como uma variável χ_f^2 , onde:

$$f = (R + 1)^2 / [(R + J^{-1})^2 / (I - 1) + (1 - J^{-1}) / n] \quad (3.21)$$

Dessa forma, a distribuição de probabilidade em (3.20) pode ser aproximada por uma distribuição t não-central com graus de liberdade dados por (3.21) e parâmetro de não centralidade δ . Assim temos (aproximadamente)

$$k_s = t_f(\sqrt{n} B K_p, \gamma) / \sqrt{n} B \quad (3.22)$$

$$\text{onde } B = \sigma_x / \sigma = \{ (R + 1) / (JR + 1) \}^{1/2}$$

Pois:

$$\text{se chamarmos } \frac{\sigma_x}{\sigma} = B, \text{ teremos: } t_f(\sqrt{n} \cdot B \cdot K_p, \gamma) = k_s \cdot \sqrt{n} \cdot B \quad \text{ou então:}$$

$$k_s = \frac{t_f(\sqrt{n} \cdot B \cdot K_p, \gamma)}{\sqrt{n} \cdot B}$$

$$\text{sendo } B = \frac{\sigma_x}{\sigma} = \frac{\sqrt{\sigma_b^2 + \sigma_e^2}}{\sqrt{J\sigma_b^2 + \sigma_e^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\sigma_b^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2}}}{\sqrt{\frac{J\sigma_b^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_e^2}}{\frac{J\sigma_b^2}{\sigma_e^2} + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_e^2}}} \text{ e como } \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} = R \text{ então:}$$

$$B = \sqrt{\frac{R + 1}{JR + 1}}$$

onde, para constantes arbitrárias, α , β , e ν , $t_\nu(\alpha, \beta)$ denota o 100β percentil para uma distribuição t não central com ν graus de liberdade e parâmetro de não centralidade α .

É interessante investigar k_s como uma função de R . À medida que R tende para o infinito, k_s se aproxima de :

$$k_s(\infty) = t_{I-1}(K_p \sqrt{I}, \gamma) / \sqrt{I}$$

que é o fator de tolerância para uma amostra aleatória de tamanho I .

Pois:

$$\text{temos } R \rightarrow \infty, \quad J = 1, \quad k_s = \frac{t_f(\sqrt{n}.B.K_p, \gamma)}{\sqrt{n}.B}, \quad \text{e}$$

$$f = \frac{(R + 1)^2}{\frac{(R + 1/J)^2}{I - 1} + \frac{1 - 1/J}{n}}, \quad \text{como } J = 1, \text{ então:}$$

$$f = \frac{(R + 1)^2}{(R + 1)^2} \cdot (I - 1) \quad \text{e portanto:} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} f = I - 1$$

$$k_s = \frac{t_{I-1}\left(\sqrt{IJ} \cdot \sqrt{\frac{R+1}{JR+1}} \cdot K_p, \gamma\right)}{\sqrt{IJ} \cdot \sqrt{\frac{R+1}{JR+1}}}, \quad \text{logo: } k_s(\infty) = t_{I-1}(\sqrt{I}.K_p, \gamma) / \sqrt{I}$$

Desse modo, quando essencialmente toda a variação está entre grupos (s_b^2), observações adicionais dentro de um grupo não fornecem informação complementar.

Para $R = 0$, $k_s(0) = t_{n-1-\varepsilon}(K_p \sqrt{n}, \gamma) / \sqrt{n}$, onde $\varepsilon = (J - 1) / (IJ - J + 1)$

Pois, uma vez que $R = 0$, temos:

$$f = \frac{(R+1)^2}{\left[\frac{(R+1/J)^2}{I-1} + \frac{1-1/J}{IJ} \right]} = \frac{1}{\frac{1}{J^2(I-1)} + \frac{(J-1)/J}{IJ}}$$

$$f = \frac{1}{\frac{1}{J^2} \left[\frac{1}{I-1} + \frac{J-1}{I} \right]} = \frac{J^2}{\frac{I + (J-1)(I-1)}{I(I-1)}}$$

$$f = \frac{IJ^2 \cdot (I-1)}{I + (J-1)(I-1)} = \frac{IJ^2 \cdot (I-1)}{I + IJ - J - I + 1} = \frac{IJ^2 \cdot (I-1)}{IJ - J + 1}$$

$$f = \frac{IJ \cdot [J(I-1) + 1 - 1]}{IJ - J + 1} = \frac{IJ \cdot [J(I-1) + 1] - IJ + J - J}{IJ - J + 1}$$

$$f = \frac{IJ \cdot [J(I-1) + 1] - IJ + J - 1 + 1 - J}{IJ - J + 1}$$

$$f = \frac{IJ \cdot [IJ - J + 1]}{IJ - J + 1} - \frac{(IJ - J + 1)}{IJ - J + 1} - \frac{(J-1)}{IJ - J + 1} = IJ - 1 - \varepsilon$$

$$\text{logo } f = n - 1 - \varepsilon.$$

Temos ainda que $K_p \cdot \sqrt{n} \cdot B = K_p \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{R+1}{JR+1}}$ e, como $R = 0$, temos

$$K_p \cdot \sqrt{n} \cdot 1 = K_p \cdot \sqrt{n}$$

(Nota-se que $0 \leq \varepsilon \leq 1$ para $I > 1$). Desse modo, exceto para o termo ε , com $R = 0$, a aproximação (3.22) corresponde ao fator de tolerância para uma amostra aleatória de tamanho n igual a IJ .

Quando $0 < R < \infty$, k_s é maior do que $k_s(0)$ e menor do que $k_s(\infty)$. Valores selecionados de k_s , determinados por Mee e Owen [13] são fornecidos na tabela 3.2, do apêndice 2.

A equação (3.22) sugere que o fator k_s deva ser aproximado por $t_{n'-1}(\sqrt{n'} \cdot K_p, \gamma) / \sqrt{n'}$, com $n' = nB^2$ que é visto como “tamanho amostral efetivo”, onde:

$$n' = n \cdot B^2$$

$$n' = \frac{IJ \cdot (R+1)}{JR+1} = \frac{IJ \cdot R + IJ + I - I}{JR+1}$$

$$n' = \frac{I(JR+1) + I(J-1)}{JR+1}$$

$$n' = \frac{I(JR+1)}{JR+1} + \frac{I(J-1)}{JR+1}, \text{ e portanto:}$$

$$n' - 1 = I - 1 + \frac{I(J - 1)}{JR + 1}$$

Entretanto, $n' - 1 = (I - 1) + I(J - 1)/(JR + 1)$ tende a ser menor do que f , e desse modo a analogia não é inteiramente adequada.

O fator de tolerância k_s depende da razão das variâncias R . Quando R é desconhecida, deve-se substituí-la em (3.22) por uma estimativa, por exemplo,

$\hat{R} = \max\{0, (F - 1)/J\}$, sugerida por Mee e Owen [13], onde F denota a razão s_b^2/s_e^2 . (Se $F < 1$, na prática geralmente se procede como se n observações compusessem uma amostra aleatória simples da população.)

Considerando-se $\hat{R}$, a probabilidade da expressão (3.19) passa a ser dada por:

$$\gamma_s(R) = \Pr_{\hat{\mu}, s_x, \hat{R}} \left\{ \Pr_x [x > \hat{\mu} - k_s(\hat{R}) \cdot s_x \mid \hat{\mu}, s_x, \hat{R}] > \beta \mid F \geq 1 \right\} \quad (3.23)$$

com a finalidade de investigar a taxa de cobertura efetiva para $\hat{\mu} - k_s(\hat{R})s_x$.

Uma vez que a probabilidade $\gamma_s(R)$ pode ficar abaixo de γ , Mee e Owen [13] propoem que se use o fator $k_s(R^*)$, onde R^* denota um limite de confiança superior η para R ; isto é,

$$R^* = \max \left\{ 0, (FF_\eta - 1)/J \right\}$$

onde F_η é o 100 η percentil de uma distribuição F com graus de liberdade $v_1 = I(J - 1)$ e $v_2 = I - 1$ (Searle [22]). Isto é, entramos na tabela 3.2, do apêndice 2, com o limite de confiança superior para R , ao invés do estimador pontual de R . Uma vez que $k_s(\cdot)$ é uma função crescente de R , usando $k_s(R^*)$ ao invés de $k_s(\hat{R})$, acarreta em um procedimento mais conservativo. O problema aqui é escolher um valor razoável para η .

É necessário variar η de acordo com os valores de γ e β que estão sendo usados.

Para as combinações seguintes de γ e β , os valores necessários de η , fornecidos por Mee e Owen [13] são:

$\gamma \backslash \beta$	0.90	0.95	0.99
0.90	0.78	0.85	0.94
0.95	0.79	0.86	0.95
0.99	0.81	0.875	0.96



Lemon [11] também deduziu fatores para limites de tolerância unilaterais da forma $\hat{\mu} - k's_x$, sendo o fator k' (aqui denotado por k_L) definido como :

$$k_L = t_{I-1}(\sqrt{n}BK_p, \gamma) / \sqrt{n}B \quad (3.24)$$

Percebe-se que k_L coincide com k_s exceto para graus de liberdade $I - 1 < f$. Lemon [11] propôs avaliar o fator k_L com $R = \hat{R}$, isto é, ele propôs o limite de tolerância $\hat{\mu} - k_L(\hat{R})s_x$. Sua justificativa para esse procedimento foi que a variabilidade R tinha um efeito desprezível no fator de tolerância proposto. (Lemon [11] aproximou o coeficiente de variação (CV) para o fator de tolerância e obteve $CV < 2\%$ para seis casos investigados). Embora o CV realmente exceda o que Lemon encontrou com uma integração numérica aproximada (o CV obtido ficou entre 6% e 21%), avaliando k_L em $\hat{R}$ na verdade obtem-se um procedimento extremamente conservativo.

Calcula-se (3.23) para várias combinações de I, J, R, β e γ .

Para $\beta = 0.90$, $\gamma = 0.95$, e $R = 1$, a taxa de cobertura $\gamma_L(R)$, conforme Mee e Owen [13], é dada por:

J \ I	2	5	10
5	0.9913	0.9985	0.9995
10	0.9821	0.9925	0.9957

Nota-se que o procedimento de Lemon [11] é mais conservativo quando os graus de liberdade $I - 1$ são pequenos e diferem-se substancialmente de f , isto é, quando I e R são pequenos e J é grande.

Uma vez que $k_s(R^*)$ e $k_L(\hat{R})$ são funções de I, J, β, γ e $\hat{R}$, é possível comparar esses fatores para determinarmos qual é o menor.

Em cada uma das situações que foram investigadas por Mee e Owen [13] ($I \geq 5$, $\beta(e\gamma) = 0.90, 0.95, 0.99$, $\hat{R} \leq 25$), $k_s(R^*)$ foi menor do que $k_L(\hat{R})$, com uma grande

diferença para valores de $\hat{R}$ pequenos, mas uma diferença muito pequena para valores de $\hat{R} > 5$.

3.2.3 LIMITES DE TOLERÂNCIA QUANDO R É CONHECIDA:

Se a razão das variâncias é conhecida, essa informação adicional pode ser usada para obter um fator de tolerância que é geralmente menor do que $k_s(R^*)$. Conhecendo R, somos capazes de reunir os dois quadrados médios e, desse modo, obter um desvio padrão estimado que tem $n - 1$ graus de liberdade.

A quantidade $(s_b^2/\sigma^2) [(I - 1) + I(J - 1)(JR + 1)/F]$, estabelecida por Mee e Owen [13] é equivalente a:

$$\begin{aligned} & \frac{s_b^2}{\sigma^2} \left[(I - 1) + \frac{I(J - 1)(JR + 1)}{F} \right] = \\ & = \frac{s_b^2}{\sigma^2} (I - 1) + \frac{s_b^2}{\sigma^2} \cdot \frac{I(J - 1)(J\sigma_b^2/\sigma_e^2 + 1)}{s_b^2/s_e^2} \\ & = \frac{s_b^2}{\sigma^2} (I - 1) + \frac{1}{J\sigma_b^2 + \sigma_e^2} \cdot \frac{I(J - 1)(J\sigma_b^2 + \sigma_e^2)/\sigma_e^2}{1/s_e^2} \\ & = \frac{s_b^2}{\sigma^2} (I - 1) + I(J - 1) \cdot \frac{s_e^2}{\sigma_e^2}, \text{ a qual é distribuída como uma variável qui-quadrado} \end{aligned}$$

com $n - 1$ graus de liberdade.

Portanto, (s_b^2/σ^2) é distribuída como uma variável χ_{n-1}^2 conhecida.

Usando este resultado, a probabilidade condicional

$$\Pr_{\hat{\mu}, s|F} \{ \Pr_x [x > \hat{\mu} - k.s | \hat{\mu}, s, F] \geq \beta | F \} = \gamma \quad (3.25)$$

é válida para $k = c.t_{n-1}(\sqrt{n}.B.K_p, \gamma) / \sqrt{n}$ e $c^2 = [(I - 1) + I(J - 1)(JR + 1)/F]/(n - 1)$.

O limite de tolerância $\hat{\mu} - ks$ pode ser expresso na forma $\hat{\mu} - k_R c' s_x$, onde



$$k_R = \frac{t_{n-1}(\sqrt{n} BK_p, \gamma)}{\sqrt{n} B}$$

$$e \quad c' = cBs_b/s_x = \{[J(R+1)/(F+J-1)][I(J-1) + (I-1)F/(JR+1)]/(n-1)\}^{1/2} \quad (3.26)$$

Pois:

$$c' = c.B.\frac{s_b^2}{s_x} = \sqrt{c^2.B^2.\frac{s_b^2}{s_x^2}}$$

$$c' = \sqrt{\left[(I-1) + \frac{I(J-1).(JR+1)}{F} \right] \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(R+1)}{(JR+1)} \cdot \frac{s_b^2}{(s_b^2 + s_e^2.J - s_e^2)/J}}$$

$$c' = \sqrt{\frac{(I-1)F + I(J-1).(JR+1)}{F} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(R+1).J}{(JR+1)} \cdot \frac{\frac{s_b^2}{s_e^2}}{\frac{s_b^2}{s_e^2} + \frac{s_e^2.J}{s_e^2} - \frac{s_e^2}{s_e^2}}}$$

$$c' = \sqrt{\frac{(I-1)F + I(J-1).(JR+1)}{F} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{J(R+1)}{(JR+1)} \cdot \frac{F}{F+J-1}}$$

$$c' = \sqrt{\left[\frac{(I-1).F}{(JR+1)} + I(J-1) \right] \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{J(R+1)}{F+J-1}}$$

ou então:

$$c' = \left\{ \frac{J(R+1)}{F+J-1} \left[I(J-1) + \frac{(I-1).F}{(JR+1)} \right] \cdot \frac{1}{n-1} \right\}^{1/2}$$

O fator k_R não depende de F , e alguns valores selecionados são dados na tabela 3.3, apêndice 2. O coeficiente c' pode ser visto como um ajustamento para s_x (c' é uma função decrescente de F , que vale 1 se $R = \hat{R}$).

3.2.4. DETERMINAÇÃO DE k_S E k_R POR INTERPOLAÇÃO:

As tabelas 3.2 e 3.3, do apêndice 2, fornecem fatores de tolerância k_S e k_R , respectivamente, para $\gamma = 0.95$, $\beta = 0.90$ e 0.99 , $I \leq 10$, e para valores selecionados de J e R . Para combinações de J e R que não aparecem nas tabelas, os fatores de tolerância k_S e k_R podem ser obtidos por interpolação linear em $1/J$ e por interpolação linear em R para $0 < R < 0.2$, interpolação logarítmica para $0.2 < R < 10$, e interpolação linear em $1/R$ para $R > 10$. (Para $R = 0$ o fator de tolerância apropriado é o fator para uma amostra aleatória de tamanho IJ). Este esquema de interpolação é similar ao sugerido anteriormente por Lemon.

