UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Camila Libanori Bernardino

NÚMEROS COMPLEXOS: UM ESTUDO HISTÓRICO SOBRE SUA ABORDAGEM NA COLEÇÃO MATEMÁTICA 2º CICLO

Rio Claro

2016

Camila Libanori Bernardino

NÚMEROS COMPLEXOS: UM ESTUDO HISTÓRICO SOBRE SUA ABORDAGEM NA COLEÇÃO MATEMÁTICA 2º CICLO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus de Rio Claro, como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Heloisa da Silva

Rio Claro

2016

510.07 Bernardino, Camila Libanori
B518n Números complexos : um estudo histórico sobre sua abordagem na coleção Matemática 2º ciclo / Camila Libanori Bernardino. - Rio Claro, 2016
170 f. : il., figs., quadros, fots.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientadora: Heloisa da Silva

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. História da educação matemática. 3. Livro didático. 4. Hermenêutica de profundidade. 5. Paratextos editoriais. 6. Leis orgânicas do ensino. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

CAMILA LIBANORI BERNARDINO

NÚMEROS COMPLEXOS: UM ESTUDO HISTÓRICO SOBRE SUA ABORDAGEM NA COLEÇÃO MATEMÁTICA 2º CICLO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", câmpus de Rio Claro, como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Heloisa da Silva
Unesp/Rio Claro (SP) – Orientadora

Profª. Drª. Maria Laura Magalhães Gomes
UFMG/Belo Horizonte (MG)

Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica
Unesp/Rio Claro (SP)

Resultado: Aprovada

RIO CLARO – SP, 18 DE ABRIL DE 2016

Dedico este trabalho à minha mãe Elisabete,
à minha irmã Beatriz e
ao meu companheiro Felipe.
Sem o apoio e o amor de vocês, eu nada seria.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

A minha mãe Elisabete, pelo amor incondicional, pelos conselhos, pelo apoio e por toda a dedicação com que me criou. Obrigada por ser uma mulher forte e por manter um sorriso no rosto mesmo nos momentos mais difíceis.

Ao Felipe, meu companheiro, meu amor. Agradeço pelas lágrimas que secou, pelos sorrisos que roubou e pela nova família que me proporcionou. Obrigada pelo apoio, pelo cuidado e por compartilhar sua vida comigo.

A minha irmã Beatriz pela garra e dedicação com que vive e trabalha. Pelos anos de conversa antes de dormir, pelas músicas criadas e por tudo o que me ensinou sobre sentimentos.

Ao meu pai Luiz Carlos (*in memoriam*), à minha avó Norma (*in memoriam*) e ao meu tio Claudio (*in memoriam*) que, mesmo no pouco tempo em que estiveram comigo, ensinaram-me sobre bondade, humildade, afeto e amor. Em cada momento de fraqueza e em cada nova conquista, elevo meus pensamentos a vocês. Sei que aí de cima me guardam e me protegem.

Ao meu avô Clovis (*in memoriam*), minha maior fonte de inspiração. Obrigada pelas conversas, pela presença nas partidas de vôlei e futebol, pelo incentivo e pelo sorriso no rosto todos os dias pela manhã.

A “família Zica” por terem me recebido de braços abertos e pelos inúmeros momentos de felicidade compartilhados. Em especial, à Manuela e ao Kaique pelo amor espontâneo que só as crianças podem nos dar.

A Heloisa da Silva pela orientação, pelas leituras e conversas, pela amizade e por acreditar em mim em todos os momentos desta pesquisa.

O Antonio Vicente Marafioti Garnica e a Maria Laura Magalhães Gomes pelo carinho com esta pesquisa desde que era apenas um projeto. Obrigada por cada puxão de orelha e por cada valiosa sugestão. O amor com que trabalham é inspirador.

O Ghoem e o Ghemat por disponibilizarem seus acervos para esta pesquisa. A biblioteca histórica do Colégio Pedro II pelo documento partilhado e as bibliotecas da Unicamp pela disponibilidade. Ao Bruno Dassie pelos materiais e ideias compartilhados. Ao Fábio Oliveira pelas sugestões e leituras desta pesquisa desde sua fase inicial.

Aos meus irmãos de orientação, Adriane, Ana Cláudia, Flávia, Marinéia e Vinícius pelos momentos de alegria e aflição, pelas leituras, pelas conversas e pelos preciosos anos que passamos juntos.

Aos demais membros do Ghoem pelas experiências vivenciadas em conjunto e por cada sexta-feira valiosa.

Aos amigos do PPGEM pela companhia nas disciplinas, nos seminários e nas jornadas.

Aos amigos que fiz nas inúmeras viagens de Campinas para Rio Claro, muito obrigada pela companhia.

Aos servidores da Unesp por sempre nos receberem com um sorriso no rosto.

A Capes pelo financiamento desta pesquisa.

Faça todo o bem que puder,
Por todos os meios que puder,
De todas as maneiras que puder,
Em todos os lugares que puder,
Para todas as pessoas que puder
Em todas as vezes que puder,
Por todo o tempo que puder.
John Wesley

RESUMO

Esta pesquisa visa compreender a abordagem dos números complexos, bem como as transformações e adaptações ao longo das edições de 1944, 1946, 1949, 1955 e 1956 na série *Matemática 2º ciclo*. O tema foi inserido no currículo escolar brasileiro em 1942 e tal obra, de autoria de Euclides Roxo, Haroldo Lisbôa da Cunha, Roberto Peixoto e Cesar Dacorso Netto, entrou em circulação, no mercado editorial nacional, logo após decretada a Lei Orgânica do Ensino Secundário. Para tanto, optou-se por compor uma versão histórica sobre tal abordagem na série *Matemática 2º ciclo.* Com inspiração no referencial metodológico da Hermenêutica de Profundidade e dos Paratextos Editoriais, realizou-se uma análise sócio-histórica a partir da década de 1930 a fim de compreender e apresentar situações sociais e políticas da época e suas relações com a publicação da obra; uma análise discursiva e comparativa de edições dessa obra, visando compreender e descrever os conteúdos nela abordados relativos ao tema, bem como apresentar plausibilidades para as transformações e adaptações detectadas; e, por fim, uma reinterpretação dos dois primeiros momentos de análise de modo a apresentar uma síntese das compreensões sobre a obra neste trabalho. Dentre as compreensões resultantes dessas análises destacamos: a vinculação direta dos autores Haroldo Lisbôa da Cunha e Euclides Roxo à elaboração dos programas instituídos por meio das reformas educacionais da época; a obra *Matemática 2º Ciclo* é fortemente caracterizada pela fragmentação na abordagem dos conteúdos (Álgebra, Geometria e Geometria Analítica), possivelmente resultante do alijeiramento da publicação, por sua vez impulsionada pela reforma Capanema; alterações e transformações na abordagem dos números complexos, sobretudo na edição de 1946, pelas sugestões dos professores do país que utilizaram a primeira edição do livro, e mais fortemente a partir da edição de 1955, com a instituição do Programa Mínimo (1951), quando os números complexos deixam de ser um tema de destaque como nas primeiras edições e passa a ser desenvolvido junto ao tema dos polinômios.

Palavras-chave: História da Educação Matemática. Livro Didático. Hermenêutica de Profundidade. Paratextos Editoriais. Leis Orgânicas do Ensino.

ABSTRACT

This research aims to understand not only the approach to complex numbers, but also the transformation and modifications along the 1944, 1946, 1949, 1955, and 1956 editions of the book '*Matemática 2º ciclo'*. The subject was added to Brazilian school curriculum in 1942 and the book, written by Euclides Roxo, Harold Lisbôa da Cunha, Roberto Peixoto and Cesar Dacorso Netto, came entered circulation, in the national publishing Market, soon after the enactment of 'Lei Orgânica do Ensino Secundário' (Organic Law of Secondary Education). Therefore, we chose to create a historical version on such an approach for the book series '*Matemática 2ºciclo'*. Inspired by the methodological referential of Depth Hermeneutics and Editorial Paratexts, we conducted a social-historical analysis starting in the 1930's in order to understand and present social and political situations of the time and its relations with the publication of the work; a discursive and comparative analysis of the book's editions, aiming to understand and depict the content related to the subject, as well as to show the suitability of all detected transformations and adaptations; and, finally, a reinterpretation of the two first moments of analysis to present a summary of our understanding about the book in this research. Among the results of these analyses, we highlighted: the direct connection of authors Haroldo Lisbôa da Cunha and Euclides Roxo to the program design established through a means of the educational reforms of that time; the book '*Matemática 2º Ciclo'* is strongly marked by the fragmentation on content approach (Algebra, Geometry, and Analytical Geometry), possibly resulting from publishing streamlining, in turn driven by the Capanema Reform; modifications and transformations on the approach of complex numbers, especially in the 1946 edition, at the suggestions of the country's teachers, who used the book's first edition and, more heavily, after the 1955 edition, with the establishment of the 'Programa Mínimo' (Minimum Program, 1951), when complex numbers were no longer a highlighted theme as they were in the previous editions and were now developed along polynomials.

Keywords: History of Mathematics Education. Textbook. Depth Hermeneutics. Editorial Paratexts. Organic Laws of Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma criança, um professor, uma caneta
e um livro podem mudar o mundo.
(Malala Yousafzai)

Esta pesquisa começou há muitos anos, quando minha atividade preferida era brincar de escolinha; quando eu, na minha pequena "lousinha", ministrava aulas aos alunos imaginários a fim de estudar para as provas. Prosseguiu com as lições "tomadas" pela minha mãe, com as explicações para minha irmã mais nova e com as visitas à casa dos meus avós, que eram regadas por tabuadas e cadernos de caligrafia para, um dia, ter uma "letra de professora". Foi tomando forma com a admiração pelos meus professores e com o desejo de um dia, quem sabe, fazer a diferença na vida de alguns estudantes.

Com essa determinação, em 2009, ingressei no curso de Matemática na Universidade Estadual Paulista (UNESP), câmpus de Rio Claro. Nunca vou esquecer o dia em que estava cantando a música Jesus Cristo, de Roberto Carlos, e o telefone tocou. Ao atender, fui surpreendida com a seguinte pergunta: "Você pode vir fazer a matrícula hoje?" Até hoje, sinto os arrepios desse momento. Duas horas depois, estava pronta para deixar a casa da minha mãe, de "mala e cuia" e lágrimas nos olhos.

Aos poucos fui descobrindo o que era bacharelado, o que era licenciatura e o que realmente era matemática. No segundo ano da graduação, passei a fazer parte do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)[1], que se tornou "a menina dos meus olhos". Preparava as atividades e oficinas com muito carinho e capricho. A cada visita à escola parceira[2], a cada monitoria ministrada, a cada evolução dos alunos, pedalava de volta para casa com um grande sorriso no rosto e com a certeza de que era esse o caminho que eu queria seguir: o da educação.

No último ano, enquanto cursava a disciplina *Prática de Ensino e Estágio Supervisionado II*, iniciei meu estágio nas salas de terceiras séries do ensino médio, na mesma escola em que desenvolvia as atividades do Pibid. Durante o estágio, tive a oportunidade de acompanhar a apresentação de uma breve introdução histórica feita pelo professor de Matemática responsável por uma das turmas sobre o tema Números Complexos.

---

[1] O Pibid foi criado pela Capes com a finalidade de incentivar a docência e dar apoio aos alunos de licenciatura plena das instituições de ensino superior, melhorar com isso a formação docente, elevando o padrão de qualidade da educação básica. Mais informações no site http://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid.
[2] Escola Estadual Professor Marciano de Toledo Piza, localizada no município de Rio Claro – SP.

O professor iniciou o conteúdo abordando a seguinte equação: $x^2 + 9 = 0$. Os alunos questionaram sobre a existência da $\sqrt{-9}$, ele explicou que, no conjunto dos números reais, não existia nenhum número que, vezes ele mesmo, resultasse em -9.

A partir desse questionamento, contou aos alunos que, muito tempo atrás, Nicolò Tartaglia (1500 – 1557) havia sido desafiado por António Maria Fior[3], ambos italianos, para uma disputa que envolvia a resolução de algumas equações. Essa disputa foi vencida por Tartaglia que, em 1535, já havia descoberto como resolver dois tipos de equações do terceiro grau, $x^3 + mx = n$ e $x^3 + px^2 = n$, enquanto Fior sabia resolver apenas um tipo.

Prosseguindo com os acontecimentos históricos, o professor relatou que anos depois, em 1539, sob promessa de não tornar a fórmula pública, Tartaglia revelou a Girolamo Cardano (1501 - 1576)[4] como resolver uma equação cúbica. Cardano estava escrevendo uma obra e tinha o desejo de que a fórmula fizesse parte dela, porém nada podia fazer, pois tinha feito uma promessa a Tartaglia.

Os alunos começaram a manifestar interesse pela história, então o professor contou que, em uma viagem a Bolonha com seu discípulo Ludovico Ferrari (1522 – 1565), Cardano tomou conhecimento dos escritos de Scipione del Ferro (1465 – 1526), que também havia encontrado uma maneira de resolver equações cúbicas. Sentindo-se, assim, livre da promessa a Tartaglia, em 1545, Cardano publicou sua obra *Ars Magna*. O professor encerrou sua fala histórica ressaltando que Cardano inovou a matemática ao tentar operar com raízes quadradas de números negativos.

Foi possível notar, ao longo da aula, que os alunos ficaram interessados pela parte histórica, pois fizeram perguntas e desenvolveram os exercícios propostos pelo professor sem dificuldades.

No entanto, em nossos estudos posteriores sobre o ensino dos números complexos, viemos a saber que esse comportamento não é frequente[5]. O conteúdo dos números complexos tem sido considerado por alunos e professores da escola básica como dispensável no ensino médio e de relevância reconhecida apenas em cursos mais avançados, como no

---

[3] Não se sabe com exatidão suas datas de nascimento e morte.

[4] Além de contribuir para a matemática, Cardano desenvolveu trabalhos sobre medicina, física, filosofia, religião e música.

[5] Nos capítulos analíticos deste trabalho, argumentaremos, com base em Roque (2012), que a abordagem frequentemente utilizada para introduzir o tema dos Números Complexos em obras didáticas ou voltadas à escrita da história da matemática, tem sido, equivocadamente, similar a utilizada pelo professor com quem realizei meu estágio supervisionado, ou seja, pela motivação da não solução real de uma equação binomial do segundo grau.

ensino superior e na área de ciências exatas, uma vez que os alunos da educação básica têm dificuldade para aprendê-lo e os professores para ensiná-lo (ARAÚJO, 2006).

Em uma consulta aos materiais didáticos produzidos para professores e alunos do Estado de São Paulo, notamos que o tema está presente no currículo dos alunos da terceira série do ensino médio através da situação de aprendizagem: "A equação de terceiro grau e o aparecimento natural dos números complexos".

Apesar de o tema estar presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) para o ensino médio e de sua relação com outras disciplinas apontar para a importância desse tema para a formação matemática do estudante, a Base Nacional Comum Curricular[6] que vem sendo elaborada evidencia essas afirmações, uma vez que o tema não está presente em nenhuma das séries do ensino médio.

Sabendo disso e motivada pela abordagem do professor, foi despertado em mim o interesse em compreender o desenvolvimento dos números complexos na História da Educação Matemática, os intuitos e os movimentos de sua abordagem no currículo escolar com o passar dos anos. Para tanto, considerando o livro didático parte relevante desse currículo e influente quanto aos temas de ensino nele tratados, optamos por realizar uma investigação histórica dos movimentos de abordagem aos números complexos em livros didáticos de Matemática.

A partir de um levantamento de pesquisas que tematizam os números complexos, notamos que sua maioria trata do surgimento desse conteúdo matemático, inclusive de uma maneira similar ao relatado pelo professor durante o meu estágio, tece descrições de livros didáticos mais recentes, investiga o seu ensino por professores de Matemática, e/ou desenvolve propostas didáticas (como alguns exemplos: Oliveira e Vasconcelos (2013); Paes (2013); Silva (2013); Araújo (2006); Rosa, (1998)). Essas propostas são apresentadas como possibilidades para um melhor desenvolvimento do conteúdo em sala de aula e visam a uma melhor compreensão por parte dos alunos.

Identificamos nesse levantamento, portanto, análises mais pragmáticas do livro didático, quando de sua referência. Oliveira (2008) nos ajuda a compreender e diferenciar análises pragmáticas de análises históricas de livros didáticos:

> De modo algum caracterizar uma análise como pragmática significa aqui, caracterizá-la como técnica ou como dissociada de uma reflexão. Por “pragmático” entendemos, sim, algo que visa a um objetivo específico, até

[6] A Base Nacional Comum Curricular é um documento que deixa explícitos os conhecimentos a que os estudantes brasileiros têm direito a ter acesso na Educação Básica.

> mesmo direto, mas que não necessariamente negligencia um pensar teórico, reflexivo, de natureza filosófica. Uma análise será chamada "pragmática" quando for desenvolvida visando, mais diretamente, à utilização do material analisado (no caso deste nosso tema, a análise pragmática do livro didático de matemática visa fundamentar alguém – um professor, um leitor, um estudante, um pesquisador – quanto ao uso do material analisado para suas experiências cotidianas, sugerindo possibilidades de utilização e/ou complementações). O adjetivo "histórico", que nomeará outra forma de abordagem nas análises de livros didáticos, evidencia que onde há temporalidade e registro há, de alguma forma, história, portanto, todas as análises de livros didáticos são "históricas" (OLIVEIRA, 2008, p. 207 - 208).

Para Oliveira (2008), os trabalhos que apresentam um caráter "histórico", diferentemente daqueles de caráter "pragmático", que têm por objetivo a sala de aula, buscam contribuir para a escrita de uma História da Educação Matemática. O autor sugere como contribuições possíveis da análise de livros didáticos: o estudo do ensino em instituições, a matemática escolar praticada por uma comunidade em determinado período, a escolarização de uma disciplina, as mudanças provocadas por uma reforma educacional, a caracterização de um período da escolarização, a disciplinarização de um conteúdo e como se constituem as diferentes abordagens para o ensino de um conteúdo matemático no decorrer dos tempos (esses últimos, interesse desta pesquisa).

Pelos motivos apresentados no próximo capítulo, optamos por pesquisar a abordagem dos números complexos, na obra *Matemática 2o Ciclo,* bem como suas transformações e adaptações[7] nas edições de 1944, 1946, 1949, 1955 e 1956.

Esta introdução é o primeiro dos capítulos que compõem esta dissertação.

No segundo capítulo - *Primeiros Passos, Passos Seguintes, Idas e Vindas* - guiaremos você, leitor, pelos caminhos que trilhamos. Apresentaremos a proposta inicial, as mudanças que se fizeram necessárias no decorrer da pesquisa, os acervos de livros antigos que visitamos, nossa busca a fim de identificar a partir de que ano os números complexos passaram a fazer parte dos programas de ensino e, por fim, os motivos que nos levaram a selecionar a obra analisada nesta pesquisa, bem como suas edições.

Em seguida, no capítulo 3 – *Nossos Pilares* – apresentaremos os referenciais metodológicos utilizados como inspiração para esta pesquisa: a Hermenêutica de Profundidade e os Paratextos Editoriais. Comentaremos também sobre as pesquisas do Grupo

---

[7] Consideramos como adaptações as pequenas mudanças detectadas na obra, como, por exemplo, a ordem em que os conteúdos são apresentados, melhorias relacionadas à qualidade gráfica ou editorial; e as transformações como mudanças mais drásticas relativas à apresentação dos conteúdos envolvendo tema (por exemplo, supressão de alguma seção, abordagem distinta para um dos conteúdos), resultantes ou de alterações curriculares ou à forma conceitual de abordar o tema.

de História Oral e Educação Matemática (Ghoem) que utilizaram as mesmas referências metodológicas em suas pesquisas.

Inspiradas nesses referenciais, retrataremos no capítulo 4 – *Análise Sócio-histórica* – os acontecimentos históricos e educacionais, a datar de 1930, considerados por nós relevantes para que a produção e a publicação da obra ocorressem. Apresentaremos um panorama histórico das situações econômicas e sociais do país e discorreremos sobre as Leis Orgânicas do Ensino e seus reflexos no Brasil; dissertaremos sobre o Colégio Pedro II, instituição que foi palco de grandes mudanças educacionais no Brasil e local de trabalho de dois dos autores da série *Matemática 2º ciclo*, Haroldo Lisbôa da Cunha e Euclides Roxo. Em seguida, faremos alguns apontamentos sobre os autores da obra e, na sequência, uma breve biografia dos dois autores acima citados. Por fim, discutiremos algumas relações entre o que foi apresentado até então no capítulo e a produção e publicação da obra *Matemática 2º Ciclo*.

Já no capítulo 5 – *A Série Matemática 2º ciclo* – focaremos nossos olhares para a estrutura das edições de 1944, 1946, 1949, 1955 e 1956 da obra. Analisaremos como foram apresentadas, editadas, como o tema Números Complexos foi nelas desenvolvido e as transformações e adaptações ocorridas ao longo das edições.

Para finalizar, no capítulo 6, em um movimento de reinterpretações, apresentaremos nossas considerações a respeito de todo o movimento de análise desenvolvido.

2 PRIMEIROS PASSOS, PASSOS SEGUINTES, IDAS E VINDAS

Um acervo. Uma estante. Uma prateleira. Um livro.
Espreitando o leitor, um autor. Um Grupo, vários hermeneutas.
Uma pesquisadora constituindo-se hermeneuta ao aventurar-se
a estudar o livro da prateleira da estante do acervo.
(Andrade, 2012, p. 264).

Apresentaremos, neste capítulo, o percurso por nós trilhado durante o desenvolvimento desta pesquisa. Descreveremos as visitas aos acervos, a seleção das obras, além das descobertas e mudanças que foram consolidando o que seria o foco de investigação.

2.1 Acervo de Livros Didáticos Antigos do Ghoem: constituição, recuperação, sistematização e estudo.

Um dos projetos do Ghoem, intitulado *Acervo de Livros Didáticos Antigos: constituição, recuperação, sistematização e estudo*[8], apresenta-se como uma das possibilidades de elaborar versões sobre histórias da Educação Matemática. O objetivo principal desse projeto é estudar os livros que compõem o acervo do grupo e cuidar de sua constante composição e manutenção.

Buscando decidir nossas fontes de investigação e questionando-nos se os livros do acervo apresentariam conteúdos relativos à temática dos números complexos, agendamos uma primeira visita ao acervo em junho de 2013. Nele, existem diversos armários onde os livros estão divididos por categorias: Geometria, Álgebra, Aritmética, Probabilidade, Topologia, Análise, Teoria dos Conjuntos, Lógica e Grupos de Conteúdos. Devido ao nosso interesse por livros didáticos cuja finalidade seria contemplar o nível correspondente ao atual ensino básico, focamos a busca nos livros classificados na categoria Grupos de Conteúdos.

Nosso critério inicial foi pela busca da expressão "números complexos" nos sumários, seções e subseções de cada livro. Nessa busca, com a ajuda das alunas de iniciação científica do Ghoem, do curso de licenciatura em Matemática da Unesp – Bauru, encontramos vários livros, sendo o mais antigo de 1929.

Ao analisarmos o conteúdo daqueles livros, demo-nos conta de que a expressão "números complexos" era, também, designada para fazer referência a quantidades que expressavam múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida. Por exemplo, "9 horas 54

---

[8] Coordenado pelo Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica e pela Profª. Drª. Maria Ednéia Martins Salandim.

minutos e 10 segundos" era chamado número complexo, enquanto "9 horas" era considerado um número incomplexo por expressar apenas um tipo de unidade de medida.

Descartando os livros que caracterizavam os números complexos como descrito acima, pois não correspondiam ao objeto da nossa pesquisa, encontramos 12 títulos em português, listados cronologicamente (período de 1949 a 1977) no Quadro 1 a seguir, que tratam dos números complexos:

QUADRO 1: As 12 obras encontradas no acervo do Ghoem

ANO	OBRA	AUTOR
1949	Matemática 2º ciclo	Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Cesar Dacorso Netto
1948	Curso de Matemática	Algacyr Munhoz Maeder
1954	Álgebra Elementar e Trigonometria	Francis D. Murnaghan
1956	Curso de Matemática	Algacyr Munhoz Maeder
1956	Matemática para os cursos clássico e científico	Thales Mello Carvalho
1960	Matemática	Ari Quintella
1966	Matemática	School Mathematics Study Group[9]
1970	Matemática: curso colegial moderno	Luiz Mauro Rocha e Ruy Madsen
1976	Curso de Matemática	Manoel Jairo Bezerra
1977	Matemática	Scipione di Pierro Netto e Célia Contin Goes
1977	MAI (Matemática Auto-Instrutivo)	Aida F. da Silva Munhoz e Iracema Ikiezaki
	Matemática na Escola Renovada[10]	Scipione di Pierro Netto e Célia Contin Goes

Fonte: Acervo Ghoem

Com a seleção desses 12 livros, estávamos dispostas a evidenciar: "Que transformações e adaptações ocorreram na abordagem dos números complexos em livros didáticos do período de 1949 a 1977[11]?" Essa pergunta e uma colocação da professora Maria Laura Magalhães Gomes em seu parecer sobre nosso projeto em um dos Ciclos de Seminários do Ghoem nos motivaram a pesquisar a partir de que período os números complexos surgiram nos programas de ensino e, consequentemente, nos livros didáticos.

2.2 Os Números Complexos nos Livros Didáticos

Buscando referências para descobrir a partir de que momento os números complexos surgiram nos programas de ensino do país, deparamo-nos com a tese de doutorado de Dassie (2008), intitulada "Euclides Roxo e a Constituição da Educação Matemática no Brasil". A partir do contato com os programas de ensino para a Escola Normal que, segundo Dassie (2008), eram os mesmos da escola secundária, notamos que a expressão "números complexos" estava presente nos programas de ensino para os anos de 1915 a 1928. No

[9] Embora o livro tenha sido desenvolvido pelo School Mathematics Study Group nos Estados Unidos, a obra é apresentada em português.
[10] Não consta na obra o ano de publicação.
[11] Período determinado a partir das obras encontradas.

entanto, como mencionamos anteriormente, essa expressão também era utilizada para designar quantidades que expressavam múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida.

A distinção entre ambas as designações foi possível a partir da observação dos conteúdos que são trabalhados em torno do conceito dos números complexos. No caso dos programas de ensino do período de 1915 a 1928, um dos tópicos de aritmética é estruturado da seguinte forma: sistema métrico decimal, medidas de grandezas, sistema monetário, números complexos. Essa estrutura nos mostrou que a expressão “números complexos”, ali empregada, não era o que buscávamos em nossa pesquisa.

Dessa forma, foi possível evidenciar que, até a década de 1930, os números complexos, segundo a nossa perspectiva, não estavam presentes nos programas de ensino brasileiros. Passamos, então, a buscar evidências a partir de 1930.

Em 1931, o então primeiro ministro da Educação e Saúde Pública, Francisco Campos, remodelou o programa do ensino secundário brasileiro. Segundo o decreto nº 19.890, o ensino secundário passou a ser constituído por dois cursos seriados: o fundamental (5 anos) e o complementar[12] (2 anos). A parte relativa à Matemática passou a tomar como base a proposta da Congregação do Colégio Pedro II, idealizada por Euclides Roxo[13] (1890 – 1950) (MIORIM, 1998). Essa reforma ficou conhecida como reforma Francisco Campos.

Passamos a buscar fontes que evidenciassem o surgimento dos números complexos na reforma Francisco Campos. Com a leitura do texto *História do Ensino da Matemática: uma introdução* (GOMES, 2013), tivemos conhecimento do *Novíssimo Programa do Ensino Secundário* (Figura 1), nos termos do artigo 10 do decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931. Tal documento apresenta uma lista dos tópicos trabalhados em cada uma das cinco séries do curso fundamental. Ao analisarmos os tópicos, não encontramos qualquer referência às expressões “Números Complexos” ou “Número Imaginário”.

Com Ribeiro e Valente (2007), soubemos que os números complexos estavam presentes em um dos programas do curso complementar[14], o pré-politécnico. O tópico referente ao conteúdo apresenta-se da seguinte forma: *Números Complexos, Operações,*

---

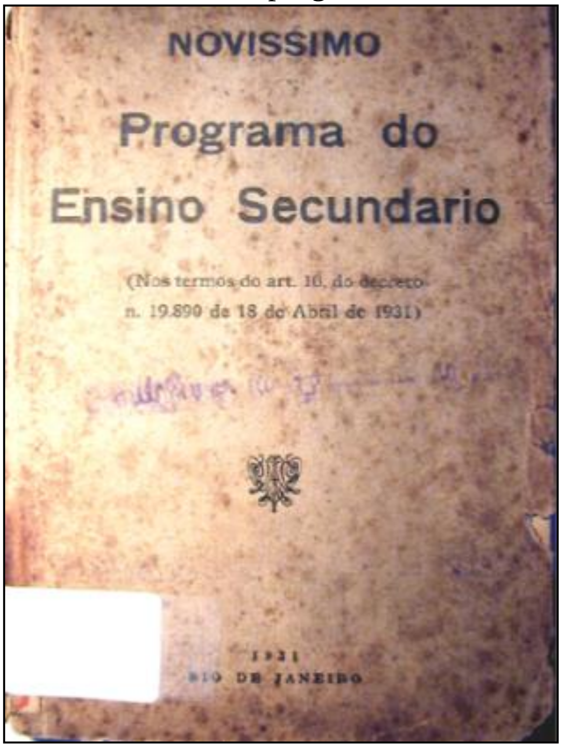
[12] O curso Complementar era obrigatório aos candidatos à matrícula em determinados institutos de ensino superior (Art. 4º).

[13] Professor de Matemática e posteriormente diretor do Colégio Pedro II, autor de diversos livros didáticos brasileiros de Matemática. Foi convidado por Francisco Campos para compor uma comissão que elaboraria um projeto de reforma do ensino brasileiro (VALENTE, 2004). Falaremos mais sobre o autor nos próximos capítulos.

[14] Eram três as possibilidades de curso complementar: o pré-jurídico, o pré-médico (para os candidatos a medicina, farmácia ou odontologia) e o pré-politécnico (candidatos a engenharia ou arquitetura).

Expoente Imaginário, Representação Geométrica e Exponencial, Logaritmos e Linhas Trigonométricas de Números Complexos, Aplicação às Operações Vetoriais no Plano.

Figura 1 - Folha de rosto do programa do ensino secundário



Fonte: cópia digital fornecida por Maria Laura Magalhães Gomes

Entretanto, ao analisar a Matemática do curso complementar da reforma Francisco Campos em sua dissertação de mestrado, Otone e Silva (2006), sob a ótica de André Chervel, afirma que esses cursos não se constituíram como disciplina escolar, por, diferentemente das outras modalidades de ensino, demandarem professores licenciados e serem muitas vezes mantidos anexos aos institutos superiores oficiais, dentre outros fatores. Logo, os números complexos não foram introduzidos no ensino brasileiro a partir da reforma Francisco Campos.

Em 1934, Gustavo Capanema assumiu o Ministério da Educação e Saúde e, em 1936, iniciou os trabalhos para a elaboração do Plano Nacional de Educação. Porém, por conta do golpe de Estado[15], que instaurou em 10 de novembro de 1937 o Estado Novo, o plano só foi posto em prática em 9 de abril de 1942 por meio da Lei Orgânica do Ensino Secundário[16] n° 4.244 que, posteriormente, ficou conhecida como reforma Capanema[17] (DASSIE; ROCHA, 2003).

---

[15] O golpe do Estado Novo foi liderado pelo então presidente Getúlio Vargas. Além de mantê-lo na presidência, o golpe instaurou um regime extremamente autoritário. Falaremos mais sobre o golpe no capítulo 5.

[16] Essa lei vigorou até 1961 quando em 20 de dezembro, através do Decreto nº 4.024, foi aprovada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

[17] Abordaremos a reforma com mais profundidade no capítulo 5.

A reforma Capanema dividiu o ensino secundário em dois ciclos: o curso ginasial com duração de quatro anos e o clássico e científico, com duração de três anos. Os cursos clássico e científico tinham por objetivo consolidar a educação ministrada no curso ginasial e bem assim desenvolvê-la e aprofundá-la. (Art. 4). Segundo Dassie (2001), para Gustavo Capanema, os dois cursos não constituíam rumos diferentes da vida escolar, ambos dariam o direito ao ingresso em qualquer modalidade de curso do ensino superior. No entanto, o curso clássico era focado no estudo das letras antigas[18], enquanto o científico era marcado por um estudo maior das ciências (Art. 4). Como os cursos clássico e científico apresentavam enfoques diferentes, os programas de ensino de Matemática eram distintos (ANEXO A).

Uma primeira versão do programa de matemática dos cursos clássico e científico foi enviada por Euclides Roxo para Gustavo Capanema em uma carta manuscrita (DASSIE, 2001). Encontravam-se, na terceira série do curso científico, os seguintes tópicos:

Figura 2 – Unidade proposta por Euclides Roxo para o curso científico

Unidade VIII - Números complexos: 1 - Definição; operações fundamentais. 2 - Representação trigonométrica e exponencial.3 - Aplicação às operações vetoriais no plano e à representação geométrica das potências racionais da unidade. 4. Aplicação à resolução das equações trinômicas.

Fonte: Dassie (2001)

Segundo Dassie (2001), como de costume, Gustavo Capanema enviou uma cópia do programa para Arlindo Vieira, então professor do Colégio Militar Santo Inácio, no Rio de Janeiro, e para o ministro da Guerra[19]. Após várias observações do Colégio Militar, de Arlindo Vieira e, posteriormente, de Azevedo Amaral[20], o programa do curso científico proposto por Euclides Roxo foi mantido na terceira série, porém sofreu algumas alterações:

Figura 3 – Unidade do programa do curso científico

Unidade IV - Números complexos: 1 - Definição; operações fundamentais. 2 - Representação trigonométrica e exponencial.3 - Aplicação à resolução das equações binômias.

Fonte: Dassie (2001)

Podemos notar que, na primeira proposta do programa, os números complexos são abordados na Unidade VIII, já na versão que se consolidou como oficial são abordados na Unidade IV. Essa diferença se dá devido à ordem da apresentação dos conteúdos. No primeiro

---

[18] Além do Português, eram ministradas as seguintes disciplinas: Latim, Grego, Francês, Inglês e Espanhol.
[19] "O parecer concernente ao exército foi redigido pelo coronel Oscar Araújo Fonseca, em 18 de junho de 1942, a pedido do Ministro da Guerra" (DASSIE, 2001).
[20] Em 1938, passou a integrar o Conselho Nacional de Educação e, na época da reforma, era novamente membro do conselho técnico-administrativo da Escola Nacional de Engenharia da UB (Universidade do Brasil).

caso, são apresentados na seguinte ordem: Geometria, Álgebra e Geometria Analítica; já na versão oficial, os conteúdos referentes à Álgebra são os primeiros a serem apresentados.

Em ambos os casos, as *Equações Algébricas*[21] são trabalhadas após os *Números Complexos*, porém, as unidades que precedem o conteúdo são distintas. Na proposta inicial de Euclides Roxo, *Primitivas*[22] antecede *Números Complexos*. Na versão oficial, *Derivadas*[23] precede *Números Complexos,* uma vez que a unidade *Primitivas* foi cortada do Programa.

Com relação à Unidade dos números complexos, as definições e operações fundamentais assim como a representação trigonométrica e exponencial foram mantidas, enquanto que as aplicações às operações vetoriais no plano e à representação geométrica das potências racionais da unidade foram cortadas do programa, e o tópico "Aplicação à resolução das equações trinômicas" foi limitado às equações binômicas.

Essa nova estrutura do ensino secundário nos leva a concluir que foi com a reforma Capanema que os números complexos foram introduzidos nos programas de ensino nacionais. Levando em consideração essa informação, voltamos a analisar a lista de obras encontradas no acervo do Ghoem. Notamos que uma delas – Matemática 2º ciclo – tinha como um de seus autores o professor Euclides Roxo que foi extremamente influente na elaboração do currículo de Matemática do ensino básico do país, principalmente no que diz respeito às reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema.

Buscando outros títulos, direcionados ao ensino secundário, que tenham sido publicados no início da década de 1940, notamos que a série *Matemática 2º ciclo* foi publicada logo após o decreto da Lei Orgânica do Ensino Secundário. Essa constatação, a importância de seus autores, professores do Colégio Pedro II e do Instituto de Educação, o tempo restrito para o desenvolvimento da pesquisa e as sugestões da banca examinadora na ocasião da qualificação da pesquisa direcionaram nossos estudos para a análise da abordagem do tema dos números complexos nessa obra em especial.

Assim, foi objetivo desta pesquisa um movimento de análise na direção das seguintes questões: "De que maneira os números complexos são abordados na série *Matemática 2º*

---

[21] 1. Propriedades gerais dos polinômios. 2. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica; aplicação à composição das equações. 3. Noções sobre transformações das equações; equações recíprocas; equações de raízes iguais.

[22] 1. Definição; interpretação geométrica. 2. Primitivação e integração imediata; noção de integral definida. 3. Aplicação ao cálculo de certas áreas e dos volumes da pirâmide, do cone e da esfera. 4. Problemas sobre o cálculo dos volumes.

[23] 1. Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2. Cálculo das derivadas. 3. Derivação das funções elementares. 4. Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

ciclo? Como e quais acontecimentos sóciopolíticos podem ter sido relevantes para a produção e publicação da obra e, mais especificamente, para a abordagem nela dada aos números complexos? O capítulo sobre números complexos segue as diretrizes da reforma Capanema? As ideias difundidas pelos autores são contempladas no capítulo dos números complexos? Ocorreram transformações e/ou adaptações na abordagem do tema ao longo das edições publicadas?”.

A série *Matemática 2º ciclo* prosperou por mais de duas décadas e teve cerca de dez edições publicadas (VALENTE, 2011). Para discutir as questões elencadas acima, consideramos fundamental ter acesso ao maior número possível de edições da obra. Para isso, optamos por visitar outros acervos de livros antigos em busca de diferentes edições.

2.3 Acervo do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil

Tendo conhecimento que o Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (Ghemat) abriga o arquivo pessoal de Euclides Roxo, doado pelo seu filho Stélio Roxo, agendamos para o dia 09 de junho de 2015 uma visita ao acervo do grupo, que fica localizado na cidade de Osasco/SP.

Enquanto aguardávamos o dia da visita, foi-nos disponibilizado por uma das integrantes do Ghemat um arquivo[24] de 115 páginas com a listagem de todo o material que compõe o arquivo pessoal de Euclides Roxo.

Como o horário de acesso ao acervo é limitado (das 10h às 15h), optamos por selecionar previamente os documentos que pretendíamos consultar. Os documentos textuais do arquivo ER (como é tratado o arquivo de Euclides Roxo pelo grupo) são divididos em quatro séries:

Série 1 – Pessoal, constituída por documentos pessoais do titular do arquivo;

Série 2 – Técnico-administrativa, constituída por documentos que retratam a atuação profissional do titular do arquivo, notadamente nos cargos administrativos que ocupou;

Série 3 – Produção intelectual, constituída por documentos que retratam a produção intelectual do titular do arquivo nos diversos campos de saber em que atuou, além de trabalhos de terceiros sobre Euclides Roxo;

Série 4 – Documentos complementares, constituída por documentos diversos aos das séries anteriores.

[24] Esse arquivo está disponível no seguinte *link*: http://www2.unifesp.br/centros/ghemat/images/stuffs/E_ROXO

Figura 4 – Exemplo da listagem do arquivo pessoal de Euclides Roxo

ER T 3 013

Documento intitulado: "Esboço do Programa de Matemática para o curso secundário de acordo com a Associação Brasileira de Ensino." – Rio de Janeiro, sem data. 5f.

Fonte: *Site* do Ghemat

A listagem dos documentos é catalogada, como mostra a Figura 4. A sigla ER indica que o documento pertence ao arquivo pessoal de Euclides Roxo. A letra T é um código para o tipo do documento - T (documento textual), F (fotografia), I (impresso) – e os números 3 e 013 representam que esse é o décimo terceiro documento da série 3.

Ao chegarmos ao acervo, fomos muito bem recebidos e todo o material foi colocado à nossa disposição. A opção de selecionarmos previamente os materiais foi de grande ajuda, uma vez que possibilitou focarmos a busca nos assuntos de nosso interesse.

Tivemos a oportunidade de consultar matérias de jornais da época (década de 1940), fotos, rascunhos, holerites, telegramas e várias cartas manuscritas pelo próprio Euclides Roxo, um material extremamente rico. No que se refere aos livros didáticos, encontramos no acervo a edição de 1956 do terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo*, e, no *site* do grupo encontramos, parcialmente disponível, uma edição de 1946 do mesmo volume.

Quadro 2 – Edições encontradas no acervo Ghemat

Matemática 2º ciclo	
Ano	**Edição**
1946	2ª
1956	5ª

Fonte: Acervo do Ghemat

Na visita ao acervo do Ghemat, indicaram-nos o Repositório[25] Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), que conta com uma grande variedade de materiais digitalizados. Durante todo o tempo da pesquisa, acessamos regularmente o repositório em busca de novos materiais. Após mais de um ano acompanhando o *site*, foi disponibilizada a edição de 1955 do terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo*.

Quadro 3 – Edições encontradas no Repositório Institucional da UFSC

Matemática 2º ciclo	
Ano	**Edição**
1955	4ª

Fonte: Repositório da UFSC

[25] https://repositorio.ufsc.br/

Os materiais consultados por nós no acervo do Ghemat foram fotografados. As imagens possibilitaram-nos uma análise mais completa acerca dos pensamentos e da vida de Euclides Roxo, e a edição encontrada no repositório possibilitou a comparação entre as edições da obra utilizadas nesta pesquisa.

2.4 Bibliotecas da Unicamp

Sempre que necessário, buscamos apoio nas bibliotecas da Unicamp. Por se tratar de uma universidade com uma grande diversidade de livros em suas bibliotecas, constantemente atendeu as nossas expectativas. Após decidirmos focar o terceiro volume da série *Matemática 2ºciclo*, fizemos uma busca nas bibliotecas para tentar encontrar outras edições da obra.

Como apontaremos no Quadro 4 abaixo, encontramos duas edições do terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo.* Elas se localizam nas bibliotecas do Instituto de Geociências (IG) e do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE).

Quadro 4 – Edições encontradas na Unicamp

Matemática 2º ciclo		
Ano	**Edição**	**Localização**
1944	-	CLE
1956	5ª	IG[26]

Fonte: Bibliotecas da Unicamp

Assim, foi a partir das edições do terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo* encontradas nas bibliotecas da Unicamp, nos acervos do Ghoem e do Ghemat e no repositório (1944, 1946, 1949, 1955 e 1956) que realizamos as análises acerca do modo como os números complexos foram abordados na coleção. Para esse fim, apoiamo-nos no referencial metodológico conhecido como Hermenêutica de Profundidade, bem como na noção de Paratextos, que fornecem ferramentas para análise de livros didáticos. É sobre esse assunto que trataremos no capítulo que se segue.

[26] Embora constasse no sistema de busca, essa obra não estava disponível na biblioteca.

3 NOSSOS PILARES

Em 2002, deu-se início, no âmbito do Ghoem, ao Projeto de Mapeamento da Formação e Atuação de Professores de Matemática no Brasil[27]. Como já fica explícito no título, o projeto tem por objetivo pesquisar a formação e a atuação de professores de Matemática no Brasil, ao longo dos anos, a partir de testemunhos orais.

Buscando compreender a cultura escolar na qual a Matemática está inserida, os pesquisadores foram se deparando com a necessidade de mobilizar outras fontes, além das orais (instituições formadoras, espaços arquitetônicos, materiais didáticos, etc.). O estudo dessas fontes tem exigido dos pesquisadores a utilização de metodologias apropriadas.

A fim de avaliar as possibilidades metodológicas para a análise de uma dessas fontes, os materiais didáticos, Oliveira (2008) buscou identificar, nas pesquisas já realizadas, práticas "adequadas" aos olhos do Ghoem. Por meio desse movimento, apropriou-se, em sua dissertação de mestrado, das ideias de Thompson (1995) para a análise de formas simbólicas[28] e as adaptou para uma forma simbólica específica: os textos didáticos.

Após estarem mais claras as potencialidades da Hermenêutica de Profundidade (HP) para a Educação Matemática e, especialmente, para a História da Educação Matemática, o Ghoem passou a desenvolver estudos que mobilizam esse referencial teórico metodológico. É nessa perspectiva que nossa pesquisa se enquadra nos objetivos do grupo. Pretendemos constituir uma versão da história da abordagem dos números complexos nos programas de ensino e, consequentemente, na obra selecionada.

3.1 O Livro Didático como uma Forma Simbólica

Segundo Thompson (1995, p. 79), formas simbólicas são "ações e falas, imagens e textos, que são produzidos por sujeitos e reconhecidos por eles e outros como construtos significativos". Imagine o sol, quando um indivíduo o representa, seja por meio de um desenho, de uma escultura, ou de qualquer outra manifestação. Ele constrói essa representação pensando em algo, querendo transmitir algo para alguém, com alguma intenção. Essas intenções caracterizam a representação do sol como uma forma simbólica.

[27] Mais informações sobre o projeto e as pesquisas desenvolvidas estão disponíveis no livro organizado por Antonio Vicente Marafioti Garnica: Cartografias Contemporâneas – Mapeando a Formação de Professores de Matemática no Brasil (2013).

[28] Formas simbólicas são criações humanas intencionais. Explicaremos esse conceito com mais detalhes adiante.

Imagine agora o sol, fenômeno natural. Descartando a existência de um ser superior que o tenha produzido, não podemos caracterizá-lo como uma forma simbólica, uma vez que não foi produzido por alguém, para alguém, com alguma intenção.

O livro didático, assim como a representação do sol, é um material produzido em determinado contexto, por alguém, para alguém, com alguma intenção. A conceituação de Thompson (1995) nos possibilita partir do pressuposto de que o livro didático é uma forma simbólica e nos permite analisá-lo a partir da Hermenêutica de Profundidade.

As formas simbólicas, segundo Thompson (1995), são constituídas por cinco aspectos: intencional, convencional, estrutural, referencial e contextual.

Toda forma simbólica tem a intenção de passar uma informação. Cada sujeito tem a liberdade de interpretar essas intenções da maneira que, para ele, se assemelha às intenções concebidas pelo autor: “[...] toda interpretação traz em si um desejo (que fracassa) de chegar à intenção do autor” (ANDRADE; OLIVEIRA, 2014, p. 25).

No caso do livro didático de Matemática, uma das intenções do autor é transmitir ao leitor informações a respeito de um conteúdo matemático. Em meio a esses conteúdos, o autor pode ter a intenção de transmitir sua opinião sobre algo além da matemática. Esses movimentos podem acontecer a partir de exemplos, notas de rodapé ou até por meio de figuras, mas nada garante que sua mensagem chegará ao leitor, uma vez que são singulares as maneiras como os indivíduos interpretam o mundo, seus objetos e fenômenos.

O aspecto convencional é caracterizado por regras, códigos e convenções que possibilitam a comunicação entre autor e leitor. Assim, para que um sujeito compreenda um livro didático estrangeiro, é preciso que ele tenha conhecimento da língua original do autor (ANDRADE; OLIVEIRA, 2014). Para que o leitor compreenda um livro didático de Matemática, é preciso que ele tenha conhecimento da linguagem matemática.

O livro didático é estruturado por capítulos que tratam de diferentes conteúdos, que não são dispostos aleatoriamente. O material é estruturado de forma que os pré-requisitos considerados necessários para trabalhar um determinado capítulo, por exemplo, tenham sido trabalhados nos capítulos anteriores. Os exemplos, exercícios propostos e imagens também são convenientemente estruturados.

Segundo Andrade (2012, p. 28), as formas simbólicas “[...] se constituem envoltas em um contexto, são produzidas sob determinadas condições sociais e históricas, conectadas a uma época, a um “mundo” e a indivíduos específicos que compõem esse mundo e essa época”. Compreender esse contexto possibilita entender a maneira como a forma simbólica se apresenta. Negligenciar os contextos de produção, de transmissão e de apropriação pode tornar frágil a análise da obra.

Ao tornar o objeto uma forma simbólica, o sujeito que a interpreta não necessariamente percebe todas as intenções do autor criador do objeto. Por esse e pelos aspectos que caracterizam toda forma simbólica, na perspectiva de Thompson (1995) e de Andrade e Oliveira (2014), uma análise mais profunda significa um olhar atento para os aspectos a que ela se refere. “Se o autor tem a intenção de dizer algo (aspecto intencional), certamente dirá algo sobre alguma coisa (aspecto referencial), objeto de sua produção” (ANDRADE; OLIVEIRA, 2014, p. 27). O aspecto referencial do livro didático de Matemática é composto pela matemática, pelos aspectos didáticos e pedagógicos da obra. Podemos assim, segundo Oliveira (2008), considerar a educação matemática como o objeto referencial do livro didático.

Desse modo, ao analisar o terceiro volume da série *Matemática 2º Ciclo* como forma simbólica, estivemos atentas ao que, possivelmente, influenciou os autores a escreverem tal obra, em que contexto ela foi escrita, produzida e comercializada. No que tange aos números complexos, deveremos questionar, por exemplo: “Qual a importância dada a esse tema que veio a impulsionar, na ocasião da reforma Capanema, sua introdução no currículo/livro didático dos cursos clássico e científico do ensino secundário? Como os autores introduzem o tema nessa coleção? Quais notações são utilizadas? Que importância é dada às formas algébrica e trigonométrica de um número complexo? As interpretações geométrica, exponencial e vetorial de um número complexo são tratadas? De que modo? Que tipo de problemas ou exercícios é proposto? As diferentes edições dessa coleção apresentam diferenças nas abordagens aos números complexos?”.

Considerando os cinco aspectos característicos de uma forma simbólica e essas nossas indagações, buscamos reafirmar o terceiro volume da série *Matemática 2º Ciclo* como forma simbólica, após finalizarmos o processo analítico do trabalho. Para tanto, inspiramo-nos na metodologia da Hermenêutica de Profundidade para realizarmos tal análise. É sobre essa metodologia que discutiremos no próximo item.

3.2 Hermenêutica de Profundidade

A Hermenêutica de Profundidade foi desenvolvida pelo sociólogo britânico John B. Thompson em sua obra *Ideologia e Cultura Moderna* (1995) com o intuito de analisar meios de comunicação em massa. Segundo Andrade (2012), o termo “hermenêutica”

> [...] tem sua origem vinculada ao verbo grego *hermeneuien* que significa "interpretar" e ao substantivo *hermeneia* que corresponde, mais usualmente, à "interpretação", sendo que esses dois termos se remetem a Hermes (a quem os gregos atribuíam a descoberta da língua e da escrita) (ANDRADE, 2012, p. 33).

Dessa maneira, assumimos Hermenêutica como sendo "[...] uma classe de teorias cujo objetivo é estudar e propor sistematizações (teóricas) sobre o que é interpretar e como se interpreta" (ANDRADE; OLIVEIRA, 2014, p. 17). Segundo esses mesmos autores, a hermenêutica é mais do que uma mera atividade descritiva:

> Toda informação leva a outra informação, toda descoberta induz novas descobertas, novos detalhes, outras "amarrações". O contexto fala do texto, fixa o texto num lugar, num espaço; e o texto é essencial para indicar o contexto, para sugerir buscas. Essa talvez seja mais uma justificativa para essa hermenêutica carregar o adjetivo "de Profundidade": ela aposta nas inúmeras possibilidades de compreender as tramas entre materialidade e ideologia quando entrelaçamos textos e contextos (ANDRADE; OLIVEIRA, 2014, p. 31).

A HP é constituída por três dimensões, *Análise Sócio-Histórica*, *Análise Formal ou Discursiva* e *Interpretação/Reinterpretação*. Embora explicadas a seguir individualmente, durante o exercício hermenêutico essas dimensões são mobilizadas simultaneamente. Veremos nos próximos parágrafos que Thompson apresenta algumas subcategorias de análise em cada dimensão. Essas subcategorias não são elementos obrigatórios da HP, são possibilidades de análise.

