



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.007/2001

O Campo Escalar no Formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau

José Tadeu Teles Lunardi

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

São Paulo, novembro de 2001

À minha mulher Luciana
e ao meu filho Caio

Agradecimentos

Agradeço às pessoas e instituições abaixo, as quais colaboraram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

- Ao Professor Pimentel, pela orientação e pelo amplo apoio que sempre dele recebi, tanto em assuntos acadêmicos quanto particulares.
- Ao Randall, amigo e colaborador, cuja participação foi de fundamental importância para o desenvolvimento de partes deste trabalho.
- Ao Juan, pela colaboração.
- Ao Professor Galetti e ao Maurizio, pela colaboração no grupo de álgebras deformadas.
- Ao Gargamel, pela colaboração na distância, pelas discussões a respeito do método causal e outros assuntos e, principalmente, junto com a Thelma e o Tomaz, pela inestimável amizade de todas as horas.
- À Cristina, pela amizade, pelas valiosas consultas *on line* e pela disposição permanente em ajudar.
- Aos amigos do IFT Cabelo, Cristiano, Cristiane, Leonardo, Marcos, Brenno, Felipe, Gadelha, Marcel, que tornaram agradáveis esses anos de convivência.
- A todos os funcionários do IFT.
- Ao Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de Ponta Grossa, em especial aos Professores Borsato e Stadler, pela concessão do afastamento integral para a realização deste trabalho.
- À CAPES-PICDT, pelo apoio financeiro.
- Por último, mas na ordem inversa de importância, agradeço à minha mulher Luciana e ao meu filho Caio, cujo apoio irrestrito e compreensão pela minha “ausência” foram fundamentais em todas as etapas deste trabalho, que a eles é dedicado.

Resumo

Neste trabalho consideramos alguns aspectos da teoria do campo escalar em interação no formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). No nível clássico estudamos dois casos: a interação mínima eletromagnética e a interação gravitacional no contexto das teorias de Einstein-Cartan e Teleparallelismo. No primeiro caso, mostramos que o formalismo DKP é completamente equivalente ao formalismo de Klein-Gordon (KG). No segundo caso, mostramos que a presença de torção no contexto da teoria de Einstein-Cartan destrói essa equivalência. Enquanto no formalismo KG não há interação entre o campo escalar e a torção, no formalismo DKP essa interação surge de maneira natural. Discutimos a diferença entre a interação com a torção nos contextos das teorias de Einstein-Cartan e do Teleparallelismo. No nível quântico formulamos a eletrodinâmica escalar *via* formalismo DKP no contexto da teoria de perturbação causal de Bogoliubov-Epstein-Glaser, de maneira a definir a matriz S de espalhamento de uma forma não efetiva e matematicamente rigorosa, livre de divergências. Consideramos, em ordem mais baixa de teoria de perturbação, o espalhamento Compton, a polarização do vácuo, a auto-energia da partícula escalar e a correção de vértice no limite de momento transferido nulo. Todos os resultados obtidos nesses cálculos concordam com aqueles obtidos na teoria DKP efetiva usual e nos tratamentos *via* formalismo de Klein-Gordon, corroborando assim a equivalência entre ambos os formalismos nesse contexto.

Palavras Chaves: equações relativísticas de primeira ordem; teoria de campos clássicos; teoria de perturbação causal.

Áreas do conhecimento: 1.05.02.01-7; 1.05.01.03-7; 1.01.04.01-1; 1.05.03.01-3

Abstract

In this work we consider some aspects of the interacting scalar field in the Duffin-Kemmer-Patiau (DKP) formalism. At the classical level we study two cases: the minimal electromagnetic interaction and the gravitational interaction in the context of Einstein-Cartan and Teleparallelism theories. In the former case we show that DKP formalism is completely equivalent to the Klein-Gordon (KG) one. In the later case we show that a nonvanishing torsion in Einstein-Cartan theory breaks this equivalence. While in the KG formalism the scalar field does not interact with torsion, in DKP formalism this interaction naturally arises. We discuss the difference between this interaction with torsion in the context of Einstein-Cartan and Teleparallelism. At the quantum level we formulate scalar electrodynamics *via* DKP formalism in the framework of Bogoliubov-Epstein-Glaser causal perturbation theory. We define the S-matrix in a non effective and mathematically rigorous way. We consider, in the lowest order of perturbation theory, the Compton scattering, vacuum polarization, scalar self-energy and the vertex function at the limit of zero transferred momentum. In these computations all our results agree with those obtained first in the usual effective theory and in the Klein-Gordon based approaches, which corroborate the statement about the equivalence of both formalisms in this context.

Índice

1	Introdução	1
2	A Teoria de Duffin-Kemmer-Petiau	5
2.1	Teoria livre	6
2.1.1	Ondas planas	11
2.2	Acoplamento eletromagnético: invariância de <i>gauge</i>	13
2.2.1	Componentes físicas e termos anômalos	14
2.3	Quantização da teoria livre	17
3	Interação gravitacional	23
3.1	A teoria de Einstein-Cartan	24
3.1.1	Acoplamento mínimo	29
3.1.2	Relatividade Geral	34
3.2	Teleparalelismo	35
4	O Formalismo Causal de Bogoliubov-Epstein-Glaser	39
4.1	Construção indutiva da matriz S	40
4.2	A bipartição de distribuições causais	46
5	Eletrodinâmica quântica escalar <i>via</i> formalismo DKP	55
5.1	Quantização do campo eletromagnético livre.	55
5.2	Matriz S	57
5.3	Invariância de <i>gauge</i>	59
5.4	Espalhamento Compton	61
5.5	Polarização do vácuo	64
5.6	Auto-energia	68
5.7	Correção do vértice	73
6	Considerações Finais	77
A	Algumas propriedades das matrizes β	80

B	Noções sobre a teoria de distribuições	82
C	Propriedades da matriz S	86
	Referências	90

Capítulo 1

Introdução

Após o sucesso da equação de Dirac para descrever partículas de spin $\frac{1}{2}$ alguns autores, na década de 1930, direcionaram esforços na busca de equações relativísticas de primeira ordem que descrevessem partículas de spin 0 e spin 1, alternativas às equações de segunda ordem de Klein-Gordon e Proca, respectivamente. Essas investigações tiveram início principalmente com de Broglie [1] e prosseguiram com Petiau [2] e, independentemente, com Kemmer[3] e Duffin [4]. A forma final do que passou a ser conhecida como a equação de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) foi apresentada por Kemmer em 1939 [5]. A equação DKP é uma equação matricial de forma similar à equação de Dirac, cujas representações irredutíveis, de ordens 5 e 10, descrevem campos de spin 0 e 1, respectivamente. Há ainda uma representação de ordem 1, que é trivial.

Na década seguinte a teoria de equações de primeira ordem para spins arbitrários foi desenvolvida, principalmente nos trabalhos de Lubánski, Madhavarao e Bhabha, culminando nas chamadas equações de onda relativísticas de primeira ordem de Bhabha [6]. Para maiores detalhes a respeito da evolução histórica dessas equações de primeira ordem citamos o artigo de Krajcik e Nieto [7] que, além disso, contém um grande número de referências abrangendo o assunto até a década de 1970.

Embora um grande número de publicações tenha se dedicado às equações DKP e Bhabha logo após o seu surgimento na literatura, o interesse no assunto diminuiu por volta do início dos anos 1950. Uma provável razão para isso foi a forte impressão que se estabeleceu na época de que o formalismo DKP de spin 0 e o formalismo de Klein-Gordon (KG) são equivalentes. Essa crença foi corroborada por vários resultados de aplicações de ambos os formalismos a uma série de situações [7, 8]. Assim, a maior complexidade aparente do formalismo DKP, devida à álgebra das matrizes 5×5 (no caso de spin 0), contribuiu para que esse formalismo fosse preterido em favor do formalismo de Klein-Gordon.

No entanto, a partir do início da década de 1970 essa suposta equivalência

começou a ser investigada em situações envolvendo quebras de simetria (como no decaimento de partículas instáveis) e processos hadrônicos, mostrando que em alguns casos os formalismos DKP e KG podem produzir resultados distintos ([7] e referências inclusas). Além disso, o formalismo DKP mostrou-se mais rico do que o de Klein-Gordon quanto às possibilidades de introdução de interações [9]. Nesse aspecto, foram propostos modelos alternativos baseados no formalismo DKP no estudo das interações méson-núcleo, onde foram relatados melhores ajustes aos dados experimentais quando comparados ao formalismo KG [10]. Nesse mesmo contexto, a semelhança formal com a equação de Dirac permitiu a generalização de técnicas de aproximação, inicialmente desenvolvidas para o espalhamento nucleon-núcleo, que alcançaram razoável êxito na descrição de dados experimentais do espalhamento méson-núcleo [11]. Também o espalhamento dêuteron-núcleo foi analisado no formalismo DKP, motivado pelo fato de que o formalismo sugere uma estrutura de spin 1 composta por duas partículas de spin $\frac{1}{2}$ [12]. Esses exemplos são apenas alguns, dentre outros na literatura, que contrariam a crença na completa equivalência entre os formalismos DKP e KG/Proca.

Embora no caso livre o formalismo DKP seja completamente equivalente aos de KG e Proca, não existem provas gerais até os dias de hoje que forneçam uma resposta final à questão da equivalência quando interações são introduzidas. Recentemente houve alguns progressos nesse sentido, onde foram construídas provas restritas de equivalência (equivalência entre os elementos físicos da matriz S) entre os formalismos DKP e KG para o campo escalar quântico interagindo com os campos eletromagnético e de Yang-Mills, externos ou quânticos, e com um campo gravitacional externo [13, 14]. À parte a questão de equivalência, o formalismo DKP tem sido aplicado recentemente no estudo de divergências infravermelhas na eletrodinâmica escalar [15], na descrição dos glúons na cromodinâmica quântica (QCD) [16], em dinâmica covariante hamiltoniana [17], no contexto de invariância galileana em cinco dimensões [18] e no espalhamento méson-núcleo [19], dentre outras aplicações.

Neste trabalho estudamos alguns aspectos do formalismo DKP para o campo escalar na presença de interações.

Inicialmente consideramos a teoria clássica com interação mínima eletromagnética, onde estudamos dois problemas: *i)* a questão de equivalência entre os formalismos DKP e KG [20] e *ii)* a presença de termos anômalos na forma hamiltoniana (tipo equação de Schrödinger) da equação, os quais são desprovidos de significado físico aparente [5]. Usando os operadores de projeção de Umezawa [21] selecionamos o setor escalar da teoria e escrevemos a lagrangiana DKP de uma forma que esta possa ser diretamente comparada com aquela de Klein-Gordon. Assim podemos mostrar

que os formalismos DKP e KG são completamente equivalentes [22], contrariamente ao estabelecido na literatura [20]. Mostramos também que os chamados termos anômalos não possuem significado físico, pois desaparecem quando o setor escalar é selecionado [22].

Após, estudamos a interação mínima do campo escalar com a gravitação no contexto da teoria de Einstein-Cartan, que constitui-se em uma generalização da Relatividade Geral através da introdução de torção, além de curvatura, no espaço-tempo [23]. Quando a torção não é identicamente nula deparamo-nos com um caso de *não equivalência* entre os formalismos DKP e KG [24]. Novamente selecionamos o setor escalar da teoria para compará-la ao formalismo de KG e discutir essa inequivalência. Dessa análise concluímos que no caso da Relatividade Geral, que é um caso especial da teoria de Einstein-Cartan em que a torção é identicamente nula, ambos os formalismos são equivalentes [25]. Discutimos também as diferenças conceituais entre o acoplamento do campo escalar com a torção nos contextos da teoria de Einstein-Cartan e do Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral [26, 27, 28].

Finalmente, consideramos a interação entre os campos DKP escalar e eletromagnético, ambos quânticos (SDKP). Além de estarmos interessados na questão da equivalência com o formalismo KG, podemos citar, dentre as motivações para estudar a QED escalar no formalismo DKP, o fato de que nesse formalismo não surgem acoplamentos derivativos entre o campo escalar e o campo de *gauge*, o que se constitui em uma vantagem sobre o formalismo de KG. Tal propriedade, na teoria perturbativa usual, resulta em expressões manifestamente covariantes para o hamiltoniano de interação e para os valores esperados no vácuo de produtos temporalmente ordenados de campos. Outra vantagem do formalismo DKP é a possibilidade dessa teoria ser formulada como uma teoria efetiva em que figuram somente termos de primeira ordem na constante de acoplamento no hamiltoniano de interação [8, 14]. No formalismo de KG esse termo de segunda ordem não pode ser eliminado, o que causa dificuldades no estabelecimento de uma prova perturbativa da invariância de *gauge* da teoria [29].

Formulamos a teoria SDKP no contexto do método perturbativo causal de Bogoliubov-Epstein-Glaser (BEG), o qual foi desenvolvido para lidar com as divergências ultravioletas em teorias quânticas de campos de uma forma matematicamente rigorosa [20, 30, 31]. Nesse contexto consideramos as contribuições à matriz S , em ordem mais baixa na constante de acoplamento, provenientes do espalhamento Compton, da polarização do vácuo e da auto-energia da partícula escalar. Determinamos também, através de uma identidade de Ward, a função de vértice no limite de momento transferido nulo. Um dos principais resultados dessa análise é o fato de que o método causal, juntamente com os requerimentos de invariância de *gauge* e

de conjugação de carga, determina de forma natural o propagador da teoria efetiva usual [32].

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 iniciamos apresentando os aspectos essenciais da equação de ondas DKP livre e as correspondentes soluções de ondas planas. Na sequência, introduzimos o acoplamento eletromagnético através do princípio de invariância de gauge e analisamos os problemas de equivalência e o significado dos termos anômalos. Ao final, apresentamos a quantização da teoria livre, cujos resultados são utilizados no capítulo 5, onde estudamos a teoria SDKP.

No Capítulo 3 estudamos a interação gravitacional. Iniciamos apresentando os aspectos essenciais da teoria de Einstein-Cartan e introduzimos a teoria escalar DKP minimamente acoplada à gravitação, onde analisamos o acoplamento com a torção. Apresentamos brevemente o caso especial da Relatividade Geral e, ao final, discutimos o acoplamento com a torção também no contexto do Teleparalelismo.

No Capítulo 4 apresentamos com alguns detalhes o método causal de Bogoliubov-Epstein-Glaser, dando especial ênfase ao processo de bipartição de distribuições causais.

No Capítulo 5 formulamos a QED escalar *via* formalismo DKP no contexto do método causal. Apresentamos brevemente a formulação da invariância de *gauge*. Na sequência, consideramos o espalhamento Compton, a polarização do vácuo, a auto-energia escalar e a função de vértice no limite de momento transferido nulo.

No Capítulo 5 discutimos nossos resultados e fazemos os comentários finais. Alguns detalhes técnicos ou informativos são deixados para os apêndices. Ao longo deste trabalho usamos a assinatura $(+, - - -)$.

Capítulo 2

A Teoria de Duffin-Kemmer-Petiau

As investigações na direção de uma equação relativística de primeira ordem iniciaram principalmente com de Broglie, que objetivava descrever fótons massivos a partir da combinação de dois léptons [7]. Para isso, construiu equações de ondas de primeira ordem definidas em um espaço de matrizes 16×16 , construídas como produto direto de dois espaços distintos de matrizes de Dirac [1]. Seus trabalhos tiveram prosseguimento com Petiau, que foi o primeiro a obter a álgebra satisfeita pelas matrizes 16×16 , em 1936 [2]. Independentemente, Kemmer, em 1938, considerou as equações de segunda ordem de Klein-Gordon e Proca como um sistema de equações acopladas de primeira ordem, escrevendo-as explicitamente como equações matriciais 5×5 e 10×10 , respectivamente. No entanto, neste trabalho não chegou a estabelecer as relações de comutação das matrizes correspondentes [3]. Duffin, logo após, estabeleceu parte dessas relações [4], as quais foram imediatamente completadas por Kemmer [5], que estabeleceu a forma final da *equação de Duffin-Kemmer-Petiau*.

Neste capítulo iniciaremos apresentando a teoria livre no nível clássico. Mostraremos que as representações irredutíveis não triviais da equação DKP descrevem campos escalares (na representação 5-dimensional) ou vetoriais (na representação 10-dimensional). Através das soluções de ondas planas poderemos ver claramente que a teoria contém graus de liberdade em excesso, o que a caracteriza como uma teoria vinculada [14]. Levaremos isso em conta no processo de quantização da teoria livre, ao final do capítulo, onde somente serão quantizados os graus de liberdade físicos.

Além de estudar a teoria DKP livre o acoplamento mínimo eletromagnético será introduzido na segunda seção, onde analisaremos as questões referentes à equivalência com o formalismo de Klein-Gordon e à interpretação física dos termos anômalos que surgem na forma hamiltoniana da equação, assim como em uma versão de segunda ordem da mesma.

2.1 Teoria livre

A densidade lagrangiana da teoria DKP livre é dada por¹

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \beta^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x), \quad (2.1)$$

onde β^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) são matrizes que satisfazem

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu g^{\nu\rho} + \beta^\rho g^{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Correspondentemente, ψ é uma função de onda multicomponente, cuja conjugada $\bar{\psi}$ é dada por

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \eta^0, \quad (2.3)$$

onde

$$\eta^0 = 2 \left(\beta^0 \right)^2 - 1. \quad (2.4)$$

Aplicando o princípio variacional na ação correspondente à lagrangiana acima obtemos as equações de movimento

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\psi}(x) \left(i\beta^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m \right) = 0. \quad (2.5)$$

A álgebra (2.2) pode ser realizada por um conjunto de matrizes β^μ construídas como soma direta de dois conjuntos de matrizes de Dirac $\{\gamma\}$ e $\{\gamma'\}$, como abaixo

$$\beta^\mu = \frac{1}{2} (\gamma^\mu I' + I \gamma'^\mu). \quad (2.6)$$

As matrizes β^μ assim definidas são matrizes 16×16 , que se constituem em uma representação redutível das relações algébricas (2.2). Pode ser mostrado que essas relações admitem somente três representações irredutíveis, que são aquelas de ordem 1, 5 e 10 [33]. A primeira é uma representação trivial, não tendo significado físico, ao passo que a segunda e a terceira correspondem, respectivamente, às representações de spin 0 (escalar) e de spin 1 (vetorial), como veremos adiante.

Sob transformações de Lorentz

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (2.7)$$

as funções de onda transformam-se como

$$\psi'(x') = U(\Lambda) \psi \left(\Lambda^{-1} x' \right), \quad (2.8)$$

¹Por economia de linguagem, a partir de agora usaremos simplesmente o termo “lagrangiana” para nos referirmos a uma “densidade lagrangiana”.

onde o operador $U(\Lambda)$ deve satisfazer

$$U^{-1}\beta^\mu U = \Lambda^\mu{}_\nu \beta^\nu. \quad (2.9)$$

Considerando transformações infinitesimais $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, com $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, temos²

$$U = 1 + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

onde

$$S^{\mu\nu} = [\beta^\mu, \beta^\nu]. \quad (2.11)$$

Usando produtos de matrizes β podemos construir operadores que selecionam os setores escalar e vetorial de uma representação arbitrária da álgebra (2.2), como veremos a seguir.

Setor escalar. Consideremos os seguintes produtos [21]:

$$P \stackrel{\text{def}}{=} -(\beta^0)^2 (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2; \quad (2.12)$$

$$P^\mu \stackrel{\text{def}}{=} P\beta^\mu. \quad (2.13)$$

Usando as relações algébricas (2.2) podemos mostrar que

$$P^\mu \beta^\nu = P g^{\mu\nu}, \quad PS^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}P = 0, \quad P^\mu S^{\lambda\nu} = g^{\mu\lambda}P^\nu - g^{\mu\nu}P^\lambda. \quad (2.14)$$

Portanto, sob transformações de Lorentz infinitesimais (2.10), temos

$$P(U\psi) = P\psi. \quad (2.15)$$

Dessa expressão vemos que o operador P seleciona as componentes de ψ que se transformam como um escalar.³ Analogamente,

$$P^\mu(U\psi) = P^\mu\psi + \omega^\mu{}_\nu (P^\nu\psi), \quad (2.16)$$

e concluímos que P^μ seleciona as componentes de ψ que se transformam como a componente μ de um 4-vetor.

Aplicando esses operadores sobre as equações de movimento (2.5), obtemos

$$\partial_\mu (P^\mu\psi) = -im(P\psi); \quad (2.17)$$

$$P^\mu\psi = \frac{i}{m} \partial^\mu (P\psi). \quad (2.18)$$

Substituindo a segunda dessas equações na primeira resulta que

$$(\square + m^2)(P\psi) = 0. \quad (2.19)$$

²Os índices gregos são elevados e abaixados através do tensor métrico $g^{\mu\nu}$ e seu inverso $g_{\mu\nu}$.

³ $P\psi$ é uma matriz-coluna.

Esses resultados estabelecem que todas as componentes da matriz coluna $P\psi$ representam campos escalares de massa m que satisfazem a equação de Klein-Gordon. De (2.18) vemos que P_μ representa o gradiente de $P\psi$.

Como ilustração, consideremos a representação 5×5 dada no apêndice A, expressões (A.9). Denotando a função de onda ψ como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

obtemos

$$P\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad P_\mu\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_\mu \end{pmatrix} \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.21)$$

de maneira que a equação (2.18) se escreve como

$$\psi_\mu = \frac{i}{m} \partial_\mu \psi_4. \quad (2.22)$$

Assim, definindo $\phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{m}}\psi_4$, podemos escrever

$$\psi = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{m}}\partial_0\phi \\ \frac{i}{\sqrt{m}}\partial_1\phi \\ \frac{i}{\sqrt{m}}\partial_2\phi \\ \frac{i}{\sqrt{m}}\partial_3\phi \\ \sqrt{m}\phi \end{pmatrix}, \quad (\square + m^2)\phi = 0. \quad (2.23)$$

Substituindo essa forma explícita de ψ na lagrangiana (2.1) obtemos, após a subtração de uma 4-divergência, a lagrangiana de Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi. \quad (2.24)$$

Esses resultados acima deixam claro que as representações 5×5 descrevem campos escalares.

Neste ponto observamos que a teoria DKP é vinculada, no sentido que as componentes do campo ψ não são todas independentes [14]. A consequência desses vínculos será vista mais adiante, quando procuraremos por soluções das equações

de movimento (2.5) em termos de ondas planas. Observaremos que a base dessas soluções admite apenas *duas* soluções linearmente independentes, a despeito do fato que numa representação escalar irredutível ψ é uma matriz-coluna com 5 componentes.

Setor vetorial. Definimos agora os seguintes operadores [21]:

$$R^\mu \stackrel{\text{def}}{=} (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 [\beta^\mu \beta^0 - g^{\mu 0}] ; \quad (2.25)$$

$$R^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} R^\mu \beta^\nu . \quad (2.26)$$

Usando as relações (2.2) podemos mostrar que esses operadores satisfazem as seguintes propriedades:

$$R^{\mu\nu} = -R^{\nu\mu} ; \quad (2.27)$$

$$R^\mu \beta^\nu \beta^\rho = R^{\mu\nu} \beta^\rho = g^{\nu\rho} R^\mu - g^{\mu\rho} R^\nu ; \quad (2.28)$$

$$R^\mu S^{\nu\rho} = g^{\mu\nu} R^\rho - g^{\mu\rho} R^\nu , \quad S^{\nu\rho} R^\mu = 0 ; \quad (2.29)$$

$$R^{\mu\nu} S^{\rho\lambda} = g^{\nu\rho} R^{\mu\lambda} - g^{\mu\rho} R^{\nu\lambda} - g^{\nu\lambda} R^{\mu\rho} + g^{\mu\lambda} R^{\nu\rho} . \quad (2.30)$$

Assim, sob transformações infinitesimais de Lorentz, temos

$$R^\mu U\psi = R^\mu \psi + \omega^\mu{}_\nu (R^\nu \psi) ; \quad (2.31)$$

$$R^{\mu\nu} U\psi = R^{\mu\nu} \psi + \omega^\mu{}_\lambda (R^{\lambda\nu} \psi) + \omega^\nu{}_\lambda (R^{\mu\lambda} \psi) . \quad (2.32)$$

Essas relações mostram que o operador R^μ seleciona as componentes de ψ que se transformam como a componente μ de um 4-vetor, ao passo que $R^{\mu\nu}$ seleciona aquelas que se transformam como a componente $\mu\nu$ de um tensor de 2ª ordem.

Aplicando os operadores (2.25) e (2.26) sobre as equações de movimento obtemos

$$\partial_\nu (R^{\mu\nu} \psi) = -im R^\mu \psi ; \quad (2.33)$$

$$R^{\mu\nu} \psi = -\frac{i}{m} U^{\mu\nu} , \quad (2.34)$$

onde

$$U^{\mu\nu} = \partial^\mu (R^\nu \psi) - \partial^\nu (R^\mu \psi) . \quad (2.35)$$

Combinando essas equações resulta em

$$(\square + m^2) R^\mu \psi = 0 , \quad \partial_\mu (R^\mu \psi) = 0 . \quad (2.36)$$

Portanto, os elementos da matriz coluna $R^\mu \psi$ representam componentes de campos vetoriais que satisfazem as equações de Proca (2.36). Aqui também podemos escolher

uma representação 10×10 para as matrizes β de maneira que

$$R_\mu \psi = R_\mu \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \vdots \\ \psi_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\mu \\ 0_{9 \times 1} \end{pmatrix} ; \quad (2.37)$$

$$R_{23} \psi = \begin{pmatrix} \psi_4 \\ 0_{9 \times 1} \end{pmatrix} , \quad R_{31} \psi = \begin{pmatrix} \psi_5 \\ 0_{9 \times 1} \end{pmatrix} ; \quad (2.38)$$

$$R_{12} \psi = \begin{pmatrix} \psi_6 \\ 0_{9 \times 1} \end{pmatrix} , \quad R_{10} \psi = \begin{pmatrix} \psi_7 \\ 0_{9 \times 1} \end{pmatrix} ; \quad (2.39)$$

$$R_{20} \psi = \begin{pmatrix} \psi_8 \\ 0_{9 \times 1} \end{pmatrix} , \quad R_{30} \psi = \begin{pmatrix} \psi_9 \\ 0_{9 \times 1} \end{pmatrix} . \quad (2.40)$$

Definindo

$$\psi_\mu = \sqrt{m} B_\mu , \quad (2.41)$$

onde B_μ é um campo vetorial, escrevemos (2.35) como

$$U_{\mu\nu} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ 0_{9 \times 1} \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ 0_{9 \times 1} \end{pmatrix} , \quad (2.42)$$

onde

$$F_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu . \quad (2.43)$$

As equações (2.36) podem agora ser escritas da forma

$$(\square + m^2) B^\mu = 0 , \quad \partial_\mu (B^\mu) = 0 , \quad (2.44)$$

o que mostra que as representações 10×10 descrevem campos vetoriais de massa m .

As representações específicas introduzidas para ilustrar os casos escalar e vetorial podem ser obtidas facilmente no processo usual de transformação de uma equação diferencial de segunda ordem em um sistema de equações de primeira ordem. No primeiro caso a linearização da equação de Klein-Gordon $(\square + m^2) \phi = 0$ é feita através da introdução das componentes do gradiente $\partial_\mu \phi$ como funções incógnitas adicionais. No segundo caso, introduzimos as componentes do tensor $F_{\mu\nu}$ como funções incógnitas adicionais.