3.3 EXEMPLO DE APLICAÇÃO DOS MÉTODOS:

Para ilustrarmos os procedimentos apresentados, para a determinação de um limite de tolerância através dos dois métodos anteriores, utilizaremos os dados descritos em Kaminski, Lemon, e McKague [8] que considera a força estática padrão permissível, para um sistema de um material composto. Nesse problema são avaliados cinco grupos separados e independentes desse material, usando seis amostras de cada grupo. Trata-se de um modelo de efeitos aleatórios balanceado onde $I = 5$ e $J = 6$.

As seguintes estimativas foram obtidas dos dados do teste: $\hat{\mu} = 186$ ksi, $s_b = 6.87$, $s_e = 5.86$, resultando em:

$$s_x = \sqrt{s_b^2 + s_e^2} = \sqrt{6.87^2 + 5.86^2} = 9.04$$

$$s_b^2 / s_e^2 = 6.87^2 / 5.86^2 = 1.37$$

Um material B permissível é definido como um limite de tolerância inferior com $\beta = 0.90$ e $\gamma = 0.95$.



Método de Lemon:

Usando a parte b da tabela 3.3, do apêndice 2, e a interpolação logarítmica para s_b^2/s_e^2 entre 1 e 5, o fator de tolerância apropriado k' é 3.285.

Desse modo, o material B permissível será $x_B = 186 - 3.285(9.04) = 156,3$ ksi.

O valor exato de k calculado para $s_b^2/s_e^2 = 1.37$ é 3.290, o qual fornece aproximadamente o mesmo resultado.

A interpretação desse "B" permissível é que com um intervalo de confiança de 95%, no mínimo uma proporção $\beta = 0.90$ da população desse material, consistindo de muitas espécimes, provenientes de muitos grupos, tenha força estática acima de 156.3 ksi.

Método de Mee-Owen:

Para determinar k_s , como descrito na seção 3.2.2, como $\beta = 0.90$ e $\gamma = 0.95$ computamos um limite superior de 85% para R ,

$$R^* = \max \left\{ 0, (FF_\eta - 1)/J \right\} = \max \left\{ 0, \frac{9.22(2.96) - 1}{6} \right\}$$
$$R^* = \frac{9.22(2.96) - 1}{6} = 4.38$$

O fator de tolerância $k_s(R^*)$ obtido da tabela 3.2, do apêndice 2, é igual a 2.88, e portanto: $\hat{\mu} - k_s(R^*)s_x = 186 - 2.88(9.04) = 160$ ksi.

Desse modo podemos estar no mínimo 95% confiantes de que pelo menos 90% desse material na população tem força estática acima de 160 ksi.

E, para ilustrarmos o procedimento da seção 3.2.3, suponhamos que, em adição à informação amostral, sabe-se que $R \leq 1$.

Então, da tabela 3.3, do apêndice 2, obtemos $k_R = 2.0$ e, usando (3.26), $c' = 0.9385$.

Portanto, $k_{RC'} = 1.877$ e o limite de tolerância é igual a 169 ksi. Como mencionado na seção 3.2.3, $k_{RC'}$ pode ser menor do que k_L ou k_S (como nesse caso o é), ainda a validade do limite de tolerância depende do valor adotado R .



Capítulo 4

Métodos de Construção de Limites de Tolerância em Modelos Não-balanceados com um fator aleatório

4.1 RESULTADOS E DEFINIÇÕES

Usando as definições (2.15), (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) e (2.20) apresentamos a seguir alguns resultados que serão utilizados na seção 4.2 .

Resultado 1: (Thomas e Hultquist [23])

Seja $M = \frac{(I-1).s_x^2}{\sigma_b^2 + \bar{\lambda}.\sigma_e^2}$, então a distribuição de M é aproximadamente χ_{I-1}^2 , onde χ_{I-1}^2

denota uma variável aleatória qui-quadrado central com $I - 1$ graus de liberdade.

A distribuição de M seria exatamente χ_{I-1}^2 se os n_i 's fossem todos iguais.

Resultado 2:

As variáveis aleatórias $\hat{\mu}$ e s_x^2 são independentemente distribuídas e $\frac{\sqrt{I}(\hat{\mu} - \mu)}{\sqrt{M/(I-1)}} \sim$

t_{I-1} aproximada, onde t_{I-1} denota uma distribuição t-central com $I - 1$ graus de liberdade.

Resultado 3:

Seja $t_{\gamma}(\alpha, \beta)$ o 100β percentil de uma distribuição t-não central com γ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade α . Então, $t_{\gamma}(\alpha, \beta)$ é uma função crescente de α quando γ e β são mantidos fixos; e é uma função decrescente de γ quando α e β são fixos.

As seguintes definições são fornecidas por Marshall e Olkin [12].

Definição 1:

Para $x, y \in R^n$ e $1 \leq k \leq (n-1)$,

$$x \prec y \quad \text{se} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]} \\ \sum_{i=1}^n x_{[i]} = \sum_{i=1}^n y_{[i]} \end{cases}$$

onde $x_{(i)}$ é o i -ésimo componente ordenado de x . Quando $x \prec y$, x é dito ser majorizado por y .

Definição 2:

Uma função valor real ϕ definida em um conjunto $A \subset R^n$ é dita ser uma Schur-convexa em A se, em A , $x \prec y \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$. Similarmente, ϕ é dita ser uma Schur-côncava em A se, em A , $x \prec y \Rightarrow \phi(x) \geq \phi(y)$.

São definidos também os vetores de alocação $A_{ub} = (n_{[1]}, n_{[2]}, \dots, n_{[I]})$, $A_1 = (n, 0, \dots, 0)$ e $A_b = (J, J, \dots, J)$, onde $n_{[i]} \geq n_{[i+1]}$ e $\sum n_{[i]} = n = IJ$. (Nota-se que $A_b < A_{ub} < A_1$).

Resultado 4:

(i) $\bar{\lambda} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{1}{n_i}$ é uma função Schur-convexa.

(ii) $\bar{\lambda} \geq 1/J$ e a igualdade é válida quando $A_{ub} = A_b$, e

(iii) $\max \bar{\lambda} = ((n-I+1)^{-1} + I-1)/I$, onde o máximo é tomado em função dos n_i 's.

Nota-se que o vetor de alocação A_1 (o qual aloca todas as observações em um único tratamento) não é permissível para $\bar{\lambda}$.

Dessa forma, $\bar{\lambda}$ assume seu valor máximo quando $A = ((n - I + 1), 1, \dots, 1)$

4.2 O MÉTODO DE BHAUMIK-KULKARNI (1991)

4.2.1 DESCRIÇÃO DO MÉTODO

As técnicas básicas de construção dos limites de tolerância são praticamente as mesmas das de Mee e Owen [13]. Será construído o limite de tolerância inferior $\hat{\mu} - k_s \cdot s_{\bar{x}}$ tal que no mínimo uma proporção β da população exceda esse limite com probabilidade γ , ou seja:

$$P_{\hat{\mu}, s_{\bar{x}}} \left\{ P_r \left\{ x > \hat{\mu} - k_s \cdot s_{\bar{x}} \mid \hat{\mu}, s_{\bar{x}} \right\} \geq \beta \right\} = \gamma \quad (4.1)$$

Desse modo, o objetivo é determinar k_s tal que a equação (4.1) seja satisfeita. Nota-se que usa-se $s_{\bar{x}}$ para construir o limite devido à não disponibilidade de se ter um estimador apropriado da variância. Portanto os limites aqui construídos podem não ser os melhores.

A equação (4.1) implica em:

$$P_{\hat{\mu}, s_{\bar{x}}} \left\{ \hat{\mu} - k_s \cdot s_{\bar{x}} \leq \mu - K_p \sqrt{\sigma_b^2 + \sigma_e^2} \right\} = \gamma$$

onde K_p denota o $(100 p)^\circ$ percentil da distribuição normal padronizada.

Definimos

$$Z = \frac{(\hat{\mu} - \mu)}{\sigma_1} \quad \text{e} \quad \delta = \frac{K_p \cdot (\sigma_b^2 + \sigma_e^2)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_1}, \quad \text{onde } \sigma_1 \text{ é definido em (2.19)}$$

(aqui $\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{J \sigma_b^2 + \sigma_e^2}{n}$)

Então temos :

$$P_{\hat{\mu}, s_{\bar{x}}} \left\{ Z + \delta < k_s \cdot s_{\bar{x}} / \sigma_1 \right\} = \gamma$$

Consequentemente:

$$P_{\hat{\mu}, s_{\bar{x}}} \left\{ \frac{Z + \delta}{s_{\bar{x}} / \sigma_1} < k_s \cdot \sqrt{I} \right\} = \gamma, \text{ onde } Z \text{ denota uma variável aleatória normal}$$

padronizada.

Desse modo, uma vez que Z e $M / (I - 1) = s_x^2 / \sigma_f^2$ são independentes (resultado 2), temos:

$$k_s = t_{I-1}(\delta, \gamma) / \sqrt{I} \quad (4.2)$$

Bhaumik e Kulkarni [1] estudaram as propriedades de k_s como uma função de R e n_i 's.

Primeiro eles pesquisaram os valores de n_i 's para os quais k_s é mínimo, para R fixa.

O δ da equação (4.2) pode ser reescrito como:

$$\delta = \frac{K_p \cdot \sqrt{\sigma_b^2 + \sigma_e^2}}{\sigma_1} = \frac{K_p \cdot \sqrt{\sigma_b^2 + \sigma_e^2}}{\sqrt{\frac{\sigma_b^2 + \bar{\lambda} \sigma_e^2}{I}}} =$$

$$\delta = \sqrt{I} \cdot K_p \cdot \sqrt{\frac{R + 1}{R + \bar{\lambda}}} \quad (4.3)$$

Apresentamos agora o limite de tolerância para R conhecida na seção 4.2.2, e para R desconhecida na seção 4.2.3, segundo Bhaumik e Kulkarni [1].

4.2.2 LIMITES DE TOLERÂNCIA QUANDO R É CONHECIDA

Como δ (equação (4.3)) é uma função decrescente de $\bar{\lambda}$, temos que δ atinge o seu máximo quando $\bar{\lambda}$ atinge o seu mínimo. Portanto, para o caso balanceado (quando $n_i = J$), o valor máximo de δ será obtido de:

$$\text{Pela equação (4.3) temos } \delta = \sqrt{I} \cdot K_p \cdot \sqrt{\frac{R + 1}{R + \bar{\lambda}}} \text{ e, se } \bar{\lambda} = \frac{1}{J} \text{ (resultado 4 (ii)) e}$$

como $I = \frac{n}{J}$ (caso balanceado), então:

$$\begin{aligned}\delta_{\text{máx}} &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{J}} \cdot K_p \cdot \sqrt{\frac{R+1}{R+\frac{1}{J}}} \\ \delta_{\text{máx}} &= \sqrt{n} \cdot K_p \cdot \sqrt{\frac{R+1}{JR+1}}\end{aligned}\quad (4.4)$$

Dessa maneira, um delineamento balanceado nos fornecerá o valor máximo de k_s (resultado 3). Temos ainda o fato que δ atinge seu mínimo quando o vetor de alocação é $A = ((n-I+1), 1, \dots, 1)$. Esse vetor de alocação nos fornece o valor mínimo para k_s , e, conseqüentemente, o melhor limite de tolerância para esse procedimento.

Para o caso balanceado, em geral, não existe comparação direta entre os limites aqui deduzidos e os limites obtidos por Mee e Owen [13]. Isto se deve ao seguinte:

$$\text{Seja } L_1 = k_s \cdot s_{\bar{x}} \quad \text{e} \quad L_2 = K \cdot s_x,$$

onde k_s é deduzido substituindo δ por $\delta_{\text{máx}}$, $K = t_f(\delta_{\text{máx}}, \gamma)$ (obtido por Mee e Owen [13]) e $s_{\bar{x}}^2$ é dado em (2.17).

Para várias combinações de I , J e R , Bhaumik e Kulkarni [1] tabularam os valores de k_s e K , esses valores encontram-se na tabela 4.1, do apêndice 2. Temos $k_s \geq K$, e os valores são próximos para grandes valores de R , porém temos $s_{\bar{x}} \leq s_x$. Assim, nenhum método é uniformemente melhor do que o outro. Entretanto, a comparação dos dois métodos para o caso extremo de $R \rightarrow \infty$, resulta em:

$$L_1 \rightarrow s_{\bar{x}} c \quad \text{e} \quad L_2 \rightarrow s_x c, \quad \text{onde} \quad c = t_{I-1}(\sqrt{I} \cdot K_p, \gamma) / \sqrt{I}$$

Isso mostra que $L_1 \leq L_2$. Desse modo, esse método fornece limites de tolerância melhores para valores maiores de R . Para o outro caso extremo de $R \rightarrow 0$, novamente nenhum método é uniformemente melhor.

4.2.3 LIMITES DE TOLERÂNCIA QUANDO R É DESCONHECIDA

Nos casos onde R é desconhecida, deve-se usar uma estimativa de R para construir o



limite de tolerância. Para esses casos existem tanto estimadores pontuais de R como estimadores por intervalo de R.

Tendo $\hat{R}$, (4.3) passa a ser:

$$\hat{\delta} = \sqrt{I} \cdot K_p \cdot \sqrt{\frac{\hat{R} + 1}{\hat{R} + \bar{\lambda}}} \quad (4.5)$$

Antes de se sugerir uma estimativa apropriada de R devem ser considerados os seguintes pontos sobre o comportamento de k_s em relação a R.

Para valores fixos n_i 's, δ é uma função crescente de R se $\bar{\lambda} > 1$. Portanto para $\bar{\lambda} > 1$, k_s é uma função crescente de R. Para minimizar k_s quando $\bar{\lambda} > 1$, estimamos R como um limite inferior da estimativa por intervalo de R. Por outro lado, se $\bar{\lambda} < 1$, tomamos o limite superior.

Thomas e Hulthquist [23] fornecem as seguintes estimativas para R:

- estimativa pontual de R:

$$\hat{R} = \frac{(s_b^2 - s_e^2)/r}{s_e^2}, \text{ com } r \text{ definido em (2.24)} \quad (4.6)$$

- estimativa por intervalo de R:

$$l_i \leq \hat{R} \leq l_s \quad (4.7)$$

onde l_i é o limite inferior e l_s é o limite superior.

$$l_i = \bar{\lambda} \cdot \left[\frac{F^*}{F_{(I-1, n-I), (1-\alpha/2)}} - 1 \right] \quad (4.8)$$

$$l_s = \bar{\lambda} \cdot \left[\frac{F^*}{F_{(n-I, I-1), (\alpha/2)}} - 1 \right] \quad (4.9)$$

onde $\bar{\lambda}$ é definido em (2.20), $\alpha = 1 - \gamma$ e F^* é dado por:

$$F^* = \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot \frac{s_x^2}{s_e^2} \quad (4.10)$$

4.3 EXEMPLO: (Ostle e Mensing (1975),p.296, [15])

Um experimento foi conduzido para estudar o efeito das condições de armazenagem de madeira branca de pinheiro em relação à sua umidade. Cinco das condições de armazenagem foram estudadas com um número variado de blocos amostrais sendo armazenados sob cada uma das condições, e observou-se a porcentagem de umidade obtida. Os dados são fornecidos abaixo na tabela 4.2 .