Segundo Thompson (1995, p. 366), "o objetivo da análise sócio-histórica é reconstruir as condições sociais e históricas da produção, circulação e recepção das formas simbólicas". Essa dimensão é constituída por cinco tipos específicos de análise: a dos espaço-temporais, a dos campos de interação, a das instituições sociais, aquela referente à estrutura social e, por fim, a que se dirige aos meios técnicos de construção e transmissão.

As formas simbólicas são produzidas e recebidas por pessoas em determinados lugares e tempos (*espaço-temporais*); dessa maneira, é importante reconstituir esses ambientes. Assim, ao analisarmos os livros didáticos, devemos levar em consideração o tempo e o local em que seus autores produziram suas obras, ponderando se e como essas dimensões têm relações diretas com as obras produzidas.

Os *campos de interação* estão relacionados

> à reconstrução do 'ambiente' em que as instituições se constituem e são constituídas pelas instituições. É o 'espaço de circulação' da obra, de seus autores, editores, leitores e as relações de poder que estabelecem entre ela e seus 'interlocutores', o ambiente cultural em que vivem e no qual a obra é produzida (ANDRADE; OLIVEIRA; SILVA, 2013, p. 126).

São espaços onde as instituições se constituem. São um conjunto de posições e trajetórias que “[...] conjuntamente determinam algumas das relações entre pessoas e algumas oportunidades acessíveis a elas” (THOMPSON, 1995, p. 366). Em consequência dos campos de interação, alguns sujeitos, por conta de seus contatos e relações, têm acessibilidade diferenciada. É, por exemplo, “o que mantém um autor renomado publicando sem que sua obra necessite passar pelos crivos que as dos novos autores são submetidas, ou ainda, o que faz com que o título de um livro seja alterado para que sua atratividade comercial seja elevada”. (OLIVEIRA, 2008, p. 40).

As *instituições sociais* também podem ser importantes para a reconstrução das condições sociais e históricas. Segundo Thompson (1995, p. 367), “analisar instituições sociais é reconstruir os conjuntos de regras, recursos e relações que as constituem, é traçar seu desenvolvimento através do tempo e examinar as práticas e atitudes das pessoas que agem a seu favor e dentro delas”. Assim, ao analisar os livros didáticos, devemos estar atentos às instituições sociais que estão atreladas a eles, à época em que foram produzidos, bem como precisamos examinar os aspectos de tais instituições.

Pode-se analisar também a *estrutura social*, atentando para “diferenças de raça, gênero, e tantas outras categorias que o pesquisador puder identificar que geram diferenças relativamente estáveis” (OLIVEIRA, 2008, p. 40) no modo como a sociedade funciona. A estrutura social de uma época e lugar pode dizer muito sobre aspectos da obra analisada.

Toda forma simbólica necessita de *meios técnicos de construção e transmissão*. Cabe ao pesquisador analisar, portanto, que possíveis influências esse meio pode exercer ou ter exercido sobre a produção e, talvez, recepção da forma simbólica (no nosso caso, o livro didático) na ocasião em que foi publicada/transmitida/escrita.

As análises *sócio-históricas* possibilitam que o pesquisador se aproprie da forma simbólica e compreenda os meios em que ela foi produzida, recebida, distribuída e divulgada.

Outra dimensão da HP é aquela que trata da chamada *análise formal ou discursiva*, que busca identificar “características estruturais internas, seus elementos constitutivos e inter-relações, interligando-os aos sistemas e códigos dos quais eles fazem parte” (THOMPSON, 1995, p. 370). No caso dos livros didáticos, tal análise se direciona para a sequenciação, a apresentação dos conteúdos, os elementos linguísticos, os materiais de composição, dentre outros.

O momento da análise *formal e discursiva* pode ser constituído por diferentes tipos de análise. Com uma *análise semiótica* buscar-se-ia analisar as características internas de uma obra, os elementos que a constituem e de que forma eles se relacionam. Na *análise sintática*, o foco estaria na categorização das palavras e da gramática. A forma como a história é contada ou como os conteúdos do livro didático são apresentados, em nosso caso específico, faz parte de uma *análise narrativa*. A *análise argumentativa* observa a sequência dos conteúdos, a coerência e a harmonia da obra. Uma possibilidade destacada por Thompson (1995), mas não cogitada nesta pesquisa, por ser seu objeto uma obra escrita, é a *análise de conversação*, que está ligada à fala e à maneira como ela é produzida. Em nosso caso, ela torna-se uma análise narrativa e argumentativa.

A terceira dimensão, a *Interpretação/Reinterpretação*, é o momento em que o pesquisador conecta todos os momentos da análise e elabora comentários gerais de todo o processo de interpretação da forma simbólica. Esse momento de Interpretação/Reinterpretação "permite a produção de significados plausíveis, constituindo, assim, uma metodologia da interpretação das formas simbólicas" (OLIVEIRA, 2008, p. 38).

Segundo Thompson (1995), a HP não é um método "autossuficiente",

> [...] apesar de recomendar e defender esse referencial, acredita que ele, por si só, em alguns casos, não dá conta de responder perguntas a priori e que, no decorrer do exercício interpretativo, outros métodos podem surgir, sendo alguns mais adequados que outros, dependendo do objeto específico de análise e das circunstâncias da investigação (ANDRADE, 2012, p. 43 - 44).

Nesse sentido, concordamos com a afirmação de Andrade e Oliveira (2014) de que essa característica marca a flexibilidade do Referencial Metodológico da HP, possibilitando "diferentes tipos de análise e [...] a escolha, dentre esses tipos, daquele(s) que mais se aproxima(m) do que o hermeneuta pode efetivar ou se dispõe a efetivar" (ANDRADE; OLIVEIRA, 2014, p. 40).

Considerando os objetivos e o objeto desta pesquisa, optamos por atrelar à HP os *Paratextos* de Genette (2009), a fim de potencializar a análise que envolve o terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo*. Explicamos por que no item que se segue.

3.3 Paratextos Editoriais

A obra de Gérard Genette, intitulada *Seuils,* publicada na França em 1987 e traduzida para o português sob o título Paratextos Editoriais em 2009, apresenta, discute e exemplifica o conceito de paratextos.

A HP e os paratextos demonstram algumas dissonâncias. Enquanto a HP foi idealizada para a análise de qualquer forma simbólica, a proposta de Genette é específica para a análise de livros. Outra dissonância é a definição de texto. Para Thompson, que se baseia em Paul Ricoeur, tudo é texto. No caso específico de um livro, a capa, a folha de rosto, o sumário e os demais elementos que o constituem são textos. Já Genette "considera como 'texto' apenas o 'miolo' de um livro, o texto escrito que compõe seu interior" (ANDRADE; OLIVEIRA, 2014, p. 33). Dessa forma, os paratextos de Genette são textos para Thompson.

> A obra literária consiste, exaustiva ou essencialmente, num texto, isto é (definição mínima), numa sequência mais ou menos longa de enunciados verbais mais ou menos cheios de significação. Contudo, esse texto raramente se apresenta em estado nu, sem o reforço e o acompanhamento de certo número de produções, verbais ou não, como um nome de autor, um título, um prefácio, ilustrações, que nunca sabemos se devemos ou não considerar parte dele, mas que em todo o caso o cercam e o prolongam, exatamente para *apresentá-lo*, no sentido habitual do verbo, mas também em seu sentido mais forte: para *torná-lo presente*, para garantir sua presença no mundo, sua "recepção" e seu consumo, sob a forma, pelo menos hoje, de um livro (GENETTE, 2009, p. 9).

Para Genette (2009, p. 9), "[...] paratexto é aquilo que por meio de um texto se torna livro e se propõe como tal a seus leitores, e de maneira mais geral, ao público". Entendemos os paratextos como elementos que se relacionam e que contribuem para que o texto produza sentido. Nome do autor, título, dedicatórias, epígrafes, prefácio, intertítulos, notas, nome de coleção e nome de editor são exemplos de paratextos.

Podemos, então, pensar o livro didático como uma junção do texto (o conteúdo, o miolo) e alguns paratextos. Alguns, pois, posteriormente, ao classificarmos os paratextos, ficará claro que alguns deles não estão presentes no livro e sim em seu entorno, como, por exemplo, entrevistas com os autores e materiais de divulgação da obra.

No francês, idioma original da obra, o prefixo *para* muitas vezes é ambíguo, segundo uma nota de rodapé do próprio Genette,

> Para é um prefixo antitético que designa ao mesmo tempo a proximidade e a distância, a semelhança e a diferença, a interioridade e exterioridade [...], uma coisa que se situa ao mesmo tempo aquém e além de uma fronteira, de um limiar ou de uma margem, de estatuto igual e, no entanto, secundário, subsidiário, subordinado, como um convidado para seu anfitrião, um escravo para seu senhor. Uma coisa em *para* não está somente e ao mesmo tempo dos dois lados da fronteira que separa o interior do exterior: ela é também a própria fronteira, a tela que se torna membrana permeável entre o dentro e o fora. Ela opera sua confusão, deixando entrar o exterior e sair o interior, ela os divide e une (2009, p. 9, apud "The Critic as Host", Deconstruction and Criticism, New York, The Seabury Press, 1979, p. 219).

Ainda, segundo o mesmo autor,

> [...] definir um elemento de paratexto consiste em determinar seu lugar (pergunta *onde?*), sua data de aparecimento e às vezes de desaparecimento (*quando?*), seu modo de existência, verbal ou outro (*como?*), as características de sua instância de comunicação, destinador e destinatário (*de quem? a quem?*) e as funções que animam sua mensagem: *para fazer o quê?* (GENETTE, 2009, p. 12).

Em sua fala, Genette ressalta também que a presença de mensagens paratextuais não possui uma regularidade. Por exemplo: alguns livros possuem prefácio, outros não, e, embora não exista texto sem paratexto, existem paratextos sem textos, pois, por exemplo, sabemos da existência de alguns livros, de seus títulos, mas não conhecemos de fato o texto.

Cada obra contém notas "[...] dirigidas apenas a *certos* leitores" (GENETTE, 2009, p. 11, destaque do autor). Elementos como o título, por exemplo, dirigem-se ao público em geral, enquanto o prefácio dirige-se apenas aos leitores do texto. Outros elementos, como o *release*, dirigem-se aos críticos. Ainda assim, nada implica que, tendo sido registrado, o paratexto será efetivamente lido ou considerado.

Todo paratexto "tem necessariamente um lugar, que se pode situar em relação àquele do próprio texto" (GENETTE, 2009, p. 12) e pode estar em torno do texto e/ou inserido no texto. Paratextos internos são definidos por Genette como "peritextos". Algumas mensagens como entrevistas, conversas, correspondências e diários se situam na parte externa do livro. Essas mensagens são classificadas como "epitextos". A partir dessas definições, podemos retratar o paratexto como a união dos peritextos com os epitextos.

Genette apresenta algumas classificações de ordem temporal e espacial dos paratextos:

- **Paratextos anteriores**: são elementos produzidos anteriormente à data de aparecimento do texto, como, por exemplo: panfletos, elementos de uma pré-publicação, propagandas do lançamento;
- **Paratextos originais**: elementos que surgem ao mesmo tempo em que o texto;
- **Paratextos posteriores**: aparecem após a publicação do texto, como, por exemplo: o prefácio de uma segunda edição;
- **Paratextos tardios**: aparecem em reedições mais distantes, alguns anos após a primeira publicação;
- **Paratextos póstumos**: surgem após a morte do autor;
- **Paratextos ântumos**: aparecem antes da morte do autor.

Da mesma forma que um paratexto pode ser posterior, ou seja, aparecer após a primeira edição, ele também pode desaparecer e/ou voltar a aparecer. Esse movimento pode se dar "por decisão do autor, por intervenção alheia, ou em virtude do desgaste do tempo" (GENETTE, 2009, p. 13).

Genette (2009) ressalta que duas pessoas são responsáveis pelo texto e pelo paratexto: o autor e o editor, podendo existir um terceiro responsável como, por exemplo, o autor do prefácio da obra.

Também são discutidos, nessa obra, os paratextos de ordem textual ou verbal e os paratextos factuais. Serão considerados de ordem textual os "[...] títulos, prefácios, entrevistas, assim como enunciados, de tamanhos bastante diversos, mas que compartilham o estatuto linguístico do texto" (GENETTE, 2009, p. 14). O paratexto factual "[...] consiste, não numa mensagem explícita (verbal ou não), mas num fato cuja própria existência, se é conhecida do público, acrescenta algum comentário ao texto e tem peso em sua recepção" (GENETTE, 2009, p. 14). Temos como exemplo: a idade do autor, o sexo, a data da obra, a obtenção de um prêmio, dentre outros. Os leitores que possuem essas informações leem o texto com um olhar diferente daqueles que não as têm.

Outra condição do paratexto é a pragmática, ela é "[...] definida pelas características de sua instância, ou situação de comunicação" (GENETTE, 2009, p. 15). Então, temos como exemplos: a natureza do destinador, do destinatário, a opinião do autor. Levando em consideração essa condição, podemos apresentar outras classificações de paratextos:

- **Paratexto autoral**: quando o destinador da mensagem é o próprio autor;
- **Paratexto editorial**: quando o destinador da mensagem é o editor;
- **Paratexto alógrafo**: quando a mensagem é formulada por um terceiro, sendo aceita pelo autor;
- **Paratexto público**: mensagem dirigida ao público em geral;
- **Paratexto privado**: mensagem dirigida a particulares, a um público restrito;
- **Paratexto íntimo**: mensagem do autor para si mesmo.

De maneira geral,

> [...] nosso trabalho consiste em dissolver os objetos empíricos herdados da tradição (por exemplo, "o prefácio"), de um lado analisando-os como objetos mais definidos (o prefácio autoral original, o prefácio tardio, o prefácio alógrafo etc.), e, de outro, integrando-os a conjuntos mais vastos (o peritexto, o paratexto em geral) – e, portanto, em identificar categorias até aqui negligenciadas ou mal percebidas, cuja articulação define o campo paratextual, e cujo estabelecimento é anterior a toda e qualquer colocação em perspectiva histórica (GENETTE, 2009, p. 19).

Segundo Genette (2009, p. 19), "cada elemento do paratexto tem sua própria história". Por serem fontes históricas, por poderem transmitir alguma informação, como, por exemplo, as orientações políticas e sociais de um determinado autor ou época é que atentamos, nesta pesquisa, para os paratextos das edições de 1944, 1946, 1949, 1955 e 1956 do terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo*.

Utilizamos os paratextos como uma ferramenta para complementar/constituir as possibilidades de análise e interpretação da Hermenêutica de Profundidade proposta por

Thompson. Em nossa pesquisa, analisamos alguns paratextos. Dentre eles, podemos destacar as informações presentes na capa dos livros; os peritextos: notas de rodapé, títulos e intertítulos, a advertência presente na edição de 1944 do terceiro volume da série, o índice e o sumário; a advertências da edição de 1946 do terceiro volume que constitui um paratexto tardio, pois foi inserido na obra após a primeira edição; alguns dados biográficos dos autores (paratexto factual); outras obras dos autores (paratextos externos) e paratextos póstumos, uma vez que as edições de 1955 e 1956 do terceiro volume foram produzidas e comercializadas após o falecimento de um dos autores da série *Matemática 2º ciclo* – Euclides Roxo[29].

Na sequência, discorreremos sobre as pesquisas desenvolvidas pelos membros do Ghoem que utilizaram a Hermenêutica de Profundidade como metodologia.

3.4 As Pesquisas do Ghoem

Há algum tempo, o Ghoem vem mobilizando a Hermenêutica de Profundidade. Apresentaremos a seguir as pesquisas desenvolvidas pelo grupo que se utilizaram dessa metodologia. Buscamos apontar as estratégias utilizadas por cada pesquisador, a maneira como se apropriaram da metodologia e as considerações proporcionadas por cada pesquisa.

Oliveira (2008), ao notar a escassez de trabalhos que analisavam textos didáticos e a falta de suporte metodológico nos poucos trabalhos disponíveis, buscou conhecer as teorias hermenêuticas. Sua pesquisa apresenta três estudos independentes. No primeiro, *Manuais didáticos como forma simbólica*, o autor entrou em contato com o trabalho de Thompson (1995) com o objetivo de construir um referencial que desse suporte à análise de textos didáticos. Para isso, caracterizou-os, *a priori*, como forma simbólica. Em sequência, com o estudo intitulado *Apontamentos iniciais sobre análise de textos didáticos,* Oliveira discute a HP e, entrelaçando a ela alguns pressupostos teóricos, estuda alguns trabalhos que abordavam o livro didático de matemática. No terceiro e último estudo apresentado na pesquisa, *Produção sobre livros didáticos a partir de alguns grupos de pesquisa*, Oliveira buscou compreender o que os grupos de pesquisa em Educação Matemática têm entendido por análise de textos didáticos e de que maneira vêm desenvolvendo essas pesquisas.

Considerando a obra *Essais sur l'enseignement en général, et sur celui des mathématiques en particulier*, de Silvestre François Lacroix, como uma forma simbólica, Andrade (2012) a analisou a partir da Hermenêutica de Profundidade. Apresentou em sua pesquisa uma aproximação entre a HP e a concepção de paratextos. Não sabendo, a princípio,

[29] Euclides Roxo faleceu em 1950.

como linearizar uma análise que não possui essa característica, optou por apresentar, primeiramente, uma análise discursiva, em que dissertou sobre os elementos que compunham a obra, tais como: nome do autor, formato da obra, capa, título, sumário, dedicatórias, epígrafes, prefácio, notas; deu atenção para a estrutura da obra e o que ela podia revelar, num primeiro olhar, sobre a matemática na França no final do século XVIII e início do século XIX. Na sequência, desenvolveu um estudo acerca das características políticas, sociais e educacionais da França na época citada. Em um terceiro movimento, retomou a análise discursiva procurando compreender a narrativa do autor. Por ter sido o primeiro trabalho a efetivar a análise proposta por Oliveira (2008) e por sua facilidade com as palavras, Andrade, a todo momento, apresenta suas dúvidas, inquietações e movimentos da pesquisa. Por essas e outras características, além de uma viagem pela França e pelo *Essais...*, a autora aponta, no final de seu trabalho, potencialidades e limitações da HP.

A partir da HP e dos paratextos, Pardim (2013) analisou o manual *Metodologia do Ensino Primário*, de Theobaldo Miranda Santos, a fim de compreender as orientações nas quais se estruturou a formação de professores da Escola Normal em Campo Grande (MS). Os manuais pedagógicos eram importantes por serem um dos poucos materiais utilizados pelos professores em formação e por difundirem novas ideias pedagógicas. Assumindo o manual como sendo uma forma simbólica, o autor desenvolveu, em sua análise sócio-histórica, uma investigação sobre a criação das Escolas Normais e seu papel na formação de professores primários no Brasil. Investigou, também, a importância e influência dos manuais pedagógicos na formação dos mesmos. Com esse objetivo, analisou, dentre outros materiais, outras produções do autor do manual, diários oficiais e a Lei Orgânica do Ensino Normal. Segundo o autor, o manual, através de quadros de fácil leitura e compreensão, aponta os melhores métodos e processo de ensino. Pardim apontou ainda, em sua pesquisa, a ligação do autor do manual com o movimento católico e sua convergência às ideias do movimento da Escola Nova, uma vez que criticava, no manual, o ensino tradicional. Essas conclusões se devem à relação estabelecida entre os movimentos de análise propostos pela HP.

Silva (2013) buscou compreender o Movimento da Matemática Moderna (MMM) a partir da obra didática *Matemática: Curso Ginasial*, publicada pelo *School Mathematics Study Group* (SMSG) em 1967. Buscou, a partir da análise sócio-histórica, assimilar de que maneira o contexto do movimento pode ter influenciado a obra e vice-versa e discute as influências do SMSG na educação brasileira e os significados da expressão “Matemática Moderna”. Considerando os autores da obra o SMSG e os tradutores da edição brasileira, a autora analisou alguns paratextos a fim de avaliar os elementos que transformaram o texto em um livro, tais como: capa, autores, sumário, prólogo, prefácio da edição americana, prefácio da edição brasileira, folha de rosto e contracapa. Em sua pesquisa, Silva utilizou também alguns depoimentos orais com objetivo de mostrar diversos olhares sobre o MMM. Ao relacionar as duas análises, notou que a obra analisada não carregava aspectos normalmente relacionados ao movimento. Comparando a obra de 1967 com alguns livros didáticos atuais, a autora concluiu que o livro analisado se assemelhava muitos aos livros atuais.

Lopes (2015) analisou a obra *Como ensinar Matemática no Curso Ginasial: manual para orientação do candidato a professor do curso ginasial no interior do país,* que foi produzida pela Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (CADES). Utilizando os preceitos da HP e os paratextos, buscou compreender as propostas presentes na obra para a formação de professores de Matemática do ensino secundário. Em sua análise sócio-histórica, procurou compreender o contexto de carência e urgência de professores qualificados para atuarem no ensino secundário, principalmente, nas regiões afastadas dos centros urbanos. Em sua análise discursiva, notou que o Manual enfatizava aspectos relacionados à psicologia do adolescente e da aprendizagem. Com base na reinterpretação dessas análises, Lopes concluiu, em sua pesquisa, que era objetivo da CADES, através da utilização do Manual, preparar os professores que fossem atuar no ensino secundário para que atendessem as expectativas educacionais quanto ao processo de ensino-aprendizagem.

As pesquisas apresentadas anteriormente mobilizaram a HP e seus resultados para a análise de livros. Diferentemente delas, voltamos nosso olhar para um dos capítulos de uma obra em específico. Por esses motivos, insistimos que a utilização da HP se deu como uma inspiração para a análise da abordagem dos números complexos no terceiro volume série *Matemática 2º ciclo*. Talvez, ao final desta dissertação, possamos afirmar que utilizamos a HP como metodologia, talvez não.

Apresentaremos a seguir um estudo das abordagens dos números complexos no terceiro volume da série *Matemática 2º Ciclo* a partir de movimentos analíticos inspirados nas sugestões de Thompson (1995) e Oliveira (2008), conhecidos como análises sócio-histórica e discursiva. Com eles, buscamos evidenciar de que maneira os números complexos são abordados na obra, quais as relações entre o capítulo analisado e as diretrizes da reforma Capanema, bem como de que modo se deram as transformações no conteúdo apresentado ao longo das edições publicadas.

A fim de relacionarmos os acontecimentos sócio-históricos com a elaboração e publicação da série *Matemática 2º ciclo*, retrataremos no próximo capítulo os principais acontecimentos históricos e educacionais da época de suas publicações, a datar de 1930.

4 ANÁLISE SÓCIO-HISTÓRICA

Buscamos com este capítulo uma análise sócio-histórica da obra *Matemática 2º ciclo*, em especial, do capítulo sobre números complexos presente no terceiro volume dessa obra.

Ao nos submetermos a esse exercício de análise *sócio-histórica* da obra, algumas indagações são necessárias e relevantes, tais como: "Quais as características locais e temporais do momento em que essa obra pôde ser produzida e editada por seus quatro autores? Que cenário possibilitou a escrita dessa obra e não de outra? Quais as possíveis influências desse cenário na própria obra e, em particular, na abordagem do capítulo sobre números complexos de seu terceiro volume? Atentas a esses questionamentos, buscamos tecer a análise sócio-histórica da série *Matemática 2º Ciclo*.

Iniciaremos o capítulo apresentando um panorama histórico sobre os importantes acontecimentos econômicos, políticos, sociais e educacionais no Brasil a partir de 1930 e dissertaremos sobre as Leis Orgânicas do Ensino, já que uma delas, a Lei Orgânica do Ensino Secundário, foi decretada pouco antes de a série *Matemática 2º ciclo* ser comercializada. Na sequência, discorreremos sobre o Colégio Pedro II, instituição que esteve diretamente relacionada com as modificações nos programas de ensino de matemática e contava com a presença de influentes professores de matemática. Além disso, Euclides Roxo e Haroldo Lisbôa da Cunha, dois dos autores da série *Matemática 2º ciclo,* fizeram parte da história de tão importante instituição. Por essas razões, consideramos fundamental apresentar um panorama geral sobre o colégio e uma breve biografia desses professores.

Pretendemos com este capítulo compreender e discutir aspectos que venham a corroborar em nossa análise do capítulo "Números Complexos" presente no terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo*.

4.1 Panorama Histórico da Década de 1930 e a Reforma Francisco Campos

Até a década de 1920, poucas foram as mobilizações educacionais no Brasil. O que ocorria, frequentemente, desde a colonização era "[...] um transplante de recursos materiais e humanos de uma sociedade cuja cultura já havia atingido um alto nível de complexidade, para um meio que não oferecia condições de troca em pé de igualdade" (ROMANELLI, 2014, p. 22). Dentre esses recursos, foram transmitidas formas de organização social, política e de educação.

> A expansão da indústria nacional, o desenvolvimento de nossa agricultura, a expansão dos centros urbanos e a influência das novas ideias que agitavam a Europa e os Estados Unidos após a Primeira Guerra Mundial produziram no Brasil um movimento de renovação social, cultural e educacional (MIORIM, 1998, p. 89).

A partir de 1922, começaram a ocorrer diversas reformas setoriais de ensino. A primeira delas foi empreendida em São Paulo em 1920, por Sampaio Dória, e foi seguida pelas reformas do: Ceará, por Lourenço Filho (1922/1923); Rio Grande do Norte, por José Augusto (1925/1928); Distrito Federal[30] (1922/1926) e Pernambuco (1928), ambas empreendidas por Carneiro Leão; Paraná (1927/1928), por Lysímaco da Costa; Minas Gerais (1927/1928), por Francisco Campos; Distrito Federal (1928), por Fernando Azevedo; e a da Bahia (1928), por Anísio Teixeira. Essas reformas colocaram em prática novas ideias relativas à educação e, com elas, foi criada, em 1924, a Associação Brasileira de Educação (ABE) que promoveu a realização das Conferências Nacionais de Educação (Miorim, 1998). Segundo Romanelli (2014, p. 130), essas reformas estaduais foram um "prenúncio das reformas nacionais que surgiriam a partir de 1930".

Por décadas, o país vinha sendo comandado pelas oligarquias de São Paulo e de Minas Gerais, a famosa política do "café com leite". Era dever do presidente paulista, em cada eleição, apoiar a candidato mineiro, e vice-versa, para que as oligarquias se alternassem no poder. O então presidente (paulista) Washington Luís lançou, no ano de 1929, Júlio Prestes, também paulista, como candidato ao cargo de presidente com o intuito de manter seu grupo no poder. Essa candidatura gerou grande insatisfação por parte dos mineiros.

Sob a bandeira da Aliança Liberal, que reunia as oligarquias de três estados: Minas Gerais, Rio Grande do Sul e Paraíba, foi lançada a candidatura de Getúlio Vargas. Em mais uma eleição fraudulenta, o candidato de Washington Luís levou a melhor.

O país estava passando por um período de fraudes descaradas nas eleições, por uma crise econômica, ocasionada pela queda da bolsa de valores de Nova York em 1929 e, para completar o quadro de insatisfação, João Pessoa, o candidato a vice-presidente junto a Getúlio Vargas, foi assassinado. Esses três fatores contribuíram para o início de uma revolta militar no Brasil. O governo, que não era popular com as massas, caiu, e Getúlio Vargas assumiu o Governo Provisório em 03 de novembro de 1930.

O golpe de Estado que ficou conhecido como a "Revolução de 1930" acarretou a intensificação do capitalismo industrial e demandou a elaboração de uma nova política educacional para o Brasil. Passou-se a pensar na educação de forma centralizada. Com a proposta de desenvolver programas de educação em nível nacional, foi criado, em novembro de 1930, o Ministério da Educação e Saúde.

[30] O Distrito Federal localizava-se na cidade do Rio de Janeiro.

> A partir de 1930, as medidas tendentes a criar um sistema educativo e promover a educação tomaram outro sentido, partindo principalmente do centro para a periferia. Em resumo, a educação entrou no compasso da visão geral centralizadora. Um marco inicial desse propósito foi a criação do Ministério da Educação e Saúde, em Novembro de 1930 (FAUSTO, 2001, p. 337).

Até o momento, a educação escolar era caracterizada pelo desnível social. Segundo Paschoal Lemme (apud GHIRALDELLI JÚNIOR, 1991, p. 26),

> As poucas escolas públicas existentes nas cidades eram frequentadas pelos filhos das famílias de classe média. Os ricos contratavam preceptores, geralmente estrangeiros, que ministravam aos filhos o ensino em casa, ou os mandava a alguns poucos colégios particulares, leigos ou religiosos, funcionando nas principais capitais, em regime de internato ou semi-internato. Muitos desses colégios adquiriram grande notoriedade.

Além disso, por ser a elite uma classe de recursos, "se utilizavam do Estado para criar uma rede de ensino público para o atendimento de seus filhos" (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1991, p. 27). Dessa forma, as reformas relacionadas ao ensino promovidas pelo governo priorizavam o ensino secundário e o superior.

> Com o surto de crescimento industrial e urbanização, iniciou-se a formação de uma emergente burguesia e aumento das classes médias urbanas. A adoção do trabalho assalariado e a imigração subsidiada pelo Estado proporcionaram o suprimento de mão-de-obra para o campo e o advento de massas operárias urbanas nos grandes centros. Todo esse tecido social que foi se diferenciando ao longo da Primeira República logrou a construção de um sistema de ensino pouco democrático que privilegiava o ensino secundário e superior em detrimento da expansão do ensino primário. (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1991, p. 27).

O período de 1930 a 1937 foi marcado por uma "efervescência ideológica" (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1991). Vários grupos se formaram para discutir e elaborar projetos, visando à melhoria da sociedade brasileira. Podemos destacar, dentre esses grupos, os liberais que apoiavam as ideias da Pedagogia Nova e eram constituídos em grande parte pelos propulsores das reformas estaduais; os católicos que defendiam a Pedagogia Tradicional; a Aliança Nacional Libertadora (ANL), formada pelas classes populares que defendiam a democratização do ensino; e o governo presidido por Getúlio Vargas e representado, no âmbito educacional, pelo então Ministro da Educação e Saúde Pública (MESP), Francisco Campos, que, a princípio, transitava entre os liberais e os católicos.

Segundo Fausto (2001, p. 337), "o Estado tratou de organizar a educação de cima para baixo, mas sem envolver uma grande mobilização da sociedade; sem promover também a formação escolar totalitária que abrangesse todos os aspectos do universo cultural". Ao tomar posse do cargo de ministro, Francisco Campos realizou diversas ações no campo educacional; no entanto, preocupava-se, essencialmente, com os ensinos secundário e superior.

> Tão logo foi empossado no MESP, tratou de promover uma reforma do ensino ao nível federal. Foi uma reforma imposta a todo o território nacional: criou o Conselho Nacional de Educação, traçou diretrizes para o ensino superior, reorganizou a Universidade do Rio de Janeiro, organizou o ensino secundário, regulamentou a profissão de contador e estruturou o ensino comercial etc. Todavia, viciosamente elitista, tal reforma não atacou os problemas do ensino popular nem se preocupou com a expansão ou melhoria da escola primária (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1991, p. 42).

Encabeçado por Fernando Azevedo e assinado por 26 educadores, os liberais elaboraram um manifesto que ficou conhecido como “Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova”. Defendiam, principalmente, a educação para todos, a laicidade, a obrigatoriedade do Estado em assumir a função educadora e a coeducação (educação comum a ambos os sexos). Criticavam a inexistência de uma cultura própria, os métodos atrasados de educação utilizados no país e a centralização. Defendiam a ideia de um currículo mínimo comum que pudesse ser empreendido em todas as regiões, mas que possibilitasse a permanência de características regionais no ensino. Todos esses aspectos eram combatidos e criticados pelos católicos.

> As classes médias em ascensão reivindicavam o ensino médio, as camadas populares, o ensino primário. Daí por que o movimento renovador compreendeu que havia chegado a hora de o Estado assumir o controle da educação e que, portanto, esta deveria ser gratuita e obrigatória, dadas as necessidades da nova ordem econômica em implantação (ROMANELLI, 2014, p. 146).

Embora o governo tenha colocado em execução uma política educacional própria, aos poucos foi mostrando uma inclinação para as ideias da Igreja Católica. Essa aliança foi marcada pela inauguração do Cristo Redentor na cidade do Rio de Janeiro em outubro de 1931 e pelo Decreto de abril de 1931 que instituía o ensino religioso nas escolas públicas. Essa ação acarretou o apoio da massa católica ao governo e a marginalização de grande parte dos reformadores (FAUSTO, 2001).

A reforma Francisco Campos foi a primeira que atingiu profundamente a estrutura do ensino e foi, pela primeira vez, imposta a todo o território nacional (ROMANELLI, 2014). Tomou forma a partir de vários decretos instituídos ao longo dos anos de 1931 e 1932. Ao total, foram seis decretos, sendo eles responsáveis pela: criação do Conselho Nacional de Educação (Decreto 19.850 de 11 de abril de 1931); organização do ensino superior no Brasil e adoção do regime universitário (Decreto 19.851 de 11 de abril de 1931); organização da Universidade do Rio de Janeiro (Decreto 19.852 de 11 de abril de 1931); organização do ensino secundário (Decreto 19.890 de 11 de abril de 1931); organização do ensino comercial, regulamentação da profissão de contador dentre outras providências (Decreto 20.158 de 30 de junho de 1931); consolidação da organização do ensino secundário (Decreto 21.241 de 14 de abril de 1932).

Com relação ao curso secundário, ele passou a ter como objetivo "a formação do homem para todos os grandes setores da atividade nacional" e não simplesmente o ingresso nos cursos superiores. Dentre vários fatores, estabeleceu o currículo seriado, a frequência obrigatória, dois ciclos (fundamental de 5 anos e o complementar de 2 anos) e a necessidade de estar habilitado em ambos os ciclos para o ingresso no ensino superior.

A disciplina de Matemática estava presente nos cinco anos do ensino fundamental, no primeiro ano do curso complementar para os candidatos a faculdades de Medicina, Odontologia e Farmácia e nos dois anos do curso complementar para os candidatos aos cursos de Engenharia e a Arquitetura. Segundo Romanelli (2014, p. 138), tratava-se de "[...] um curso secundário que procurou dar, em seu ciclo fundamental, formação básica geral, e em seu ciclo complementar, buscou estruturar-se como curso propedêutico".

Além de ser composto por um vasto currículo, o curso secundário era a única modalidade de ensino que dava acesso ao ensino superior. Essas condições, e o fato da sociedade brasileira, a época, ser basicamente rural, evidenciam que o curso era destinado às classes sociais mais abastadas. De acordo com Romanelli (2014, p. 141),

> [...] o grande problema que não foi resolvido pela reforma, foi o da flexibilidade entre o ensino secundário e os demais ramos de ensino médio. Aliás, a reforma da educação levada a cabo por Francisco Campos criou um verdadeiro ponto de estrangulamento no ensino médio, para todo o sistema educacional. Os cursos profissionais (a reforma só cuidou do ensino comercial) não tinham nenhuma articulação com o ensino secundário e não davam acesso ao ensino superior. Só o ensino secundário possibilitava esse acesso. Aqui talvez esteja uma das fortes razões que orientaram a demanda social de educação em direção ao ensino acadêmico, desprezando o ensino profissional.

Com a efervescência do capitalismo, ocorreu a migração do homem do campo para os centros industriais. Grande parte da sociedade passou a ver a escola como uma forma de ascensão social. No entanto, com a criação das escolas técnicas, a desigualdade social se manteve. As classes menos favorecidas, que necessitavam trabalhar desde a adolescência, viam nos cursos profissionalizantes uma oportunidade de entrar no mercado de trabalho.

> Para o governo a "questão social" havia se agravado devido à migração interna e, consequentemente, ao inchamento das cidades. Portanto, segundo o governo, uma medida justa era a de fixar o homem no campo, e para isso era interessante o discurso que enfatizava a criação de escolas técnicas. No campo deveriam ficar as escolas técnicas rurais, nas cidades estariam os estabelecimentos profissionalizantes ao nível industrial e comercial. Fixar o

> homem ao campo com escolas, acalmar o desespero do trabalhador urbano com escolas! Mas não com qualquer escola, e sim as escolas embasadas nos novos métodos e que fornecessem uma profissão ao filho do trabalhador. Foi um belo discurso que, dependendo do tom, atraiu liberais e integralistas (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1991, p. 44).

Em fevereiro de 1932, foi colocado em vigor um novo código eleitoral em que o voto se tornou obrigatório e secreto, inclusive para as mulheres, que até o momento não tinham direito a voto. Esse movimento do governo desencadeou diversas revoltas que, lideradas por oficiais jovens, de baixa patente, reuniram diferentes setores sociais. O "Tenentismo", como ficou conhecido, inicialmente protestava contra a desorganização e o abandono em que se encontrava o exército. Ao notarem que o problema não era de esfera militar e sim política, começaram a pressionar o governo para que realizasse diversas reformas políticas e sociais.

Em 09 de julho de 1932, "[...] estourou em São Paulo a revolução contra o governo federal" (FAUSTO, 2001, p. 346). O movimento acabou não recebendo apoio de outros estados e ficou restrito a São Paulo. O confronto durou 3 meses e, "[...] embora vitorioso, o governo percebeu mais claramente a impossibilidade de ignorar a elite paulista" (FAUSTO, 2001, p. 346).

Em 14 de julho de 1934, após meses de debates, foi promulgada uma nova Constituição. Baseada no modelo de república que existiu na Alemanha entre o fim da primeira guerra mundial e a ascensão do nazismo (FAUSTO 2001), ela

> [...] incumbiu a União de "fixar o Plano Nacional de Educação, compreensivo do ensino de todos os graus e ramos, comuns e especializados, e coordenar e fiscalizar a sua execução em todo o território do país". Colocou a Carta Magna que o ensino primário deveria ser obrigatório e totalmente gratuito. Além disso instituiu a tendência à gratuidade para o ensino secundário e superior. A constituição ainda tornou obrigatório o concurso público para o provimento de cargos no magistério, determinou como incumbência do Estado a fiscalização e a regulamentação das instituições de ensino público e particular, determinou dotações orçamentárias para o ensino nas zonas rurais e, finalmente, fixou que a União deveria reservar no mínimo 10% do orçamento anual para a educação, e os Estados 20% (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1991, p. 45).

Como mostra o trecho acima, grande parte das medidas do movimento renovador foi acatada. Por outro lado, o ensino religioso foi inserido nas escolas públicas e as escolas particulares foram reconhecidas. Percebe-se, mais uma vez, que o governo tentou contentar, de algum modo, as reinvindicações de vários setores, independentemente de sua adesão a uma ou outra corrente pedagógica.

Em 15 de julho de 1934, após 5 anos de governo provisório (1930 – 1934), Getúlio Vargas é eleito Presidente da República através do voto indireto da Assembleia Nacional

Constituinte. “O ano de 1934 foi marcado por reivindicações operárias e pela fermentação em áreas de classe média” (FAUSTO, 2001, p. 358). As inúmeras greves e as campanhas contra o fascismo resultaram, no início de 1935, na proposta de uma Lei de Segurança Nacional (LSN). A proposta gerou diversas manifestações; no entanto, em 4 de abril de 1935, foi aprovada uma lei que

> Definiu os crimes contra a ordem política e social, incluindo entre eles: a greve de funcionários públicos; a provocação de animosidade nas classes armadas; a incitação de ódio entre as classes sociais; a propaganda subversiva; a organização de associações ou partidos com o objetivo de subverter a ordem política ou social por meios não permitidos em lei (FAUSTO, 2001, p. 359).

Em 30 de março de 1935, foi lançada a Aliança Nacional Libertadora (ANL), uma frente que reunia social-democratas, liberais progressistas, anarquistas, tenentistas, dentre outros. Dentre várias reivindicações, a ANL defendia a suspensão definitiva do pagamento da dívida externa, a nacionalização das empresas estrangeiras, a reforma agrária, a garantia das liberdades populares e a constituição de um governo popular (FAUSTO, 2001). No que tange à educação, defendia o ensino popular, preocupava-se com a elevação cultural das massas e com a valorização da cultura no interior das massas populares (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1991).

Pela voz de Carlos Lacerda, em 5 de julho de 1935, foi proferido um discurso de Luís Carlos Prestes (que foi indicado para presidir a ANL em 30 de março) no qual, segundo Fausto (2001, p. 360), “apelava pela derrubada do ‘governo odioso’ de Vargas e a tomada do poder por um governo popular, nacional e revolucionário”. Com esse discurso e com o apoio da lei de 4 de abril de 1935, o governo fechou a ANL poucos meses após sua fundação. Ocorreu, então, uma tentativa fracassada de golpe militar em 1935. Esse episódio “[...] teve sérias consequências, pois abriu caminho para amplas medidas repressivas e para a escalada autoritária” (FAUSTO, 2001, p. 361).

Em janeiro de 1936, foi criada a Comissão Nacional de Repressão ao Comunismo, “encarregada de investigar a participação de funcionários públicos e outras pessoas em atos ou crimes contra as instituições políticas e sociais” (FAUSTO, 2001, p. 362).

Entre o fim de 1936 e o início de 1937, foram definidos os candidatos ao cargo de presidente, dentre eles encontrava-se Getúlio Vargas que não queria abandonar o poder. Vargas não era o candidato mais apreciado, uma vez que José Américo de Almeida era visto como o “candidato do povo”. O pretexto para o golpe que viria a acontecer foi o Plano Cohen[31].

> Aparentemente, o “plano” era uma fantasia a ser publicada em um boletim da Ação Integralista Brasileira, mostrando como seria uma insurreição comunista e como reagiriam os integralistas diante dela. A insurreição provocaria massacres, saques e depredações, desrespeito aos lares, incêndio de igrejas etc.
> O fato é que de obra de ficção o documento foi transformado em realidade, passando das mãos dos integralistas à cúpula do Exército. A 30 de setembro, era transmitido pela “Hora do Brasil” e publicado em parte nos jornais (FAUSTO, 2001, p. 364).

Em outubro, o então deputado Negrão Lima, munido de uma carta do governador mineiro em nome de Vargas, na qual anunciava que a situação política não comportava uma eleição, percorreu as regiões Norte e Nordeste em busca de apoio de outros governantes. Tendo conhecimento desse movimento, a oposição lançou um manifesto aos chefes militares para que impedissem a execução do golpe. Essa atitude ocasionou o adiantamento do golpe que, a princípio, estava marcado para o dia 15 de novembro.

Em 10 de novembro de 1937, Getúlio Vargas, “sob o pretexto de combate ao comunismo e de manter a unidade e a segurança da nação” (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1991, p. 46), institucionalizou o Estado Novo. O golpe acabou com as esperanças do país de viver sob um regime democrático (FAUSTO 2001).

Com o golpe, foi instituída uma nova constituição. Nela, a gratuidade e a obrigatoriedade do ensino primário foram mantidas (Art. 130). No entanto, esse mesmo artigo afirmava que “a gratuidade, [...], não exclui o dever de solidariedade dos menos para os mais necessitados” e enfatizava que os sujeitos com mais recursos deveriam contribuir mensalmente para a caixa escolar.

> A carta de 37 não estava interessada em determinar ao Estado tarefas no sentido de fornecer à população uma educação geral através de uma rede de ensino público e gratuito. Pelo contrário, a intenção da Carta de 37 era manter um explícito dualismo educacional: os ricos proveriam seus estudos através do sistema público ou particular e os pobres, sem usufruir esse sistema, deveriam se destinar às escolas profissionais. Assim, o artigo 129 determinou como primeiro dever do Estado a sustentação do ensino pré-vocacional e profissional destinado às classes menos favorecidas. Com isso o texto constitucional reconheceu e cristalizou a divisão de classes e, oficialmente, extinguiu a igualdade dos cidadãos perante a lei. O incentivo dado às classes menos favorecidas para procurarem a escola pública foi condicionado à opção delas pelo ensino profissionalizante (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1991, p. 82).

---

[31] Cohen foi o nome (de origem judaica) dado ao suposto autor do plano. Além disso, é possível relacionar o nome com Béla Khun (ou Béla Cohen), líder comunista húngaro (FAUSTO, 2001).

A carta de 1937 acentuou a discriminação social presente no sistema educacional, não deu tanta ênfase ao dever do Estado como educador e foi mais moderada no tratamento do ensino religioso.

> Foi mais enfática na questão do ensino profissional, embora se referisse a ele como "um ensino destinado às classes menos favorecidas", o que denunciava bem a ideologia do governo, em sua política educacional, favorável a um sistema educacional de discriminação social (ROMANELLI, 2014, p. 155).

Por alguns anos, as lutas ideológicas em torno dos problemas educacionais entraram numa espécie de hibernação (ROMANELLI, 2014). As chamas voltaram a se acender em 1942 por iniciativa do então ministro Gustavo Capanema. As Leis Orgânicas do Ensino foram instituídas através de diversos decretos entre os anos de 1942 e 1946. É sobre esse conjunto de leis que dissertaremos na próxima seção.

4.2 As Leis Orgânicas do Ensino

Gustavo Capanema Filho nasceu no dia 10 de agosto de 1900, em Pitangui, Minas Gerais. Em 1924, antes de ingressar na política, formou-se na Faculdade de Direito da Universidade de Minas Gerais. Integrante de uma tradicional família mineira, fazia parte da elite intelectual de Belo Horizonte, participava de grupos de debates e tinha como amigo Carlos Drummond de Andrade. Segundo Pedro Nava (apud SCHWARTZMAN; BOMENY; COSTA, 2000, p. 43), Capanema foi "[...] um moço irreverente, idealista, simples, despreocupado de qualquer carreirismo e mais dado às letras e à cultura que propriamente à política". No entanto, a carreira de Gustavo Capanema tomou o rumo da política. Enquanto Drummond renunciava a uma possível carreira política, Capanema

> [...] jamais renunciou explicitamente à sua pretensão intelectual, que mantinha pela preocupação com questões relativas à educação e cultura, pela amizade pessoal que cultivava com escritores, pintores e artistas em geral, e pelo hábito de estudo e leitura. Ele procurava ser, sempre, um intelectual no poder (SCHWARTZMAN; BOMENY; COSTA, 2000, p. 42).

Após ser vereador em Pitangui, foi convidado, em setembro de 1930, para chefe de gabinete do presidente do estado. Posteriormente à revolução de 1930, foi nomeado para o posto de secretário do interior de Minas Gerais. Após quatro anos de ações estritamente políticas, foi empossado, em 26 de julho de 1934, no Ministério da Educação e Saúde Pública onde acaba promovendo ações culturais, educacionais e de saúde.

Muitas foram as iniciativas de Gustavo Capanema como ministro. Tendo como chefe de gabinete Carlos Drummond de Andrade, várias ações envolviam artes, rádio, cinema, poesia, folclore e música. Ainda no que tange às artes, elaborou o projeto de construção do Palácio da Cultura (sede do Ministério da Educação) e da Cidade Universitária; reconheceu a profissão de artista teatral (decreto nº 5.492 de 16/07/1928); criou o Serviço do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional (decreto-lei nº 25 de 30/11/1937) e o Serviço Nacional de Teatro e reconheceu a profissão de artista teatral (decreto-lei nº 92 de 21/12/1937). Na saúde, atuou "[...] reformulando e consolidando a estrutura administrativa do ministério e adequando-a aos princípios básicos que haviam definido a política social do Estado Novo" (HOCHMAN, 2001, p. 135). Além disso, em 1941, criou os "[...] serviços nacionais, que verticalizaram as campanhas de combate a doenças específicas e às grandes epidemias" (HOCHMAN, 2001, p. 135). Levantou discussões e elaborou leis e decretos a respeito do estatuto da família, da educação feminina, da organização nacional da juventude e da constituição da nacionalidade em um país marcado pela chegada dos imigrantes. Dentre tantas iniciativas, vamos enfatizar as relacionadas à educação, as intituladas Leis Orgânicas do Ensino, em especial, a Lei Orgânica do Ensino Secundário, conhecida como reforma Capanema.

Assim que assume o ministério, Gustavo Capanema distribui questionários para professores, estudantes, escritores, políticos, sacerdotes, jornalistas, dentre outros, a fim de elaborar um Plano Nacional de Educação. Como podemos notar, o questionário foi distribuído para diferentes grupos, uma vez que as questões educacionais eram vistas como um meio de poder e as opiniões divergiam entre eles.

> As experiências de construção nacional em processo na época, como o nazismo, o fascismo e o comunismo, tratavam a educação como o instrumento por excelência de fabricação de tipos de ideais de homens que assegurassem a construção e a continuidade de tipos também ideais de nações. Assim a ação educativa era vista como um recurso de poder e, portanto, ardorosamente disputada; o desacordo quanto às questões educacionais parecia expressar desacordos éticos e filosóficos insuperáveis. (SCHWARTZMAN; BOMENY; COSTA, 2000, p. 192 - 193).

O questionário era composto por 213 perguntas sobre diversos aspectos do ensino. Os grupos rapidamente mobilizam-se a fim de responder ao questionário. A igreja católica realizou conferências, os militares se mobilizaram para elaborar um documento e intelectuais enviaram suas opiniões ao ministro. As questões educacionais foram amplamente discutidas em território nacional: a centralização do poder da educação na mão do Estado, o ensino religioso, a educação e a desigualdade social, a constituição de 1934, dentre outros.

Além dessa grande mobilização, a elaboração do plano causou algumas desconfianças. Se o Estado estava direcionado a centralizar e controlar as ações educacionais, por que estava interessado na opinião dos demais grupos? Por que não elaborou e implementou seu próprio plano?

> O documento que traz essa crítica prossegue dizendo que tal tipo de ação educativa, em que se tenta plasmar indivíduos segundo modelos dados, consiste numa ação tendenciosa, que não conviria ao Brasil como democracia liberal. Adiantava que a educação não se pode pautar por princípios "nacionais ou regionais" e que não haveria outra maneira de entender a liberdade de cátedra que não como liberdade de cátedra, e que não haveria como limitá-la desde que já assegurada constitucionalmente (SCHWARTZMAN; BOMENY; COSTA, 2000, p. 198).

Vale ressaltar que Gustavo Capanema obteve sucesso na política, sobretudo por sua fidelidade a Getúlio Vargas. Tendo o presidente instaurado um regime ditatorial no Brasil poucos anos após a discussão e elaboração do Plano Nacional de Educação, fica evidente que o Estado, a princípio neutro, tenderia para alguma corrente específica. Segundo Nunes (2001, p. 103, destaque da autora), "tratava-se de um projeto *repartido de educação*, encaminhado por Francisco Campos e endossado pelos intelectuais católicos".