Neste trabalho estudaremos o setor escalar da teoria em uma representação escalar arbitrária para as matrizes β . No entanto, a representação (A.9) será útil para fins ilustrativos ou para alguns cálculos específicos cujos resultados sejam independentes da representação utilizada.

2.1.1 Ondas planas

Procuraremos agora por soluções das equações (2.5) na forma de ondas planas

$$\psi(x) = u(p)e^{-ipx}, \quad (2.45)$$

onde a matriz coluna $u(p)$ e sua adjunta $\bar{u} = u^\dagger \eta^0$ devem satisfazer as equações

$$(\not{p} - m)u(p) = 0, \quad \bar{u}(p)(\not{p} - m) = 0. \quad (2.46)$$

Nas equações acima estamos usando a notação $\not{p} \stackrel{\text{def}}{=} \beta^\mu p_\mu$. Escrevendo $u(p)$ como

$$u(p) = \begin{pmatrix} u_0(p) \\ u_1(p) \\ u_2(p) \\ u_3(p) \\ u_4(p) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

e usando a representação (A.9), a primeira das equações (2.46) se escreve como

$$\begin{pmatrix} p_0 u_4 \\ p_1 u_4 \\ p_2 u_4 \\ p_3 u_4 \\ p^\mu u_\mu \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

o que implica em

$$u_\mu = \frac{p_\mu}{m} u_4 \quad \text{e} \quad p^2 = m^2. \quad (2.49)$$

Da condição $p^2 = m^2$ temos dois possíveis valores para p_0 ,

$$p_0 = \pm \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}. \quad (2.50)$$

Portanto, para cada valor do 3-momento $\mathbf{p}$ temos duas soluções, $u^+(\mathbf{p})$ e $u^-(\mathbf{p})$, que podem ser escritas como

$$u^\pm(\mathbf{p}) = N^\pm(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \mp p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ m \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

onde $N^\pm(\mathbf{p})$ são fatores de normalização e convencionamos de agora em diante que $p_0 = p_0(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} > 0$. Como já comentamos anteriormente, esse resultado

mostra que existem apenas *duas* soluções linearmente independentes da forma (2.45), que podem ser escritas como

$$u^-(\mathbf{p})e^{-ipx} \quad \text{e} \quad u^+(\mathbf{p})e^{ipx}, \quad \text{com} \quad p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}. \quad (2.52)$$

Usando (2.51) podemos verificar diretamente que

$$\overline{u}^\pm(-\mathbf{p})\beta^0 u^\mp(\mathbf{p}) = 0. \quad (2.53)$$

Os fatores de normalização $N^\pm(\mathbf{p})$ em (2.51) são escolhidos de forma a satisfazer as seguintes condições

$$\overline{u}^\pm(\mathbf{p})\beta^0 u^\pm(\mathbf{p}) = \mp 1, \quad (2.54)$$

o que resulta em⁴

$$N^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2mp_0}}. \quad (2.55)$$

Ressaltamos que, embora tenhamos usado uma representação particular para determinar as equações (2.53-2.54), em qualquer representação escalar da álgebra (2.2) é possível encontrarmos soluções $u^\pm$ que satisfaçam as condições (2.53-2.54).⁵

A solução geral das equações (2.5) pode ser escrita como

$$\psi(x) = \psi^{(-)}(x) + \psi^{(+)}(x) \quad (2.56)$$

$$\overline{\psi}(x) = \psi(x)^\dagger \eta^0 = \overline{\psi}^{(-)}(x) + \overline{\psi}^{(+)}(x), \quad (2.57)$$

onde

$$\psi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{p} \, a(\mathbf{p}) u^-(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \quad (2.58)$$

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{p} \, b(\mathbf{p})^* u^+(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \quad (2.59)$$

$$\overline{\psi}^{(-)}(x) = \overline{\psi}^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{p} \, b(\mathbf{p}) \overline{u}^+(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \quad (2.60)$$

$$\overline{\psi}^{(+)}(x) = \overline{\psi}^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{p} \, a(\mathbf{p})^* \overline{u}^-(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}, \quad (2.61)$$

onde p_0 nas expressões acima deve ser interpretado como $p_0(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$.

Os 4-vetores densidade de momento-energia $\mathcal{P}^\mu$ e densidade de corrente elétrica j^μ são definidos através das equações [34]

$$\mathcal{P}^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{i}{2} \overline{\psi} \beta^0 \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi - g^{0\mu} \mathcal{L}_0 \quad (2.62)$$

$$j^\mu \stackrel{\text{def}}{=} -e \overline{\psi} \beta^\mu \psi, \quad (2.63)$$

⁴As condições de normalização determinam $N^\pm(\mathbf{p})$ a menos de um fator de fase, que não tem significado físico e que convencionamos ser igual a 1.

⁵Podemos verificar facilmente a validade de (2.53) e (2.54) em uma representação arbitrária usando a identidade $\eta^0 \beta^0 = \beta^0 \eta^0 = \beta^0$ (ver o apêndice A).

onde $e > 0$ é a carga elétrica fundamental. Das equações (2.5) podemos concluir que a corrente se conserva

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.64)$$

2.2 Acoplamento eletromagnético: invariância de *gauge*

Introduziremos agora a interação do campo DKP com o campo eletromagnético através do princípio de invariância de *gauge* local da teoria, que exige a invariância da lagrangiana sob transformações de *gauge* do segundo tipo, dadas por

$$\psi'(x) = e^{ief(x)}\psi(x), \quad \bar{\psi}'(x) = e^{-ief(x)}\bar{\psi}(x), \quad (2.65)$$

onde $f(x)$ é uma função diferenciável real. Como é sabido, a lagrangiana $\mathcal{L}_0$ em (2.1) não é invariante sob essas transformações. Para torná-la invariante é suficiente introduzir na teoria um *campo de gauge* $A_\mu(x)$ através da seguinte *substituição mínima* em $\mathcal{L}_0$:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (2.66)$$

onde o campo A_μ deve transformar-se como

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x). \quad (2.67)$$

Assim, a lagrangiana do campo DKP minimamente acoplado ao campo eletromagnético é dada por

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (2.68)$$

onde $\mathcal{L}_0$ é a lagrangiana do campo DKP livre e $\mathcal{L}_{\text{int}}$ é o termo correspondente à interação, dado por

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e\bar{\psi}\beta^\mu\psi A_\mu. \quad (2.69)$$

A lagrangiana completa da teoria deve conter ainda um termo invariante de *gauge* associado ao campo eletromagnético livre, que é dado por

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (2.70)$$

com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Logo, temos

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_{\text{int}}. \quad (2.71)$$

Através do princípio variacional obtemos as seguintes equações de movimento acopladas⁶

$$(i\beta^\mu\partial_\mu - m)\psi = -e\beta^\mu A_\mu\psi \quad (2.72)$$

⁶Estamos assumindo a escolha do *gauge* de Lorentz $\partial_\nu A^\nu = 0$.

e

$$\square A^\mu = -e\bar{\psi}(x)\beta^\mu\psi(x) = j^\mu(x). \quad (2.73)$$

As equações acima são invariantes sob transformações de conjugação de carga

$$\psi \rightarrow \psi^c = \mathcal{C}\bar{\psi}^T, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu^c = -A_\mu, \quad (2.74)$$

onde o sobrescrito ^T denota transposição. O operador de conjugação de carga $\mathcal{C}$ deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$\mathcal{C}\beta^{\mu T}\mathcal{C}^\dagger = -\beta^\mu \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1}. \quad (2.75)$$

Em qualquer representação em que as matrizes β sejam todas reais o operador de conjugação de carga $\mathcal{C}$ é dado por⁷

$$\mathcal{C} = \eta^1\eta^2\eta^3, \quad (2.76)$$

onde os operadores η^k são dados por

$$\eta^k = 2\left(\beta^k\right)^2 + 1 \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.77)$$

2.2.1 Componentes físicas e termos anômalos

Nesta subseção determinaremos as componentes do campo ψ quando a interação eletromagnética está presente. Nossos objetivos serão: *i*) analisar a equivalência clássica entre o setor escalar da teoria DKP e a teoria de Klein-Gordon na presença do acoplamento mínimo eletromagnético e *ii*) analisar a interpretação física de alguns termos, ditos anômalos, que surgem na forma hamiltoniana (equação do tipo Schrödinger) e em versões de segunda ordem da equação (2.72).

Aplicando os operadores P e P^μ sobre a equação (2.72) temos

$$D_\mu(P^\mu\psi) = -im(P\psi); \quad (2.78)$$

$$P^\mu\psi = \frac{i}{m}D^\mu(P\psi), \quad (2.79)$$

que, combinadas, resultam em

$$(D_\mu D^\mu + m^2)P\psi = 0. \quad (2.80)$$

E assim concluímos que os elementos da matriz coluna $P\psi$ são campos escalares satisfazendo a equação de Klein-Gordon minimamente acoplada. Da equação (2.79)

⁷No apêndice A apresentamos algumas propriedades de comutação entre as matrizes β e η^μ , com as quais podemos verificar diretamente que o operador $\mathcal{C}$ (2.76) satisfaz todas as propriedades (2.75).

vemos que $P_\mu\psi$ está agora associado à *derivada covariante* de $P\psi$. Na representação (A.9) temos

$$P\psi = \begin{pmatrix} 0_{4\times 1} \\ \sqrt{m}\phi \end{pmatrix}, \quad P^\mu\psi = \frac{i}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 0_{4\times 1} \\ D^\mu\phi \end{pmatrix}, \quad (2.81)$$

onde, usando (2.80),

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\phi = 0. \quad (2.82)$$

Nesse caso, o campo ψ é dado por

$$\psi = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{m}}D_0\phi \\ \vdots \\ \frac{i}{\sqrt{m}}D_3\phi \\ \sqrt{m}\phi \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Substituindo essa expressão na lagrangiana total (2.71) obtemos, após a subtração de uma 4-divergência total,

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi + \mathcal{L}_{\text{em}} + ie(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*)A^\mu + e^2A_\mu A^\mu\phi^*\phi, \quad (2.84)$$

que é idêntica à lagrangiana que obteríamos pelo processo de substituição mínima na lagrangiana de Klein-Gordon livre (2.24). Esse resultado mostra que a teoria clássica de Duffin-Kemmer-Petiau é equivalente à teoria clássica de Klein-Gordon na presença de acoplamento mínimo eletromagnético. Como ilustração, podemos ver diretamente que a substituição da forma (2.83) na equação de movimento (2.72) implica na equação (2.82), ao passo que essa substituição na equação de movimento (2.73) resulta em

$$\square A^\mu = -ie[\phi^*D^\mu\phi - (D^{*\mu}\phi^*)\phi]. \quad (2.85)$$

que é equivalente à equação que obteríamos através da aplicação do princípio variacional na ação correspondente à lagrangiana de Klein-Gordon (2.84).

Esses resultados seguem de maneira simples e direta a partir do princípio de invariância de *gauge* e da correta determinação das componentes físicas do campo escalar ψ através do uso dos “projetores” P e P^μ .⁸ Na referência [20] os autores afirmam que a equivalência entre as teorias livres de Klein-Gordon e DKP é destruída na presença de acoplamento mínimo eletromagnético. Tal afirmação é consequência de uma interpretação incorreta das componentes do campo ψ , que teria a mesma forma na teoria livre e na presença da interação eletromagnética. Como podemos

⁸A rigor, um projetor $\mathcal{P}$ deve satisfazer a propriedade de idempotência, ou seja, $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Podemos verificar que P satisfaz essa propriedade, definindo um projetor genuíno, o que não ocorre com P^μ .

ver, essa possibilidade destrói a invariância de gauge da teoria, pois as componentes do campo livre (2.23) não se transformam covariantemente sob uma transformação de *gauge*. Por outro lado, a forma (2.83) transforma-se covariantemente sob essas transformações e é consistente com as equações de movimento.

Consideremos agora os termos anômalos, assim denominados por Kemmer em seu trabalho original pelo fato de que os mesmos não possuem uma interpretação física aparente [5]. Contraindo a equação (2.72) pela esquerda com $D_\alpha \beta^\alpha \beta_\mu$, após algumas manipulações algébricas obtemos

$$D^\mu \phi = \beta^\nu \beta^\mu D_\nu \phi + \frac{e}{2m} F_{\alpha\nu} (\beta^\nu \beta^\mu \beta^\alpha + \beta^\nu g^{\mu\alpha}) \psi. \quad (2.86)$$

Tomando $\mu = 0$ nessa expressão, temos

$$D^0 \psi - (\beta^0)^2 D_0 \psi - \beta^i \beta^0 D_i \psi - \frac{e}{2m} F_{\alpha\nu} (\beta^\nu \beta^0 \beta^\alpha + \beta^\nu g^{0\alpha}) \psi. \quad (2.87)$$

Multiplicando (2.72) pela esquerda por $-i\beta^0$ obtemos

$$(\beta^0)^2 D_0 \psi + \beta^0 \beta^i D_i \psi + im \beta^0 \psi = 0. \quad (2.88)$$

Somando (2.87) e (2.88) obtemos uma equação análoga à equação de Schrödinger para o campo DKP minimamente acoplado

$$i\partial_0 \psi = H_{DKP} \psi, \quad (2.89)$$

onde o Hamiltoniano DKP é dado por

$$H_{DKP} = i [\beta^i, \beta^0] D_i - eA^0 + m\beta^0 + i\frac{e}{2m} F_{\alpha\nu} (\beta^\nu \beta^0 \beta^\alpha + \beta^\nu g^{0\alpha}). \quad (2.90)$$

Finalmente, contraindo (2.87) com D_μ , obtemos uma equação de segunda ordem

$$D_\mu D^\mu \psi + m^2 \psi - \frac{i}{2} e F_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \psi - \frac{e}{2m} (\beta^\nu \beta^\mu \beta^\alpha + \beta^\nu g^{\mu\alpha}) D_\mu (F_{\alpha\nu} \psi) = 0. \quad (2.91)$$

Os termos anômalos são aqueles proporcionais a $\frac{e}{2m}$ nas equações (2.90) e (2.91). Os demais termos têm interpretação similar aos termos análogos que aparecem quando se trabalha com a equação de Dirac.

Para analisar o significado físico desses termos no setor escalar da teoria DKP aplicamos o operador P às equações (2.89) e (2.91). No primeiro caso, obtemos

$$i\partial_0(P\psi) = PH_{DKP}\psi. \quad (2.92)$$

Usando as relações (2.14) podemos mostrar que

$$P [\beta^i, \beta^0] = 0 \quad \text{e} \quad F_{\alpha\nu} P (\beta^\nu \beta^0 \beta^\alpha + \beta^\nu g^{0\alpha}) = 0. \quad (2.93)$$

Substituindo esses resultados em (2.89), e usando as relações (2.79), obtemos uma identidade.

Aplicando P sobre a equação de segunda ordem (2.91) observamos que o operador P dá resultado nulo quando aplicado sobre o terceiro e quarto termos dessa equação, significando que a interação *spin-campo* $F_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\psi$, assim como o termo anômalo, anula-se quando selecionamos o setor escalar da teoria. Assim, ao final obtemos a equação de Klein-Gordon (2.80) para $P\psi$.

Mostramos então que os termos anômalos não têm significado físico, pelo fato que se anulam, quando selecionamos o setor escalar da teoria. Por um procedimento análogo podemos concluir, pelas mesmas razões, que também no setor vetorial tais termos não possuem significado físico [22]. Com respeito aos termos anômalos, as mesmas conclusões podem ser encontradas na referência [35], usando uma representação particular para as matrizes β . Enfatizamos que nossos resultados independem da representação.

2.3 Quantização da teoria livre

Nosso ponto de partida para quantizar a teoria DKP livre serão as equações (2.56-2.61). Para isso consideraremos os coeficientes de Fourier $a(\mathbf{p})$, $b(\mathbf{p})$ e seus complexos conjugados como *operadores de campos* (mais precisamente, *distribuições a valores de operadores*) no espaço de Fock $\mathcal{F}^+ = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^+$, onde $\mathcal{H}_n^+$ é o espaço de Hilbert de estados (simétricos) de n partículas (no caso, bósons). Assumindo de agora em diante que essas distribuições são temperadas (ver apêndice B), as relações (2.58-2.61) definem transformadas de Fourier de distribuições e os campos ψ e $\bar{\psi}$ também serão distribuições (temperadas) a valores de operadores. A seguir impomos as seguintes relações de comutação

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad \text{e} \quad [b(\mathbf{p}), b^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') , \quad (2.94)$$

sendo nulos todos os demais comutadores.

Os operadores do espaço de Fock associados a essas distribuições são dados por

$$A(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3\mathbf{p} \, a(\mathbf{p}) f^*(\mathbf{p}) ; \quad (2.95)$$

$$A^\dagger(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3\mathbf{p} \, a^\dagger(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) ; \quad (2.96)$$

$$B(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3\mathbf{p} \, b(\mathbf{p}) f^*(\mathbf{p}) ; \quad (2.97)$$

$$B^\dagger(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3\mathbf{p} \, b^\dagger(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) , \quad (2.98)$$

onde $f(\mathbf{p}) \in \mathcal{H}_1$ é uma função de onda do espaço de Hilbert de 1 partícula.

Consideremos $f, g \in \mathcal{H}_1$. As relações (2.94) implicam nos seguintes comutadores

$$[A(f), A^\dagger(g)] = (f, g) = [B(f), B^\dagger(g)] , \quad (2.99)$$

onde

$$(f, g) = \int d^3\mathbf{p} f^*(\mathbf{p})g(\mathbf{p}) \quad (2.100)$$

é o produto interno em $\mathcal{H}_1$. Os demais comutadores entre esses operadores são nulos.

As relações de comutação acima permitem a identificação de $A(f)$ e $A^\dagger(f)$ respectivamente como operadores de aniquilação e criação de uma partícula do tipo A no espaço de Fock, cujo estado é descrito pela função de onda f . A mesma interpretação se aplica aos operadores $B(f)$ e $B^\dagger(f)$ com respeito a partículas do tipo B .

Os operadores *número total* de partículas dos tipos A e B são definidos como

$$\begin{aligned} N_A &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_j A^\dagger(f_j)A(f_j) \\ &= \int d^3\mathbf{p} a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) ; \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} N_B &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_j B^\dagger(f_j)B(f_j) \\ &= \int d^3\mathbf{p} b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p}) , \end{aligned} \quad (2.102)$$

onde o conjunto de funções f_j é assumido ser uma base em $\mathcal{H}_1$.

Substituindo os coeficientes de Fourier em (2.56-2.61) pelos correspondentes operadores de campo temos que $\psi^{(-)}$ e $\bar{\psi}^{(-)}$ contêm apenas operadores de aniquilação, enquanto que $\psi^{(+)}$ e $\bar{\psi}^{(+)}$ contêm apenas operadores de criação.⁹

Consideraremos agora a carga elétrica total do campo, dada por

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3\mathbf{x} j^0(x) \\ &= -e \int d^3\mathbf{x} : \bar{\psi}(x)\beta^0\psi(x) : , \end{aligned} \quad (2.103)$$

onde a densidade de carga $j^0(x)$ é dada em (2.63) e a notação $::$ denota ordenamento normal dos operadores que figuram entre os pontos, ou seja, a aplicação dos operadores de aniquilação deve preceder a aplicação dos operadores de criação. Substituindo as expressões quantizadas referentes a (2.56) e (2.57) nessa expressão, obtemos

$$\begin{aligned} Q &= -e \int d^3\mathbf{p} \{a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) - b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p})\} \\ &= -e \{N_A - N_B\} . \end{aligned} \quad (2.104)$$

⁹De agora em diante, por economia de linguagem, cometeremos o abuso de chamar uma *distribuição a valores de operadores* simplesmente de *operador* sempre que o contexto não deixe dúvidas em relação a que objetos estamos nos referindo.

Portanto, as partículas do tipo A possuem carga elétrica negativa, ao passo que as do tipo B possuem carga positiva. Nos demais aspectos, os dois tipos de partículas são idênticos. Devido à invariância da teoria sob conjugação de carga, podemos transformar um tipo de partícula no outro através da transformação (2.74).

Usando a expressão normalmente ordenada para o 4-vetor momento-energia (2.62), podemos mostrar que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^\mu &= \int d^3\mathbf{p} \, p^\mu(\mathbf{p}) \{a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) + b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p})\} \\ &= \int d^3\mathbf{p} \, p^\mu(\mathbf{p}) \{n_A(\mathbf{p}) + n_B(\mathbf{p})\} ,\end{aligned}\tag{2.105}$$

onde definimos os operadores de campo

$$n_A(\mathbf{p}) = a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) \quad \text{e} \quad n_B(\mathbf{p}) = b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p}) .\tag{2.106}$$

Lembramos que nas expressões acima $p^0 = p^0(\mathbf{p})$.

As relações (2.94), juntamente com as expressões (2.56-2.61), implicam nas seguintes relações de comutação entre os campos ψ e $\bar{\psi}$

$$[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\lambda(y)] = [\psi_\alpha^{(-)}(x), \bar{\psi}_\lambda^{(+)}(y)] + [\psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}_\lambda^{(-)}(y)] .\tag{2.107}$$

O primeiro desses comutadores resulta em

$$[\psi_\alpha^{(-)}(x), \bar{\psi}_\lambda^{(+)}(y)] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \, u_\alpha^-(\mathbf{p}) \bar{u}_\lambda^-(\mathbf{p}) e^{-ip(x-y)} .\tag{2.108}$$

Usando a representação (A.9) podemos ver que

$$u_\alpha^-(\mathbf{p}) \bar{u}_\lambda^-(\mathbf{p}) = \frac{1}{2mp_0} \not{p} (\not{p} + m) .\tag{2.109}$$

Esse resultado é independente da representação, como mostraremos abaixo.

Das equações (2.46) temos que

$$\begin{aligned}(\not{p} - m)_{\rho\alpha} u_\alpha^-(\mathbf{p}) \bar{u}_\lambda^-(\mathbf{p}) &= 0 , \\ u_\alpha^-(\mathbf{p}) \bar{u}_\lambda^-(\mathbf{p}) (\not{p} - m)_{\lambda\rho} &= 0 .\end{aligned}\tag{2.110}$$

Das relações (2.2) podemos deduzir a seguinte identidade, válida para qualquer 4-vetor q :

$$\not{q} (\not{q}^2 - q^2) = 0 .\tag{2.111}$$

Voltando em (2.110), podemos identificar

$$u_\alpha^-(\mathbf{p}) \bar{u}_\lambda^-(\mathbf{p}) = C \not{p} (\not{p} + m)_{\alpha\lambda} .\tag{2.112}$$

A constante C será calculada através das condições de normalização (2.54) e das propriedades de traço das matrizes β (ver apêndice A). A condição de normalização (2.54) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\overline{u^-}_\lambda(\mathbf{p})\beta_{\lambda\alpha}^0 u^-_\alpha(\mathbf{p}) &= 1 \\ \text{Tr} \left\{ \beta^0 u^- (\mathbf{p}) \overline{u^-} (\mathbf{p}) \right\} &= 1 \\ \text{Tr} \left\{ \beta^0 \not{p} (\not{p} + m) \right\} &= \frac{1}{C} \\ \text{Tr} \left\{ \beta^0 \beta^\mu p_\mu m \right\} &= \frac{1}{C} \\ 2mg^{0\mu} p_\mu &= \frac{1}{C},\end{aligned}\tag{2.113}$$

onde usamos a propriedade de que o traço de um número ímpar de matrizes β é zero. Portanto, temos que

$$C = \frac{1}{2mp^0}.$$

Assim, o primeiro comutador do lado direito de (2.107) fica

$$\left[\psi_\alpha^{(-)}(x), \overline{\psi}_\lambda^{(+)}(y) \right] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{2mp^0} [\not{p} (\not{p} + m)]_{\alpha\lambda} e^{-ip(x-y)}.\tag{2.114}$$

De maneira semelhante, o segundo comutador do lado direito de (2.107) resulta em

$$\left[\overline{\psi}_\lambda^{(-)}(y), \psi_\alpha^{(+)}(x) \right] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{2mp^0} [\not{p} (\not{p} - m)]_{\alpha\lambda} e^{ip(x-y)}.\tag{2.115}$$

Introduzimos agora as distribuições

$$\Delta^\pm(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pm i}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) e^{-ipx} \theta(\pm p^0),\tag{2.116}$$

$$S^\pm(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} [i\not{\partial} (i\not{\partial} + m)] \Delta^\pm(x)\tag{2.117}$$

e

$$\Delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^+(x) + \Delta^-(x), \quad S(x) \stackrel{\text{def}}{=} S^+(x) + S^-(x).\tag{2.118}$$

A distribuição $\Delta(x)$ é a distribuição de Pauli-Jordan de massa m , que pode ser escrita de forma explícita como [20]

$$\Delta(x) = \frac{1}{2\pi} \text{sgn}(x^0) \left[\delta(x^2) - \theta(x^2) \frac{m}{2\sqrt{x^2}} J_1(m\sqrt{x^2}) \right].\tag{2.119}$$

Podemos ver facilmente que essa distribuição se anula para todo x do tipo espaço.¹⁰ De acordo como definido no apêndice B, escrevemos

$$\text{supp } \Delta(x) \subseteq \left\{ x \in \mathcal{M}^4 | x^2 \geq 0 \right\},\tag{2.120}$$

¹⁰Ver o apêndice B, onde definimos o significado da afirmação de que uma distribuição se anula em um dado conjunto aberto.

onde $\mathcal{M}^4$ denota o espaço-tempo de Minkowski. Como os pontos que satisfazem essa condição são causalmente conectados à origem $x = 0$, dizemos que o suporte da distribuição de Pauli-Jordan é *causal*. Então podemos escrever

$$\Delta(x) = \Delta^{\text{ret}}(x) - \Delta^{\text{av}}(x), \quad (2.121)$$

com

$$\Delta^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2 - ip^0 0}, \quad (2.122)$$

$$\Delta^{\text{av}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2 + ip^0 0}, \quad (2.123)$$

onde

$$\begin{aligned} \text{supp } \Delta^{\text{ret}}(x) &\subseteq \{x \in \mathcal{M}^4 | x^2 \geq 0, x^0 \geq 0\}, \\ \text{supp } \Delta^{\text{av}}(x) &\subseteq \{x \in \mathcal{M}^4 | x^2 \geq 0, x^0 \leq 0\}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos concluir que também o suporte da distribuição $S(x)$ é causal, de forma que podemos escrever

$$S(x) = S^{\text{ret}}(x) - S^{\text{av}}(x), \quad (2.124)$$

onde

$$S^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{m} [i\cancel{\partial} (i\cancel{\partial} + m)] \Delta^{\text{ret}}(x), \quad (2.125)$$

$$S^{\text{av}}(x) = \frac{1}{m} [i\cancel{\partial} (i\cancel{\partial} + m)] \Delta^{\text{av}}(x). \quad (2.126)$$

Para uso mais tarde, definimos também as distribuições

$$\Delta^{\text{F}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^{\text{ret}}(x) - \Delta^-(x) = \Delta^{\text{av}}(x) + \Delta^+(x), \quad (2.127)$$

$$S^{\text{F}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} i\cancel{\partial} (i\cancel{\partial} + m) \Delta^{\text{F}}(x), \quad (2.128)$$

as quais não possuem suportes causais, pois não se anulam em toda região externa ao cone de luz [31].