Tabela 4.2

	Condições de Armazenagem				
	1	2	3	4	5
Observ. (%)	7.3	5.4	8.1	7.9	7.1
	8.3	7.4	6.4	9.5	
	7.6	7.1		10.0	
	8.4				
	8.3				

Nesse caso, uma vez que estamos tratando do conteúdo de umidade na madeira, temos o interesse em construir um limite de tolerância superior ao invés de um limite inferior. O limite de tolerância superior é dado por $\hat{\mu} + k_s.s_{\bar{x}}$, onde $\hat{\mu}$, k_s e $s_{\bar{x}}$ são definidos como anteriormente. Trabalharemos com $\beta = 0.90$, $\gamma = 0.95$

Primeiramente calculamos a ANOVA, utilizando o pacote computacional SAS (apêndice 1), onde os seguintes resultados foram obtidos:

Fonte de Variação	Graus de liberdade	SQ	QM	F
Entre grupos	4	10.66	2.67	3.34
Intra grupos	9	7.17	0.796	...
Total	13	17.83	...	...



Usando o estimador pontual de $\hat{R}$ (4.6) temos:

$$\hat{R} = \frac{(s_b^2 - s_e^2) / r}{s_e^2}$$

$$\hat{R} = \frac{2.67 - 0.8}{0.8} = 0.8854166$$

$$\text{E ainda, } \bar{\lambda} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{1}{n_i} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} \right) = 0.4733$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \bar{x}_i = \frac{1}{5} \cdot (7.98 + 6.63 + 7.25 + 9.133 + 7.1) = 7.6186$$

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^I \bar{x}_i^2 - \frac{1}{I} \left(\sum_{i=1}^I \bar{x}_i \right)^2}{I - 1}}$$

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{7.98^2 + 6.63^2 + 7.25^2 + 9.13^2 + 7.1^2 - 38.093^2 / 5}{5 - 1}}$$

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{0.95} = 0.97$$

Usando (4.5) temos:

$$\hat{\delta} = \sqrt{I} \cdot K_p \cdot \sqrt{\frac{\hat{R} + 1}{\hat{R} + \bar{\lambda}}} = 3.37566$$

$$\text{Então } k_s = t_4(3.37566, 0.95) / \sqrt{5} = 0.7094$$

Portanto o limite de tolerância superior para o conteúdo da umidade na madeira é dado por $\hat{\mu} + k_s \cdot s_{\bar{x}} = 7.62 + 0.7094(0.97) = 8.31$.

Nesse caso, $\bar{\lambda} = 0.4733 < 1$ e, como foi discutido anteriormente, na seção 4.2.2, o limite superior do estimador por intervalo de R pode ser usado na construção do limite de tolerância para o conteúdo da mistura. Usando Thomas e Hulthquist [23] o limite superior do estimador por intervalo, dado por (4.9), é:

$$l_s = \bar{\lambda} \cdot \left[\frac{F^*}{F_{(n-I, I-1), (\alpha/2)}} - 1 \right]$$

F^* , dado por (4.10), será:

$$F^* = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{s_{\bar{x}}^2}{s_e^2}$$

$$F^* = \frac{1}{0.4733} \cdot \frac{(0.97)^2}{0.796} = 2.487$$

$$F_{(n-I, I-1), \alpha/2} = F_{(9,4), (0.025)} = \frac{1}{4.72} = 0.21$$

Logo,

$$\hat{R} = 0.4733 \left[\frac{2.487}{0.21} - 1 \right] = 5.1116$$

Desse modo, $\hat{\delta} = 2.9977$ e $k_s = t_4(2.9977, 0.95) / \sqrt{5} = 0.5621$ e o limite de tolerância superior será $\hat{\mu} + k_s \cdot s_{\bar{x}} = 7.62 + 0.56(0.97) = 8.17$.

Capítulo 5

Um Método Exato de Construção de Limites de Tolerância em Modelos com um fator aleatório

5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este método, desenvolvido por Bhaumik e Kulkarni [2], apresenta várias vantagens em relação aos anteriores, especialmente pelo fato de não apresentar quaisquer aproximações, bem como o de reter o máximo possível de graus de liberdade para a distribuição t envolvida. Além disso, esse método se aplica tanto para delineamentos balanceados como para os não-balanceados.

Na seção 5.2 descrevemos esse método quando R é conhecida; e na seção 5.3, quando R é desconhecida, substitui-se R por um estimador não viesado aproximado e estuda-se o comportamento dos limites de tolerância através de simulação.

Na seção 5.4, apresentamos exemplos que ilustram esse método.



5.2. CONSTRUÇÃO DE LIMITES DE TOLERÂNCIA QUANDO R É CONHECIDA:

Consideremos novamente o modelo (2.1) e as equações (2.3) e (2.19).

Seja

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \quad (5.1)$$

a média amostral do i^o grupo.

$$\text{Temos ainda que } \text{var}(\bar{x}_i) = \frac{\sigma_e^2}{n_i} + \sigma_b^2 = \frac{\sigma_e^2}{n_i} + \sigma_e^2 \cdot \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} = \sigma_e^2 \cdot \left[\frac{1}{n_i} + R \right] \quad (5.2)$$

Desse modo :

$$\bar{x}_i \sim N(\mu, \sigma_e^2 / w_i),$$

$$\text{onde } w_i = \frac{n_i}{1 + n_i R} \quad (5.3)$$

Defini-se:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^I w_i \cdot \bar{x}_i / w \quad (5.4)$$

$$s_b^2 = \sum_{i=1}^I w_i \cdot (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \quad (5.5)$$

$$s_e^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad (5.6)$$

$$\text{e } w = \sum_{i=1}^I w_i \quad (5.7)$$

A seguir são apresentados dois resultados para o caso de R conhecida.

Resultado 5.

s_b^2 e s_e^2 , definidos na tabela 2.2, são independentes e distribuídas como $\sigma_e^2 \cdot \chi_{I-1}^2$ e $\sigma_e^2 \cdot \chi_{n-I}^2$, respectivamente, onde χ_a^2 é uma qui-quadrado central com a graus de liberdade. Consequentemente $s_b^2 + s_e^2$ é distribuída como $\sigma_e^2 \cdot \chi_{n-1}^2$ onde n é definido em (2.14).

Resultado 6.

As variáveis aleatórias $\bar{x}$ e $s^2 = (s_b^2 + s_e^2) / (n-1)$ são independentes e $\sqrt{w}(\bar{x} - \mu) / s \sim t_{n-1}$, onde t_{n-1} denota uma distribuição t central com $n-1$ graus de liberdade.

A seguir fornecemos um procedimento para construir um limite de tolerância inferior da forma $\bar{x} - K_s \cdot s \cdot \sqrt{1+R}$ para uma observação futura x . O fator K_s é obtido tal que no mínimo uma proporção β da população exceda esse limite com confiança γ , ou seja:

$$\begin{aligned}\gamma &= P \left\{ P \left[x > \bar{x} - K_s \cdot s \cdot \sqrt{1+R} \mid \bar{x}, s \right] \geq \beta \right\} = \\ \gamma &= P \left\{ P \left[\frac{x - \mu}{\sigma_x} > \frac{\bar{x} - \mu - K_s \cdot s \cdot \sqrt{1+R}}{\sigma_x} \mid \bar{x}, s \right] \geq \beta \right\} = \\ \gamma &= P \left\{ \frac{-\bar{x} + \mu + K_s \cdot s \cdot \sqrt{1+R}}{\sigma_x} \geq Z_{1-\beta} \right\} \\ \gamma &= P \left[0 \geq Z_{1-\beta} \cdot \sigma_x + \bar{x} - \mu - K_s \cdot s \cdot \sqrt{1+R} \right] \\ \gamma &= P \left[\frac{Z_{1-\beta} \cdot \sigma_{\bar{x}} \cdot \sqrt{(1+R) \cdot w}}{\sigma_{\bar{x}}} + \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \leq \frac{K_s \cdot s \cdot \sqrt{1+R}}{\sigma_{\bar{x}}} \right]\end{aligned} \quad (5.8)$$

como $\sigma_e^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 \cdot w$ e $\sigma_x = \sqrt{\sigma_e^2 \cdot (1+R)}$ então $\sigma_x = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 \cdot w \cdot (1+R)} = \sigma_{\bar{x}} \cdot \sqrt{(1+R) \cdot w}$

$$\text{desse modo } \gamma = P \left(Z + \delta \leq K_s \cdot s \cdot \sqrt{1+R} \cdot \frac{\sqrt{w}}{\sigma_e} \right)$$

$$\text{e, portanto } \gamma = P\left(\frac{Z + \delta}{s/\sigma_e} \leq K_s \cdot \sqrt{(1+R) \cdot w}\right)$$

onde $Z_{1-\beta}$ denota o $100(1-\beta)^\circ$ percentil da distribuição normal padronizada e

$$\delta = Z_{1-\beta} \sqrt{(1+R)w} \quad (5.9)$$

Usando a expressão acima, o fato de que $\sigma_x^2 = \sigma_e^2 \cdot (1+R)$ e $\sigma_x^2 = \sigma_e^2 / w$, a equação (5.8) se reduz a:

$$\gamma = P\left[\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} + \frac{Z_{1-\beta} \cdot \sqrt{(1+R) \cdot w}}{\sigma_{\bar{x}}} \leq \frac{K_s \cdot \sqrt{(1+R) \cdot w}}{\sigma_{\bar{x}}}\right] = P\left[\frac{Z + \delta}{s/\sigma_e} \leq K_s \sqrt{(1+R)w}\right] \quad (5.10)$$

onde Z é uma variável aleatória normal padrão. Do resultado 6 temos que a distribuição de $\frac{Z + \delta}{s/\sigma_e}$ é uma distribuição t não-central com $n-1$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade δ .

Portanto:

$$K_s = \frac{t_{n-1}(\delta, \gamma)}{\sqrt{(1+R)w}} \quad (5.11)$$

Assim o limite inferior para esse caso é dado por:

$$\bar{x} - t_{n-1}(\delta, \gamma) \cdot s / \sqrt{w} \quad (5.12)$$

Pois:

$$K_s \sqrt{(1+R)w} = t_{n-1}(\delta, \gamma)$$

$$K_s \sqrt{(1+R)} = t_{n-1}(\delta, \gamma) / \sqrt{w}, \text{ então:}$$

$$\bar{x} - K_s \cdot s \cdot \sqrt{(1+R)} = \bar{x} - s \cdot t_{n-1}(\delta, \gamma) / \sqrt{w} \quad (5.13)$$

Nota-se que os resultados, obtidos nesta seção 5.2, são exatos e fornecem intervalos de tolerância incondicionais. Como vimos anteriormente, Mee e Owen [13] sugeriram um método de reunir as somas de quadrados para obter intervalos de tolerância condicionais sobre uma estatística F . Aqui esse procedimento é feito incondicionalmente. Outra vantagem desse procedimento é que encontra-se um estimador não viesado de σ_x^2 , que é s^2 nesse caso, e usa-se s

para estimar σ_x . Por outro lado, Mee e Owen [13] encontraram um estimador não viesado de $\sigma_{\frac{2}{x}}$ e usaram a raiz quadrada deste para estimar σ_x .

5.3. ESTUDOS DE SIMULAÇÕES QUANDO R É DESCONHECIDA

Quando R é desconhecida é extremamente difícil obter qualquer resultado teórico para estudar o comportamento dos intervalos de tolerância. Geralmente substitui-se um estimador de R e obtem-se os limites de tolerância como se R fosse conhecida. Ao se fazer isso, é importante saber o quanto de precisão se perde em termos da cobertura de probabilidade e o nível de confiança. Por isso Bhaumik e Kulkarni [2] fizeram um estudo de simulação para verificar o efeito da estimativa de R sobre a probabilidade de cobertura e o nível de confiança. Primeiramente, estabelece-se uma estimativa aproximada não viesada de R dada por Thomas e Hultquist [23] ; então, usando-a como uma estimativa pontual de R, são apresentados estudos de simulação como descrito abaixo.

Sejam $\bar{\bar{x}}$, $\bar{x}$, s_x^2 e $\bar{\lambda}$, definidos em (2.15), (2.16), (2.18) e (2.20), respectivamente.

A seguir apresentamos alguns resultados que serão utilizados nesta seção.

Resultado 7 (Thomas e Hultquist [23])

A distribuição de $M = \frac{(I-1).s_x^2}{\sigma_b^2 + \bar{\lambda}.\sigma_e^2}$ é aproximadamente χ_{I-1}^2 e a distribuição de s_e^2 ,

definida no resultado 5, é $\sigma_e^2.\chi_{n-I}^2$. Temos também que M e s_e^2 são independentes, o que



implica em:

$$\frac{M/(I-1)}{s_e^2/\sigma_e^2(n-I)} \quad (5.14)$$

ter uma distribuição F aproximada com $(I-1, n-I)$ graus de liberdade.

Portanto verifica-se que um estimador não-viesado de R é dado por:

$$\hat{R} = \frac{s_x^2}{s_e^2} \cdot (n-I-2) - \bar{\lambda} \quad (5.15)$$

Pois:

$$E(\hat{R}) = E\left(\frac{s_x^2}{s_e^2} \cdot (n-I-2) - \bar{\lambda}\right)$$

$$E(\hat{R}) = E\left(\frac{s_x^2}{s_e^2} \cdot \frac{\sigma_e^2(n-I)}{(\sigma_b^2 + \bar{\lambda} \cdot \sigma_e^2)} \cdot \frac{(n-I-2)}{\sigma_e^2(n-I)} \cdot (\sigma_b^2 + \bar{\lambda} \cdot \sigma_e^2) - \bar{\lambda}\right)$$

$$E(\hat{R}) = \frac{(n-I-2)}{\sigma_e^2(n-I)} \cdot (\sigma_b^2 + \bar{\lambda} \cdot \sigma_e^2) \cdot E(F) - \bar{\lambda}$$

$$E(\hat{R}) = \frac{(n-I-2)}{\sigma_e^2(n-I)} \cdot (\sigma_b^2 + \bar{\lambda} \cdot \sigma_e^2) \cdot \frac{(n-I)}{(n-I-2)} - \bar{\lambda}$$

$$E(\hat{R}) = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} + \bar{\lambda} - \bar{\lambda} = R$$

Usando este estimador não-viesado aproximado no lugar de R, Bhaumik e Kulkarni [2] conduziram um estudo de 1000 simulações. Eles generalizaram números aleatórios de uma distribuição normal com uma média 3.0 e conduziram simulações para várias combinações de I, R, β , γ e tamanhos amostrais. Para todas essas combinações, eles trabalharam $\beta = 0.90$ e $\gamma = 0.95$. A escolha desses valores foi para ilustrar o efeito do estimador R visando uma cobertura (β) ao nível de confiança (γ) dos intervalos de tolerância. Ao final de cada simulação o limite de

tolerância foi encontrado, calculou-se a cobertura (β), através da suposição da distribuição normal das observações feitas nesse modelo, e foi verificada se esta cobertura era maior ou igual a β especificado. Uma vez que as 1000 simulações foram completadas, foram obtidos a média e o desvio padrão de todas as coberturas (denotadas por Avg- β e Std- β nas tabelas 5.1 e 5.2 do apêndice 2), e encontrou-se a proporção das vezes que as coberturas simuladas foram maiores ou iguais a β especificado (denotada por Sim- γ nas tabelas 5.1 e 5.2).