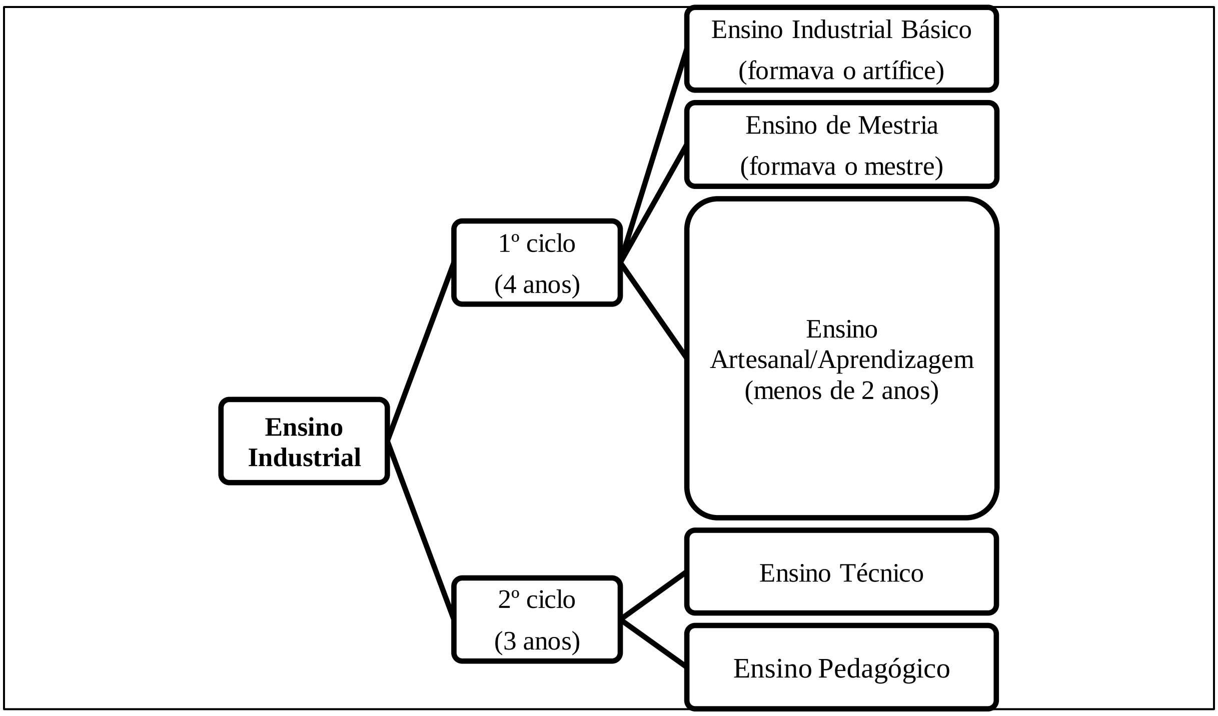
O plano continha 504 artigos discutidos em aproximadamente 100 páginas e previa que só poderia ser alterado após dez anos de vigência. Gustavo Capanema solicitou que fosse aprovado "em globo". Segundo Schwartzman, Bomeny e Costa (2000, p. 198), o plano "[...] buscava consagrar uma série de princípios e opções educacionais que não eram, de nenhuma forma, consensuais, e cuja discussão a proposta de "aprovação em globo" visava, justamente, evitar".

Em suas normas gerais, regulamentava o ensino religioso, a educação moral e cívica, a educação física e a liberdade de cátedra, esta restrita a assuntos específicos da disciplina ministrada, não podendo o professor fazer qualquer tipo de propaganda política ou contra a ordem pública estabelecida. A presença do ensino religioso garantiu a participação da Igreja nas escolas públicas. A segunda parte do plano tratava da organização do ensino nacional. Tratava de um "ensino comum" do pré-primário ao secundário, do ensino especializado, do ensino superior e do ensino das mulheres.

Em 1937, o congresso foi fechado antes de o plano ser aprovado. Com o golpe de Getúlio Vargas e a implantação do Estado Novo, as reformas educacionais só voltaram a ser pauta de discussões na década de 1940. Entre os anos de 1942 e 1946, foram decretadas as Leis Orgânicas do Ensino que reformaram alguns ramos do ensino: industrial, secundário, comercial, primário e normal. Discutiremos a seguir a estrutura dessas leis, suas principais características e suas consequências na sociedade brasileira.

O decreto-lei 4.073 de 30 de janeiro de 1942, o primeiro a ser efetivado, organizou o ensino industrial. Era composto por dois ciclos: o primeiro de quatro anos e o segundo de três anos. Segundo o Art. 3º, o ensino industrial deveria atender aos interesses do trabalhador, das empresas e da nação. Além de preparar a mão de obra qualificada, que, com a segunda guerra mundial, passou a ser uma necessidade no país, visto que estava sendo difícil exportar produtos e mão de obra, o decreto estabeleceu que a própria indústria seria o local de aprendizagem, o que resolvia o problema do Estado, o qual não tinha recursos para equipar uma escola com o maquinário necessário.

Figura 5 – Estrutura do ensino industrial



Fonte: Ghiraldelli Júnior (1991)

O primeiro ciclo do ensino industrial compreendia quatro modalidades: o curso industrial básico formava o profissional completo; o curso de mestria dava, aos profissionais formados no curso industrial, a formação necessária para exercer a função de mestre; os cursos artesanais destinavam-se ao ensino de um ofício em um período reduzido; e os cursos de aprendizagem eram destinados a ensinar, em período viável e com carga horária reduzida, o seu ofício ao aprendiz da indústria.

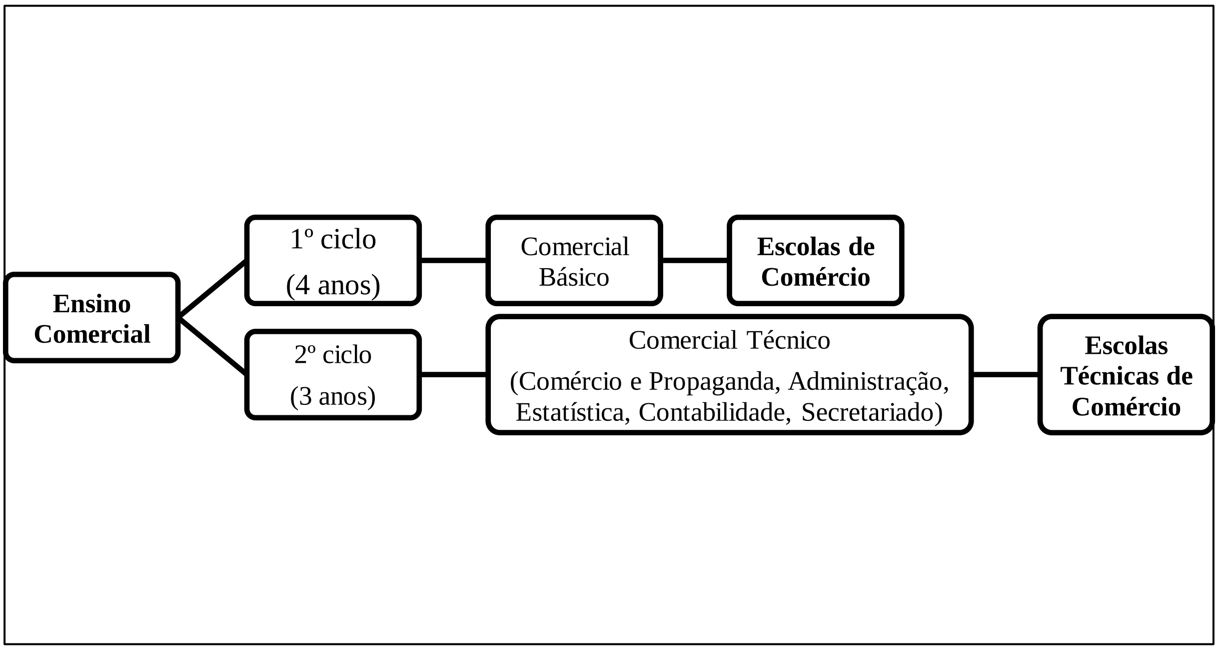
O segundo ciclo era composto pelos cursos técnicos, que eram destinados ao ensino de técnicas próprias ao ensino de funções de caráter específico da indústria, e pelos cursos pedagógicos, responsáveis por formar docentes e profissionais administrativos para o ensino industrial. Essa modalidade de ensino dava acesso apenas ao ensino superior na área técnica.

Em 22 de janeiro de 1942, alguns dias antes de ser decretada a lei que organizava o ensino industrial, foi criado, pelo decreto-lei nº 4.048, o Serviço Nacional de Aprendizagem dos Industriários, que, mais tarde, passou a ser o Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial (Senai). Organizado e dirigido pela Confederação Nacional das Indústrias, o Senai tinha por objetivo "ministrar ensino de continuação e do aperfeiçoamento e especialização para trabalhadores industriários não sujeitos à aprendizagem" (Art. 2º, § 2º).

Ainda com relação ao Senai, foram estabelecidos os seguintes decretos-lei: nº 4.481 de 16 de julho de 1942, que obrigava os estabelecimentos industriais a empregar aprendizes e menores (8% do número de operários); nº 4.436 de 07 de novembro de 1942 – ampliava a rede para os setores de transportes, comunicação e pesca e determinava que essas escolas ministrassem cursos de continuidade, aperfeiçoamento e especialização; nº 4.984 de 21 de novembro de 1942 – as indústrias que eram formadas por mais de 100 empregados deveriam manter por conta própria uma escola "[...] ou um sistema de escolas de aprendizagem, destinada à formação profissional de seus aprendizes e ao ensino de continuação e de aperfeiçoamento e especialização de seus demais trabalhadores" (Art. 1º).

No que tange ao ensino técnico-profissional, também foi organizado, pelo decreto-lei nº 6.141 de 28 de dezembro de 1943, o ensino comercial.

Figura 6 - Estrutura do ensino comercial



Fonte: Ghiraldelli Júnior (1991)

Essa modalidade de ensino tinha três finalidades:

> formar profissionais aptos ao exercício de atividades específicas no comércio e bem assim de funções auxiliares de caráter administrativo nos negócios públicos e privados; dar a candidatos ao exercício das mais simples ou

> correntes atividades no comércio e na administração uma sumária preparação profissional e aperfeiçoar os conhecimentos e capacidades técnicas de profissionais diplomados na forma desta lei (Art. 1º).

O ensino comercial, assim como o industrial, era dividido em dois ciclos: o comercial básico, com duração de 4 anos, que tinha por objetivo ministrar os elementos gerais e fundamentais dessa modalidade de ensino, e o segundo ciclo, que compreendia cinco cursos de formação: comércio e propaganda, administração, contabilidade, estatística e secretariado. Esses cursos eram destinados ao ensino de técnicas próprias de funções específicas no comércio ou na administração de um negócio.

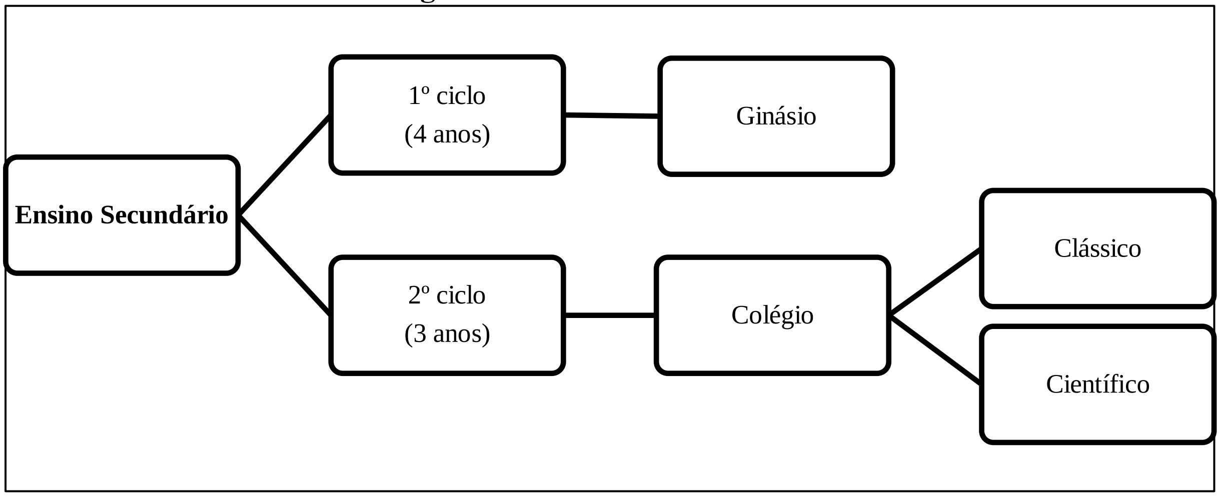
Voltando ao ano de 1942, em 09 de abril, o decreto-lei nº 4.244 organizou o ensino secundário, que era dividido em dois ciclos: o primeiro com 4 anos de duração e o segundo com 3 anos. A finalidade dessa modalidade de ensino era:

> formar, em prosseguimento a obra educativa do ensino primário, a personalidade integral dos adolescentes; acentuar a elevar, na formação espiritual dos adolescente, a consciência patriótica e a consciência humanística; dar preparação intelectual geral que possa servir de base a estudos mais elevados de formação especial (Art. 1º).

O decreto afirmava que a formação de individualidades condutoras também era objetivo do ensino secundário (Art. 23º), que deveria ser desenvolvida nos alunos a capacidade de iniciativa e de decisão (Art. 23º). Embora, com a reforma Capanema, a educação moral e cívica tenha deixado de ser uma disciplina, ela “[...] comporia uma “mentalidade” a inspirar toda a ação educativa” (SCHWARTZMAN; BOMENY; COSTA, 2000, p. 215). Logo, podemos concluir que era objetivo do ensino secundário a formação de lideranças e a formação de uma massa patriótica condutora. Para esse fim, o ensino pré-militar obrigatório foi introduzido simultaneamente ao ensino secundário tanto nas escolas públicas como nas particulares.

Com relação à estrutura, o segundo ciclo, como comentado nos capítulos iniciais, possuía dois caminhos: o curso clássico e o científico. Embora ambos tivessem como objetivo a consolidação da educação ministrada no curso ginasial, o estudante que se candidatasse a uma vaga no curso clássico concorria a uma “[...] formação intelectual, além de um maior conhecimento de filosofia, um acentuado estudo das letras antigas” (Art. 4º), enquanto que o candidato ao curso científico concorria a uma formação “[...] marcada por um estudo maior de ciências” (Art. 4º).

Figura 7 - Estrutura do ensino secundário



Fonte: Ghiraldelli Júnior (1991)

No entanto, como pode ser notado no Quadro 5, tanto o curso clássico como o científico possuíam um caráter humanístico. Ambos traziam em seu currículo disciplinas que proporcionavam uma cultura geral: História Geral, História do Brasil, Geografia Geral, Geografia do Brasil e o estudo de línguas estrangeiras. Essa formação humanística de ambos os cursos enfatizava um dos objetivos principais do ensino secundário: proporcionar condições para que seus alunos ingressassem no ensino superior.

Quadro 5 – Disciplinas do ensino secundário

	1º CICLO				**2º CICLO**					
	Curso Ginasial				**Curso Clássico**			**Curso Científico**		
Disciplinas/Série	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**1ª**	**2ª**	**3ª**
Português	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Latim	■	■	■	■	■	■	■			
Francês	■	■	■	■	OPTATIVO			■	■	
Inglês		■	■	■	OPTATIVO			■	■	
Matemática	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Ciências Naturais			■	■						
História Geral	■	■			■	■		■	■	
História do Brasil			■	■	■	■				■
Geografia Geral	■	■			■	■		■	■	
Geografia do Brasil			■	■			■			■
Trabalhos Manuais	■	■								
Desenho	■	■	■	■					■	■
Canto Orfeônico	■	■	■	■						
Grego (optativo)					■	■	■			
Espanhol					■	■		■		
Física						■	■	■	■	■
Química						■	■	■	■	■
Biologia							■		■	■
Filosofia							■			■

Fonte: Romanelli (2014)

A estrutura do ensino secundário composta de rígidos exames para ingresso dos estudantes, o fato de ser uma modalidade de longa duração e a limitação à coeducação, explicitada no Art. 25º do decreto, favoreceram um público específico: as elites masculinas.

> O sistema educacional deveria corresponder à divisão econômico-social do trabalho. A educação deveria servir ao desenvolvimento de habilidades e mentalidades de acordo com os diversos papéis atribuídos às diversas classes ou categorias sociais. (SCHWARTZMAN; BOMENY; COSTA, 2000, p. 205).

As classes populares necessitadas de uma formação profissionalizante em curtos períodos, as mulheres, impossibilitadas de frequentarem as mesmas escolas que os homens, seguiam por outra vertente de ensino. Logo, eram as classes médias e altas, que, munidas de condição financeira, frequentavam o ensino secundário.

Retomando ao ensino das mulheres, elas, quando tinham a possibilidade de estudar, poderiam se profissionalizar, após o ginásio, no instituto de educação. Essa modalidade de ensino era conhecida por ensino normal e foi implantada pelo decreto-lei 8.530 no dia 02 de janeiro de 1946.

A estruturação dessa modalidade de ensino foi colocada em vigor após a queda do presidente Getúlio Vargas, no fim do Estado Novo e da mudança de regime. O decreto foi assinado pelo presidente José Linhares, pelo Ministro da Educação e Saúde Pública Raul Leitão da Cunha e por Sampaio Doria, Ministro da Justiça e Negócios Interiores.

Com exceção do ensino secundário, os demais ramos do ensino, dentre eles, o ensino normal, davam acesso apenas ao ensino superior da mesma área. Logo, em termos de ensino superior, os normalistas só poderiam ingressar na faculdade de Filosofia.

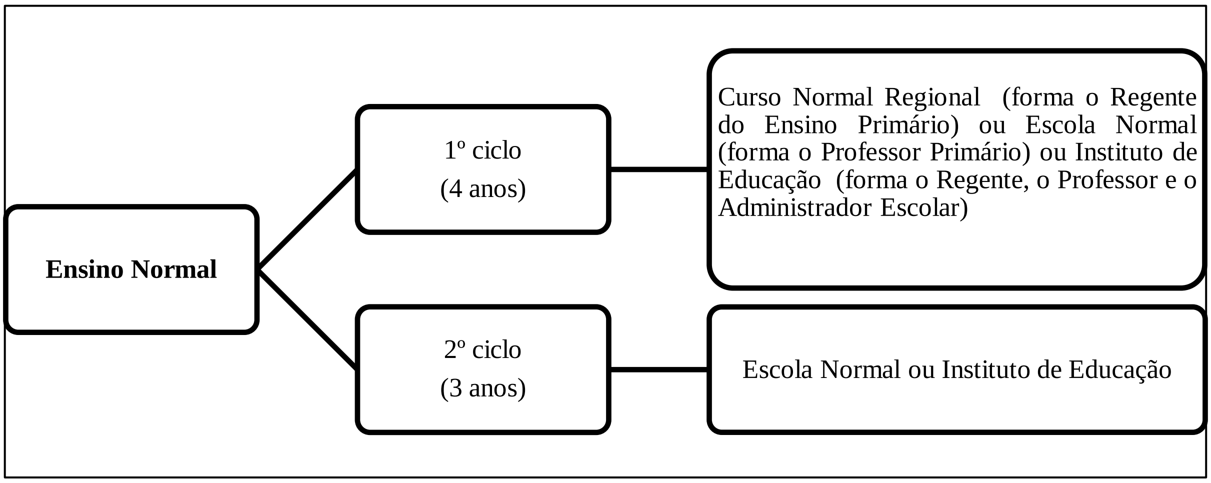
O decreto recomendava que as mulheres fossem educadas em escolas exclusivamente femininas. No caso de escolas frequentadas por ambos os sexos, as salas de aula deveriam ser exclusivamente femininas. Essas condições só deixariam de valer com a autorização do próprio ministro, o qual insistia

> [...] na diferenciação rígida dos papéis sociais dos dois sexos, e consequentemente em sua separação dentro do sistema educacional. Esta atitude implicava em sua versão extrema, um ensino totalmente diferente para homens e mulheres; e, em sua versão mais branda, uma oposição total à co-educação (SCHWARTZMAN; BOMENY; COSTA, 2000, p. 211).

Segundo Romanelli (2014), as escolas normais existiam no Brasil desde 1830. No entanto, foi com o decreto-lei nº 8.530 de 02 de janeiro de 1946 que o ensino normal foi organizado, pela primeira vez, em nível federal. Era objetivo dessa estrutura de ensino, segundo Art. 1º, “prover à formação do pessoal docente necessário às escolas primárias; habilitar administradores escolares destinados às mesmas escolas; desenvolver e propagar os conhecimentos e técnicas relativas à educação da infância".

Assim como as outras modalidades, era estruturado em dois ciclos. Os cursos eram desenvolvidos apenas nos institutos de educação. Embora buscassem formar docentes e administradores para o ensino primário, o currículo do 1º ciclo continha apenas duas disciplinas de formação específica: Psicologia e Pedagogia; Didática e Prática de Ensino. As demais disciplinas eram de cultura geral: Português, Matemática, Geografia Geral, Geografia do Brasil, História Geral, História do Brasil, Ciências Naturais, Anatomia e Fisiologia Humana, Higiene, Educação Física, Desenho e Caligrafia, Canto Orfeónico e Trabalhos Manuais (Romanelli, 2014).

Figura 8 – Estrutura do ensino normal



Fonte: Ghiraldelli Júnior (1991)

O segundo ciclo apresentava um currículo mais diversificado como: Biologia Educacional, Psicologia Educacional, Metodologia do Ensino Primário, Sociologia Educacional, História e Filosofia da Educação e Prática de Ensino.

O grande problema do ensino normal era a restrição etária. Segundo o parágrafo único do Art. 21º, não seriam "[...] admitidos em qualquer dos dois cursos candidatos maiores de vinte e cinco anos". Com essa restrição, grande parte dos profissionais, que já exerciam o magistério e que não possuíam qualificações para o cargo, ficou impossibilitada de cursar o ensino normal e, consequentemente, continuou sem qualificação.

> Esse dispositivo estava, [...], em flagrante contradição com o que criava o curso normal de 1º ciclo e que, segundo cremos, tinha muito mais razão de existir como curso de habilitação para professores leigos do que como curso de habilitação para adolescentes de 14 ou 15 anos (ROMANELLI, 2014, p. 170).

No mesmo dia em que foi decretada a organização do ensino normal, por meio do decreto-lei nº 8.529, foi decretada a organização do ensino primário. Até o momento, não existiam diretrizes traçadas pelo governo federal para esse nível de ensino, ele era organizado pelos estados e municípios.

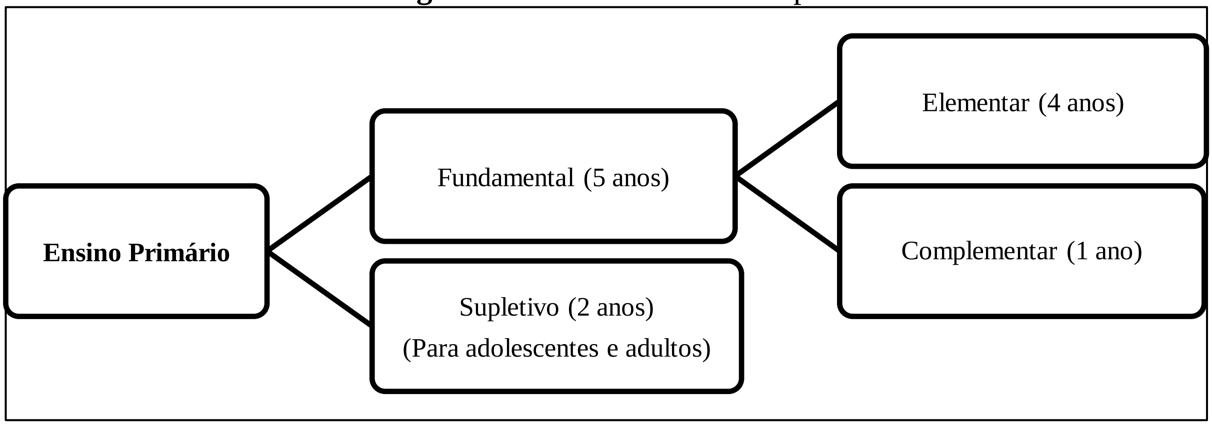
Com o fim da ditadura, é possível notar que não há, nesse decreto, nenhum sinal da influência fascista. “Percebe-se um revigoramento da influência do movimento renovador e dos princípios estabelecidos no ‘Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova’ de 1932” (ROMANELLI, 2014, p. 165). Essa presença pode ser notada pelo estabelecimento de um ensino primário obrigatório, gratuito e descentralizado. De acordo com o Art. 26º, cada estado e o Distrito Federal teria uma legislação própria que atendesse aos princípios do decreto-lei.

Eram objetivos do curso primário:

> Proporcionar a iniciação cultural que a todos conduza ao conhecimento da vida nacional, e ao exercício das virtudes morais e cívicas que a mantenham e a engrandeçam, dentro de elevado espírito de Naturalidade humana; oferecer de modo especial, às crianças de sete a doze anos, as condições de equilibrada formação e desenvolvimento de personalidade; elevar o nível dos conhecimentos úteis à vida na família, à defesa da saúde e à iniciação no trabalho (Art 1º).

O ensino primário fundamental, destinado a crianças de 7 a 12 anos (Art. 2º), era formado pelo curso elementar (4 anos) e pelo complementar (1 ano). A partir de 1947, começou a funcionar o ensino supletivo, com duração de 2 anos, destinado a adolescentes e adultos. Essa modalidade fez com que diminuísse a taxa de analfabetismo no país.

Figura 9 – Estrutura do ensino primário



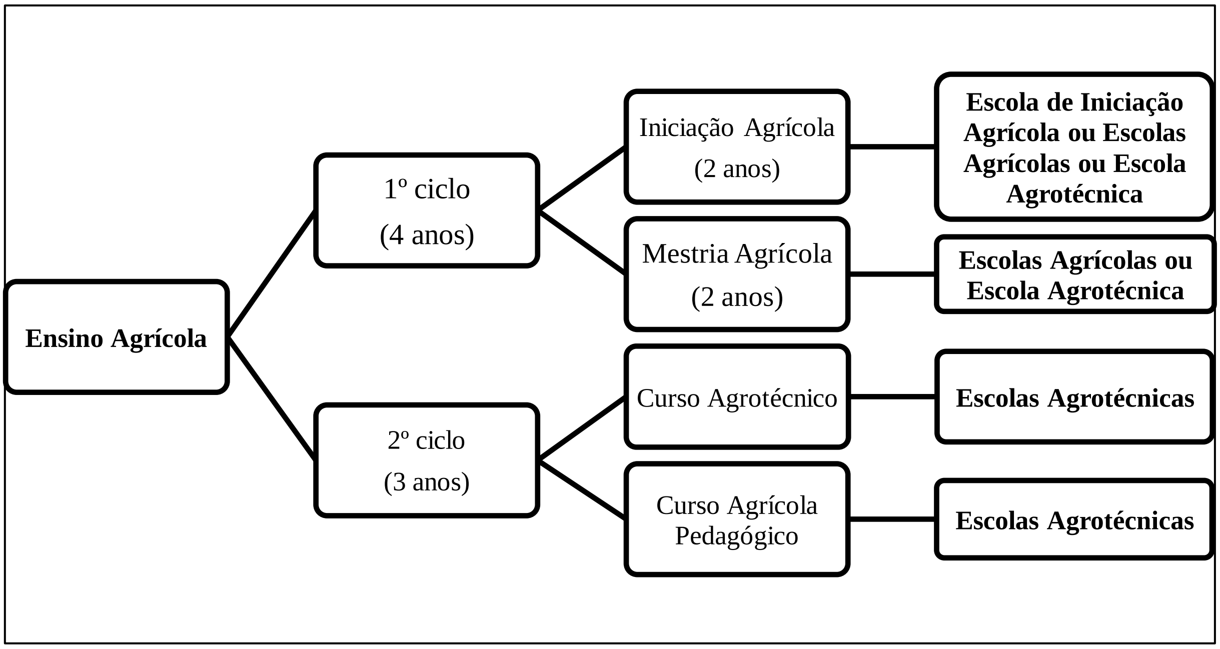
Fonte: Ghiraldelli Júnior (1991)

Era grande o número de professores sem qualificação no ensino primário. A implantação do ensino normal, com restrição etária, não contribuiu em nada para a melhoria dessa estatística. Como afirma Romanelli (2014), as leis tiveram pouca influência na modificação da realidade. Por essa distância da realidade, o ensino primário, na prática, passou a ser composto apenas pelo ensino elementar.

Alguns anos depois, baseado no Senai, foi criado[32], pelo decreto-lei nº 8.621 de 10 de janeiro de 1946, o Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial (Senac). Seu funcionamento era o mesmo que o do Senai, a diferença entre eles se dava pela área que abrangiam, um voltado para a indústria e o outro para o comércio.

Em 20 de agosto de 1946, assinado pelo presidente Eurico Gaspar Dutra e pelo Ministro da Agricultura Manoel Neto Carneiro Campello Júnior, o decreto-lei nº 9.613 organizou o ensino agrícola. O primeiro ciclo era composto pelo curso básico agrícola, de 4 anos e pelo curso de mestria, de dois anos. No segundo ciclo, estavam presentes alguns cursos técnicos com duração de 2 anos, dentre eles: agricultura, horticultura, zootécnica, prática veterinária, indústrias agrícolas, laticínios e mecânica agrícola.

Figura 10 – Estrutura do ensino agrícola



Fonte: Ghiraldelli Júnior (1991)

Também eram oferecidos cursos agrícolas pedagógicos, destinados à formação de docentes para as disciplinas do ensino agrícola e para os funcionários administrativos, sendo eles: Curso de Magistério de Economia Rural Doméstica (2 anos), Curso de Didática de Ensino Agrícola (1 ano) e Curso de Administração de Ensino Agrícola (1 ano). Esses cursos eram oferecidos em três tipos de instituições: escolas de iniciação agrícola, escolas agrícolas e escolas agrotécnicas, como mostra a Figura 10.

Os cursos profissionalizantes e o secundário tinham o mesmo tempo de duração. Assim, as classes médias, visando a uma ascensão social, estavam se esforçando para manter seus filhos no ensino secundário. Ao mesmo tempo, a industrialização, a fim de substituir a

[32] O Senac foi criado após a queda de Getúlio Vargas e o fim do Estado Novo.

importação, exigia mão de obra imediata, o que o ensino industrial tradicional não podia oferecer. O Senai e o Senac, por outro lado, possibilitavam uma formação mais ágil de mão de obra qualificada e remunerava seus alunos. Além de ter sido um grande chamativo para os jovens das classes populares[33], essa modalidade de curso atraía, também, trabalhadores em busca de uma melhor remuneração.

> [...] o sistema oficial de ensino, em seus ramos secundário e superior, continuou sendo o sistema das elites, ou ao menos das classes médias altas, enquanto o sistema "paralelo" de ensino profissional, ao lado das escolas primárias, passou a ser mais acentuadamente o sistema educacional das camadas populares (ROMANELLI, 2014, p. 174).

Embora conservadora, a reforma propiciou algumas inovações no que tange à educação. Foram criados, nesse período, o Instituto Nacional de Estudos Pedagógicos (INEP), o Instituto Nacional do Livro e o Serviço do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1991). Outra inovação

> [...] foi a obrigatoriedade da frequência à escola secundária, que seria o processo através do qual assegurava-se que as novas gerações se sentariam nos bancos escolares e neles permaneceriam o período suficiente para o aprendizado de uma cultura comum, que transmitisse a consciência de que pertenciam a uma nação comum e de que eram responsáveis pela manutenção e difusão de seus valores ao resto da população (SCHWARTZMAN; BOMENY; COSTA, 2000, p. 211).

Durante grande parte da reforma educacional, o país viveu sob um regime ditatorial. Com ele, "desenvolveu-se o fortalecimento do Estado no sentido de melhor servir aos interesses do capitalismo na sua política de controle das classes assalariadas (tanto dos empregados e funcionários, como do operariado)" (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1991, p. 83). A falta de flexibilidade para o ingresso no ensino superior, os exames de admissão para o ensino secundário e a própria constituição do ensino técnico profissional enfatizaram o caráter elitista e conservador das Leis Orgânicas do Ensino. No entanto, embora conservadora, a reforma foi relevante "pelo seu caráter pioneiramente sistematizador do ensino nacional" (GHIRALDELLI JÚNIOR, 1991, p. 88).

As Leis Orgânicas de Ensino vigoraram por quase duas décadas, sendo extintas apenas com a implantação da Lei 4.024 de 20 de dezembro de 1961, que ficou conhecida como Lei de Diretrizes e Bases. Embora as características estruturais tenham sido mantidas até a década de 1960, em 1951 o ministro Simões Filho expediu algumas portarias que alteraram os

---

[33] Referimo-nos aqui às classes populares que, evidentemente, escaparam do elevado índice de evasão escolar.

programas de ensino do curso secundário. A próxima seção desta pesquisa é sobre essa portaria.

4.3 O Programa Mínimo de 1951

A partir da portaria nº 456 de 27 de fevereiro de 1951, foi criada uma comissão para rever os programas do ensino secundário. Cada comissão (uma para cada disciplina) era formada, segundo Marques (2005, p. 53), por “[...] um professor da Faculdade Nacional de Filosofia, um professor do Colégio Pedro II, um professor do Instituto de Educação do Distrito Federal e um professor do Sindicato dos professores particulares”.

Em 10 de maio de 1951, a portaria ministerial nº 614 incumbiu a congregação do Colégio Pedro II da elaboração dos programas mínimos das diversas disciplinas do curso secundário. Era objetivo do ministro Simões Filho, com a criação de programas mínimos, “estabelecer um limite inferior ao qual todas as instituições escolares estariam sujeitas e em condições de executá-lo (MARQUES, 2005, p. 53). Além disso, preocupava-se em tornar o programa “[...] rigorosamente compatível com a capacidade de compreensão e discernimento do estudante” (MARQUES, 2005, p. 53).

Segundo artigo de Jacomo Stávale, disponível na revista Atualidades Pedagógicas, de Julho/Agosto de 1952, os programas de Matemática foram elaborados pelos professores Haroldo Lisbôa da Cunha e Cecil Tiré.

Cinco meses após essa incumbência, por meio da portaria nº 966 de 02 de novembro, os programas para o curso secundário foram regulamentados. Esses eram caracterizados por uma apresentação mais simples, mais flexível e os programas de Matemática, por exemplo, eram coordenados com os programas de Física e Desenho a fim de favorecer o ensino no sentido educativo, não apenas no sentido informativo e superficial (MARQUES, 2005). Nas palavras do ministro,

> O objetivo fundamental deste trabalho consistiu, pois, em eliminar dos programas atualmente em vigor, os excessos aludidos, reduzindo a prolixidade dos conhecimentos alinhados na estruturação de diversas disciplinas, que tornava penosa a tarefa didática. Ao mesmo tempo, verificava-se o flagrante desajustamento desses programas com o nível de assimilação da população escolar, cujas faculdades intelectuais, ainda mal desabrochadas, não a habilitavam a abranger a enorme soma de deveres e atividades de aprendizagem oferecidas ao seu conhecimento (INEP, 1952, p. 515, apud MARQUES, 2005, p. 52).

A portaria nº 966 estabelecia que os programas deveriam ser adotados em todos os estabelecimentos de ensino secundário do país e entrariam em vigor, progressivamente (uma série por ano), a partir de 1952. A elaboração de um programa mínimo deu autonomia para que cada estado elaborasse seu próprio plano; no entanto, os estados que não optassem pela elaboração deveriam seguir os planos do Colégio Pedro II.

Essa mesma portaria previu a elaboração de instruções metodológicas para cada disciplina. Essa elaboração ficou a cargo da congregação do Colégio Pedro II. Em 14 de dezembro de 1951, a portaria nº 1045 expediu os planos de desenvolvimento dos programas mínimos de ensino secundário e suas respectivas instruções metodológicas.

Segundo a publicação do dia 02 de fevereiro de 1952 do Diário Oficial, a congregação apresenta as instruções metodológicas com o objetivo exclusivo de

> proporcionar um roteiro, um subsídio, um repositório de esclarecimentos para elucidação de possíveis dúvidas que venham a surgir na execução dos novos programas, encargo que, evidentemente, compete aos respectivos redatores. De qualquer forma, porém, o que a Congregação deseja acentuar é que o bom êxito na aplicação dêstes, como de quaisquer programas, depende do zêlo, da boa vontade, do patriotismo dos dignos docentes que os devem pôr em prática na regência de suas turmas (DIÁRIO OFICIAL, 02 de fevereiro de 1952).

Comparando o programa mínimo (ANEXO B) com os programas dos cursos clássico e científico da reforma Capanema (ANEXO A), é possível notar que os tópicos de cada unidade do programa mínimo são mais detalhados. Outra informação relevante é que a diferença, bem acentuada na reforma Capanema, entre os conteúdos do curso clássico e do científico diminuiu. Conteúdos como Determinantes e Matrizes e Números Complexos, que eram tratados apenas no curso científico, passaram a fazer parte do programa mínimo do curso clássico.

Anteriormente, na reforma Capanema, foram expedidos dois programas, um para o curso clássico e outro para o científico. No programa mínimo, é apresentado um único programa para ambas as modalidades. Esse programa (Anexo B) apresenta alguns tópicos em negrito, esses, são exclusivos do curso científico.

A maioria do conteúdo sugerido na reforma Capanema se manteve no programa mínimo, porém a mudança se deu na distribuição dos conteúdos entre as três séries do secundário. O estudo das Progressões e dos Logaritmos passou da 2ª série para a 3ª; os Polinômios passaram da 1ª série para a 3ª série; os Corpos Redondos passaram da 2ª série para a 1ª e o estudo das Seções Cônicas passou da 3ª para a 2ª série.

Alguns tópicos que eram apresentados em uma mesma unidade na reforma Capanema passaram a ser abordados em unidades distintas no programa mínimo, como é o caso da Análise Combinatória e do Binômio de Newton. Por outro lado, tópicos como Polinômios e

Números Complexos, que eram tratados em unidades distintas, passaram a ser tratados em uma mesma unidade.

Tópicos como Divisibilidade Numérica, Frações Contínuas, Séries, Relações Métricas e Transformações de Figuras deixaram de ser tratados com as mudanças de 1951.

Como mencionado anteriormente, os planos de ensino eram seguidos, na portaria nº 1.045 de 14 de dezembro de 1951, pelas instruções metodológicas (ANEXO C). As instruções incentivavam o desenvolvimento da imaginação e do senso estético do aluno, a utilização de exemplos e aplicações; levantavam a questão da unidade matemática, as inter-relações entre os conteúdos; realçavam a necessidade de um curso ginasial prático e intuitivo; e um cuidado com o excesso de rigor, mesmo no segundo ciclo, apontando também a necessidade de se ter cuidado com o uso abusivo de definições e demonstrações longas.

Com relação aos conteúdos, as instruções metodológicas destacam que "no curso ginasial não será introduzido o conceito de número imaginário". O conceito só deverá ser introduzido na 3ª e última série do segundo ciclo, "ao serem dadas as propriedades gerais das equações e dos polinômios" e será apresentado "o essencial para a compreensão do assunto que se segue".

Por fim, as instruções aconselham o professor a observar a reação de cada turma a fim de diagnosticar a velocidade e a profundidade com que deve abordar o conteúdo.

Como vimos até aqui, o Colégio Pedro II e seus professores estiveram diretamente relacionados com as diversas reformas educacionais empreendidas no Brasil nas décadas de 1930 a 1960. Ele foi muito influente e era um colégio modelo para as demais instituições da época. Por esses motivos, na próxima seção, dissertaremos sobre essa instituição.

4.4 Colégio Pedro II

Até meados de 1830, o ensino secundário se encontrava abandonado e desorganizado, "[...] reduzido a poucas aulas avulsas, sem nenhuma inspeção, incentivo ou orientação, onde professores escolhiam seus horários de aula e os conteúdos de suas lições, e os alunos matriculavam-se e retiravam-se das aulas quando bem entendessem [...]" (MIORIM, 1998, p. 87).

Essa desorganização levou os ministros do Império a proporem algumas modificações. Inspirado na organização dos colégios franceses, o ministro e secretário de Estado da Justiça e interino do Império, Bernardo Pereira de Vasconcellos, criou, através de um decreto de 02 de dezembro de 1837, o Colégio Pedro II[34], "[...] a primeira escola secundária pública da cidade do Rio de Janeiro" (MIORIM, 1998, p. 87).

O nome dado ao colégio foi uma homenagem ao Imperador Dom Pedro II que, na data, completava doze anos de idade. A origem do colégio está vinculada ao Seminário São Joaquim (1766) que foi, através do decreto, convertido em Colégio Pedro II.

Figura 11 – Colégio Pedro II

Fonte: http://www.cp2centro.net/hitoriacp2centro.aspx

O Colégio Pedro II,

> [...] foi o primeiro colégio de instrução secundária oficial do Brasil, caracterizando-se como importante elemento de construção do projeto civilizatório do Império, de fortalecimento do Estado e formação da nação brasileira. Como agência oficial de educação e cultura, co-criadora das elites condutoras do país, o Imperial Colégio foi criado para ser modelo da instrução pública secundária do Município da Corte e demais províncias, das aulas avulsas e dos estabelecimentos particulares existentes[35].

Por possuir um programa de ensino de base clássica e tradição humanística, o Colégio Pedro II era o único a conferir o grau de bacharel em Letras (Decreto 296 de 30 de Setembro de 1843) a seus formandos. Outra característica importante do colégio era que, possuindo o diploma, o aluno garantia o ingresso nos cursos superiores sem precisar prestar nenhum exame.

> Pela primeira vez, foi apresentado um plano gradual e integral de estudos para o ensino secundário, no qual os alunos eram promovidos por série, e não mais por disciplinas, e obtinham, ao final do curso, um título de bacharel em Letras, que lhes garantia a matrícula em qualquer escola superior sem a necessidade de prestar exames (MIORIM, 1998, p. 87).

[34] Informações sobre o Colégio e sua história estão disponíveis no *site*: http://www.cp2.g12.br.

[35] Texto escrito pela Profª Drª Vera Lúcia Cabana Andrade, professora de História do Colégio Pedro II, disponível em: http://www.cp2centro.net/hitoriacp2centro.aspx.

Embora ocorresse o predomínio das disciplinas clássico-humanísticas, a matemática estava presente nas oito séries do curso. Segundo Miorim (1998, p. 87), a presença da matemática, das línguas modernas, das ciências naturais e físicas e da história mostrava "[...] uma tentativa de conciliação entre o ensino clássico e as tendências modernas; um reflexo das discussões entre *anciens* e *modernes* que aconteciam na Europa" (p. 87).

Os exames para admissão no Colégio eram rigorosos, levavam em consideração a idade, o mérito adquirido e habilidades inatas. Embora algumas vagas fossem destinadas, gratuitamente, para as classes menos favorecidas, o ensino no colégio não era gratuito.

> Durante o período imperial, o ensino no Colégio não era gratuito — os alunos admitidos pagavam honorário do ensino prestado, que se caracterizava por matrícula anual e pensões trimestrais. No entanto, algumas gratuidades eram concedidas, utilizando os seguintes critérios: órfãos pobres, filhos de professores com 10 anos de serviços no magistério, alunos pobres que se destacaram no ensino primário e, posteriormente, filhos de militares mortos na Guerra do Paraguai[36].

Os primeiros professores a lecionarem no Pedro II foram indicados pelo próprio ministro Bernardo Pereira de Vasconcellos. Após alguns anos, foram instituídos os concursos para ingresso de docentes. Os candidatos eram avaliados por uma comissão formada pelos professores do Colégio. À época, não havia um curso de formação de professores; logo, os docentes tinham formação em medicina, direito, engenharia, dentre outras profissões.

Segundo Gasparello (2006, p. 02), "o poder dos professores do Colégio Pedro II era hegemônico, se considerarmos que eram eles que decidiam, cada um na sua cátedra, o programa curricular e os compêndios adotados no Pedro II e, por conseguinte, nos exames preparatórios" (GASPARELLO, 2006, p. 2). A maioria desses professores (74%), "estava ligada ao mundo da escrita como autores de livros (didáticos ou não) e jornalistas, publicando em jornais e outros periódicos" (GASPARELLO; VILLELA, 2006, p. 55).

Em 24 de outubro de 1857, o decreto 2006 dividiu o Colégio em externato e internato para que fosse possível gerenciar e distribuir os alunos da melhor maneira possível.

Por várias vezes, ao longo de sua história, o Colégio teve seu nome alterado. Em 1889, com a proclamação da República passou a se chamar Instituto Nacional de Instrução Secundária; em 1890, Ginásio Nacional. Com a extinção do internato, o Colégio era formado por dois externatos que, em 1909, passaram a se chamar Externato Nacional Pedro II e

---

[36] Texto escrito pela Profª Drª Vera Lúcia Cabana Andrade, professora de História do Colégio Pedro II, disponível em: http://cp2.g12.br/informes_prodi/83-cpii/1631-per%C3%ADodo-imperial.html

Internato Nacional Bernardo de Vasconcellos. Em 1911, o presidente Marechal Hermes da Fonseca retorna à denominação de Colégio Pedro II, dividido em externato e internato.

Desde 1837, o Colégio passou por várias reformas educacionais. Colégio modelo, muitas dessas reformas foram aplicadas primeiramente no Pedro II para depois serem expandidas para todas as instituições escolares.

Na década de 1930, com a reforma Francisco Campos, o Colégio passou a admitir mulheres no externato; no entanto, as classes continuavam divididas por sexo. Foi criado também o curso noturno no externato e foi proposta a uniformização do ensino nacional. Com a pose de Getúlio Vargas, o Colégio passou por algumas suspensões de exames para abrigar o exército e, em dezembro de 1930, a direção geral do colégio sofreu algumas mudanças. As atividades só se regularizaram em 1932.

> [...] seus exames adiados e parte de suas instalações físicas transformadas em quartel provisório para batalhões trazidos ao Rio de Janeiro pelo movimento. Em menos de um mês, mudou-se a direção do colégio e adiou-se a formatura dos bacharéis, reestabelecendo-se a normalidade apenas em 1932 (POLON, 2004, p. 104).

Com a reforma de 1932, aumentou-se o poder da congregação do Colégio Pedro II, uma vez que ela ficou responsável pela elaboração dos programas do ensino secundário e de suas instruções metodológicas. Por outro lado, definiram-se os critérios para a equiparação de outros colégios ao Pedro II. Desse modo, a reforma Francisco Campos foi a última "[...] a colocar, no corpo da lei, menção ao Colégio Pedro II como padrão para o ensino no país" (POLON, 2004, p. 112).

Embora tenha deixado figurar como colégio modelo, o Colégio Pedro II e seus professores estiveram diretamente relacionados com a elaboração dos programas de ensino estabelecidos pela Lei Orgânica do Ensino Secundário. Mais adiante, a portaria de 1951 deixou a cargo da Congregação do Colégio Pedro II a elaboração dos programas mínimos do ensino secundário e suas respectivas instruções metodológicas. Logo, embora não fosse mais o padrão oficial a ser seguido pelos demais estabelecimentos de ensino, o Colégio Pedro II e seus professores continuaram influenciando a educação no país.

Atualmente, o Colégio Pedro II possui quase 13 mil alunos divididos em 14 campi e oferece turmas desde a educação infantil até o ensino médio regular e integrado e Educação de Jovens e Adultos (Proeja). Com a sanção da lei 12.677 de 2012, o colégio equiparado aos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia.

Ao longo de seus quase 180 anos, foi referência para outros estabelecimentos no que diz respeito ao ensino secundário. Seus programas de ensino eram diferenciados, assim como seus professores. Dentre tantos, destacaremos, nas próximas seções, dois deles: Haroldo Lisbôa da Cunha, responsável pelo conteúdo de álgebra do terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo* e Euclides Roxo, um dos quatro autores da série e personagem importante nas reformas empreendidas por Francisco Campos e por Gustavo Capanema.

4.5 Os Autores da Série *Matemática 2º ciclo*

Segundo Genette (2009), a idade do autor, sexo, suas obras publicadas, os cargos exercidos, constituem paratextos factuais. Essas informações podem proporcionar uma leitura diferenciada da obra. É com esse olhar que pretendíamos, nesta seção, discorrer sobre os quatro autores da série *Matemática 2º ciclo*. Nossa intenção inicial era falar brevemente sobre eles e nos aprofundarmos na história de dois deles: Euclides Roxo – por sua participação e influência na elaboração de várias reformas educacionais, e Haroldo Lisbôa da Cunha – por ter sido o autor responsável pelo capítulo que aborda o conteúdo dos números complexos. Ao buscarmos informações a respeito da vida de Roberto Peixoto e Cesar Dacorso Netto, pouco ou nada encontramos.

Dessa forma, apresentaremos a seguir algumas informações pessoais e profissionais a respeito de Euclides Roxo e Haroldo Lisbôa da Cunha com o intuito de que elas contribuam com a análise da obra.

4.5.1 Haroldo Lisbôa da Cunha

Embora tenha atuado em diversas instituições importantes, como veremos adiante, pouco se encontra a seu respeito em livros, periódicos e até mesmo na internet. A partir de buscas incansáveis, encontramos a seguinte referência: “Professor Haroldo Lisbôa da Cunha: pequena biografia”, escrita pelo também autor da série *Matemática 2º ciclo,* Cesar Dacorso Netto.

Com a descoberta dessa referência no artigo *Os Mestres Nossos de Cada Dia - Haroldo Lisbôa da Cunha*, da Revista Temas e Conexões (2013), entramos em contato com a Biblioteca Histórica do Colégio Pedro II, localizada no Rio de Janeiro, que gentilmente compartilhou conosco a versão digitalizada do documento pertencente ao Núcleo de Documentação e Memória (NUDOM)[37].

[37] O NUDOM constitui-se de um acervo arquivístico, bibliográfico e iconográfico formado por cerca de nove mil itens, entre obras raras, livros didáticos dos professores catedráticos, programas de ensino, livros manuscritos, a Coleção das Leis do Brasil, entre outros.

Antes de falarmos um pouco sobre o autor, é importante ressaltar que o texto de Cesar Dacorso Netto, colega de Haroldo L. da Cunha na elaboração da série *Matemática 2º ciclo*, a todo o momento, enaltece as qualidades de seu colega. Sua fala é carregada de um misto de melancolia e saudade.

Haroldo Lisbôa da Cunha nasceu no dia 08 de março de 1909 na cidade do Rio de Janeiro. Estudou no Colégio Brasil (Niterói) e se diplomou engenheiro geógrafo (1929) e engenheiro civil e eletricista (1930) pela Escola Politécnica, atual Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

> No entanto limitada foi a sua atividade profissional como engenheiro, já que a sua natural propensão era para o Magistério que praticou com entusiasmo, com capacidade e com indeclinável vocação (DACORSO NETTO, [199-], p. 01 - 02)

Cesar Dacorso Netto conta como eles, a partir da Matemática, aproximaram-se e se tornaram amigos. Ressalta características de Haroldo Lisbôa da Cunha como a solidariedade e a lealdade.

> Circunstâncias ocasionais aproximaram-me desde cedo do então jovem professor e, nos contatos frequentes de estudiosos da mesma área: a Matemática, pude desde logo sentir a grandeza do seu caráter, a nobreza da sua alma e a longanimidade do seu espírito afeito à solidariedade e estruturado por admirável sentimento de lealdade. Simples quartanista da Escola Politécnica, hoje Escola de Engenharia da UFRJ, em 1933 ousei inscrever-me num Concurso Público para preenchimento de uma cátedra de Matemática do tradicional Colégio Pedro II. Um dos cinco pretendentes ao cargo era Haroldo Lisboa da Cunha, engenheiro recém-formado pela Escola Politécnica. Talvez esse berço em comum de formação profissional tenha contribuído para nos aproximar e me proporcionar uma amizade que muito me enobreceu. Numa eloquente demonstração de superioridade moral e de acentuado senso de companheirismo, Haroldo ignorou a minha condição, embora despretensiosa, de seu concorrente para incentivar-me, proporcionar-me mesmo elementos que me facilitassem o estudo dos pesados temas que constituíam os pontos de uma das provas do concurso, a prova escrita de demonstração de conhecimentos teóricos. Observa-se que na época era difícil a obtenção de recursos bibliográficos, tanto pela pobreza das poucas bibliotecas públicas existentes como pela escassez de livros estrangeiros no mercado. A partir desse notável certame realizado no Colégio Pedro II – em 1934, ficamos unidos por fraterna amizade e passei a testemunhar da sua fulgurante carreira de professor, conferencista, educador, administrador e autor de publicações de inegável valor cultural e profissional, quer em caráter didático quer de natureza técnica (DACORSO NETTO, [199-], p. 03 - 04).