Voltando aos comutadores (2.114) e (2.115), temos

$$\left[\psi_\alpha^{(-)}(x), \bar{\psi}_\lambda^{(+)}(y) \right] = \frac{1}{i} S_{\alpha\lambda}^+(x - y) \quad (2.129)$$

$$\left[\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x), \psi_\lambda^{(+)}(y) \right] = -\frac{1}{i} S_{\lambda\alpha}^-(y - x). \quad (2.130)$$

Substituindo esse resultado em (2.107), temos finalmente

$$\left[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\lambda(y) \right] = \frac{1}{i} S(x - y). \quad (2.131)$$

Para uso no Capítulo 5, apresentamos abaixo as transformadas de Fourier¹¹ das distribuições $\Delta^\pm(x)$ e $S^\pm(x)$

$$\widehat{\Delta}^\pm(p) = \frac{\pm i}{2\pi} \delta(p^2 - m^2) \theta(\pm p^0) \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} \widehat{S}^\pm(p) &= \frac{1}{m} \not{p} (\not{p} + m) \widehat{\Delta}^\pm(p) \\ &= \frac{\pm i}{2\pi} \not{p} (\not{p} + m) \delta(p^2 - m^2) \theta(\pm p^0) . \end{aligned} \quad (2.133)$$

¹¹Usaremos a seguinte convenção para a transformada de Fourier 4-dimensional $\widehat{f}(p)$ de uma distribuição $f(x)$:

$$\widehat{f}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x f(x) e^{ipx} .$$

Capítulo 3

Interação gravitacional

Neste capítulo estudaremos a interação entre o campo escalar DKP *clássico* e o campo gravitacional no contexto da teoria de Einstein-Cartan, que generaliza a Relatividade Geral através da introdução de *torção*, além de curvatura, no espaço-tempo subjacente, denominado espaço-tempo de Riemann-Cartan.

Dentre as motivações para essa generalização podemos citar o fato que, microscopicamente, a *massa* não é a única propriedade associada à matéria, mas também o *spin* deve ser levado em conta. Uma extensão da Relatividade Geral para o domínio microscópico deveria, portanto, considerar a descrição da matéria em termos dessas duas quantidades. A interação gravitacional associa a massa à curvatura. Se desejamos manter a descrição geométrica das interações na teoria gravitacional, então o spin deve associar-se a outra propriedade geométrica do espaço-tempo. Na teoria de Einstein-Cartan essa propriedade é a *torção* [23].

A Relatividade Geral (RG) é um caso especial da teoria de Einstein-Cartan, em que a geometria do espaço-tempo (riemanniano) apresenta apenas curvatura, sendo a torção identicamente nula. Outro caso especial é o espaço-tempo de Weitzenböck, cuja geometria contém apenas torção, sendo identicamente nula a curvatura [26].

No espaço-tempo de Weitzenböck é possível a formulação de uma teoria equivalente à RG, denominada de Teleparalelismo (TP), ou Paralelismo Absoluto. Nesse espaço-tempo de curvatura nula a gravitação é descrita completamente pela torção e manifesta-se como uma *força* análoga à de Lorentz da interação eletromagnética [36]. Dentre as motivações, talvez a principal, para se considerar essa formulação alternativa para a RG é o fato de que nesse formalismo a gravitação pode ser descrita como uma teoria de *gauge* em relação ao grupo de translações. Pelo fato de que as partículas não se movem ao longo de geodésicas do espaço-tempo subjacente (de Weitzenböck), pode-se dizer, em um certo sentido, que na teoria TP a interação não é geometrizada [36, 27, 37]. Essas características aproximam a teoria gravitacional das teorias de *gauge* correspondentes às outras interações fundamentais, o que é

desejável quando se procura por uma teoria de unificação dessas interações.

Para uma discussão detalhada das teorias de Einstein-Cartan e do Teleparallelismo indicamos [23, 26, 28, 38, 39] e referências inclusas. Neste capítulo não discutiremos a dinâmica do campo gravitacional nessas teorias, apenas apresentaremos os detalhes essenciais para que possamos discutir as conseqüências do processo de acoplamento gravitacional no setor escalar da teoria DKP no contexto das três geometrias citadas acima.

3.1 A teoria de Einstein-Cartan

Consideremos uma variedade diferenciável 4-dimensional equipada com uma métrica, caracterizada pelo tensor $g_{\mu\nu}(x)$, e com uma conexão $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(x)$, não necessariamente simétrica com respeito aos dois primeiros índices, que define a variação infinitesimal de um vetor $B^{\mu}(x)$ sob transporte paralelo:

$$\delta B^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} -\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} B^{\beta} dx^{\alpha}, \quad (3.1)$$

$$\delta B_{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} B_{\rho} dx^{\alpha}. \quad (3.2)$$

A derivada covariante ∇_{α} é definida como

$$\nabla_{\alpha} B^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\alpha} B^{\mu} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} B^{\beta}, \quad (3.3)$$

$$\nabla_{\alpha} B_{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\alpha} B_{\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} B_{\beta},$$

e assim por diante para tensores de ordem superior.

Pode ser mostrado que a parte anti-simétrica da conexão,

$$Q_{\alpha\beta}^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}, \quad (3.4)$$

denominada de *torção*, define um tensor sob transformações gerais de coordenadas, contrariamente à conexão completa [23].

O espaço-tempo de Riemann-Cartan $\mathcal{U}^4$ é um caso especial de variedade equipada com métrica e conexão, caracterizada pela condição de *metricidade*, dada por

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.5)$$

Quando o tensor de torção (3.4) é identicamente nulo dizemos que a variedade é *riemanniana*. Nesse caso a conexão é dada pelos símbolos de Christoffel $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu}$, determinados completamente pela métrica

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \{ \partial_{\alpha} g_{\nu\beta} + \partial_{\beta} g_{\nu\alpha} - \partial_{\nu} g_{\alpha\beta} \}. \quad (3.6)$$

No caso geral a conexão de Riemann-Cartan pode ser escrita como

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\mu} - K_{\alpha\beta}{}^{\mu}, \quad (3.7)$$

onde $K_{\alpha\beta}{}^{\mu}$ é o *tensor de contorção*, definido por¹

$$K_{\alpha\beta\mu} \stackrel{\text{def}}{=} -Q_{\alpha\beta\mu} - Q_{\mu\alpha\beta} + Q_{\beta\mu\alpha}, \quad (3.8)$$

que é anti-simétrico com respeito aos dois últimos índices.

O *tensor de curvatura* $R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}$ associado à conexão de Riemann-Cartan $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu}$ é definido como [23]

$$R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}{}^{\nu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\mu}{}^{\nu} + \Gamma_{\alpha\lambda}{}^{\nu}\Gamma_{\beta\mu}{}^{\lambda} - \Gamma_{\beta\lambda}{}^{\nu}\Gamma_{\alpha\mu}{}^{\lambda}. \quad (3.9)$$

Neste ponto observamos que *torção* e *curvatura* são propriedades associadas à conexão [40]. Logo, para associarmos essas propriedades a uma dada variedade, precisamos antes especificar a conexão em relação à qual estamos nos referindo.

As derivadas covariantes (3.3) podem ser escritas de forma a separar a contribuição dos símbolos de Christoffel (parte riemanniana) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} B^{\mu} &= \overset{\circ}{\nabla}_{\alpha} B^{\mu} - K_{\alpha\beta}{}^{\mu} B^{\beta}, \\ \nabla_{\alpha} B_{\mu} &= \overset{\circ}{\nabla}_{\alpha} B_{\mu} + K_{\alpha\mu}{}^{\beta} B_{\beta}, \end{aligned}$$

onde definimos a contribuição riemanniana como

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\nabla}_{\alpha} B^{\mu} &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\alpha} B^{\mu} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\mu} B^{\beta}, \\ \overset{\circ}{\nabla}_{\alpha} B_{\mu} &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\alpha} B_{\mu} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\mu}{}^{\beta} B_{\beta}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nosso objetivo será determinar as equações do campo DKP em uma variedade de Riemann-Cartan. Para isso partiremos dos campos livres definidos no espaço-tempo de Minkowski $\mathcal{M}^4$, satisfazendo equações de movimento covariantes por transformações de Lorentz, de acordo com a teoria dada na primeira seção do capítulo anterior. Passaremos ao espaço de Riemann-Cartan através do procedimento de *substituição mínima*, que consiste em substituir as quantidades covariantes sob transformações de Lorentz no espaço de Minkowski $\mathcal{M}^4$ pelas correspondentes quantidades covariantes sob transformações gerais de coordenadas (TGC) no espaço de Riemann-Cartan. Para isso usaremos o formalismo das *tetradas*, que relaciona os campos definidos em cada ponto $x \in \mathcal{U}^4$ com suas projeções no espaço de Minkowski $\mathcal{M}^4(x)$ tangente ao ponto x [23]. A partir de agora usaremos índices latinos para nos

¹Os índices são levantados e abaixados através dos tensores métricos $g^{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$.

referirmos às quantidades definidas no espaço tangente e índices gregos para quantidades definidas sobre a variedade de Riemann-Cartan, denotada por $\mathcal{U}^4$. Também usaremos a notação η^{ab} para designar o tensor métrico (constante) no espaço de Minkowski, ficando $g^{\mu\nu}(x)$ reservado para a métrica em $\mathcal{U}^4$. Passaremos agora a apresentar os principais conceitos do formalismo de tetradas.

Sobre $\mathcal{U}^4$ introduzimos um conjunto de quatro *campos vetoriais* linearmente independentes $\{e_\mu^a(x)\}$, chamados de *tetradas* ou *vierbeins*, os quais, em cada ponto $x \in \mathcal{U}^4$, geram o espaço de Minkowski $\mathcal{M}^4(x)$ tangente a esse ponto. O índice de Lorentz a denota o vetor, enquanto que μ denota suas componentes. Assim $e_\mu^a(x)$, com a fixo e μ denotando suas componentes, é um 4-vetor sob transformações gerais de coordenadas no espaço $\mathcal{U}^4$. Se agora consideramos μ fixo e assumimos que o índice a denota suas componentes, $e_\mu^a(x)$ representará um 4-vetor sob transformações de Lorentz no espaço tangente $\mathcal{M}^4(x)$. Assumimos que os campos de tetradas satisfazem as seguintes relações de ortonormalidade:

$$\begin{aligned} e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} &= g_{\mu\nu} \\ e_\mu^a e_\nu^b g^{\mu\nu} &= \eta^{ab} \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} e^\mu_a e^\nu_b \eta^{ab} &= g^{\mu\nu} \\ e^\mu_a e^\nu_b g_{\mu\nu} &= \eta_{ab}, \end{aligned}$$

onde $e^\mu_a = g^{\mu\nu} \eta_{ba} e_\nu^b$. Os índices latinos e gregos são levantados e abaixados pelos tensores η e g , respectivamente.

Um tensor $B^{\mu\nu}(x)$, definido em $\mathcal{U}^4$, possui componentes B^{ab} no espaço tangente $\mathcal{M}^4(x)$, e vice-versa, de acordo com

$$B^{ab} = e_\mu^a e_\nu^b B^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad B^{\mu\nu} = e^\mu_a e^\nu_b B^{ab}. \tag{3.12}$$

Da mesma forma, temos $B_{ab} = e^\mu_a e^\nu_b B_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b B_{ab}$. Podemos ver facilmente que $B_\mu B^\mu = B_a B^a$ é um escalar, tanto sob transformações de Lorentz em $\mathcal{M}^4(x)$ quanto sob transformações gerais de coordenadas em $\mathcal{U}^4$.

Introduzimos agora a derivada covariante de um 4-vetor de Lorentz através das definições

$$D_\mu B^a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu B^a(x) + \omega_\mu^a{}_b(x) B^b(x), \tag{3.13}$$

$$D_\mu B_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu B_a(x) + \omega_\mu^b{}_a(x) B_b(x),$$

onde $\omega_\mu^a{}_b(x)$ é a *conexão de spin*, que se comporta como um 4-vetor com respeito ao índice μ , e que sob uma transformação de Lorentz $x^a \rightarrow \Lambda^a_b(x) x^b$ em $\mathcal{M}^4(x)$

transforma-se como:²

$$\omega_\mu^{ab} \rightarrow \Lambda^a{}_c \omega_\mu{}^c{}_d (\Lambda^{-1})^{db} - (\partial_\mu \Lambda)^a{}_c (\Lambda^{-1})^{cb}. \quad (3.14)$$

Com essas definições a quantidade $D_\mu B^a$ constitui-se em um 4-vetor de Lorentz (com respeito ao índice a) e em um 4-vetor sob TGC (com respeito ao índice μ). Também podemos ver que $D_\mu (A^a B_a) = \partial_\mu (A^a B_a)$.

Combinando (3.3) e (3.13) definimos a derivada covariante total ∇'_μ de uma quantidade B_ν^a contendo índices latinos e gregos:

$$\begin{aligned} \nabla'_\mu B_\nu^a &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu B_\nu^a + \omega_\mu{}^a{}_b B_\nu^b - \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho B_\rho^a \\ &= D_\mu B_\nu^a - \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho B_\rho^a \\ &= \nabla_\mu B_\nu^a + \omega_\mu{}^a{}_b B_\nu^b. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Essa expressão define um tensor sob TGC em $\mathcal{U}^4$ e um 4-vetor sob transformações de Lorentz em $\mathcal{M}^4(x)$. Observando a segunda e terceira linha dessa expressão concluimos que essa derivada reduz-se à derivada covariante de Lorentz (3.13) se a quantidade B não contiver índices gregos e à derivada covariante (3.3) se não contiver índices latinos. A definição acima pode ser facilmente generalizada para tensores (tanto sob transformações de Lorentz quanto sob TGC) de ordens superiores.

Na teoria de Einstein-Cartan o campo de tetradas deve satisfazer a seguinte condição [23]

$$\nabla'_\mu e_\nu^a = 0, \quad (3.16)$$

que implica, juntamente com a condição (3.5), nas seguintes relações:

$$\omega_\mu^{ab} = e_\alpha^a e^{\nu b} \Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha - e^{\nu b} \partial_\mu e_\nu^a = -\omega_\mu^{ba}. \quad (3.17)$$

Usando (3.7) podemos escrever essa equação como

$$\omega_\mu^{ab} = \gamma_\mu^{ab} - K_\mu^{ba}, \quad (3.18)$$

onde $K_\mu^{ba} = e^{\nu b} e^{\rho a} K_{\mu\nu\rho}$ e γ_μ^{ab} é a parte riemanniana da conexão de spin, definida como

$$\gamma_\mu^{ab} = e_\alpha^a e^{\nu b} \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\alpha - e^{\nu b} \partial_\mu e_\nu^a. \quad (3.19)$$

Usando esses resultados podemos escrever a derivada covariante total explicitando a contribuição riemanniana da seguinte forma:

$$\nabla'_\mu B_\nu^a = \overset{\circ}{\nabla}'_\mu B_\nu^a + K_{\mu\nu}{}^\rho B_\rho^a - K_{\mu b}{}^a B_\nu^b, \quad (3.20)$$

²O 4-vetor $x^a \in \mathcal{M}^4(x)$ é definido de forma natural como $x^a = e_\mu^a x^\mu$.

onde definimos

$$\overset{\circ}{\nabla}'_{\mu} B_{\nu}^a \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\circ}{D}_{\mu} B_{\nu}^a - \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\rho} B_{\rho}^a, \quad (3.21)$$

$$\overset{\circ}{D}_{\mu} B_{\nu}^a \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\mu} B_{\nu}^a + \gamma_{\mu}{}^a{}_b B_{\nu}^b. \quad (3.22)$$

Das definições acima podemos escrever as seguintes relações

$$\nabla'_{\mu} B^{\mu} = \nabla_{\mu} B^{\mu} = \nabla'_a B^a = D_a B^a, \quad (3.23)$$

onde $\nabla'_a \stackrel{\text{def}}{=} e^{\mu}{}_a \nabla'_{\mu}$ e $D_a \stackrel{\text{def}}{=} e^{\mu}{}_a D_{\mu}$.

Precisamos agora definir a derivada covariante total do campo DKP. Se considerarmos dois pontos próximos x_1 e x_2 em $\mathcal{U}^4$ com os correspondentes sistemas locais de tetradas $e_{\mu}^a(x_1)$ e $e_{\mu}^a(x_2)$, então os campos $\psi(x_1)$ e $\psi(x_2)$ são especificados em relação a esses sistemas de referência, respectivamente. Deslocando paralelamente as tetradas $e_{\mu}^a(x_1)$ de x_1 a x_2 obtemos um outro sistema de tetradas em x_2 , denotado por $e'_{\mu}{}^a(x_2)$, tal que

$$e'_{\mu}{}^a(x_2) - e_{\mu}^a(x_1) = \Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho} e_{\rho}^a dx^{\nu}, \quad (3.24)$$

onde usamos (3.2). O sistema $e'_{\mu}{}^a(x_2)$ poderia ser obtido a partir de $e_{\mu}^a(x_2)$ através de uma transformação de Lorentz infinitesimal em $\mathcal{M}^4(x_2)$, isto é,³

$$\begin{aligned} \Lambda^a{}_b(x_2) &= 1 - \omega^a{}_b(x_2), \\ e'_{\mu}{}^a(x_2) - e_{\mu}^a(x_2) &= -\omega^a{}_b(x_2) e_{\mu}^b(x_2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Logo, podemos escrever o primeiro membro de (3.24) como

$$\left[e'_{\mu}{}^a(x_2) - e_{\mu}^a(x_2) \right] + \left[e_{\mu}^a(x_2) - e_{\mu}^a(x_1) \right] = -\omega^a{}_b(x_2) e_{\mu}^b(x_2) + \partial_{\nu} e_{\mu}^a(x_1) dx^{\nu}. \quad (3.26)$$

Da condição (3.16) temos que

$$\partial_{\nu} e_{\mu}^a dx^{\nu} + \omega_{\nu}{}^a{}_b e_{\mu}^b dx^{\nu} = \Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho} e_{\rho}^a dx^{\nu}. \quad (3.27)$$

Comparando essa expressão com (3.24) e usando (3.26) concluímos que

$$\omega^a{}_b(x_2) = -\omega_{\nu}{}^a{}_b(x_1) dx^{\nu}, \quad (3.28)$$

onde desprezamos termos infinitesimais de segunda ordem. Denotamos agora por $\psi'(x_2)$ o campo ψ no ponto x_2 especificado em relação ao sistema de tetradas transportado $e'_{\mu}{}^a(x_2)$. Dessa forma a diferencial

$$D\psi \stackrel{\text{def}}{=} \psi'(x_2) - \psi(x_1) \quad (3.29)$$

³Adotamos o sinal negativo no segundo membro dessa equação de acordo com a convenção de transformação do *sistema de coordenadas*, ou transformação *passiva*. Quando interpretada como uma transformação das *funções de campo* então consideraremos o sinal trocado e a transformação é *ativa*, como em (3.30).

é covariante por construção. Observamos também que $\psi'(x_2)$ pode ser obtido a partir de $\psi(x_2)$ através de uma transformação de Lorentz (2.8-2.11) em $\mathcal{M}^4(x_2)$, com $\omega^a{}_b(x_2)$ dado por (3.28), isto é,

$$\psi'(x_2) - \psi(x_2) = \frac{1}{2}\omega_{ab}(x_2) S^{ab}\psi(x_2) = -\frac{1}{2}\omega_{\nu ab}(x_1) dx^\nu. \quad (3.30)$$

Assim, a diferencial covariante (3.29) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} D\psi &= [\psi'(x_2) - \psi(x_2)] + [\psi(x_2) - \psi(x_1)] \\ &= \left[\partial_\nu - \frac{1}{2}\omega_\nu{}^{ab} S_{ab} \right] \psi(x_1) dx^\nu. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dessa última expressão concluímos que a derivada covariante do campo ψ deve ser dada por

$$\nabla'_\nu \psi \stackrel{\text{def}}{=} D_\nu \psi = \left[\partial_\nu - \frac{1}{2}\omega_\nu{}^{ab} S_{ab} \right] \psi. \quad (3.32)$$

Da mesma forma, definimos

$$\nabla'_\nu \bar{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} D_\nu \bar{\psi} = \bar{\psi} \left[\overleftarrow{\partial}_\nu + \frac{1}{2}\omega_\nu{}^{ab} S_{ab} \right]. \quad (3.33)$$

3.1.1 Acoplamento mínimo

Obteremos agora a teoria DKP no espaço-tempo de Riemann-Cartan $\mathcal{U}^4$ através do processo de *substituição mínima* na lagrangiana (2.1), definida no espaço-tempo de Minkowski. Especificamente, faremos as seguintes substituições

$$\beta^a \rightarrow \beta^\mu \stackrel{\text{def}}{=} e^\mu{}_a \beta^a, \quad (3.34)$$

$$\partial_a \rightarrow \nabla'_\mu. \quad (3.35)$$

Assim, obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{RC}} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \beta^\mu \nabla'_\mu \psi - \left(\nabla'_\mu \bar{\psi} \right) \beta^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi \right\}. \quad (3.36)$$

O fator $\sqrt{-g}$, onde g denota o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, é necessário para que a lagrangiana gravitacional seja uma densidade escalar.⁴ Multiplicando ambos

⁴Neste ponto observamos que se tivéssemos partido, ao invés de (2.1), da lagrangiana “assimétrica”

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

teríamos obtido $\mathcal{L}_{\text{RC}} = \sqrt{-g} \bar{\psi} [i\beta^\mu \nabla'_\mu - m] \psi$. Na presença de torção essa lagrangiana não difere de (3.36) por apenas uma 4-divergência e é, portanto inequivalente a esta última. Assumiremos que (3.36) é a forma correta da lagrangiana DKP na teoria de Einstein-Cartan e descartaremos a forma assimétrica pelo fato de que esta, na presença de torção, apresenta a propriedade indesejável de que as equações de movimento resultantes para ψ e $\bar{\psi}$ não são adjuntas conjugadas entre si. Esses fatos não são exclusivos da teoria DKP; o mesmo ocorre com a teoria de Dirac [23].

os membros das relações (2.2) por $e^\mu{}_a e^\nu{}_b e^\rho{}_c$, e usando a definição (3.34), obtemos facilmente as relações⁵

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu g^{\nu\rho} + \beta^\rho g^{\mu\nu}. \quad (3.37)$$

Para obtermos as equações de movimento precisaremos determinar as seguintes expressões:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{RC}}}{\partial \bar{\psi}} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} \left[\beta^\mu \left(\partial_\mu - \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} S^{ab} \right) - \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} S^{ab} \beta^\mu \right] - m \right\} \psi \quad (3.38)$$

e

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{RC}}}{\partial \bar{\psi}_{,\mu}} &= -\frac{i}{2} \partial_\mu \left[\sqrt{-g} \beta^\mu \psi \right] \\ &= -\frac{i}{2} \left[\partial_\mu \left(\sqrt{-g} e^\mu{}_a \right) \beta^a \psi + \sqrt{-g} \beta^\mu \partial_\mu \psi \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Usando as relações (3.37) podemos escrever o termo entre colchetes em (3.38) como

$$[\dots] = \beta^\mu \partial_\mu - \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu\rho} (2\beta^\mu S^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} \beta^\nu - g^{\mu\nu} \beta^\rho), \quad (3.40)$$

onde $\omega_{\mu\nu\rho} = e_\nu{}^a e_\rho{}^b \omega_{\mu ab}$.

Das equações (3.6) e (3.16) temos que⁶

$$\begin{aligned} \partial_\mu e^\mu{}_a &= \omega_{\mu ba} e^{\mu b} - \Gamma_{\mu\rho}{}^\mu e^\rho{}_a, \\ \partial_\mu \sqrt{-g} &= \sqrt{-g} \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\nu. \end{aligned}$$

Usando esses resultados no primeiro termo de (3.39), obtemos

$$\partial_\mu \left(\sqrt{-g} e^\mu{}_a \right) = \sqrt{-g} \left(\omega_{\mu ba} e^{\mu b} + K_{\rho\mu}{}^\rho e^\mu{}_a \right). \quad (3.41)$$

Combinando (3.38) e (3.39) obtemos, após algumas manipulações de índices, a equação de movimento para ψ :

$$\left(i\beta^\mu \nabla'_\mu + \frac{i}{2} K_{\rho\mu}{}^\rho \beta^\mu - m \right) \psi = 0. \quad (3.42)$$

Substituindo a expressão (3.18) na derivada covariante podemos escrever essa equação de forma a separar os termos provenientes da parte riemanniana daqueles provenientes da torção:

$$i\beta^\mu \overset{\circ}{\nabla}'_\mu \psi - m\psi = -\frac{i}{2} (K_{\mu\nu\rho} S^{\nu\rho} + K_{\rho\mu}{}^\rho) \beta^\mu \psi, \quad (3.43)$$

⁵Na notação que estamos adotando as relações (2.2) devem ser interpretadas como

$$\beta^a \beta^b \beta^c + \beta^c \beta^b \beta^a = \beta^a \eta^{bc} + \beta^c \eta^{ab}.$$

⁶Usamos o fato de que a diferencial total do determinante g é dada por $dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$.

onde $\overset{\circ}{\nabla}'_{\mu}$ é a parte riemanniana da derivada covariante total, que aplicada sobre o campo ψ resulta em

$$\overset{\circ}{\nabla}'_{\mu} \psi \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\circ}{D}_{\mu} \psi = \left(\partial_{\mu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu\rho} S^{\nu\rho} \right) \psi. \quad (3.44)$$

Observamos em (3.43) a presença de um acoplamento, pelo menos aparente, entre o campo DKP e a torção no segundo membro da equação (3.43). Quando se descreve o acoplamento mínimo gravitacional na teoria de Einstein-Cartan para campos escalares no formalismo de Klein-Gordon esse acoplamento não aparece. De fato, fazendo a substituição mínima (3.35) na lagrangiana de Klein-Gordon (2.24) obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \sqrt{-g} \left[\partial^{\mu} \varphi^* \partial_{\mu} \varphi - m^2 \varphi^* \varphi \right], \quad (3.45)$$

que resulta na equação de movimento

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\mu} \partial^{\mu} \varphi + m^2 \varphi = 0 \quad (3.46)$$

e sua conjugada. Nessa equação o campo escalar de KG acopla-se apenas ao setor riemanniano da geometria e, portanto, não apresenta nenhuma interação com a torção.⁷

Logo, se as teorias DKP e KG forem equivalentes no contexto da teoria de Einstein-Cartan os termos envolvendo a torção na equação (3.43) devem desaparecer quando selecionarmos o setor escalar, como ocorreu no caso dos termos anômalos eletromagnéticos estudados no capítulo anterior. No entanto, veremos a seguir que isso não ocorre, evidenciando que na teoria de Einstein-Cartan os formalismos DKP e KG possuem conteúdos físicos distintos.

Setor escalar. Para estudarmos o setor escalar da teoria generalizaremos os “projetores” P^a do capítulo anterior da seguinte forma:

$$P^{\mu} = e^{\mu}{}_a P^a = e^{\mu}{}_a P \beta^a = P \beta^{\mu}. \quad (3.47)$$

permanecendo inalterado o projetor P . Usando as propriedades desses operadores no espaço tangente $\mathcal{M}^4(x)$, podemos obter imediatamente as seguintes propriedades no espaço $\mathcal{U}^4$:

$$P^{\mu} \beta^{\nu} = P g^{\mu\nu}, \quad P S^{\mu\nu} = 0. \quad (3.48)$$

⁷Observando (3.42) e (3.46) vemos que, embora tenhamos obtido as lagrangianas no espaço de Riemann-Cartan através do processo de substituição mínima nas correspondentes lagrangianas no espaço de Minkowski, as equações de movimento resultantes em $\mathcal{U}^4$ não podem ser obtidas das correspondentes equações em $\mathcal{M}^4$ pelo mesmo processo, o mesmo ocorrendo com a equação de Dirac. Essa é uma característica da teoria de Einstein-Cartan [23].