Bhaumik e Kulkarni [2] concluíram que quando o número de grupos é pequeno, desconsiderando o tamanho amostral, há poucas observações para estimarmos R. Com um único resultado pode-se não atingir a cobertura específica e o nível de confiança. Todavia, à medida que o número de grupos aumenta uma estimação mais próxima de R é possível e, desse modo, a perda no nível de confiança e na cobertura deve ser menor. Nota-se dos resultados de simulação (tabelas 5.1 e 5.2) que este parece ser o caso. Pode-se também perceber que à medida que o número de grupos aumenta, o tamanho amostral total também aumenta, resultando em uma melhor estimação dos parâmetros envolvidos.

A cobertura simulada (Avg- β) é no mínimo β para todos os casos estudados. Para um pequeno número de grupos, o desvio padrão das coberturas simuladas (Std- β) é grande, mas diminui rapidamente à medida que o número de grupos aumenta. Desse modo, a probabilidade de cobertura não é grandemente afetada pela estimação de R, se existe um moderador para um grande número de grupos. Por outro lado, o nível de confiança atingido (por exemplo Sim- γ), depois de se estimar R, é em média 20% mais baixo do que o nível específico, se o número de grupos é pequeno.



5.4. EXEMPLOS

5.4.1 EXEMPLO 1 (caso balanceado)

Consideremos o exemplo fornecido por Wang e Iyer (1994) [25], onde duas réplicas foram tomadas de cada uma das quatro garrafas de carvão para conter enxofre, selecionadas aleatoriamente. Os dados estão na tabela abaixo:

Garrafa ID	Réplica	Enxofre (peso %)
1227	1	4.70
1227	2	4.70
0410	1	4.56
0410	2	4.68
0241	1	4.66
0241	2	4.55
0809	1	4.61
0809	2	4.69

Desse modo, o modelo com um fator aleatório considerado será:

$$x_{ij} = \mu + b_i + \xi_{ij} \text{ com } j = 1, 2 \text{ e } i = 1, 2, 3, 4.$$

onde x_{ij} é a j^a medida da i^a garrafa. Neste exemplo tem-se quatro grupos e duas réplicas em cada grupo. O limite de tolerância inferior para os conteúdos de enxofre com $\beta = 0.90$ e $\gamma = 0.95$, após alguns cálculos, é dado por 4.47.

Neste exemplo R não é conhecida, e portanto o efeito de se estimar R na cobertura e o nível de confiança devem ser levados em consideração antes de se interpretar esse limite. As simulações de Bhaumik e Kulkarni [2] da seção anterior indicam que o nível de confiança poderia ser apenas em torno de 0.80 e a cobertura no mínimo 0.90. Dessa maneira, estamos mais ou



menos 80% confiantes de que o conteúdo de enxofre, de no mínimo 90% das garrafas de carvão, seria mais do que esse valor obtido (4.47).

5.4.2 EXEMPLO 2 (caso não-balanceado)

Aplicaremos também a teoria deste capítulo ao mesmo exemplo que foi utilizado no capítulo 4, com a finalidade de posteriormente compararmos os resultados.

Os dados são fornecidos na seção 4.3, e os resultados, obtidos através do SAS, encontram-se no apêndice 1.

Primeiramente estimamos R , usando a equação (5.15).

$$\hat{R} = \frac{s_x^2}{s_e^2} \cdot (n - I - 2) - \bar{\lambda}$$

$$\hat{R} = \frac{0.95}{0.796} \cdot (14 - 4 - 2) - 0.4733 = 9.07443896$$

Usando (5.3) e (5.7) temos:

$$w = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{n_i} + \hat{R} \right) = 0.524119305$$

E da equação (5.9):

$$\delta = Z_{1-\beta} \sqrt{(1 + \hat{R})w} = 1.285(2.297870267) = 2.952763293$$

Determinamos s usando o resultado 6:

$$s = \sqrt{\frac{2.67 + 0.796}{13}} = 0.5163481235$$

Utilizando as tabelas de Pearson e Hartley [18], do apêndice 2, calculamos a t não-central:

$$t_{13}^{(2.952763293, 0.95)} = ?$$



Para isso, devemos calcular u e ℓ .

$$u = \frac{-\Delta}{\sqrt{2(n-1)}} \left(1 + \frac{\Delta^2}{2(n-1)} \right)^{-1/2} = -0.5011251636$$

Com esse valor, entramos na tabela de Pearson e Hartley [18], do apêndice 2, e, interpolando, determinamos $\ell = 1.621717642$.

Portanto:

$$t_{13}^{(2.952763293, 0.95)} = t_0' = \frac{-\Delta + \ell[1 + \Delta^2/2(n-1) + \ell^2/2(n-1)]^{1/2}}{1 - \ell^2/2(n-1)} = 1.2808677182$$

E, finalmente, teremos:

$$l_s = 7.6186 + s.t_{13}/\sqrt{w} = 8.62$$

Capítulo 6

Conclusão

Apresentamos neste trabalho métodos de construção de limites de tolerância unilaterais, para modelos balanceados e não-balanceados, com um fator aleatório (2.1). Vimos que esses limites seguem a forma padrão $\hat{\mu} \pm k.s$, e o problema básico é determinar os valores de k , de tal modo que a probabilidade seja γ de que, no mínimo uma dada proporção β da população amostrada, esteja abaixo (limite superior) ou acima (limite inferior) desse limite.

Vários autores estudaram essa questão, porém pareceu-nos mais conveniente nos ater aos métodos mais comumente discutidos e utilizados que são: para o caso balanceado, Lemon [11] e Mee-Owen [13]; e, para o caso não-balanceado, Bhaumik e Kulkarni [1]. Estudamos também um método mais geral, pois aplica-se aos dois tipos de delineamentos, que é o de Bhaumik e Kulkarni [2]. E, posteriormente, fizemos uma comparação entre eles.

Primeiramente, para o modelo balanceado foram descritos o Método de Lemon [11] e o Método de Mee-Owen [13]. Lemon [11] utilizou-se de uma população, consistindo de muitos grupos e baseou-se no quadrado médio entre esses grupos. Ele trabalhou com uma distribuição t não-central e com s_b^2/s_e^2 (3.11) para estimar σ_b^2/σ_e^2 , e construiu tabelas para o fator k' (tabelas 3.1), em função de I, J, γ, β e s_b^2/s_e^2 . Diferentemente, Mee e Owen [13] utilizaram-se de uma combinação linear dos quadrados médios (3.18) para deduzir o limite de tolerância em questão. Mee e Owen [13] primeiramente trabalharam com R desconhecida, usando uma aproximação



fornecida por Satterthwaite [21], obtendo fatores k (denominados por k_S), e construíram tabelas para esses valores (tabelas 3.2), em função de I , J , γ , β e R . E, posteriormente, com R conhecida, deduziram e construíram fatores k (denominados por k_R). Para compararmos esses dois métodos citados acima foi utilizado um exemplo de um delineamento balanceado (seção 3.3). Usando o Método de Lemon [11] obtivemos o intervalo $[156.3, \infty]$ e, utilizando o de Mee-Owen [13], foi determinado o intervalo $[160.0, \infty]$; ou seja, para este exemplo, observa-se que o procedimento de Lemon [11] é mais restrito do que o necessário. Ainda nesse exemplo, sendo R conhecida, determinou-se o limite através da seção 3.2.3, e obteve-se $[169.0, \infty]$, o que nos leva a crer que, se conhecemos R , temos maiores condições de melhorarmos o limite de tolerância.

No capítulo 4 estudamos o Método de Bhaumik e Kulkarni [1], aplicado a delineamentos não-balanceados, determinado em função dos n_i 's. As técnicas básicas de construção são praticamente as mesmas das Mee e Owen [13]. A diferença maior entre esse método e o de Mee e Owen [13] é que a aproximação deduzida por Satterthwaite não pode ser usada para delineamentos não-balanceados; logo, Bhaumik e Kulkarni [1] usaram uma aproximação deduzida por Thomas e Hultquist [23]. Bhaumik e Kulkarni [1] trabalharam também com R conhecida e; posteriormente, R desconhecida. Nessa última situação pode-se estimar R por ponto ou por intervalo. Aplicando esse método ao exemplo 4.3, obtivemos, usando o estimador pontual de R , o limite superior igual a 8.31 e, utilizando o estimador por intervalo de R , encontramos o limite superior igual a 8.17. Logo, nesse caso, verifica-se que é mais aconselhável utilizarmos a estimativa pontual de R .

Foi descrito, no capítulo 5, um método exato, estabelecido recentemente (1996) por Bhaumik e Kulkarni [2], que propicia várias vantagens em relação aos métodos descritos nos capítulos anteriores. Uma delas é que este método pode ser aplicado tanto aos delineamentos balanceados, quanto aos não-balanceados. Para R conhecida, os autores deduziram um método direto. Eles não usaram a aproximação de Satterthwaite [21], nem a de Thomas e Hultquist [23], uma vez que o método por eles desenvolvido é exato, além de reter o máximo de graus de liberdade possível para a distribuição t envolvida. Para R desconhecida, Bhaumik e Kulkarni [2] deduziram um estimador não viesado aproximado de R (5.14), e estudaram o comportamento dos limites de tolerância através de simulações. Conclui-se que quando tal estimador de R é usado, o método mostra o nível de confiança atingido, com menor valor que o nível efetivo. Entretanto, à medida que o número de grupos aumenta estima-se R mais facilmente, e dessa forma o nível



de confiança atingido fica mais próximo do nível especificado. Foi trabalhado também nesse capítulo o exemplo 5.4.2, que utiliza os mesmos dados do exemplo 4.3, e o limite superior encontrado foi 8.62. Comparando esse valor com os valores obtidos na seção 4.3, que foram 8.31 (com $\hat{R}$ pontual) e 8.17 (com $\hat{R}$ por intervalo), concluímos que, em relação ao exemplo em questão, esse método, apresentado no capítulo 5, mostrou-se melhor do que o método do capítulo 4, uma vez que o limite superior foi maior que os anteriores.

É salutar salientar que, em relação à resolução dos exemplos aqui propostos, para o cálculo das variâncias e outros, utilizamos o pacote computacional SAS, o qual oferece resultados confiáveis e facilidade de programação.

Como o conhecimento, graças à Deus, se prolifera a cada milionésima fração de segundos, ficam aqui outros pontos (por exemplo, o estudo de métodos para construção de limites de tolerância em outros modelos como os de dois fatores, cruzados, mistos, hierárquicos, ...) para se aprofundar essa linha de pesquisa, outros desafios, que fugiram ao nosso escopo, os quais poderão ser explorados posteriormente por alguém interessado e preocupado com o saber enquanto ciência em promoção do ser humano.



Apêndice 1:

Resultados do SAS para os exemplos 4.3 e 5.4

PROGRAM EDITOR

```
DATA EX1SAS;  
INPUT TRAT Y;  
CARDS;  
1 7.3  
1 8.3  
1 7.6  
1 8.4  
1 8.3  
2 5.4  
2 7.4  
2 7.1  
3 8.1  
3 6.4  
4 7.9  
4 9.5  
4 10.0
```

```

5 7.1
;
TITLE "RESULTADOS DO SAS - EXEMPLO1 - CAP.4";
PROC PRINT
    DATA = EX1SAS;
PROC GLM;
    CLASS TRAT;
    MODEL Y = TRAT;
RUN;

```

OUTPUT

RESULTADOS DO SAS - EXEMPLO1 - CAP.4
 14:51 Tuesday, January 20, 1998 13

OBS	TRAT	Y
1	1	7.3
2	1	8.3
3	1	7.6
4	1	8.4
5	1	8.3
6	2	5.4
7	2	7.4
8	2	7.1
9	3	8.1
10	3	6.4
11	4	7.9
12	4	9.5
13	4	10.0
14	5	7.1



General Linear Models Procedure

Class Level Information

Class	Levels	Values
TRAT	5	1 2 3 4 5

Number of observations in data set = 14

Dependent Variable: Y

Sum of Squares	Source Mean Square	F Value	DF	Pr>F
10.66223810	Model 2.66555952	3.35	4	0.0611
7.16633333	Error 0.79625926		9	
17.82857143	Corrected Total		13	

C.V.	Root MSE	R-Square	Y Mean
11.48223	0.89233360	0.598042	7.77142857

Type I SS	Mean Square	Source	F Value	DF	Pr > F
10.66223810	2.66555952	TRAT	3.35	4	0.0611

Type III SS	Mean Square	Source	F Value	DF	Pr > F
10.66223810	2.66555952	TRAT	3.35	4	0.0611



LOG

NOTE: The PROCEDURE GLM used 1 minute 0.84 seconds.

```
104 DATA EX1SAS;  
105 INPUT TRAT Y;  
106 CARDS;
```

NOTE: The data set WORK.EX1SAS has 14 observations and 2 variables.

NOTE: The DATA statement used 0.11 seconds.

```
121 ;  
122 TITLE "RESULTADOS DO SAS - EXEMPLO1 - CAP.4";  
123 PROC PRINT  
124     DATA = EX1SAS;
```

NOTE: The PROCEDURE PRINT used 0.05 seconds.

```
125 PROC GLM;  
126     CLASS TRAT;  
127     MODEL Y = TRAT;  
128 RUN;
```



Apêndice 2:

Tabelas

Tabela 3.1
Fatores de Tolerância Unilaterais k' para Efeitos Aleatórios com um fator
Parte a) $\gamma = 0.90$, $\beta = 0.95$

J	I												
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	17	37	145	∞
$s_b^2 / s_e^2 = 0.2$													
1	13.090	5.311	3.957	3.400	3.092	2.894	2.754	2.650	2.568	2.272	2.028	1.821	1.645
2	13.100	5.210	3.864	3.316	3.016	2.823	2.688	2.588	2.509	2.227	1.997	1.806	1.645
4	13.100	5.160	3.816	3.273	2.975	2.786	2.653	2.555	2.478	2.203	1.981	1.798	1.645
8	13.100	5.134	3.792	3.250	2.955	2.766	2.635	2.537	2.462	2.191	1.972	1.794	1.645
16	13.100	5.121	3.779	3.239	2.944	2.757	2.626	2.529	2.453	2.184	1.968	1.791	1.645
∞	13.100	5.108	3.767	3.227	2.933	2.747	2.616	2.520	2.445	2.178	1.964	1.789	1.645
$s_b^2 / s_e^2 = 1.0$													
1	13.090	5.311	3.957	3.400	3.092	2.894	2.754	2.650	2.568	2.272	2.028	1.821	1.645
2	13.100	5.251	3.902	3.350	3.047	2.852	2.715	2.613	2.534	2.246	2.010	1.812	1.645
4	13.100	5.220	3.874	3.325	3.024	2.831	2.695	2.594	2.516	2.232	2.001	1.808	1.645
8	13.100	5.205	3.859	3.312	3.012	2.820	2.685	2.585	2.506	2.225	1.996	1.805	1.645
16	13.100	5.198	3.852	3.306	3.006	2.814	2.680	2.580	2.502	2.222	1.993	1.804	1.645
∞	13.100	5.190	3.845	3.299	3.000	2.808	2.674	2.575	2.497	2.218	1.991	1.803	1.645
$s_b^2 / s_e^2 = 5.0$													
1	13.090	5.311	3.957	3.400	3.092	2.894	2.754	2.650	2.568	2.272	2.028	1.821	1.645
2	13.100	5.291	3.938	3.384	3.077	2.880	2.742	2.638	2.557	2.264	2.022	1.818	1.645
4	13.100	5.281	3.929	3.375	3.070	2.873	2.735	2.632	2.551	2.259	2.019	1.817	1.645
8	13.100	5.276	3.925	3.371	3.066	2.870	2.732	2.629	2.548	2.257	2.017	1.816	1.645
16	13.100	5.274	3.922	3.369	3.064	2.868	2.730	2.627	2.547	2.256	2.017	1.816	1.645
∞	13.100	5.271	3.920	3.367	3.062	2.866	2.729	2.626	2.545	2.255	2.016	1.815	1.645
$s_b^2 / s_e^2 = 10.0$													
1	13.090	5.311	3.957	3.400	3.092	2.894	2.754	2.650	2.568	2.272	2.028	1.821	1.645
2	13.100	5.301	3.947	3.391	3.084	2.886	2.747	2.643	2.562	2.268	2.025	1.820	1.645
4	13.100	5.295	3.942	3.387	3.080	2.883	2.744	2.640	2.559	2.265	2.023	1.819	1.645
8	13.100	5.292	3.939	3.384	3.078	2.881	2.742	2.638	2.558	2.264	2.022	1.819	1.645
16	13.100	5.291	3.938	3.383	3.077	2.880	2.741	2.638	2.557	2.264	2.022	1.818	1.645
∞	13.100	5.290	3.937	3.382	3.076	2.879	2.740	2.637	2.556	2.263	2.021	1.818	1.645