Haroldo Lisbôa da Cunha passou em primeiro lugar no concurso mencionado por Cesar Dacorso Netto e assumiu a cátedra de Matemática do Colégio Pedro II (1934). Anteriormente, havia obtido o primeiro lugar no concurso público para a obtenção da cadeira de Mecânica Geral do Ensino Profissional do Estado do Rio de Janeiro (1930) e, em 1935, também em primeiro lugar, tomou posse de uma cátedra de Matemática do Instituto de Educação do Estado de Rio de Janeiro. Foi ainda, segundo Dacorso Netto ([199-], p. 02) "mediante provas públicas que alcançou o título de Docente Livre da Escola Politécnica (1937) [...] na cátedra de Cálculo Diferencial e Integral, Complementos de Geometria Analítica e Noções de Monografia".

Ainda segundo Dacorso Netto ([199-]), Haroldo Lisbôa da Cunha buscava sempre se aprimorar, em 1965 fez um curso de Administração de Universidades na Universidade de Houston nos Estados Unidos e outros cursos na Escola Superior de Guerra (1969, 1973, 1974).

No que diz respeito a conselhos e comissões de educação e de administração, assumiu diversos cargos. Foi

> Diretor do Departamento de Ciclos de Estudos da Escola Superior de Guerra, membro do Corpo Permanente da mesma Escola, da Comissão Nacional do Livro Didático (MEC, 1944 – 1959) e do Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura do Itamarati (ONU, 1946 – 1967) (DACORSO NETTO, [199-], p. 03).

No que tange aos cargos administrativos, ao longo de sua vida, assumiu os cargos de

> Diretor do Ensino Secundário do MEC (1947/51), Secretário de Cultura do Estado do Rio de Janeiro, então Distrito Federal (1945/55), Reitor da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, então U.E.G. (1960/67), Vice-Reitor Administrativo da Universidade Santa Úrsula (1977) e Diretor do Instituto de Educação – Rio de Janeiro (1954) e do Colégio Pedro II (1967/68). (DACORSO NETTO, [199-], p. 01).

Figura 12 – Haroldo Lisbôa da Cunha

Inauguração da biblioteca da Faculdade de Direito da Universidade do Estado da Guanabara (UEG). Da esquerda para a direita: professor Oscar Tenório, diretor da Faculdade de Direito; professor Haroldo Lisbôa da Cunha, reitor; e professor Roberto Lyra. 14/08/1963.

Fonte: http://www.direitouerj.org.br/2005/fdir70/imaMI.htm

Por suas contribuições e “pelos relevantes serviços prestados à coletividade como educador e administrador” (DACORSO NETTO, [199-], p. 03), recebeu inúmeras condecorações e títulos: Educador Emérito por ato do Governador do Estado do Rio de Janeiro (15/10/1975), Professor Emérito do Colégio Pedro II (1979), a Medalha do Mérito Adesguiano (Associação dos Diplomados da Escola Superior de Guerra, 1978). “Em 1969 o Conselho Universitário da então Universidade do Estado da Guanabara deu o nome de ‘Pavilhão Reitor Haroldo Lisbôa da Cunha’ ao principal prédio do Campus – Maracanã da UERJ” (DACORSO NETTO, [199-], p. 03).

Entre seus estudos na área da Engenharia, são destacados os seguintes: “Cálculo das colunas em concreto fretado” (Revista da Escola de Engenharia da UFRJ, 1929), o concernente à solução matemática do problema da visibilidade nas grandes arquibancadas[38] (Revista do Clube de Engenharia, Rio, 1943 e Revista de Ingenieria, Montevideo, 1944).

Com relação aos trabalhos em Matemática, destacam-se “A Matemática e o Conceito de Função” (1933), “Pontos de Álgebra Complementar – Teoria das Equações” (1934), “Sobre a Quadratura do Círculo” (1934) e “Matemática 2º Ciclo” (1934) [39].

No que diz respeito à vida, à personalidade e ao educador, Cesar Dacorso Netto destaca a conduta exemplar, a clareza de suas aulas e a busca por renovação, características de Haroldo Lisbôa da Cunha.

> Modelar chefe de família e cidadão de exemplar conduta pública e de edificante desempenho profissional, sua personalidade explende nas virtudes de educador que sempre foram o esteio comum de seus atos e realizações. As suas aulas de Matemática, colocadas sempre ao nível médio ou superior do curso a que se destinassem, primavam pela clareza e esmero de exposição, desde a perfeição da linguagem na enunciação dos termos apresentados até a cuidadosa arrumação no quadro negro das fórmulas, das equações e das figuras geométricas quando fosse o caso. Dotado de acentuada capacidade de transmitir e de despertar o interesse do auditório, realizava as suas preleções com naturalidade pessoal e equilíbrio emocional que, no entanto, não escondiam o seu entusiasmo pela matéria versada. Estudioso permanente dos assuntos matemáticos, mantinha constante revisão e atualização desse tipo de conhecimento especializado bem como procurava sempre modernizar as técnicas de ensino correspondentes. Apesar do seguro domínio dos fatos matemáticos concernentes à área de sua responsabilidade, não se descuidava nunca do preparo antecipado das suas lições, dosando os temas a serem expostos, analisando a sua coordenação lógica, selecionando os exemplos adequados à ilustração da aula e assinalando o setor de aplicações teóricas ou práticas, dos assuntos expostos. Não se conformava

[38] Esse estudo foi usado no Estádio do Maracanã e no que a Suíça construiu para o Campeonato Mundial de Futebol em 1954 (DACORSO NETTO, [199-], p. 02).

[39] Embora ressalte que essa obra é de caráter didático e em colaboração, o que nos faz ter certeza de que estamos falando da obra analisada nesta pesquisa, a data apresentada no texto de Cesar Dacorso Netto não condiz com as edições analisadas nesta pesquisa.

> com a rotineira reprodução de aulas anteriormente ministradas e, por isso, embora fossem os mesmos conteúdos, diversa era a forma de apresentação como renovados eram os processos didáticos utilizados em cada lição. (DACORSO NETTO, [199-], p. 06).

No que tange à sua busca por conhecimento e modernização, podemos destacar as inúmeras obras que compõem o acervo da Coleção Professor Haroldo Lisbôa da Cunha. Sob os cuidados da Biblioteca Histórica do Colégio Pedro II, encontram-se 1.049 obras que pertenciam ao acervo pessoal do autor.

Segundo Adão [199-], Haroldo Lisbôa da Cunha foi um dos professores do Pedro II que mais lutaram pelo êxito da Faculdade de Humanidades Pedro II (FAHUPE), fundada em 1969. Também foi responsável pela organização do curso de Matemática. Com a desvinculação da FAHUPE do Colégio Pedro II, foi fundada a Sociedade Mantenedora da Faculdade e Haroldo Lisbôa da Cunha foi um dos fundadores. Em meio a várias crises, a FAHUPE chegou perto da falência.

Adão [199-] destaca também algumas características do professor:

> Leal, disciplinado, nunca faltou a uma reunião ou Assembleia, sentava-se na primeira fila, atento aos argumentos dos otimistas e aos contras dos derrotistas e, nunca deixava de levantar sua voz para colaborar com suas palavras racionais e raciocínio lúcido, propondo soluções para problemas que surgiam (ADÃO, [199-], p. 08).
> Era sempre o primeiro a entregar relatórios e trabalhos sob sua responsabilidade. Extremamente assíduo e pontual cumpria os programas de sua disciplina integralmente e exigia de todos que orbitavam em torno dele a mesma atitude séria e responsável (ADÃO, [199-], p. 09).
> Entretanto era sensível e sabia ser grande amigo, Tratava alunos com firmeza de pai protetor e enérgico, que pensa no futuro de seus filhos. Contam-se às centenas aqueles que foram agraciados com sua ajuda e orientação profissional. Era profundamente admirado por todos que o conheciam (ADÃO, [199-], p. 09).

Tanto Dacorso Netto como Adão ([199-], p. 09) enfatizam que Haroldo Lisbôa da Cunha "foi um exemplo de idealista". Levando em consideração a escassez de informações a respeito do autor, essa característica, em especial, diz muito sobre os pensamentos e ideais de Haroldo Lisbôa da Cunha, uma vez que os idealistas desempenharam um papel bastante importante na consolidação e modernização da educação, como vimos anteriormente.

> O Professor Haroldo Lisboa da Cunha soube ser mestre competente, tanto admirado por sua excelente cultura como respeitado por seu primoroso potencial didático, foi, ainda, o criador de uma respeitável escola formadora de docentes discípulos seus, que hoje continuam as tradições pedagógicas do ilustre educador e mantêm o culto de respeito e reconhecimento à obra do eminente intelectual. Os seus ensinamentos continuam na lembrança de quantos tiveram privilégio de testemunhar e, mesmo, de acompanhar as realizações sempre inspiradas num acentuado espírito de autêntica

> solidariedade humana e guiadas por um elevado e nobre idealismo (DACORSO NETTO, [199-], p. 06).

Haroldo Lisbôa da Cunha faleceu no dia 06 de abril de 1990, após ampla atuação "em benefício da cultura nacional" (DACORSO NETTO, [199-], p. 01).

> Professor por vocação, faleceu como queria. Deu aulas enquanto se aguentou de pé; quando já não podia mais lecionar, pois a doença cruel o estava corroendo internamente, é que desistiu.
> Deu sua última aula 15 dias antes de sua morte. Depois da aula, baixou a cabeça, sonolento em sua mesa; estava oferecendo suas últimas forças à carreira a que tanto se devotou. Apenas a morte o afastava dela (ADÃO, [199-], p. 09).

As posições ocupadas por Haroldo L. da Cunha mostram-se, no mínimo, oportunas para a produção de uma série como a *Matemática 2º ciclo*, bem como para o sucesso de divulgação e venda.

4.5.2 Euclides Roxo

Euclides de Medeiros Guimarães Roxo nasceu no dia 10 de dezembro de 1890 na cidade de Aracaju – Sergipe, enquanto seu pai, o engenheiro João Baptista Guimarães Roxo, estava na região trabalhando no projeto de construção da estrada de ferro entre Aracaju e Simão Dias (DASSIE, 2008).

Figura 13 – Euclides Roxo

Fonte: Acervo do Ghemat

Em 1904, ingressou como aluno no internato do Colégio Pedro II e bacharelou-se em 1909 (DASSIE, 2008). Enquanto aluno, teve seu primeiro contato com o magistério, ministrava aulas particulares para outros alunos (VALENTE, 2004). Em 1915, enquanto cursava engenharia civil na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, foi aprovado para exercer, por três anos, a função de professor substituto de Aritmética do Colégio Pedro II; assim, começava sua carreira como professor.

Em 1918, Euclides Roxo passa a atuar na Escola Normal (destinada à formação de professores primários). Na década de 1920, presencia movimentos renovadores na Escola Normal, o que pode ter despertado em Roxo um novo olhar sobre questões educacionais (DASSIE, 2008).

Após assumir vários cargos, tanto no internato como no externato, é nomeado, em 19 de agosto de 1925, diretor do externato Pedro II. Sua efetivação é assinada pelo então presidente Arthur Silva Bernardes e pelo ministro Afonso Pena. Roxo permanece no cargo até 1930, quando assume o cargo de diretor do Internato Pedro II e nele permanece até 1935.

Percebemos, em nossa pesquisa no arquivo pessoal de Euclides Roxo, que ele era constantemente convidado para participar de congressos, reuniões, conferências que discutiam a respeito de educação.

Figura 14 - Telegrama

ER.T.2.035 T2

BRASIL DEPARTAMENTO DOS CORREIOS E TELEGRAFOS
TELEGRAMA

RECEBIDO
DE
POR
AS

OFFICIAL = DR. EUCLIDES ROXO
DIRETOR DO INTERNATO DO COLEGIO
PEDRO II RIO =

15 JAN 93

DE AVENIDARIO DF 604=73=15=19.30

= 65 TENHO PRAZER COMMUNICAR=VOS SENHOR MINISTRO RESOLVEU DESIGNAR=VOS PARA FAZER PARTE DA DELEGACAO QUE REPRESENTARA MINISTERIO NA 6 A. CONFERENCIA DE EDUCACAO CUJA INAUGURACAO TERA LOGAR A 28 DESTE EM FORTALEZA . PT . ESPERANDO 'OSSA REFERIDA DELEGACAO CONTAR VOSSO VALIOSO CONCURSO , PECO VOSSO ENTENDIMENTO COM DIRETORIA GERAL DE CONTABILIDADE AFIM COMBINAR PROVIDENCIAS NECESSARIAS . CORDIAIS SAUDACOES. TEIXEIRA DE FREITAS , DIRETOR INFORMACOES , ESTATISTICA MINISTERIO EDUCACAO

Fonte: Acervo do Ghemat

Também ficou evidente a preocupação de Roxo em estar atualizado com os acontecimentos e tendências educacionais de outros países. Encontramos, em seu arquivo pessoal, vários pedidos feitos em livrarias internacionais, como a americana Barnes & Noble.

A tabela abaixo (Figura 15) mostra como diversos países distribuíam geometria intuitiva, geometria dedutiva, álgebra e aritmética teórica ao longo de quatro anos escolares. Podemos conjecturar que essa tabela foi elaborada por Euclides Roxo com o intuito de estudar como a Matemática era desenvolvida em outros países; esta é mais uma evidência de sua preocupação em se manter atualizado.

Figura 15 – Países e a Matemática

Fonte: Acervo do Ghemat

No ano de 1922, Arthur Thiré, também professor do Pedro II e autor de livros didáticos, comentou, em uma reunião do Colégio Pedro II, que, se a quantidade de aulas de Aritmética não fosse ampliada, muitos alunos seriam reprovados. Os professores presentes na reunião solicitaram ao Conselho Superior de Ensino um aumento no número de professores do Colégio. Essa solicitação foi negada, o que tornou cabível uma adequação do programa de Matemática ao tempo disponível para a disciplina e, consequentemente, a adoção de um novo livro didático. No ano seguinte, 1923, o programa de ensino sofre alterações e o colégio adota o livro Lições de Aritmética, o primeiro livro didático de Euclides Roxo (VALENTE, 2004).

> Assim, sendo o Pedro II modelo para o ensino, por conta dos programas didáticos adotados, o livro de Roxo passou a ser referência de ensino nacional para a aritmética escolar no Brasil. Além disso, o livro também deveria ser utilizado pelos candidatos à admissão nas Escolas Politécnica, Militar e Naval (VALENTE, 2004, p. 68).

O fato de ter tido grande repercussão nos provoca a pensar: o que o livro desenvolvido por Euclides Roxo apresentou de tão diferente dos adotados anteriormente[40]? Até então, ocorria um transplante (ROMANELLI, 2014) dos textos estrangeiros para o Brasil. Os livros eram traduzidos integralmente e essa prática provocava diversas críticas aos livros estrangeiros, por trazerem termos desconhecidos do público brasileiro (BITTENCOURT, 2008). Diferentemente dessa prática, Roxo se apropriou do livro *Leçons d'Arithmétique* do francês Jules Tannery e o adequou para o ensino brasileiro. "É possível dizer que tal apropriação faz revelar os primeiros sinais de modernização da matemática escolar no Brasil" (VALENTE, 2004, p. 69).

Além de ter sido um sucesso e adotado por todo o país, o livro traz um grande ganho no sentido de que,

> Diferente dos Elementos de *Arithmetica* por F.I.C., no qual, como norma, o desenvolvimento da aritmética se faz com exemplos numéricos, nas Lições, de modo igual ao de Tannery, a apresentação e o desenvolvimento dos conteúdos utilizam notação literal. Esse passo é importante para a defesa – que virá posteriormente – da ideia de fusão dos ramos separados da tradicional matemática, particularmente da aritmética com a álgebra. Além disso, ao seguir o plano de Tannery, Roxo ratifica pelo ensino o papel das demonstrações no ensino, traduzindo, em sua *Introdução*, a advertência também posta por Tannery: "A compreensão exata das (dessas) definições e propriedades tem muito mais importância que a demonstração e o enunciado das regras, o qual, em rigor, poderia ser suprimido" (1925, p. 6). Essas considerações traduzem o esforço de reduzir o papel predominante da lógica demonstrativa, dedutiva vigente na matemática tradicional, substituindo-a por um entendimento mais significativo, isto é, por compreensão que busca ajuda na intuição (VALENTE, 2004, p. 70 - 71, grifos do autor).

Já como diretor do Colégio Pedro II, em 14 de novembro de 1927, Roxo propõe alterações radicais no ensino da Matemática, as quais são baseadas na reforma realizada por Felix Klein na Alemanha. Um dos pontos sugeridos é a unificação das matemáticas (aritmética, álgebra, geometria) em uma única matemática. Em 1928, o Departamento Nacional de Ensino e a Associação Brasileira de Educação encaminham ofícios a favor das modificações. Em 15 de janeiro de 1929, é oficializada a proposta, exclusivamente para o Colégio Pedro II, pelo Decreto nº 18.564.

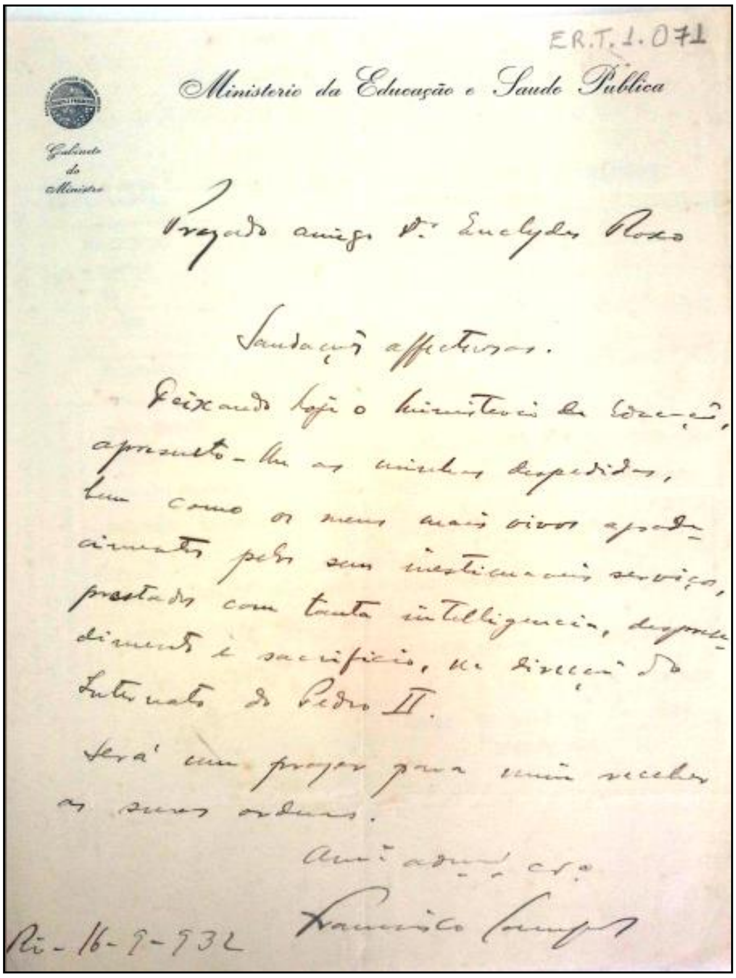
Como vimos no início deste capítulo, Getúlio Vargas assumiu a presidência do Brasil e nomeou Francisco Campos como primeiro-ministro do Ministério da Educação e Saúde Pública. Campos convida Euclides Roxo para presidir "[...] uma comissão que irá elaborar um projeto de reforma do ensino brasileiro" (VALENTE, 2004, p.78). O ministro e Euclides

---

[40] Anteriormente, os livros usados eram os da coleção F.I.C (Frères de l'Intruction Chrétienne).

Roxo mantinham relação próxima, como pode ser percebido na carta apresentada na Figura 16, em que Campos, ao deixar o ministério, agradece Roxo pelos serviços prestados.

Figura 16 – Carta de Francisco Campos para Euclides Roxo



ER.T.1.071

Ministerio da Educação e Saude Publica

Gabinete do Ministro

Prezado amigo Dr. Euclydes Roxo

Saudações affectuosas.

Deixando hoje o ministerio da Educação, apresento-lhe as minhas despedidas, bem como os meus mais vivos agradecimentos pelos seus inestimaveis serviços, prestados com tanta intelligencia, desprendimento e sacrificio, na direcção do Internato do Pedro II.

Será um prazer para mim receber as suas ordens.

Amigo admor. cro.

Rio - 16-9-932 Francisco Campos

Fonte: Acervo do Ghemat

Em 26 de julho de1934, Gustavo Capanema assume o cargo de Ministro da Educação e Saúde Pública. Como comentamos no capítulo 2 e no início deste capítulo, em 1942, Gustavo Capanema colocou em vigor a Lei Orgânica do Ensino Secundário que teve, em sua elaboração, a colaboração direta de Euclides Roxo.

> O papel de Euclides Roxo nas reformas promovidas por Campos e Capanema fez que se consolidassem no Brasil duas ideias defendidas por Klein e Breslich: o ensino simultâneo dos vários campos da matemática em cada série, integrando-os na medida do possível; e a presença da matemática em cada série do currículo (CARVALHO, 2004, p.141).

Em nossa visita ao acervo do Ghemat, encontramos uma carta escrita por Euclides Roxo e endereçada a Gustavo Capanema. Ela é uma resposta de Roxo ao pedido do ministro para que acrescentasse às instruções metodológicas do Programa de Matemática "[...] uma determinação a respeito da maneira por que a matéria deverá ser distribuída em compêndios, podendo ser adotado qualquer critério, menos o de um compendio para cada série" (ANEXO D). Nessa carta, pudemos perceber o posicionamento de Roxo sobre alguns aspectos inerentes ao seu papel como professor e autor de livros didáticos.

Logo no início da carta, Euclides Roxo recusa o convite, uma vez que não poderia escrever sobre algo com o qual não concordava: "estou profundamente convencido de que o único critério aceitável, principalmente para o caso da Matemática, é justamente o de um compêndio para cada série" (ANEXO D).

Euclides Roxo aponta razões de ordem didática, psicológica e econômica ao defender a distribuição por série. Inicia sua defesa questionando como o estudante absorverá a ideia de que "a matemática é um todo harmônico" se ele recebe mais de um compêndio para estudar? Acrescenta que o aluno ficará com a impressão de que os autores e editores fizeram isso para que ele comprasse dois livros ao invés de um.

No que tange à didática e à metodologia, enaltece ao ministro que o professor não poderá desenvolver exercícios que envolvam duas partes da Matemática (aritmética e geometria, álgebra e geometria), pois o aluno só estará com um dos compêndios em sala. Deverá ele obrigar os alunos a trazerem ambos os livros em todas as aulas?

Muitos de seus argumentos envolvem os gastos dobrados que a distribuição por matéria acarretaria. E se o aluno fosse transferido de escola? Teria que adquirir outro compêndio? Os livros publicados em material barato para diminuírem os gastos suportariam ser manuseados por dois anos, ou mais, em caso de repetência? E, se entre a primeira e a segunda série mudasse o professor da turma, ele deveria utilizar o compêndio do antigo professor? E a sua autonomia? Se optasse por outro livro, o aluno teria que adquirir outro?

A carta, através dos argumentos levantados por Roxo a favor da distribuição dos livros didáticos por série, mostra um homem de convicção, alguém capaz de rejeitar um pedido do Ministro da Educação e Saúde Pública para não contradizer sua opinião.

Depois de muitos anos de dedicação ao ensino de Matemática, Euclides Roxo faleceu no Rio de Janeiro no dia 21 de setembro de 1950. É considerado por diversos pesquisadores um dos primeiros educadores matemáticos do país.

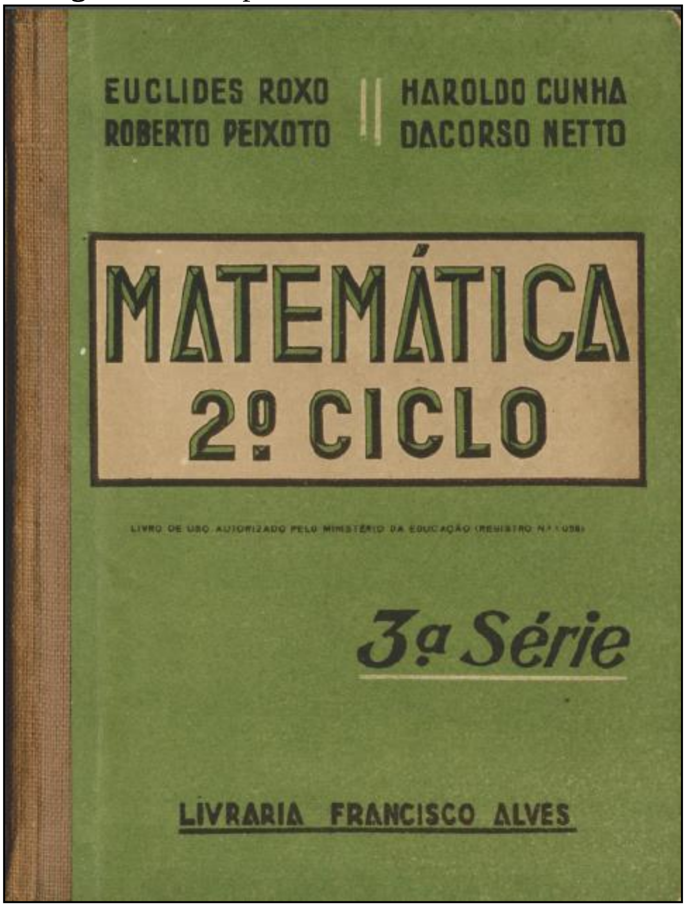
Na sequência, apresentaremos nossa análise da série *Matemática 2º ciclo*. Iniciaremos o capítulo dissertando sobre a série como um todo. Ao longo do caminho, focaremos nossos esforços no capítulo "Números Complexos", presente no terceiro volume da série.

5 A SÉRIE *MATEMÁTICA 2º CICLO*

A hermeneuta – esse hermeneuta – se fez pesquisadora
no movimento de pesquisar, tornou-se leitora lendo o livro
que permitiu a ela ler-se a si própria lendo o que lia.
Subvertendo o "FIM" que o autor indicou na última das laudas,
a hermeneuta obriga o livro a continuar.
(ANDRADE, 2012, p. 265).

A série, *Matemática 2º ciclo*, foi escrita no início da década de 1940[41] por Euclides Roxo, Haroldo Lisbôa da Cunha, Roberto Peixoto e Cesar Dacorso Netto. Na ocasião, foi editada pela livraria Francisco Alves, idealizada para os cursos clássico e científico[42] e apresentada em três volumes, sendo um livro para cada série do ciclo.

Figura 17 – Capa da série *Matemática 2º ciclo*



Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1956)

Nesta pesquisa, temos por objeto de estudo a unidade IV, *Números complexos*, do terceiro volume da série. No entanto, para que se possa ter uma compreensão geral da unidade

---

[41] Possivelmente, foi escrita nos anos de 1943 ou 1944. A edição de 1944 consultada não apresenta dados que revelem se é a primeira ou a segunda edição.

[42] No capítulo 2, ao tratar do surgimento dos números complexos nos programas de ensino, esclarecemos o que eram e como se constituíam os cursos clássico e científico.

mencionada, faremos alguns apontamentos sobre a série como um todo. Nessa direção, basearemos nossos estudos nas edições[43] de 1944, 1946[44], 1949, 1955 e 1956, distinguindo-as sempre que necessário.

As capas dos volumes analisados são de material duro e da cor verde (Figura 17). Nelas, destacam-se, em tamanho superior aos demais dados, o título da obra, que indica a disciplina que será abordada - no caso, a Matemática, já de forma unificada (aritmética, álgebra, geometria e trigonometria) -, o nível para o qual a obra é destinada - o segundo ciclo - e que o volume é destinado à 3ª série. Em letras de tamanho inferior ao título, estão presentes os nomes dos autores e da editora responsável pela publicação da obra – Livraria Francisco Alves. Em tamanho ainda menor, encontra-se, nas edições de 1949 e 1956, a informação de que o livro é autorizado pelo Ministério da Educação (registro nº1058).

Em 1938, foi criada a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD). O decreto-lei nº 1.006 de 30 de dezembro estabelecia as condições de produção, importação e utilização do livro didático. Após alguns anos, o decreto-lei nº 8.460 de 26 de dezembro de 1945 consolidou a legislação anterior. O Art. 3º (BRASIL, 1945) expõe que,

> A partir da data a ser fixada pelo Ministro da Educação e Saúde, os livros didáticos que não tiverem tido autorização prévia, concedida nos termos desta lei, não poderão ser adotados no ensino das escolas primárias, normais, profissionais e secundárias, em todo o território nacional.

Diz ainda que os autores ou editores deveriam enviar três exemplares de suas obras, datilografadas ou impressas, em petição dirigida ao Ministro da Educação e Saúde. Essa petição, por sua vez, seria encaminhada a CNLD. A comissão proferiria um julgamento, mencionando os motivos de sua decisão e a aprovação ou não da obra. Depois de corrigida e impressa, a obra deveria ser novamente encaminhada para a CNLD e o livro receberia um registro numerado. Segundo o Art. 24 (BRASIL, 1945),

> Os livros didáticos, cujo uso tenha sido autorizado na forma desta lei, deverão conter na capa, impresso diretamente ou por meio de etiqueta, os seguintes dizeres: "Livro de uso autorizado pelo Ministério da Educação e Saúde". Em seguida, entre parênteses, declarar-se-á ainda o número do registro feito pela Comissão Nacional do Livro Didático, pela maneira seguinte: (Registro n. ......).

Esses são exatamente os dizeres impressos nas capas das edições de 1949, 1955 e 1956. Como as edições de 1944 e 1946 não apresentam essa informação, presumimos que as condições estabelecidas pelo decreto-lei de 1938 passaram a ser aplicadas, efetivamente, com

[43] Edições disponíveis nos acervos e bibliotecas visitados.
[44] Como destacado no capítulo 2, tivemos acesso apenas às páginas iniciais da edição de 1946.

sua consolidação em 1945 e que a edição de 1946 foi elaborada antes da firmação do decreto-lei nº 8.460.

Por meio de uma advertência[45], presente na edição de 1944[46], os autores frisam que a série segue a tendência dos programas da época. Os conteúdos são apresentados de forma fragmentada, os capítulos referentes à álgebra, por exemplo, não se intercalam com os de geometria, são discutidos de forma separada; é como se o volume da terceira série, por exemplo, fosse, na verdade, a junção de três livros: álgebra, geometria e geometria analítica.

Quadro 6 – Divisão dos livros

1ª série	**2ª série**	**3ª série**
Aritmética e Álgebra	Álgebra	Álgebra
Geometria	Geometria	Geometria
	Trigonometria	Geometria Analítica

Fonte: Série *Matemática 2º ciclo*

Essa conjectura de que o livro é constituído por três obras distintas faz sentido quando passamos a olhar para a época em que a obra foi elaborada. A série *Matemática 2º ciclo* foi publicada logo após a reforma Capanema entrar em vigor. Como vimos nos capítulos 2 e 4 desta dissertação, Euclides Roxo, um dos autores da obra, "esteve diretamente ligado à confecção dos programas de ensino e às respectivas instruções metodológicas da reforma Capanema" (DASSIE, 2015, p. 5). Sabendo, previamente, a maneira como a reforma afetaria o ensino, tratou de elaborar uma coleção a fim de despontar no mercado editorial.

Na urgência da elaboração e publicação da coleção, Euclides Roxo estabeleceu uma parceria com outros três autores que, coincidentemente, estudavam áreas distintas da matemática. O Quadro 7 abaixo mostra a distribuição das subáreas da Matemática que compõem a série *Matemática 2º ciclo* entre os quatro autores.

Quadro 7 – Autores responsáveis por cada subárea da série *Matemática 2º ciclo*

		C. D. Netto	**E. Roxo**	**R. Peixoto**	**H. L. da Cunha**
1ª série	**Aritmética e Álgebra**	■			
	Geometria		■		
2ª série	**Álgebra**	■			
	Geometria		■		
	Trigonometria			■	
3ª série	**Álgebra**				■
	Geometria		■		
	Geometria Analítica			■	

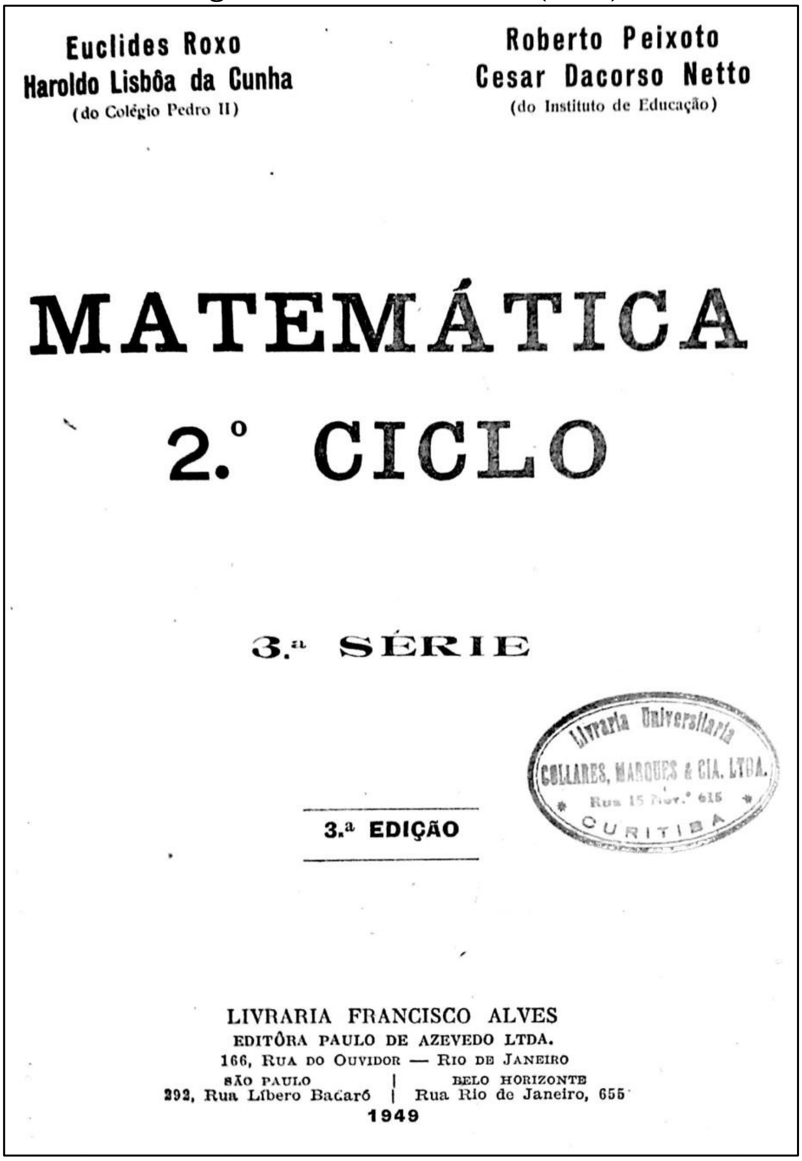
Fonte: Série *Matemática 2º ciclo*

Após uma primeira folha em branco, apresentam-se centralizados o título da obra, a série à qual é destinada e, no verso, o número do exemplar. Na folha de rosto, encontram-se

[45] No decorrer do capítulo, essa advertência será analisada com mais profundidade.
[46] Ao longo do capítulo, abordaremos a evolução da advertência nas edições de 1944, 1946, 1949, 1955 e 1956.

os nomes dos autores e suas respectivas instituições, o nome do livro, a série à qual o livro é destinado, sua edição, os dados referentes à editora e o ano da publicação, como mostra a Figura 18.

Figura 18 – Folha de rosto (1949)



Euclides Roxo
Haroldo Lisbôa da Cunha
(do Colégio Pedro II)

Roberto Peixoto
Cesar Dacorso Netto
(do Instituto de Educação)

MATEMÁTICA

2.º CICLO

3.ª SÉRIE

3.ª EDIÇÃO

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
EDITÔRA PAULO DE AZEVEDO LTDA.
166, Rua do Ouvidor — Rio de Janeiro
São Paulo | Belo Horizonte
292, Rua Líbero Badaró | Rua Rio de Janeiro, 655
1949

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1949)

Logo após a folha de rosto de cada volume, somos apresentados a outras obras, da mesma editora, escritas pelos autores[47]. A parte destinada a cada um deles está diretamente

[47] Prof. Euclides Roxo: *Lições de Aritmética, Curso de Matemática* – 3ª Série (Geometria), *A Matemática na Educação Secundária, Unidades e Medidas*. Em colaboração: *Matemática Ginasial* – 1ª série, 2ª série, 3ª série, 4ª série. *Exercícios de Aritmética, Exercícios de Algebra, Exercícios de Geometri*a e *Exercícios de Trigonometria* (esgotados). Prof. Roberto Peixoto: *Geometria Analítica a duas dimensões, Geometria Analítica a três dimensões, Exercícios de Geometria Analítica a duas dimensões, Exercícios de Geometria Analítica a três dimensões, Calculo Vetorial, Questiúnculas matemáticas* (esgotado). Prof. Haroldo Lisbôa da Cunha: *Sôbre as equações algébricas e suas soluções por meio de radicais*, Rio, 1933 (Tese). *Pontos de Algebra Complementar* (Teoria das equações), Rio, 1939 (esgotados). Prof. Cesar Dacorso Netto: *Elementos de Aritmética, Esboço*

relacionada às suas publicações anteriores. Analisando essa lista de obras, é possível notar que Haroldo Lisbôa da Cunha, por exemplo, nos anos anteriores à publicação, havia contribuído especialmente para a área de Álgebra.

> A coleção *Matemática – 2º ciclo* possui características particulares. Considerada como *coleção*, certamente sua confecção não está baseada nesse conceito. Observa-se, claramente, uma coleção resultante da união de partes e não da comunhão de textos (DASSIE, 2015, p. 9, destaque do autor).

No que diz respeito à estrutura do livro, cada uma das subáreas (Aritmética e Álgebra, Geometria, Álgebra, Trigonometria e Geometria Analítica) é dividida em unidades (capítulos) que, por sua vez, são subdivididas em seções. Todas as divisões são numeradas[48] e possuem títulos os quais denominaremos “intertítulos”. De acordo com a nossa leitura de Genette (2009), esses intertítulos constituem paratextos. São destinados a um público restrito, dos leitores de índice aos leitores envolvidos na leitura (GENETTE, 2009). Por exemplo, na unidade dos números complexos, o intertítulo “Forma Trigonométrica” faz sentido para alguém que está acompanhando o desenvolvimento da teoria. Esse leitor perceberá que o intertítulo indica, possivelmente, uma nova forma de representar o número complexo. No entanto, para alguém que tenha lido apenas a capa do livro, esse paratexto pode não existir ou não fazer sentido. Esses paratextos – intertítulos – anunciam o conteúdo que será abordado na sequência.

Além da teoria, são apresentados, ao longo da unidade, exemplos, exercícios resolvidos[49] e propostos. A única diferença entre os exemplos e os exercícios (resolvidos) é a nomeação, uma vez que ambos apresentam o enunciado e a resolução do problema proposto. A apresentação dos exercícios varia em cada volume da série. Como exemplo, no primeiro volume, os exercícios são propostos ao longo das unidades e suas soluções apresentam-se ao final de cada parte (Aritmética e Álgebra; Geometria). No segundo volume, os exercícios também são desenvolvidos ao longo das unidades; no entanto, suas soluções são apresentadas ao final do livro. No terceiro e último livro da série, os exercícios relativos à Álgebra (diferentemente dos de Geometria e Geometria analítica) são apresentados ao final de cada unidade, o que diferencia a estrutura apresentada por Haroldo Lisbôa da Cunha dos demais

---

sobre a transformação em matemática elementar, Rio, 1933 (Tese). (Optamos por manter o português da época por se tratar de títulos de obras).

[48] Essa numeração facilita a exposição dos autores quando fazem referência a algo que foi exposto em unidades ou seções anteriores.

[49] A expressão “exercícios resolvidos” é uma denominação nossa a fim de distinguir os exercícios que são seguidos de suas resoluções daqueles propostos aos alunos. Os exercícios resolvidos são denominados apenas como “exercícios” pelos autores.

autores. Esse é mais um indício de que a obra é a junção de textos pensados separadamente por cada autor e não uma obra inteiramente desenvolvida pelos quatro. Como veremos adiante, os autores buscam justificar a fragmentação da obra ressaltando que essa escolha se deu devido aos programas de ensino que eram compostos por partes distintas.

Além de analisarmos com profundidade o terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo*, realizamos uma breve análise dos volumes destinados à 1ª e à 2ª séries afim de compreendermos aspectos sobre a estrutura da série.

O primeiro volume[50] possui 378 páginas e 5 unidades, em que são discutidos os seguintes temas: noções sobre o cálculo aritmético aproximado; erros; progressões; logaritmos; retas e planos; superfícies e poliedros em geral; corpos redondos usuais, definições e propriedades; áreas e volume; seções cônicas. O livro destinado à 2ª série[51] possui 460 páginas e 11 unidades, abordando os seguintes conteúdos: função exponencial; binômio de Newton; determinantes; frações contínuas; corpos redondos; vetores; projeções; funções circulares; transformações trigonométricas; equações trigonométricas; resolução de triângulos. O terceiro livro[52] possui 474 páginas e 10 unidades como especificadas no Quadro 8 abaixo:

Quadro 8 – Unidades do livro *Matemática 2º ciclo* (3ª série)

Unidade I – Séries	Unidade VI – Relações Métricas
Unidade II – Funções	Unidade VII – Transformação de figuras
Unidade III – Derivadas	Unidade VIII – Curvas usuais
Unidade IV – Números Complexos	Unidade IX – Noções Fundamentais
Unidade V – Equações Algébricas	Unidade X – Lugares Geométricos

Fonte: 2º edição da obra

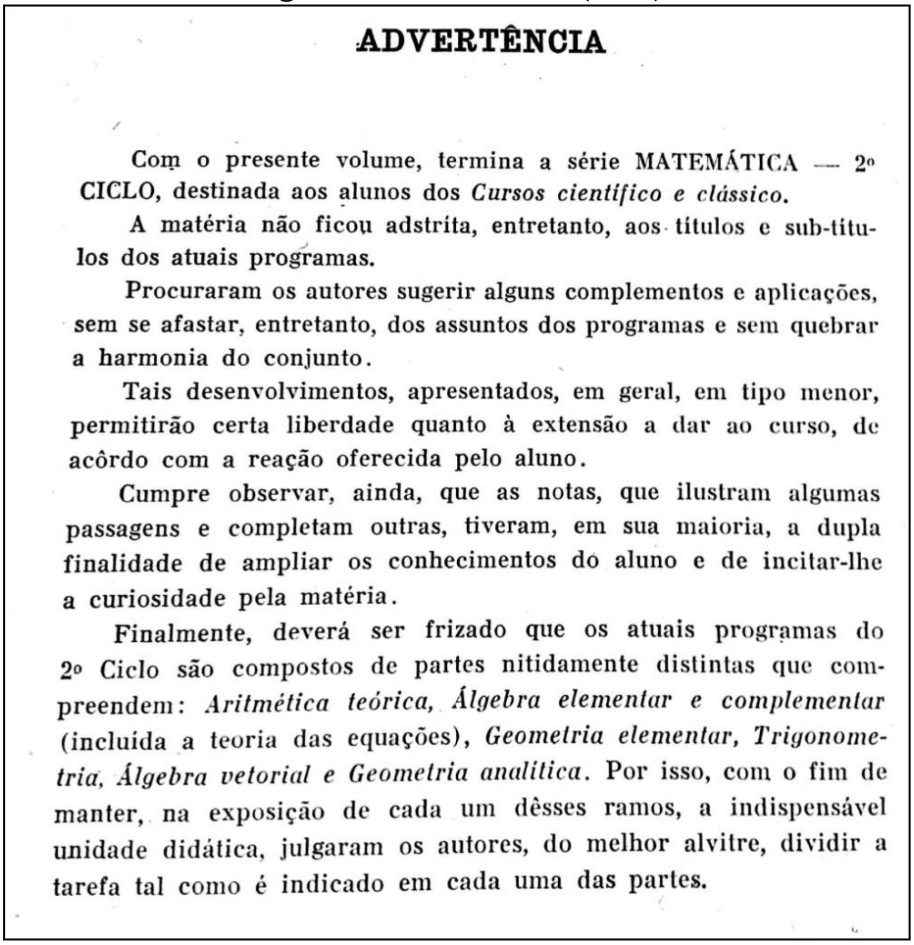
Esse terceiro volume, mais especificamente a unidade IV, é nosso objeto de estudo. A seguir, com base na edição datada de 1944[53], na terceira edição de 1949, na quarta de 1955 e na quinta edição de 1956, discorreremos a respeito do terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo*, sua abordagem, transformações e/ou adaptações.

[50] Trata-se da 11ª edição, 1960. A edição de 1945, da qual tivemos acesso apenas ao índice, trabalhava conceitos elementares, dentre eles: as quatro operações elementares, potenciação, radiciação, sistema de numeração, divisibilidade, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum, frações, polinômios de uma variável, trinômio do 2º grau, inequações do 2ª grau, determinação de um plano, intersecção entre reta e plano, paralelismo entre reta e plano, projeções, poliedros, dentre outros.
[51] Edição não declarada na obra, 1944.
[52] Trata-se da 2ª edição, 1944.
[53] Edição não declarada na obra.

5.1 Matemática 2º ciclo (3ª série)

Após a lista, já citada, com outras obras dos autores, há uma advertência. Esse texto é iniciado com a explicação de que tal livro finaliza a série *Matemática 2º ciclo*. Em seguida, os autores salientam a sugestão de alguns complementos e aplicações aos conteúdos, enfatizando que tomaram o devido cuidado para não se afastarem dos programas de ensino. Ressaltam também que as unidades apresentam algumas notas[54] com a finalidade de ampliar o conhecimento e incitar a curiosidade dos alunos.

Figura 19 – Advertência (1944)



ADVERTÊNCIA

Com o presente volume, termina a série MATEMÁTICA — 2º CICLO, destinada aos alunos dos *Cursos científico e clássico*.

A matéria não ficou adstrita, entretanto, aos títulos e sub-titulos dos atuais programas.

Procuraram os autores sugerir alguns complementos e aplicações, sem se afastar, entretanto, dos assuntos dos programas e sem quebrar a harmonia do conjunto.

Tais desenvolvimentos, apresentados, em geral, em tipo menor, permitirão certa liberdade quanto à extensão a dar ao curso, de acôrdo com a reação oferecida pelo aluno.

Cumpre observar, ainda, que as notas, que ilustram algumas passagens e completam outras, tiveram, em sua maioria, a dupla finalidade de ampliar os conhecimentos do aluno e de incitar-lhe a curiosidade pela matéria.

Finalmente, deverá ser frizado que os atuais programas do 2º Ciclo são compostos de partes nitidamente distintas que compreendem: *Aritmética teórica, Álgebra elementar e complementar* (incluida a teoria das equações), *Geometria elementar, Trigonometria, Álgebra vetorial e Geometria analítica*. Por isso, com o fim de manter, na exposição de cada um dêsses ramos, a indispensável unidade didática, julgaram os autores, do melhor alvitre, dividir a tarefa tal como é indicado em cada uma das partes.

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1944)

Segundo Genette (2009, p. 281), “uma nota é um enunciado de tamanho variável (basta uma palavra) relativo a um segmento mais ou menos determinado de um texto, e disposto seja em frente seja como referência a um segmento”. Ela é de leitura facultativa e destinada apenas a alguns leitores, “aqueles a quem possa interessar determinada consideração complementar ou digressiva, cujo caráter acessório justifica exatamente a colocação em nota” (GENETTE, 2009, p. 285).

[54] Embora os autores falem em notas e não notas de rodapé, todas as notas são apresentadas no rodapé.

A parte relativa à álgebra, da edição de 1944, possui mais de 200 notas de rodapé que podem instigar os leitores a novas pesquisas e incitar a curiosidade pela matéria. A edição de 1949, que sofreu alguns cortes de conteúdo e seções, totaliza 247 notas de rodapé, sendo que dessas, 163 são de álgebra (36 na unidade dos números complexos), 69 de geometria e 15 de geometria analítica. As edições de 1955 e 1956 não apresentam uma contagem das notas, a elas são atribuídos símbolos (*) e a contagem se reinicia a cada página. Contabilizamos 77 notas de rodapé ao longo da obra de 1955. Atribuímos a grande diferença entre a edição de 1955 e as edições anteriores à reestruturação dos programas de ensino dada no ano de 1951, como visto no capítulo 4 desta dissertação.

Além disso, no que tange o tema números complexos, algumas notas, que direcionavam o leitor para o segundo volume da série *Matemática 2º ciclo*; uma referência para a demonstração do módulo da diferença de dois números complexos; notas que estavam relacionadas com a definição de par ordenado, com a relação de ordem dos números complexos e com nomenclatura (por exemplo, quando dizia forma binomial e enfatizava através de uma nota que poderia ser chamada de forma algébrica); foram suprimidas. Nesse mesmo capítulo, nenhuma nova nota foi implementada ao longo das edições analisadas.

Dassie (2015, p. 15) afirma que, entre as notas de rodapé da série *Matemática 2º ciclo*[55], "[...] há um grupo de notas que possui atributos de interatividade entre leitor e receptor. Essas notas além de acrescerem informações simples e breves ao conteúdo contemplam também algum tipo de diálogo". O autor distingue essas notas em quatro categorias:

- *notas relacionadas ao conteúdo*: trazem informações complementares sobre o conteúdo e facilitam a compreensão do texto;

Figura 20 – Exemplo de nota relacionada ao conteúdo

Aqui, o sinal é apenas convencional. Não tem sentido a ideia de número complexo negativo.

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1949)

- *notas históricas:* apresentam informações sobre a origem de algum tópico, explanações biográficas e indicam textos considerados referências pelos autores. Funcionam como uma ferramenta de ambientação;

[55] Em sua pesquisa, Dassie utilizou as seguintes edições: Matemática 2º ciclo – 2ª série, 1944; Matemática 2º ciclo – 1ª série, 3. ed. 1946; Matemática 2º ciclo – 2ª série, 3. ed. 1946; Matemática 2º ciclo – 3ª série, 3. ed. 1949; Matemática 2º ciclo – 2ª série, 5. ed. 1953.

Figura 21 – Exemplo de nota histórica

Esse caso, tratado por R. Bombelli em sua "Algebra", Bolonha, 1572, é classicamente conhecido sob a denominação de "caso irredutível do 3º grau"

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1949)

- *notas de referências bibliográficas*: são notas que validam o caráter erudito e confiável da obra. É através delas que os autores transmitem credibilidade;

Figura 22 – Exemplo de nota de referência bibliográfica

Um estudo resumido e moderno das equações binômias, poderá ser feito na "Enciclopedia delle matematiche elementari" (Berzolari-Vivanti-Gigli), Milão, 1932, vol. I, parte II, pg. 303.

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1949)

- *notas para o uso da coleção*: são notas que autopromovem a coleção. Encaminham o leitor a outros volumes ou capítulos que possam auxiliá-lo no estudo do novo conteúdo.

Figura 23 – Exemplo de nota para o uso da coleção

Cfr. "Matemática - 2º ciclo", 2ª série, Trigonometria, 2ª ed., 21 (p. 325).

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1949)

Distinguimos, ainda, uma quinta categoria ao analisarmos as notas de rodapé: as notas mistas. Seu conteúdo pode ser classificado em mais de um dos quatro tipos apresentados acima. A Figura 24 mostra um exemplo de nota mista, em que se pode observar o uso para citar referência bibliográfica, nota histórica e explicitar um conteúdo.

Figura 24 – Exemplo de nota mista

Alguns autores, indevidamente, demonstram essa relação por meio de desenvolvimentos em série que, por sua vez, exigem restrições e convenções análogas. É atribuida a Euler e devida, verdadeiramente, a R. Cotes (1722).