Usando essas propriedades obtemos as relações

$$\begin{aligned} P\nabla'_\mu\psi &= \nabla'(P\psi) = \partial_\mu(P\psi) , \\ P^\nu\nabla'_\mu\psi = \nabla'_\mu P^\nu\psi &= \partial_\mu(P^\nu\psi) + \Gamma_{\mu\rho}{}^\nu P^\rho\psi = e^\nu{}_c\nabla'_\mu P^c\psi . \end{aligned}$$

Logo, em $\mathcal{U}^4$ os campos $P\psi$ e $P^\nu\psi$ comportam-se sob derivação como um escalar e um 4-vetor, respectivamente.

Aplicando P sobre a equação (3.42) ou (3.43), obtemos

$$\begin{aligned} i\nabla'_\mu(P^\mu\psi) + \frac{i}{2}K_{\rho\mu}{}^\rho(P^\mu\psi) - m(P\psi) &= 0 \\ i\overset{\circ}{\nabla}'_\mu(P^\mu\psi) - \frac{i}{2}K_{\rho\mu}{}^\rho(P^\mu\psi) - m(P\psi) &= 0 , \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde $\overset{\circ}{\nabla}'_\mu(P^\mu\psi)$ contém apenas a conexão riemanniana (símbolos de Christoffel). Aplicando agora P^ν (em 3.42), obtemos

$$\begin{aligned} P^\nu\psi &= \frac{i}{m} \left\{ \nabla'^\nu(P\psi) + \frac{1}{2}K_\rho{}^{\nu\rho}(P\psi) \right\} \\ &= \frac{i}{m} \left\{ \partial^\nu(P\psi) + \frac{1}{2}K_\rho{}^{\nu\rho}(P\psi) \right\} . \end{aligned} \quad (3.50)$$

Substituindo (3.50) em (3.49) obtemos

$$\left(\nabla'_\alpha + \frac{1}{2}K_{\mu\alpha}{}^\mu \right) \left(\nabla'^\alpha + \frac{1}{2}K_\rho{}^{\alpha\rho} \right) P\psi + m^2 P\psi = 0 . \quad (3.51)$$

Usando a relação (3.20) podemos escrever essa equação de forma a separar a contribuição não riemanniana. Assim, obtemos

$$\overset{\circ}{\nabla}'_\mu \overset{\circ}{\nabla}'^\mu(P\psi) + m^2(P\psi) = \frac{1}{4} \left[K_{\lambda\alpha}{}^\lambda K_\rho{}^{\alpha\rho} - 2 \left(\overset{\circ}{\nabla}_\alpha K_\rho{}^{\alpha\rho} \right) \right] (P\psi) . \quad (3.52)$$

Portanto, vemos que a interação com a torção não se anula mesmo quando selecionamos o setor escalar da teoria. Daí concluímos que, no contexto da teoria de Einstein-Cartan com acoplamento mínimo gravitacional, o formalismo para o campo escalar baseado na lagrangiana DKP possui conteúdo físico distinto do formalismo usual baseado na lagrangiana de Klein-Gordon. O campo DKP acopla-se tanto ao setor riemanniano quanto à torção, enquanto que o campo KG acopla-se somente ao setor riemanniano, não “sentindo” a torção. Podemos entender a razão para essa diferença através das considerações a seguir.

Para fins de comparação com a teoria baseada na lagrangiana de KG (3.45) usaremos explicitamente a representação (A.9), dada no apêndice A, para as matrizes β^a referentes ao espaço tangente $\mathcal{M}^4(x)$. A representação para as matrizes β^μ fica

determinada através de (3.34). Como vimos no capítulo 2, nessa representação temos

$$P\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad P_a\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_a \end{pmatrix} \quad a = 0, 1, 2, 3, \quad (3.53)$$

onde ψ_a são os elementos da matriz-coluna que representa o campo ψ .

Substituindo esses resultados nas equações (3.50) e escrevendo $\psi_4 = \sqrt{m}\varphi$, o campo ψ será dado por:

$$\psi = \frac{i}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \nabla'_0 + \frac{1}{2}K_{\rho 0}{}^\rho \\ \nabla'_1 + \frac{1}{2}K_{\rho 1}{}^\rho \\ \nabla'_2 + \frac{1}{2}K_{\rho 2}{}^\rho \\ \nabla'_3 + \frac{1}{2}K_{\rho 3}{}^\rho \\ -im \end{pmatrix} \varphi = \frac{i}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \partial_0 + \frac{1}{2}K_{\rho 0}{}^\rho \\ \partial_1 + \frac{1}{2}K_{\rho 1}{}^\rho \\ \partial_2 + \frac{1}{2}K_{\rho 2}{}^\rho \\ \partial_3 + \frac{1}{2}K_{\rho 3}{}^\rho \\ -im \end{pmatrix} \varphi, \quad (3.54)$$

onde $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}$ denotam valores específicos dos índices latinos, referentes ao espaço tangente $\mathcal{M}^4(x)$, e $\nabla'_a = e_a^\mu \nabla'_\mu$. A equação de movimento (3.52) reduz-se a

$$\overset{\circ}{\nabla}'_\mu \overset{\circ}{\nabla}'^\mu \varphi + m^2 \varphi = \frac{1}{4} \left[K_{\lambda\alpha}{}^\lambda K_\rho{}^{\alpha\rho} - 2 \left(\overset{\circ}{\nabla}'_\alpha K_\rho{}^{\alpha\rho} \right) \right] \varphi. \quad (3.55)$$

Substituindo a forma explícita (3.54) na lagrangiana (3.36) obtemos, após a subtração de uma 4-divergência total,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{RC}} = \sqrt{-g} \left\{ \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{2} K_{\mu\nu}{}^\mu (\varphi^* \partial^\nu \varphi + \varphi \partial^\nu \varphi^*) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} K_{\mu\nu}{}^\mu K_\rho{}^{\nu\rho} \varphi^* \varphi \right\}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Podemos verificar diretamente que a essa lagrangiana correspondem as equações de movimento (3.55) e sua conjugada. O fato mais importante que devemos observar é que (3.56) pode ser obtida a partir da lagrangiana de Klein-Gordon no espaço-tempo de Minkowski através da seguinte substituição *não mínima*:⁸

$$\partial_a \rightarrow \nabla_\mu + \frac{1}{2} K_{\rho\mu}{}^\rho = \partial_\mu + \frac{1}{2} K_{\rho\mu}{}^\rho. \quad (3.57)$$

Logo, na teoria de Einstein-Cartan a lagrangiana DKP minimamente acoplada à gravitação é equivalente à lagrangiana obtida através da substituição *não mínima* (3.57) na lagrangiana de Klein-Gordon (2.24). Esse acoplamento não mínimo na

⁸Obviamente, além dessa substituição devemos multiplicar a lagrangiana pelo fator $\sqrt{-g}$ para torná-la uma densidade escalar.

lagrangiana KG é o responsável pela interação do campo escalar com a torção. Podemos então dizer que no formalismo DKP o campo escalar acopla-se à torção de forma natural, no sentido de que ocorre sem a necessidade de introdução de acoplamentos não mínimos.

3.1.2 Relatividade Geral

Consideraremos agora o caso particular da teoria de Einstein-Cartan em que o tensor de torção (3.4) é identicamente nulo. Assim, também será identicamente nulo o tensor de contorção, como podemos observar de (3.8). Nesse caso a teoria de Einstein-Cartan reduz-se à Relatividade Geral (RG) e todos os resultados obtidos até agora para uma conexão arbitrária $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ podem ser particularizados substituindo-se $Q_{\mu\nu}^\rho = 0$. Por exemplo, teremos,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho \\ \omega_\mu^{ab} &= \gamma_\mu^{ab} = -e^{\nu b} \overset{\circ}{\nabla}_\mu e_\nu^a \\ \nabla'_\mu B_\nu^a &= \overset{\circ}{\nabla}'_\mu B_\nu^a = \overset{\circ}{D}_\mu B_\nu^a - \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho B_\rho^a \\ \overset{\circ}{D}_\mu B_\nu^a &= \partial_\mu B_\nu^a + \gamma_\mu^a{}_b B_\nu^b \\ \overset{\circ}{\nabla}'_\mu \psi &= \overset{\circ}{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \gamma_\mu^{ab} S_{ab} \psi \\ \overset{\circ}{\nabla}'_\mu \bar{\psi} &= \overset{\circ}{D}_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \gamma_\mu^{ab} \bar{\psi} S_{ab} \psi.\end{aligned}$$

A lagrangiana DKP minimamente acoplada (3.36) agora escreve-se como

$$\mathcal{L}_{\text{RG}} = \sqrt{-g} \left[\frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \beta^\mu \overset{\circ}{\nabla}'_\mu \psi - \overset{\circ}{\nabla}'_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi \right) - m \bar{\psi} \psi \right], \quad (3.58)$$

que leva à equação de movimento (3.43)

$$i \beta^\mu \overset{\circ}{\nabla}'_\mu \psi - m \psi = 0, \quad (3.59)$$

a qual poderia ser obtida através de substituição mínima a partir da equação DKP (2.5) no espaço de Minkowski.

Aplicando os operadores P e P^μ nessa equação separamos o setor escalar, obtendo

$$\begin{aligned}P^\nu \psi &= \frac{i}{m} \overset{\circ}{\nabla}'^\nu (P\psi) \\ &= \frac{i}{m} \partial^\nu (P\psi)\end{aligned} \quad (3.60)$$

e

$$\overset{\circ}{\nabla}'_\mu \overset{\circ}{\nabla}'^\mu (P\psi) + m^2 (P\psi) = 0. \quad (3.61)$$

Esta última é a equação de Klein-Gordon para o campo escalar $P\psi$ minimamente acoplado à gravitação, que é idêntica àquela obtida através do acoplamento mínimo

na lagrangiana de Klein-Gordon em $\mathcal{M}^4$, ou nas equações de movimento derivadas dessa última. Logo, no contexto da Relatividade Geral (teoria clássica) os formalismos de campo escalar DKP e KG são completamente equivalentes entre si, tal como na eletrodinâmica clássica, como vimos no capítulo anterior. Pode ser mostrado que nesse contexto também há equivalência entre o setor vetorial do formalismo DKP e a teoria baseada na lagrangiana de Proca [25].

3.2 Teleparalelismo

Consideraremos nesta seção o caso particular em que o espaço-tempo de Riemann-Cartan reduz-se ao espaço-tempo de Weitzenböck, caracterizado por uma conexão cuja curvatura associada é identicamente nula, mas que pode apresentar torção diferente de zero. Essa conexão é denominada de conexão de Cartan e será denotada pelo símbolo geral $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(x)$. Nesse caso, dado um vetor (não um campo) h_0^ν em um dado ponto x_0 da variedade, podemos definir univocamente um *campo* vetorial $h^\nu(x)$ através do deslocamento paralelo do vetor h_0^ν para outros pontos x da variedade.⁹ Assim, este campo vetorial satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\nabla_\mu h^\nu = \partial_\mu h^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu h^\rho = 0, \quad (3.62)$$

suplementada pela condição inicial $h^\nu(x_0) = h_0^\nu$ [41].

Podemos agora considerar que o campo de tetradas $\{e_\mu^a\}$ seja construído dessa maneira, ou seja, através do deslocamento paralelo de um sistema de coordenadas definido em um dado ponto da variedade (pode ser mostrado facilmente que as propriedades de ortonormalidade do sistema de tetradas são preservadas durante o transporte paralelo). Assim, temos a condição de *paralelismo absoluto*

$$\nabla_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^a = 0, \quad (3.63)$$

com o campo de tetradas satisfazendo as condições de ortonormalidade (3.11).¹⁰ Podemos então identificar

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = e_\mu^a \partial_\nu e_a^\rho. \quad (3.64)$$

⁹Se a curvatura (3.9) associada à conexão não fosse identicamente nula essa construção não seria possível, pois nesse caso o deslocamento paralelo de um vetor (tensor) de um ponto a outro da variedade dependeria do caminho escolhido entre esses pontos.

¹⁰Observamos que, dado o sistema de tetradas $\{e_\mu^a\}$, poderíamos determinar o sistema $\{e^\mu_a\}$ sem fazer uso do tensor métrico $g^{\mu\nu}$ da seguinte forma. Consideremos a matriz 4×4 cujo elemento da μ -ésima linha e a -ésima coluna seja dado por e_μ^a e denotemos o seu determinante por e . Na expansão em cofatores deste determinante denotemos por e^μ_a o cofator associado ao elemento e_μ^a e dividido pelo determinante e . Assim, obtemos as relações de ortonormalidade

$$e_\mu^a e^\nu_a = \delta_\mu^\nu \quad \text{e} \quad e_\mu^b e^\mu_a = \delta_a^b.$$

Logo, a conexão de Cartan é completamente determinada através das 16 componentes do campo de tetradas $\{e_\mu^a\}$.

Da condição (3.16) concluímos que a conexão de spin é identicamente nula,

$$\omega_\mu^{ab} = 0. \quad (3.65)$$

A derivada covariante de Lorentz nesse caso é dada simplesmente por

$$D_\mu B^a = \partial_\mu B^a, \quad D_\mu \psi = \partial_\mu \psi. \quad (3.66)$$

Usando a relação (3.18) juntamente com a identidade (3.65) obtemos

$$\gamma_\mu^{ab} = -K_\mu^{ab} = -e_\nu^a e_\rho^b K_\mu^{\nu\rho}. \quad (3.67)$$

Da relação geral (3.7) entre uma conexão de Riemann-Cartan e a conexão de Levi-Civita, temos

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\mu = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu + K_{\alpha\beta}{}^\mu, \quad (3.68)$$

onde agora $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu$ deve ser entendida como a conexão de Cartan (3.64). Usando (3.67), podemos escrever

$$\overset{\circ}{\nabla}'_\mu \psi = \overset{\circ}{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} K_\mu^{ab} S_{ab} \psi, \quad \overset{\circ}{\nabla}'_\mu \bar{\psi} = \overset{\circ}{D}_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{1}{2} K_\mu^{ab} \bar{\psi} S_{ab}, \quad (3.69)$$

e assim por diante, ou seja, todas as quantidades definidas no espaço-tempo riemanniano podem ser escritas em termos de quantidades definidas no espaço-tempo de Weitzenböck.

Das expressões acima observamos que sobre a mesma variedade diferenciável temos definidas duas conexões: a conexão de Cartan Γ e a conexão de Levi-Civita $\overset{\circ}{\Gamma}$. Matematicamente, podemos definir uma infinidade de conexões sobre uma dada variedade. São as características da teoria física resultante que determinam qual é a conexão “correta” que devemos escolher [41]. Em particular, como vimos na seção anterior, a Relatividade Geral assume que a conexão que descreve o campo gravitacional é a de Levi-Civita. Escolhendo uma conexão diferente desta obteremos uma teoria não equivalente à Relatividade Geral. No entanto, como observamos acima, podemos escrever todas as quantidades definidas no espaço-tempo de Riemann da Relatividade Geral *em termos* de quantidades associadas ao espaço-tempo de Weitzenböck. Procedendo desta forma obteremos uma teoria *equivalente* à Relatividade Geral, denominada de *Teleparalelismo* (TP), ou *Equivalente Teleparalelo*

Dessas relações poderíamos *definir* o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e seu inverso $g^{\mu\nu}$ como

$$g_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}, \quad g^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} e^\mu_a e^\nu_b \eta^{ab}.$$

da RG , a qual é formulada sobre um espaço-tempo de curvatura nula em que a presença do campo gravitacional é associada à presença de torção [26, 36, 27, 37]. Na ausência de torção a conexão de Levi-Civita é idêntica à de Cartan. Nesse caso, existe um sistema de coordenadas em que a conexão se anula. Esses resultados são triviais e caracterizam o espaço-tempo de Minkowski.

Passaremos agora a descrever a interação entre o campo escalar DKP e a gravitação de acordo com o Teleparalelismo. Escrevendo a lagrangiana (3.58) em termos das quantidades “teleparalelas” de acordo com as equações (3.67), (3.68) e (3.69), obtemos:

$$\mathcal{L}_{\text{TP}} = |e| \left\{ \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \beta^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} K_\mu^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \right) \psi - \bar{\psi} \left(\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{1}{2} K_\mu^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \right) \beta^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi \right\}, \quad (3.70)$$

onde $|e|$ é o módulo do determinante de e_μ^a , que é igual a $\sqrt{-g}$, como pode ser verificado diretamente das relações (3.11).

Enfatizamos aqui que a lagrangiana acima não pode ser obtida através do processo de substituição mínima das derivadas do espaço de Minkowski pelas derivadas covariantes do espaço de Weitzenböck. Para efetuarmos a passagem do espaço-tempo de Minkowski para o de Weitzenböck as seguintes substituições são necessárias, além da multiplicação pelo fator $\sqrt{-g} = |e|$:

$$\begin{aligned} \beta^a &\rightarrow \beta^\mu = e^\mu_a \beta^a \\ \partial_a \psi &\rightarrow \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} K_\mu^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \right) \psi \\ &= \left(\nabla'_\mu + \frac{1}{2} K_\mu^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \right) \psi \\ \partial_a \bar{\psi} &\rightarrow \nabla'_\mu \bar{\psi} - \frac{1}{2} K_\mu^{\alpha\beta} \bar{\psi} S_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que no espaço de Weitzenböck $\nabla'_\mu \psi = \nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi$.

Como a lagrangiana acima é completamente equivalente à lagrangiana da Relatividade Geral (3.58), as equações de movimento associadas serão equivalentes às equações (3.59), as quais escrevem-se em termos das quantidades teleparalelas como

$$i \beta^\mu \nabla'_\mu \psi - m \psi = -\frac{i}{2} \beta^\mu K_\mu^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \psi. \quad (3.71)$$

Observando essa equação vemos que, além de “sentir” a geometria do espaço-tempo de Weitzenböck (primeiro membro da equação) o campo DKP acopla-se à torção de maneira análoga como se acopla ao campo eletromagnético, como podemos visualizar comparando com a equação (2.72) e como fica evidente das substituições acima (não-mínimas, no sentido geométrico).

Escreveremos agora os resultados referentes ao setor escalar da teoria em termos das quantidades teleparalelas. As equações (3.60) e (3.61) escrevem-se como

$$\begin{aligned} P^\nu \psi &= \frac{i}{m} \partial^\nu (P\psi) \\ &= \frac{i}{m} \nabla'^\nu (P\psi) \end{aligned} \quad (3.72)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla'_\mu \nabla'^\mu (P\psi) + m^2 (P\psi) &= -K_{\mu\rho}{}^\mu \nabla'^\mu (P\psi) \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) (P\psi) &= -K_{\mu\rho}{}^\mu \partial^\mu (P\psi). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Essa última equação é idêntica à equação obtida através do formalismo baseado na lagrangiana de Klein-Gordon no contexto do teleparalelismo, como era de se esperar, já que no contexto da RG ambos os formalismos DKP e KG são equivalentes. Aqui novamente podemos observar o acoplamento com a torção no segundo membro, que é análogo ao acoplamento com o campo eletromagnético [22]. Logo, no contexto do Teleparalelismo o campo escalar (tanto no formalismo DKP quanto no de KG), além de acoplar-se com a geometria do espaço-tempo de Weitzenböck, apresenta um acoplamento com a torção de forma análoga ao seu acoplamento com o campo eletromagnético [24, 36].

Para finalizar, enfatizamos as diferenças entre o acoplamento do campo escalar com a torção no contexto das teorias de Einstein-Cartan e Teleparalela. Como vimos, o Teleparalelismo descreve o campo de gravitação através de um campo de torção. Sendo uma teoria equivalente à Relatividade Geral, é um resultado natural que tudo o que possa acoplar-se à curvatura na RG acople-se à torção na descrição teleparalela.

No contexto da teoria de Einstein-Cartan o acoplamento do campo escalar DKP com a torção é um fato inesperado, já que na maioria dos casos estudados, conforme comentamos na Introdução, os formalismos DKP e KG são equivalentes, e este último não apresenta acoplamento com a torção na teoria de Einstein-Cartan. Portanto, nessa teoria e com a presença de torção, os formalismos DKP e KG possuem conteúdos físicos distintos, ao passo que são equivalentes no contexto da Relatividade Geral (que é um caso especial da teoria de Einstein-Cartan com torção nula) e no seu Equivalente Teleparalelo.

Capítulo 4

O Formalismo Causal de Bogoliubov-Epstein-Glaser

O formalismo padrão em teorias de campos é a teoria de perturbação, que consiste na expansão de amplitudes de espalhamento em séries de potências na constante de acoplamento. Nesse contexto, a ferramenta tradicional é o conjunto de regras de Feynman, que permitem associar um diagrama (grafo) para cada termo da série perturbativa [42]. Tal procedimento funciona muito bem no nível de árvore, isto é, quando os diagramas correspondentes não contém *loops*, que correspondem a integrações sobre 4-momentos internos em um diagrama. De maneira geral, essas integrais não são matematicamente bem definidas e resultam divergentes (estamos nos referindo a divergências ultravioletas, que surgem pelo fato do domínio de integração no espaço dos momentos se estender ao infinito, ou, equivalentemente, o domínio de integração no espaço de configuração incluir a origem). Para que a teoria tenha significado físico é necessário que se definam essas integrais por meio de técnicas de *regularização* apropriadas, o que introduz parâmetros espúrios na teoria, que são depois eliminados através do processo de *renormalização*, que absorve esses parâmetros (em geral infinitos) na redefinição das constantes físicas da teoria (como massa e constante de acoplamento). Como essas constantes relacionam quantidades observáveis a quantidades não observáveis, o fato das mesmas serem infinitas não afeta os resultados observáveis da teoria.

Embora o programa de regularização e renormalização pareça resolver o problema das divergências ultravioletas em teoria de campos, do ponto de vista matemático não é um procedimento rigoroso, visto que a teoria parte de uma formulação divergente, sendo os ingredientes das técnicas de regularização adicionados somente *a posteriori*. Devido ao fato de que não existe unicidade de regularização, para que a teoria seja livre de ambigüidades é necessário provar que os resultados obtidos são independentes do tipo de regularização escolhida, o que nem sempre é uma tarefa trivial (ver, por exemplo, a referência [43]).

Dado esse panorama, muitos foram os esforços no sentido de se procurar uma formulação matematicamente rigorosa para a teoria quântica de campos, em que divergências não surgissem em nenhuma etapa dos cálculos. Uma dessas formulações é o método causal de Bogoliubov-Epstein-Glaser (BEG).

A idéia original de se construir a matriz S de espalhamento a partir de condições físicas explicitamente formuladas, principalmente a condição de causalidade, remonta a Stückelberg. O programa teve prosseguimento nos trabalhos de Bogoliubov e colaboradores [20] e culminou no trabalho de Epstein e Glaser [30] (para uma apresentação moderna do método, com aplicações em QED espinorial, citamos a referência [31]). O ponto crucial para o desenvolvimento do método foi a constatação de que os campos quânticos constituem-se em *distribuições a valores de operadores* no espaço de Fock-Hilbert da teoria e que as divergências ultravioletas surgem no método usual quando se tenta multiplicar duas tais distribuições singulares, visto que esta não é uma operação bem definida no espaço de distribuições. Tais produtos surgem quando se tentam construir produtos normalmente ordenados temporalmente e usualmente consistem na multiplicação de distribuições singulares por distribuições também singulares do tipo θ de Heaviside.

O método BEG consiste na construção indutiva desses produtos ordenados, partindo do acoplamento da teoria (a distribuição T_1) e dos princípios de causalidade e invariância translacional. O ponto delicado surge quando é necessário decompor uma distribuição causal em suas componentes retardada e avançada. Essa decomposição é realizada levando-se em conta a *ordem singular* da distribuição causal, de maneira que não surge em nenhum estágio o produto de distribuições singulares no mesmo ponto. Essa decomposição nem sempre é única e essa falta de unicidade reflete-se no aparecimento de constantes *finitas* na solução do problema de bipartição, as quais não podem ser determinadas por causalidade, mas através da imposição de condições físicas que a teoria deve satisfazer. A possibilidade ou não de determinação de todas essas constantes que possuam significado físico caracteriza uma teoria como *renormalizável* ou *não renormalizável*.

Passaremos agora a descrever o método BEG. No Apêndice B apresentamos algumas noções gerais acerca da teoria das distribuições, das quais faremos uso ao longo deste capítulo.

4.1 Construção indutiva da matriz S

No formalismo de Bogoliubov-Epstein-Glaser a matriz S é definida como uma série de potências na constante de acoplamento $g = e$. Cada um dos termos desta série é escrito em termos dos operadores de campos *livres* da teoria correspondente. Como

tais campos matematicamente são distribuições a valores de operadores, a matriz S constitui-se em um funcional (a valores de operadores) sobre um espaço apropriado de funções teste $g(x)$, que deve ser o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$ das funções do tipo c-número, de rápido decréscimo e com domínio em $\mathbf{R}^4$, de forma que tanto as distribuições como suas transformadas de Fourier pertençam ao mesmo espaço distribucional $\mathcal{S}'$.

A matriz S é definida através da seguinte expansão:

$$\begin{aligned} S(g) &= \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n T_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1} + T. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Como as funções $g(x) \in \mathcal{S}$ decaem rapidamente a zero no infinito, produzem o efeito matemático de “ligar e desligar” a interação. Nos casos de interações de longo alcance (como a eletromagnética) isso é desprovido de significado físico e as quantidades observáveis da teoria devem ser calculadas no chamado *limite adiabático* $g \rightarrow 1$. Assim, embora $S(g)$ seja livre de divergências infravermelhas, estas podem aparecer nesse limite.

Pela definição (4.1) as distribuições $T_n(x_1, \dots, x_n)$ são simétricas em seus argumentos, de modo que estes podem ser representados pelo conjunto desordenado $\mathbf{X}$ de n pontos do espaço-tempo de Minkowski $\mathcal{M}^4$

$$\mathbf{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1, \dots, x_n\} = \{x_j \in \mathcal{M}^4 | j = 1, \dots, n\}. \quad (4.2)$$

Essas distribuições são chamadas de *distribuições de n pontos* e constituem-se nos objetos fundamentais do formalismo, a serem determinadas por um processo indutivo a partir do conhecimento de T_1 e usando-se as propriedades de causalidade

$$S(g_1 + g_2) = S(g_1)S(g_2), \quad \text{se } \text{supp } g_1 > \text{supp } g_2, \quad (4.3)$$

e invariância translacional

$$U(a, \mathbf{1})S(g)U(a, \mathbf{1})^{-1} = S(g(x - a)). \quad (4.4)$$

Nessas equações $U(a, \mathbf{1})$ é um operador unitário de translações atuando no espaço de Fock da teoria e a notação $\text{supp } g_1 > \text{supp } g_2$ significa que existe algum referencial de Lorentz em que todos os pontos do suporte de $g_2(x)$ possuem componentes temporais anteriores àquelas dos pontos do suporte de $g_1(x)$.

Para aplicar o formalismo a uma teoria de campos específica devemos conhecer a *teoria livre* de todos os campos envolvidos, como também a distribuição $T_1(x)$, que

deve descrever a interação entre esses campos. No formalismo causal postula-se que esta distribuição seja dada por

$$T_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} i\mathcal{L}_{int}^0, \quad (4.5)$$

onde $\mathcal{L}_{int}^0$ corresponde aos termos de primeira ordem na constante de acoplamento na lagrangiana de interação da teoria.¹ Esse postulado pode ser fisicamente justificado usando-se o princípio de correspondência [20]. Quando a lagrangiana de interação de uma teoria contiver termos de ordem superior à primeira na constante de acoplamento, como ocorre quando há acoplamentos derivativos (no caso da eletrodinâmica quântica escalar no formalismo KG, por exemplo), tais termos serão “gerados” pelo processo indutivo na ordem correspondente através da imposição de condições físicas, tais como invariância de gauge da teoria [29].