Tabela 3.1
Fatores de Tolerância Unilaterais k' para Efeitos Aleatórios com um fator
Parte b) $\gamma = 0.95$, $\beta = 0.90$

J	I												
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	17	37	145	∞
$s_b^2 / s_e^2 = 0.2$													
1	20.582	6.155	4.162	3.407	3.006	2.755	2.582	2.454	2.355	2.002	1.717	1.481	1.282
2	20.500	5.953	3.998	3.266	2.881	2.642	2.477	2.356	2.262	1.933	1.672	1.459	1.282
4	20.400	5.849	3.911	3.190	2.813	2.579	2.419	2.302	2.212	1.895	1.646	1.446	1.282
8	20.400	5.797	3.865	3.150	2.777	2.547	2.389	2.273	2.185	1.875	1.633	1.439	1.282
16	20.400	5.770	3.842	3.130	2.759	2.530	2.373	2.259	2.171	1.864	1.626	1.436	1.282
∞	20.400	5.744	3.819	3.109	2.740	2.512	2.357	2.243	2.156	1.853	1.618	1.432	1.282
$s_b^2 / s_e^2 = 1.0$													
1	20.582	6.155	4.162	3.407	3.006	2.755	2.582	2.454	2.355	2.002	1.717	1.481	1.282
2	20.500	6.035	4.065	3.324	2.933	2.689	2.520	2.396	2.301	1.962	1.691	1.468	1.282
4	20.400	5.974	4.015	3.281	2.894	2.654	2.488	2.366	2.272	1.940	1.676	1.461	1.282
8	20.400	5.943	3.989	3.259	2.875	2.636	2.471	2.351	2.258	1.929	1.669	1.458	1.282
16	20.400	5.927	3.977	3.247	2.865	2.627	2.463	2.343	2.250	1.924	1.665	1.461	1.282
∞	20.400	5.912	3.964	3.236	2.855	2.617	2.454	2.335	2.243	1.918	1.662	1.468	1.282
$s_b^2 / s_e^2 = 5.0$													
1	20.582	6.155	4.162	3.407	3.006	2.755	2.582	2.454	2.355	2.002	1.717	1.481	1.282
2	20.500	6.116	4.130	3.380	2.982	2.734	2.562	2.435	2.337	1.989	1.709	1.477	1.282
4	20.400	6.096	4.114	3.366	2.970	2.723	2.552	2.426	2.328	1.982	1.704	1.475	1.282
8	20.400	6.086	4.106	3.359	2.964	2.717	2.547	2.421	2.324	1.979	1.702	1.474	1.282
16	20.400	6.080	4.102	3.356	2.961	2.714	2.544	2.418	2.321	1.977	1.701	1.473	1.282
∞	20.400	6.075	4.098	3.352	2.958	2.712	2.541	2.416	2.319	1.975	1.700	1.473	1.282
$s_b^2 / s_e^2 = 10.0$													
1	20.582	6.155	4.162	3.407	3.006	2.755	2.582	2.454	2.355	2.002	1.717	1.481	1.282
2	20.500	6.134	4.145	3.392	2.993	2.744	2.571	2.444	2.345	1.995	1.713	1.479	1.282
4	20.400	6.123	4.136	3.385	2.987	2.738	2.566	2.439	2.340	1.991	1.710	1.478	1.282
8	20.400	6.117	4.132	3.381	2.983	2.735	2.563	2.436	2.338	1.989	1.709	1.477	1.282
16	20.400	6.115	4.129	3.379	2.982	2.733	2.561	2.435	2.337	1.988	1.708	1.477	1.282
∞	20.400	6.112	4.127	3.377	2.980	2.732	2.560	2.433	2.335	1.987	1.708	1.477	1.282



Tabela 3.1
Fatores de Tolerância Unilaterais k' para Efeitos Aleatórios com um fator
Parte c) $\gamma = 0.95$, $\beta = 0.95$

J	I												
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	17	37	145	∞
$s_b^2 / s_e^2 = 0.2$													
1	26.259	7.656	5.144	4.203	3.708	3.399	3.187	3.031	2.911	2.486	2.149	1.874	1.645
2	26.200	7.494	5.008	4.084	3.601	3.302	3.097	2.947	2.832	2.427	2.109	1.854	1.645
4	26.200	7.412	4.936	4.021	3.545	3.251	3.049	2.902	2.789	2.395	2.088	1.844	1.645
8	26.200	7.371	4.900	3.989	3.516	3.224	3.024	2.879	2.767	2.378	2.077	1.838	1.645
16	26.200	7.350	4.882	3.973	3.501	3.210	3.012	2.867	2.756	2.369	2.071	1.835	1.645
∞	26.200	7.329	4.863	3.956	3.486	3.196	2.999	2.854	2.744	2.361	2.065	1.832	1.645
$s_b^2 / s_e^2 = 1.0$													
1	26.259	7.656	5.144	4.203	3.708	3.399	3.187	3.031	2.911	2.486	2.149	1.874	1.645
2	26.200	7.559	5.063	4.132	3.645	3.342	3.134	2.982	2.864	2.451	2.126	1.862	1.645
4	26.200	7.510	5.022	4.096	3.612	3.312	3.107	2.956	2.840	2.433	2.114	1.856	1.645
8	26.200	7.486	5.001	4.078	3.596	3.297	3.093	2.943	2.827	2.424	2.107	1.853	1.645
16	26.200	7.474	4.990	4.069	3.588	3.290	3.086	2.936	2.821	2.419	2.104	1.852	1.645
∞	26.200	7.461	4.979	4.059	3.579	3.282	3.078	2.929	2.815	2.414	2.101	1.850	1.645
$s_b^2 / s_e^2 = 5.0$													
1	26.259	7.656	5.144	4.203	3.708	3.399	3.187	3.031	2.911	2.486	2.149	1.874	1.645
2	26.200	7.624	5.117	4.180	3.687	3.381	3.170	3.015	2.896	2.475	2.141	1.870	1.645
4	26.200	7.608	5.104	4.168	3.677	3.371	3.161	3.007	2.888	2.469	2.138	1.868	1.645
8	26.200	7.600	5.097	4.162	3.671	3.366	3.157	3.003	2.884	2.466	2.136	1.867	1.645
16	26.200	7.596	5.094	4.159	3.669	3.364	3.154	3.001	2.882	2.465	2.135	1.867	1.645
∞	26.200	7.591	5.090	4.156	3.666	3.362	3.152	2.998	2.880	2.463	2.134	1.866	1.645
$s_b^2 / s_e^2 = 10.0$													
1	26.259	7.656	5.144	4.203	3.708	3.399	3.187	3.031	2.911	2.486	2.149	1.874	1.645
2	26.200	7.638	5.129	4.190	3.696	3.389	3.178	3.022	2.903	2.480	2.145	1.872	1.645
4	26.200	7.630	5.122	4.184	3.691	3.384	3.173	3.018	2.898	2.477	2.143	1.871	1.645
8	26.200	7.625	5.118	4.181	3.688	3.382	3.171	3.016	2.896	2.475	2.142	1.870	1.645
16	26.200	7.623	5.117	4.179	3.687	3.380	3.170	3.015	2.895	2.475	2.141	1.870	1.645
∞	26.200	7.621	5.115	4.177	3.685	3.379	3.168	3.014	2.894	2.474	2.141	1.870	1.645



Tabela 3.1
Fatores de Tolerância Unilaterais k' para Efeitos Aleatórios com um fator
Parte d) $\gamma = 0.95$, $\beta = 0.99$

	I												
J	2	3	4	5	6	7	8	9	10	17	37	145	∞
$s_b^2 / s_e^2 = 0.2$													
1	37.095	10.553	7.042	5.741	5.062	4.642	4.354	4.143	3.981	3.415	2.972	2.617	2.326
2	37.100	10.436	6.941	5.651	4.981	4.567	4.284	4.078	3.920	3.368	2.941	2.601	2.326
4	37.100	10.372	6.889	5.605	4.939	4.528	4.248	4.044	3.888	3.344	2.924	2.593	2.326
8	37.100	10.348	6.862	5.581	4.917	4.509	4.230	4.027	3.871	3.331	2.916	2.589	2.326
16	37.100	10.334	6.849	5.569	4.906	4.497	4.221	4.018	3.863	3.325	2.912	2.587	2.326
∞	37.100	10.319	6.836	5.558	4.896	4.487	4.211	4.009	3.855	3.319	2.908	2.585	2.326
$s_b^2 / s_e^2 = 1.0$													
1	37.095	10.553	7.042	5.741	5.062	4.642	4.354	4.143	3.981	3.415	2.972	2.617	2.326
2	37.100	10.483	6.982	5.688	5.014	4.597	4.313	4.104	3.945	3.387	2.953	2.608	2.326
4	37.100	10.448	6.951	5.660	4.989	4.575	4.292	4.085	3.926	3.373	2.944	2.603	2.326
8	37.100	10.431	6.935	5.647	4.977	4.563	4.281	4.075	3.916	3.366	2.939	2.601	2.326
16	37.100	10.422	6.928	5.640	4.970	4.557	4.276	4.070	3.912	3.362	2.937	2.599	2.326
∞	37.100	10.413	6.920	5.633	4.964	4.552	4.270	4.064	3.907	3.358	2.934	2.598	2.326
$s_b^2 / s_e^2 = 5.0$													
1	37.095	10.553	7.042	5.741	5.062	4.642	4.354	4.143	3.981	3.415	2.972	2.617	2.326
2	37.100	10.529	7.022	5.723	5.046	4.627	4.340	4.130	3.969	3.406	2.966	2.614	2.326
4	37.100	10.518	7.012	5.714	5.038	4.620	4.333	4.124	3.963	3.401	2.962	2.612	2.326
8	37.100	10.512	7.007	5.710	5.034	4.616	4.330	4.121	3.960	3.399	2.961	2.611	2.326
16	37.100	10.509	7.005	5.708	5.032	4.614	4.328	4.119	3.958	3.397	2.960	2.611	2.326
∞	37.100	10.506	7.002	5.706	5.030	4.612	4.327	4.117	3.957	3.396	2.959	2.611	2.326
$s_b^2 / s_e^2 = 10.0$													
1	37.095	10.553	7.042	5.741	5.062	4.642	4.354	4.143	3.981	3.415	2.972	2.617	2.326
2	37.100	10.540	7.031	5.731	5.053	4.634	4.346	4.136	3.975	3.410	2.968	2.615	2.326
4	37.100	10.534	7.026	5.727	5.049	4.630	4.343	4.133	3.971	3.408	2.967	2.614	2.326
8	37.100	10.531	7.023	5.724	5.047	4.628	4.341	4.131	3.970	3.407	2.966	2.614	2.326
16	37.100	10.529	7.022	5.723	5.046	4.627	4.340	4.130	3.969	3.406	2.965	2.614	2.326
∞	37.100	10.527	7.020	5.722	5.045	4.626	4.339	4.129	3.968	3.405	2.965	2.613	2.326



Tabela 3.2
Fatores k_s para Limites de Tolerância Unilaterais

Parte a) $\gamma = 0.95$ e $\beta = 0.90$

I									
J	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R = 0.2									
2	5.18	3.24	2.70	2.44	2.27	2.16	2.08	2.01	1.96
4	3.08	2.42	2.17	2.04	1.95	1.88	1.83	1.79	1.76
8	2.43	2.08	1.93	1.84	1.78	1.73	1.70	1.67	1.65
16	2.15	1.91	1.80	1.74	1.69	1.65	1.63	1.60	1.55
∞	1.89	1.74	1.67	1.62	1.59	1.57	1.55	1.53	1.52
R = 1									
2	7.68	3.89	3.06	2.69	2.47	2.33	2.22	2.14	2.08
4	5.06	3.15	2.64	2.38	2.23	2.12	2.05	1.99	1.94
8	4.18	2.84	2.44	2.24	2.11	2.03	1.96	1.91	1.87
16	3.81	2.70	2.35	2.17	2.06	1.98	1.92	1.87	1.83
∞	3.48	2.56	2.26	2.10	2.00	1.93	1.87	1.83	1.80
R = 5									
2	14.00	5.14	3.70	3.11	2.79	2.58	2.44	2.33	2.25
4	11.66	4.72	3.48	2.97	2.69	2.50	2.37	2.27	2.19
8	10.66	4.52	3.38	2.91	2.63	2.46	2.34	2.24	2.17
16	10.20	4.42	3.34	2.87	2.61	2.44	2.32	2.22	2.15
∞	9.77	4.33	3.29	2.84	2.59	2.42	2.30	2.21	2.14
R = 10									
2	16.56	5.56	3.89	3.24	2.88	2.66	2.50	2.39	2.29
4	14.90	5.29	3.76	3.15	2.82	2.61	2.46	2.35	2.26
8	14.14	5.16	3.70	3.11	2.79	2.59	2.44	2.33	2.25
16	13.78	5.10	3.67	3.10	2.78	2.58	2.43	2.32	2.24
∞	13.42	5.04	3.64	3.08	2.76	2.56	2.42	2.31	2.23
R = ∞									
Todo J	20.58	6.16	4.16	3.41	3.01	2.76	2.58	2.45	2.36