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1949)

Em sua análise das notas de rodapé da série *Matemática 2º ciclo*, Dassie (2015) conclui que cada autor possui uma característica distinta ao utilizar o recurso da nota de rodapé. Segundo ele, Cesar Dacorso Netto é o autor que mais se utiliza dessa ferramenta, em grande parte para ampliar a perspectiva histórica do leitor e para apresentar referências bibliográficas. Por outro lado, Roberto Peixoto é o autor que menos utiliza esse recurso. Suas poucas notas são direcionadas a livros de sua própria autoria. Assim como Roberto Peixoto, Euclides Roxo utiliza-se das notas de rodapé para promover sua própria coleção, de autoria individual, recomendando o seu uso. Mesmo se tratando de obras autorais, essas notas não deixam de passar credibilidade para a obra, uma vez que as publicações de ambos os autores eram consagradas à época. Ainda segundo Dassie (2015), Haroldo Lisbôa da Cunha é o autor mais heterogêneo, já que se utiliza de todas as quatro vertentes ao longo de seus capítulos.

Voltando-nos novamente à análise da advertência apresentada no início da obra, é possível interpretá-la como sendo uma forma de os autores expressarem suas opiniões. Embora Euclides Roxo, por exemplo, defendesse a unificação das matemáticas, aritmética, álgebra e trigonometria em uma mesma disciplina, em torno da ideia de função, o livro aborda as matemáticas separadamente por conta das exigências do programa de ensino, como citam na advertência e, possivelmente, também devido à provável urgência na elaboração e publicação da obra.

Ao desenvolver o conteúdo dos números complexos, que compõe a parte de aritmética, o autor, Haroldo Lisbôa da Cunha, deixa evidente sua preferência pela unificação. Em vários momentos ao longo do capítulo, indica, via nota de rodapé, que alguns conceitos, pré-requisitos, podem ser consultados no capítulo de trigonometria, no 2º volume da série *Matemática 2º ciclo*. Esse, a nosso ver, é um exemplo de sua defesa de que as "matemáticas distintas" poderiam ser tratadas em uma mesma disciplina.

Figura 25 – Advertência (1946)

Advertência da 2.ª edição

Praz-nos exprimir aqui, aos prezados colegas, ilustres professores de Matemática do 2.° Ciclo secundário, nossos sinceros agradecimentos pela generosa acolhida dispensada aos livros desta coleção (MATEMÁTICA — 2.° CICLO) e bem assim pelas valiosas sugestões que nos enviaram.

Atendendo a muitas dessas sugestões e à nossa propria experiência, resolvemos refundir êste volume, conservando-lhe, porém, a primitiva estruturação.

O livro continua a preencher todas as exigências dos atuais programas de ensino e, sem prejuizo do rigor dedutivo cabível nesta fase do curso, tornou-se mais leve e mais susceptível de ser integralmente assimilado no exíguo tempo que a lei destina à execução de tais programas.

Contamos que o laborioso e competente professorado de Matemática do Brasil continue a distinguir-nos com a sua critica severa e sua valorosa cooperação.

OS AUTORES

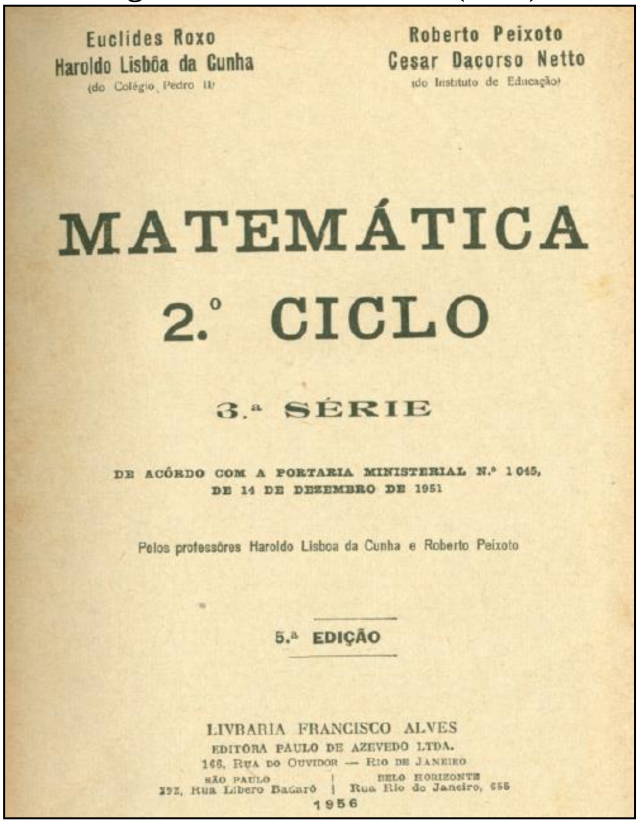
Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1946)

Segundo Genette (2009), os paratextos podem aparecer nas obras e desaparecer delas com a publicação de novas edições. A edição de 1949 apresenta uma advertência (Figura 25) diferente da de 1944. Essa advertência comenta que algumas modificações foram feitas com relação à publicação anterior. Com o passar dos anos, como pode ser notado nas edições de 1955 e 1956, essa advertência foi excluída da obra.

A reestruturação da obra é um dos fatores que justifica a exclusão da advertência, uma vez que a obra passou a ser editada apenas por dois autores, e esses foram compelidos a trabalharem nas subáreas designadas aos outros dois autores. Outro ponto é que as alterações realizadas da edição de 1944 para a edição de 1946 haviam sido sugeridas por professores de todo o país e essa característica, que estava explícita na advertência da 2ª edição, não se manteve com a reformulação de 1951.

A advertência apresentada na Figura 25 faz parte da segunda (1946) e da terceira (1949) edições da obra. Notamos que ela é diferente da apresentada na edição de 1944 (Figura 19). A advertência da Figura 25 nos indica que ela foi incluída na obra a partir da segunda edição, o que nos faz concluir que a de 1944 é a primeira edição do terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo*.

Figura 26 – Folha de rosto (1956)



Euclides Roxo
Haroldo Lisbôa da Cunha
(do Colégio Pedro II)

Roberto Peixoto
Cesar Dacorso Netto
(do Instituto de Educação)

MATEMÁTICA
2.º CICLO
3.ª SÉRIE

DE ACÔRDO COM A PORTARIA MINISTERIAL N.º 1 045, DE 14 DE DEZEMBRO DE 1951

Pelos professôres Haroldo Lisboa da Cunha e Roberto Peixoto

5.ª EDIÇÃO

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
EDITÔRA PAULO DE AZEVEDO LTDA.
166, Rua do Ouvidor — Rio de Janeiro
SÃO PAULO
292, Rua Libero Badaró
BELO HORIZONTE
Rua Rio de Janeiro, 655
1956

Fonte: *Matemática 2º ciclo*– 3ª série (1956)

Analisando a folha de rosto das edições de 1955 e 1956 (Figura 19), notamos que ela apresenta a seguinte frase: “Pelos professores Haroldo Lisbôa da Cunha e Roberto Peixoto”. Essa colocação nos indica que as alterações da edição foram feitas apenas por dois dos quatro autores da obra. Possivelmente, ao adequarem a obra ao programa estabelecido pela portaria de 1951, os autores ficaram impossibilitados de manter a divisão inicial da elaboração da edição da obra entre eles. Dentre os motivos, podemos destacar o falecimento de Euclides Roxo em 1950.

Cesar Dacorso Netto também não participou da elaboração das edições de 1955 e 1956; no entanto, não encontramos nenhuma informação que possa ter ocasionado seu desligamento da reorganização da série.

Até a edição de 1949, a obra seguia o programa de Matemática instituído pela portaria ministerial nº 177 de 16 de março de 1943, expedido em virtude da Lei Orgânica do Ensino Secundário.

Figura 27 – Números Complexos nas obras de 1944, 1946 e 1949

Unidade IV. - Números Complexos: 1. Definição; operações fundamentais. 2. Representação trigonométrica e exponencial. 3. Aplicação à resolução das equações binômias.

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1944 e 1949)

Como pode ser notado na Figura 27, o programa, no que diz respeito aos números complexos, era pouco detalhado e não apresentava nenhuma instrução ao professor. Ele é apresentado, após a advertência, no terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo*.

Como notamos ao analisarmos as advertências, ocorreram algumas mudanças no que se refere ao capítulo dos números complexos entre as edições de 1944 e 1946. Ao atentarmos para essas mudanças, observamos que elas só podem ser notadas ao folhearmos o livro e compararmos cada seção, pois ambas as edições apresentam, no início do livro (sumário), o mesmo programa de ensino (Figura 27).

Como veremos adiante (Quadro 10), as seções – Funções hiperbólicas; Interpretação geométrica da multiplicação e da divisão; Raízes primitivas da unidade; Cálculo das raízes n-gésimas em geral, por intermédio das raízes primitivas; Aplicação aos problemas gerais da multiplicação e da divisão de arcos – presentes na edição de 1944, deixaram de compor a obra.

Como elucidado no capítulo 4, a portaria ministerial nº 1045 de 14 de dezembro de 1951 expediu os planos de desenvolvimento dos Programas Mínimos do ensino secundário e suas respectivas instruções metodológicas. Essa mudança está indicada na folha de rosto das edições de 1955 e 1956.

A partir dessa portaria ministerial, o conteúdo dos números complexos passou a ser tratado em conjunto com polinômios como mostra a transcrição abaixo:

> **III – Introdução à teoria das equações; polinômios; propriedades; divisibilidade por $x \pm a$; problemas de composição, transformação e pesquisa de raízes; equações de tipos especiais.**
> 1. Polinômios de uma variável; identidade. Aplicação ao método dos coeficientes a determinar. Divisibilidade de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Ruffini. Fórmula de Taylor para os polinômios; algoritmo de Ruffini-Horner.
> 2. Polinômios e equações algébricas em geral; raízes ou zeros. Conceito elementar de número complexo; forma binomial; complexos conjugados; módulo; representação geométrica. Operações racionais. Decomposição de um polinômio em fatores binômios; número de raízes de uma equação; raízes múltiplas e raízes nulas. Raízes complexas conjugadas. Indicação sobre o número de raízes reais contidas em um dado intervalo; teorema de Bolzano; consequências.
> 3. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação; aplicação à composição das equações. Propriedades das raízes racionais inteiras e irracionais.
> 4. **Transformação das equações. Transformações de primeira ordem: aditivas, multiplicativas e recíprocas.**
> 5. **Equações recíprocas; classificação; forma normal; abaixamento do grau.**
> 6. **Cálculo das raízes inteiras. Determinação das cotas pelo método de Laguerre-Thibault. Regras de exclusão de Newton. Algoritmo de Peletarius.**
>
> Observação: os parágrafos em negrito destinam-se somente ao curso científico; os demais são comuns ao curso clássico e ao científico (Portaria ministerial nº 1045 de 14 de dezembro de 1951).

Na edição de 1955, treze anos após a reforma Capanema e quatro após a reestruturação do programa de ensino, o conteúdo dos números complexos não possui mais uma unidade exclusiva. Como proposto no Programa Mínimo de 1951, passa a ser tratado junto ao conteúdo envolvendo polinômios. Percebe-se que o terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo*, no que diz respeito aos números complexos, acatou todas as sugestões do Programa Mínimo instituído em 1951, o que é de se esperar, uma vez que, como vimos no capítulo 4, Haroldo Lisbôa da Cunha foi um dos autores do programa de Matemática.

Figura 28 – Programa das edições de 1955 e 1956

2. Polinômios e equações algébricas em geral; raízes ou zeros. Conceito elementar de número complexo; forma binomial; complexos conjugados; módulo; representação geométrica. Operações racionais. Decomposição de um polinômio em fatores binômios; número de raízes de uma equação; raízes múltiplas e raízes nulas. Raízes complexas conjugadas. Indicação sobre o número de raízes reais contidas em um dado intervalo; teorema de Bolzano; consequências.

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1955)

Além do corte nos conteúdos, ocorreu outra mudança significativa no que diz respeito à abordagem dos números complexos nas edições de 1955 e 1956. Segundo a observação presente no Programa Mínimo, o conteúdo passou a ser abordado nos cursos clássico e científico. Até o momento, o conteúdo era destinado apenas ao curso científico.

Como veremos adiante, a abordagem de algumas seções foi alterada. No entanto, na maioria delas, os autores mantiveram a apresentação exatamente como nas edições de 1944 e 1949. É notório que ocorreu uma redução na quantidade de conteúdos relacionados aos números complexos, sendo eliminados os conteúdos de maior complexidade e aprofundamento. Segundo as instruções metodológicas de 1951 (Anexo C), o conceito de número imaginário deveria ser introduzido “ao serem dadas as propriedades gerais das equações e dos polinômios” (BRASIL, 1951) e só deveria ser apresentado “o essencial para a compreensão do assunto que se segue” (BRASIL, 1951).

As edições analisadas apresentam poucos exemplos ao longo da unidade, eles surgem conforme o conteúdo é aprofundado. Além disso, o livro apresenta exercícios resolvidos que se diferenciam dos exemplos apenas pela nomeação. No decorrer de cada unidade ou ao final dela, encontram-se os exercícios propostos, que, nas unidades Série, Curvas Usuais e Números Complexos, apresentam um número menor de exercícios comparado com as demais. O Quadro 9 mostra essa discrepância.

Quadro 9 – Quantidade de exercícios por unidade

Unidade	**Quantidade de Exercícios**[56]
Séries	34
Funções	41
Derivadas	70
Números complexos	34
Equações algébricas	51
Relações Métricas	52
Transformações de figuras	43
Curvas Usuais	34
Noções Fundamentais	60
Lugares geométricos	131

Fonte: *Matemática 2ª ciclo* (1949)

Outra característica do terceiro volume é que as fórmulas e as informações consideradas importantes pelos autores são sempre destacadas e numeradas para que possam ser retomadas recursivamente, o que não acontece nas edições de 1955 e 1956. Com a instituição do Programa Mínimo de 1951, a incidência desses destaques diminuiu drasticamente. As 69 equações destacadas no capítulo Números Complexos da edição de 1944 foram reduzidas para 11 na edição de 1956.

[56] Consideramos cada item dos exercícios propostos como um exercício independente.

Figura 29 – Numeração das informações importantes

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (5)$$

$$\cos \vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (6)$$

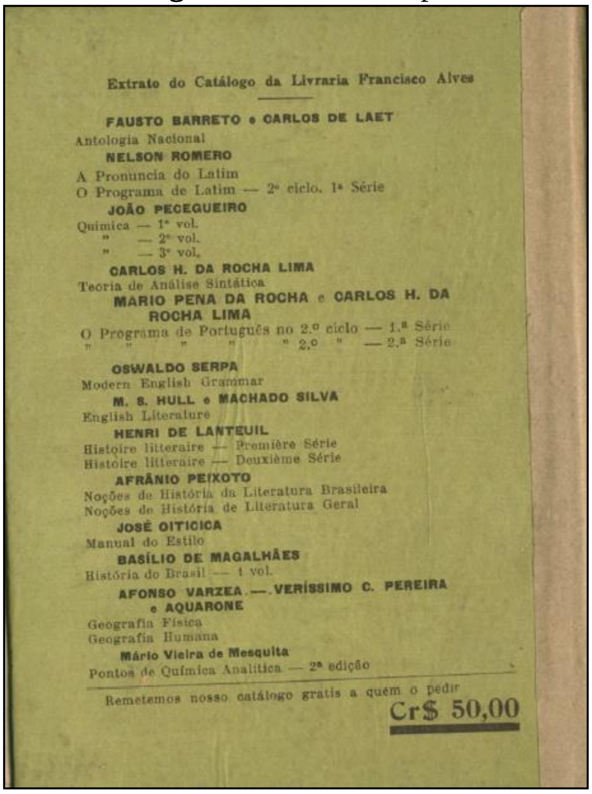
$$\operatorname{sen} \vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (7)$$

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1949)

A contracapa do livro traz algumas informações (Figura 30). Ela apresenta um catálogo com obras da editora, a informação de que eles remetem o catálogo gratuitamente para quem se interessar e o preço do livro. Segundo Bittencourt (2008), essa forma de divulgação era constantemente utilizada pelos editores.

Os autores citados na contracapa variam de acordo com a época de publicação da edição e são de diferentes áreas do conhecimento como português, história, geografia, química e inglês. Nas edições de 1944 e 1946, nenhum livro de matemática é citado. Na edição de 1956, o extrato do catálogo contém a série que aqui estamos analisando, sendo ela a única referente à matemática.

Figura 30 – Contracapa



Extrato do Catálogo da Livraria Francisco Alves

FAUSTO BARRETO e CARLOS DE LAET
Antologia Nacional
NELSON ROMERO
A Pronuncia do Latim
O Programa de Latim — 2º ciclo. 1ª Série
JOÃO PECEGUEIRO
Quimica — 1º vol.
" — 2º vol.
" — 3º vol.
CARLOS H. DA ROCHA LIMA
Teoria de Análise Sintática
MARIO PENA DA ROCHA e CARLOS H. DA ROCHA LIMA
O Programa de Português no 2.º ciclo — 1.ª Série
" " " " 2.º " — 2.ª Série
OSWALDO SERPA
Modern English Grammar
M. S. HULL e MACHADO SILVA
English Literature
HENRI DE LANTEUIL
Histoire litteraire — Première Série
Histoire litteraire — Deuxième Série
AFRÂNIO PEIXOTO
Noções de História da Literatura Brasileira
Noções de História de Literatura Geral
JOSÉ OITICICA
Manual do Estilo
BASÍLIO DE MAGALHÃES
História do Brasil — 1 vol.
AFONSO VARZEA — VERÍSSIMO C. PEREIRA e AQUARONE
Geografia Fisica
Geografia Humana
Mário Vieira de Mesquita
Pontos de Química Analitica — 2ª edição

Remetemos nosso catálogo gratis a quem o pedir

Cr$ 50,00

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1946)

No que diz respeito às imagens, a unidade relativa aos números complexos possui 10 figuras na edição de 1944, 8 na de 1949 e 6 nas edições de 1955 e 1956. A redução na quantidade de figuras é devida à redução dos conteúdos abordados nas edições que se seguiram, no que se refere ao tema dos números complexos. As figuras aparecem quando o autor se refere às interpretações geométricas e vetoriais.

As imagens são apresentadas na cor preta e algumas delas, que representam o eixo cartesiano, estão ligeiramente inclinadas. Ao relatarmos o desenvolvimento do conteúdo, apresentaremos as imagens e teceremos comentários sobre elas. Acrescentamos, ainda, que as imagens foram digitalizadas utilizando um aplicativo disponível para *Android* com o intuito de não comprometer a integridade da obra.

A fim de nos aprofundarmos na análise do conteúdo, relataremos na próxima seção como o autor aborda o conteúdo dos números complexos no terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo*.

5.2 Números Complexos (Unidade IV)

Os números complexos são tratados na quarta unidade de álgebra das edições de 1944 e 1949 do livro destinado à 3ª série dos cursos clássico e científico. Nas edições de 1955 e 1956, o conteúdo apresenta-se na terceira unidade, em que é abordado concomitantemente ao tema dos polinômios. Embora o livro seja destinado a ambos os cursos, o conteúdo dos números complexos, até 1950, estava presente apenas no programa de ensino do curso científico. Com as modificações ocorridas em 1951 nos programas de ensino, passou a fazer parte de ambos os cursos.

Na edição de 1944, tal unidade, de responsabilidade do autor Haroldo Lisbôa da Cunha, apresenta-se na seguinte sequência: definição, operações fundamentais; representação trigonométrica e exponencial; aplicação à resolução de equações binômias. Além disso, está estruturada da seguinte forma:

Quadro 10 – Seções da unidade IV

DEFINIÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS	132 - Módulo da soma e da diferença
114 – Considerações preliminares	133 – Multiplicação e divisão
115 – Definição de Números Complexos	134 – Módulo e argumento do produto e do quociente
116 – Observação	135 – Observação
117- Número i	136 – Interpretação geométrica da multiplicação e da divisão
118 – Forma Binomial	137 – Potenciação. Fórmula de Moivre[57]
119 – Observação	138 – Radiciação
120 – Norma e Módulo	139 – Interpretação geométrica; divisão da circunferência
121 – Complexos conjugados; números opostos	140 – Extensão da fórmula de Moivre ao caso de expoente racional

[57] Vista atualmente como “fórmula de De Moivre”, uma vez que se refere ao matemático francês Abraham De Moivre. No entanto, no livro *Matemática 2º ciclo*, o termo De Moivre é apresentado com a letra “d” minúscula.

122 – Interpretação geométrica; argumento	141 – Raízes n-gésimas dos números reais
123 – Interpretação vetorial	142 – Observação
REPRESENTAÇÃO TRIGONOMÉTRICA E EXPONENCIAL	143 – Raízes n-gésimas da unidade
124 – Representação trigonométrica	144 – Raízes primitivas da unidade
125 – Observação	145- Cálculo das raízes n-gésimas em geral, por intermédio das raízes primitivas
126 – Representação exponencial; fórmula de Euler	146 – Observação
127 – Funções hiperbólicas	147 – Observação
128 – Observação	148 – Aplicação aos problemas gerais da multiplicação e da divisão de arcos
OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS	**RESOLUÇÃO AS EQUAÇÕES BINÔMIAS**[58]
129 – Operações sobre Números Complexos	149 – Equações binômias
130 – Adição e subtração	150 – Observação
131 – Interpretação vetorial da adição e da subtração	**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

Fonte: *Matemática 2º ciclo* 1944

Os itens destacados em cinza estão presentes na edição de 1944, porém foram retirados da edição de 1949. Os autores justificam as exclusões na advertência da edição de 1946 (Figura 25). Segundo eles, os conteúdos foram cortados devido a sugestões de professores que atuavam no ensino secundário e à própria experiência dos autores. Com as mudanças ocorridas nos programas de ensino em 1951, na edição de 1956 o capítulo dos números complexos foi ainda mais reduzido e acoplado ao capítulo de polinômios. Nela, o capítulo estrutura-se da seguinte maneira:

Quadro 11– Números Complexos na edição de 1955

116 – Noções preliminares	129 – Interpretação geométrica da adição e da subtração
117 – Resolução das equações algébricas	130 –Módulo da soma e da diferença
118 – Raízes ou zeros de um polinômio	131 – Multiplicação e divisão
119 – Conceitos elementares de número complexo. Considerações preliminares	132 – Observação
120 – Número i	133- Módulo e argumento do produto e do quociente
121 – Fórmula binomial; números complexos; igualdade	134 – Observação
122 – Módulo	135 – Potenciação. Fórmula de Moivre
123 – Complexos conjugados; números opostos	EXERCÍCIOS PROPOSTOS
124 – Interpretação geométrica; argumento	136 – Decomposição de um polinômio em fatores binômios
125 – Representação trigonométrica	137 – Número de raízes de uma equação; raízes múltiplas e raízes nulas.
126 – Observação	138 – Raízes complexas conjugadas
127 – Operações sobre números complexos	139 – Decomposição de um polinômio em fatores reais.
128 – Adição e subtração	140 – Indicação sobre o número de raízes reais contidas em um intervalo; teorema de Bolzano. Consequências.

Fonte: *Matemática 2º ciclo* 1955

[58] Esse é o título da seção na edição de 1944. Na de 1949, ela é intitulada “Aplicação à resolução das equações binômias”.

A seguir, relataremos os conteúdos desenvolvidos em cada seção e evidenciaremos as diferenças de abordagem do conteúdo em cada uma das quatro edições analisadas[59].

5.3 Análise das Seções

A partir deste momento, a fim de relatar, minuciosamente, os conteúdos abordados nos capítulos, enunciaremos os títulos das seções, presentes no livro, antes de dissertarmos sobre o conteúdo nelas desenvolvido. Logo abaixo de cada título, desenvolveremos o conteúdo dos números complexos seguindo a apresentação proposta pelo autor Haroldo L. da Cunha na obra *Matemática 2º ciclo*. Para tanto, buscaremos olhar para a apresentação do conteúdo de modo geral, apontando as diferenças entre as edições de 1944, 1949, 1955 e 1956 e discutindo suas possíveis causas.

As edições de 1955 e 1956, no que tange aos números complexos, são idênticas, não ocorreu nenhuma modificação entre a publicação das duas edições. Assim, quando nos referirmos a alterações na edição de 1955, também haverá na edição de 1956.

5.3.1 Considerações preliminares

Por meio de algumas considerações preliminares, Haroldo L. da Cunha disserta, nas quatro edições analisada, sobre como que, até naquele momento da coleção, não havia sido atribuído significado às expressões contendo raízes de números negativos (no caso de índices pares). Ressalta que, até então, as equações do 2º grau com discriminante negativo não tinham raízes ou elas não eram definidas no contexto dos números reais. Enfatiza também que o conjunto dos números reais não permite uma interpretação completa dos resultados da álgebra e que essa afirmação é evidente desde o século XVI, quando surgiram os primeiros estudos metódicos sobre resolução das equações do terceiro grau.

Segundo Roque (2012), a equação $\boldsymbol{x^2+1=0}$ é utilizada com frequência por professores e livros didáticos para justificar a necessidade de se definir os números complexos. Como se, a partir dessa equação e da impossibilidade de solucioná-la, os matemáticos tivessem instituído um novo tipo de número. A autora acrescenta ainda que

> a construção dos diferentes conjuntos numéricos a partir de extensões sucessivas: primeiro os naturais, depois os inteiros, os racionais, os reais e os complexos [...] embora didática, não possui fundamento histórico, além de fornecer uma imagem da evolução da matemática tal qual um edifício estruturado, erigido sobre bases sólidas (ROQUE, 2012, p. 404).

[59] Não estamos levando em consideração a edição de 1946, pois não tivemos acesso à obra completa.

Ainda que os primeiros estudos sobre o tema tenham surgido no século XVI - como afirma Roque: “até o final do século XVIII as raízes negativas e imaginárias de equações eram consideradas quantidades irreais” (ROQUE, 2012, p.409) - termos como “falsas”, “fictícias”, “impossíveis” ou “imaginárias” eram atribuídos aos números complexos.

Embora tenha mencionado que, até o momento da coleção, não atribuía significado às expressões com raízes negativas, compreendemos que, a partir desse momento, Haroldo L. da Cunha enfoca o conteúdo de maneira diferente dos textos didáticos modernos no que se refere à motivação dada ao tema. Afirma que, a partir do estudo sobre a resolução de equações do terceiro grau[60], viu-se que “a essas raízes de números negativos, no caso de índices pares, consideradas antes como meros símbolos de impossibilidade operatória, poderia e *deveria* ser atribuído um significado numérico definido” (p. 137, grifos do autor).

Na sequência do capítulo, nas edições de 1944, 1949, 1955 e 1956, Haroldo L. da Cunha enfatiza que os estudos de Bombelli[61] sobre a equação $\mathbf{x^3 - 15x - 4 = 0}$ desempenharam um papel importante[62]. Diz que, pela aplicação da fórmula de Cardano[63], que é apresentada em uma nota de rodapé, surgiu a notável relação[64]:

$$\mathbf{4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}}$$

cujo sentido, segundo o autor, não podia ser facilmente percebido. Após estabelecer algumas convenções, Bombelli concluiu que cabia escrever:

$$\mathbf{\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}}$$

$$\mathbf{\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}}$$

Isto é,

$$\mathbf{4 = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}}$$

---

60 Roque (2012) afirma que o estudo do número de raízes de uma equação evidenciou a necessidade de se considerar raízes irracionais, negativas e imaginárias.

61 Matemático e engenheiro hidráulico italiano. Contribuiu de forma notável para a resolução das equações cúbicas. Segundo Roque (2012, p. 431), “ele reconhecia a existência das raízes negativas e seguia adiante, afirmando que essas expressões eram mais ‘sofísticas’ que reais (a qualificação de ‘sofísticas’ para essas quantidades indica que elas produzem sofismas)”.

62 Nesse momento, o autor apresenta uma nota de rodapé enfatizando que essa equação, cuja raiz inteira 4 era conhecida e foi tratada por R. Bombelli (1526 – 1573) em sua “Algebra” (Bolonha, 1572), é classicamente conhecida sob a denominação de “caso irredutível do 3º grau”.

63 Para uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$, tem-se: $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

64 Segundo essa mesma nota de rodapé, essa fórmula é devida, de fato, a Ferro (1515) e Tartaglia (1535).

Isso implicava considerar $\sqrt{-121}$ **e** $\sqrt{-1}$ como verdadeiros números, sobre os quais Bombelli operara aritmeticamente de forma correta. Haroldo L. da Cunha ressalta que, pouco antes de Bombelli, o próprio Cardano tivera, sem dúvidas, essa intuição. Ao discutir o "caso irredutível", concluiu afirmando que $\sqrt{-9}$ não tem a mesma natureza de $\mathbf{3}$ nem de $\mathbf{-3}$, "*sed quaedam tertia natureza abscôndita*" (traduzido, em nota de rodapé, pelo autor como "mas alguma terceira natureza desconhecida").

Essa afirmação, segundo o autor, tornava imprescindível, portanto, introduzir uma ideia mais ampla de número. Como afirma Roque (2012), até então a concepção de número estava vinculada ao conceito de quantidade. Segundo a autora, "essa associação, a partir de certo momento, passou a bloquear o desenvolvimento da matemática" (ROQUE, 2012, p. 407). Além disso, "a matemática não era a ferramenta central de uma busca especulativa pela verdade [...]" (p. 416), era apenas um elemento da engenharia. A partir da virada do século XVIII para o XIX ocorreu uma transformação na noção de rigor, uma vez que os matemáticos estavam se baseando em "[...] crenças e técnicas que não eram mais capazes de resolver os problemas que surgiam no interior da própria matemática" (p. 407). Essa transição do conceito de número contribuiu para o "[...] desenvolvimento de uma matemática baseada em conceitos abstratos que passou a ser designada 'pura'" (p. 422). É a partir dessa nova matemática que as quantidades negativas e imaginárias passaram a ser aceitas, e é com base nela que todo o capítulo dos números complexos da obra *Matemática 2º ciclo* (3ª série) foi desenvolvido.

Antes de introduzir o conceito de números complexos, o autor explicita que está seguindo os resultados mais importantes estabelecidos no século XIX e cita nomes como Gauss[65], Hamilton[66] e Weierstrass[67]. Embora apresente todas as considerações até aqui mencionadas, nas edições de 1955 e 1956, o autor exclui esse comentário da obra.

Além disso, a edição de 1955, como vimos no Quadro 11, sofreu muitas alterações. Com a junção do capítulo dos números complexos com o que trata dos polinômios, antes de introduzir os conceitos relativos aos números complexos, o autor discorre a respeito de algumas noções preliminares sobre o estudo de equações: forma canônica, resolução de equações algébricas, a resolução imediata das equações de 1º e 2º grau, a complexidade de se resolver equações do 3º e 4º grau, comenta sobre as equações de 5º grau que não possuem

---

[65] Embora Euler tenha sido o primeiro a utilizar a letra *i* para representar a unidade imaginária, a representação só passou a ser utilizada sistematicamente por Gauss (SILVA, 2005).
[66] Foi Hamilton que representou um número complexo pelo par ordenado de números reais (a,b) (EVES, 2005).
[67] Weierstrass introduziu o simbolismo das duas barras verticais para identificar o valor absoluto (SILVA, 2005).

solução algébrica e, fazendo um paralelo histórico com o conteúdo, comenta que Abel demonstrou essa afirmação em 1824. Só então, após as noções preliminares sobre o estudo das equações, que as considerações preliminares sobre os números complexos são apresentadas como descrito nesta seção.

5.3.2 Definição de um número complexo

Considerando o par $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ de números reais em determinada ordem, o autor, nas edições de 1944 e 1949, convenciona os seguintes princípios:

I) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')$ quando $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$ e $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'$

II) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}') = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}')$

III) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}') = (\boldsymbol{aa}' - \boldsymbol{bb}', \boldsymbol{ab}' + \boldsymbol{a}'\boldsymbol{b})$

IV) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{a}$ observando-se em particular $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$

Em seguida, diz que, numa acepção ampla, esses pares individualizam verdadeiros números e os denomina de complexos. Ressalta, ainda, que o último princípio inclui, como caso particular, os números reais.

Haroldo L. da Cunha, discorre, a partir de uma nota de rodapé, que "à primeira vista poderá parecer estranha essa maneira abstrata de definir [uma] nova espécie de número" (1949, p. 139). Ainda na nota, atenta os leitores que, por uma questão de hábito, escrevem os números fracionários sob a forma $\boldsymbol{\frac{p}{q}}$ e que habitualmente os definem como "pares de números naturais tomados em determinada ordem $(\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0})$, escrevendo-se $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$" (1949, p. 139). Para os leitores curiosos, o autor recomenda que confiram a página 99 da obra *As ideias fundamentais da matemática* de Amoroso Costa (1929) e finaliza a nota dizendo que "toda teoria surge, então, de certo número de princípios fundamentais".

Na edição de 1955, o autor não menciona, seja como definição ou como forma de notação, o número complexo como um par ordenado. Ao invés de apresentar os quatro princípios, como os supracitamos, após as considerações preliminares, o autor define o que é uma unidade imaginária (como veremos na seção 5.3.4). É só ao caracterizar uma expressão binomial (seção 5.3.5) que o autor afirma que esse tipo de expressão é comumente chamado de número complexo.

5.3.3 Observação

O autor discorre sobre uma característica própria dos números complexos: o fato de que os termos *maior* e *menor*, que designam relações de ordem, deixam de ter sentido.

Figura 31 – Observação

116 — Observação. Verifica-se à simples inspeção que, tanto a igualdade, como à adição e a multiplicação, conservam as propriedades formais com que se apresentam no campo real, excetuando-se, para as últimas, as de *monotonismo*, porquanto, não sendo possível definir no campo complexo a relação de ordem (109), deixam de ter sentido os termos: *maior* e *menor*.

Observemos, ainda, que êsses quatro princípios fundamentais, independentes entre si, são suficientes para o estabelecimento de toda teoria dos números complexos.

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1944)

5.3.4 Número i

Nessa seção, o autor diz que o número complexo $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ é comumente denominado "unidade imaginária" e é representado pelo símbolo $\boldsymbol{i}$. Por meio de uma nota de rodapé, comenta que o termo imaginário é derivado dos pensamentos de Descartes e o símbolo $\boldsymbol{i}$**,** de Euler.

Observando que $(\mathbf{0}, \mathbf{1}).(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = -\mathbf{1}$, conclui que: $\boldsymbol{i}^{\mathbf{2}} = -\mathbf{1}$. Já em 1955, apresenta o símbolo $\boldsymbol{i}$ como sendo a representação de $\sqrt{-\mathbf{1}}$; ao elevar essa quantia ao quadrado, obtém $\boldsymbol{i}^{\mathbf{2}} = -\mathbf{1}$. Essa mudança se deu, mais uma vez, devido à exclusão da definição de um número complexo como um par ordenado.

A partir dessas informações, estabelece, nas quatro edições analisadas, a lei de formação das potências de $\boldsymbol{i}$, levando em conta a associatividade da multiplicação:

$$\boldsymbol{i}^{\mathbf{3}} = \boldsymbol{i}^{\mathbf{2}} \,.\, \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{i}^{\mathbf{4}} = \boldsymbol{i}^{\mathbf{3}} \,.\, \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i} \,.\, \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}^{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{i}^{\mathbf{5}} = \boldsymbol{i}^{\mathbf{4}} \,.\, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{i}^{\mathbf{6}} = \boldsymbol{i}^{\mathbf{5}} \,.\, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}^{\mathbf{2}} = -\mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{i}^{\mathbf{7}} = \boldsymbol{i}^{\mathbf{6}} \,.\, \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}$$

Comentando que as potências se repetem periodicamente e tomando por convenção $\boldsymbol{i}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$ e $\boldsymbol{i}^{\mathbf{1}} = \boldsymbol{i}$, apresenta a lei de formação das potências de um modo geral:

$$\begin{cases} i^{4k} = 1 \\ i^{4k+1} = i \\ i^{4k+2} = -1 \\ i^{4k+3} = -i \end{cases} \qquad (k=0,1,2,...) \qquad \textbf{(1)}$$ [68]

[68] As marcações de fórmulas e equações são feitas na obra (com exceção das edições de 1955 e 1956) e têm o mesmo intuito que a nossa marcação: localizar o leitor e facilitar o diálogo nas próximas seções.

A seção é finalizada com o autor mostrando o caso $\boldsymbol{i^{67}}$. Afirma que, como

$$\mathbf{67 = 6 \times 4 + 3}$$

pela formação apresentada em **(1)**, $\boldsymbol{i^{67} = -i}$.

5.3.5 Forma Binomial

O título da seção é seguido por uma nota de rodapé em que o autor destaca que a forma binomial também é chamada de "forma algébrica". Em seguida, o autor, observando que

$$\boldsymbol{(0, b) = (b, 0)(0, 1) = bi}$$

uma vez que $\boldsymbol{(b, 0) = b}$ e $\boldsymbol{(0, 1) = i}$ e que $\boldsymbol{(a, b) = (a, 0) + (0, b)}$, conclui que:

$$\boldsymbol{(a, b) = a + bi} \qquad \textbf{(2)}$$

Afirma ainda que essa expressão define a forma binomial dos números complexos e justifica a denominação adotada.

Nas edições de 1955 e 1956, integrando o conceito de polinômio, o autor comenta que uma expressão binomial pode ser reduzida a $\boldsymbol{a + bi}$ e exemplifica da seguinte maneira[69]:

$$\boldsymbol{-15i^7 + 2i^3 - 3i^2 - 4i + 1 = 4 + 9i}$$

Na sequência, nas edições de 1944 e 1949, define a parte real e a imaginária dos números complexos.

Figura 32 – Parte real e parte imaginária

O número a constitui a parte real; bi, a imaginária

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1944)

Como mostra a Figura 32 acima, o autor define a parte imaginária, de forma distinta da convencional. O comum é denominar como parte imaginária o escalar $\boldsymbol{b}$ que "acompanha" a unidade imaginária $\boldsymbol{i}$. Haroldo L. da Cunha define a parte imaginária como sendo $\boldsymbol{bi}$. Essa denominação não estaria de todo errada se um número complexo fosse representado apenas algebricamente. No entanto, ao representar um número complexo no plano cartesiano (como veremos na página 104), o autor se contradiz, uma vez que, ao definir o eixo $\boldsymbol{y}$ como eixo imaginário, marca sobre o eixo $\boldsymbol{y}$ apenas o escalar $\boldsymbol{b}$ que acompanha a unidade imaginária $\boldsymbol{i}$.

[69] Levando em consideração a formação das potências.

Após definir a parte real e a parte imaginária de um número complexo, o autor finaliza a seção comentando que, quando, na forma binomial, $\boldsymbol{a = 0}$, o número é chamado de "imaginário puro".

Nas edições de 1955 e 1956, a definição diferenciada da parte imaginária reincide. Aproveitando o exemplo de redução de uma expressão binomial, o autor diz que essa forma caracteriza um número complexo, indicando que este é composto de uma parcela real $\boldsymbol{a}$ e outra, imaginária $\boldsymbol{bi}$. O que antes era chamado de partes, em decorrência da operação de adição, passa a ser chamado de parcelas.

5.3.6 Observação

Nessa seção, exclusiva da edição de 1944, define-se a igualdade de dois números complexos. Para isso, exige-se, separadamente, a igualdade das partes reais e das partes imaginárias, isto é, para $\boldsymbol{a + bi = a' + b'i}$, devemos ter $\boldsymbol{a = a'}$ e $\boldsymbol{b = b'}$. Isso, de fato, vem contradizer a definição de parte imaginária (Figura 32). O autor afirma ainda que "um número complexo será nulo quando forem nulas a parte real e a parte imaginária" (1944, p. 159). Portanto, a condição: $\boldsymbol{a + bi = 0}$ exigirá, simultaneamente, $\boldsymbol{a = b = 0}$.

No entanto, fica evidente, nessa observação, que a opção do autor em definir a parte imaginária de um número complexo como sendo $\boldsymbol{bi}$, não comprometeu o desenvolvimento da teoria, uma vez que, para $\boldsymbol{b = b'}$, teremos $\boldsymbol{bi = b'i}$.

5.3.7 Norma e módulo

A **norma** de um complexo $\boldsymbol{a + bi}$ é determinada pela expressão $\boldsymbol{a^2 + b^2}$. O **módulo** é o número aritmético $\boldsymbol{\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}}$, podendo ser representado por $\boldsymbol{|a + bi|}$ ou $\boldsymbol{|(a, b)|}$. Segundo o autor, quando se tem $\boldsymbol{b = 0}$, $\boldsymbol{\varrho}$ coincide com o valor absoluto do número real obtido, daí a notação referida acima. Para $\boldsymbol{\varrho = 0}$, o número complexo é nulo e vice-versa.

Nas edições de 1955 e 1956, o módulo é representado apenas como $\boldsymbol{|a + bi|}$. Nessa seção, o autor discorre sobre a igualdade de números complexos e número complexo nulo como apresentado na seção 5.3.6. A norma, que era o primeiro assunto a ser abordado na edição de 1944, passa a ser o último item da edição de 1955.

Embora a edição de 1949 não apresente a observação mencionada na seção 5.3.6, a seção 5.3.7 transcorre da mesma maneira que na edição de 1944.

No momento de qualificação desta pesquisa, a banca examinadora chamou nossa atenção para as notações utilizadas pelo autor. O estranhamento se deu, principalmente, com a notação de módulo utilizada pelo autor ($\boldsymbol{\varrho}$)**.** Ao olharmos outras obras de várias décadas (Quadro 12), notamos que essa notação não é comumente utilizada. Dos oito livros consultados, apenas a obra *Matemática 2º ciclo* utiliza essa representação.

Nessas oito obras, encontramos três notações diferentes: cinco delas – as mais recentes – utilizaram a letra grega $\boldsymbol{\rho}$ (Rô) para representar o módulo de um número complexo; outras duas utilizaram a letra $\boldsymbol{r}$, que nada mais é do que a representação latina da letra grega $\boldsymbol{\rho}$ (Rô). Ao utilizarmos a ferramenta "Equação" do Microsoft Word para digitarmos este trabalho, notamos que a letra utilizada por Haroldo Lisbôa da Cunha ($\boldsymbol{\varrho}$) é uma variação da letra grega Rô. Logo, embora os autores tenham utilizado diferentes notações, todos estavam se baseando na mesma representação.

Quadro 12 – Notações do módulo de um número complexo

OBRA	AUTOR	ANO	NOTAÇÃO
Matemática 2º ciclo	Euclides Roxo, Haroldo L. da Cunha, Roberto Peixoto, Cesar Dacroso Netto	1944	ϱ
Lições de Matemática Professadas no Curso Complementar (Curso de Engenharia) do Colégio Pedro II	Euclides Roxo	[193-]	r
Algacyr Munhoz Maeder	Curso de Matemática	1948	r
Ary Quintella	Matemática	1960	ρ
Luiz Mauro Rocha e Ruy Madsen Barbosa	Curso Colegial Moderno	1970	ρ
Manoel Jairo Bezerra	Curso de Matemática	1976	ρ
Gelson Iezzi	Fundamentos de Matemática Elementar	1977	ρ
Luiz Roberto Dante	Matemática	2005	ρ

5.3.8 Complexos conjugados; números opostos.

Apresentado da mesma maneira nas quatro edições analisadas, o autor define, nessa seção, o número $\boldsymbol{a-bi}$ como **conjugado** de $\boldsymbol{a+bi}$. Segundo ele, torna-se evidente que "dois complexos conjugados têm a mesma *norma* e, por consequência, o mesmo *módulo*. A recíproca, entretanto, não é verdadeira" (1944, p. 159). Nesse ponto, supõe-se que o leitor já saiba o que é ser recíproco, uma vez que o autor não esclarece o termo ao longo do capítulo.

Na sequência, o número $\boldsymbol{-a-bi}$ é denominado **oposto** ou **contrário** de $\boldsymbol{a+bi}$**.** É ressaltado pelo autor que, nesse caso, $\boldsymbol{a+bi}$ e seu oposto terão a mesma norma e, portanto, o mesmo módulo.

5.3.9 Interpretação geométrica; argumento.

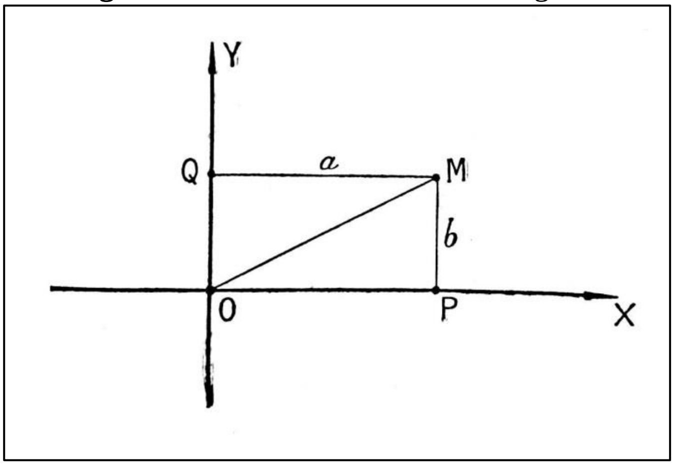
Essa seção não sofreu nenhuma alteração no período analisado (1944 – 1956).

A partir de um sistema cartesiano ortogonal, o autor marca, nas quatro edições, o ponto $\boldsymbol{M}\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ e o considera como a **imagem** (ou índice[70]) de $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$.

O autor ressalta que, ao adotar tal interpretação, está fazendo corresponder, sem ambiguidade, a cada número complexo um ponto do plano e vice-versa. O número passa assim, segundo o autor, "a ser, então, o afixo do ponto correspondente" (1949, p. 142). Essa informação, que permanece inalterada inclusive na edição de 1956, parece-nos contraditória. Comumente, o ponto $\boldsymbol{M}$ é definido como afixo do número complexo $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ e não o contrário, como apresenta o autor. Se o afixo fosse uma entidade apenas algébrica o autor poderia, já que estamos falando de uma convenção, definir afixo da forma que o fez. No entanto, o afixo, além de algébrica é uma entidade geométrica, o que nos faz interpretar a definição do autor como um equívoco.

Na sequência, enfatiza que, se $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, o número será real e seu ponto correspondente estará sobre o eixo $\boldsymbol{Ox}$. Se $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, o número será um imaginário puro e seu ponto correspondente estará sobre o eixo $\boldsymbol{Oy}$. A partir dessa afirmação, denomina o eixo $\boldsymbol{x}$ como eixo real e o eixo $\boldsymbol{y}$ como eixo imaginário[71].

Figura 33 – Sistema cartesiano ortogonal



Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1944)

Segundo o autor, o triângulo retângulo $\boldsymbol{OPM}$ nos dá:

$$\overline{\boldsymbol{OM}^2} = \overline{\boldsymbol{OP}^2} + \overline{\boldsymbol{PM}^2}, \text{ isto é, } \overline{\boldsymbol{OM}} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$$

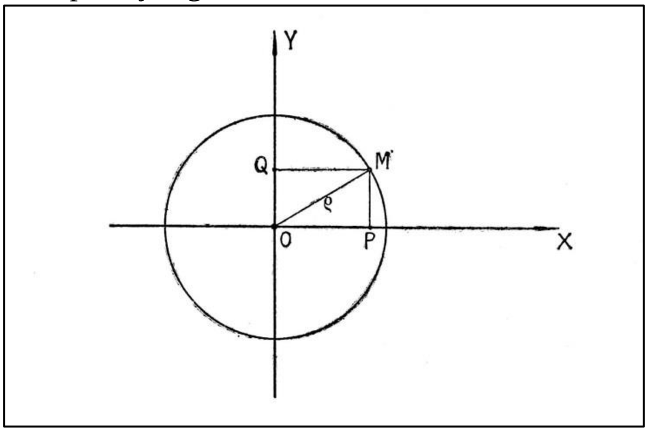
Portanto, "a medida aritmética de $\boldsymbol{OM}$ representará o módulo $\boldsymbol{\varrho}$ do número complexo correspondente" (1949, p. 142). Na sequência das quatro edições, o autor conclui que a

[70] Essa informação foi introduzida a partir de uma nota de rodapé.

[71] O autor informa, em nota de rodapé, que "essa interpretação geométrica de extraordinário alcance, foi adotada, simultaneamente, por G.Wessel e C. F.Gauss (1799). Só em 1831, entretanto, foi sistematizada por esse último. Usa-se hoje, também, a interpretação esférica atribuída a Riemann" (1949, p. 142).

totalidade dos números de mesmo módulo $\boldsymbol{\varrho}$ será representada pela circunferência com esse raio.

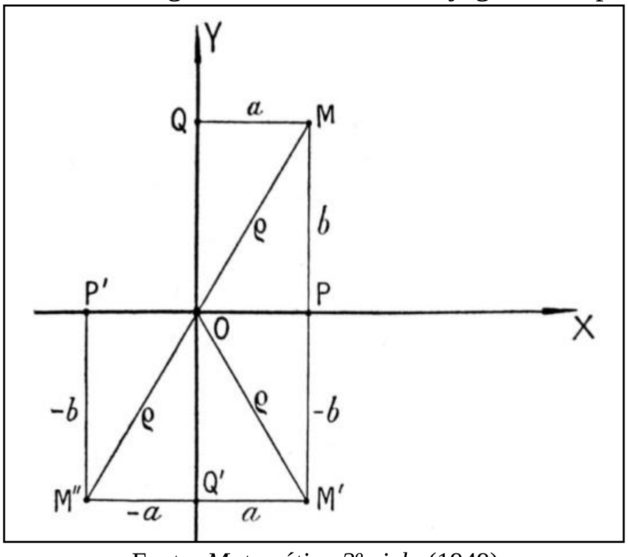
Figura 34 – Interpretação geométrica do módulo de um número complexo



Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1949)

O autor observa também que as imagens dos números conjugados serão simétricas em relação ao eixo real $\boldsymbol{Ox}$, enquanto que as de números opostos serão simétricas em relação à origem $\boldsymbol{O}$.

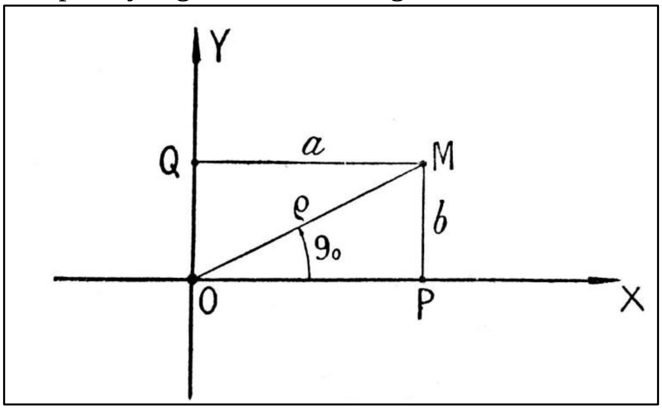
Figura 35 – Imagens dos números conjugados e opostos



Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1949)

A partir dessa interpretação geométrica, o autor define o conceito de **argumento** de um número complexo como qualquer dos ângulos $\boldsymbol{\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi}$ (com $\boldsymbol{k = 0, 1, 2}$, ...) que $\overline{\boldsymbol{OM}}$ faz com o eixo $\boldsymbol{Ox}$. Segundo a nota de rodapé, a denominação **anomalia** também era usada para descrever essa definição. O autor observa, ainda, que o sentido geralmente adotado é o que se toma classicamente como direto na Trigonometria (sentido anti-horário).

Figura 36 – Interpretação geométrica do argumento de um número complexo



Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1949)

Assim como a representação do módulo, o autor utiliza uma notação diferente ($\boldsymbol{\vartheta}$) para representar o ângulo. Consultando outros livros[72], notamos que, com exceção de Ary Quintella, que utiliza a letra grega $\boldsymbol{\varphi}$ (Fi) para representar um ângulo, os demais autores utilizam a letra grega $\boldsymbol{\theta}$ (*theta*). A representação utilizada por Haroldo L. da Cunha é uma variante da letra grega *theta*.