No apêndice C, equações (C.9) e (C.12), mostramos que as condições (4.3) e (4.4) sobre $S(g)$ implicam respectivamente nas seguintes condições sobre as T_n :

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = T_m(x_1, \dots, x_m) T_{n-m}(x_{m+1}, \dots, x_n), \quad \text{se } \{x_1, \dots, x_m\} > \{x_{m+1}, \dots, x_n\}; \quad (4.6)$$

$$U(a, \mathbf{1}) T_n(x_1, \dots, x_n) U(a, \mathbf{1})^{-1} = T_n(x_1 + a, \dots, x_n + a). \quad (4.7)$$

Pela aplicação sucessiva da condição (4.6) podemos ver que as distribuições T_n são *ordenadas temporalmente*, isto é, se existe algum referencial de Lorentz em que $x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_n^0$, então

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = T_1(x_1) T_1(x_2) \dots T_1(x_n). \quad (4.8)$$

A matriz inversa S^{-1} é definida através da inversão formal da série (4.1),

$$S(g)^{-1} = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \tilde{T}_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) \quad (4.9)$$

onde as distribuições $\tilde{T}_n$ são determinadas em termos das T_n através da expressão (equação (C.17) do apêndice C):

$$\tilde{T}_n(\mathbf{X}) = \sum_{r=1}^n (-1)^r \sum_{P_r} \left[T_{n_1}(\mathbf{X}^{(1)}) \dots T_{n_r}(\mathbf{X}^{(r)}) \right], \quad (4.10)$$

onde P_r denota todas as partições do conjunto $\mathbf{X}$ em r subconjuntos disjuntos não vazios.

¹Considerar apenas os termos de primeira ordem na constante de acoplamento em $\mathcal{L}_{int}$ equivale à exigência de que T_1 seja dada em termos de campos livres, como é assumido no formalismo causal.

Definimos agora as seguintes distribuições:

$$A'_n(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(\mathbf{X}) T_{n-n_1}(\mathbf{Y}, x_n), \quad (4.11)$$

$$R'_n(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{P_2} T_{n-n_1}(\mathbf{Y}, x_n) \tilde{T}_{n_1}(\mathbf{X}),$$

onde as somatórias acima são tomadas sobre todas as partições $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$, com $\mathbf{X} \neq \emptyset$ e $\mathbf{Y}$ podendo eventualmente ser vazio. Nas expressões acima n_1 é o número de elementos do conjunto $\mathbf{X}$, denotado por $|\mathbf{X}|$, e $|\mathbf{Y}| = n - n_1 - 1 \leq n - 2$. Admitindo que o conjunto $\mathbf{X}$ possa ser vazio nas expressões acima, definimos outras duas distribuições:

$$\begin{aligned} A_n(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{P_2^0} \tilde{T}_{n_1}(\mathbf{X}) T_{n-n_1}(\mathbf{Y}, x_n) \\ &= A'_n(x_1, \dots, x_n) + T_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} R_n(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{P_2^0} T_{n-n_1}(\mathbf{Y}, x_n) \tilde{T}_{n_1}(\mathbf{X}) \\ &= R'_n(x_1, \dots, x_n) + T_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

onde P_2^0 denota todas as partições do conjunto $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$, onde os conjuntos disjuntos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ podem eventualmente ser vazios. Usando a condição de causalidade (4.6) mostraremos a seguir que $A_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ e $R_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ possuem suportes respectivamente avançado e retardado em relação ao ponto x_n , isto é:

$$\text{supp } R_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \subseteq \Gamma_n^+(x_n); \quad (4.13)$$

$$\text{supp } A_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \subseteq \Gamma_n^-(x_n), \quad (4.14)$$

onde

$$\Gamma_n^\pm(x_n) = \{(x_1, \dots, x_n) | x_j \in \bar{V}^\pm(x_n), j = 1, \dots, n\}; \quad (4.15)$$

$$\bar{V}^\pm(x_n) = \{y \in \mathcal{M} | (y - x_n)^2 \geq 0, \pm(y^0 - x_n^0) \geq 0\}. \quad (4.16)$$

As notações $\bar{V}^\pm(x_n)$ e $\Gamma_n^\pm(x_n)$ representam respectivamente o fechamento do cone de luz retardado(avançado) e sua generalização n dimensional. Para provar (4.13) e (4.14) enunciaremos antes o seguinte teorema:

Teorema 1. Seja $\mathbf{Y} = \mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$, com $\mathbf{P} \neq \emptyset$ e $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} = \emptyset$. Sejam também $x \notin \mathbf{Y}$ e $m = |\mathbf{Y}| \leq n - 1$.

i) Se $\{\mathbf{Q}, x\} > \mathbf{P}$, então

$$R'_{m+1}(\mathbf{Y}, x) = -T_{k+1}(\mathbf{Q}, x)T_{m-k}(\mathbf{P}), \quad (4.17)$$

onde $|\mathbf{Q}| = k$.

ii) Se $\{\mathbf{Q}, x\} < \mathbf{P}$, então

$$A'_{m+1}(\mathbf{Y}, x) = -T_{m-k}(\mathbf{P})T_{k+1}(\mathbf{Q}, x). \quad (4.18)$$

A prova desse teorema é dada em [31] e utiliza essencialmente a propriedade de causalidade das distribuições T_m , com $m \leq n - 1$.

Usando (4.12) e assumindo a hipótese i) do teorema acima, com $|\mathbf{Y}| = n - 1$ e $x = x_n$, obtemos

$$\begin{aligned} R_n(\mathbf{Y}, x_n) &= R'_n(\mathbf{Y}, x_n) + T_n(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}, x_n) \\ &= -T_{k+1}(\mathbf{Q}, x_n)T_{n-k-1}(\mathbf{P}) + T_{k+1}(\mathbf{Q}, x_n)T_{n-k-1}(\mathbf{P}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde usamos a condição de causalidade sobre T_n na passagem da primeira para a segunda linha. Esse resultado implica que, se existir algum ponto em $\mathbf{Y}$ que seja *anterior* a x_n , então $R_n(\mathbf{Y}, x_n)$ se anula. Logo, $R_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ tem suporte *retardado* em relação ao ponto x_n . Da mesma forma, assumindo a hipótese ii) do teorema, podemos concluir que $A_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ tem suporte *avançado* em relação a x_n , o que prova (4.13) e (4.14).

Definimos agora a diferença

$$D_n(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} R_n(x_1, \dots, x_n) - A_n(x_1, \dots, x_n) \quad (4.20)$$

$$= R'_n(x_1, \dots, x_n) - A'_n(x_1, \dots, x_n). \quad (4.21)$$

Por construção, essa distribuição tem suporte causal, ou seja,

$$\text{supp } D_n(x_1, \dots, x_n) \subseteq \Gamma_n^+(x_n) \cup \Gamma_n^-(x_n). \quad (4.22)$$

Pelo exposto acima podemos observar que a condição de causalidade (4.6) sobre as distribuições T_n implica na condição de causalidade (4.22) sobre o suporte de D_n , e vice-versa. Logo, do ponto de vista lógico, ambas as condições são equivalentes.

As distribuições T_n podem agora ser determinadas através do processo indutivo descrito a seguir.

Suponhamos, por hipótese, que sejam conhecidas todas as distribuições T_m , com $1 \leq m \leq n - 1$. Através de (4.10) são conhecidas também todas as distribuições $\tilde{T}_m$, para os mesmos valores de m . Usando (4.11) determinamos $A'_n(x_1, \dots, x_n)$ e

$R'(x_1, \dots, x_n)$ e, através de (4.21), também $D_n(x_1, \dots, x_n)$. Identificando as partes retardada e avançada dessa última distribuição podemos determinar respectivamente $R_n(x_1, \dots, x_n)$ e $A_n(x_1, \dots, x_n)$, as quais não eram conhecidas pela hipótese inicial, pois envolviam a distribuição desconhecida T_n , a qual agora pode ser determinada através das relações (4.12):

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = R_n(x_1, \dots, x_n) - R'_n(x_1, \dots, x_n) \quad (4.23)$$

$$= A_n(x_1, \dots, x_n) - A'_n(x_1, \dots, x_n). \quad (4.24)$$

Dessa forma, partindo do conhecimento da distribuição T_1 , podemos determinar todas as distribuições T_n , $n > 1$, através do processo indutivo descrito acima. Como vimos, a determinação da distribuição D_n não depende do conhecimento de T_n , mas depende tão somente do conhecimento das distribuições T_m , $m \leq n - 1$. Como já dissemos, a causalidade do suporte de D_n equivale à propriedade de causalidade (4.6) sobre T_n . Então, para provar a consistência lógica do processo indutivo deveríamos ser capazes de obter a propriedade de causalidade do suporte de D_n tão somente a partir da propriedade de causalidade (4.6) das T_m , $m \leq n - 1$. Essa prova é dada em [31], para $n \geq 3$; devemos verificar explicitamente que o suporte de D_2 é causal para nos assegurarmos da consistência geral do método. Ao construirmos essa distribuição pelo procedimento descrito acima, obtemos

$$D_2(x_1, x_2) = [T_1(x_1), T_1(x_2)] . \quad (4.25)$$

Logo, D_2 será causal se, e somente se,

$$[T_1(x_1), T_1(x_2)] = 0 \quad \text{se} \quad (x_1 - x_2)^2 < 0. \quad (4.26)$$

O processo de separação, ou *bipartição*, da distribuição causal D_n em suas partes avançada e retardada é o único passo não trivial do processo indutivo. Intuitivamente poderíamos tentar separar as partes avançada e retardada multiplicando D_n por distribuições do tipo θ de Heaviside. Esse procedimento é matematicamente justificado somente em situações particulares, como veremos na próxima seção, e sua aplicação indiscriminada é a responsável pelo surgimento das divergências ultravioletas da teoria perturbativa usual. A razão disso é que na teoria de distribuições o produto de distribuições arbitrárias não é bem definido.² Em particular, o produto de uma distribuição θ por uma distribuição que seja singular em uma região em que a θ seja descontínua não pode ser definido. A correta bipartição de uma distribuição com suporte causal será assunto da próxima seção.

²Estamos nos referindo ao produto usual, e não ao produto direto, ou tensorial, que é bem definido.

4.2 A bipartição de distribuições causais

As distribuições causais $D_n(x_1, \dots, x_n)$ que teremos que bipartir serão dadas na forma de uma expansão em operadores de campos livres normalmente ordenados

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_k : \Pi_j \bar{\psi}(x_j) d_n^k(x_1, \dots, x_n) \Pi_l \psi(x_l) :: \Pi_m A(x_m) : , \quad (4.27)$$

onde d_n^k é uma distribuição numérica e os argumentos dos operadores de campo $\bar{\psi}$, ψ e A dependem do termo k considerado. Como na teoria usual, podemos imaginar que a cada valor de k corresponde um grafo constituído por n pontos, cuja estrutura de linhas internas é dada pela distribuição numérica d_n^k .

O fato do suporte de $D_n(x_1, \dots, x_n)$ ser causal implica que todas as distribuições $d_n^k(x_1, \dots, x_n)$ terão suporte causal também. O problema de bipartição de D_n então reduz-se à bipartição das distribuições d_n^k .

Como consequência da condição de invariância translacional é suficiente considerarmos $x_n = 0$. Assim, introduzimos a notação:

$$\begin{aligned} d(x) &\equiv d_n^k(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m), & m = 4n - 4; \\ x &= (x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

O problema de bipartição consiste em se determinar as distribuições $r(x)$ e $a(x)$ de forma que

$$d(x) = r(x) - a(x); \quad (4.29)$$

$$\text{supp } r(x) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(0); \quad (4.30)$$

$$\text{supp } a(x) \subseteq \Gamma_{n-1}^-(0). \quad (4.31)$$

Das expressões acima vemos que a origem pertence a ambos os cones de luz, isto é, $\Gamma_{n-1}^+(0) \cap \Gamma_{n-1}^-(0) = \{0\}$. Também observamos que é suficiente determinarmos apenas uma entre as duas distribuições $r(x)$ e $a(x)$; a outra será dada usando (4.29). De ora em diante nos ocuparemos da determinação de $r(x)$.

Em princípio, a maneira mais simples de se obter $r(x)$ seria através da multiplicação de $d(x)$ por uma distribuição do tipo θ de Heaviside, cujo argumento fosse positivo para todo $x \in \Gamma_{n-1}^+(0)$ e negativo para todo $x \in \Gamma_{n-1}^-(0)$. Esta distribuição θ pode ser construída explicitamente. Para isso, consideramos um vetor v não nulo arbitrário tal que

$$v = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in \Gamma_{n-1}^+, \text{ com } v_i \in V^+(0), \quad (4.32)$$

onde $V^+(0) = \{y \in \mathcal{M} | y^2 > 0, y^0 > 0\}$. A equação

$$v \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} v_i \cdot x_i = 0 \quad (4.33)$$

define um hiperplano tipo-espaco que separa o suporte causal da seguinte forma: se $x \in \Gamma^+(0)$ então $v \cdot x > 0$, ao passo que se $x \in \Gamma^-(0)$, então $v \cdot x < 0$.

Assim escrevemos *formalmente* o produto de distribuições

$$r(x) = \theta(v \cdot x) d(x). \quad (4.34)$$

No apêndice B mostramos que, embora o produto de distribuições arbitrárias não seja definido, o caso especial do produto de uma distribuição arbitrária em $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ por uma função qualquer infinitamente diferenciável que, juntamente com suas derivadas, cresça lentamente no infinito é, no entanto, bem definido. Assim, seria natural aproximar $\theta(v \cdot x)$ em (4.34) por uma sequência de funções C^∞ com a característica acima e que convergissem a esta distribuição em $\mathcal{S}'$. Tal sequência (contínua) poderia ser escolhida como

$$\chi\left(\frac{v \cdot x}{\delta}\right), \quad \delta > 0 \quad (4.35)$$

onde

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ < 1, & 0 < t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases} \quad (4.36)$$

Claramente as funções (4.35), juntamente com suas derivadas, crescem lentamente no infinito; no limite $\delta \rightarrow 0$ as mesmas convergem para a distribuição $\theta(v \cdot x)$ em $\mathcal{S}'$.

Agora poderíamos tentar definir o produto de distribuições (4.34) através do seguinte processo de limite

$$\langle \theta(v \cdot x) d(x), \phi(x) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\langle \chi\left(\frac{v \cdot x}{\delta}\right) d(x), \phi(x) \right\rangle, \quad (4.37)$$

se esse limite existir para toda função teste $\phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$.

A existência ou não do limite (4.37) será determinada pelo comportamento da distribuição $d(x)$ nas vizinhanças da origem $x = 0$, pois este é o único ponto de intersecção entre a região de descontinuidade da distribuição $\theta(v \cdot x)$ (que é o hiperplano $v \cdot x = 0$) e o suporte da distribuição causal $d(x)$. Portanto, o conhecimento do comportamento de $d(x)$ nas proximidades da origem é fundamental para a solução correta do problema da bipartição. Disso nos ocuparemos a seguir. Para tanto, introduziremos a seguir algumas definições:

Definição 1. A distribuição $d(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ possui uma quasi-assintótica $d_0(x)$ em $x = 0$ com respeito a uma função contínua e positiva $\rho(\delta)$, $\delta > 0$, se o seguinte limite existir em $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) \delta^m d(\delta x) = d_0(x) \neq 0. \quad (4.38)$$

Considerando o espaço dos momentos, temos que:

$$\left\langle d(x), \phi\left(\frac{x}{\delta}\right) \right\rangle = \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{\delta}\right), \check{\phi}(p) \right\rangle, \quad (4.39)$$

onde a notação $\check{}$ representa a transformada de Fourier inversa. Assim, a definição acima pode ser formulada equivalentemente como

Definição 2. A distribuição $\hat{d}(p) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ possui uma quasi-assintótica $\hat{d}_0(p)$ em $p = \infty$ com respeito a uma função contínua positiva $\rho(\delta)$, $\delta > 0$, se o seguinte limite existir em $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) \hat{d}\left(\frac{p}{\delta}\right) = \hat{d}_0 \neq 0. \quad (4.40)$$

A função $\rho(\delta)$ que aparece nessas definições é chamada de *função contagem de potências*. Passaremos agora à importante definição da *ordem singular* de uma distribuição na origem:

Definição 3. A distribuição $d(x) \in \mathcal{S}'$ é chamada *singular de ordem* ω se possuir uma quasi-assintótica d_0 em $x = 0$ (ou, equivalentemente, sua transformada de Fourier possuir quasi-assintótica em $p = \infty$) com função contagem de potências $\rho(\delta)$ satisfazendo

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\rho(a\delta)}{\rho(\delta)} = a^\omega, \quad (4.41)$$

para todo $a > 0$.

Pode ser mostrado que as funções $\rho(\delta)$ satisfazem a seguinte estimativa [31]: dado $\epsilon > 0$ arbitrário, então existem constantes C , C' e δ_0 tais que

$$C\delta^{\omega-\epsilon} \geq \rho(\delta) \geq C'\delta^{\omega+\epsilon}, \quad \text{se} \quad \delta < \delta_0. \quad (4.42)$$

As quasi-assintóticas definidas acima “medem” o comportamento da distribuição $d(x)$ nas proximidades da origem ou, equivalentemente, o comportamento de $\hat{d}(p)$ na região ultravioleta ($p \rightarrow \infty$).

Voltemos agora ao problema da bipartição. Para provar a existência do limite (4.37) é necessário e suficiente provar que o limite

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left\langle \left\{ \chi\left(\frac{v \cdot x}{\delta}\right) - \chi\left(\frac{v \cdot x}{\delta}\right) \right\} d(x), \phi(x) \right\rangle \quad (4.43)$$

existe.³ Para provar a existência desse último escreveremos $a = b^n$, com $b > 1$ fixo e $n \geq 1$ um número inteiro. Assim, podemos escrever o limite acima como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \psi_0 \left(b^j \frac{x}{\delta} \right) d(x), \phi(x) \right\rangle, \quad (4.44)$$

onde $\psi_0(x) = \chi(bv \cdot x) - \chi(v \cdot x)$. Introduzimos agora uma função auxiliar real $\psi_1(x) \in C^\infty$ que é igual a 1 sobre o suporte causal de $d(x)$ e que se anula em toda região fora de uma dada vizinhança desse suporte. Assim, podemos escrever o limite acima da seguinte forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \phi(x) d(x), \psi_0 \left(b^j \frac{x}{\delta} \right) \psi_1 \left(b^j \frac{x}{\delta} \right) \right\rangle. \quad (4.45)$$

Esse último passo é justificado pelo fato que $\psi_0 \psi_1 \in C_0^\infty$ e, portanto, também pertence ao espaço $\mathcal{S}$.

Desejamos agora conhecer as propriedades de $\phi(x)d(x)$ nas vizinhanças da origem. Consideremos então a quantidade

$$\left\langle \phi(x) d(x), \Psi_0 \left(\frac{x}{\delta} \right) \right\rangle = \delta^m \langle d(\delta x), \phi(\delta x) \Psi_0(x) \rangle, \quad (4.46)$$

onde Ψ_0 é uma função arbitrária de suporte compacto em $\mathbf{R}^m$.⁴ Desejamos conhecer as propriedades da função contagem de potências ρ' (especialmente a ordem singular ω') que, multiplicada pela expressão acima, no limite $\delta \rightarrow 0$ resulta em uma quantidade finita e $\neq 0$. Suponhamos que o primeiro termo não nulo da expansão em Taylor de $\phi(x)$ seja $\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Assim, no limite $\delta \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho'(\delta) \left\langle \phi(x) d(x), \Psi_0 \left(\frac{x}{\delta} \right) \right\rangle \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho'(\delta) \delta^m \frac{\delta^k \phi^{(k)}(0)}{k!} \langle d(\delta x), x^k \Psi_0(x) \rangle. \end{aligned}$$

Assumindo que $d(x)$ possui uma quasi-assintótica $d_0(x)$ em $x = 0$ com respeito a uma função contagem de potências ρ , com ordem singular ω , concluímos que o limite acima existe e é $\neq 0$ se

$$0 < \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\rho'(\delta) \delta^k}{\rho(\delta)} < \infty. \quad (4.47)$$

³Esse limite, se existir, pode ser separado em duas partes:

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow \infty} \left\langle \left\{ \chi \left(a \frac{v \cdot x}{\delta} \right) - \chi \left(\frac{v \cdot x}{\delta} \right) \right\} d(x), \phi(x) \right\rangle \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left\langle \chi \left(a \frac{v \cdot x}{\delta} \right) d(x), \phi(x) \right\rangle - \left\langle \chi \left(\frac{v \cdot x}{\delta} \right) d(x), \phi(x) \right\rangle. \end{aligned}$$

Logo, a existência do limite no primeiro membro implica na existência do primeiro limite do segundo membro, que é equivalente a (4.37).

⁴Na definição 1 basta que consideremos as funções teste $\in C_0^\infty$, uma vez que qualquer função em $\mathcal{S}$ pode ser tomada como o limite de uma certa seqüência de funções de suporte compacto.

Dessa condição, temos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\rho'(a\delta)}{\rho'(\delta)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{\rho(a\delta)}{(a\delta)^k}}{\frac{\rho(\delta)}{\delta^k}} = a^{\omega-k}. \quad (4.48)$$

Logo, concluímos que sempre que $d(x)$ possuir ordem singular $\omega < 0$, também a distribuição $\phi(x)d(x)$ possuirá ordem singular $\omega' < 0$ para toda função teste $\phi \in \mathcal{S}$. Por outro lado, quando $\omega \geq 0$ a ordem singular de $\phi(x)d(x)$ não terá um sinal único para toda função teste $\phi \in \mathcal{S}$.

Usando (4.38), com $\frac{\delta}{b^j}$ no lugar de δ , podemos escrever

$$\begin{aligned} & \left\langle \phi(x)d(x), \psi_0\left(b^j \frac{x}{\delta}\right) \psi_1\left(b^j \frac{x}{\delta}\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\rho'\left(\frac{\delta}{b^j}\right)} \left\{ \langle d'_0(x), \psi_0(x)\psi_1(x) \rangle + \alpha\left(\frac{\delta}{b^j}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde

$$\lim_{\frac{\delta}{b^j} \rightarrow 0} \alpha\left(\frac{\delta}{b^j}\right) = 0 \quad (4.50)$$

e $d'_0(x)$ é a quasi-assintótica da distribuição $\phi(x)d(x)$ com respeito à função contagem de potências $\rho'(\delta)$. O limite (4.50) implica que $\alpha\left(\frac{\delta}{b^j}\right)$ converge a zero quando $\delta \rightarrow 0$ uniformemente em $b^j > 1$, o que significa que, dado $\epsilon_0 > 0$ arbitrário, existe sempre $\delta_1 > 0$ tal que

$$\left| \alpha\left(\frac{\delta}{b^j}\right) \right| < \epsilon_0 \quad \text{para} \quad \delta < \delta_1, \quad (4.51)$$

para todo $b^j > 1$.

Separaremos agora a análise em dois casos:

Caso 1: $\omega < 0$. Neste caso, como vimos acima, também teremos $\omega' < 0$. Usando a desigualdade (4.42) com $\epsilon = \epsilon_1 < |\omega'|$, concluímos que existem C' e δ_0 tais que:

$$\rho'\left(\frac{\delta}{b^j}\right) \geq C' \left(\frac{\delta}{b^j}\right)^{\omega'+\epsilon_1} \quad \text{se} \quad \frac{\delta}{b^j} < \delta_0. \quad (4.52)$$

Como $b^j > 1$, a condição sobre δ pode ser substituída por $\delta < \delta_0$, para todo $b^j > 1$, ou seja,

$$\rho'\left(\frac{\delta}{b^j}\right) \rightarrow \infty \quad \text{se} \quad \delta \rightarrow 0 \quad (4.53)$$

uniformemente em $b^j > 1$.

Consideremos agora a somatória em (4.44). Usando (4.49), esta pode ser escrita como:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \phi(x)d(x), \psi_0\left(b^j \frac{x}{\delta}\right) \psi_1\left(\frac{x}{\delta}\right) \right\rangle = \langle d'_0(x), \psi_0(x)\psi_1(x) \rangle S^A + S^B \quad (4.54)$$

onde

$$S^A = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\rho' \left(\frac{\delta}{b^j} \right)} \quad ; \quad S^B = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha \left(\frac{\delta}{b^j} \right)}{\rho' \left(\frac{\delta}{b^j} \right)}. \quad (4.55)$$

Escolhendo um número ϵ_1 como em (4.52), temos que, para $\delta < \delta_0$,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\rho' \left(\frac{\delta}{b^j} \right)} \leq \frac{1}{C' \delta^{\omega' + \epsilon_1}} \sum_{j=0}^{n-1} b^{j(\omega' + \epsilon_1)}. \quad (4.56)$$

Como a série (geométrica) do lado direito converge quando $n \rightarrow \infty$, também a série S^A convergirá nesse limite. Agora usamos (4.51) com $\epsilon_0 = 1$. Logo, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo $b^j > 1$,

$$\left| \alpha \left(\frac{\delta}{b^j} \right) \right| < 1 \quad \text{se} \quad \delta < \delta_1. \quad (4.57)$$

Assim,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left| \alpha \left(\frac{\delta}{b^j} \right) \right|}{\rho' \left(\frac{\delta}{b^j} \right)} < \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\rho' \left(\frac{\delta}{b^j} \right)} \quad (4.58)$$

e, portanto, a série S^B também convergirá quando $n \rightarrow \infty$. Finalmente, escolhendo δ_2 como o menor dentre δ_0 e δ_1 , temos que ambas as séries S^A e S^B convergem simultaneamente quando $n \rightarrow \infty$. Logo, o limite (4.43) existe se $0 < \delta < \delta_2$.

Portanto, fica provado que no caso $\omega < 0$ o limite (4.37) existe. Neste caso o problema da bipartição tem solução trivial: basta multiplicar a distribuição causal $d(x)$ por distribuições θ de Heaviside para se obter as distribuições retardada ou avançada. Por construção, podemos aplicar as distribuições r e a sobre funções testes descontínuas:

$$\langle r, \phi \rangle = \langle r(x), \theta(v \cdot x) \phi(x) \rangle, \quad \langle r, (1 - \theta) \phi \rangle = 0; \quad (4.59)$$

$$\langle a, \phi \rangle = \langle a, (1 - \theta) \phi \rangle, \quad \langle a, \theta \phi \rangle = 0. \quad (4.60)$$

Dessa forma, $d = r - a$ também pode ser estendida sobre tais funções.

A distribuição $r(x)$ coincide com $d(x)$ sobre $\Gamma^+ \setminus \{0\}$. Se tivéssemos obtido outra distribuição $\tilde{r}$ que coincidisse com $d(x)$ sobre a mesma região, a diferença $r - \tilde{r}$ seria uma distribuição concentrada na origem, que pode sempre ser escrita como uma combinação linear de distribuições delta e suas derivadas (ver apêndice B):

$$\tilde{r} = r + \sum_a C_a D^{(a)} \delta(x). \quad (4.61)$$

Exigindo que o processo de bipartição não altere a ordem singular ω de $d(x)$, o índice a na expressão acima deve satisfazer $|a| \leq \omega$ [44]. Esta é chamada de condição

de *bipartição mínima* e desempenha um papel crucial na determinação correta do momento magnético anômalo do elétron em QED₄ [31] e na geração de massa em QED₃ [45, 46]. No presente caso $\omega < 0$ e, portanto, $r = \tilde{r}$ é uma solução única para o problema de bipartição.