Tabela 3.2

Fatores k_s para Limites de Tolerância Unilaterais

Parte b) $\gamma = 0.95$ e $\beta = 0.99$

I									
J	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R = 0.2									
2	8.83	5.44	4.54	4.10	3.83	3.65	3.52	3.42	3.34
4	5.16	4.04	3.65	3.43	3.29	3.19	3.12	3.06	3.01
8	4.03	3.47	3.23	3.10	3.01	2.95	2.90	2.86	2.83
16	3.56	3.18	3.02	2.93	2.86	2.81	2.78	2.75	2.72
∞	3.11	2.89	2.79	2.73	2.69	2.66	2.63	2.61	2.60
R = 1									
2	13.28	6.54	5.12	4.50	4.14	3.90	3.74	3.61	3.51
4	8.58	5.24	4.38	3.97	3.73	3.56	3.44	3.35	3.27
8	7.02	4.70	4.05	3.73	3.53	3.39	3.29	3.22	3.15
16	6.37	4.45	3.89	3.61	3.43	3.31	3.22	3.15	3.09
∞	5.79	4.22	3.73	3.49	3.33	3.22	3.14	3.08	3.03
R = 5									
2	24.83	8.75	6.22	5.22	4.68	4.34	4.10	3.93	3.79
4	20.51	7.99	5.85	4.98	4.50	4.20	3.98	3.82	3.70
8	18.68	7.64	5.67	4.86	4.42	4.13	3.92	3.77	3.65
16	17.84	7.47	5.59	4.81	4.37	4.09	3.89	3.75	3.63
∞	17.05	7.30	5.50	4.75	4.33	4.06	3.86	3.72	3.61
R = 10									
2	29.58	9.49	6.57	5.44	4.84	4.47	4.21	4.02	3.87
4	26.49	9.01	6.34	5.30	4.74	4.39	4.14	3.96	3.82
8	25.08	8.78	6.23	5.23	4.69	4.35	4.11	3.93	3.79
16	24.41	8.67	6.18	5.19	4.66	4.33	4.09	3.92	3.78
∞	23.60	8.56	6.13	5.13	4.64	4.30	4.07	3.90	3.77
R = ∞									
Todo J	37.09	10.55	7.04	5.74	5.06	4.64	4.35	4.14	3.98



Tabela 3.3
Fatores k_R para Limites de Tolerância Unilaterais
Parte a) $\gamma = 0.95$ e $\beta = 0.90$

I									
J	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R = 0.2									
2	4.22	3.05	2.62	2.39	2.24	2.14	2.06	2.00	1.95
4	2.69	2.30	2.11	1.99	1.91	1.86	1.81	1.77	1.74
8	2.20	1.98	1.87	1.80	1.75	1.71	1.68	1.65	1.63
16	1.98	1.83	1.75	1.70	1.66	1.63	1.60	1.58	1.57
∞	1.76	1.67	1.62	1.58	1.56	1.54	1.52	1.51	1.49
R = 1									
2	4.34	3.14	2.69	2.45	2.30	2.19	2.11	2.04	1.99
4	2.89	2.45	2.24	2.11	2.02	1.95	1.90	1.86	1.82
8	2.45	2.19	2.04	1.95	1.89	1.84	1.80	1.76	1.74
16	2.27	2.07	1.95	1.88	1.82	1.78	1.75	1.72	1.69
∞	2.10	1.95	1.86	1.80	1.76	1.72	1.69	1.67	1.65
R = 5									
2	4.45	3.22	2.76	2.51	2.35	2.24	2.15	2.09	2.03
4	3.06	2.58	2.35	2.21	2.11	2.03	1.98	1.93	1.89
8	2.65	2.35	2.18	2.07	2.00	1.94	1.89	1.85	1.82
16	2.49	2.24	2.10	2.01	1.95	1.89	1.85	1.82	1.79
∞	2.34	2.15	2.03	1.95	1.89	1.85	1.81	1.78	1.76
R = 10									
2	4.48	3.24	2.78	2.53	2.36	2.25	2.16	2.10	2.04
4	3.09	2.61	2.37	2.23	2.13	2.05	1.99	1.94	1.91
8	2.69	2.38	2.21	2.10	2.02	1.96	1.91	1.87	1.84
16	2.53	2.28	2.14	2.04	1.97	1.92	1.87	1.84	1.81
∞	2.39	2.19	2.07	1.98	1.92	1.87	1.84	1.80	1.78
R = ∞									



I									
J	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R = ∞									
2	4.51	3.26	2.80	2.54	2.38	2.26	2.18	2.11	2.05
4	3.13	2.64	2.40	2.25	2.15	2.07	2.01	1.96	1.92
8	2.74	2.42	2.24	2.13	2.05	1.98	1.94	1.89	1.86
16	2.58	2.32	2.17	2.07	2.00	1.94	1.90	1.86	1.83
∞	2.44	2.23	2.10	2.02	1.95	1.90	1.86	1.83	1.80



Tabela 3.3
Fatores k_R para Limites de Tolerância Unilaterais
Parte b) $\gamma = 0.95$ e $\beta = 0.99$

I									
J	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R = 0.2									
2	7.08	5.09	4.38	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31
4	4.43	3.81	3.52	3.34	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97
8	3.59	3.28	3.12	3.02	2.94	2.89	2.85	2.81	2.79
16	3.20	3.01	2.91	2.84	2.79	2.75	2.72	2.70	2.68
∞	2.80	2.71	2.66	2.63	2.60	2.58	2.56	2.55	2.54
R = 1									
2	7.16	5.16	4.43	4.05	3.81	3.64	3.52	3.42	3.34
4	4.58	3.93	3.62	3.43	3.31	3.21	3.14	3.08	3.04
8	3.79	3.45	3.26	3.14	3.06	3.00	2.95	2.91	2.87
16	3.46	3.22	3.09	3.00	2.93	2.89	2.85	2.81	2.79
∞	3.15	3.00	2.91	2.85	2.80	2.77	2.74	2.71	2.69
R = 5									
2	7.24	5.21	4.48	4.09	3.85	3.68	3.55	3.45	3.37
4	4.71	4.03	3.71	3.51	3.38	3.28	3.20	3.14	3.09
8	3.97	3.59	3.38	3.25	3.16	3.09	3.03	2.99	2.95
16	3.66	3.38	3.23	3.12	3.05	2.99	2.95	2.91	2.88
∞	3.39	3.19	3.08	3.00	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80
R = 10									
2	7.25	5.23	4.49	4.11	3.86	3.69	3.56	3.46	3.38
4	4.74	4.06	3.73	3.53	3.39	3.29	3.22	3.15	3.10
8	4.00	3.62	3.41	3.27	3.18	3.11	3.05	3.00	2.97
16	3.70	3.42	3.26	3.15	3.07	3.01	2.97	2.93	2.89
∞	3.44	3.23	3.11	3.03	2.97	2.92	2.88	2.85	2.82
R = ∞									



Tabela 4.1

J = 4								
	R = 2		R = 6		R = 10		R = 14	
I	K _s	K	k _s	K	k _s	K	k _s	K
2	23.66	7.32	21.73	12.56	21.29	14.89	21.09	16.18
6	3.38	2.43	3.14	2.72	3.09	2.82	3.06	2.86
10	2.65	2.05	2.46	2.21	2.42	2.26	2.40	2.28
14	2.38	1.89	2.21	2.00	2.17	2.04	2.15	2.06
18	2.23	1.80	2.07	1.89	2.03	1.92	2.01	1.93
J = 6								
	R = 2		R = 6		R = 10		R = 14	
I	k _s	K	k _s	K	k _s	K	k _s	K
2	24.10	6.61	21.87	11.92	21.37	14.38	21.15	15.76
6	3.44	2.37	3.16	2.69	3.10	2.80	3.07	2.85
10	2.69	2.02	2.48	2.19	2.43	2.25	2.41	2.27
14	2.42	1.87	2.22	1.99	2.17	2.03	2.16	2.05
18	2.27	1.78	2.08	1.88	2.04	1.91	2.02	1.93
J = 8								
	R = 2		R = 6		R = 10		R = 14	
I	k _s	K	k _s	K	k _s	K	k _s	K
2	24.33	6.29	21.95	11.61	21.41	14.13	21.18	15.56
6	3.46	2.34	3.17	2.68	3.10	2.79	3.08	2.84
10	2.72	2.00	2.48	2.18	2.43	2.24	2.41	2.27
14	2.44	1.85	2.23	1.99	2.18	2.03	2.16	2.05
18	2.29	1.77	2.08	1.88	2.04	1.91	2.02	1.93



J = 50								
	R = 2		R = 6		R = 10		R = 14	
I	k_s	K	k_s	K	k_s	K	k_s	K
2	24.95	5.56	22.13	10.88	21.52	13.53	21.26	15.06
6	3.54	2.27	3.19	2.64	3.12	2.76	3.09	2.82
10	2.78	1.96	2.50	2.17	2.44	2.23	2.42	2.26
14	2.49	1.82	2.24	1.97	2.19	2.02	2.16	2.04
18	2.34	1.74	2.10	1.87	2.05	1.90	2.03	1.92

Tabela 5.1

Resultados de Simulação Usando Variáveis Aleatórias Normais Gerais Com
 $\mu = 3.0$, $\beta = 0.9$, $\gamma = 0.95$, e $R = 4$

n ₁	n ₂	n ₃	n ₄	n ₅	n ₆	Sim - γ	Avg - β	Std - β
k = 3								
2	3	4				0.830	0.936	0.1053
2	20	4				0.807	0.939	0.0999
9	13	4				0.807	0.939	0.0999
10	11	12				0.756	0.926	0.1051
15	7	4				0.774	0.934	0.0999
20	2	4				0.797	0.941	0.0975
16	17	18				0.738	0.924	0.1075
19	20	21				0.734	0.924	0.1068
18	4	4				0.790	0.938	0.0972
14	8	4				0.770	0.933	0.1005
k = 4								
2	3	4	5			0.808	0.941	0.0876
8	9	4	11			0.780	0.936	0.0854
13	14	10	16			0.777	0.935	0.0860
15	16	15	17			0.779	0.935	0.0858
19	20	17	21			0.780	0.935	0.0861
2	20	21	5			0.819	0.946	0.0816
5	17	4	5			0.808	0.942	0.0846
10	12	4	5			0.793	0.939	0.0860
14	8	4	5			0.795	0.939	0.0862
20	2	4	5			0.821	0.945	0.0837
k = 5								
2	3	4	5	6		0.817	0.943	0.0779
7	8	9	10	11		0.798	0.939	0.0762
10	11	12	13	14		0.806	0.940	0.0752
13	14	15	16	17		0.807	0.939	0.0753
16	17	18	19	20		0.804	0.939	0.0748
19	20	21	22	23		0.799	0.939	0.0736
3	19	4	5	2		0.813	0.946	0.0752
6	16	4	5	2		0.812	0.943	0.0762
13	9	4	5	2		0.795	0.941	0.0760
15	7	4	5	2		0.805	0.942	0.0756
k = 6								



Tabela 5.2

Resultados de Simulação Usando Variáveis Aleatórias Normais Gerais Com
 $\mu = 3.0$, $\beta = 0.9$, $\gamma = 0.95$, e $R = 1$

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	Sim - γ	Avg - β	Std - β
k = 3								
2	20	4				0.813	0.947	0.0808
5	17	4				0.808	0.943	0.0799
8	14	4				0.814	0.942	0.0799
10	12	4				0.811	0.942	0.0794
12	10	4				0.811	0.942	0.0798
14	8	4				0.816	0.943	0.0780
16	6	4				0.818	0.944	0.0772
17	5	4				0.824	0.945	0.0765
13	14	15				0.791	0.938	0.0765
18	19	20				0.781	0.936	0.0786
k = 4								
2	20	4	5			0.820	0.947	0.0698
5	17	4	5			0.807	0.944	0.0715
8	14	4	5			0.814	0.942	0.0716
13	9	4	5			0.816	0.942	0.0723
18	4	4	5			0.812	0.944	0.0715
5	6	7	8			0.813	0.939	0.0733
9	10	11	12			0.811	0.941	0.0675
12	13	14	15			0.812	0.941	0.0665
13	14	15	16			0.803	0.940	0.0671
20	21	22	23			0.803	0.941	0.0661
k = 5								
2	20	4	5	2		0.806	0.942	0.0728
5	17	4	5	2		0.797	0.939	0.0711
9	13	4	5	2		0.785	0.939	0.0711
12	10	4	5	2		0.776	0.938	0.0699
17	5	4	5	2		0.796	0.939	0.0708
20	2	4	5	2		0.802	0.943	0.0701
10	11	12	13	14		0.805	0.939	0.0635
14	15	16	17	18		0.803	0.939	0.0620
18	19	20	21	22		0.802	0.940	0.0593
20	21	22	23	24		0.807	0.940	0.0588
k = 6								



n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	Sim - γ	Avg - β	Std - β
$k = 6$								
2	20	4	5	2	3	0.821	0.944	0.0654
7	15	4	5	2	3	0.812	0.941	0.0649
10	12	4	5	2	3	0.813	0.941	0.0650
13	9	4	5	2	3	0.815	0.941	0.0661
16	6	4	5	2	3	0.814	0.941	0.0656
18	4	4	5	2	3	0.818	0.943	0.0655
11	12	13	14	15	16	0.827	0.942	0.0516
15	16	17	18	19	20	0.830	0.942	0.0500
17	18	19	20	21	22	0.834	0.943	0.0483
19	20	21	22	23	24	0.839	0.943	0.0483

Tabelas de Pearson e Hartley [18] - (t não-central)

Fatores, ℓ , para a determinação de pontos percentuais de t'

$\Pr \{ t' \geq t'_0 \mid \Delta \} = \alpha = 0.50$. Para $v = \infty$, todos os valores de ℓ são zero.

u	v	2	3	4	5	6	7	8	9	16	36	144
-1.00	-	0.3349	-0.2742	-0.2374	-0.2122	-0.1936	-0.1791	-0.1675	-0.1578	-0.1182	-0.0787	-0.0393
-0.95	-	0.3149	-0.2567	-0.2217	-0.1979	-0.1804	-0.1688	-0.1588	-0.1488	-0.1097	-0.0730	-0.0364
-0.90	-	0.2943	-0.2391	-0.2042	-0.1839	-0.1675	-0.1548	-0.1446	-0.1361	-0.1017	-0.0675	-0.0337
-0.85	-	0.2734	-0.2218	-0.1911	-0.1702	-0.1550	-0.1431	-0.1337	-0.1258	-0.0939	-0.0624	-0.0311
-0.80	-	0.2526	-0.2047	-0.1783	-0.1570	-0.1429	-0.1319	-0.1232	-0.1160	-0.0865	-0.0574	-0.0288
-0.7	-	0.2124	-0.1722	-0.1482	-0.1320	-0.1201	-0.1109	-0.1035	-0.0974	-0.0728	-0.0482	-0.0240
-0.6	-	0.1750	-0.1420	-0.1223	-0.1089	-0.0991	-0.0915	-0.0854	-0.0804	-0.0599	-0.0388	-0.0199
-0.5	-	0.1407	-0.1142	-0.0984	-0.0877	-0.0798	-0.0737	-0.0688	-0.0648	-0.0483	-0.0320	-0.0160
-0.4	-	0.1090	-0.0868	-0.0764	-0.0681	-0.0620	-0.0573	-0.0535	-0.0503	-0.0375	-0.0249	-0.0124
-0.3	-	0.0797	-0.0649	-0.0559	-0.0499	-0.0454	-0.0420	-0.0392	-0.0369	-0.0275	-0.0183	-0.0091
-0.2	-	0.0521	-0.0425	-0.0366	-0.0327	-0.0298	-0.0275	-0.0257	-0.0242	-0.0180	-0.0120	-0.0060
-0.1	-	0.0258	-0.0210	-0.0181	-0.0162	-0.0147	-0.0136	-0.0127	-0.0120	-0.0089	-0.0059	-0.0030
0.0	-	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Para u positivo, os valores de ℓ são os mesmos, porém com o sinal positivo.