O autor afirma que "a menor determinação, correspondente a $\boldsymbol{k = 0}$, caracteriza o argumento principal $\boldsymbol{\vartheta_0}$" (1949, p. 144). Em seguida, afirma que os números de argumento $\boldsymbol{k\pi}$ serão reais, positivos, quando $\boldsymbol{k}$ for par; negativos quando $\boldsymbol{k}$ for ímpar. Salienta ainda que o argumento dos imaginários puros será sempre da forma

$$\boldsymbol{\frac{(2k+1)\pi}{2}}$$

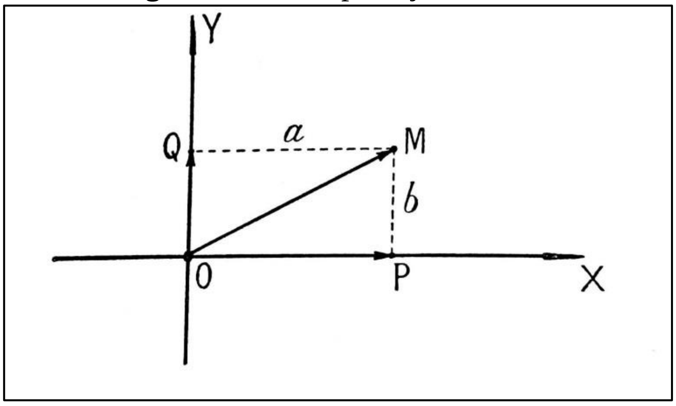
5.3.10 Interpretação vetorial

O autor explica que podemos associar cada número complexo $\boldsymbol{a + bi}$ não mais ao ponto $\boldsymbol{M}$ $(\boldsymbol{a, b})$ e sim ao vetor localizado $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$. Nesse ponto, ao se referir ao vetor localizado, o autor, por meio de uma nota de rodapé, faz menção ao segundo livro da série *Matemática 2º ciclo*, especificamente ao capítulo *Trigonometria* em que o conceito de vetor é abordado.

Após a figura, Haroldo L. da Cunha ressalta que, nessa correspondência, não haverá ambiguidade. O vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ terá módulo $\boldsymbol{\rho}$ e suas componentes $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OQ}}$ serão, respectivamente, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e o ponto $\boldsymbol{O}$ caracterizará o vetor nulo. Nesse ponto, o autor sugere ao leitor conferir, mais uma vez, o capítulo *Trigonometria*, presente no segundo livro da coleção, onde vetor nulo é definido como um vetor cujo módulo é nulo.

[72] Os mesmos livros apresentados no quadro 12.

Figura 37 – Interpretação Vetorial



Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1944)

O autor observa: "teremos assim, uma interpretação de particular interesse no estudo das operações fundamentais sobre números complexos, como será evidenciado adiante" (1949, p. 144).

Essa seção não compõe as edições de 1955 e 1956 e o autor não faz nenhum comentário sobre a representação vetorial. Após discorrer sobre a interpretação geométrica e sobre o argumento, ele discute a representação trigonométrica dos números complexos. Embora, nas seções seguintes, o autor utilize a representação vetorial de um número complexo para interpretar as quatro operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) geometricamente, ele não vê necessidade em apresentar essa seção nas edições da década de 1950.

A presença dos capítulos *Vetor* e *Projeções* no segundo volume da série *Matemática 2º ciclo* pode justificar essa exclusão. Estando o conteúdo discutido no segundo volume, os autores devem ter achado desnecessário continuar levantando essa discussão no terceiro volume da série.

5.3.11 Representação trigonométrica

Essa seção compõe as quatro edições analisadas (1944, 1949, 1955, 1956) e não sofreu nenhuma alteração ao longo das publicações.

Segundo o autor, a interpretação geométrica[73], também chamada, segundo nota de rodapé, de "representação fatorial, normal ou polar de um número complexo", coloca em evidência as seguintes relações:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \varrho \cos \vartheta \\ \mathbf{b} = \varrho \,\mathbf{sen}\, \vartheta \end{cases} \qquad \mathbf{(3)}$$

[73] Segundo o autor, essa representação é devida a Euler (1748).

Essa representação permite escrever:

$$\mathbf{a + bi = } \ \boldsymbol{\varrho}\ (\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{i\ sen}\,\boldsymbol{\vartheta}) \qquad \mathbf{(4)}$$

É mencionado que “esta clássica expressão trigonométrica simplifica inúmeros problemas e torna evidentes propriedades do domínio complexo” (1949, p. 145). Segundo o autor, para passar da forma binomial à trigonométrica usam-se as relações:

$$\boldsymbol{\varrho} = \sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}} \qquad \mathbf{(5)}$$

$$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\vartheta} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}} \qquad \mathbf{(6)}$$

$$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\vartheta} = \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}} \qquad \mathbf{(7)}$$

Em uma nota de rodapé, o autor adverte que a consideração simultânea de **(6)** e **(7)** tem por fim evitar a ambiguidade na determinação de $\boldsymbol{\vartheta}$. Voltando ao texto principal, é destacado na obra que as relações **(6)** e **(7)** foram deduzidas de **(3)** e que a transformação inversa se faz imediatamente por meio das próprias relações **(3)**.

Até esse momento, há uma preocupação do autor em apresentar o conteúdo teoricamente. Embora tenha desenvolvido o cálculo de $\boldsymbol{i^{67}}$ para exemplificar a utilização da generalização da lei de formação das potências, é somente nesse momento do texto, de fato, que um exemplo é enunciado. Pede-se que sejam escritos na forma trigonométrica os seguintes números:

$$\mathbf{1 + \sqrt{3}}\boldsymbol{i},\ \mathbf{-1 +}\ \boldsymbol{i},\ \mathbf{1 -}\ \boldsymbol{i} \text{ e } \boldsymbol{i}.$$

Apresentaremos a seguir a resolução desenvolvida no livro para o caso $\mathbf{-1 +}\ \boldsymbol{i}$ **e** $\mathbf{1 -}\ \boldsymbol{i}$.

O autor faz os cálculos simultaneamente usando o índice 1 para o caso $\mathbf{-1 +}\ \boldsymbol{i}$ e o índice 2 para $\mathbf{1 -}\ \boldsymbol{i}$. No entanto, ao calcular os argumentos, acaba nomeando ambos como $\boldsymbol{\vartheta_2}$. Esse é um tipo de equívoco que pode tanto ter sido cometido pelo autor como pelo editor e persiste, inclusive, na edição de 1956.

$$\boldsymbol{\varrho_1} = \sqrt{\mathbf{2}};\ \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\vartheta_1} = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \mathbf{sen}\,\boldsymbol{\vartheta_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para o segundo:

$$\boldsymbol{\varrho_2} = \sqrt{\mathbf{2}};\ \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\vartheta_2} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \mathbf{sen}\,\boldsymbol{\vartheta_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tem-se assim,

$$\boldsymbol{\vartheta_1} = \frac{\boldsymbol{3\pi}}{\mathbf{4}} + \boldsymbol{2k\pi} \text{ e } \boldsymbol{\vartheta_2} = \frac{\boldsymbol{7\pi}}{\mathbf{4}} + \boldsymbol{2k\pi}$$

e, consequentemente:

$$\mathbf{-1 +}\ \boldsymbol{i} = \sqrt{\mathbf{2}}\left[\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{3\pi}}{\mathbf{4}} + \boldsymbol{2k\pi}\right) + \boldsymbol{i}\ \mathbf{sen}\left(\frac{\boldsymbol{3\pi}}{\mathbf{4}} + \boldsymbol{2k\pi}\right)\right] \qquad \mathbf{(8)}$$

$$\mathbf{1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]} \quad \textbf{(9)}$$

Ainda no exemplo, o autor observa que $\mathbf{1 + i}$ e $\mathbf{1 - i}$ são números complementares opostos, isto é, suas imagens são simétricas em relação à origem. Ressalta também que, se os argumentos tivessem sido calculados pelas tangentes, encontraríamos ambiguidade, pois

$$\mathbf{\tan\vartheta_1 = \tan\vartheta_2 = 1}$$

Também é apresentado um exemplo para escrever sob a forma binomial o número:

$$\mathbf{3 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{8} + 2k\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{8} + 2k\pi\right)\right]}$$

Fazendo menção ao capítulo *Trigonometria* do segundo livro da série, o autor apresenta de forma imediata:

$$\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{8} + 2k\pi\right) = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}}$$

$$\mathbf{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{8} + 2k\pi\right) = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}$$

E que, portanto,

$$\mathbf{a = \frac{3\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}} \text{ e } \mathbf{b = \frac{3\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}$$

Concluindo que

$$\mathbf{a + bi \equiv \frac{3\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + \frac{3\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}i}$$

O autor observa ainda que, “estando calculados $\mathbf{sen\,\vartheta}$ e $\mathbf{\cos\vartheta}$, o problema da transformação praticamente desaparece” (1959, p. 156). Ele complementa afirmando que, se $\boldsymbol{\varrho = 1}$, então a forma trigonométrica será idêntica à binomial.

5.3.12 Observação

Nessa seção, o autor observa, nas quatro edições analisadas, que “para os números reais, que agora surgem como meros casos particulares de números complexos, é, em muitas questões, útil essa *forma trigonométrica*” (1956, p. 156, grifos do autor).

Na sequência, por meio de um exemplo, são escritos na forma trigonométrica os números 1, -1 e -5. Os exemplos estão presentes nas quatro edições analisadas (1944, 1949, 1955 e 1956). Apresentaremos a resolução dos casos 1 e -1.

O autor ressalta que, para ambos os casos (1 e -1), $\boldsymbol{\varrho = 1}$. Afirma ainda que os argumentos podem ser determinados imediatamente sem necessidade das relações **(6)** e **(7)**. “Bastará lembrar que a imagem de **1** estará sobre a parte positiva do *eixo real* $\boldsymbol{Ox}$ e a de **-1,** sobre a parte negativa” (1956, p. 156). Dessa forma, Haroldo L. da Cunha afirma que: $\boldsymbol{\vartheta_1 = 2k\pi}$ e $\boldsymbol{\vartheta_2 = 2(k+1)\pi}$, mostrando que o argumento principal de **1** é zero e o de **-1** é $\boldsymbol{\pi}$. Desse modo,

$$\mathbf{1 = \cos 2k\pi + i\,\text{sen}\,2k\pi} \qquad \textbf{(10)}$$

$$\mathbf{-1 = \cos(2k+1)\pi + i\,\text{sen}\,(2k+1)\pi} \qquad \textbf{(11)}$$

Assim, finaliza a seção observando que “tal como nas relações anteriores, estamos apenas escrevendo identidades” (1956, p. 156).

5.3.13 Representação exponencial; fórmula de Euler.

Nas edições de 1955 e 1956, devido à reestruturação da obra em função da portaria de 1951, que instituiu os programas mínimos, o autor não discorre sobre a representação exponencial dos números complexos. Após apresentar a representação trigonométrica, ele disserta sobre a adição e subtração dos números complexos. Logo, as funções hiperbólicas (5.3.14) e a observação (5.3.15) também não fazem parte das edições da década de 1950.

Nas edições de 1944 e 1949, o autor toma a expressão abaixo por convenção[74]:

$$\mathbf{e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\,\text{sen}\,\vartheta} \qquad \textbf{(12)}$$

Na sequência conclui que, sendo $\boldsymbol{\varrho}$ o módulo de $\boldsymbol{a+bi}$, tem-se de forma geral:

$$\boldsymbol{a + bi = \varrho e^{i\vartheta}}$$

Essa expressão, segundo o autor, é útil em certos detalhes da teoria dos números complexos.

Haroldo L. da Cunha afirma que, tomando $\boldsymbol{-\vartheta}$ no lugar de $\boldsymbol{\vartheta}$ em **(12),** chega-se à seguinte igualdade:

$$\mathbf{e^{-i\vartheta} = \cos\vartheta - i\,\text{sen}\,\vartheta} \qquad \textbf{(13)}$$

De maneira direta, sem apresentar as manipulações, o autor afirma que, somando e subtraindo, membro a membro, as relações **(12)** e **(13),** obtém-se:

$$\boldsymbol{\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}} \qquad \textbf{(84)}$$

$$\boldsymbol{\text{sen}\,\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}} \qquad \textbf{(95)}$$

Segundo ele, essas relações constituem as clássicas fórmulas de Euler.

[74] Segundo a nota de rodapé 101, alguns autores, indevidamente, demonstram essa relação por meio de desenvolvimentos em série que, por sua vez, exigem restrições e convenções análogas. É mencionado, ainda, que essa expressão é atribuída a Euler, mas devida, verdadeiramente, a R. Cotes (1722).

5.3.14 Funções Hiperbólicas

O autor substitui $\boldsymbol{\vartheta}$ por **i** $\boldsymbol{\vartheta}$, em **(14)** e **(15)**, para obter **(16)**. Os passos da substituição não são apresentados ao leitor.

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{i\vartheta}) = \frac{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}}{2} \quad \text{e} \quad \mathbf{sen}(\boldsymbol{i\vartheta}) = -\frac{e^{\vartheta}-e^{-\vartheta}}{2i} \qquad \textbf{(16)}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade do seno, afirma que:

$$-\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{i\vartheta}) = \frac{\boldsymbol{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}}{\mathbf{2}} \qquad \textbf{(17)}$$

Segundo Haroldo L. da Cunha, as relações **(16)** e **(17)** definem, respectivamente, o cosseno hiperbólico e o seno hiperbólico do ângulo $\boldsymbol{\vartheta}$. Em nota de rodapé, o autor acrescenta que, partindo dessas definições, constitui-se uma nova trigonometria análoga à circular.

Segundo o autor, escreve-se em geral:

$$\mathbf{coh}\,\boldsymbol{\vartheta} = \frac{\boldsymbol{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}}{\mathbf{2}} \qquad \textbf{(18)}$$

$$\mathbf{seh}\,\boldsymbol{\vartheta} = \frac{\boldsymbol{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}}{\mathbf{2}} \qquad \textbf{(19)}$$

5.3.15 Observação

Ao tomar, na relação **(12)**, $\boldsymbol{\vartheta = 2k\pi}$, o autor obtém:

$$\boldsymbol{e^{2k\pi i} = 1} \qquad \textbf{(20)}$$

Fazendo $k = 0,1,2,\ldots$, conclui que:

$$\boldsymbol{e^{0} = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = \cdots = 1}$$

É possível notar, pela igualdade acima, que há uma infinidade de expoentes satisfazendo a relação **(20)**. Desses, entretanto, “só é real o que corresponde a $\boldsymbol{k = 0}$” (1949, p. 149).

A observação é seguida por um exercício. Embora o autor tenha nomeado como exercício, não notamos nenhuma diferença entre esse exercício, que está resolvido, e os exemplos apresentados anteriormente.

O exercício propõe que se escreva, na forma binomial, o número $\boldsymbol{e^{2i}}$. Tomando $\boldsymbol{\varrho = 1}$, pois: $\boldsymbol{e^{2i} = \mathbf{cos}\,2 + i\,\mathbf{sen}\,2}$. O autor conclui que:

$$\boldsymbol{\varrho} = \sqrt{\mathbf{cos^2 2 + sen^2 2}} = \mathbf{1}$$

Em nota de rodapé, o autor ressalta que está “[...] tomando, como argumento, o arco referido ao raio. O ângulo correspondente ao *arco unitário* mede 1 *rd*” (1949, p. 149, grifos do autor).

Na sequência, afirma que é possível notar que essa conclusão é verdadeira para todos os números complexos do tipo $\boldsymbol{e^{i\vartheta}}$ e que, portanto, $\boldsymbol{a = \cos 2 \cong -0,4162}$ e $\boldsymbol{b = \text{sen}\, 2 \cong 0,9093}$, isto é,

$$\boldsymbol{a + bi = -0,4162 + 0,9093i}$$

5.3.16 Operações sobre números complexos

A partir dessa seção, teremos, novamente, uma convergência na apresentação dos conteúdos nas quatro edições. O autor inicia a seção comentando que “o estabelecimento da lei geral de formação das potências de $\boldsymbol{i}$ e da expressão binomial dos números complexos permite reduzir as operações nesse novo domínio, às regras usuais do cálculo algébrico” (1949, p. 149).

O autor propõe que se opere sobre os números da forma $\boldsymbol{a + bi}$ como se fossem expressões algébricas ordinárias e que, nos resultados finais, tratem-se as potências de $\boldsymbol{i}$ de acordo com as relações estabelecidas em **(1)**.

5.3.17 Adição e Subtração

Considerando os números complexos $\mathbf{z_1 = a_1 + b_1 i}$ e $\mathbf{z_2 = a_2 + b_2 i}$, o autor afirma, nas quatro edições, que podemos escrever imediatamente:

$$\mathbf{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} \qquad \textbf{(21)}$$

Ressalta que essa expressão equivale à convenção adotada no início do capítulo (5.3.2). Na sequência, o autor apresenta a soma de $\boldsymbol{m}$ números complexos:

Sendo $\mathbf{z_1 = a_1 + b_1 i}$, $\mathbf{z_2 = a_2 + b_2 i}$, ..., $\mathbf{z_m = a_m + b_m i}$, tem-se:

$$\mathbf{z_1 + z_2 + \cdots + z_m = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_m)} \qquad \textbf{(22)}$$

Na edição de 1944, os índices 1 e 2 de $\mathbf{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}$ e $\mathbf{b_1 + b_2 + \cdots + b_m}$ não são apresentados. As expressões são exibidas na obra da seguinte forma: $\mathbf{a + a + \cdots + a_m}$ e $\mathbf{b + b + \cdots + b_m}$**.** Essa diferença torna a expressão incorreta, uma vez que os termos podem ou não ser iguais. Nas edições de 1949 e 1956, a expressão é apresentada de forma correta, com os índices.

Seguindo com os conteúdos apresentados no livro, o autor comenta que o número $\boldsymbol{z = a + bi}$ para o qual $\mathbf{a = a_1 + a_2 + \cdots + a_m}$ e $\mathbf{b = b_1 + b_2 + \cdots + b_m}$ representará a soma $\mathbf{z = z_1 + z_2 + \cdots + z_m}$. Para que essa soma seja real, será necessário que $\mathbf{b_1 + b_2 + + \cdots + b_m = 0}$. Essa condição será verificada, em particular, para os números complexos conjugados. Assim, para $\mathbf{z_1} = \boldsymbol{3 - 5i}$ e $\mathbf{z_2} = \boldsymbol{3 + 5i}$, virá: $\mathbf{z_1 + z_2 = 6}$.

Na sequência, afirma que a diferença de dois números complexos é representada por $\mathbf{z_2} - \mathbf{z_1}$ e é definida como: "o número que, somado a $\mathbf{z_1}$ dá $\mathbf{z_2}$" (1949, p. 150). Assim afirma que:

$$\mathbf{z_2} - \mathbf{z_1} = (\mathbf{a_2} - \mathbf{a_1}) + (\mathbf{b_2} - \mathbf{b_1})i \qquad \textbf{(23)}$$

Segundo Haroldo Lisboa da Cunha, essa relação mostra que subtrair $\mathbf{z_1}$ de $\mathbf{z_2}$ equivale a somar a $\mathbf{z_2}$ o oposto de $\mathbf{z_1}$. O autor ressalta que é comum representar esse oposto por $-\mathbf{z_1}$. Acrescenta ainda, em nota de rodapé, que o sinal negativo é apenas convencional, uma vez que não tem sentido a ideia de um número complexo negativo.

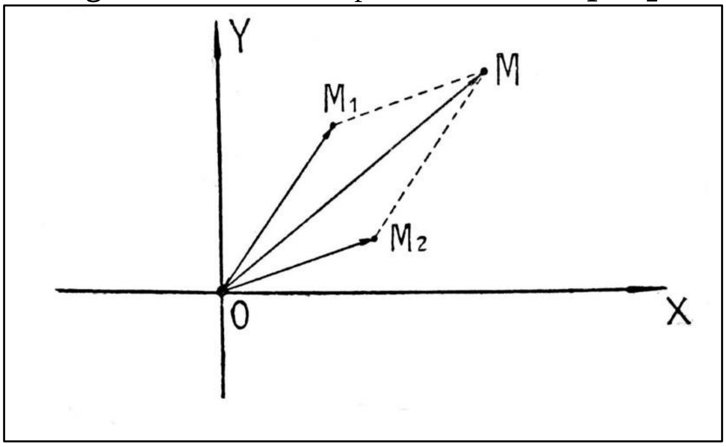
5.3.18 Interpretação vetorial da adição e da subtração

Nas edições de 1955 e 1956, o nome dessa seção sofre uma alteração e passa a intitular-se "Interpretação geométrica da adição e da subtração". Embora o autor continue utilizando a noção de vetor no decorrer da seção, a exclusão da seção *Interpretação Vetorial* da obra pode ter influenciado o autor a alterar o título da seção. Ademais, ele mantém a mesma apresentação em todas as quatro edições analisadas.

O autor toma $\overrightarrow{\boldsymbol{OM_1}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OM_2}}$ como sendo os vetores representativos de $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$, respectivamente. Afirma que, ao determinar o vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OM_2}}$, tem-se pelo princípio de Carnot[75]:

$$proj_{\dot{o}x}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = proj_{\dot{o}x}\overrightarrow{\boldsymbol{OM_1}} + proj_{\dot{o}x}\overrightarrow{\boldsymbol{OM_2}}$$
$$proj_{\dot{o}y}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = proj_{\dot{o}y}\overrightarrow{\boldsymbol{OM_1}} + proj_{\dot{o}y}\overrightarrow{\boldsymbol{OM_2}}$$

Figura 38 – Vetores representativos de $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$.



Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1944)

[75] É informado, na nota de rodapé 104, que o princípio de Carnot pode ser consultado no segundo livro da série *Matemática 2º ciclo*, na página 319, no capítulo *Trigonometria*. Esse princípio diz que: "a projeção da resultante de um contorno poligonal sobre um eixo é igual à soma das projeções das componentes sobre o mesmo eixo" (p. 151).

Chamando de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ as coordenadas de M, o autor afirma que teremos:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{1}} + \vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{2}}$$

$$\vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{b}}_{\mathbf{1}} + \vec{\boldsymbol{b}}_{\mathbf{2}}$$

E como, em cada uma dessas relações, os vetores são colineares, tem-se algebricamente:

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}$$

$$\boldsymbol{b} = \mathbf{b_1} + \mathbf{b_2}$$

Isso mostra, segundo o autor, que o número complexo, cujo afixo é M[76], representará a soma $\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2}$. Na sequência, o autor mostra a generalização para o caso de $\boldsymbol{n}$ números complexos e, nesse ponto, também comete uma pequena confusão com os índices, apresentando, na verdade, a generalização para o caso de $\boldsymbol{m}$ números complexos.

O autor afirma que o vetor soma

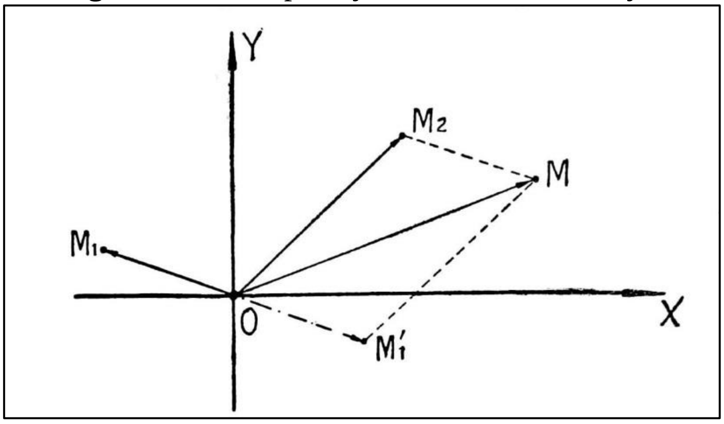
$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OM_2}} + \cdots + \overrightarrow{\boldsymbol{OM_m}} \quad \textbf{(24)}$$

determinará o ponto M de:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z_1} + \mathbf{z_2} + \cdots + \mathbf{z_m} \quad \textbf{(25)}$$

Seguindo o raciocínio, o autor estabelece, vetorialmente, a diferença $\mathbf{z_2} - \mathbf{z_1}$. Somando a $\overrightarrow{\boldsymbol{OM_2}}$, o vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{OM'_1}}$, representativo de $-\mathbf{z_1}$.

Figura 39 – Interpretação vetorial da subtração



Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1944)

Segundo o autor, "vê-se, assim, que, no *plano complexo de Gauss* as operações de *adição* e *subtração* efetuam-se vetorialmente" (1949, p. 152, grifos do autor).

[76] No livro, o autor diz "afixo de M", frase que vai de encontro a sua definição de afixo.

5.3.19 Módulo da soma e da diferença

Nas quatro edições analisadas, tomando ϱ como sendo o módulo de $\overrightarrow{OM}$ e $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$, respectivamente, os módulos de $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}, \dots, \overrightarrow{OM_m}$, tem-se[77], segundo o autor, que:

$$\varrho \leq \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m \qquad \textbf{(26)}$$

Notamos, nessa expressão, um fato curioso: o sinal de menor ou igual aparece de outra maneira, como mostra a Figura 40 abaixo:

Figura 40 – Sinal de menor ou igual

$$\varrho \leqslant \varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_m$$

Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1944)

O traço que representa a igualdade aparece em cima do sinal de menor, ao contrário da maneira que utilizamos atualmente. Ao consultarmos a obra *Pontos de Álgebra Complementar (Teoria das equações)* datada de 1939 e escrita pelo mesmo autor - Haroldo Lisbôa da Cunha - notamos que os sinais são utilizados como o apresentado na Figura 40. Por outro lado, a edição de 1944 do livro *Matemática 2º ciclo* (2ª série), assim com as notas apresentados por Euclides Roxo em *Lições de Matemática* (193-), apresentam o sinal como usado atualmente (≤). Elencamos dois possíveis fatores para essa representação: um erro de impressão ou uma representação própria do autor. Essa diferença nos levou a pesquisar os tipos gráficos disponíveis à época; no entanto, nada encontramos sobre a representação do sinal de menor ou igual.

Na sequência, nas quatro edições analisadas, o autor, a partir do fato de que o módulo de um vetor é o próprio módulo do número complexo correspondente, conclui que:

> "*o módulo da soma é igual ou inferior à soma dos módulos das parcelas.* A igualdade se dará quando os vetores forem colineares e de mesmo sentido, isto é, quando os números complexos tiverem o mesmo argumento" (1949, p. 152, grifos do autor).

Pode-se então, segundo relatado na obra, escrever, para o caso de duas parcelas:

$$\varrho_1 - \varrho_2 \leq \varrho \leq \varrho_1 + \varrho_2 \qquad \textbf{(27)}$$

[77] Nesse momento, o autor cita, mais uma vez, o capítulo *Trigonometria* do livro dois da coleção *Matemática 2º ciclo*, especificamente a seção que discute a adição de vetores.

"Supondo $\varrho_1 - \varrho_2 \geq 0$, isto é: o módulo da soma de duas parcelas está compreendido entre a soma e a diferença dos módulos das mesmas; será igual à soma, quando os argumentos forem iguais; será igual à diferença quando os complexos forem opostos" (1949, p. 153).

O autor completa a afirmação dizendo que essa propriedade inclui também o módulo da diferença de dois números complexos, que "bastará observar [...] que a substituição de $\mathbf{z_1}$, pelo número, de mesmo módulo, $-\mathbf{z_1}$, transforma a subtração em adição". (1949, p. 153). Comenta ainda, em nota de rodapé, que essas propriedades poderão ser demonstradas diretamente e sugere que os leitores confiram a obra *Cours d'algèbre* de 1921 do autor C. Bourlet. Ele finaliza a nota observando que essas propriedades aplicam-se aos valores absolutos do campo real.

5.3.20 Multiplicação e Divisão

Haroldo L. da Cunha observa, nas quatro edições analisadas, que o produto será obtido pela aplicação das regras usuais do cálculo algébrico às formas binomiais. Na sequência, o conceito é aplicado no seguinte exemplo:

Tomando $\mathbf{Z_1 = 3 - 2i}$, $\mathbf{Z_2 = 1 - i}$ **e** $\mathbf{Z_3 = 2 + 3i}$, obtém-se multiplicando os três números:

$$\mathbf{Z_1 Z_2 Z_3 = (3 - 2i)(1 - i)(2 + 3i) = 6 - i - 11i^2 + 6i^3}$$

Como $\mathbf{i}^2 = \mathbf{-1}$ e $\mathbf{i}^3 = \mathbf{-i}$, o autor conclui que $\mathbf{Z_1 Z_2 Z_3 = 17 - 7i}$.

Em seguida, determina a condição para que o produto de dois fatores seja real: toma $\mathbf{z_1 = a_1 + b_1 i}$, $\mathbf{z_2 = a_2 + b_2 i}$ e apresenta seu produto:

$$\mathbf{Z_1 Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)}\boldsymbol{i}$$

Conclui, então, que, para que o produto seja real, deve-se ter $\mathbf{a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0}$, isto é, $\mathbf{\frac{a_1}{a_2} = -\frac{b_1}{b_2}}$. Salienta que os complexos conjugados terão produto real e igual à norma. De fato,

$$\mathbf{(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2} \qquad \textbf{(28)}$$

Esse resultado permite, segundo o autor, que se obtenha facilmente o recíproco de um número complexo, isto é, o fator que determina o produto unitário.

Supondo que o recíproco de $\boldsymbol{a + bi}$ seja $\boldsymbol{x + yi}$, tem-se por definição que:

$$\boldsymbol{(a + bi)(x + yi) = 1}$$

Multiplicando os membros da igualdade acima pelo conjugado de $\boldsymbol{a + bi}$, obtém-se:

$$\boldsymbol{(a^2 + b^2)(x + yi) = a - bi}$$

O autor conclui, assim, que:

$$\boldsymbol{x + yi = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i} \qquad \textbf{(29)}$$

E, por consequência, de (5.3.2, I),

$$\boldsymbol{x = \frac{a}{a^2 + b^2}} \qquad e \qquad \boldsymbol{y = -\frac{b}{a^2 + b^2}}$$

Na continuação, o autor ressalta que o recíproco de $\boldsymbol{a + bi}$ é representado, geralmente, por:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a + bi}}$$

Afirma que, no caso de o módulo ser unitário, tem-se $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{1}$, isto é, o recíproco coincidirá com o conjugado:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a + bi}} = \mathbf{a - bi} \qquad \textbf{(30)}$$

Em seguida, define que o quociente de $\mathbf{z_1}$ por $\mathbf{z_2}$ é o produto de $\mathbf{z_1}$ pelo recíproco de $\mathbf{z_2}$, ou seja,

$$\frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}} = (\mathbf{a_1} + \mathbf{b_1 i})\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a_2} + \mathbf{b_2 i}} = \frac{(\mathbf{a_1} + \mathbf{b_1 i})(\mathbf{a_2} + \mathbf{b_2 i})}{\boldsymbol{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{(\mathbf{a_1 a_2} + \mathbf{b_1 b_2}) + (\mathbf{a_2 b_1} - \mathbf{a_1 b_2})\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{a_2^2 + b_2^2}}$$

Isto é,

$$\frac{\mathbf{a_1} + \mathbf{b_1 i}}{\mathbf{a_2} + \mathbf{b_2 i}} = \frac{\mathbf{a_1 a_2} + \mathbf{b_1 b_2}}{\boldsymbol{a_2^2 + b_2^2}} + \frac{\mathbf{a_2 b_1} - \mathbf{a_1 b_2}}{\boldsymbol{a_2^2 + b_2^2}}\, i \qquad \textbf{(31)}$$

Na edição de 1949, 1955 e 1956, o autor muda a forma de desenvolver o quociente. A informação é a mesma, o que é alterada é a forma de apresentar os cálculos:

$$\frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}} = \mathbf{Z_1} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Z_2}} = (\mathbf{a_1} + \mathbf{b_1 i})\left(\frac{\mathbf{a_2}}{\boldsymbol{a_2^2 + b_2^2}} - \frac{\mathbf{b_2}}{\boldsymbol{a_2^2 + b_2^2}}\boldsymbol{i}\right) = \frac{(\mathbf{a_1 a_2} + \mathbf{b_1 b_2}) + (\mathbf{a_2 b_1} - \mathbf{a_1 b_2})\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{a_2^2 + b_2^2}}$$

Desse resultado, o autor chega à expressão **(31)**. Na sequência, as edições de 1949, 1955 e 1956 apresentam uma observação sobre uma forma de abreviação em que é possível obter, segundo o autor, o quociente com facilidade: basta multiplicar $\mathbf{Z_1}$ e o divisor $\mathbf{Z_2}$ pelo conjugado deste. A seguinte expressão é apresentada:

$$\frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}} = \frac{\mathbf{a_1} + \mathbf{b_1 i}}{\mathbf{a_2} + \mathbf{b_2 i}} = \frac{(\mathbf{a_1} + \mathbf{b_1 i})(\mathbf{a_2} - \mathbf{b_2 i})}{(\mathbf{a_2} + \mathbf{b_2 i})(\mathbf{a_2} - \mathbf{b_2 i})} = \frac{(\mathbf{a_1 a_2} + \mathbf{b_1 b_2}) + (\mathbf{a_2 b_1} - \mathbf{a_1 b_2})\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{a_2^2 + b_2^2}}$$

Apresentam-se, assim, diferentes caminhos para se obter a mesma informação: o quociente de $\mathbf{Z_1}$ por $\mathbf{Z_2}$.

Nesse momento, as edições voltam a convergir e apresentam um exemplo que calcula o quociente de $\mathbf{7-\boldsymbol{i}}$ por $\mathbf{3-4\boldsymbol{i}}$:

$$\frac{\mathbf{7-\boldsymbol{i}}}{\mathbf{3-4\boldsymbol{i}}}=\frac{(\mathbf{7-\boldsymbol{i}})(\mathbf{3+4\boldsymbol{i}})}{(\mathbf{3-4\boldsymbol{i}})(\mathbf{3+4\boldsymbol{i}})}=\frac{\mathbf{25+25\boldsymbol{i}}}{\mathbf{25}}=\mathbf{1+\boldsymbol{i}}$$

Após o exemplo, o autor faz, nas quatro edições analisadas, uma consideração importante: ao dividir $\mathbf{Z_1}$ por $\mathbf{Z_2}$, devemos ter $\mathbf{Z_2 \neq 0}$, “isto é¸ $\boldsymbol{a^2+b^2 \neq 0}$, ou melhor, $\boldsymbol{\varrho_2 \neq 0}$**”** (1944, p. 173). O autor não indica, mas o $\boldsymbol{a}$ e o $\boldsymbol{b}$ mencionados são relativos ao $\mathbf{Z_2}$**,** ou seja, $\mathbf{a_2}$ e $\mathbf{b_2}$.

Assim, ele finaliza a seção esclarecendo a condição para que o quociente seja real: $\mathbf{a_2b_1-a_1b_2=0}$ e, portanto:

$$\frac{\mathbf{a_1}}{\mathbf{a_2}}=\frac{\mathbf{b_1}}{\mathbf{b_2}} \tag{32}$$

5.3.21 Módulo e argumento do produto e do quociente

Considerando $\mathbf{Z_1=\varrho_1(\cos\vartheta_1+i\,sen\,\vartheta_1)},\ \mathbf{Z_2=\varrho_2(\cos\vartheta_2+i\,sen\,\vartheta_2)},\dots,\mathbf{Z_m=\varrho_m(\cos\vartheta_m+i\,sen\,\vartheta_m)}$, o autor demonstra, nas quatro edições analisadas, que: “*o módulo de um produto é igual ao produto dos módulos dos fatores; o argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores*” (1949, p. 155).

Primeiramente, o autor apresenta os cálculos para dois fatores:

$$\mathbf{Z_1Z_2=\varrho_1\varrho_2[(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2-sen\,\vartheta_1 sen\,\vartheta_2)+\boldsymbol{i}\,(sen\,\vartheta_1\cos\vartheta_2+sen\,\vartheta_2\cos\vartheta_1)]=\varrho_1\varrho_2[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)+\boldsymbol{i}\,sen(\vartheta_1+\vartheta_2)]} \tag{33}$$

Na sequência, generaliza o resultado. Admitindo que seja verdadeiro para $\boldsymbol{m-1}$, o autor afirma que:

$$\mathbf{Z_1Z_2\dots Z_{m-1}=\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{m-1}[\cos(\boldsymbol{\vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_{m-1}})+\boldsymbol{i}\,sen\,(\boldsymbol{\vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_{m-1}})]}$$

Mostra, na sequência, que será verdadeiro também para $\boldsymbol{m}$ fatores. Multiplicando por $\mathbf{Z_m}$, obtém-se:

$$\mathbf{Z_1Z_2\dots Z_{m-1}Z_m=\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{m-1}\varrho_m[\cos(\boldsymbol{\vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_{m-1}})\cos\boldsymbol{\vartheta_m}-\ sen\,(\boldsymbol{\vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_{m-1}})\boldsymbol{sen\vartheta_m}]+\boldsymbol{i}[sen\,(\boldsymbol{\vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_{m-1}})\cos\boldsymbol{\vartheta_m}+\ \boldsymbol{sen\vartheta_m}os(\boldsymbol{\vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_{m-1}})]}$$

Isto é,

$$\mathbf{Z_1Z_2\dots Z_m=\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_m[\cos(\boldsymbol{\vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_m})+\boldsymbol{i}\,sen\,(\boldsymbol{\vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_{m-1}})]} \tag{34}$$

Uma vez que a propriedade é verdadeira para dois fatores, como mostra **(33)**, fica provado, segundo o autor, que a fórmula **(34)** é a geral, o que confirma o enunciado.

Na determinação do recíproco de um número $\mathbf{Z_1}$, tem-se:

$$\frac{\mathbf{1}}{z_1} = \frac{\mathbf{1}}{\varrho_1(\cos\vartheta_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\vartheta_1)} = \frac{\mathbf{1}}{\varrho_1}(\cos\vartheta_1 - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\vartheta_1) \qquad \textbf{(35)}$$

Logo, o quociente de $\mathbf{Z_2}$ por $\mathbf{Z_1}$ será:

$$\frac{\mathrm{Z_2}}{\mathrm{Z_1}} = \mathbf{Z_2}\frac{1}{\mathrm{Z_1}} = \varrho_2(\cos\vartheta_2 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\vartheta_2)\frac{1}{\varrho_1}(\cos\vartheta_1 - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\vartheta_1) = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}[(\cos\vartheta_2\cos\vartheta_1 + \mathrm{sen}\vartheta_2\mathrm{sen}\vartheta_1) + i\,(\mathrm{sen}\vartheta_2\cos\vartheta_1 - \mathrm{sen}\vartheta_1\cos\vartheta_2)]$$

Isto é,

$$\frac{\mathbf{Z_2}}{\mathbf{Z_1}} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}[\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) + i\,\mathrm{sen}(\vartheta_2 - \vartheta_1)] \qquad \textbf{(36)}$$

O que demonstra que: “*o módulo do quociente de dois números complexos é igual ao quociente do módulo do primeiro pelo do segundo; o argumento, igual à diferença entre o argumento do primeiro e o do segundo*” (1944, p. 174, grifos do autor). O autor acrescenta ainda, em nota de rodapé, que essas operações deverão ser realizadas sobre os argumentos principais, dispostos depois da parcela $\mathbf{2}k\pi$, evitando, assim, os resultados negativos.

Ele finaliza a seção considerando que será sempre suposto $\mathbf{Z_1} \neq \mathbf{0}$, isto é, $\varrho_1 \neq \mathbf{0}$ (5.3.20).

Nas edições de 1949, 1955 e 1956, o autor salienta que “no cálculo do recíproco $\mathbf{z}\,(\varrho, \vartheta)$, de um número $z_1\,(\varrho_1, \vartheta_1)$ teremos por definição $\mathbf{z}z_1 = \mathbf{1}$” (1949, p. 156). Afirma que, sendo 1 o módulo da unidade e $\mathbf{2}k\pi$ o argumento, “[...] de acordo com o que acabamos de ver sobre o produto, poderemos escrever: $\varrho\varrho_1 = \mathbf{1}$ e $\vartheta + \vartheta_1 = \mathbf{2}k\pi$, isto é, $\varrho = \frac{1}{\varrho_1}$ e $\vartheta = -\vartheta_1 + \mathbf{2}k\pi$” (1949, p. 156). Dessa afirmação, conclui que:

$$\frac{\mathbf{1}}{z_1} = \frac{\mathbf{1}}{\varrho_1}[\cos\,(-\vartheta_1) + i\,\mathrm{sen}\,(-\vartheta_1)] = \frac{\mathbf{1}}{\varrho_1}(\cos\vartheta_1 - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\vartheta_1)$$

Na sequência, calcula o quociente de $\mathbf{Z_2}$ por $\mathbf{Z_1}$ para chegar à mesma conclusão **(36)** que a edição de 1944.

5.3.22 Observação

Nessa seção, presente nas quatro edições analisadas, o autor comenta que, em **(34)**, o parêntese do segundo membro será sempre diferente de zero, porque não poderão ser nulos, simultaneamente, o seno e o cosseno. Acrescenta ainda que, para o produto se anular, um dos módulos, pelo menos, deverá ser nulo, ou seja, um dos fatores deverá ser zero. E a recíproca é, evidentemente, verdadeira.

5.3.23 Interpretação geométrica da multiplicação e da divisão

A interpretação geométrica da multiplicação e da divisão é apresentada apenas na edição de 1944. Essa foi uma das seções retiradas da obra após as sugestões enviadas pelos professores de todo o país, como consta na advertência das edições de 1946 e 1949.

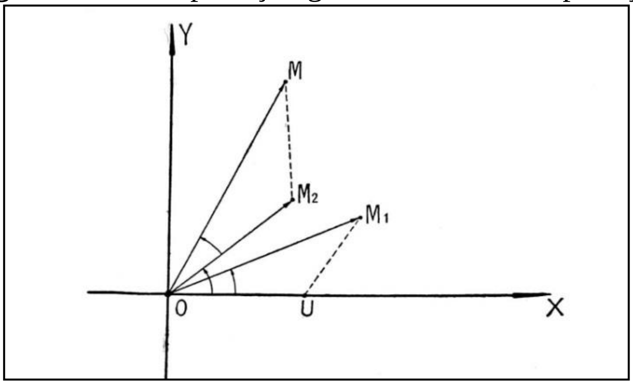
Considerando a representação geométrica de Gauss, pode-se estabelecer, segundo o autor, operações gráficas que determinam, com facilidade, o produto ou o quociente de dois números complexos.

Tomando $\boldsymbol{M_1}$ e $\boldsymbol{M_2}$, respectivamente, as imagens dos números $\boldsymbol{z_1}$ e $\boldsymbol{z_2}$ e marcando sobre o eixo $\boldsymbol{Ox}$ o ponto $\boldsymbol{U}$, de abscissa unitária, o autor constrói sobre $\boldsymbol{OM_2}$ um triângulo semelhante a $\boldsymbol{OUM_1}$.

Assim, $\boldsymbol{\widehat{UOM_1}}$ = $\boldsymbol{\widehat{M_2OM}}$ e, por consequência, $\boldsymbol{\widehat{UOM} = \widehat{UOM_1} + \widehat{UOM_2}}$. Na sequência, o autor chama de $\boldsymbol{\vartheta}$ o argumento correspondente a $\boldsymbol{M}$ e obtém: $\boldsymbol{\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2}$. Além disso, pela semelhança dos triângulos considerados, obtém:

$$\boldsymbol{\frac{OM}{OM_1} = \frac{OM_2}{OU}}$$

Figura 41 – Interpretação geométrica da multiplicação

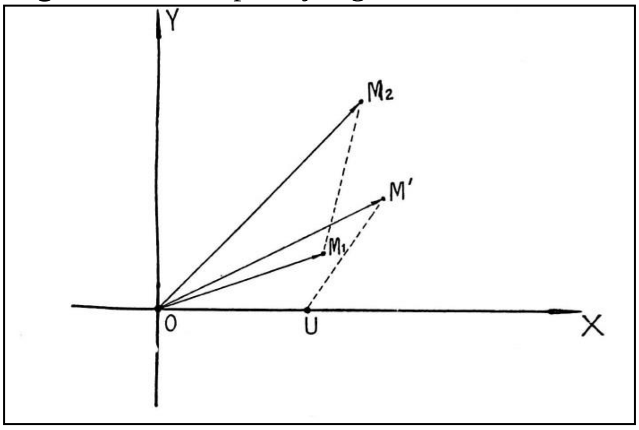


Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1944)

Chamando de $\boldsymbol{\varrho}$ o módulo do número cujo afixo é $\boldsymbol{M}$[78], o autor obtém $\boldsymbol{\varrho = \varrho_1\varrho_2}$, pois $\boldsymbol{OU = 1}$. Segundo Haroldo L. da Cunha, "compreende-se imediatamente a construção necessária à determinação do quociente" (1944, p. 176).

[78] O autor diz "ϱ o módulo do afixo de M" devido a sua definição não convencional de afixo.

Figura 42 – Interpretação geométrica da divisão



Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1944)

Tomando, novamente, os pontos $\boldsymbol{M_1}$ e $\boldsymbol{M_2}$, o autor traça sobre $\boldsymbol{OU}$ um triângulo semelhante a $\boldsymbol{OM_1M_2}$.

Segundo o autor, “pela construção anterior $\boldsymbol{z_2}$ surgirá como o produto de $\boldsymbol{z_1}$ pelo afixo $\boldsymbol{M'}$ de $\boldsymbol{z'}$[79]. Portanto, $\boldsymbol{z'} = \frac{\boldsymbol{z_2}}{\boldsymbol{z_1}}$” (1944, p. 176).

5.3.24 Potenciação. Fórmula de[80] Moivre.

A seção, presente nas quatro edições analisadas, é iniciada com a explicação do autor de que, para números complexos, na forma binomial, a potenciação de expoente inteiro resume-se na aplicação formal do desenvolvimento do binômio de Newton. A explicação é seguida pelo exemplo abaixo:

$$\boldsymbol{(4-3i)^3 = 64 - 144i + 108i^2 - 27i^3 = 64 - 144i - 108 + 27i = -44 - 117i}$$

Afirma que, inclusive, pode-se operar com expoentes negativos:

$$\boldsymbol{(1-2i)^{-4} = \frac{1}{(1-2i)^4} = \frac{1}{1-8i+24i^2-32i^3+16i^4} = \frac{1}{1-8i-24+32i+16} = \frac{1}{-7+24i}}$$

Aplicando a esse resultado as considerações sobre números recíprocos (5.3.20), o autor obtém:

$$\boldsymbol{\frac{1}{-7+24i} = -\frac{7}{49+576} - \frac{24}{49+576}i}$$

---

[79] Por conta da definição incomum de afixo, o autor diz “$\boldsymbol{z'}$ de $\boldsymbol{M'}$". Não sabemos dizer se esse erro foi diagnosticado e alterado, pois a seção “Interpretação geométrica da multiplicação e da divisão” não faz parte das edições de 1949 e 1956.

[80] Optamos por manter a escrita de acordo com o apresentado no livro. O correto seria: De Moivre, pois se refere a Abraham De Moivre.

Isto é,

$$(\mathbf{1}-\mathbf{2}\boldsymbol{i})^{-\mathbf{4}} = -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{625}}-\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{625}}\boldsymbol{i}$$

Cabe observar que essa igualdade, na edição de 1944, apresenta um erro editorial ou de cálculo. No lugar de 24, aparece apenas 4. Na edição de 1949, a expressão é apresentada corretamente.

Na sequência, o autor afirma que, por convenção, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi})^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$. Considerando, entretanto, a fórmula trigonométrica dos números complexos, o estudo da potenciação, segundo Haroldo L. da Cunha, apresenta uma série de resultados interessantes, que serão tratados a seguir.

Fazendo em **(38):**

$$\boldsymbol{\vartheta_1 = \vartheta_2 = \cdots = \vartheta_m = \vartheta}$$

$$\boldsymbol{\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_m = \varrho}$$

resulta, como consequência[81]:

$$\boldsymbol{z_1 = z_2 = \cdots = z_m = z}$$

e, portanto, segundo o autor,

$$\boldsymbol{z^m = \varrho^m[\cos(m\vartheta) + i\,\mathrm{sen}(m\vartheta)]} \qquad \textbf{(37)}$$

Essa relação define a potência n-gésima de um número complexo $\boldsymbol{z = \varrho(cos\,\vartheta + i\,sen\,\vartheta)}$ para $\boldsymbol{m}$ inteiro e positivo.

O autor comenta que, supondo $\boldsymbol{\varrho = 1}$, tem-se a clássica fórmula de Moivre[82]:

$$\boldsymbol{(\cos\vartheta + i\,sen\,\vartheta)^m = \cos(m\vartheta) + i\,\mathrm{sen}(m\vartheta)} \qquad \textbf{(38)}$$

Na sequência, mostra que **(38)** é verdadeira para $\boldsymbol{m}$ inteiro e negativo. Supondo $\boldsymbol{m < 0}$:

$$\boldsymbol{(\cos\vartheta + i\,sen\,\vartheta)^m = \frac{1}{(\cos\vartheta+i\,sen\,\vartheta)^{|m|}} = \frac{1}{cos(|m|\vartheta)+i\,sen(|m|\vartheta)} = \frac{1}{\cos(m\vartheta)-i\,\mathrm{sen}(m\vartheta)}}$$

Portanto, de acordo com **(35)**, tem-se, de acordo com o autor:

$$\boldsymbol{(\cos\vartheta + i\,sen\,\vartheta)^m = \cos(m\vartheta) + i\,\mathrm{sen}(m\vartheta)}$$

"o que demonstra a validade da fórmula para $\boldsymbol{m} < 0$" (1944, p. 178). O autor ressalta que a verificação de $\boldsymbol{m = 0}$ é imediata. Apresenta, na sequência, dois exercícios (resolvidos):

Exercício I – Calcular $\left(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{i}\right)^{\mathbf{9}}$

---

[81] O autor observa, a partir de uma nota de rodapé, que a recíproca não seria verdadeira. A fatores iguais corresponderiam módulos iguais e argumentos côngruos (mod 2π).

[82] Publicada, segundo o autor, em sua *Miscellanea analytica*, Londres, 1730.

Comenta que, para expoentes elevados, será sempre preferível usar a fórmula **(35)**. De um exercício já resolvido do livro, vem que:

$$\mathbf{1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + +i\ sen\frac{\pi}{3}\right)}$$

Portanto:

$$\mathbf{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{9} = 2^{9}\left[\cos\left(9\times\frac{\pi}{3}\right) + i\ sen\left(9\times\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2^{9}(\cos 3\pi + i\ sen\ 3\pi) = -2^{9}}$$

Isto é:

$$\mathbf{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{9} = -512}$$

Exercício II – Calcular $\mathbf{(-1+i)^{-10}}$

Tomando o argumento principal:

$$\mathbf{-1+i = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\ sen\frac{3\pi}{4}\right)}$$

O autor obtém:

$$\mathbf{(-1+i)^{-10} = 2^{-5}\left[\cos\left(-10\times\frac{3\pi}{4}\right) + i\ sen\left(-10\times\frac{3\pi}{4}\right)\right] =}$$

$$\mathbf{= 2^{-5}\left[\mathit{cos}\frac{15\pi}{2} - i\ \mathit{sen}\frac{15\pi}{2}\right] = 2^{-5}\ i}$$

Portanto,

$$\mathbf{(-1+i)^{-10} = \frac{1}{32}i}$$

Essa é a última seção presente nas edições de 1955 e 1956 no que diz respeito aos números complexos. Os demais tópicos apresentados no capítulo discutem o conceito de polinômios. As edições de 1955 e 1956 apresentam uma lista de exercícios entre essas seções. A lista, reduzida, é composta por alguns exercícios que compõem as edições de 1944 e 1949. As respostas desses exercícios apresentam-se após o enunciado. No decorrer do capítulo, teceremos alguns comentários sobre esses exercícios.