Recapitulamos que na prova da existência do limite (4.37) era necessário que (4.49) convergisse a zero uniformemente em b^j à medida que $\delta \rightarrow 0$, o que se pode inferir das equações (4.50) e (4.53).

Caso 2: $\omega \geq 0$. Neste caso, usando a estimativa (4.42) vemos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) = 0, \quad \text{mas} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\rho(\delta)}{\delta^{\omega+1}} = \infty. \quad (4.62)$$

Assim, (4.49) não converge a zero à medida que $\delta \rightarrow 0$ para toda uma classe de funções teste $\phi \in \mathcal{S}$, e o limite (4.37) não existe. Através de (4.48) observamos que essa classe é constituída por aquelas funções teste cujo primeiro termo não nulo em sua expansão de Taylor seja de ordem $k \leq \omega$. No entanto, o limite (4.37) existirá se restringirmos as funções teste ϕ àquelas que não pertençam a essa classe. Assim, introduziremos um operador arbitrário W sobre o espaço $\mathcal{S}$ que atua da seguinte forma:

$$(W\phi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x) - c(x) \sum_{|a|=0}^{\omega} x^a \frac{[D^a \phi](0)}{a!}, \quad (4.63)$$

onde $c(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ é uma função arbitrária tal que⁵

$$c(0) = 1, \quad [D^a c](0) = 0, \quad \text{para } |a| \leq \omega. \quad (4.64)$$

Esse operador transforma toda função $\phi \in \mathcal{S}$ em outra função $W\phi \in \mathcal{S}$ cujas derivadas de ordem inferior a ω se anulam na origem. Definimos então

$$\langle r(x), \phi(x) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \theta(v \cdot x) d(x), (W\phi)(x) \rangle = \langle d(x), \theta(v \cdot x) (W\phi)(x) \rangle, \quad (4.65)$$

para toda função teste $\phi \in \mathcal{S}$.

Claramente r coincide com $d(x)$ na região $\Gamma^+ \setminus \{0\}$, pois os termos subtraídos em (4.63) são todos nulos para toda função teste que se anula, juntamente com todas as suas derivadas, em uma vizinhança da origem. Se $\tilde{r}$ é outra distribuição que coincide com $d(x)$ sobre a mesma região, a diferença $\tilde{r} - r$ deve ser uma distribuição concentrada na origem. Como agora $\omega \geq 0$, temos

$$\tilde{r}(x) = r(x) + \sum_{|a|=0}^{\omega} C_a D^a \delta(x), \quad (4.66)$$

⁵Essa função é necessária para que $W\phi$ pertença ao espaço de Schwartz $\mathcal{S}$.

o que implica que a solução do problema de bipartição não é mais única, mas envolve constantes arbitrárias C_a , $|a| \leq \omega$, as quais não são determinadas por causalidade. Para determinar essas constantes devemos lançar mão de condições físicas que a teoria deve satisfazer, tais como simetrias, normalização de carga, massa, etc. A possibilidade de determinação de todas as constantes que possuem significado físico caracteriza uma teoria como *renormalizável*. Quando o número de constantes arbitrárias aumenta indefinidamente com a ordem na teoria de perturbações o modelo caracteriza-se como *não renormalizável* [46].

Apresentaremos a seguir os principais resultados da análise de bipartição no espaço dos momentos, que é mais conveniente para se fazer cálculos explícitos.

A definição (4.65) pode ser escrita como

$$\langle r, \phi \rangle = \left\langle \hat{r}, \overset{\vee}{\phi} \right\rangle \quad (4.67)$$

$$= \left\langle \widehat{\theta d}, (W\phi)^\vee \right\rangle. \quad (4.68)$$

Substituindo as transformadas de Fourier nessas expressões obtemos ao final

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int d^m k \hat{\theta}(k) \left[\hat{d}(p-k) - (2\pi)^{\frac{m}{2}} \sum_{|a|=0}^{\omega} \frac{p^a}{a!} \int d^m p' \left(D_{p'}^a \hat{d}(p'-k) \right) \overset{\vee}{c}(p') \right], \quad (4.69)$$

onde $\hat{\theta}(k)$ é a transformada de Fourier da distribuição $\theta(v \cdot x)$ e as integrais acima devem ser interpretadas no sentido de distribuições.

Tomando a transformada de Fourier da solução geral (4.66), temos

$$\widehat{\hat{r}}(p) = \hat{r}(p) + \sum_{|a|=0}^{\omega} C_a p^a. \quad (4.70)$$

Assim, a distribuição $\hat{r}$ é determinada a menos de uma polinomial de ordem ω em p .

Podemos encontrar uma solução particular para a distribuição $\hat{r}$ acima impondo condições que nos permitam determinar todas as constantes C_a em (4.70). Por exemplo, exigindo que

$$\left[D^b \hat{r} \right] (0) = 0 \quad \text{para} \quad |b| \leq \omega, \quad (4.71)$$

e considerando $p \in \Gamma^+$ obtemos a chamada *solução central* $\hat{r} = \hat{r}_0$, onde

$$\hat{r}_0(p) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\hat{d}(tp)}{(t-i0)^{\omega+1} (1-t+i0)}. \quad (4.72)$$

Essa solução pode ser continuada analiticamente para p 's arbitrários [31].

A condição (4.71) é uma condição de normalização na origem $p = 0$, que possui a vantagem de não introduzir uma escala de massa na teoria. Neste trabalho utilizaremos a solução central acima como solução particular para a distribuição $\hat{r}$. No entanto, sempre adicionaremos a esta uma polinomial de ordem ω em p , cujos coeficientes serão determinados através de condições físicas a serem impostas sobre a teoria.

Capítulo 5

Eletrodinâmica quântica escalar *via* formalismo DKP

Neste capítulo aplicaremos o formalismo causal de Bogoliubov-Epstein-Glaser à teoria que descreve a interação entre os campos escalar DKP e eletromagnético, ambos quantizados. Essa teoria foi analisada no formalismo KG na referência [29]. Como vimos no capítulo anterior, o formalismo causal parte do conhecimento das teorias livres correspondentes aos campos interagentes e da distribuição $T_1(x)$, determinada por (4.5). A teoria quântica para o campo DKP livre foi apresentada na última seção do capítulo 2. Na próxima seção apresentaremos os aspectos essenciais da quantização do campo eletromagnético livre. Para maiores detalhes, citamos a referência [31].

5.1 Quantização do campo eletromagnético livre.

De forma a obtermos uma teoria covariante, consideraremos os campos $A^\mu(x)$ como as componentes fundamentais do campo eletromagnético clássico, o qual satisfaz a condição de *gauge* de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (5.1)$$

e a equação de ondas

$$\square A^\mu(x) = 0. \quad (5.2)$$

A condição (5.1) não fixa completamente o *gauge*, mas o restringe de forma que, se A^μ satisfaz (5.1), então

$$\tilde{A}^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x) \quad (5.3)$$

também satisfará essa condição, desde que $\square \Lambda = 0$.

Como é sabido, o fato do campo eletromagnético possuir massa nula (o que acarreta a invariância de *gauge*) introduz algumas dificuldades no processo de quantização covariante da teoria. Não discutiremos aqui essas dificuldades, apenas us-

aremos os resultados essenciais do processo de quantização covariante como apresentados em [31].

As componentes $A^\mu(x)$ do campo eletromagnético quantizado são distribuições a valores de operadores no espaço de Fock de *fótons*, dadas através das seguintes expressões

$$A^0(x) = A^{0(-)}(x) - A^{0(+)}(x); \quad (5.4)$$

$$A^j(x) = A^{j(-)}(x) + A^{j(+)}(x), \quad (5.5)$$

onde

$$A^{\mu(-)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} c^\mu(\mathbf{k}) e^{-ikx}; \quad (5.6)$$

$$A^{\mu(+)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} c^\mu(\mathbf{k})^\dagger e^{ikx}, \quad (5.7)$$

onde $\omega = |\mathbf{k}| \stackrel{\text{def}}{=} k^0$ e as distribuições $c^\mu(\mathbf{k})$, $c^\mu(\mathbf{k})^\dagger$ satisfazem as relações de comutação

$$[c^\mu(\mathbf{k}), c^\mu(\mathbf{k}')^\dagger] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (5.8)$$

sendo nulos todos os outros comutadores. Assim, os operadores c^μ e $c^{\mu\dagger}$ são, respectivamente, (distribuições a valores de) operadores de aniquilação e criação no espaço de Fock de fótons. Das expressões (5.4-5.7) observamos que $A^0(x)$ é anti-adjunto, ao passo que os $A^j(x)$ são auto-adjuntos.

Usando as expansões (5.4-5.7) podemos escrever o lado esquerdo de (5.1) da seguinte forma:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left\{ -i [c^0(\mathbf{k}) + c_{||}(\mathbf{k})] e^{-ikx} + i [-c^0(\mathbf{k})^\dagger + c_{||}(\mathbf{k})^\dagger] e^{ikx} \right\} \quad (5.9)$$

onde

$$c_{||}(\mathbf{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_j}{\omega} c^j(\mathbf{k}) \quad (5.10)$$

e seu conjugado são, respectivamente, operadores de aniquilação e criação de fótons *longitudinais*. Portanto, a condição de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ não pode ser satisfeita como uma equação entre operadores, pois

$$\partial_\mu A^\mu \Omega = \left(-\partial_0 A^{0(+)} + \partial_k A^{k(+)} \right) \Omega \neq 0. \quad (5.11)$$

No entanto, de (5.9) vemos que essa condição é satisfeita como elemento de matriz entre dois estados quaisquer que não contenham fótons escalares (os criados por $c^{0\dagger}$)

e longitudinais, isto é, se Φ e Φ' são dois estados quaisquer do espaço de Fock que não contenham fótons escalares e longitudinais, então

$$(\Phi, \partial_\mu A^\mu \Phi') = 0. \quad (5.12)$$

O conjunto de estados que possuem essa propriedade forma um subespaço do espaço de Fock, denominado de subespaço *físico*. Qualquer elemento de matriz do campo A^0 nesse subespaço é nulo. Portanto, o fato desse operador ser anti-adjunto não causa nenhum problema na interpretação física da teoria. A matriz S da eletrodinâmica escalar somente será unitária quando restrita ao subespaço físico.

Os comutadores entre os campos $A^\mu(x)$ podem ser determinados através das expressões (5.4-5.7) e dos comutadores (5.8):

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] = ig^{\mu\nu} \Delta_0(x-y), \quad (5.13)$$

$$[A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(y)] = ig^{\mu\nu} \Delta_0^+(x-y), \quad (5.14)$$

$$[A^{\mu(+)}(x), A^{\nu(-)}(y)] = ig^{\mu\nu} \Delta_0^-(x-y) \quad (5.15)$$

onde $\Delta_0 = \Delta_0^+ + \Delta_0^-$ é a distribuição de Pauli-Jordan correspondente à massa zero, cujas partes de frequência positiva e negativa são dadas por

$$\Delta_0^\pm(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pm i}{(2\pi)^3} \int d^4p \, \delta(p^2) e^{-ipx} \theta(\pm p^0). \quad (5.16)$$

Como última observação enfatizamos que os valores esperados de quaisquer observáveis no subespaço físico devem ser invariantes sob transformações de *gauge* (5.3).

5.2 Matriz S

Para aplicarmos o formalismo de Bogoliubov-Epstein-Glaser à QED escalar na teoria DKP precisamos inicialmente especificar a distribuição $T_1(x)$. De (4.5) e (2.69), temos que

$$\begin{aligned} T_1(x) &= i\mathcal{L}_{int}^0 \\ &= ie : \bar{\psi} \beta^\mu \psi : A_\mu. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Enfatizamos que os campos $\bar{\psi}$, ψ e A_μ são campos *livres*.¹ O ordenamento normal é necessário para que o produto (de distribuições) acima seja bem definido. De (C.17) temos que

$$\tilde{T}_1(x) = -T_1(x). \quad (5.18)$$

¹Portanto, as componentes físicas de ψ na representação (A.9) serão dadas por (2.23).

No processo de construção indutiva das distribuições T_n teremos que lidar com multiplicações de produtos normalmente ordenados. A ferramenta apropriada para isso é o teorema de Wick [47], que enunciamos a seguir em uma forma restrita a produtos de campos bosônicos:

Teorema de Wick. O produto de n operadores de campos bosônicos é normalmente ordenado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \dots A_n &= :A_1 A_2 \dots A_n: + \sum_{i,j}^n :A_1 \dots \underline{A_i A_j} \dots A_n: \\ &+ \sum_{i,j,k,l}^n :A_1 \dots \underline{A_i A_j} \dots \underline{A_k A_l} \dots A_n: + \dots, \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde nas somatórias acima todos os índices diferem entre si e as contrações $\underline{A_i A_j}$ são definidas por

$$\underline{A_i A_j} \stackrel{\text{def}}{=} [A_i^{(-)}, A_j^{(+)}], \quad (5.20)$$

onde $A_i^{(-)}$ e $A_j^{(+)}$ contêm apenas operadores de aniquilação e criação, respectivamente.

No presente caso, as únicas contrações que aparecerão serão aquelas dadas pelas equações (2.129), (2.130) e (5.14), ou seja,

$$\underline{|\psi_a(x) \bar{\psi}_b(y)|} = \frac{1}{i} S_{ab}^+(x-y), \quad (5.21)$$

$$\underline{|\bar{\psi}_a(x) \psi_b(y)|} = -\frac{1}{i} S_{ba}^-(y-x), \quad (5.22)$$

$$\underline{A_\mu(x) A_\nu(y)} = i g_{\mu\nu} \Delta_0^+(x-y). \quad (5.23)$$

Consideremos agora o comutador

$$\begin{aligned} [T_1(x_1), T_1(x_2)] &= -e^2 \beta_{ab}^\mu \beta_{cd}^\nu \left\{ [A_\mu(x_1), A_\nu(x_2)] : \bar{\psi}_a(x_1) \psi_b(x_1) : : \bar{\psi}_c(x_2) \psi_d(x_2) : \right. \\ &\quad \left. + A_\nu(x_2) A_\mu(x_1) [: \bar{\psi}_a(x_1) \psi_b(x_1) : , : \bar{\psi}_c(x_2) \psi_d(x_2) :] \right\}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Quando $(x_1 - x_2)^2 < 0$, o primeiro comutador entre chaves nessa expressão é nulo, pois a distribuição de Pauli-Jordan tem suporte causal, como vimos no capítulo 2. Usando o teorema de Wick e (2.118) concluímos que também o segundo comutador dessa expressão é nulo, pela mesma razão. Portanto, temos que

$$[T_1(x_1), T_1(x_2)] = 0 \quad \text{se} \quad (x_1 - x_2)^2 < 0. \quad (5.25)$$

Como esse comutador é idêntico à distribuição $D_2(x_1 - x_2)$ (equação (4.25)), esse resultado implica que essa última possui suporte causal, como requerido pelo formalismo causal.

Usando (5.18) e as definições (4.11) temos que

$$A_2'(x_1, x_2) = e^2 : \bar{\psi}(x_1) \beta^\mu \psi(x_1) : : \bar{\psi}(x_2) \beta^\nu \psi(x_2) : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2), \quad (5.26)$$

$$R_2'(x_1, x_2) = e^2 : \bar{\psi}(x_2) \beta^\nu \psi(x_2) : : \bar{\psi}(x_1) \beta^\mu \psi(x_1) : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2), \quad (5.27)$$

A distribuição causal $D_2(x_1, x_2)$, após a aplicação do teorema de Wick, fica dada por

$$D_2(x_1, x_2) = R_2'(x_1, x_2) - A_2'(x_1, x_2) = e^2 \beta_{ab}^\mu \beta_{cd}^\nu \times \left\{ : \bar{\psi}_a(x_1) \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) \psi_d(x_2) : \left[\underline{|A_\nu(x_2) A_\mu(x_1)|} - \underline{|A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)|} \right] \right. \quad (5.28)$$

$$+ : \bar{\psi}_a(x_1) \psi_d(x_2) : : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \left[\underline{|\bar{\psi}_c(x_2) \psi_b(x_1)|} - \underline{|\psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2)|} \right] \quad (5.29)$$

$$+ : \bar{\psi}_a(x_1) \psi_d(x_2) : \left[\underline{|\bar{\psi}_c(x_2) \psi_b(x_1)|} \underline{|A_\nu(x_2) A_\mu(x_1)|} - \underline{|\psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2)|} \underline{|A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)|} \right] \quad (5.30)$$

$$+ : \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) : : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \left[\underline{|\psi_d(x_2) \bar{\psi}_a(x_1)|} - \underline{|\bar{\psi}_a(x_1) \psi_d(x_2)|} \right] \quad (5.31)$$

$$+ : \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) : \left[\underline{|A_\nu(x_2) A_\mu(x_1)|} \underline{|\psi_d(x_2) \bar{\psi}_a(x_1)|} - \underline{|A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)|} \underline{|\bar{\psi}_a(x_1) \psi_d(x_2)|} \right] \quad (5.32)$$

$$+ : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \left[\underline{|\bar{\psi}_c(x_2) \psi_b(x_1)|} \underline{|\psi_d(x_2) \bar{\psi}_a(x_1)|} - \underline{|\bar{\psi}_a(x_1) \psi_d(x_2)|} \underline{|\psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2)|} \right] \quad (5.33)$$

$$+ \underline{|A_\nu(x_2) A_\mu(x_1)|} \underline{|\bar{\psi}_c(x_2) \psi_b(x_1)|} \underline{|\psi_d(x_2) \bar{\psi}_a(x_1)|} - \underline{|A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)|} \underline{|\bar{\psi}_a(x_1) \psi_d(x_2)|} \underline{|\psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2)|} \} . \quad (5.34)$$

Nessa expressão o termo (5.28) está associado ao espalhamento de duas partículas escalares; os termos (5.29) e (5.31) referem-se ao espalhamento Compton; os termos (5.30) e (5.32) referem-se à auto energia da partícula escalar; o termo (5.33) refere-se à polarização escalar do vácuo e, finalmente, o termo (5.34) não contribui para nenhum espalhamento, pois está associado a um processo envolvendo somente o vácuo.

Antes de partirmos para o cálculo de distribuições T_2 associadas a processos de segunda ordem específicos veremos na próxima seção como a condição de invariância de *gauge* é formulada na teoria causal. Após, nas seções subseqüentes, ocuparemos de processos específicos.

5.3 Invariância de *gauge*

Como já dissemos, no formalismo causal todos os campos envolvidos são campos *livres*. Sob uma transformação de *gauge* o campo eletromagnético transforma-se

como

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (5.35)$$

onde $\Lambda(x)$ é um campo escalar do tipo c -número que satisfaz $\square \Lambda(x) = 0$ (lembramos que neste trabalho estamos considerando o *gauge* de Lorentz). No entanto, os campos de matéria ψ e $\bar{\psi}$, sendo campos livres, não são afetados por essas transformações em $A_\mu(x)$. Assim, ψ e $\bar{\psi}$ são considerados invariantes sob tais transformações.

A condição de invariância de *gauge* da teoria equivale à afirmação de que, no limite adiabático $g \rightarrow 1$, a matriz S deve ser invariante sob essas transformações, o que implica na invariância de todos os termos na expansão (4.1). Para verificar a invariância do termo de primeira ordem

$$S_1(g) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^4x T_1(x) g(x) \quad (5.36)$$

escrevemos (5.17) na forma

$$T_1(x) = i j^\mu(x) A_\mu(x), \quad j^\mu(x) = e : \bar{\psi}(x) \beta^\mu \psi(x) : \quad (5.37)$$

e substituímos nessa expressão. Assim, sob a transformação (5.35) $S_1(g)$ transforma-se em $S'_1(g)$, onde

$$\begin{aligned} S'_1(g) &= S_1(g) + i \int d^4x j^\mu(x) [\partial_\mu \Lambda(x)] g(x) \\ S'_1(g) - S_1(g) &= -i \left\{ \int d^4x [\partial_\mu j^\mu(x)] \Lambda(x) g(x) + \int d^4x j^\mu(x) \Lambda(x) \partial_\mu g(x) \right\}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Na integração por partes acima o fato que $g(x) \in \mathcal{S}$ permitiu que o termo de superfície fosse desprezado. No limite adiabático $g(x) \rightarrow 1$ e, portanto, $\partial_\mu g(x) \rightarrow 0$. Logo, a segunda integral entre chaves é nula. De (2.64) temos que a corrente j^μ é conservada, ou seja,

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0. \quad (5.39)$$

Logo, a primeira integral entre chaves também se anula. Assim, mostramos que no limite adiabático $S_1(g)$ é invariante sob transformações de *gauge* do campo eletromagnético.

O raciocínio acima pode ser generalizado para os termos $S_n(g)$. Escrevendo a distribuição de n pontos na forma

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l=0}^n \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq n} t_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \dots A_{\mu_l}(x_{k_l}) :, \quad (5.40)$$

a condição de invariância de *gauge* equivale à seguinte condição:

$$\frac{\partial}{\partial x_{k_j}^{\mu_j}} t_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (5.41)$$

para todo $1 \leq l \leq n$, $1 \leq j \leq l$, $1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq n$ e todo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{4n}$. Nessa condição $t_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n)$ contém apenas operadores escalares ψ , $\bar{\psi}$ e corresponde, na linguagem de diagramas de Feynman, à soma de todos os grafos de ordem n que contêm somente l fótons externos conectados aos vértices $x_{k_1}, \dots, x_{k_l}$. As equações (5.37) e (5.39) são casos particulares de (5.40) e (5.41), respectivamente.

5.4 Espalhamento Compton

Nesta seção determinaremos a distribuição de dois pontos T_2^{Comp} referente ao espalhamento Compton. Para isso devemos considerar os termos (5.29) e (5.31), os quais denotaremos por $D_2^{\text{I}}(x_1, x_2)$ e $D_2^{\text{II}}(x_1, x_2)$, respectivamente. Substituindo as contrações de Wick obtemos

$$D_2^{\text{I}}(x_1, x_2) = ie^2 \beta_{ab}^\mu \beta_{cd}^\nu : \bar{\psi}_a(x_1) \psi_d(x_2) :: A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \\ \times \{S_{bc}^-(x_1 - x_2) + S_{bc}^+(x_1 - x_2)\} \quad (5.42)$$

$$= ie^2 \beta_{ab}^\mu \beta_{cd}^\nu : \bar{\psi}_a(x_1) \psi_d(x_2) :: A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \\ \times S_{bc}(x_1 - x_2) \quad (5.43)$$

onde usamos (2.118). O primeiro termo entre chaves em (5.42) provém de $R_2^{\text{I}}(x_1, x_2)$, ao passo que o segundo provém de $A_2^{\text{I}}(x_1, x_2)$. De maneira similar,

$$D_2^{\text{II}}(x_1, x_2) = ie^2 \beta_{ab}^\mu \beta_{cd}^\nu : \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) :: A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \\ \times \{-S_{da}^+(x_2 - x_1) - S_{da}^-(x_2 - x_1)\} \quad (5.44)$$

$$= ie^2 \beta_{ab}^\mu \beta_{cd}^\nu : \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) :: A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \\ \times \{-S_{da}(x_2 - x_1)\} , \quad (5.45)$$

onde novamente o primeiro termo entre chaves em (5.44) origina-se de $R_2^{\text{II}}(x_1, x_2)$ e assim por diante. Como dissemos no capítulo 2, a distribuição $S(x)$ possui suporte causal. Assim, verificamos explicitamente que (5.43) e (5.45) possuem suporte causal também.

Como a própria $S(x)$ é a distribuição numérica que devemos bipartir em componentes avançada e retardada nas equações (5.43) e (5.45), uma solução do problema de bipartição pode ser trivialmente obtida de (2.124). No entanto, como podemos verificar usando a definição (4.38), $S(x)$ possui ordem singular $\omega = 0$. Logo, essa solução que obtivemos não é única. De acordo com (4.66), a solução geral para a distribuição numérica retardada é dada por

$$\tilde{r}(x) = S^{\text{ret}}(x) + C\delta(x) , \quad (5.46)$$

onde C é uma constante arbitrária. Construiremos agora a distribuição numérica $t^I(x_1, x_2)$ usando (4.12):

$$t^I(x_1, x_2) = \tilde{r}(x_1, x_2) - r'(x_1, x_2), \quad (5.47)$$

onde $r'(x_1, x_2)$ é a distribuição numérica associada a $R_2^I(x_1, x_2)$, a qual é obtida do primeiro termo entre chaves em (5.42). Então,

$$\begin{aligned} t^I(x_1, x_2) &= S^{\text{ret}}(x_1 - x_2) - S^-(x_1 - x_2) + C\delta(x_1 - x_2) \\ &= -S^F(x_1 - x_2) + C\delta(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (5.48)$$

onde $S^F(x)$ foi definida em (2.128).

De maneira análoga, temos²

$$\begin{aligned} t^{\text{II}}(x_1, x_2) &= S^{\text{av}}(x_2 - x_1) + S^+(x_2 - x_1) + C'\delta(x_2 - x_1) \\ &= -S^F(x_2 - x_1) + C'\delta(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (5.49)$$

As constantes C e C' serão determinadas abaixo através das condições de invariância por conjugação de carga e por transformações de *gauge*.

A distribuição de dois pontos completa para o espalhamento Compton é dada por

$$T_2^{\text{Comp}}(x_1, x_2) = T_2^I(x_1, x_2) + T_2^{\text{II}}(x_1, x_2), \quad (5.50)$$

onde

$$T_2^I(x_1, x_2) = ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \beta^\mu t^I(x_1, x_2) \beta^\nu \psi(x_2) :: A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \quad (5.51)$$

e

$$T_2^{\text{II}}(x_1, x_2) = ie^2 : \bar{\psi}(x_2) \beta^\nu t^{\text{II}}(x_1, x_2) \beta^\mu \psi(x_1) :: A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : . \quad (5.52)$$

Consideremos agora o problema da determinação das constantes arbitrárias C e C' . A condição de invariância da teoria por conjugação de carga implica na invariância das distribuições T_n sob essa transformação. Usando as equações (2.74) e as propriedades (2.75), podemos escrever

$$\begin{aligned} T_2^{\text{Comp}}(x_1, x_2) &= ie^2 \left\{ : \bar{\psi}^c(x_2) \beta^\nu \mathcal{C} [t^I(x_1, x_2)]^T \mathcal{C}^\dagger \beta^\mu \psi^c(x_1) :: A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \right. \\ &\quad \left. + : \bar{\psi}^c(x_1) \beta^\mu \mathcal{C} [t^{\text{II}}(x_1, x_2)]^T \mathcal{C}^\dagger \beta^\nu \psi^c(x_2) :: A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \right\} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Comparando essa expressão com (5.51) e (5.52), obtemos a condição para que T_2^{Comp} seja invariante sob conjugação de carga:

$$\mathcal{C} [t^I(x_1, x_2)]^T \mathcal{C}^\dagger = t^{\text{II}}(x_1, x_2). \quad (5.54)$$

²Notamos que o ponto de referência para o processo de bipartição é x_2 .