$\Pr \{ t' \geq t'_0 \mid \Delta \} = \alpha = 0.25$. Para $v = \infty$ todos os valores de ℓ valem 0.67449

u	v	2	3	4	5	6	7	8	9	16	36	144
-1.00	0.3548	0.4170	0.4534	0.4780	0.4959	0.5097	0.5208	0.5299	0.5371	0.5671	0.6036	0.6393
-0.95	0.3830	0.4390	0.4718	0.4940	0.5103	0.5228	0.5329	0.5412	0.5482	0.5752	0.6086	0.6417
-0.90	0.4121	0.4611	0.4902	0.5099	0.5245	0.5357	0.5448	0.5523	0.5590	0.5830	0.6136	0.6441
-0.85	0.4415	0.4830	0.5082	0.5255	0.5383	0.5482	0.5563	0.5630	0.5696	0.5906	0.6183	0.6463
-0.80	0.4705	0.5045	0.5257	0.5406	0.5517	0.5604	0.5674	0.5733	0.5789	0.5979	0.6229	0.6484
-0.7	0.5247	0.5447	0.5587	0.5689	0.5769	0.5832	0.5884	0.5928	0.5971	0.6117	0.6316	0.6525
-0.6	0.5722	0.5808	0.5885	0.5947	0.5998	0.6041	0.6077	0.6107	0.6132	0.6244	0.6397	0.6564
-0.5	0.6133	0.6126	0.6151	0.6180	0.6206	0.6231	0.6252	0.6271	0.6286	0.6362	0.6472	0.6599
-0.4	0.6490	0.6409	0.6391	0.6390	0.6396	0.6404	0.6413	0.6421	0.6428	0.6471	0.6542	0.6633
-0.3	0.6893	0.6863	0.6808	0.6882	0.6870	0.6864	0.6861	0.6861	0.6861	0.6873	0.6898	0.6966
-0.2	0.7082	0.6993	0.6907	0.6760	0.6731	0.6712	0.6700	0.6691	0.6689	0.6699	0.6722	0.6797
-0.1	0.7332	0.7105	0.6992	0.6925	0.6883	0.6853	0.6831	0.6814	0.6802	0.6814	0.6832	0.6872
0.0	0.7559	0.7301	0.7165	0.7082	0.7028	0.6986	0.6956	0.6933	0.6916	0.6930	0.6952	0.6977
0.1	0.7766	0.7485	0.7330	0.7232	0.7164	0.7115	0.7077	0.7047	0.7023	0.6937	0.6850	0.6786
0.2	0.7957	0.7659	0.7487	0.7376	0.7298	0.7240	0.7195	0.7159	0.7132	0.7023	0.6908	0.6815
0.3	0.8134	0.7824	0.7639	0.7516	0.7429	0.7383	0.7341	0.7309	0.7286	0.7108	0.6967	0.6845
0.4	0.8302	0.7984	0.7787	0.7654	0.7557	0.7494	0.7446	0.7406	0.7379	0.7184	0.7026	0.6876
0.5	0.8464	0.8139	0.7932	0.7790	0.7685	0.7605	0.7541	0.7489	0.7449	0.7281	0.7098	0.6907
0.6	0.8623	0.8293	0.8077	0.7926	0.7814	0.7727	0.7658	0.7601	0.7550	0.7370	0.7149	0.6940
0.7	0.8784	0.8448	0.8223	0.8064	0.7944	0.7851	0.7776	0.7714	0.7661	0.7461	0.7213	0.6974
0.8	0.8948	0.8605	0.8371	0.8204	0.8078	0.7979	0.7898	0.7831	0.7775	0.7555	0.7281	0.7011
0.9	0.9114	0.8764	0.8522	0.8348	0.8215	0.8110	0.8024	0.7953	0.7894	0.7654	0.7352	0.7049
1.0	0.9273	0.8922	0.8675	0.8494	0.8356	0.8245	0.8155	0.8079	0.8014	0.7758	0.7428	0.7090

Para determinar um ponto percentual 100 α superior, $t'(\alpha|v,\Delta)$:

- (1) calcular $u = \frac{\Delta}{\sqrt{2v}} \left(1 + \frac{\Delta^2}{2v} \right)^{-\frac{1}{2}}$
- (2) interpolar ℓ na tabela α apropriada
- (3) determinar $t'_0 = \frac{\Delta + \ell (1 + (\Delta^2 / 2v) - (\ell^2 / 2v))^{\frac{1}{2}}}{1 - (\ell^2 / 2v)}$

Tabelas de Pearson e Hartley [18] - (t não-central)
Fatores, λ , para a determinação de pontos percentuais de t'
 $\Pr \{ t' \geq t'_0 \mid \Delta \} = \alpha = 0.10$. Para $v = \infty$, todos os valores de λ valem 1.28155

λ	2	3	4	5	6	7	8	9	16	36	144
-1.00	1.0348	1.0864	1.1180	1.1357	1.1499	1.1608	1.1694	1.1765	1.2049	1.2319	1.2575
-0.95	1.0549	1.1001	1.1265	1.1442	1.1572	1.1672	1.1751	1.1817	1.2032	1.2337	1.2583
-0.90	1.0797	1.1165	1.1389	1.1544	1.1658	1.1747	1.1818	1.1878	1.2120	1.2358	1.2591
-0.85	1.1081	1.1351	1.1530	1.1658	1.1755	1.1831	1.1894	1.1948	1.2163	1.2382	1.2601
-0.80	1.1386	1.1551	1.1691	1.1781	1.1850	1.1923	1.1976	1.2020	1.2209	1.2408	1.2611
-0.7	1.1993	1.1962	1.1997	1.2040	1.2081	1.2117	1.2149	1.2178	1.2310	1.2484	1.2634
-0.6	1.2535	1.2354	1.2307	1.2299	1.2304	1.2315	1.2328	1.2341	1.2418	1.2526	1.2660
-0.5	1.2977	1.2702	1.2593	1.2543	1.2519	1.2508	1.2504	1.2503	1.2527	1.2590	1.2688
-0.4	1.3304	1.2996	1.2846	1.2765	1.2718	1.2689	1.2670	1.2657	1.2634	1.2656	1.2718
-0.3	1.3523	1.3228	1.3060	1.2980	1.2907	1.2853	1.2823	1.2801	1.2738	1.2721	1.2748
-0.2	1.3650	1.3405	1.3236	1.3126	1.3052	1.3000	1.2961	1.2931	1.2836	1.2784	1.2778
-0.1	1.3709	1.3531	1.3374	1.3264	1.3185	1.3127	1.3082	1.3048	1.2926	1.2845	1.2808
0.0	1.3720	1.3615	1.3479	1.3374	1.3295	1.3235	1.3187	1.3149	1.3009	1.2903	1.2836
0.1	1.3701	1.3665	1.3555	1.3460	1.3384	1.3324	1.3276	1.3236	1.3084	1.2957	1.2866
0.2	1.3666	1.3692	1.3608	1.3524	1.3454	1.3396	1.3349	1.3309	1.3150	1.3007	1.2894
0.3	1.3625	1.3701	1.3642	1.3571	1.3507	1.3453	1.3408	1.3369	1.3207	1.3063	1.2919
0.4	1.3583	1.3699	1.3662	1.3604	1.3547	1.3498	1.3455	1.3417	1.3256	1.3093	1.2943
0.5	1.3546	1.3691	1.3673	1.3626	1.3576	1.3531	1.3491	1.3456	1.3297	1.3129	1.2965
0.6	1.3516	1.3682	1.3678	1.3640	1.3597	1.3556	1.3518	1.3485	1.3331	1.3159	1.2984
0.7	1.3498	1.3674	1.3681	1.3650	1.3612	1.3574	1.3539	1.3508	1.3358	1.3185	1.3002
0.8	1.3491	1.3672	1.3684	1.3658	1.3623	1.3588	1.3556	1.3526	1.3380	1.3207	1.3016
0.9	1.3496	1.3676	1.3690	1.3666	1.3634	1.3601	1.3569	1.3540	1.3398	1.3224	1.3028
1.0	1.3506	1.3684	1.3699	1.3677	1.3646	1.3613	1.3582	1.3554	1.3412	1.3238	1.3038

$\Pr \{ t' \geq t'_0 \mid \Delta \} = \alpha = 0.05$. Para $v = \infty$, todos os valores de λ valem 1.64485

u	v	2	3	4	5	6	7	8	9	16	36	144
-1.00	1.4616	1.6039	1.5277	1.5431	1.5542	1.5625	1.5691	1.5744	1.5952	1.6141	1.6307	
-0.95	1.4648	1.6037	1.5262	1.5411	1.5519	1.5601	1.5666	1.5720	1.5930	1.6124	1.6298	
-0.90	1.4798	1.6108	1.5302	1.5435	1.5534	1.5610	1.5671	1.5721	1.5924	1.6116	1.6293	
-0.85	1.5047	1.6242	1.5388	1.5497	1.5580	1.5648	1.5700	1.5745	1.5931	1.6115	1.6290	
-0.80	1.5302	1.6422	1.5511	1.5588	1.5651	1.5704	1.5749	1.5786	1.5951	1.6121	1.6290	
-0.75	1.5707	1.5631	1.5558	1.5700	1.5742	1.5779	1.5813	1.5843	1.5980	1.6133	1.6293	
-0.70	1.6049	1.5853	1.5819	1.5826	1.5846	1.5867	1.5889	1.6010	1.6017	1.6149	1.6297	
-0.65	1.6364	1.6075	1.5986	1.5960	1.5957	1.5963	1.5973	1.5985	1.6060	1.6170	1.6304	
-0.60	1.6631	1.6286	1.6152	1.6096	1.6072	1.6063	1.6062	1.6065	1.6108	1.6194	1.6312	
-0.5	1.6984	1.6641	1.6456	1.6357	1.6300	1.6265	1.6244	1.6230	1.6213	1.6251	1.6333	
-0.4	1.7101	1.6889	1.6701	1.6582	1.6505	1.6453	1.6417	1.6390	1.6322	1.6313	1.6359	
-0.3	1.7046	1.7023	1.6874	1.6758	1.6675	1.6614	1.6569	1.6536	1.6427	1.6378	1.6387	
-0.2	1.6892	1.7065	1.6979	1.6893	1.6805	1.6744	1.6690	1.6658	1.6525	1.6442	1.6417	
-0.1	1.6700	1.7040	1.7025	1.6959	1.6894	1.6839	1.6793	1.6755	1.6611	1.6503	1.6447	
0.0	1.6501	1.6970	1.7024	1.6994	1.6947	1.6902	1.6862	1.6828	1.6652	1.6558	1.6477	
0.1	1.6312	1.6876	1.6991	1.6995	1.6969	1.6937	1.6906	1.6875	1.6739	1.6607	1.6504	
0.2	1.6141	1.6769	1.6934	1.6970	1.6965	1.6947	1.6924	1.6901	1.6780	1.6647	1.6529	
0.3	1.5990	1.6860	1.6964	1.6927	1.6941	1.6936	1.6923	1.6907	1.6807	1.6678	1.6551	
0.4	1.5861	1.6553	1.6785	1.6972	1.6902	1.6909	1.6906	1.6897	1.6819	1.6699	1.6568	
0.5	1.5751	1.6452	1.6705	1.6908	1.6853	1.6870	1.6875	1.6873	1.6818	1.6711	1.6581	
0.6	1.5661	1.6361	1.6625	1.6741	1.6796	1.6823	1.6834	1.6839	1.6805	1.6714	1.6588	
0.7	1.5590	1.6280	1.6549	1.6673	1.6736	1.6769	1.6786	1.6795	1.6782	1.6707	1.6590	
0.8	1.5536	1.6210	1.6479	1.6607	1.6674	1.6712	1.6734	1.6746	1.6750	1.6692	1.6580	
0.9	1.5497	1.6153	1.6416	1.6544	1.6613	1.6654	1.6678	1.6693	1.6710	1.6667	1.6578	
1.0	1.5470	1.6106	1.6382	1.6487	1.6556	1.6597	1.6622	1.6638	1.6664	1.6635	1.6560	

Para $v > 9$, interpole usando argumento $12/\sqrt{v}$.



Tabelas de Pearson e Hartley [18] - (t não-central)
Fatores, ℓ , para a determinação de pontos percentuais de t'
 $\Pr \{ t' \geq t'_0 \mid \Delta \} = \alpha = 0.025$. Para $v = \infty$ todos os valores de ℓ valem 1.95996

u	v	2	3	4	5	6	7	8	9	16	36	144
-1.00	1.8413	1.8746	1.8924	1.9038	1.9116	1.9174	1.9219	1.9255	1.9286	1.9316	1.9346	1.9376
-0.95	1.8204	1.8553	1.8751	1.8880	1.8971	1.9040	1.9093	1.9135	1.9168	1.9198	1.9228	1.9258
-0.90	1.8229	1.8509	1.8687	1.8800	1.8898	1.8967	1.9021	1.9066	1.9100	1.9130	1.9160	1.9190
-0.85	1.8450	1.8587	1.8713	1.8810	1.8887	1.8947	1.8997	1.9038	1.9070	1.9100	1.9130	1.9160
-0.80	1.8804	1.8757	1.8809	1.8869	1.8924	1.8971	1.9011	1.9045	1.9075	1.9105	1.9135	1.9165
-0.75	1.9213	1.8985	1.8955	1.8971	1.8999	1.9028	1.9055	1.9080	1.9103	1.9126	1.9149	1.9172
-0.70	1.9599	1.9237	1.9130	1.9101	1.9100	1.9109	1.9122	1.9137	1.9152	1.9166	1.9180	1.9194
-0.65	1.9900	1.9484	1.9316	1.9248	1.9217	1.9206	1.9205	1.9209	1.9216	1.9223	1.9230	1.9237
-0.60	2.0080	1.9704	1.9497	1.9394	1.9341	1.9313	1.9298	1.9290	1.9284	1.9288	1.9292	1.9296
-0.55	2.0132	1.9879	1.9681	1.9537	1.9465	1.9421	1.9394	1.9377	1.9364	1.9354	1.9347	1.9341
-0.50	2.0073	2.0003	1.9801	1.9668	1.9583	1.9527	1.9490	1.9464	1.9440	1.9418	1.9396	1.9374
-0.45	1.9933	2.0074	1.9912	1.9781	1.9690	1.9627	1.9582	1.9550	1.9524	1.9498	1.9472	1.9446
-0.4	1.9742	2.0098	1.9992	1.9874	1.9783	1.9716	1.9667	1.9630	1.9602	1.9576	1.9550	1.9524
-0.3	1.9297	2.0030	2.0004	1.9906	1.9822	1.9800	1.9809	1.9789	1.9769	1.9749	1.9729	1.9709
-0.2	1.8857	1.9861	2.0040	2.0038	1.9997	1.9951	1.9908	1.9871	1.9831	1.9792	1.9753	1.9714
-0.1	1.8467	1.9643	1.9947	2.0016	2.0015	1.9992	1.9963	1.9934	1.9904	1.9875	1.9846	1.9817
0.0	1.8136	1.9411	1.9814	1.9947	1.9980	1.9989	1.9978	1.9961	1.9941	1.9921	1.9901	1.9881
0.1	1.7801	1.9183	1.9658	1.9845	1.9922	1.9951	1.9959	1.9956	1.9942	1.9928	1.9914	1.9900
0.2	1.7633	1.8970	1.9494	1.9724	1.9833	1.9886	1.9912	1.9923	1.9923	1.9912	1.9900	1.9888
0.3	1.7444	1.8775	1.9330	1.9592	1.9727	1.9801	1.9843	1.9867	1.9881	1.9881	1.9869	1.9857
0.4	1.7289	1.8600	1.9171	1.9456	1.9612	1.9703	1.9759	1.9795	1.9822	1.9846	1.9869	1.9892
0.5	1.7160	1.8444	1.9021	1.9320	1.9491	1.9596	1.9683	1.9700	1.9706	1.9706	1.9702	1.9700
0.6	1.7055	1.8307	1.8882	1.9188	1.9368	1.9483	1.9580	1.9613	1.9646	1.9676	1.9705	1.9734
0.7	1.6971	1.8188	1.8763	1.9061	1.9247	1.9368	1.9451	1.9511	1.9574	1.9634	1.9694	1.9754
0.8	1.6906	1.8085	1.8657	1.8942	1.9129	1.9254	1.9341	1.9404	1.9469	1.9531	1.9591	1.9651
0.9	1.6855	1.7998	1.8563	1.8831	1.9017	1.9141	1.9230	1.9296	1.9360	1.9424	1.9488	1.9552
1.0	1.6818	1.7925	1.8441	1.8729	1.8910	1.9032	1.9121	1.9187	1.9250	1.9314	1.9378	1.9442