5.3.25 Radiciação

Essa seção compõe as edições de 1944 e 1949. Nela, Haroldo L. da Cunha afirma que, por definição, a raiz n-gésima de $\boldsymbol{a+bi}$ ($\boldsymbol{n}$ inteiro e positivo) é o número cuja potência de expoente $\boldsymbol{n}$ é $\boldsymbol{a+bi}$. Representa a raiz n-gésima por:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a+bi}}\ \text{ou}\ \boldsymbol{(a+bi)^{\frac{1}{n}}}$$

O termo “n-gésima” nos causou algumas estranhezas. Atualmente, utiliza-se a expressão n-ésima. Consultando o manuscrito *Lições de Matemática Professadas no Curso Complementar (Curso de Engenharia) do Colégio Pedro II* do autor Euclides Roxo, notamos que ele também utiliza o termo “n-gésima”. Já o autor Gelson Iezzi, em sua obra de 1977, *Fundamentos de Matemática Elementar,* utiliza o termo “n-ésima”, o que nos faz acreditar que, nas décadas de 1940 e 1950, o termo n-gésima era utilizado para se referir ao n-ésimo termo.

Voltando às edições de 1944 e 1949, o autor afirma que “o problema só poderá ser tratado de um modo geral considerando-se a representação trigonométrica” (1949, p. 160). Ressalta, por meio de uma nota de rodapé, que com o exercício o leitor poderá estudar a determinação direta de $\boldsymbol{a+bi}$ e sugere a obra *Leçons d’algèbre* de C. Bourlet (1921).

Tomando $\boldsymbol{z = \varrho(\cos\vartheta + i\,sen\,\vartheta)}$ e sendo $\boldsymbol{r(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)}$ sua raiz n-gésima. Pela definição, o autor afirma que:

$$\boldsymbol{\varrho(\cos\vartheta + i\,sen\,\vartheta) = [r(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)]^n}$$

E, de acordo com **(37),**

$$\boldsymbol{\varrho(\cos\vartheta + i\,sen\,\vartheta) = r^n(cos\,n\alpha + i\,sen\,n\alpha)}$$

Igualdade que exige:

$$\boldsymbol{\varrho = r^n}$$

$$\boldsymbol{n\alpha \equiv \vartheta \qquad |2\pi|}$$

Ao apresentar a expressão anterior, o autor, em nota de rodapé, recomenda que os leitores confiram o capítulo de trigonometria do segundo volume da série *Matemática 2º ciclo*, onde aborda “arcos de mesma origem e extremidade comum e arcos côngruos”. A representação apresentada diz que $\boldsymbol{n\alpha}$ é congruente a $\boldsymbol{\vartheta}$ módulo $\boldsymbol{2\pi}$.

Na sequência, diz que se pode tomar então:

$$\boldsymbol{r = \varrho^{\frac{1}{n}}} \tag{39}$$

e

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\vartheta}{n}} \tag{40}$$

desde que $\boldsymbol{\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi}$ **(5.3.9)**.

Segundo o autor, é evidente que a raiz n-gésima considerada em **(39)** é a aritmética. Acrescenta, em nota de rodapé, que, de fato, o módulo $\boldsymbol{r}$ é um número aritmético.

Dessa forma:

$$\sqrt[n]{\varrho(\cos\vartheta + i\,sen\,\vartheta)} = \varrho^{\frac{1}{n}}\left(cos\frac{\vartheta_0 + 2k\pi}{n} + i\,sen\frac{\vartheta_0 + 2k\pi}{n}\right) \qquad \textbf{(41)}$$

Tomando, sucessivamente, $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)}$, encontra os argumentos que fornecem $\boldsymbol{n}$ valores distintos da raiz n-gésima.

$$\frac{\vartheta_0}{n}, \frac{\vartheta_0 + 2\pi}{n}, \frac{\vartheta_0 + 4\pi}{n}, \ldots, \frac{\vartheta_0 + 2(n-1)\pi}{2} \qquad \textbf{(42)}$$

Na sequência, demonstra que, além desses, não poderão ser obtidos outros valores.

A duas raízes iguais, corresponderão argumentos satisfazendo a relação:

$$\frac{\vartheta_0 + 2k'\pi}{n} - \frac{\vartheta_0 + 2k\pi}{n} = m\,.\,2\pi$$

Sendo $\boldsymbol{m\,.\,2\pi}$ um múltiplo qualquer de $\boldsymbol{2\pi}$ (informação presente em uma nota de rodapé), pode afirmar também que:

$$\frac{k' - k}{2}.\,2\pi = m\,.\,2\pi$$

O autor ressalta que essa condição é válida apenas quando $\boldsymbol{k' - k}$ for um múltiplo de $\boldsymbol{n}$, isto é, $\boldsymbol{k' - k = m.n}$ e, portanto,

$$k' = m.n + k \qquad \textbf{(43)}$$

Supondo $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)}$, qualquer número inteiro, segundo Haroldo L. da Cunha, poderá exprimir-se de acordo com **(43)**. Portanto, esses $\boldsymbol{n}$ valores atribuídos a $\boldsymbol{k}$ fornecem a totalidade das raízes distintas. Diz, então, de um modo geral, que "*todo número admite* $\boldsymbol{n}$ *raízes distintas de n-gésima ordem*" (1949, p. 161, grifos do autor). Conclui dizendo que chama de "raiz principal" a que corresponde ao argumento principal $\boldsymbol{\vartheta_0}$ e apresenta um exercício (resolvido) em que pede que se calcule $\sqrt[7]{\boldsymbol{1 - i}}$.

Da expressão **(9)**, vem:

$$1 - i = 2^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]$$

Portanto,

$$\sqrt[7]{1 - i} = 2^{\frac{1}{14}}\left[cos\,\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{7} + i\,sen\,\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{7}\right] = 2^{\frac{1}{14}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7}\right)\right]$$

Para $k = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5$ *e* 6. Chamando de $\boldsymbol{z_1, z_2, \ldots, z_6}$ os valores correspondentes, tem-se que:

$$z_1 = 2^{\frac{1}{14}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right) \qquad z_4 = 2^{\frac{1}{14}}\left(\cos\frac{31\pi}{28} + i\,\mathrm{sen}\frac{31\pi}{28}\right)$$

$$z_2 = 2^{\frac{1}{14}}\left(\cos\frac{15\pi}{28} + i\,\mathrm{sen}\frac{15\pi}{28}\right) \qquad z_5 = 2^{\frac{1}{14}}\left(\cos\frac{39\pi}{28} + i\,\mathrm{sen}\frac{39\pi}{28}\right)$$

$$z_3 = 2^{\frac{1}{14}}\left(\cos\frac{23\pi}{428} + i\,\mathrm{sen}\frac{23\pi}{28}\right) \qquad z_6 = 2^{\frac{1}{14}}\left(\cos\frac{47\pi}{28} + i\,\mathrm{sen}\frac{47\pi}{28}\right)$$

$$z_7 = 2^{\frac{1}{14}}\left(\cos\frac{55\pi}{28} + i\,\text{sen}\frac{55\pi}{28}\right)$$

O autor finaliza o exercício afirmando que “desenvolvendo os segundos membros, obteríamos as raízes referidas, sob *forma binomial*” (1949, p. 162, grifos do autor).

5.3.26 Interpretação geométrica; divisão da circunferência

Observando nas edições de 1944 e 1949 que, na determinação das raízes n-gésimas de um número qualquer, os argumentos que correspondem, respectivamente, a $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)}$, o autor escreve:

$$\frac{\vartheta_0}{n}, \frac{\vartheta_0}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\vartheta_0}{n} + 2.\frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{\vartheta_0}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n},$$

e conclui que as imagens dessas raízes são, precisamente, os pontos que dividem a circunferência, de centro na origem e de raio $\boldsymbol{\varrho^{\frac{1}{n}}}$, em $\boldsymbol{n}$ partes iguais.

Acrescenta que bastará ver que o módulo é sempre $\boldsymbol{\varrho^{\frac{1}{n}}}$ e que o argumento se obtém acrescentando ao arco $\frac{\vartheta_0}{n}$ sucessivas parcelas iguais a $\frac{2\pi}{n}$, isto é, iguais à n-gésima parte da referida circunferência.

Para exemplificar o que diz, o autor toma $\boldsymbol{\sqrt[6]{-1+i}}$. Passando para a representação trigonométrica, obtém:

$$\sqrt[6]{-1+i} = \sqrt[6]{2^{\frac{1}{2}}\left[cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\,sen\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]} =$$

$$= 2^{\frac{1}{12}}\left[cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}\right)\right] \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, 4 \; e \; 5$$

Assim, o autor traça a circunferência de raio $\boldsymbol{2^{\frac{1}{12}}}$ e marca, inicialmente, o arco $\boldsymbol{\vartheta_0 = \frac{\pi}{8}}$. Segundo ele, $\boldsymbol{M_0}$ é o afixo[83] da raiz principal, pois corresponde a $\boldsymbol{k = 0}$.

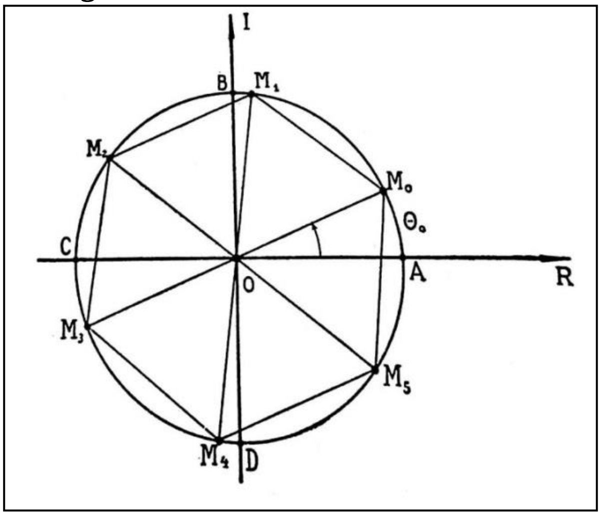
$$\widehat{AM_0} = \vartheta_0 = \frac{\pi}{8}$$

$$\widehat{M_0M_1} = \widehat{M_0M_1} = \cdots = \widehat{M_5M_0} = \frac{\pi}{3}$$

$$OM_0 = OM_1 = \cdots = OM_5 = 2^{\frac{1}{12}}$$

[83] Nas palavras do autor, levando em consideração a definição de afixo proposta no livro: “o afixo desse ponto M_0 é a raiz principal, pois corresponde a $k = 0$".

Figura 43 – Circunferência de raio $2^{\frac{1}{12}}$



Fonte: *Matemática 2º ciclo* (1944)

Marcando, sucessivamente, arcos iguais à sexta parte da circunferência, isto é, iguais a $\frac{\pi}{3}$, Haroldo Lisboa da Cunha afirma que se chega às imagens $M_1, M_2, \ldots, M_5$ das raízes restantes (vértices de um hexágono regular inscrito). O autor finaliza a seção destacando, em uma nota de rodapé, que poderá ser adotado, para a definição de números complexos, o próprio conceito geométrico. Atenta ao exemplo "de um dos mais interessantes trabalhos elementares sobre o domínio complexo", destacando a obra *La géometrié et les imaginaires* de Borel e Deltheil (1932).

5.3.27 Extensão da fórmula de Moivre ao caso do expoente racional

Tomando por definição, nas edições de 1944 e 1949:

$$[\varrho(\cos\vartheta + i \text{ sen } \vartheta)]^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\varrho(\cos\vartheta + i \text{ sen } \vartheta)^m} \tag{44}$$

O autor afirma que, para $\varrho = 1$:

$$(\cos\vartheta + i \text{ sen } \vartheta)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\vartheta}{n} + i \text{ sen } \frac{m\vartheta}{n}$$

Isto é:

$$(\cos\vartheta + i \text{ sen } \vartheta)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\vartheta + i \text{ sen } \frac{m}{n}\vartheta \tag{45}$$

Onde $\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi$ e $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. A fórmula de Moivre é, portanto, segundo ele, verdadeira para um número racional qualquer $\frac{m}{n}$.

5.3.28 Raízes n-gésimas dos números reais

Haroldo L. da Cunha afirma, nas edições da década de 1940, que "as $\boldsymbol{n}$ raízes n-gésimas de um número real $\boldsymbol{a}$ obtêm-se pelo método geral, visto antes, após exprimi-lo trigonometricamente[84]" (1949, p. 164, destaque nosso).

Segundo o autor, para que também sejam reais, devemos ter:

$$\frac{\boldsymbol{\vartheta}}{\boldsymbol{n}} \equiv \mathbf{0} \qquad |\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}| \tag{46}$$

$$\frac{\boldsymbol{\vartheta}}{\boldsymbol{n}} \equiv \boldsymbol{\pi} \qquad |\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}| \tag{47}$$

A **(46)** corresponderá às positivas; a **(47)**, às negativas.

Sendo $\boldsymbol{\varrho}$ o valor absoluto (módulo) de $\boldsymbol{a}$, o autor examina, quanto à determinação das raízes reais, as duas hipóteses já assinaladas.

1º) $\boldsymbol{a} > 0$. Portanto: $\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi}$ e:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\varrho}^{\frac{1}{n}}\left(\mathbf{cos}\ \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k\pi}}{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{i}\ \mathbf{sen}\ \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k\pi}}{\boldsymbol{n}}\right) \tag{48}$$

Para $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})$.

Se $\boldsymbol{n}$ for par, a condição **(46)** será satisfeita para $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$ e a **(47)** para $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}$, isto é, "*os números positivos, quando o índice é par, admitem duas raízes reais e de sinais contrários*" (1949, p. 165, grifos do autor).

Para $\boldsymbol{n}$ ímpar, a condição **(46)** será ainda satisfeita para $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$, mas nenhum valor de $\boldsymbol{k}$ satisfará a condição **(47)**. Poderemos afirmar, então, que: "*os números positivos quando o índice é ímpar, só admitem uma raiz real, essa raiz é sempre positiva*" (1949, p. 165, grifos do autor).

2º) $\boldsymbol{a} < 0$. Portanto: $\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{2}(\boldsymbol{k} + \mathbf{1})\boldsymbol{\pi}$ e:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\varrho}^{\frac{1}{n}}\left(\mathbf{cos}\ \frac{\mathbf{2}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{i}\ \mathbf{sen}\ \frac{\mathbf{2}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}}\right) \tag{49}$$

Se $\boldsymbol{n}$ for par, as condições **(46)** e **(47)** não poderão ser satisfeitas, isto é, "*os números negativos, quando o índice é par, não admitem raízes reais*" (1949, p. 165, grifos do autor).

Supondo, entretanto, $\boldsymbol{n}$ ímpar, poderemos tomar $\mathbf{2}(\boldsymbol{k} + \mathbf{1}) = \boldsymbol{n}$, isto é, $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. A condição **(47)** será satisfeita. Portanto, "*os números negativos admitem sempre uma raiz real, quando o índice é ímpar; essa raiz é sempre negativa*" (1949, p. 165, grifos do autor).

[84] Na edição de 1949, acrescenta-se a seguinte informação: para $a > 0$ virá $\vartheta_0 = 0$ e para $a < 0$, $\vartheta_0 = \pi$.

5.3.29 Observação

Essa observação, presente nas edições de 1944 e 1949, ressalta que nenhuma raiz de número complexo será real, porque qualquer potência de número real só pode ser real.

5.3.30 Raízes n-gésimas da unidade

Nessa seção, presente nas edições de 1944 e 1949, Haroldo L. da Cunha afirma que a fórmula **(48)** dará em particular para $\boldsymbol{a = 1}$:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n}} \qquad \textbf{(50)}$$

Representando por $\boldsymbol{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}}$, seus valores, respectivamente, para $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)}$, chega a $\boldsymbol{\varepsilon_0 = 1}$ como raiz principal.

Observa, ainda, que, de acordo com **(37)**, tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}\right)^k = \varepsilon_1^k} \qquad \textbf{(51)}$$

fórmula que permite demonstrar a relação fundamental:

$$\boldsymbol{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1} = 0} \qquad \textbf{(52)}$$

verdadeira para $n \neq 1$. Com efeito, de **(51)** virá:

$$\boldsymbol{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1} \equiv 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_1^{n-1} \equiv \frac{1 - \varepsilon_1^n}{1 - \varepsilon_1}}$$

Sendo $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ uma raiz n-gésima da unidade, tem-se $\boldsymbol{\varepsilon_1^n = 1}$, isto é, $\boldsymbol{\varepsilon_1^n - 1 = 0}$. Mas, como $\boldsymbol{\varepsilon_1 \neq 1}$, será nula a razão acima escrita, o que demostra **(52)**.

Se $\boldsymbol{n}$ for par, tomando $\boldsymbol{k = \frac{n}{2}}$ (5.3.28), virá uma segunda raiz real $\boldsymbol{\varepsilon_{\frac{n}{2}} = -1}$**.**

O autor observa, ainda, que as raízes complexas da unidade serão duas a duas, conjugadas. Logo:

$$\boldsymbol{\varepsilon_{n-k} = \cos\frac{2(n-k)\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2(n-k)\pi}{n} = cos\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right) + i\,sen\,\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right) =}$$
$$\boldsymbol{\cos\frac{2k\pi}{n} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n}}$$

Esse resultado comparado com **(51)** mostra que $\boldsymbol{\varepsilon_k}$ e $\boldsymbol{\varepsilon_{n-k}}$ serão números complexos conjugados. O autor segue afirmando que "a interpretação geométrica, que, para as raízes n-gésimas da unidade conduziria a uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1, põe imediatamente em evidência tal resultado" (1949, p. 167).

Por fim, o autor comenta, em nota de rodapé, que pode ser adotada, ainda para as raízes n-gésimas da unidade, a forma exponencial:

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Na sequência, o seguinte exercício é resolvido: Calcular $\sqrt[n]{1}$.

1º) para $n = 2$

$\sqrt{1} = \cos\frac{2k\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{2} \quad (k = 0, 1)$, isto é, $\varepsilon_0 = 1$ e $\varepsilon_1 = -1$.

2º) para $n = 3$

$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3} \qquad (k = 0, 1, 2)$, isto é:

$$\varepsilon_0 = 1$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

3º) para $n = 4$

$$\sqrt[4]{1} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{4} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$\varepsilon_0 = 1$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i$$

$$\varepsilon_2 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1$$

$$\varepsilon_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -i$$

5.3.31 Raízes primitivas da unidade

Essa seção compõe apenas a edição de 1944, assim como a seção (5.3.32). Nela, o autor define que ε_k é uma raiz primitiva de ordem n, quando:

$$\varepsilon_k^p \neq 1 \tag{53}$$

para $p < n$, isto é, quando não coincide com outra raiz da unidade de ordem p inferior a n. Afirma que, para que ε_k represente uma raiz primitiva, é necessário e suficiente que k e n sejam primos entre si.

Com efeito, se k e n forem primos entre si, tem-se:

$$\frac{2k\pi}{n} \neq \frac{2k'\pi}{p}$$

para $p < n$, vice-versa. Portanto:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \neq \cos\frac{2k'\pi}{p} + i \operatorname{sen} \frac{2k'\pi}{p}$$

o que demonstra, segundo o autor, não ser também $\boldsymbol{\varepsilon_k}$ raiz de ordem $\boldsymbol{p}$. Assim, para $\boldsymbol{n = 10}$, serão primitivas as raízes correspondentes a $\boldsymbol{k = 1, 3, 7}$ *e* $\boldsymbol{9}$, pois esses são os números inferiores a $\boldsymbol{n}$ e primos com $\boldsymbol{n}$. "Vemos então que $\varphi(n)$ representará, para a ordem n, o número de raízes primitivas" (1944, p. 187).

5.3.32 Cálculo de raízes n-gésimas em geral, por intermédio das raízes primitivas

Inicialmente, o autor observa que os resultados das operações racionais sobre raízes n-gésimas da unidade serão sempre raízes n-gésimas da unidade.

Bastará ver, por exemplo, que:

$$\boldsymbol{\varepsilon_i^n . \varepsilon_j^n = (\varepsilon_i \varepsilon_j)^n = 1}$$

$$\boldsymbol{\frac{\varepsilon_i^n}{\varepsilon_j^n} = \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\right)^n = 1}$$

$$\boldsymbol{(\varepsilon_i^p)^n = (\varepsilon_i^n)^p = 1} \text{ pois, } \boldsymbol{\varepsilon_i^n = \varepsilon_j^n = 1}$$

Assim, demonstra-se, segundo Haroldo Lisboa da Cunha, que "*considerando uma raiz primitiva de ordem* $\boldsymbol{n}$*,* $\boldsymbol{\varepsilon_k}$*, suas potências:* $\boldsymbol{\varepsilon_k, \varepsilon_k^2 \varepsilon_k^3 \ldots, \varepsilon_k^n}$ *representarão a totalidade das raízes n-gésimas da unidade*" (1944, p. 187, grifos do autor).

De acordo com a observação anterior, vê-se que, de fato, representarão raízes n-gésimas. Para provar que representam a totalidade delas, o autor demonstra que as raízes serão todas distintas entre si:

se

$$\boldsymbol{\varepsilon_k^\alpha = \varepsilon_k^\beta}$$

Supondo, por exemplo, $\boldsymbol{\alpha > \beta}$, virá:

$$\boldsymbol{\varepsilon_k^\alpha - \varepsilon_k^\beta = \varepsilon_k^\beta (\varepsilon_k^{\alpha-\beta} - 1) = 0}$$

E, por consequência:

$$\boldsymbol{\varepsilon_k^{\alpha-\beta} = 1}$$

O que é absurdo: $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ sendo números da sucessão $\boldsymbol{1, 2, \ldots, n}$ tem-se $\boldsymbol{\alpha - \beta < n}$. Mas, $\boldsymbol{\varepsilon_k}$ é, por hipótese, primitiva, logo (5.3.31):

$$\boldsymbol{\varepsilon_k^{\alpha-\beta} \neq 1}$$

Assim, "o conhecimento de uma qualquer das raízes primitivas permitirá a determinação das demais raízes n-gésimas, pela formação de suas sucessivas potências" (1944, p. 188). O autor complementa, em nota de rodapé, que outras propriedades interessantes poderão ser vistas em Rey Pastor, *Análisis algebraico* (1935).

Após essas discussões, é apresentado o seguinte exemplo: calcular as raízes de 6ª ordem da unidade, por intermédio de uma raiz primitiva.

Considerando de um modo geral:

$$\boldsymbol{\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{6} = \cos\frac{k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\ \frac{k\pi}{3}}$$

Para $k = 1$ e 5, as raízes serão primitivas. Toma-se, no exemplo, $k = 5$. Desse modo, as raízes pedidas serão: $\varepsilon_5, \varepsilon_5^2, \varepsilon_5^3, \varepsilon_5^4, \varepsilon_5^5$ e ε_5^6, isto é:

$$\varepsilon_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{3} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\varepsilon_5^2 = \cos\frac{10\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{10\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{4\pi}{3} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\varepsilon_5^3 = \cos 5\pi + i\,\mathrm{sen}\,5\pi = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1$$

$$\varepsilon_5^4 = \cos\frac{20\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{20\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$\varepsilon_5^5 = \cos\frac{25\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{25\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$\varepsilon_5^6 = \cos 10\pi + i\,\mathrm{sen}\,10\pi = 1$$

5.3.33 *Observação I*

Essa seção e a observação seguinte (5.3.34) apresentam-se na edição de 1944, após as seções *Raiz Primitiva da Unidade* e *Cálculo das raízes n-gésimas em geral, por intermédio das raízes primitivas*. Na edição de 1949, elas apresentam-se logo após a seção *Raízes n-gésimas* da unidade, uma vez que as seções 5.3.32 e 5.3.31 não compõem a edição de 1949.

O autor afirma, nessa seção, que se pode obter, facilmente, as raízes de um número qualquer, complexo ou não, uma vez conhecidas as raízes n-gésimas da unidade. Com efeito, (5.3.25):

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{z} = \varrho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\vartheta_0+2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\ \frac{\vartheta_0+2k\pi}{n}\right) = \varrho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\vartheta_0}{n} + i\,\mathrm{sen}\ \frac{\vartheta_0}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\ \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

Mas esse último parêntese, para $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1),}$ representa as raízes n-gésimas da unidade. Portanto:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{z} = \varrho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\vartheta_0}{n} + i\,\mathrm{sen}\ \frac{\vartheta_0}{n}\right)\varepsilon_k} \qquad \textbf{(54)}$$

para $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)}$. As raízes serão expressas, assim, em função da raiz principal (pode-se adotar para a raiz principal a notação $\sqrt[n]{\boldsymbol{z}}$)[85] e das raízes n-gésimas da unidade.

Em particular, para um número real positivo $\boldsymbol{a}$, tem-se, segundo o autor:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\varrho^{\frac{1}{n}}\, \varepsilon_k} \qquad (\boldsymbol{k = 0, 1, 2, \dots, n-1}) \tag{55}$$

pois $\boldsymbol{\vartheta_0 = 0}$.

A edição de 1944 destaca que, ao chamar de $\boldsymbol{\varepsilon}$ uma raiz primitiva qualquer, de ordem $\boldsymbol{n}$, as raízes n-gésimas de $\boldsymbol{a}$ serão:

$$\boldsymbol{\varepsilon\varrho^{\frac{1}{n}}, \varepsilon^2\varrho^{\frac{1}{n}}, \dots, \varepsilon^n\varrho^{\frac{1}{n}}} \tag{56}$$

A expressão **(56)** é seguida por um exercício resolvido. Em ambas as edições – 1944 e 1949 – o exercício tem a mesma aplicação; no entanto, em 1944, calcula-se $\sqrt[6]{\boldsymbol{64}}$ e $\sqrt[3]{\boldsymbol{-8}}$, e, em 1949, $\sqrt[4]{\boldsymbol{81}}$ e $\sqrt[3]{\boldsymbol{-8}}$. Apresentaremos a seguir o exemplo comum às edições: $\sqrt[3]{\boldsymbol{-8}}$.

Na seção 5.3.30 (2º exercício), foram determinadas as raízes cúbicas da unidade. Utilizando essa informação, o autor afirma que as raízes pedidas serão:

$$\boldsymbol{1 + \sqrt{3}i}$$

$$\frac{\boldsymbol{(1+\sqrt{3}i)(-1+\sqrt{3}i)}}{2} = -\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{-2}$$

$$\frac{\boldsymbol{(1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}}{2} = \frac{\boldsymbol{2-2\sqrt{3}i}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{1-\sqrt{3}i}$$

5.3.34 Observação II

Segundo o autor,

> o estudo da radiciação mostrou que esse domínio numérico mais amplo, tal como foi definido [6.3.2], compreende também, as *raízes de índice par, de quantidades negativas*. Esses radicais passaram, assim, a ter um significado numérico definido, como fora pressentido desde o século XVI [6.3.1]. Especialmente para a segunda ordem, impõe-se uma observação interessante (1949, p. 169, grifos do autor).

Tomando, por exemplo, $\sqrt{\boldsymbol{-3}}$, o autor mostra que:

$$\sqrt{\boldsymbol{-3}} = \boldsymbol{3^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2}\right] = 3^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{2k\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right)}$$

Mas,

$$\boldsymbol{3^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{2k\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{2}\right) = \sqrt{3}}$$

E:

[85] Essa informação foi transmitida a partir de uma nota de rodapé.

$$\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i$$

Assim, ele conclui que $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$. Segundo o autor, poderemos sempre aplicar essa transformação. Por exemplo: $\sqrt{-121} = \pm 11i$. Haroldo L. da Cunha comenta que Bombelli percebeu essa relação. Conclui a seção afirmando que, "no domínio complexo, as conclusões numéricas apresentam-se com ampla generalidade" (1949, p. 170). Completa ainda, em nota de rodapé, que Weierstrass demonstrou na Universidade de Berlin, em 1863, que essa ideia de número complexo constitui a mais geral concepção que poderíamos formular dentro dos moldes clássicos do conceito de número.

5.3.35 Aplicação aos problemas gerais da multiplicação e da divisão de arcos

Presente apenas na edição de 1944, o autor inicia a seção comentando que o problema da multiplicação e da divisão de arcos só foi resolvido na Trigonometria de um modo particular. A partir de uma nota de rodapé, faz menção ao capítulo Trigonometria presente no segundo volume da série *Matemática 2º ciclo*.

Comenta que a fórmula de Moivre permite, entretanto, uma solução geral, que podemos escrevê-la como, (5.3.24):

$$\cos m\vartheta + i \operatorname{sen} m\vartheta = \cos^m\vartheta + iC_m^1\cos^{m-1}\vartheta\, sen\,\vartheta + i^2C_m^2\cos^{m-2}\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta + i^3C_m^3\cos^{m-3}\vartheta \operatorname{sen}^3\vartheta + i^4C_m^4\cos^{m-4}\vartheta \operatorname{sen}^4\vartheta + i^5C_m^5\cos^{m-5}\vartheta \operatorname{sen}^5\vartheta + \cdots$$

Levando em consideração a lei geral de formação das potências de i (5.3.4), tem-se:

$$\cos m\vartheta + i \operatorname{sen} m\vartheta = (\cos^m\vartheta - C_m^2\cos^{m-2}\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta + C_m^4\cos^{m-4}\vartheta \operatorname{sen}^4\vartheta - \cdots) + \left(C_m^1\cos^{m-1}\vartheta\, sen\,\vartheta - C_m^3\cos^{m-3}\vartheta \operatorname{sen}^3\vartheta + i^5C_m^5\cos^{m-5}\vartheta \operatorname{sen}^5\vartheta - \cdots\right)i$$

Isto é, **(5.3.6)**:

$$\cos m\vartheta = \cos^m\vartheta - C_m^2\cos^{m-2}\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta + C_m^4\cos^{m-4}\vartheta \operatorname{sen}^4\vartheta - \cdots \qquad \textbf{(57)}$$

$$\operatorname{sen} m\vartheta = C_m^1\cos^{m-1}\vartheta\, sen\,\vartheta - C_m^3\cos^{m-3}\vartheta \operatorname{sen}^3\vartheta + i^5C_m^5\cos^{m-5}\vartheta \operatorname{sen}^5\vartheta - \cdots \qquad \textbf{(58)}$$

Essas fórmulas resolvem, segundo o autor, o problema geral da multiplicação de arcos. Ele acrescenta, em nota de rodapé, que um estudo completo de tal assunto é feito por C. Bourlet em suas *Leçons Trigonométrie rectiligne* (1924).

Na sequência, comenta que, se ao invés de $m\vartheta$, escrevermos ϑ, o arco deverá ser substituído por $\frac{\vartheta}{m}$. Tem-se, assim:

$$\cos\vartheta = \cos^m\frac{\vartheta}{m} - C_m^2\cos^{m-2}\frac{\vartheta}{m}\ \text{sen}^2\ \frac{\vartheta}{m} + C_m^4\cos^{m-4}\frac{\vartheta}{m}\ \text{sen}^4\ \frac{\vartheta}{m} - \cdots \qquad (59)$$

$$\begin{aligned}\text{sen}\ \vartheta = C_m^1\cos^{m-1}\frac{\vartheta}{m}\ sen\ \frac{\vartheta}{m} - C_m^3\cos^{m-3}\frac{\vartheta}{m}\text{sen}^3\ \frac{\vartheta}{m} \\ + i^5C_m^5\cos^{m-5}\frac{\vartheta}{m}\ \text{sen}^5\ \frac{\vartheta}{m} - \cdots\end{aligned} \qquad (60)$$

Essas relações fornecem, segundo o autor, pelo menos teoricamente, a solução do problema geral da divisão de arcos. Na sequência, são apresentados dois exercícios (resolvidos).

Exercício I – Conhecendo $\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\vartheta}$ e $\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\vartheta}$, calcular $\mathbf{sen}\ \mathbf{3}\boldsymbol{\vartheta}$ e $\mathbf{cos}\ \mathbf{3}\boldsymbol{\vartheta}$.

$$\cos 3\vartheta = \cos^3\vartheta - C_3^2\cos^1\vartheta\ \text{sen}^2\ \vartheta = \cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta\ \text{sen}^2\vartheta =$$

$$= \cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta\,(1-\cos^2\vartheta) = \cos^3\vartheta + 3\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta$$

Isto é:

$$\cos 3\vartheta = 4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta \qquad (61)$$

De modo análogo,

$$\text{sen}\ 3\vartheta = C_3^1\cos^2\vartheta\ sen\ \vartheta - C_3^3\cos^0\vartheta\ \text{sen}^3\ \vartheta = 3\cos^2\vartheta\ \text{sen}\ \vartheta - \text{sen}^3$$

$$= 3(1-\text{sen}^2\vartheta)\text{sen}\ \vartheta - \text{sen}^3\vartheta$$

Isto é:

$$\text{sen}\ 3\vartheta = -4\ \text{sen}^3\vartheta + 3\ \text{sen}\ \vartheta \qquad (62)$$

Essas fórmulas **(61)** e **(62)** são apresentadas pelo autor como sendo de uso frequente.

Exercício II – Conhecendo $\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\vartheta}$ e $\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\vartheta}$, calcular $\mathbf{sen}\ \frac{\boldsymbol{\vartheta}}{\mathbf{2}}$ e $\mathbf{cos}\frac{\boldsymbol{\vartheta}}{\mathbf{2}}$.

$$\cos\vartheta = \cos^2\frac{\vartheta}{2} - \text{sen}^2\frac{\vartheta}{2} = \cos^2\frac{\vartheta}{2} - 1 + \cos^2\frac{\vartheta}{2} = 2\cos^2\frac{\vartheta}{2} - 1$$

Isto é:

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}$$

O autor ressalta, por meio de uma nota de rodapé, que deverão sempre ser considerados os dois valores da raiz.

$$\text{sen}\ \vartheta = C_2^1\cos\ \frac{\vartheta}{2}\ \text{sen}\ \frac{\vartheta}{2} = 2\cos\ \frac{\vartheta}{2}\ \text{sen}\ \frac{\vartheta}{2}$$

Isto é:

$$\text{sen}\ \frac{\vartheta}{2} = \frac{\text{sen}\ \vartheta}{2\cos\ \frac{\vartheta}{2}} = \frac{\text{sen}\ \vartheta}{2\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}} = \frac{\text{sen}\ \vartheta\sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}}}{2\sqrt{\frac{1-\cos^2\vartheta}{4}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}}$$

Tais fórmulas são, segundo o autor, clássicas e conhecidas.

Para finalizar a seção, observa que, para o problema clássico da trissecção do arco, dado, por exemplo, $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\vartheta}$, é necessário resolver a seguinte equação cúbica:

$$\mathbf{4\,cos^3\frac{\boldsymbol{\vartheta}}{3} - 3\,cos\frac{\boldsymbol{\vartheta}}{3} - 3\,cos\,\boldsymbol{\vartheta} = 0}$$

obtida da relação **(59)**; a incógnita seria, como se vê, $\mathbf{cos}\frac{\boldsymbol{\vartheta}}{\mathbf{3}}$.

Usando a relação **(60)** e supondo conhecido $\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\vartheta}$, chega-se a:

$$\mathbf{4\,sen^3\frac{\boldsymbol{\vartheta}}{3} - 3\,sen\,\frac{\boldsymbol{\vartheta}}{3} + sen\,\boldsymbol{\vartheta} = 0}$$

Vê-se assim, segundo o autor, que, já para $\boldsymbol{m = 3}$, seria impraticável a resolução. Acrescenta, em nota de rodapé, que bastará ter em conta as dificuldades apresentadas pela resolução das equações algébricas para $\boldsymbol{m > 2}$ para afirmar que as fórmulas **(59)** e **(60)** só têm, portanto, interesse teórico.

Essa constatação deve ter sido levada em consideração nas reedições da obra, uma vez que a seção já não está presente nas edições de 1949, 1955 e 1956.

5.3.36 Equações binômias

Nas edições de 1944 e 1949, o autor discorre sobre as equações binômias. Considerando o tipo geral:

$$\boldsymbol{ax^n + b = 0} \qquad \mathbf{(63)}$$

O autor afirma que se pode escrever:

$$\boldsymbol{x^n = -\frac{b}{a}}$$

E, consequentemente:

$$\boldsymbol{x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}} \qquad \mathbf{(64)}$$

Segundo o autor, essa igualdade mostra que o problema, em última análise, reduz-se à determinação de raízes n-gésimas. A equação **(63)** admitirá, sempre, $\boldsymbol{n}$ raízes, havendo, no máximo, duas reais (5.3.28).

Mesmo considerando a hipótese de serem reais os números $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, Haroldo L. da Cunha afirma que o caso geral teria o mesmo tratamento. Ou seja, as raízes indicadas em **(64)** podem ser obtidas diretamente em cada caso, mas podem também ser calculadas por meio dos resultados acima obtidos (5.3.32).

Se a raiz principal de $-\frac{a}{b}$ fosse representada por $\boldsymbol{r}$ e qualquer raiz primitiva n-gésima da unidade por $\boldsymbol{\varepsilon}$, teríamos, segundo Haroldo L. da Cunha, a seguinte expressão das raízes da equação:

$$\boldsymbol{x_h = r\varepsilon^h} \qquad (\boldsymbol{h = 1, 2, \dots, n}) \tag{65}$$

A edição de 1949 acrescenta que se tivéssemos r como a raiz principal $-\frac{a}{b}$ e por $\boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}$ as raízes n-gésimas da unidade, as raízes da equação seriam dadas por **(65)**.

Em particular, para $-\frac{b}{a} > 0$, $\boldsymbol{r}$ seria a raiz aritmética desse número. Segundo o autor, em nota de rodapé, o cálculo dessa raiz aritmética é feito, em geral, por meio de logaritmos.

Haroldo L. da Cunha observa também que, em qualquer hipótese, as raízes complexas serão duas a duas conjugadas (5.3.30). Na sequência, desenvolve dois exercícios do tipo "resolva as equações". Na edição de 1944, os exercícios são: $\boldsymbol{2x^4 - 3 = 0}$ e $\boldsymbol{x^4 + 16 = 0}$; já na de 1949, são $\boldsymbol{2x^7 - 3x^3 = 0}$ e $\boldsymbol{x^4 + 16 = 0.}$ Apresentaremos a resolução do autor para o exercício comum às edições.

$$\boldsymbol{x^4 + 16 = 0}$$

$$\boldsymbol{x^4 = -16} \text{ ou } \boldsymbol{x = \sqrt[4]{-16}}$$

$$\boldsymbol{r = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\, sen\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} \text{ ou } \boldsymbol{r = \sqrt{2} + \sqrt{2}i}$$

Tomando a mesma raiz primitiva $\boldsymbol{i}$, tem-se[86]:

$$\boldsymbol{x_1 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)i = -1,414 + 1,414\, i}$$

$$\boldsymbol{x_2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)i^2 = -1,414 - 1,414\, i}$$

$$\boldsymbol{x_3 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)i^3 = 1,414 - 1,414\, i}$$

$$\boldsymbol{x_4 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)i^4 = 1,414 + 1,414\, i}$$

Tratando o mesmo exemplo diretamente, o autor obtém:

$$\boldsymbol{\varrho = 16;\ \varrho^{\frac{1}{4}} = 2} \text{ e } \boldsymbol{\vartheta = (2k+1)\pi}$$

Portanto,

$$\boldsymbol{\sqrt[4]{-16} = 2\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{(2k+1)\pi}{4}\right]} \text{ para } \boldsymbol{k = 0, 1, 2\ e\ 3}.$$

Logo, as raízes serão:

$$\boldsymbol{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)}$$

[86] O autor toma $\boldsymbol{\sqrt{2}}$, como sendo 1,414, no entanto, essa representação é apenas uma aproximação com três casas decimais do valor real. O autor não comenta nada sobre essa aproximação.

$$\mathbf{2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\textit{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$\mathbf{2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\textit{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)}$$
$$\mathbf{2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\textit{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)}$$

Esses valores correspondem, respectivamente, aos valores de $\boldsymbol{x_4, x_1, x_2, x_3}$, anteriormente encontrados.

5.3.37 Observação

Essa é a última seção do capítulo Números Complexos das edições de 1944 e 1949. Nela, o autor conclui que, pelo exposto, a resolução das equações binômias reduz-se, simplesmente, ao problema da radiciação trigonométrica, que equivale, geometricamente, à divisão da circunferência em partes iguais.

Tal correspondência permite que o estudo algébrico das equações binômias determine a solução definitiva da construção geométrica dos polígonos regulares, devida, em grande parte, a Gauss.

5.3.38 Exercícios

Ao final do capítulo, são propostos 34 exercícios. Desses, 29 têm por objetivo a fixação, pois são aplicações diretas dos conteúdos vistos ao longo do capítulo. Os outros cinco exercícios estimulam a dedução e desenvolvem a capacidade de raciocínio matemático, uma vez que pedem que os alunos demonstrem algo.

Um único exercício é seguido de uma sugestão. Quando o autor propõe a resolução da equação $\boldsymbol{x^{10}-211x^5-7776=0}$, sugere a seguinte substituição: $\boldsymbol{x^5=y}$.

O exercício “Demonstre que todo número de módulo unitário poderá ser posto sob a forma $\frac{a+i}{a-i}$, onde a é real” chamou a atenção da banca examinadora desta pesquisa por estar, no mínimo, mal formulado.

Utilizando a representação exponencial (seguindo sugestão apresentada pelo autor nas respostas dos exercícios) temos que:

$$a+bi=\rho e^{i\theta}$$

Como o módulo do número é unitário, ou seja, $\rho=1$,

$$a+bi=e^{i\theta}$$

Fazendo algumas manipulações obtemos:

$$e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}+\frac{i\theta}{2}} = e^{\frac{i\theta}{2}} \times e^{\frac{i\theta}{2}} = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{-\frac{i\theta}{2}}} = \frac{cos\frac{\theta}{2} + i\,sen\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2} - i\,sen\frac{\theta}{2}}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $sen\frac{\theta}{2}$ (considerando, por enquanto, $sen\frac{\theta}{2} \neq 0$):

$$\frac{\dfrac{cos\frac{\theta}{2} + i\,sen\frac{\theta}{2}}{sen\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{cos\frac{\theta}{2} - i\,sen\frac{\theta}{2}}{sen\frac{\theta}{2}}} = \frac{\dfrac{cos\frac{\theta}{2}}{sen\frac{\theta}{2}} + i}{\dfrac{cos\frac{\theta}{2}}{sen\frac{\theta}{2}} - i} = \frac{cotg\ \frac{\theta}{2} + i}{cotg\ \frac{\theta}{2} - i}$$

Tomando $cotg\ \frac{\theta}{2} = a$,

$$e^{i\theta} = \frac{a+i}{a-i}$$

Como o exercício nos propunha demonstrar. No entanto, se considerarmos $sen\frac{\theta}{2} = 0$, ou seja, um número na forma $\boldsymbol{z = a + bi}$ com $\boldsymbol{b = 0}$ enunciado não se aplica. Logo se mantido desta forma não é possível demonstrar a afirmação do exercício. Seria necessário que no enunciado destacasse que mostrássemos a afirmação para “todo número na forma a+bi com b≠0”

Como observamos no quadro 9, o capítulo dos números complexos, junto com o capítulo Séries e Curvas Usuais apresenta uma quantidade inferior de exercícios se comparado aos outros capítulos.

Em comparação com a edição de 1944, a edição de 1949 apresenta poucas alterações nos exercícios. A diferença está nas exclusões de seções (Quadro 10) da edição de 1949. Os exercícios relativos a essas seções também foram excluídos dos exercícios propostos que finalizam o capítulo.

Para a edição de 1956, que sofreu ainda mais cortes, foi feita uma seleção de 17 exercícios (contando cada item) da edição de 1949. Inclusive, um dos exercícios, que seria o sétimo dessa nova lista, é apresentado como sendo o décimo segundo, posição que ocupava na edição de 1949.

É chegada a hora de absorvermos as informações obtidas nas análises sócio-histórica e discursiva e tecermos considerações a respeito desses momentos: como um influenciou o outro, e o que eles juntos nos dizem. Embora, em vários momentos, essas análises tenham se entrelaçado, apresentaremos a seguir nossas compreensões finais após essas análises.

6 REINTERPRETAÇÕES

Uma obra permite múltiplas interpretações: a cada novo olhar, a cada sujeito que folheia o livro, a cada minuto que se dedica à obra, novas visões, novas maneiras de interpretá-la vão desabrochando. Essas maneiras são como flores de uma mesma espécie que, embora tenham características semelhantes, desenvolvem-se de modos diferentes com novos formatos, novas cores, novos tamanhos.

A partir da Hermenêutica de Profundidade e dos Paratextos Editoriais, olhamos para os contextos sociais, políticos e econômicos em que o terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo* foi produzido, editado e comercializado. Buscamos nos inteirar a respeito das reformas educacionais ocorridas a partir da década de 1930, da biografia dos autores e do principal colégio da época: o Pedro II. Também buscamos informações em revistas e jornais da época e visitamos alguns acervos e bibliotecas. Essa busca possibilitou que nos familiarizássemos com os autores e com a obra.

A análise sócio-histórica nos mostrou que a obra foi produzida em uma época em que o ensino secundário era um ramo do ensino quase que exclusivamente voltado para as elites do país. Por conta da influência das elites na educação, grande parte das reformas educacionais privilegiaram o ensino secundário e o superior. Outra característica elitista era que o secundário era o único nível de ensino que dava acesso ao ensino superior. A população que, em certo momento, teve a esperança de ascensão social a partir da educação, teve seu sonho abortado com a criação das escolas técnicas. Por ser uma modalidade com um período menor de duração, que facilitava a entrada no mercado de trabalho, passou a ser a opção da grande maioria da classe média, o que contribuiu para que se mantivesse a desigualdade social.

Foi possível notar um movimento de centralização da educação. As propostas educacionais passaram a ser implementadas a nível nacional. O Colégio Pedro II esteve diretamente vinculado com as reformas educacionais do país. Seus professores participavam da elaboração dos programas de ensino e das instruções metodológicas e tinham o poder de instituir programas que eram trabalhados no colégio para todo o país. Muitos deles eram autores de livros didáticos de grande circulação nacional.

Haroldo Lisbôa da Cunha e Euclides Roxo, dois dos autores da série *Matemática 2º ciclo,* proeminentes da elite brasileira, tinham relação próxima com as autoridades do país e participaram da elaboração dos programas e instruções metodológicas de Matemática em diversas reformas. Esse contato possibilitou que a série *Matemática 2º ciclo* estivesse sempre de acordo com os programas de ensino vigentes.

Podemos, assim, concluir que a obra *Matemática 2º ciclo* foi produzida por personagens influentes no sistema educacional brasileiro. Ela foi editada para ser comercializada a nível nacional e tinha como público-alvo, principalmente, os jovens provindos de famílias com grande poder aquisitivo, que, à época, eram os maiores frequentadores do ensino secundário.

Apoiadas nas edições de 1944, 1946, 1949, 1955 e 1956 do terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo*, apresentamos neste trabalho nossa interpretação a respeito da obra. Não tivemos acesso à edição completa de 1946, no entanto suas páginas iniciais (capa, número da edição, folha de rosto, advertência) nos ajudaram a entender o caminho trilhado pela obra nessas duas décadas. Ao descobrirmos que a edição de 1946 era a segunda edição do terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo,* concluímos que a edição de 1944, que encontramos nas bibliotecas na Unicamp, era a primeira edição da obra.

Ao longo das edições, ocorreram algumas modificações no conteúdo dos números complexos. A primeira delas aconteceu entre a primeira e a segunda edição. De acordo com advertência presente no próprio livro, os autores, levando em consideração a opinião de professores de todo o país e suas próprias experiências, cortaram alguns conteúdos do capítulo, tais como: funções hiperbólicas, interpretação geométrica da multiplicação e da divisão, raízes primitivas da unidade, cálculo de raízes n-gésimas em geral por intermédio das raízes primitivas, aplicação aos problemas gerais da multiplicação e divisão de arcos. Apesar dos cortes, o capítulo continuou sendo fiel ao enxuto programa expedido na Lei Orgânica do Ensino Secundário para o curso científico.

Entre a terceira (1949) e a quarta edições (1955), ocorreram novos cortes de conteúdo, impulsionados pela publicação dos Programas Mínimos de Ensino em 1951. Os números complexos passaram a ser tratados concomitantemente ao tema dos polinômios. As instruções metodológicas expedidas junto com os Programas Mínimos afirmavam que os números complexos deveriam ser discutidos de maneira sucinta, apenas para que o leitor/aluno fosse capaz de compreender o assunto seguinte. Os assuntos tratados na sequência eram: decomposição de um polinômio em fatores binômios; o número de raízes de uma equação, raízes múltiplas e raízes nulas; raízes complexas conjugadas; decomposição de um polinômio em fatores reais; indicação sobre o número de raízes reais contidas em um intervalo; teorema de Bolzano.

Com a Lei Orgânica do Ensino Secundário, essa modalidade de ensino passou a ser constituída por dois cursos: o clássico e o científico. A princípio, o tema dos números complexos era abordado apenas no curso científico; com as alterações de 1951, os cursos passaram a ter um único programa de conteúdos e os números complexos passaram a ser ensinados em ambas as modalidades.

Os livros da série *Matemática 2º ciclo* eram utilizados tanto no curso clássico como no científico. Dessa forma, os estudantes do curso clássico adquiriam um livro que continha vários assuntos que eles não iriam estudar como, por exemplo, os números complexos. Com a instituição dos Programas Mínimos de 1951, os conteúdos passaram a ser discutidos em ambos os cursos, nenhuma seção de Matemática era exclusiva de um único curso e a diferença se dava apenas por alguns tópicos mais aprofundados (Anexo B). Assim, os números complexos passaram a ser abordados também no curso clássico.

Como observamos, entre a publicação da primeira (1944) e da quinta (1956) edição, o conteúdo dos números complexos passou por grandes transformações. As transformações e adaptações de sua presença nos programas de ensino e nas salas de aula continuam acontecendo. Atualmente, o conteúdo vem sendo cada vez menos cobrado nos principais vestibulares do país e, há alguns anos, não aparece no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Por essas e outras questões, o conteúdo não faz parte da nova proposta, que está sendo elaborada, da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A série *Matemática 2º ciclo*, num primeiro olhar, apresenta a matemática de maneira unificada, suas diferentes subáreas em um mesmo livro. No entanto, ao nos atentarmos para a distribuição dos conteúdos, notamos que ele é, na verdade, uma junção de três livros (Álgebra, Geometria e Geometria Analítica). Cada uma dessas subáreas é apresentada separadamente sob a responsabilidade de um único autor. Essa estrutura decorre, a nosso ver, da agilidade com que os autores colocaram sua obra em circulação, com a intenção de despontar no mercado editorial. Em virtude dessa necessidade, a série não teria sido pensada em seu todo pelos quatro autores: ela é a junção dos trabalhos individuais de cada autor.

Na folha de rosto da quarta edição, publicada 11 anos após a primeira, consta a informação de que ela foi editada apenas por dois dos quatro autores – Haroldo Lisbôa da Cunha e Roberto Peixoto. Euclides Roxo evidentemente não participou da edição, pois, na data, já havia falecido. Buscando informações sobre Cesar Dacorso Netto, não encontramos dados que justificassem sua saída da elaboração da obra. Com essa edição, a indicação de subáreas ao decorrer do livro deixou de existir.

As edições, sem exceção, seguem os programas de ensino da época. Isso porque Euclides Roxo participou diretamente da elaboração dos programas de ensino da reforma Francisco Campos e da reforma Capanema e Haroldo Lisbôa da Cunha foi um dos que elaboraram o Programa Mínimo de 1951 e suas instruções metodológicas.