Usando as propriedades (2.75) podemos mostrar facilmente que essa condição resulta em

$$C = C'. \quad (5.55)$$

Assim, podemos concluir que

$$T_2^{\text{I}}(x_1, x_2) = T_2^{\text{II}}(x_2, x_1), \quad (5.56)$$

o que implica que $T_2^{\text{Comp}}(x_1, x_2)$ é simétrica com respeito aos seus argumentos, como é requerido pelo formalismo. Calcularemos agora a constante C através da condição de invariância de *gauge* da teoria, descrita na seção anterior. Inicialmente escreveremos T_2^{Comp} na forma (5.40):

$$T_2^{\text{Comp}}(x_1, x_2) = Q^{\mu\nu}(x_1, x_2) : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) :, \quad (5.57)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} Q^{\mu\nu}(x_1, x_2) &\stackrel{\text{def}}{=} ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \beta^\mu t^{\text{I}}(x_1, x_2) \beta^\nu \psi(x_2) : \\ &\quad + : \bar{\psi}(x_2) \beta^\nu t^{\text{II}}(x_1, x_2) \beta^\mu \psi(x_1) : \\ &= Q^{\nu\mu}(x_2, x_1). \end{aligned} \quad (5.58)$$

A condição (5.41) então resulta em

$$\begin{aligned} \partial_\mu^1 Q^{\mu\nu}(x_1, x_2) &= - : \partial_\mu \bar{\psi}(x_1) \beta^\mu [S^{\text{F}}(x_1 - x_2) - C\delta(x_1 - x_2)] \beta^\nu \psi(x_2) : \\ &\quad - : \bar{\psi}(x_1) \beta^\mu [\partial_\mu S^{\text{F}}(x_1 - x_2) - C\partial_\mu \delta(x_1 - x_2)] \beta^\nu \psi(x_2) : \\ &\quad - : \bar{\psi}(x_2) \beta^\nu [-\partial_\mu S^{\text{F}}(x_2 - x_1) + C\partial_\mu \delta(x_2 - x_1)] \beta^\mu \psi(x_1) : \\ &\quad - : \bar{\psi}(x_2) \beta^\nu [S^{\text{F}}(x_2 - x_1) - C\delta(x_2 - x_1)] \beta^\mu \partial_\mu \psi(x_1) : \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Da equação

$$(\square + m^2)\Delta^{\text{F}}(x) = \delta(x), \quad (5.60)$$

da relação (2.111) e da definição (2.128) temos

$$i\not{\partial} S^{\text{F}}(x) = mS^{\text{F}}(x) + \frac{i}{m} \not{\partial} \delta(x). \quad (5.61)$$

Substituindo essas duas últimas equações em (5.59) concluímos, após algumas manipulações, que a invariância de *gauge* da teoria exige que

$$C = \frac{I}{m}, \quad (5.62)$$

onde I é a matriz identidade 5×5 . Voltando com esse resultado em (5.48) e (5.49), obtemos

$$t^I(x_1, x_2) = - \left\{ S^F(x_1 - x_2) - \frac{I}{m} \delta(x_1 - x_2) \right\} \quad (5.63)$$

$$= t^{\text{II}}(x_2, x_1). \quad (5.64)$$

Denotaremos a distribuição entre chaves na expressão acima como

$$T^c(x) \stackrel{\text{def}}{=} S^F(x) - \frac{I}{m} \delta(x). \quad (5.65)$$

Podemos verificar diretamente que essa distribuição é a função de Green para a equação de Duffin-Kemmer-Petiau (2.5), isto é,

$$(i\hat{\not{D}} - m)T^c(x) = \delta(x). \quad (5.66)$$

Então, nesse sentido a distribuição (5.65) é o “propagador” correto da partícula escalar DKP, o qual coincide com o propagador efetivo das referências [8, 14]. Para uso posteriormente, escreveremos este propagador no espaço dos momentos:

$$\hat{T}^c(p) = \frac{1}{(2\pi)^2 m} \left[\frac{\not{p}(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i0} - 1 \right]. \quad (5.67)$$

De posse dos resultados acima podemos escrever a forma final da distribuição de dois pontos do espalhamento Compton

$$\begin{aligned} T_2^{\text{Comp}}(x_1, x_2) &= -ie^2 \{ : \bar{\psi}(x_1) \beta^\mu T^c(x_1 - x_2) \beta^\nu \psi(x_2) : \\ &\quad + : \bar{\psi}(x_2) \beta^\nu T^c(x_2 - x_1) \beta^\mu \psi(x_1) : \} : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : . \end{aligned} \quad (5.68)$$

5.5 Polarização do vácuo

Consideraremos agora o termo (5.33), associado à polarização escalar do vácuo. Após a substituição das contrações de Wick, esse termo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} D_2^{\text{Vac}}(x_1, x_2) &= e^2 : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \\ &\quad \times \text{Tr} \left\{ \beta^\mu S^-(x_1 - x_2) \beta^\nu S^+(x_2 - x_1) - \beta^\nu S^-(x_2 - x_1) \beta^\mu S^+(x_1 - x_2) \right\}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

onde os termos entre chaves são distribuições numéricas provenientes de $R'(x_1 - x_2)$ e $A'(x_1 - x_2)$, respectivamente. Fazendo $y = x_1 - x_2$ e definindo

$$P^{\mu\nu}(y) \stackrel{\text{def}}{=} -e^2 \text{Tr} \{ \beta^\mu S^+(y) \beta^\nu S^-(y) \}, \quad (5.70)$$

escrevemos (5.69) na forma

$$D_2^{\text{Vac}}(x_1, x_2) = \{P^{\mu\nu}(y) - P^{\nu\mu}(-y)\} : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : . \quad (5.71)$$

Podemos verificar explicitamente que essa distribuição possui suporte causal escrevendo o termo entre chaves como

$$\beta^\mu [S(y) \beta^\nu S^+(-y) - S^+(-y) \beta^\nu S(-y)] . \quad (5.72)$$

Para procedermos à bipartição dessa distribuição é mais conveniente trabalharmos no espaço dos momentos. A transformada de Fourier de $P^{\mu\nu}(y)$ é dada por

$$\hat{P}^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dy P^{\mu\nu}(y) e^{ik \cdot y} \quad (5.73)$$

$$= \frac{-e^2}{(2\pi)^2} \text{Tr} \int dy \beta^\mu S^+(y) \beta^\nu S^-(y) e^{ik \cdot y} . \quad (5.74)$$

Substituindo as formas explícitas de $S^+(y)$ e $S^-(y)$ dadas em (2.117), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{P}^{\mu\nu}(k) &= \frac{-e^2}{(2\pi)^4 m^2} \int dp \text{Tr} \{ \beta^\mu \not{p} (\not{p} + m) \beta^\nu (\not{k} - \not{p}) (\not{k} - \not{p} - m) \} \\ &\quad \times \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \theta(k^0 - p^0) \delta[(k - p)^2 - m^2] . \end{aligned} \quad (5.75)$$

Usando as propriedades de traço (A.12) e (A.13), dadas no apêndice A, temos

$$\text{Tr} \{ \beta^\mu \not{p} (\not{p} + m) \beta^\nu (\not{k} - \not{p}) (\not{k} - \not{p} - m) \} = m^2 [4p^\mu p^\nu - 2(k^\mu p^\nu + p^\mu k^\nu) + k^\mu k^\nu] . \quad (5.76)$$

Substituindo esses resultados em (5.75), e levando em conta as distribuições δ no integrando, observamos que $\hat{P}^{\mu\nu}(k)$ é um tensor simétrico de segunda ordem que satisfaz

$$k_\mu \hat{P}^{\mu\nu}(k) = 0 , \quad (5.77)$$

o que é uma consequência da invariância de *gauge* da teoria. Esse resultado permite-nos escrever, como usualmente,

$$\hat{P}^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B(k^2) , \quad (5.78)$$

onde

$$B(k^2) = \frac{-1}{3k^2} \hat{P}_\mu^\mu(k) . \quad (5.79)$$

O tensor contraído $\hat{P}_\mu^\mu(k)$ resulta em

$$\begin{aligned} \hat{P}_\mu^\mu(k) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int dp \{ 4p^2 - 4k \cdot p + k^2 \} \theta(p^0) \theta(k^0 - p^0) \delta(p^2 - m^2) \\ &\quad \times \delta[(k - p)^2 - m^2] . \end{aligned} \quad (5.80)$$

Escrevendo $\delta(p^2 - m^2) \delta[(k - p)^2 - m^2] = \delta(p^2 - m^2) \delta(k^2 - 2k \cdot p)$, o termo entre chaves nessa integral se escreve como $(4m^2 - k^2)$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \hat{P}_\mu^\mu(k) = & -\frac{e^2}{(2\pi)^4} 4m^2 \left(1 - \frac{k^2}{4m^2}\right) \int dp \theta(p^0) \theta(k^0 - p^0) \delta(p^2 - m^2) \\ & \times \delta[(k - p)^2 - m^2]. \end{aligned} \quad (5.81)$$

A resolução dessa última integral é direta e resulta em

$$\int dp \dots = \frac{\pi}{2} \theta(k^2 - 4m^2) \theta(k^0) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}. \quad (5.82)$$

Substituindo esse resultado em (5.81) e retornando em (5.79) e (5.78), obtemos

$$\hat{P}^{\mu\nu}(k) = \frac{-e^2}{(2\pi)^4} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - g^{\mu\nu} \right) \frac{\pi k^2}{6} \left(1 - \frac{4m^2}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}} \theta(k^2 - 4m^2) \theta(k^0). \quad (5.83)$$

Assim, a distribuição numérica no espaço dos momentos associada a (5.71), a qual devemos bipartir, é dada por

$$\hat{P}^{\mu\nu}(k) - \hat{P}^{\mu\nu}(-k) = \frac{-e^2}{(2\pi)^4} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - g^{\mu\nu} \right) \hat{d}(k), \quad (5.84)$$

onde

$$\hat{d}(k) = \frac{\pi k^2}{6} \left(1 - \frac{4m^2}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}} \theta(k^2 - 4m^2) \text{sgn}(k^0). \quad (5.85)$$

Dado que o caráter tensorial de (5.84) não causa nenhuma influência no processo de bipartição, o problema reduz-se à bipartição de $\hat{d}(k)$. Inicialmente devemos determinar a ordem singular ω dessa distribuição. Através das definições do capítulo 4 concluímos que $\omega = 2$. Para simplificar os cálculos faremos uso do fato que k é um 4-vetor do tipo tempo em (5.85). Assim, podemos escolher um referencial de Lorentz tal que $k = (k^0, \mathbf{0})$. Nesse caso a solução central (4.72) pode ser escrita como:

$$\hat{r}(k^0) = \frac{i}{2\pi} (k^0)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{\hat{d}(p^0)}{(p^0 - i0)^3 (k^0 - p^0 + i0)}. \quad (5.86)$$

Substituindo (5.85) nessa integral e fazendo $s = (p^0)^2$, obtemos

$$\hat{r}(k^0) = \frac{i}{12} (k^0)^4 \left\{ \text{P.V.} \int_{4m^2}^{\infty} ds \frac{1}{s [(k^0)^2 - s]} \left(1 - \frac{4m^2}{s}\right)^{\frac{3}{2}} \right. \quad (5.87)$$

$$\left. -i\pi \text{sgn}(k^0) \theta[(k^0)^2 - 4m^2] \frac{1}{(k^0)^2} \left[1 - \frac{4m^2}{(k^0)^2}\right]^{\frac{3}{2}} \right\}. \quad (5.88)$$

A distribuição $\hat{r}'(k^0)$ provém do termo $-\hat{P}^{\mu\nu}(-k)$ em (5.71). Então,

$$\hat{r}'(k^0) = -\frac{\pi (k^0)^2}{6} \left[1 - \frac{4m^2}{(k^0)^2} \right]^{\frac{3}{2}} \theta \left[(k^0)^2 - 4m^2 \right] \theta(-k^0). \quad (5.89)$$

Voltando a um referencial arbitrário, temos que

$$\hat{t}(k) = \hat{r}(k) - \hat{r}'(k) \quad (5.90)$$

$$= \frac{i}{12} k^4 \int_{4m^2}^{\infty} ds \frac{1}{s(k^2 - s + i0)} \left(1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.91)$$

Finalmente, a distribuição de dois pontos referente à polarização do vácuo, escrita no espaço de configuração, é dada por

$$T_2^{\text{Vac}}(x_1, x_2) = -i : A_{\mu}(x_1) \Pi^{\mu\nu}(x_1 - x_2) A_{\nu}(x_2) : , \quad (5.92)$$

onde

$$\hat{\Pi}^{\mu\nu}(k) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \left(\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^2} - g^{\mu\nu} \right) \hat{t}(k) \quad (5.93)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \left(\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^2} - g^{\mu\nu} \right) \hat{\Pi}(k) \quad (5.94)$$

e

$$\hat{\Pi}(k) = \frac{e^2}{12} k^4 \int_{4m^2}^{\infty} ds \frac{1}{s(k^2 - s + i0)} \left(1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.95)$$

Quando $0 < k^2 < 4m^2$ esta integral resulta em

$$\hat{\Pi}(k) = \frac{-e^2}{2} k^2 \left[\frac{4m^2 - k^2}{3k^2} (\theta \cot \theta - 1) + \frac{1}{9} \right], \quad (5.96)$$

onde $\sin^2 \theta = \frac{k^2}{4m^2}$ e $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Quando k é do tipo espaço temos

$$\hat{\Pi}(k) = \frac{e^2 m^2}{12\lambda(1-\lambda)} \left[(1+\lambda)^3 \ln \lambda + \frac{8}{3}(1-\lambda^3) \right], \quad (5.97)$$

onde $k^2 = -\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda} m^2$ e $0 < \lambda < 1$. Esse resultado pode ser continuado analiticamente para $k^2 > 4m^2$ fazendo $-1 < \lambda < 0$ e tomando $\ln \lambda = \ln |\lambda| - i\pi$.

Os resultados acima não constituem a solução mais geral do problema de bi-partição, pois tivemos que bipartir uma distribuição cuja ordem singular era $\omega = 2$. A solução mais geral $\tilde{\Pi}(k)$ é dada por

$$\tilde{\Pi}(k) = \hat{\Pi}(k) + C_0 + C_{\mu} k^{\mu} + C_2 k^2, \quad (5.98)$$

onde as constantes de normalização C_0 , C_μ e C_2 não são determinadas por causalidade. Requerendo invariância por paridade, a constante C_μ deve ser nula. As constantes C_0 e C_2 são determinadas através da análise do propagador corrigido do fóton, $D_{\mu\nu}^{\text{total}}$, obtido por inserções próprias de diagramas de polarização $\Pi^{\mu\nu}$ no propagador do fóton $D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\Delta_0^{\text{F}}$. Esse procedimento é usual e, no espaço dos momentos, resulta em

$$(2\pi)^2 \hat{D}_{\text{total}}^{\mu\nu}(k) = \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \frac{1}{(2\pi)^2 \hat{\Pi}(k) - k^2 - i0} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \frac{1}{k^2 + i0}. \quad (5.99)$$

O segundo termo pode ser desprezado, pois anula-se entre operadores de fótons transversais. A constante C_0 introduz um pólo diferente de zero no propagador corrigido, que é interpretado como a massa do fóton. Portanto, escolhemos $C_0 = 0$. Se $C_2 \neq 0$ podemos escrever

$$\frac{1}{(2\pi)^2 \hat{\Pi}(k) + C_2 k^2 - k^2 - i0} = \frac{Z}{(2\pi)^2 \hat{\Pi}'(k) - k^2 - i0},$$

onde $Z = \frac{1}{1-C_2}$ e $\hat{\Pi}' = Z^{-1}\hat{\Pi}$. Portanto, essa constante introduz um fator no propagador total do fóton, que é interpretada como uma renormalização da carga física. No formalismo causal a carga e já representa a carga física e, portanto, devemos ter $C_2 = 0$. Assim, normalizamos a distribuição de polarização do vácuo através das condições $\tilde{\Pi}(0) = 0$ e $\left. \frac{\tilde{\Pi}(k)}{k^2} \right|_{k^2=0} = 0$.

5.6 Auto-energia

A contribuição para a auto-energia da partícula DKP vem dos termos (5.30) e (5.32), os quais, após a substituição das contrações de Wick, resultam nos termos abaixo:

$$\begin{aligned} D_{\text{I}}^{\text{self}}(x_1, x_2) = & -e^2 : \bar{\psi}(x_1) \beta^\mu \left[S^-(x_1 - x_2) D_0^+(x_2 - x_1) \right. \\ & \left. + S^+(x_1 - x_2) D_0^+(x_1 - x_2) \right] \beta_\mu \psi(x_2) :; \end{aligned} \quad (5.100)$$

$$\begin{aligned} D_{\text{II}}^{\text{self}}(x_1, x_2) = & e^2 : \bar{\psi}(x_2) \beta^\mu \left[S^+(x_2 - x_1) D_0^+(x_2 - x_1) \right. \\ & \left. + S^-(x_2 - x_1) D_0^+(x_1 - x_2) \right] \beta_\mu \psi(x_1) :. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Dessas expressões notamos que

$$D_{\text{II}}^{\text{self}}(x_1, x_2) = -D_{\text{I}}^{\text{self}}(x_2, x_1). \quad (5.102)$$

Consideremos inicialmente $D_{\text{I}}^{\text{self}}(x_1, x_2)$. Da bipartição dessa distribuição determinaremos $T_{\text{I}}^{\text{self}}(x_1, x_2)$. Das relações

$$\begin{aligned} D_{\text{I}}^{\text{self}}(x_1, x_2) &= R_{\text{I}}'(x_1, x_2) - A_{\text{I}}'(x_1, x_2) \\ &= R_{\text{I}}(x_1, x_2) - A_{\text{I}}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_{\text{II}}^{\text{self}}(x_1, x_2) &= R'_{\text{II}}(x_1, x_2) - A'_{\text{II}}(x_1, x_2) \\ &= R_{\text{II}}(x_1, x_2) - A_{\text{II}}(x_1, x_2) , \end{aligned}$$

e usando (5.102), concluimos que

$$\begin{aligned} R'_{\text{II}}(x_1, x_2) &= A'_{\text{I}}(x_2, x_1) ; \\ A'_{\text{II}}(x_1, x_2) &= R'_{\text{I}}(x_2, x_1) ; \\ R_{\text{II}}(x_1, x_2) &= A_{\text{I}}(x_2, x_1) ; \\ A_{\text{II}}(x_1, x_2) &= R_{\text{I}}(x_2, x_1) . \end{aligned}$$

Logo

$$T_{\text{I}}^{\text{self}}(x_1, x_2) = T_{\text{II}}^{\text{self}}(x_2, x_1) , \quad (5.103)$$

e concluimos que a distribuição de dois pontos correspondente à auto-energia $T^{\text{self}} = T_{\text{I}}^{\text{self}} + T_{\text{II}}^{\text{self}}$ é simétrica em seus argumentos, como requerido. Além disso, é suficiente determinarmos apenas uma das distribuições, por exemplo $T_{\text{I}}^{\text{self}}$, enquanto a outra será dada por (5.103).

Voltando em (5.100), podemos verificar explicitamente que o suporte da distribuição $D_{\text{I}}^{\text{self}}(x_1, x_2)$ é causal escrevendo o termo entre colchetes como

$$S(x_1 - x_2) D_0^+(x_2 - x_1) + S^+(x_1 - x_2) D_0(x_1 - x_2) \quad (5.104)$$

e sabendo que as distribuições $S(x_1 - x_2)$ e $D_0(x_1 - x_2)$ possuem suportes causais, como vimos no capítulo 2.

A distribuição numérica que devemos bipartir é a seguinte:

$$d_{\text{I}}(y) = -e^2 \beta^\mu \left[S^-(y) D_0^+(-y) + S^+(y) D_0^+(y) \right] \beta_\mu . \quad (5.105)$$

Denotaremos os dois termos entre colchetes nessa expressão como

$$d_-(y) \stackrel{\text{def}}{=} S^-(y) D^+(-y) = -S^-(y) D^-(y) \quad (5.106)$$

e

$$d_+(y) \stackrel{\text{def}}{=} S^+(y) D^+(y) . \quad (5.107)$$

Tomando a transformada de Fourier de d_- e usando a forma explícita da distribuição de Pauli-Jordan obtemos

$$\hat{d}_-(p) = \frac{1}{(2\pi)^4 m} \int dq \not{q} (\not{q} + m) \theta(-q^0) \delta(q^2 - m^2) \theta(q^0 - p^0) \delta[(p - q)^2] . \quad (5.108)$$

Em virtude das distribuições δ 's e θ 's no integrando temos que $q^2 = m^2$, $q^0 < 0$, $(p - q)^2 = 0$ e $q^0 - p^0 > 0$. Assim, $p = (p - q) + q$ é a soma de dois 4-vetores, um do tipo tempo e o outro do tipo luz, ambos no cone de luz passado. Logo, p é do tipo tempo. Escolhendo um referencial tal que $p = (p^0, \mathbf{0})$, escrevemos a integral proporcional a m nessa última equação como:

$$I_{1\mu} = \int dq q^\mu \theta(-q^0) \theta(q^0 - p^0) \delta(q^2 - m^2) \delta[(p - q)^2] . \quad (5.109)$$

Por argumentos de simetria concluímos que essa integral se anula para $\mu \neq 0$. Para $\mu = 0$ a integral pode ser resolvida por procedimentos usuais e resulta em

$$I_{10} = \frac{\pi}{4} p^0 \left(1 - \frac{m^4}{(p^0)^4} \right) \theta[(p^0)^2 - m^2] \theta(-p^0) . \quad (5.110)$$

O termo correspondente em (5.108), em um referencial arbitrário, é dado por

$$\hat{d}_-(p)_1 = \frac{1}{(4\pi)^3} \not{p} \left(1 - \frac{m^4}{p^4} \right) \theta(p^2 - m^2) \theta(-p^0) . \quad (5.111)$$

Consideremos agora o termo proporcional a $\not{q}^2$ em (5.108):

$$I_{2\mu\nu} = \int dq q_\mu q_\nu \theta(-q^0) \theta(q^0 - p^0) \delta(q^2 - m^2) \delta[(p - q)^2] . \quad (5.112)$$

Essa integral também se anula para $\mu \neq \nu$ por razões de simetria. Por invariância de Lorentz, a mesma deve ser proporcional a $g_{\mu\nu}$. O coeficiente de proporcionalidade pode ser determinado por saturação com $g^{\mu\nu}$, resultando em

$$I_{2\mu\nu} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \int dq q^2 \theta(-q^0) \theta(q^0 - p^0) \delta(q^2 - m^2) \delta[(p - q)^2] . \quad (5.113)$$

Essa integral pode agora ser facilmente calculada e fornece a seguinte contribuição para a integral (5.108):

$$\hat{d}_-(p)_2 = \frac{m}{2(4\pi)^3} g_{\mu\nu} \beta^\mu \beta^\nu \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \theta(p^2 - m^2) \theta(-p^0) . \quad (5.114)$$

Combinando (5.111) e (5.114) na integral (5.108) temos

$$\begin{aligned} \hat{d}_-(p) &= \hat{d}_-(p)_1 + \hat{d}_-(p)_2 \\ &= \frac{1}{(4\pi)^3} \theta(p^2 - m^2) \theta(-p^0) \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \\ &\quad \times \left[\frac{m}{2} \beta^\mu \beta_\mu + \not{p} \left(1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \right] . \end{aligned} \quad (5.115)$$

Voltando em (5.105) temos

$$\begin{aligned}
-e^2 \beta^\mu \hat{d}_-(p) \beta_\mu &= -\frac{e^2}{(4\pi)^3} \theta(p^2 - m^2) \theta(-p^0) \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \\
&\quad \times \left[2m + \not{p} \left(1 + \frac{m^2}{p^2}\right)\right] \\
&= \hat{r}_1(p),
\end{aligned} \tag{5.116}$$

onde usamos a seguinte relação entre as matrizes β (ver apêndice A)

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta_\mu = \beta^\nu \tag{5.117}$$

e também³

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta_\nu \beta_\mu = 4. \tag{5.118}$$

A distribuição $\hat{d}_+(p)$ pode ser calculada de maneira idêntica e resulta em

$$-e^2 \beta^\mu \hat{d}_+(p) \beta_\mu = \frac{e^2}{(4\pi)^3} \theta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \left[2m + \not{p} \left(1 + \frac{m^2}{p^2}\right)\right]. \tag{5.119}$$

Agora, considerando (5.116) e (5.119) conjuntamente, obtemos

$$\hat{d}_1(p) = \frac{e^2}{(4\pi)^3} \theta(p^2 - m^2) \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \left[2m + \not{p} \left(1 + \frac{m^2}{p^2}\right)\right] \text{sgn}(p^0). \tag{5.120}$$

Podemos verificar que a ordem singular dessa distribuição é $\omega = 1$. Assim, a solução central do problema de bipartição é dada pela fórmula (4.72) com $\omega = 1$. Para p do tipo tempo, temos

$$\hat{r}_1(p^0) = \frac{i}{2\pi} (p^0)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \frac{\hat{d}_1(k^0)}{(k^0 - i0)^2 (p^0 - k^0 + i0)}. \tag{5.121}$$

Substituímos agora (5.120) nessa integral e a calculamos por métodos padrões. Em um referencial de Lorentz arbitrário, obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{r}_1(p) &= \frac{ie^2}{4(2\pi)^4} \\
&\times \left\{ \left[\log|1 - b^2| - i\pi \text{sgn}(p^0) \theta(p^2 - m^2) \right] \left[m \left(1 - \frac{1}{b^2}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\not{p}}{2} \left(1 - \frac{1}{b^4}\right) \right] - \frac{\not{p}}{2b^2} - m - \frac{\not{p}}{4} \right\},
\end{aligned} \tag{5.122}$$

³Podemos verificar que essa identidade é válida na representação particular (A.9). Como o lado direito dessa equação é invariante sob mudanças de representação esse resultado é válido em qualquer representação.

onde $b^2 = \frac{p^2}{m^2}$. Esse resultado pode ser continuado analiticamente para p complexo e arbitrário, resultando em:

$$\hat{r}_I^{\text{an}}(p) = \frac{ie^2}{4(2\pi)^4} \left\{ \ln \left(1 - b^2 \right) \left[m \left(1 - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{\not{p}}{2} \left(1 - \frac{1}{b^4} \right) \right] - \frac{\not{p}}{2b^2} - m - \frac{\not{p}}{4} \right\}. \quad (5.123)$$

Combinando (5.122) com (5.116) obtemos $T_I^{\text{self}}(x_1, x_2)$:

$$T_I^{\text{self}}(x_1, x_2) = ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \Sigma(x_1 - x_2) \psi(x_2) :, \quad (5.124)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(p) &= -i [\hat{r}_I(p) - \hat{r}_I'(p)] \\ &= \frac{ie^2}{4(2\pi)^4} \left\{ [\ln |1 - b^2| - i\pi\theta(p^2 - m^2)] \left[m \left(1 - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{\not{p}}{2} \left(1 - \frac{1}{b^4} \right) \right] - \frac{\not{p}}{2b^2} - m - \frac{\not{p}}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Esse resultado é livre de divergências infravermelhas devido ao fato que usamos a solução central, que normaliza a solução em torno de $p = 0$. Além disso, essa expressão é bem definida na camada de massa $p^2 = m^2$. No entanto, essa solução não é única, pois bipartimos uma distribuição cuja ordem singular era $\omega = 1$. Portanto, devemos adicionar à solução obtida um polinômio de primeiro grau em $\not{p}$ de forma a obtermos a solução geral do problema de bipartição. Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &= \frac{ie^2}{4(2\pi)^4} \left\{ [\ln |1 - b^2| - i\pi\theta(p^2 - m^2)] \left[m \left(1 - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{\not{p}}{2} \left(1 - \frac{1}{b^4} \right) \right] - \frac{\not{p}}{2b^2} + C_0 + C_1 \not{p} \right\}. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Consideremos agora correções radiativas devidas a inserções de auto-energia no propagador da partícula escalar. O propagador completo é definido da maneira usual como

$$\hat{T}_{\text{total}}^c(p) = \hat{T}^c(p) + \hat{T}^c(p) \tilde{\Sigma}(p) \hat{T}^c(p) + \hat{T}^c(p) \tilde{\Sigma}(p) \hat{T}^c(p) \tilde{\Sigma}(p) \hat{T}^c(p) + \dots, \quad (5.127)$$

onde $\hat{T}^c(p)$ é dado por (5.67). Somando formalmente essa série obtemos

$$\hat{T}_{\text{total}}^c(p) = \frac{\hat{T}^c(p)}{1 - \tilde{\Sigma}(p) \hat{T}^c(p)} \quad (5.128)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 m} \frac{\not{p}(\not{p} + m) - p^2 + m^2}{p^2 - m^2 + i0 - [\not{p}(\not{p} + m) - p^2 + m^2] \tilde{\Sigma}(p)}. \quad (5.129)$$

No formalismo causal m deve ser a massa física da partícula escalar. Isto será satisfeito somente se

$$\left[\not{p}(\not{p} + m) - p^2 + m^2 \right] \tilde{\Sigma}(p) \Big|_{p^2=m^2} = 0. \quad (5.130)$$

Substituindo (5.126) nessa condição obtemos a seguinte restrição sobre as constantes C_0 e C_1 :

$$C_0 = m \left(\frac{1}{2} - C_1 \right). \quad (5.131)$$

Essa equação elimina uma das constantes arbitrárias, por exemplo C_0 , enquanto a outra será relacionada através de uma identidade de Ward (que é consequência da invariância de *gauge* da teoria) a uma constante arbitrária que aparecerá na distribuição de três pontos correspondente à correção do vértice. Isto será o assunto da próxima seção.