$\Pr \{ t' \geq t'_0 \mid \Delta \} = \alpha = 0.01$. Para $v = \infty$, todos os valores de ℓ valem 2.32635

u	v	2	3	4	5	6	7	8	9	16	36	144
-1.00	2.2919	2.3139	2.3246	2.3307	2.3346	2.3370	2.3388	2.3401	2.3413	2.3424	2.3434	2.3444
-0.95	2.2305	2.2635	2.2815	2.2928	2.3004	2.3059	2.3101	2.3133	2.3162	2.3187	2.3216	2.3244
-0.90	2.2152	2.2417	2.2593	2.2713	2.2799	2.2864	2.2915	2.2956	2.3005	2.3054	2.3103	2.3152
-0.85	2.2380	2.2432	2.2540	2.2632	2.2707	2.2760	2.2815	2.2855	2.2904	2.2953	2.3002	2.3051
-0.80	2.2844	2.2617	2.2617	2.2638	2.2704	2.2746	2.2784	2.2817	2.2862	2.2902	2.2942	2.2982
-0.75	2.3338	2.2899	2.2782	2.2759	2.2768	2.2780	2.2807	2.2828	2.2842	2.2856	2.2870	2.2884
-0.70	2.3654	2.3200	2.2990	2.2908	2.2876	2.2868	2.2870	2.2877	2.2884	2.2891	2.2898	2.2905
-0.65	2.3675	2.3454	2.3204	2.3075	2.3009	2.2975	2.2958	2.2951	2.2954	2.2958	2.2962	2.2966
-0.60	2.3420	2.3617	2.3392	2.3240	2.3150	2.3095	2.3061	2.3040	2.3015	2.3000	2.2985	2.2970
-0.55	2.2986	2.3673	2.3533	2.3385	2.3282	2.3214	2.3167	2.3135	2.3098	2.3061	2.3024	2.2987
-0.50	2.2476	2.3629	2.3618	2.3499	2.3398	2.3323	2.3269	2.3229	2.3193	2.3157	2.3121	2.3085
-0.45	2.1963	2.3504	2.3646	2.3576	2.3490	2.3417	2.3360	2.3316	2.3282	2.3248	2.3214	2.3180
-0.40	2.1482	2.3322	2.3622	2.3616	2.3555	2.3492	2.3437	2.3393	2.3341	2.3291	2.3241	2.3191
-0.35	2.1050	2.3104	2.3556	2.3620	2.3592	2.3544	2.3497	2.3456	2.3407	2.3360	2.3313	2.3266
-0.30	2.0670	2.2869	2.3456	2.3593	2.3603	2.3576	2.3540	2.3504	2.3468	2.3432	2.3396	2.3360

Para determinar um ponto percentual 100 α superior, $t'(\alpha|v,\Delta)$:

- (1) calcular $u = \frac{\Delta}{\sqrt{2v}} \left(1 + \frac{\Delta^2}{2v} \right)^{-\frac{1}{2}}$ (2) interpolar ℓ na tabela α apropriada
- (3) determinar $t'_0 = \frac{\Delta + \ell (1 + (\Delta^2 / 2v) - (\ell^2 / 2v))^{\frac{1}{2}}}{1 - (\ell^2 / 2v)}$



Tabelas de Pearson e Hartley [18] - (t não-central)

Fatores, λ , para a determinação de pontos percentuais de t'

$\Pr \{ t' \geq t'_0 \mid \Delta \} = \alpha = 0.01$. Para $v = \infty$ (cont.), todos os valores de λ valem 2.3263

λ	2	3	4	5	6	7	8	9	16	36	144
-0.3	2.0670	2.2869	2.3456	2.3693	2.3803	2.3876	2.3940	2.3994	2.3348	2.3240	2.3214
-0.2	2.0050	2.2393	2.3191	2.3465	2.3556	2.3578	2.3572	2.3555	2.3430	2.3304	2.3244
-0.1	1.9581	2.1950	2.2886	2.3272	2.3439	2.3512	2.3541	2.3549	2.3481	2.3360	2.3274
0.0	1.9223	2.1558	2.2575	2.3044	2.3276	2.3398	2.3460	2.3494	2.3500	2.3401	2.3302
0.1	1.8945	2.1220	2.2277	2.2803	2.3086	2.3246	2.3342	2.3401	2.3487	2.3425	2.3326
0.2	1.8727	2.0930	2.2000	2.2563	2.2883	2.3076	2.3199	2.3280	2.3446	2.3431	2.3343
0.3	1.8553	2.0681	2.1748	2.2332	2.2677	2.2895	2.3039	2.3139	2.3379	2.3418	2.3351
0.4	1.8413	2.0469	2.1520	2.2112	2.2474	2.2710	2.2870	2.2985	2.3291	2.3385	2.3350
0.5	1.8299	2.0287	2.1316	2.1907	2.2277	2.2524	2.2697	2.2823	2.3185	2.3335	2.3338
0.6	1.8208	2.0130	2.1131	2.1716	2.2089	2.2342	2.2522	2.2656	2.3063	2.3267	2.3315
0.7	1.8134	1.9996	2.0967	2.1540	2.1910	2.2165	2.2349	2.2488	2.2930	2.3181	2.3279
0.8	1.8076	1.9882	2.0820	2.1378	2.1741	2.1994	2.2179	2.2320	2.2786	2.3080	2.3230
0.9	1.8030	1.9784	2.0690	2.1229	2.1582	2.1830	2.2014	2.2154	2.2633	2.2964	2.3106
1.0	1.7995	1.9703	2.0576	2.1094	2.1434	2.1675	2.1853	2.1992	2.2474	2.2832	2.3099

$\Pr \{ t' \geq t'_0 \mid \Delta \} = \alpha = 0.005$. Para $v = \infty$, todos os valores de λ valem 2.57583.

λ	2	3	4	5	6	7	8	9	16	36	144
-1.00	2.6036	2.6177	2.6232	2.6256	2.6265	2.6267	2.6265	2.6260	2.6217	2.6126	2.5977
-0.95	2.5090	2.5398	2.5576	2.5684	2.5755	2.5804	2.5839	2.5866	2.5842	2.5699	2.5503
-0.90	2.4781	2.5043	2.5226	2.5332	2.5441	2.5508	2.5560	2.5600	2.5742	2.5828	2.5841
-0.85	2.5083	2.5028	2.5121	2.5212	2.5288	2.5350	2.5401	2.5442	2.5604	2.5730	2.5791
-0.80	2.5641	2.5261	2.5199	2.5222	2.5261	2.5302	2.5339	2.5372	2.5520	2.5659	2.5751
-0.75	2.6095	2.5588	2.5394	2.5336	2.5326	2.5335	2.5352	2.5370	2.5481	2.5612	2.5720
-0.70	2.6088	2.5904	2.5634	2.5506	2.5449	2.5425	2.5417	2.5418	2.5476	2.5586	2.5698
-0.65	2.5535	2.6094	2.5857	2.5693	2.5599	2.5545	2.5516	2.5498	2.5498	2.5577	2.5683
-0.60	2.4725	2.6110	2.6018	2.5861	2.5749	2.5675	2.5627	2.5595	2.5539	2.5581	2.5674
-0.55	2.3883	2.5983	2.6094	2.5987	2.5880	2.5799	2.5740	2.5697	2.5593	2.5597	2.5671
-0.50	2.3071	2.5695	2.6093	2.6060	2.5979	2.5903	2.5841	2.5794	2.5653	2.5621	2.5673
-0.45	2.2389	2.5354	2.5994	2.6078	2.6040	2.5980	2.5925	2.5877	2.5715	2.5650	2.5679
-0.40	2.1818	2.4881	2.5845	2.6044	2.6061	2.6028	2.5985	2.5944	2.5776	2.5683	2.5688
-0.35	2.1344	2.4604	2.5655	2.5967	2.6045	2.6046	2.6021	2.5990	2.5830	2.5717	2.5700
-0.30	2.0951	2.4240	2.5438	2.5855	2.5996	2.6034	2.6033	2.6016	2.5877	2.5762	2.5713
-0.25	2.0624	2.3900	2.5208	2.5718	2.5921	2.5998	2.6021	2.6021	2.5915	2.5785	2.5728
-0.20	2.0350	2.3566	2.4976	2.5504	2.5823	2.5939	2.5989	2.6007	2.5943	2.5816	2.5743
-0.15	2.0118	2.3299	2.4744	2.5399	2.5709	2.5863	2.5939	2.5976	2.5901	2.5843	2.5758
-0.10	1.9921	2.3039	2.4519	2.5228	2.5584	2.5771	2.5873	2.5929	2.5988	2.5866	2.5773
-0.05	1.9752	2.2803	2.4304	2.5055	2.5450	2.5669	2.5795	2.5870	2.5965	2.5884	2.5787
0.00	1.9608	2.2589	2.4100	2.4883	2.5311	2.5558	2.5707	2.5799	2.5953	2.5897	2.5801
0.1	1.9369	2.2220	2.3725	2.4550	2.5028	2.5321	2.5508	2.5633	2.5899	2.5907	2.5822
0.2	1.9184	2.1915	2.3395	2.4238	2.4749	2.5074	2.5292	2.5442	2.5814	2.5894	2.5834
0.3	1.9040	2.1662	2.3105	2.3961	2.4479	2.4827	2.5067	2.5238	2.5702	2.5858	2.5836
0.4	1.8925	2.1450	2.2851	2.3689	2.4224	2.4586	2.4841	2.5027	2.5568	2.5799	2.5826
0.5	1.8832	2.1271	2.2628	2.3451	2.3985	2.4353	2.4617	2.4814	2.5416	2.5719	2.5803
0.6	1.8769	2.1118	2.2431	2.3254	2.3762	2.4131	2.4399	2.4602	2.5251	2.5620	2.5765
0.7	1.8698	2.0980	2.2258	2.3037	2.3554	2.3919	2.4188	2.4394	2.5074	2.5501	2.5712
0.8	1.8650	2.0879	2.2104	2.2858	2.3361	2.3719	2.3985	2.4190	2.4869	2.5365	2.5642
0.9	1.8613	2.0786	2.1969	2.2695	2.3182	2.3529	2.3789	2.3991	2.4697	2.5211	2.5557
1.0	1.8584	2.0707	2.1850	2.2548	2.3016	2.3351	2.3602	2.3799	2.4490	2.5042	2.5453

Para $v > 9$, interpole usando argumento $12/\sqrt{v}$.



Bibliografia

- [1] Bhaumik, D. K., & Kulkarni, P.M.(1991). One-Sided Tolerance Limits for Unbalanced One-Way ANOVA Random Effects Model. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 20 (5-6), 1665 – 1675.
- [2] _____ (1996). A Simple and Exact Method of Constructing Tolerance Intervals for the One-Way ANOVA With Random Effects. *The American Statistician*, 50 (4), 319 – 323.
- [3] Beckman, R. J. , & Tietjen, G. L. (1989). Two-Sided Tolerance Limits for Balanced Random-Effects ANOVA Models. *Technometrics*, 31 (2), 185 – 197.
- [4] Fertin, K.W., & Mann, N. R. (1974). Population Percentile Estimation for the Unbalanced Random-Effect Model. *Reliability and Biometry Statistical Analysis of Lifelength*. Eds Frank Proschan and R.J. Serfling, Philadelphia. SIAM, 205 – 28.
- [5] Fraser, D. A. L. , & Guttman, I. (1956). Tolerance Regions. *Annals of Mathematical Statistics*, 24, 44 – 55.
- [6] Guttman, I. (1970). *Statistical Tolerance Regions: Classical and Bayesian*, London: Griffin.
- [7] Graybill, F. A. (1961). *Introduction to Linear Statistical Models*, Volume 1, New York, McGraw-Hill Book Co.



- [8] Kaminski, B. E. & Lemon, G. H. & McKague, E. L. (1971). *Development of Engineering Data for Advanced Composite Materials*. Technical Report AFML-TR-70-108, Vol 1. Wright Patterson Air Force Base, Ohio.
- [9] Kulkarni, P. M. & Kushary, D. (1991). β -Expectation and β -Content Tolerance Intervals for Dependent Observations. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 20 (3), 1043 – 1054.
- [10] Lieberman, G. J. & Miller, R. G. Jr. (1963). Simultaneous Tolerance Intervals in Regression. *Biometrika*, 50, 155 – 168.
- [11] Lemon, G. H. (1977). Factors for One-Sided Tolerance Limits for Balanced One-Way ANOVA Random Effects Model. *Journal of The American Statistical Association*, 72, 676 – 680.
- [12] Marshall, A. W. & Olkin, I. (1979). *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*. Academic Press.
- [13] Mee, R. W. & Owen, D. B. (1983). Improved Factors for One-Sided Tolerance Limits for Balanced One-Way ANOVA Random Effects Model. *Journal of The American Statistical Association*, 78, 901 – 905.
- [15] Ostle & Mensing, p. 296. (1975) apud [1].
- [14] Mood, A. M. & Graybill, F. A. & Boes, D. C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*, 3^a edição. McGraw-Hill, 546p.
- [16] Owen, Donald B. (1963). *Factors for One-Sided Tolerance Limits and for Variable Sampling Plans*, Monograph No. SCR-607, Sandia Corporation, Albuquerque.
- [17] Paulson, E. (1943). A Note on Tolerance Limits. *Annals of Mathematical Statistics*, 14, 90 – 93.



- [18] Pearson, E. S. & Hartley, H. O. (1976). *Biometrika Tables for Statisticians*. Biometrika Trust, 2, 58 – 66.
- [19] Peres, Clóvis de A & Saldiva, Carmen D. (1982). *Planejamento de Experimentos*. 5º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.
- [20] Sahai, H. & Khuri, A. & Kapadia, C. H. (1985). A Second Bibliography On variance Components. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 14, 63 – 115.
- [21] Satterthwaite, F. E. (1946). An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components. *Biometrics Bulletin*, 2, 110 – 114.
- [22] Searle, S. R. (1971). *Linear Models*. New York. John Wiley & Sons, Inc. 532p.
- [23] Thomas, J. D. & Hulquist, R. A. (1978). Interval Estimation for the Unbalanced Case of the One-Way Random Effects Model. *Annals of Statistics*, 6 (3), 582 – 587.
- [24] Wallis, W. A. (1951). Tolerance Intervals for Linear Regression. *In Proceeding of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley: CA: University of California Press, Berkeley.
- [25] Wang, C. M. and Iyer, H. K. (1994). Tolerance Intervals for the Distribution of True Values in the Presence of Measurement Errors. *Techonometrics*, 36 (2), 162 – 170.
- [26] Wilks, S. S. (1942). Statistical Prediction with Special Reference to the Problem of Tolerance Limits. *Annals of Mathematical Statistics*, 13, 400 – 409.