O capítulo dos números complexos é marcado pela grande quantidade de temas discutidos, em alguns momentos de forma superficial, muitas notas de rodapé e poucos exemplos e exercícios, se comparado aos outros capítulos da mesma obra. Se compararmos com os livros didáticos atuais, essa diferença é ainda mais discrepante. Alguns equívocos de conceitos e erros (do autor ou do editor) também saltaram aos nossos olhos durante a análise. Percebemos também, no capítulo números complexos, o estilo próprio de escrita do autor Haroldo Lisbôa da Cunha, o qual apresentou notações e símbolos que não eram comumente utilizados.

Ao longo da pesquisa, ressaltamos que nos inspiraríamos na Hermenêutica de Profundidade, pois, a princípio, não sabíamos se nosso movimento caracterizaria a HP como uma metodologia. Neste momento, após olharmos para nosso estudo, podemos notar que sim: utilizamos a HP como metodologia, pois, seguindo as sugestões desse referencial metodológico, compreendemos ter constituído a forma simbólica "capítulo 'Números Complexos' do terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo"*. Outro ponto importante a ser destacado é que os três momentos propostos pela HP – análise sócio-histórica, análise formal e reinterpretação – acontecem simultaneamente. Embora, ao longo da dissertação, esses momentos tenham se apresentado em capítulos distintos, sua elaboração se deu em um movimento não linear. Em meio a idas e vindas, em que as análises se entrelaçavam e influenciavam uma a outra, cremos que nosso movimento de reinterpretação se mostrou presente na elaboração dessas análises e ao decorrer dos capítulos.

Se tivéssemos analisado, pura e simplesmente, apenas o terceiro volume da série *Matemática 2º ciclo*, não teríamos constituído uma interpretação como a que apresentamos nesta pesquisa. A HP nos permitiu uma análise mais profunda, mais ramificada, com diferentes possibilidades e descobertas. A análise sócio-histórica e a busca por materiais que complementassem e respondessem a questionamentos possibilitaram, a nosso ver, uma leitura mais completa da obra. Embora acreditemos que um leitor não possa chegar, em seu estudo, às reais intenções dos autores, acreditamos que a proposta da Hermenêutica de Profundidade nos aproxima, se não da intenção dos autores, da visão que os contemporâneos da publicação da obra tinham dela. Assim, nós nos aproximamos do olhar de alguém que viveu nas décadas de 1940 e 1950, que acompanhou a publicação e o lançamento das diversas edições da obra.

Aqui, ao longo das páginas, apresentamos nossa interpretação de um livro de Matemática. No entanto, nossa vida é interpretar. A cada momento que colocamos os olhos sobre algo, estamos nos apropriando do objeto e absorvendo dele tudo o que ele, em conjunto com nossas experiências de vida, pode nos dizer.

A caminhada, que chamamos de vida, é regada de interpretações. Neste momento, procuramos continuar interpretando: novos caminhos, novas possibilidades, novos lugares, novas pessoas, novas maneiras de reinterpretarmos... a nós mesmas...

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADÃO, H. P. Professor Haroldo e a Cooperativa. In: DACORSO NETTO, C. **Professor Haroldo Lisboa da Cunha: pequena biografia**. Rio de Janeiro: COOPFAHUPE, [199-]. p. 07 – 09.

ANDRADE, M. M. **Ensaios sobre o Ensino em Geral e o de Matemática em Particular, de Lacroix**: análise de uma forma simbólica à luz do Referencial Metodológico da Hermenêutica de Profundidade. 2012. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

ANDRADE, V. L. C. **História do Colégio Pedro II** – Unidade Escolar Centro. 2014. Disponível em: < http://cp2centro.net/hitoriacp2centro.aspx>. Acesso em: 23 out. 2015.

ANDRADE, M. M.; OLIVEIRA, F. D. Referencial Metodológico da Hermenêutica de Profundidade na Educação Matemática: reflexões teóricas. In: GARNICA, A. V. M; MARTINS-SALANDIM, M. E. (Org.). **Livros, Leis, Leituras e Leitores**: exercícios de interpretação para a história da Educação Matemática. Curitiba: Appris, 2014. p. 17-42.

ANDRADE, M. M.; OLIVEIRA, F. D.; SILVA, T. T. P. A Hermenêutica de Profundidade: possibilidades em Educação Matemática. **ALEXANDRIA**, v.6, n.1, p. 119-142, abr. 2013.

ARAÚJO, N. B. F. **Números Complexos**: uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no ensino médio. 2006. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

BEZERRA, M. J. **Curso de Matemática para os Cursos de Segundo Grau**. 33. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1976

BITTENCOURT, C. **Livro Didático e saber escolar (1810 – 1910).** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2008.

BRASIL. **Decreto de 02 de dezembro de 1837**. Converte o Seminário de S. Joaquim em colégio de instrução secundária, com a denominação Colégio Pedro. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret_sn/1824-1899/decreto-36979-2-dezembro-1837-562344-publicacaooriginal-86295-pe.html>. Acesso em: 23 out. 2015.

BRASIL. **Decreto nº 296, de 30 de setembro de 1843**. Declara que os Bacharéis em letras pelo Colégio Pedro II serão isentos de fazer exames de matérias preparatórias para serem admitidos á matricula em qualquer das Academias do Império. Disponível em: <http://www.camara.gov.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-296-30-setembro-1843-560701-publicacaooriginal-83829-pl.html>. Acesso em: 23 out. 2015.

BRASIL. **Decreto nº 2006, de 24 de outubro de 1857**. Aprova o Regulamento para os colégios públicos de instrução secundaria do Município da Corte. Disponível em: < http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-2006-24-outubro-1857-558097-publicacaooriginal-78997-pe.html>. Acesso em: 23 out. 2015.

BRASIL. **Decreto 5.492, de 16 de julho de 1928**. Regula a organização das empresas de diversões e a locação de serviços teatrais. Disponível em:

<http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/1910-1929/D5492.htm>. Acesso em : 08 dez. 2015.

BRASIL. **Decreto nº 19.941, de 30 de abril de 1931**. Dispõe sobre a instrução religiosa nos cursos primário, secundário e normal. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19941-30-abril-1931-518529-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 23 out. 2015.

BRASIL. **Decreto nº 19.850, de 11 de abril de 1931**. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19850-11-abril-1931-515692-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 23 out. 2015.

BRASIL. **Decreto nº 19.851, de 11 de abril de 1931**. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19851-11-abril-1931-505837-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 23 out. 2015.

BRASIL. **Decreto nº 19.852, de 11 de abril de 1931**. Dispõe sobre a organização da Universidade do Rio de Janeiro. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19852-11-abril-1931-510363-publicacaooriginal-85620-pe.html>. Acesso em: 23 out. 2015.

BRASIL. **Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931**. Dispõe sobre a organização do Ensino Secundário. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19890-18-abril-1931-504631-publicacaooriginal-141245-pe.html>. Acesso em: 02 ago. 2014.

BRASIL. **Decreto nº 20.158, de 30 de junho de 1931**. Organiza o ensino comercial, regulamenta a profissão de contador e dá outras providências. Disponível em: < http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-20158-30-junho-1931-536778-republicacao-81246-pe.html>. Acesso em: 08 dez. 2015.

BRASIL. **Decreto nº 21.241, de 14 de abril de 1932**. Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências. Disponível em: < http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-21241-4-abril-1932-503517-publicacaooriginal-81464-pe.html>. Acesso em: 08 dez. 2015.

BRASIL. Constituição (1934). **Constituição da República dos Estados Unidos do Brasil**: promulgada em 16 de julho de 1934. Disponível em: < http://www2.camara.leg.br/legin/fed/consti/1930-1939/constituicao-1934-16-julho-1934-365196-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em: 23 out. 2015.

BRASIL. **Decreto nº 112, de 04 de abril de 1935**. Reconhece como oficial a Escola Superior de Agricultura e Veterinária do Estado de Minas Gerais. Disponível em: < http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-112-4-abril-1935-521825-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 08 dez. 2015.

BRASIL. Constituição (1937). **Constituição da República dos Estados Unidos do Brasil**: promulgada em 10 de novembro de 1937. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Constituicao37.htm>. Acesso em: 23 out. 2015.

BRASIL. **Decreto nº 25, de 30 de novembro de 1937**. Organiza a proteção do patrimônio histórico e artístico nacional. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-25-30-novembro-1937-351814-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: Acesso em: 08 dez. 2015.

BRASIL. **Decreto nº 92, de 21 de dezembro de 1937**. Cria o Serviço Nacional de Teatro. Disponível em: < http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-92-21-dezembro-1937-350840-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 08 dez. 2015.

BRASIL. **Decreto-Lei nº 1.006, de 30 de dezembro de 1938**. Estabelece as condições de produção, importação e utilização do livro didático. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-1006-30-dezembro-1938-350741-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 23 out. 2015.

BRASIL. **Decreto-lei n° 4.048, de 22 de janeiro de 1942**. Cria o Serviço Nacional de Aprendizagem dos Industriários (SENAI). Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4048-22-janeiro-1942-414390-publicacaooriginal-1-pe.html >. Acesso em: 14 dez. 2015.

BRASIL. **Decreto-lei n° 4.073, de 30 de janeiro de 1942**. Disponível em: < http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4073-30-janeiro-1942-414503-133697-pe.html>.Acesso em: 14 dez. 2015.

BRASIL. **Lei n° 4.244, de 09 de abril de 1942**. Lei Orgânica do Ensino Secundário. Disponível em: < http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-publicacaooriginal-1-pe.html >. Acesso em: 02 ago. 2014.

BRASIL. **Decreto-lei n° 4.481, de 16 de junho de 1942**. Dispõe sobre a aprendizagem dos industriários, estabelece deveres dos empregadores e dos aprendizes relativamente a essa aprendizagem e dá outras providências. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto-lei/1937-1946/Del4481.htm>. Acesso em: 14 dez. 2015.

BRASIL. **Decreto-lei n° 4.436, de 07 de novembro de 1942**. Amplia o âmbito de ação do Serviço Nacional de Aprendizagem dos Industriários, e dá outras providências. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4936-7-novembro-1942-414954-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 14 dez. 2015.

BRASIL. **Decreto-lei n° 4.984, de 21 de novembro de 1942**. Dispõe sobre a aprendizagem nos estabelecimentos industriais da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios. Disponível em: < http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4984-21-novembro-1942-415010-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 14 dez. 2015.

BRASIL. **Diário Oficial da União**. Portaria 177 de 16 de março de 1943 publicada em 18 de março de 1943, seção 1, p. 3930 - 3931. Disponível em: < http://www.jusbrasil.com.br/diarios/2211640/pg-18-secao-1-diario-oficial-da-uniao-dou-de-18-03-1943/pdfView>. Acesso em: 11 jan. 2016

BRASIL. **Decreto-lei n° 6.141, de 28 de dezembro de 1943**. Lei Orgânica do Ensino Comercial. Disponível em: < http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-6141-28-dezembro-1943-416183-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 14 dez. 2015.

BRASIL. **Decreto-lei n° 8.460, de 26 de dezembro de 1945**. Consolida a legislação sobre as condições de produção, importação e utilização do livro didático. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-8460-26-dezembro-1945-416379-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 23 out. 2015.

BRASIL. **Decreto-lei n° 8.529, de 02 de janeiro de 1946**. Lei Orgânica do Ensino Primário. Disponível em: < http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-8529-2-janeiro-1946-458442-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 14 dez. 2015.

BRASIL. **Decreto-lei n° 8.530, de 02 de janeiro de 1946**. Lei Orgânica do Ensino Normal. Disponível em: < http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-8530-2-janeiro-1946-458443-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 14 dez. 2015.

BRASIL. **Decreto-lei n° 8.621, de 10 de janeiro de 1946**. Dispõe sobre a criação do Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial e dá outras providências. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-8621-10-janeiro-1946-416555-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 14 dez. 2015.

BRASIL. **Decreto-lei n° 9.613, de 20 de agosto de 1946**. Lei Orgânica do Ensino Agrícola. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-9613-20-agosto-1946-453681-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 14 dez. 2015.

BRASIL. **Portaria n. 456 de 27 de fevereiro de 1951**. Cria a comissão para elaboração de programas do ensino secundário.

BRASIL. **Portaria n. 614 de 10 de maio de 1951**. Dispõe sobre programas do ensino secundário.

BRASIL. **Diário Oficial da União**. Portaria 966 de 2 de outubro de 1951 publicada em 12/10/1951, seção 1, p. 15166. Disponível em: <http://www.jusbrasil.com.br/diarios/2752077/pg-22-secao- 1-diario-oficial-da-uniao-dou-de-12-10-1951/pdfView>. Acesso em: 11 jan. 2016.

BRASIL. **Diário Oficial da União.** Portaria 1045 de 14 de dezembro de 1951 publicada em 22/2/1952, seção 1 (suplemento), p. 1. Disponível em: <http://www.jusbrasil.com.br/diarios/2375333/pg- 65-secao-1-diario-oficial-da-uniao-dou-de-22-02-1952/pdfView>. Acesso em: 11 jan. 2016

BRASIL. **Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961**. Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em: < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l4024.htm>. Acesso em: 02 ago. 2014.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p

BRASIL. **Lei nº 12.677 de 25 de junho de 2012**. Equipara o Colégio Pedro II aos Institutos Federais. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato20112014/2012/lei/L12677.htm>. Acesso em: 23 out. 2015.

CARVALHO, J. B. P. F. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática. In: VALENTE, W. R. (Org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil**. 2.ed. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 2004. p. 85-150.

CUNHA, H. L.da. **Pontos de Álgebra Complementar**. Rio de Janeiro: ALBA, de Moreira, Cardoso & Freitas, 1939.

DACORSO NETTO, C. **Professor Haroldo Lisboa da Cunha: pequena biografia**. Rio de Janeiro: COOPFAHUPE, [199-].

DANTE, L. R. **Matemática** (volume único). São Paulo: Ática, 2005.

DASSIE, B. A. As Notas de Rodapé da Coleção Matemática – 2º ciclo. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, n.3., 2015, Belém. **Anais...**, 2015. p. 1 - 11.

DASSIE, B. A. **Euclides Roxo e a constituição da Educação Matemática no Brasil.** 2008. 282 f. Tese (Doutorado em Educação) – Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro. 2008

DASSIE, B. A. **A Matemática do Curso Secundário na Reforma Gustavo Capanema**. 2001. 177f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2001.

DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. O Ensino de Matemática no Brasil nas Primeiras Décadas do Século XX. **Caderno Dá Licença**, Niterói, v.5, n.4, p. 65-74, dez. 2003. Disponível em: <http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume4/da_Licena_Bruno.pdf>. Acesso em: 15 ago. 2014.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hyginio H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011. 848 p.

FAUSTO, B. **História do Brasil**. 9. ed. São Paulo: EDUSP: FDE, 2001. 660 p.

GASPARELLO, Arlette M. Traduções, apostilas e livros didáticos: ofícios e saberes na construção das disciplinas escolares. In: XII ENCONTRO REGIONAL DE HISTÓRIA. 12, 2006, Niterói. **Anais...** Rio de Janeiro: Anpuh Rio, 2006. p. 1 - 10.

GASPARELLO, Arlette M.; VILLELA, H. O Colégio Pedro II e a construção da escola secundária brasileira. In: NUNES, C.; SÁ, N. P. (Org.). **Instituições Educativas na Sociedade Disciplinar Brasileira**. Cuiabá: EdUFMT, 2006. p. 37 - 59.

GENETTE, G. **Paratextos Editoriais**. Tradução de Álvaro Faleiros. Cotia: Ateliê Editorial, 2009.

GOMES, M. L. M. **História do Ensino da Matemática:** uma introdução. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Disponível em: < http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/historia%20do%20ensino%20da%20matematica.pdf>. Acesso em: 15 ago. 2014.

GHIRALDELLI JÚNIOR, P. **História da Educação**. São Paulo: Cortez, 1991. 240 p.

HOCHMAN, G. A Saúde Pública em Tempo de Capanema: continuidades e inovações. In: BOMENY, H. **Constelação Capanema: intelectuais e políticas**. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2001. p. 127 – 151.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar** – complexos, polinômios, equações. 2. ed. São Paulo: Atual, 1977.

LOPES, J. A. **Livro Didático de Matemática**: concepção, seleção e possibilidades frente a descritores de análise e tendências em Educação Matemática. 2000. 264 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

LOPES, M. H. S. **"Como ensinar Matemática no Curso Ginasial"**: um manual da CADES e suas propostas para a formação de professores de matemática. 2015. 262 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Mato Grasso do Sul, Campo Grande, 2015.

MAEDER, A. M. **Curso de Matemática** 3º livro, ciclo colegial. São Paulo: Melhoramentos, 1948.

MACIEL, L. S. K. R. Manoel Jairo Bezerra: depoimentos em vida. **Zetetiké**, Campinas, v. 20, n. 37, p.115-133, jan/jun, 2012.

MARQUES, A. S. **Tempos pré-modernos: a matemática nas escolas dos anos 1950**. 2005. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MIORIM, M. A. Divulgando livros didáticos de matemática: revistas de editoras brasileiras nas décadas de 1950 e 1970. In: BRITO, A. J.; FARIAS. K. S. C. dos S.; MIORIM, M. A. (Org.) **Pesquisas históricas em jornais e revistas: produções do HIFEM**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. Atual Editora: São Paulo, 1998.

MONTOITO, R. ***Euclid and His Modern Rivals (1879)*, de Lewis Carroll:** Tradução e Crítica. 2013. 447 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2013.

NUNES, C. As Políticas Públicas de Educação de Gustavo Capanema no Governo Vargas. In: BOMENY, H. **Constelação Capanema: intelectuais e políticas**. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2001. p. 103 – 125.

OLIVEIRA, F. D. **Análise de textos didáticos:** três estudos. 2008. 222 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

OLIVEIRA, F. E. F; VASCONCELOS, F. R. N. Uma proposta pedagógica para as aulas de números complexos no ensino médio à luz da aprendizagem significativa de Ausubel. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, n.11., 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: Pontifícia Universidade Católica, 2013, p. 1-9.

Os Mestres Nossos de Cada Dia – Haroldo Lisboa da Cunha. **Temas e Conexões**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p. 01 – 05, jul./dez. 2013.

OTONE E SILVA, M.C. **A Matemática do Curso Complementar da Reforma Francisco Campos.** 2006. 211f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2006.

PAES, L. A. A. **Números complexos**: uma proposta didática baseada na modelagem matemática e em contextos históricos. 2013. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PARDIM, C. S. **Orientações Pedagógicas nas Escolas Normais de Campo Grande:** um olhar sobre o manual *Metodologia do Ensino, Primário* de Theobaldo Miranda Santos. 2013. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

POLON, T. L. P. **Políticas Públicas para o Ensino Médio nos Anos 90:** trajetória do Colégio Pedro II/RJ. 2004. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2004.

QUINTELLA, A. **Matemática para o terceiro ano colegial**. 6. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1960.

RIBEIRO, D. F.C.; VALENTE, W. R. A Matemática dos Cursos Clássico e Científico da Reforma Gustavo Capanema e os Livros Didáticos. In: Congresso Nacional de Educação - EDUCERE - "Saberes Docentes", 7., 2007, Curitiba. **Anais**... Curitiba: Champagnat, 2007. Disponível em: < http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2007/anaisEvento/arquivos/CI-211-14.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2014.

ROCHA, L. M.; BARBOSA, R. M. **Curso Colegial Moderno**. São Paulo: IBEP, 1970.

ROMANELLI, O. O. **História da Educação no Brasil**. 40. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

ROQUE, T. **História da Matemática** – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSA, M. S. **Números complexos**: uma abordagem histórica para aquisição de conceitos. 1998. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1998.

ROXO, E. **Lições de Matemática Professadas no Curso Complementar (Curso de Engenharia) do Colégio Pedro II**. (Manuscrito). [193-].

ROXO, E.; CUNHA, H. L.da; PEIXOTO, R.; NETTO, C. D. **Matemática 2º ciclo – 1ª série**. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1944.

ROXO, E.; CUNHA, H. L.da; PEIXOTO, R.; NETTO, C. D. **Matemática 2º ciclo – 3ª série**. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1944.

ROXO, E.; CUNHA, H. L.da; PEIXOTO, R.; NETTO, C. D. **Matemática 2º ciclo – 3ª série**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1946.

ROXO, E.; CUNHA, H. L.da; PEIXOTO, R.; NETTO, C. D. **Matemática 2º – 3ª série**. 3. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1949.

ROXO, E.; CUNHA, H. L.da; PEIXOTO, R.; NETTO, C. D. **Matemática 2º ciclo – 3ª série**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1955.

ROXO, E.; CUNHA, H. L.da; PEIXOTO, R.; NETTO, C. D. **Matemática 2º ciclo – 3ª série**. 5. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1956.

ROXO, E.; CUNHA, H. L.da; PEIXOTO, R.; NETTO, C. D. **Matemática 2º ciclo – 1ª série**. 11. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1960.

SCHWARTZMAN, S; BOMENY, H. M. B; COSTA, V. M. R. **Tempos de Capanema**. São Paulo: Paz e Terra: Fundação Getúlio Vargas, 2000. 405 p.

SILVA, D. C. **Modelagem matemática no processo de ensino e aprendizagem de números complexos:** uma proposta didática. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Naciona) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVA, M. I. A. de A. M. Os **Números Imaginários:** (um estudo sobre) a sua “realidade”. 2005. 152 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade do Moinho, Portugal, 2005. Disponível em < https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/3464/1/escrita%20da%20tese.pdf>. Acesso em: 13 maio. 2015.

SILVA, T. T. P. **Os Movimentos Matemática Moderna**: compreensões e perspectivas a partir da análise da obra "Matemática-Curso Ginasial" do SMSG**.** 2013. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

STÁVALE, J. O uso do Compêndio no Ensino da Matemática – IV. **Atualidades Pedagógicas**, São Paulo, v. 3, n. 16, p. 10 (continuação na página 48), jul./ago. 1952.

THOMPSON, J. B., **Ideologia e Cultura Moderna**: Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa. Petrópolis: Vozes, 1995.

VALENTE, W. R. A Matemática do ensino secundário: duas disciplinas escolares? **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 11, n. 34, p. 645-662, set./dez. 2011.

VALENTE, W. R. Euclides Roxo e o Movimento Internacional de Modernização da Matemática Escolar. In: VALENTE, W. R. (Org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil**. 2. ed. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 2004. p.45-83.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730 – 1930).** 204 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

ANEXO A – COMPARAÇÃO ENTRE OS PROGRAMAS DE MATEMÁTICA DOS CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO CURSO CLÁSSICO	
CURSO CLÁSSICO	**CURSO CIENTÍFICO**
PRIMEIRA SÉRIE	
ARITMÉTICA TEÓRICA	
	Unidade I - As operações aritméticas fundamentais: 1 - Teoria da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão, da potenciação e da radiciação de inteiros. 2 - Sistemas de numeração.
Unidade I - A divisibilidade numérica: 1 - Teoremas gerais sobre divisibilidade. 2 - Caracteres de divisibilidade. 3 - Teorias do m.m.c. e do m.d.c. 4 - Teoria dos números primos; aplicações.	*Unidade II - A divisibilidade numérica:* 1 - Teoremas gerais sobre divisibilidade. 2 - Caracteres de divisibilidade. 3 - Teorias do m.d.c. e do m.m.c. 4 - Teoria dos números primos; aplicações.
	Unidade III - Os números fracionários: 1 - Teoria das operações aritméticas sobre números fracionários. 2 - Noções sobre cálculo numérico aproximado. Erros. Operações abreviadas.
ÁLGEBRA	
Unidade II - Os polinômios: 1 - Operações algébricas sobre polinômios. 2 - Teoria da divisão de polinômios. 3 - Divisão de um polinômio inteiro em x por x ± a; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini.	*Unidade IV - Os polinômios:* 1 - Operações algébricas sobre polinômios. 2 - Teoria da divisão de polinômios. 3 - Identidade de polinômios; método dos coeficientes a determinar; identidades clássicas. 4 - Divisão de um polinômio inteiro em x por x ± a; regra e dispositivo de Briot-Ruffini.
Unidade III - O trinômio do 2º grau: 1 - Decomposição em fatores do 1º grau; sinais do trinômio; desigualdades do 2º grau. 2 - Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2º grau; representação gráfica.	*Unidade V - O trinômio do 2º grau:* 1 - Decomposição em fatores do 1º grau; sinais do trinômio; inequações do 2º grau. 2 - Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2º grau; representação gráfica. 3 - Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos.
GEOMETRIA	
Unidade IV - O plano e a reta no espaço: 1 - Determinação de um plano. 2 - Intersecção de planos e retas. 3 - Paralelismo de retas e planos.4 - Reta e plano perpendiculares. 5 - Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6 - Diedros; planos perpendiculares entre si. 7 - Noções sobre ângulos poliédricos.	*Unidade VI - O plano e a reta no espaço:* 1 - Determinação de um plano. 2 - Intersecção de planos e retas. 3 - Paralelismo de retas e planos. 4 - Reta e plano perpendiculares. 5 - Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6 - Diedros; planos perpendiculares entre si. 7 - Ângulos poliédricos; estudo especial dos triedros.

Unidade V - Os poliedros: 1 - Noções gerais 2 - Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos.	*Unidade VII - Os poliedros:* 1 - Noções gerais. 2 - Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos; Teorema de Euler; noções sobre os poliedros regulares.
SEGUNDA SÉRIE	
ÁLGEBRA	
Unidade I - Progressões e logaritmos: 1 - Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2 - Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 3 – Resolução de algumas equações exponenciais simples.	*Unidade I - A função exponencial:* 1 - Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2 - Noção de função exponencial e de sua função inversa. 3 - Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 4 - Resolução de algumas equações exponenciais.
Unidade II - O binômio de Newton: 1 - Noções sobre análise combinatória. 2 - Binômio de Newton.	*Unidade II - O binômio de Newton:* 1 - Noções sobre análise combinatória. 2 - Binômio de Newton.
	Unidade III - Determinantes: 1 - Teoria dos determinantes. 2 - Aplicação aos sistemas de equações lineares; regras de Crammer; teorema de Rouché.
	Unidade IV - Frações contínuas: Noções sobre frações contínuas.
GEOMETRIA	
Unidade III - Os corpos redondos: 1 - Noções sobre geração e classificação das superfícies. 2 - Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3 - Estudo da esfera; área da esfera, da zona e do fuso esféricos; volume da esfera.	*Unidade V - Os corpos redondos:* 1 - Noções sobre geração e classificação das superfícies. 2 - Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3 - Estudo da esfera; área da esfera, da zona e do fuso esféricos; volume da esfera.
TRIGONOMETRIA	
Unidade IV - Vetor: 1 - Grandezas escalares e vetoriais. 2 - Noção de vetor; equipolência. 3 – Resultante ou soma geométrica de vetores. 4 - Vetores deslizantes sobre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.	*Unidade VI - Vetor:* 1 - Grandezas escalares e vetoriais. 2 - Noção de vetor; equipolência. 3 - Resultante ou soma geométrica de vetores. 4 - Vetores deslizantes sobre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.
Unidade V - Projeções: 1 - Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. 2 - Teorema de Carnot. 3 - Valor da projeção de um vetor.	*Unidade VII - Projeções:* 1 - Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. 2 - Teorema de Carnot. 3 - Valor da projeção de um vetor.
Unidade VI - Funções circulares: 1 - Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2 - Funções circulares ou trigonométricas; definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3 - Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4 - Cálculo das funções circulares dos arcos de 30º, 45º e 60º.	*Unidade VIII - Funções circulares:* 1 - Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2 - Funções circulares ou trigonométricas: definição, variação, redução ao primeiro quadrante. 3 - Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4 - Cálculo das funções circulares dos arcos $\frac{p}{n}\pi$.

	Unidade IX – Transformações trigonométricas: 1 - Fórmulas de adição, subtração, multiplicação e divisão de arcos: aplicações. 2 - Transformação de somas em produtos; aplicação ao cálculo numérico. 3 - Uso de tábuas trigonométricas.
	Unidade X – Equações trigonométricas: Resolução e discussão de algumas equações trigonométricas simples.
Unidade VII - Resolução de triângulos: 1 - Relações entre os elementos de um triângulo. 2 - Uso das tábuas trigonométricas. 3 - Resolução de triângulos retângulos.	*Unidade XI - Resolução de triângulos:* 1 - Relações entre os elementos de um triângulo. 2 - Resolução de triângulos retângulos. 3 - Resolução de triângulos obliquângulos. 4 - Aplicações imediatas à Topografia.
TERCEIRA SÉRIE	
ÁLGEBRA	
	Unidade I - Séries: 1 – Sucessões. 2 - Cálculo aritmético dos limites. 3 - Séries numéricas. 4 - Principais caracteres de convergência.
Unidade I - Funções: 1 - Noção de função de variável real. 2 - Representação cartesiana. 3 - Noção de limite e de continuidade.	*Unidade II - Funções:* 1 - Função de uma variável real. 2 - Representação cartesiana. 3 - Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidades de uma função racional.
Unidade II – Derivadas: 1 - Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2 - Cálculo das derivadas. 3 - Derivação das funções elementares. 4 - Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.	*Unidade III - Derivadas:* 1 - Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2 - Cálculo das derivadas. 3 - Derivação das funções elementares. 4 - Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.
	Unidade IV - Números complexos: 1 - Definição; operações fundamentais. 2 - Representação trigonométrica e exponencial. 3 - Aplicação à resolução das equações binômias.
	Unidade V - Equações algébricas: 1 - Propriedades gerais dos polinômios. 2 - Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica; aplicação à composição das equações. 3 - Noções sobre transformações das equações; equações recíprocas; equações de raízes iguais.
GEOMETRIA	
	Unidade VI - Relações métricas: 1 - Teorema de Sewtart e suas aplicações ao cálculo das linhas notáveis no triângulo. 2 - Relações métricas nos quadriláteros; teorema de Ptolomeu ou Hiparco. 3 - Potência de um ponto; eixos radicais; planos radicais.

	Unidade VII - Transformações de figuras: 1 - Deslocamentos, translação, rotação, simetria. 2 - Homotetia e semelhança nos espaços de duas e de três dimensões. 3 - Inversão pelos raios vetores recíprocos.
Unidade III - Curvas usuais: 1 - Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2 - As secções cônicas. 3 - Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.	*Unidade VIII - Curvas usuais:* 1 - Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2 - As secções cônicas. 3 - Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.
GEOMETRIA ANALÍTICA	
Unidade IV - Noções fundamentais: 1 - Concepção de Descartes. 2 - Coordenadas; abscissas sobre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3 - Distância de dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4 - Determinação de uma direção; ângulo de duas direções.	*Unidade IX - Noções fundamentais:* 1 - Concepção de Descartes. 2 - Coordenadas; abscissas sobre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3 - Distância entre dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4 - Determinação de uma direção; ângulo de duas direções.
Unidade V - Lugares geométricos: 1 - Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2 - Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3 - Equação da reta. 4 - Equação do círculo. 5 - Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.	*Unidade X - Lugares geométricos:* 1 - Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2 - Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3 - Equação da reta. 4 - Equação do círculo. 5 - Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.

ANEXO B – PROGRAMA MÍNIMO DE MATEMÁTICA DAS SÉRIES DO 2º CICLO (1951)

Observação: os parágrafos em negrito destinam-se somente ao curso científico; os demais são comuns ao curso clássico e ao científico.

1ª SÉRIE
I – Noções sobre o cálculo aritmético aproximado; erros. 1. Aproximação e erro. Valor por falta ou por excesso. Erro absoluto e erro relativo. Algarismos exatos de um número aproximado. Erro de arredondamento. 2. Adição, subtração, multiplicação e divisão com números aproximados. O cálculo da aproximação dos resultados e o seu problema inverso; método dos erros absolutos.
II – Progressões 1. Progressões aritméticas; termo geral; soma dos termos. Interpolação aritmética. 2. Progressões geométricas; termo geral; somo e produto dos termos. Interpolação geométrica.
III – Logaritmos 1. O cálculo logarítmico como operação inversa da potenciação. Propriedades gerais dos logaritmos; mudanças de base. Características e mantissa. Cologaritmo. 2. Logaritmos decimais; propriedades. Disposição e uso das tábuas de logaritmos. Aplicação ao cálculo numérico. **3. Equações exponenciais simples; sua resolução com o emprego de logaritmos.**
IV – Retas e planos; superfícies e poliedros em geral; corpos redondos usuais; definições e propriedades; áreas e volumes. 1. Reta e plano; postulados; determinação; intersecção; paralelismo; distância; inclinação e perpendicularismo. Diedros e triedros. Ângulos; sólidos em geral. 2. Generalidade sobre os poliedros em geral. Poliedros regulares; indicações gerais. 3. Prismas; propriedades gerais e, em especial, dos paralelepípedos; área lateral; área total; volume. 4. Pirâmides; propriedades gerais, área lateral; área total, volume. Troncos de prisma e troncos de pirâmide. **5. Estudo sucinto das superfícies em geral. Superfícies retilíneas e superfícies curvilíneas. Superfícies desenvolvíveis e superfícies reversas. Superfícies de revolução. Exemplos elementares dos principais tipos da classificação de Monge.** 6. Cilindros; propriedades gerais, área lateral; área total, volume; Troncos de cilindro.

7. Cones; propriedades gerais, área lateral; área total, volume. Troncos de cone de bases paralelas. 8. Esfera; propriedades gerais. Área e volume da esfera e das suas diversas partes.
V – Seções cônicas; definições e propriedades fundamentais. 1. Elipse; definição e traçado; círculo principal e círculo diretores; excentricidade; tangente. 2. Hipérbole; definição e traçado; assíntotas; círculo principal e círculo diretores; excentricidade; tangente. 3. Parábola; definição e traçado; diretriz; tangente. **4. As seções determinadas por um plano numa superfície cônica de revolução; teorema de Dandelin.**
2ª SÉRIE
I – Análise combinatória simples 1. Arranjos de objetos distintos; formação e cálculo do número de grupamentos. 2. Permutações de objetos distintos; formação e cálculo do número de grupamentos. Inversão. Classe de uma permutação; teorema de Bézout. **3. Permutação simples, com objetos repetidos; cálculo no número de grupamentos.** 4. Combinação de objetos distintos; formação e cálculo do número de grupamentos. Relação de Stifel; triângulo aritmético de Pascal.
II – Binômio de Newton 1. Lei de formação do produto de binômios distintos. Fórmula para o desenvolvimento binomial no caso de expoente inteiro e positivo; lei recorrente de formação dos termos. **2. Aplicação do desenvolvimento binomial ao problema da somação de potências semelhantes de uma sucessão de números naturais.**
III – Determinantes; sistemas lineares. 1. Determinantes e matrizes quadradas; propriedades fundamentais. Regra de Sarrus. Determinantes menores. Desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha ou coluna. Transformação dos determinantes. Abaixamento da ordem de um determinante pela regra de Chio. 2. Sistemas de n equações lineares com n incógnitas. Regra de Cramer. **3. Sistemas de m equações lineares com n incógnitas; teorema de Rouché.**
IV- Noções sobre vetores; projeções; arcos e ângulos; linhas e relações trigonométricas.

1. Grandezas escalares e vetoriais. Vetores; propriedades. Operações elementares com vetores. Relação de Chasles.
2. Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. Teorema de Carnot.
3. Generalização dos conceitos de arco e de ângulo. Arcos côngruos. Arcos da mesma origem e de extremidades associadas.
4. Linhas e funções trigonométricas diretas; definições e variação. Arcos correspondentes à mesma linha trigonométrica. Relações entre as linhas trigonométricas de um mesmo arco. Problema geral da redução ao 1º quadrante. Cálculo das linhas trigonométricas dos arcos expressos pela relação $\frac{\pi}{n}$.

V – Transformações trigonométricas em geral; equações trigonométricas simples.

1. Adição, subtração e multiplicação de arcos. Bissecção de arcos. Transformação de somas de linhas trigonométricas em produtos.
2. Disposição e uso de tábuas trigonométricas naturais e logarítmicas.
3. **Equações trigonométricas simples, tipos clássicos.**

VI- Resolução trigonométrica de triângulos.

1. Relações entre os elementos de um triângulo retângulo.
2. Casos clássicos de resolução de triângulos retângulos.
3. **Relações entre os elementos de um triângulo qualquer. Lei dos senos. Relações dos cossenos. Expressão trigonométrica da área.**
4. **Casos clássicos de resolução de triângulos quaisquer.**

3ª SÉRIE

I- Conceito de função; representação cartesiana; reta e círculo; noção intuitiva de limite e de continuidade.

1. Conceito elementar de variável e de função. Variável progressiva e variável contínua; intervalos. Noção intuitiva de limite de uma sucessão; exemplos clássicos elementares; convergência.
2. Funções elementares; classificação. Representação cartesiana de uma função e equação de uma curva. Curvas geométricas e curvas empíricas; noção intuitiva de continuidade. Representação gráfica de funções usuais; função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas diretas. Acréscimo de uma função num ponto; funções crescentes e funções decrescentes. Tangente; inclinação da tangente.
3. Limite de variáveis e de funções; limites infinitos. Propriedades fundamentais. Exemplos elementares de descontinuidade de uma função em um ponto.

Descontinuidade das funções racionais fracionárias. 4. A função linear e a linha reta em coordenadas cartesianas. Parâmetros angulares e parâmetro linear. Formas diversas de equação da linha reta. Representação paramétrica; área de um triângulo em função das coordenadas dos vértices. Os problemas clássicos de inclinação, interseção, passagem e distância, relativos à linha reta. 5. A equação geral do 2° grau com duas variáveis e a circunferência de círculo em coordenadas cartesianas. Formas diversas da equação da circunferência de círculo. Interseção de retas e circunferências.
II- Noções sobre derivadas e primitivas; interpretações; aplicações. 1. Definição da derivada em um ponto; notações; derivada infinita. Interpretação geométrica e cinemática da derivada. Diferença e diferencial; interpretação geométrica. Funções derivadas. Derivação sucessiva. 2. Regras de derivação; derivadas de uma constante; de uma função de função; de funções inversas; da soma, do produto e do quociente de funções. Aplicação à derivação de funções elementares. **3. Aplicação da teoria das derivadas ao estudo da variação de uma função. Funções crescentes e funções decrescentes; máximos e mínimos relativos; interpretação geométrica.** 4. Funções primitivas; integral indefinida; constante de integração. Primitivas imediatas; regras simples de integração. **5. Integral definida. Aplicação ao cálculo de áreas e de volumes; exemplos elementares.**
III – Introdução à teoria das equações; polinômios; propriedades; divisibilidade por $x \pm a$; problemas de composição, transformação e pesquisa de raízes; equações de tipos especiais. 1. Polinômios de uma variável; identidade. Aplicação ao método dos coeficientes a determinar. Divisibilidade de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Ruffini. Fórmula de Taylor para os polinômios; algoritmo de Ruffini-Horner. 2. Polinômios e equações algébricas em geral; raízes ou zeros. Conceito elementar de número complexo; forma binomial; complexos conjugados; módulo; representação geométrica. Operações racionais. Decomposição de um polinômio em fatores binômios; número de raízes de uma equação; raízes múltiplas e raízes nulas. Raízes complexas conjugadas. Indicação sobre o número de raízes reais contidas em um dado intervalo;

teorema de Bolzano; consequências.

3. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação; aplicação à composição das equações. Propriedades das raízes racionais inteiras e irracionais.
4. **Transformação das equações. Transformações de primeira ordem: aditivas, multiplicativas e recíprocas.**
5. **Equações recíprocas; classificação; forma normal; abaixamento do grau. Cálculo das raízes inteiras. Determinação das cotas pelo método de Laguerre-Thibault. Regras de exclusão de Newton. Algoritmo de Peletarius.**

ANEXO C – INSTRUÇÕES METODOLÓGICAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA DA PORTARIA DE 1951

No ensino secundário, a matemática desempenha, indiscutivelmente, um papel preponderante, como objeto de cultura, instrumento de trabalho e ---or[87] de aperfeiçoamento mental.

O alto valor educativo de seus métodos e processos de aprendizagem tem sido reconhecido e proclamado de um modo geral.

Tal aprendizagem presta-se a desenvolver, paulatinamente no aluno a capacidade de julgamento, o hábito de concisão e rigor na expressão, a intuição, a agilidade de ação e de raciocínio, e, também, a atenção e a presteza para compreender, reter e elaborar.

Cumpre assinalar, ainda, que o ensino da matemática, quando orientado de modo que torne explícito, além de seu aspecto quantitativo, seu caráter eminentemente qualitativo, torna-se um fator bastante ponderável, no curso secundário, para o desenvolvimento da imaginação e do senso estético do aluno.

É essencial, portanto, que neste ensino, não se percam jamais de vista tais objetivos, mantendo suas características culturais, educativas, práticas e de utilidade, inclusive como instrumento da técnica em geral e das outras ciências.

Impõe-se, assim, uma solicitação constante do aluno, que não poderá ser transformado em um mero receptor passivo do conhecimento. O estudo de cada assunto deverá ser ilustrado com aplicações e exemplos que lhe despertem a atenção e o interesse.

A unidade de matemática deverá ser posta em evidência, a cada passo, a fim de que seja percebida, com facilidade, a identidade dos métodos e dos procedimentos empregados nos seus diferentes ramos, muitas vezes, sem aparente inter-relação.

Proceder-se-á sempre progressivamente, não impondo regras de raciocínio, senão quando o espírito do discente estiver apto para recebê-las.

Especialmente nos primeiros anos do curso ginasial, o ensino terá caráter eminentemente prático e intuitivo.

Procurar-se-á despertar, aos poucos, no aluno, o sentimento da necessidade da justificativa, da prova e da demonstração, introduzindo-se, ainda no curso ginasial, o método dedutivo, com o cuidado que exige.

---

[87] O documento disponível no *site* http://www.jusbrasil.com.br/ está manchado, não foi possível identificar essa palavra.

A ideia de rigor não deverá ser exagerada, mesmo no segundo ciclo, a fim de que não se torne formal e fastidiosa a explanação da matéria, com o consequente alheamento do aluno, pelo processo de encadeamento dos conceitos, das demonstrações e dos problemas. O apelo à intuição jamais deverá ser dispensado. E a lição é de Jacques Hadamart, quando afirma que o rigor não tem tido outro objetivo senão o de sancionar e de legitimar as conquistas da intuição.

Não deverá ser esquecido que a matemática não é lógica pura, como se admitiu por muito tempo.

Dever-se-á dar especial atenção, principalmente no curso ginasial, ao exato significado dos termos empregados, fugindo-se sempre, da prática de simples memorização, que cansa e enfastia: do uso abusivo de definições, em particular, de definições descritivas, e mais das vezes viciosas; e. ainda, do recurso a demonstrações longas e pesadas que, ao invés de satisfazerem as necessidades lógicas que começam a ser despertadas, as embotam e atrofiam.

O exercício e o exemplo deverão acompanhar a explanação da matéria, entremeando-se com a sua exposição e, para os mesmo, necessário se torna solicitar, constantemente, a iniciativa do aluno.

O que importa não é ensinar muito, mas ensinar bem, com orientação adequada, evitando fatos e problemas puramente especulativos.

No curso ginasial não será introduzido o conceito de número imaginário. Somente na última série do segundo ciclo, ao serem dadas as propriedades gerais das equações e dos polinômios, será feita uma apresentação elementar desse conceito, acompanhada de sumária exposição das propriedades dos números complexos; o essencial para a compreensão do assunto que se segue.

O estudo das equações algébricas terá menos o objetivo de instruir o aluno sobre o calculo de suas raízes, que o de demonstrar-lhe as dificuldades que o problema revela de um modo geral.

Tenha-se sempre presente que o ensino não depende da disciplina em si, mas, principalmente, do aluno ao qual se ensina.

Assim sendo, a reação da turma e sua maior ou menor rapidez de entendimento constituirão, para o professor, os fatores decisivos que o aconselharão a estender-se além dos limites prescritos ou a reduzir o assunto nos pontos em que julgar indicado.

Os programas deverão ser cumpridos de acordo com a ordem e a disposição em que é apresentada a matéria.

ANEXO D – CARTA DE EUCLIDES ROXO PARA GUSTAVO CAPANEMA

Exmº Sr. Ministro Gustavo Capanema.

Recebi o recado de V. Ex. recomendando-me acrescentasse às "instruções metodológicas" para os programas de Matemática, uma determinação a respeito da maneira por que a matéria deverá ser distribuída em compêndios, podendo ser adotado qualquer critério, menos o de um compendio para cada série.

2. Acho-me, Sr. Ministro, na impossibilidade de redigir tal determinação porque estou profundamente convencido de que o único critério aceitável, principalmente para o caso da Matemática, é justamente o de um compêndio para cada série.

Peço vênia para repetir aqui as razões em que se funda aquela minha convicção e as quais já tive ensejo de expor verbalmente a V. Ex.

3. Apesar da forte oposição de algumas correntes reacionárias e soidisant tradicionalistas, manteve V. Ex. o ensino simultâneo da Aritmética e Geometria nas duas primeiras séries, bem como o da Álgebra e da Geometria nas duas últimas. Por outro lado, aos cortes e modificações sofridos pelo projeto de "instruções" que tive a honra de apresentar a V. Ex. escapou, graças por certo, ao fulgor da sua evidência meridiana, o preceito de que "A Matemática será sempre considerada como um todo harmônico, cujas partes estão em íntima correlação".

4. Ora, como terá o estudante a ideia de que "A Matemática é um todo harmônico" se ele recebe, para estudá-la dois compêndios: um de Aritmética, outro de Geometria; ou um de Álgebra e outro de Geometria? Nem se diga que essa separação, por assim dizer material, não poderá influir sobre a formação da mentalidade infantil; seria desconhecer a psicologia da criança (11 a 13 anos), negar o predomínio que, em seu espírito, ainda tem o concreto sobre o abstrato. Ao procurar o seu compendio para estudar ou para leva-lo ao colégio, ele não irá procurar a "sua matemática", mas sim "a sua álgebra", a sua "aritmética". Começará a arraigar-se em seu espírito a ideia de que o mundo nos apresenta problemas de Geometria, e não apenas, problemas de Matemática, em cada um dos quais terá de distinguir uma fase ou um aspecto geométrico, outro algébrico, outro aritmético.

5. Outro efeito psicológico desastroso é a impressão de que os autores ou editores separaram as duas partes unicamente para obrigá-lo a comprar dois livros em vez de um. Com efeito perguntará o estudante, "porque fazem uma aritmética e uma Geometria separadas, e não fazem uma Taxonomia, uma Morfologia, uma Sintaxe, ou uma Barologia, uma

Termologia, uma Ótica também separadas? Esses homens naturalmente querem vender dois livros em vez de um".

6. Há ainda o argumento de ordem didática e metodológica. Uma vez que salvamos (graças a quanto esforço, V. Ex. bem sabe!) o salutar princípio de que em cada série podem ser ensinadas ao menos duas partes da Matemática é natural que se formulem exercícios e problemas de recapitulação que envolvam conhecimentos dessas duas partes e que só poderiam achar-se naturalmente colocadas em um volume que tratasse de ambas.

7. Ainda do ponto de vista didático, a distribuição da matéria em um exemplar para cada série permite uma melhor graduação dos professores nos processos e na linguagem, e sua mais completa subordinação ao desenvolvimento intelectual e ao âmbito de interesses do aluno.

8. Sendo ainda habitual entre nós, o que alias é um bom sistema, darem-se em aula exercícios orais e escritos dos que se acham propostos no compêndio, é melhor que este contenha todo o programa da série, pois do contrario ficaria o professor sempre sujeito à restrição de só tratar de Aritmética, ou só de Geometria, etc. em cada aula, a não ser que obrigasse os alunos a trazerem diariamente, para a classe, os dois compêndios.

9. Além dessas razões de ordem psicológicas e de ordem didática, militam a favor da adoção de um compendio para cada série, outras razões de ordem econômica.

Admitindo-se, por exemplo, a hipótese de ser adotado um compêndio para Aritmética prática e outro para a Geometria intuitiva, cada um destes com a matéria da 1ª e da 2ª série, teria o estudante da 1ª série de dispender de uma só vez, o dobro (28 ou 30 cruzeiros ao invés de 15) do que iria gastar comprando um compendio que só contivesse toda a matéria da 1ª série (Aritmética e Geometria). Sabido que são pouco resistentes (para que não ultrapassem um preço acessível a um estudante pobre) o papel e a encadernação dos nossos compêndios didáticos, não raro acontecerá que o livro comprado no início da 1ª série se achará imprestável no início da 2ª, o que, mais provavelmente ainda, acontecerá se o aluno repetir a 1ª série. E os casos de perda do livro?

10. Não é só. Em caso de transferência na 2ª série, o aluno irá encontrar em o novo ginásio, um professor que não adote mais os compêndios que eram usados no antigo; nova despesa.

11. Ainda mais. Dentro de um mesmo estabelecimento, há geralmente professores de Matemática diferentes para as várias séries.

Ou os professores da 1ª e da 2ª série seriam obrigados a adotar os mesmos compêndios, e bem assim os da 3ª e da 4ª, o que seria um inconveniente cerceamento da necessária autonomia didática de que deve gozar o professor, ou os alunos teriam de fazer uma despesa dobrada toda vez que encontrassem na nova série um outro professor. E no caso de ser mudado o professor de um colégio? Ou o novo professor terá de sujeitar-se a adotar o compendio indicado pelo seu antecessor ou forçara os alunos a uma despesa dobrada. E se o novo professor for justamente o autor do compendio adotado pelo seu antecessor na série precedente, como poderia ele evitar a mudança de compendio e a consequente despesa supérflua para os alunos, sem infringir o art. 25 do Dec. 1006 de 30.XII.1938?

12. São estes os principais argumentos que me ocorrem, Sr. Ministro, a favor de uma distribuição por séries, em lugar da distribuição por matéria.

Os argumentos contrários à distribuição por série, que conheço através de apaixonada e tendenciosa campanha de imprensa, quase que não mereceriam contestação se não estivessem graças ao prestígio dos órgãos em que se conseguiram enquadrar as publicações, produzindo seus maléficos efeitos. Um destes foi por certo o erro pedagógico e didático em que inexplicavelmente incidiu o meu eminente amigo e abalisado mestre, Prof. Souza da Silveira, determinando a adoção de uma gramática única da 1ª à 4ª série ginasial, como se fosse possível adotar a mesma linguagem e o mesmo modo de exposição para estudantes de 11 e 12 anos e para outros de 14 15 ou 16! Com a adoção dessa gramática única, o Brasil regride; após todo o maravilhoso surto da pedagogia educacional neste século, a um estágio que já havia ultrapassado há 50 anos, com a publicação das três gramáticas (curso elementar, curso médio, curso superior), de João Ribeiro, que já naquela época se fazia percursor, como em tantas coisas mais, de princípios didáticos vencedores em nossos dias.

13. Os argumentos que têm sido apresentados em campanha de imprensa são a) de que a adoção de um compêndio por série sobrecarrega a economia do aluno b)o de que permite lucros fabulosos a autores e editores.

14. Quanto ao primeiro, já acima ficou provado, que justamente ao contrário, a distribuição da matéria em compêndios por série só pode favorecer a economia do aluno.

15. Ao segundo, quase sinto vexado de ter de contestá-lo!

Porque razão um autor ou editor ganhará mais vendendo dois volumes um para a 1ª série e outro para a 2ª série, do que vendendo também dois volumes, um de Aritmética para a 1ª série e para a 2ª, outro de Geometria também para as duas séries? Mesmo que se reduzisse esses volumes em um só, o seu preço não poderia deixar de ser aproximadamente a somo dos preços daqueles dois. De uma coisa, porém, estou certo, Sr. Ministro: os autores e editores deste modo, ganhariam mais, graças à inutilização de exemplares no decurso de uma série para a outro, nos casos acima apontados e em outros que, pela necessidade de resumir, deixamos de citar.

Queira, Sr. Ministro, acreditar na sinceridade com que procuro corresponder à honrosa confiança de V. Ex. e aceitar os meus protestos de alta estima e grande admiração.