5.7 Correção do vértice

Nesta seção usaremos a invariância de *gauge* da teoria para encontrar uma relação (identidade de Ward) entre a distribuição de três pontos correspondente à correção do vértice e a distribuição de dois pontos correspondente à auto-energia, calculada na seção anterior. Usando essa identidade procuraremos determinar a constante arbitrária restante nos cálculos da auto-energia.

Para aplicarmos a condição (5.41) devemos antes especificar as distribuições de três pontos correspondentes à correção do vértice. Na linguagem do método tradicional [42], devemos considerar quatro diagramas, que são análogos àqueles encontrados na correção do vértice em QED espinorial. Estes correspondem a correções devidas a: *i*) introdução de uma linha fotônica interna entre as duas linhas escalares externas, *ii*) inserção de uma “bolha” de polarização do vácuo na linha fotônica externa, *iii*) e *iv*) inserção de “bolhas” de auto-energia nas linhas escalares externas. Assumindo que a linha do fóton externo esteja conectada ao vértice x_3 , a distribuição $t_3^\mu(x_1, x_2, x_3)$ a ser introduzida em (5.41) é

$$\begin{aligned} t_3^\mu(x_1, x_2, x_3) = & - : \bar{\psi}(x_1) \Lambda^\mu(x_1 - x_3, x_2 - x_3) \psi(x_2) : \\ & + : \bar{\psi}(x_1) \Sigma(x_1 - x_2) T^c(x_2 - x_3) \beta^\mu \psi(x_3) : \\ & + : \bar{\psi}(x_3) \beta^\mu T^c(x_3 - x_1) \Sigma(x_1 - x_2) \psi(x_2) : \\ & + : \bar{\psi}(x_1) \beta^\rho \psi(x_1) : g_{\rho\nu} D_0^F(x_1 - x_2) \Pi^{\nu\mu}(x_2 - x_3) \\ & + x_1 \longleftrightarrow x_2, \end{aligned} \quad (5.132)$$

onde $\Lambda^\mu(x_1 - x_3, x_2 - x_3)$ é a distribuição numérica correspondente à correção *i*).

Assim,

$$\begin{aligned}
\partial_\mu^3 t_3^\mu(x_1, x_2, x_3) &= :\bar{\psi}(x_1) \left[-\partial_\mu^3 \Lambda^\mu(x_1 - x_3, x_2 - x_3) \right] \psi(x_2): \\
&+ :\bar{\psi}(x_1) \Sigma(x_1 - x_2) \partial_\mu^3 [T^c(x_2 - x_3) \beta^\mu \psi(x_3)]: \\
&+ :\partial_\mu^3 \left[\bar{\psi}(x_3) \beta^\mu T^c(x_3 - x_1) \right] \Sigma(x_1 - x_2) \psi(x_2): \\
&+ :\bar{\psi}(x_1) \beta^\rho \psi(x_1): g_{\rho\nu} D_0^F(x_1 - x_2) \left[\partial_\mu^3 \Pi^{\nu\mu}(x_2 - x_3) \right] \\
&+ x_1 \longleftrightarrow x_2, \tag{5.133}
\end{aligned}$$

O termo entre colchetes da quarta linha é zero, devido a (5.77). Trabalhando os colchetes das segunda e terceira linhas, temos

$$\begin{aligned}
\partial_\mu^3 [T^c(x_2 - x_3) \beta^\mu \psi(x_3)] &= i\delta(x_2 - x_3) \psi(x_3); \\
\partial_\mu^3 [\bar{\psi}(x_3) \beta^\mu T^c(x_3 - x_1)] &= -i\bar{\psi}(x_3) \delta(x_3 - x_1),
\end{aligned}$$

onde usamos as equações (2.5) e o fato que T^c é a função de Green correspondente às mesmas, de acordo com (5.66). Voltando com esses resultados em (5.133) e levando em conta as distribuições δ 's, a condição (5.41) implica em

$$\begin{aligned}
\partial_\mu^3 t_3^\mu(x_1, x_2, x_3) &= :\bar{\psi}(x_1) \left\{ -\partial_\mu^3 \Lambda^\mu(x_1 - x_3, x_2 - x_3) \right. \\
&\quad \left. + i\delta(x_2 - x_3) \Sigma(x_1 - x_2) - i\delta(x_1 - x_3) \Sigma(x_1 - x_2) \right\} \psi(x_2): \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Usando o fato que o segundo membro é uma distribuição a valores de operadores no espaço de Fock, aplicamos essa distribuição sobre uma função teste arbitrária e invariante sob translações e consideramos o elemento de matriz entre dois estados arbitrários de uma única partícula DKP. Assim, podemos mostrar que a condição acima será satisfeita somente se o termo entre chaves for zero e obtemos a identidade de Ward desejada:

$$-\partial_\mu^3 \Lambda^\mu(x_1 - x_3, x_2 - x_3) + i\delta(x_2 - x_3) \Sigma(x_1 - x_2) - i\delta(x_1 - x_3) \Sigma(x_1 - x_2) = 0. \tag{5.134}$$

Denotando

$$y_1 = x_1 - x_3 \quad \text{e} \quad y_2 = x_2 - x_3,$$

podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial x_3^\mu} \Lambda^\mu(y_1, y_2) = -(\partial_1 + \partial_2)_\mu \Lambda^\mu(y_1, y_2)$$

e a equação (5.134) torna-se

$$(\partial_1 + \partial_2)_\mu \Lambda^\mu(y_1, y_2) + i\delta(y_2) \Sigma(y_1 - y_2) - i\delta(y_1) \Sigma(y_1 - y_2) = 0. \tag{5.135}$$

Tomando a transformada de Fourier ⁴ dessa equação obtemos

$$(p_1 + p_2)_\mu \hat{\Lambda}^\mu(p_1, p_2) - \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \hat{\Sigma}(p_1) - \hat{\Sigma}(p_2) \right\} = 0. \quad (5.136)$$

Introduzindo a notação $q = -p_2$, $p = p_1$ e redefinindo $\hat{\Lambda}^\mu$ como

$$\hat{\Lambda}^\mu(p, -q) \rightarrow \hat{\Lambda}^\mu(p, q),$$

podemos escrever

$$(p - q)_\mu \hat{\Lambda}^\mu(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \hat{\Sigma}(p) - \hat{\Sigma}(q) \right\}. \quad (5.137)$$

No limite $p \rightarrow q$, temos

$$\hat{\Lambda}^\mu(p, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \hat{\Sigma}(p). \quad (5.138)$$

Fazendo uso dessa identidade podemos calcular a distribuição de três pontos para o vértice no limite de momento transferido nulo.⁵

Substituindo a forma explícita da auto-energia (5.126) nessa identidade obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}^\mu(p, p) = & \frac{ie^2}{4(2\pi)^6} \left\{ \left[\ln |1 - b^2| - i\pi\theta(p^2 - m^2) \right] \right. \\ & \times \left[\frac{2p^\mu}{mb^4} \left(1 + \frac{\not{p}}{mb^2} \right) + \frac{\beta^\mu}{2} \left(1 - \frac{1}{b^4} \right) \right] \\ & + \frac{2p^\mu}{m^2} \left[\text{P.V.} \frac{1}{b^2 - 1} - i\pi\delta(b^2 - 1) \right] \left[m \left(1 - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{\not{p}}{2} \left(1 - \frac{1}{b^4} \right) \right] \\ & \left. + \frac{p^\mu \not{p}}{m^2 b^4} - \frac{\beta^\mu}{2b^2} + C_1 \beta^\mu \right\}. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Essa expressão é bem definida em torno de $p = 0$, mas é singular na camada de massa $p^2 = m^2$ devido à presença do termo logarítmico.

A forma da distribuição do vértice dada acima é suficiente para estudarmos o significado físico da constante C_1 , que está associada à normalização da carga elétrica. A carga física é definida no espalhamento de uma partícula escalar por um campo eletromagnético externo a baixas energias. Assim, devemos considerar as contribuições à matriz S (no limite de momento transferido nulo) provenientes

⁴Nossa convenção para a transformada de Fourier de uma distribuição $F(y_1, y_2)$ é

$$\hat{F}(p_1, p_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dy_1 dy_2 e^{i(p_1 y_1 + p_2 y_2)} F(y_1, y_2).$$

⁵O momento transferido é dado pela diferença $p - q$ em (5.137).

dos termos que contêm C_1 em ambas as distribuições, correspondentes ao vértice (5.139) e auto-energia. Essas contribuições são dadas pelo elemento de matriz

$$\left(\Omega, a(p) S^{(V+S)}(g) a^\dagger(q) \Omega \right), \quad (5.140)$$

onde

$$\begin{aligned} S^{(V+S)}(g) &= \frac{1}{3!} \int dx_1 dx_2 dx_3 \left[T^V + 2T^S \right] g(x_1) g(x_2) g(x_3) \\ T^V(x_1, x_2, x_3) &= -e^3 : \bar{\psi}(x_1) \Lambda^\mu(x_1 - x_3, x_2 - x_3) \psi(x_2) : \hat{A}_\mu^{\text{ext}}(x_3) \\ T^S(x_1, x_2, x_3) &= e^3 : \bar{\psi}(x_1) \Sigma(x_1 - x_2) T^c(x_2 - x_3) \beta^\mu \psi(x_2) : \hat{A}_\mu^{\text{ext}}(x_3). \end{aligned}$$

Devemos tomar, ao final dos cálculos, o limite adiabático $g \rightarrow 1$. Para isso consideraremos uma função teste fixa $g_0(x)$ tal que $g_0(0) = 1$. O limite adiabático é considerado fazendo-se [31]

$$g(x) = g_0(\epsilon x), \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

A transformada de Fourier de $g(x)$ é $\hat{g}(k) = \frac{1}{\epsilon^4} g_0\left(\frac{k}{\epsilon}\right)$ e $\hat{g}(k) \rightarrow (2\pi)^2 \delta(k)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Considerando apenas as contribuições dos termos que contêm a constante C_1 em (5.140) no limite adiabático obtemos um resultado nulo. Assim, concluímos que essa constante não possui significado físico, dado que não contribui para a normalização da carga. No entanto, podemos levantar a sua arbitrariedade requerendo que a distribuição de vértice satisfaça a solução central, isto é,

$$\hat{\Lambda}^\mu(0, 0) = 0.$$

Usando essa condição em (5.139), obtemos

$$C_1 = \frac{1}{4}.$$

Capítulo 6

Considerações Finais

Nesse trabalho estudamos alguns aspectos da teoria do campo escalar em interação no formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau. Procuramos responder, em cada caso estudado, à questão sobre a equivalência com o formalismo de Klein-Gordon. Além disso, nos casos em que essa equivalência ocorre, procuramos evidenciar algumas vantagens do formalismo DKP sobre KG.

Em primeiro lugar analisamos a interação mínima eletromagnética no nível clássico. Nesse contexto, mostramos que ambos os formalismos DKP e KG são equivalentes, contrariamente ao estabelecido na literatura. Além disso mostramos que os chamados termos anômalos que surgem na forma hamiltoniana e em uma versão de segunda ordem da equação DKP não possuem significado físico, visto que desaparecem quando selecionamos o setor de spin 0 da teoria. Todos esses resultados foram obtidos independentemente da representação.

Em segundo lugar, ainda no nível clássico, consideramos a interação gravitacional mínima no contexto da teoria de Einstein-Cartan. Mostramos que, contrariamente ao que ocorre no formalismo KG, no formalismo DKP surge uma interação entre o campo escalar e a torção. Investigando a origem dessa diferença, concluímos que a lagrangiana DKP minimamente acoplada à gravitação equivale a uma lagrangiana KG obtida através de uma forma de acoplamento *não mínimo* a partir da correspondente lagrangiana no espaço-tempo de Minkowski. Logo, se essa interação entre campos escalares e torção mostrar-se fisicamente significativa [48], podemos dizer que o formalismo DKP é mais adequado para introduzi-la, visto que comporta essa interação de forma natural, sem a necessidade de introdução de acoplamentos não mínimos.

Após, estudamos o caso especial da teoria de Einstein-Cartan em que a torção é identicamente nula, que consiste na Relatividade Geral. Mostramos que nesse caso há completa equivalência entre os formalismos DKP e KG. Também analisamos o caso do Teleparallelismo, que é uma teoria para o campo gravitacional equivalente à

Relatividade Geral, onde a geometria do espaço-tempo subjacente possui curvatura nula e o campo gravitacional é completamente descrito através da torção. Enfatizamos que a lagrangiana do campo escalar em interação com o campo gravitacional nesse caso é obtida através de uma substituição não mínima na correspondente lagrangiana de Minkowski, tanto no formalismo DKP quanto no de KG. Como essa teoria é equivalente à Relatividade Geral, os formalismos DKP e KG também equivalem nesse contexto, como esperado.

No contexto do formalismo DKP, discutimos as diferenças entre a interação com a torção presente nas teorias de Einstein-Cartan (com acoplamento mínimo) e Teleparallelismo. Observamos que o Teleparallelismo descreve o campo gravitacional através da torção, ao passo que a Relatividade Geral o descreve através da curvatura. Logo, dada a equivalência entre essas duas teorias, é natural que tudo o que possa acoplar-se à curvatura na Relatividade Geral acople-se à torção na descrição do Teleparallelismo. Por outro lado, se esperássemos equivalência entre os formalismos DKP e KG no contexto da teoria de Einstein-Cartan, o resultado que obtivemos é inesperado, dado que este último não apresenta interação com a torção.

Finalmente estudamos a eletrodinâmica escalar *via* formalismo DKP no nível quântico, no contexto do método causal de Bogoliubov-Epstein-Glaser. O ponto de partida para a formulação da teoria foi a identificação da distribuição $T_1(x)$, que define o acoplamento entre os campos. As condições impostas pelo método determinaram completamente a forma desse acoplamento, que corresponderia ao “vértice” no método perturbativo usual, o qual não contém, por definição, termos de ordem superior à primeira na constante de acoplamento. Após construirmos a expressão geral para a distribuição causal de dois pontos, analisamos alguns casos específicos.

Como o método causal produz resultados idênticos ao método tradicional em nível de “árvore”, estudamos o espalhamento Compton com o objetivo de determinar a forma “correta” do propagador da partícula escalar DKP. Nesse ponto surgiram constantes de normalização arbitrárias (finitas), as quais foram determinadas através da imposição das condições de invariância de *gauge* e de conjugação de carga sobre a teoria. Juntando o fato que também o “vértice” da teoria efetiva usual também foi determinado pelo método causal, este justifica matematicamente a teoria efetiva para a QED escalar via formalismo DKP em nível de árvore [8, 14].

No nível de um *loop* determinamos o tensor de polarização do vácuo, a auto-energia da partícula escalar e a correção de vértice no caso de momento transferido nulo. Através da imposição de simetrias e da renormalização da carga e da massa determinamos todas as constantes físicas arbitrárias. Todos os resultados que obtivemos nesses cálculos concordam com aqueles obtidos no contexto da correspondente

teoria efetiva, que também concordam com aqueles obtidos através do formalismo KG, tanto do ponto de vista da teoria perturbativa usual [14] como também no contexto do método causal [29]. Nesse trabalho não apresentamos um estudo sistemático no nível de um *loop*, o qual seria necessário para que pudéssemos afirmar alguma coisa a respeito da renormalizabilidade da teoria, que é uma questão ainda sem uma resposta definitiva. No entanto, nosso estudo constitui-se em um primeiro passo na direção de um tratamento sistemático da teoria que, acreditamos, possa ajudar a responder a essa questão.

Como perspectivas futuras de aplicações do formalismo DKP, além da questão da renormalizabilidade acima citada, podemos citar investigações mais aprofundadas acerca da interação do campo DKP (setores escalar e vetorial) com a torção, tanto no nível clássico como quântico, nos contextos das teorias de Einstein-Cartan e do Teleparallelismo.

Apêndice A

Algumas propriedades das matrizes β

As propriedades da álgebra (2.2) das matrizes β foram estudadas em detalhes nas referências [33, 49]. Neste apêndice apresentaremos alguns resultados que úteis aos propósitos deste trabalho.

As matrizes β satisfazem as relações

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu g^{\nu\rho} + \beta^\rho g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

a partir das quais podemos ver diretamente que

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta_\mu = \beta^\nu, \quad (\text{A.2})$$

$$(\beta^\mu)^2 \beta^\rho = \beta^\rho [g^{\mu\mu} - (\beta^\mu)^2], \quad \text{se } \rho \neq \mu, \quad (\text{A.3})$$

onde não estaremos assumindo a convenção de soma sobre índices repetidos quando forem ambos covariantes ou contravariantes. Quando $\rho = \mu$ temos

$$(\beta^0)^3 = \beta^0 \quad \text{e} \quad (\beta^k)^3 = -\beta^k \quad k = 1, 2, 3. \quad (\text{A.4})$$

Definindo

$$\eta^\mu \stackrel{\text{def}}{=} 2(\beta^\mu)^2 - g^{\mu\mu} \quad (\text{A.5})$$

temos que

$$(\eta^\mu)^2 = 1, \quad [\eta^\mu, \eta^\nu] = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\{\eta^\mu, \beta^\nu\} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \quad (\text{A.7})$$

e

$$\eta^\mu \beta^\mu = \beta^\mu \eta^\mu = g^{\mu\mu} \beta^\mu. \quad (\text{A.8})$$

Uma representação real 5×5 particularmente útil da álgebra (A.1) é dada por

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Nessa representação temos que

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

As matrizes β adjuntas podem ser determinadas por

$$\beta^{\mu\dagger} = \eta^0 \beta^\mu \eta^0 = \begin{cases} \beta^0, & \mu = 0 \\ -\beta^k, & \mu = k \end{cases}, \quad (\text{A.11})$$

de forma que β^0 é hermitiana e β^k ($k = 1, 2, 3$) são anti-hermitianas. Também podemos verificar que $\eta^{\mu\dagger} = \eta^\mu$. A equação (A.11) é válida em qualquer representação que seja unitariamente equivalente à representação (A.9)¹.

Finalmente, as matrizes β satisfazem as seguintes propriedades de traço [49]:

$$\text{Tr}\{\beta^{\mu_1} \beta^{\mu_2} \dots \beta^{\mu_{2n-1}}\} = 0; \quad (\text{A.12})$$

$$\text{Tr}\{\beta^{\mu_1} \beta^{\mu_2} \dots \beta^{\mu_{2n}}\} = g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} \dots g^{\mu_{2n-1} \mu_{2n}} + g^{\mu_2 \mu_3} g^{\mu_4 \mu_5} \dots g^{\mu_{2n} \mu_1}, \quad (\text{A.13})$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$

¹Duas representações são ditas unitariamente equivalentes se podem ser transformadas uma na outra através de transformações unitárias

Apêndice B

Noções sobre a teoria de distribuições

Neste apêndice apresentaremos alguns aspectos da teoria de distribuições que são usados ao longo do texto. Para um tratamento sistemático, citamos as referências [50, 51].

Funções testes. Neste trabalho consideramos dois espaços de funções testes:

1. O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$, constituído pelas funções reais $\phi(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ que decrescem no infinito, juntamente com todas as suas derivadas parciais, mais rapidamente do que qualquer potência de $\frac{1}{|x|}$.

2. O espaço $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, composto por todas as funções reais $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ cujo suporte é compacto.

A notação $C^\infty(\mathbf{R}^m)$ acima representa o conjunto constituído por todas as funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbf{R}^m$. O *suporte* de uma função é o *fechamento* do conjunto no qual a função não se anula.

Podemos ver que $C_0^\infty \subset \mathcal{S}$. Mais ainda, pode ser mostrado que C_0^∞ é *denso* em $\mathcal{S}$, no sentido que toda função $\phi \in \mathcal{S}$ é o limite de alguma sequência $\{\phi_\nu \in C_0^\infty\}_{\nu=1}^\infty$.

Distribuições. Dado um espaço de funções testes $\{\phi\}$ (no nosso caso, $\mathcal{S}$ ou C_0^∞), o funcional $\langle f, \phi \rangle$ define uma *distribuição*, ou *função generalizada*, sobre esse espaço se satisfizer as duas condições abaixo:

i) *Linearidade.* Para todo $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ e quaisquer ϕ_1 e ϕ_2 no espaço de funções testes,

$$\langle f, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \rangle = \alpha \langle f, \phi_1 \rangle + \beta \langle f, \phi_2 \rangle .$$

ii) *Continuidade.* Se a sequência $\phi_\nu(x)$ convergir a $\phi(x)$ de maneira uniforme para todo x quando $\nu \rightarrow \infty$, com ϕ_ν e ϕ no espaço de funções testes, então¹

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle f, \phi_\nu \rangle = \langle f, \phi \rangle .$$

O conjunto das distribuições sobre $\mathcal{S}$ e sobre C_0^∞ são denotados, respectivamente, por $\mathcal{S}'$ e $C_0^{\infty'}$. Pode ser provado que $\mathcal{S}' \subset C_0^{\infty'}$ e que $\mathcal{S}'$ é denso em $C_0^{\infty'}$. As

¹Esse limite é o limite usual de uma sequência numérica.

distribuições em $\mathcal{S}'$ são também chamadas de *temperadas*. Nesta tese trabalharemos essencialmente com essa classe de distribuições; o conjunto mais geral C_0^∞ será usado apenas como auxiliar para algumas definições ou demonstrações.

Se a integral

$$\langle f, \phi \rangle = \int dx f(x) \phi(x) \quad (\text{B.1})$$

existir para toda ϕ pertencente a um dado espaço de funções testes, então f define uma distribuição sobre esse espaço.

Distribuições que podem ser escritas na forma integral acima são ditas *regulares*; do contrário, são ditas *singulares*. Se o espaço de funções testes for C_0^∞ a função f define uma distribuição regular se a mesma for localmente integrável, isto é, se for integrável no sentido de Lebesgue em toda região limitada. Por outro lado, se o espaço de funções testes for o espaço de Schwartz $\mathcal{S}$, a restrição adicional de que f cresça lentamente no infinito é suficiente para garantir que a integral acima exista para toda função teste em $\mathcal{S}$. Essa restrição significa que $f(x)$ deve crescer no infinito mais lentamente que alguma potência de $|x|$.

Como podemos observar diretamente, a distribuição δ de Dirac, definida como $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$, é uma distribuição singular sobre $\mathcal{S}$ (e, portanto, também sobre C_0^∞).

Dizemos que uma distribuição f é *nula* em uma vizinhança U de um dado ponto x_0 se $\langle f, \phi \rangle$ é zero para toda função teste ϕ cujo suporte esteja contido em U . De forma geral, uma distribuição *se anula em um conjunto aberto* G se $\langle f, \phi \rangle = 0$ para toda função teste cujo suporte esteja contido em G .

Por outro lado, se uma distribuição f não se anula em nenhuma vizinhança de um dado ponto x_0 , então este ponto é dito ser um ponto *essencial* de f . O conjunto de todos os pontos essenciais de uma distribuição f é chamado de *suporte* de f , e denotado por $\text{supp } f$. Se F é um conjunto que contém o suporte de f , então dizemos que a distribuição f é *concentrada em* F . Por exemplo, a distribuição δ de Dirac é concentrada na origem, que constitui-se no único ponto essencial dessa distribuição.

Pode ser mostrado que toda distribuição concentrada em um único ponto x_0 pode ser escrita como uma combinação linear de distribuições deltas e de suas derivadas, concentradas em x_0 .

Se uma função teste ϕ se anula em uma vizinhança do suporte de f , então $\langle f, \phi \rangle = 0$. Logo, $\langle f, \phi \rangle$ só depende dos valores de ϕ *sobre* o suporte de f , podendo essa função teste variar aleatoriamente em toda a região fora de uma vizinhança desse suporte sem alterar o valor $\langle f, \phi \rangle$.

Duas distribuições *coincidem* sobre um aberto G se sua diferença se anula sobre esse aberto. Em particular, uma distribuição é regular em um conjunto aberto se coincidir com uma função ordinária nesse aberto. Por exemplo, a distribuição δ é

regular (e igual a zero) em todo aberto que não contenha a origem.

Operações sobre distribuições. Definimos abaixo algumas operações envolvendo distribuições em C_0^{∞} e fechadas em relação a esse conjunto. Por conseguinte, todas estas definições se aplicarão também às distribuições em $\mathcal{S}'$, com a ressalva que este último conjunto pode não ser fechado com respeito a algumas dessas operações.

- *Adição entre duas distribuições:* Sejam f e g duas distribuições arbitrárias. Então, para toda função teste ϕ ,

$$\langle f + g, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \phi \rangle + \langle g, \phi \rangle \quad (\text{B.2})$$

- *Produto de uma distribuição por um número:* Seja α um número real ou complexo. Então

$$\langle \alpha f, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \alpha \phi \rangle = \alpha \langle f, \phi \rangle \quad (\text{B.3})$$

- *Translação.* Seja $x_a \in \mathbf{R}^m$. Então

$$\langle f(x + x_a), \phi(x) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(x), \phi(x - x_a) \rangle \quad (\text{B.4})$$

- *Transformações lineares nas variáveis independentes.* Seja $x' = \Lambda x$ uma transformação linear não singular em $\mathbf{R}^m$. Então

$$\langle f(\Lambda x), \phi(x) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{||\Lambda||} \langle f(x), \phi(\Lambda^{-1}x) \rangle, \quad (\text{B.5})$$

onde $||\Lambda||$ é o módulo do determinante da transformação e Λ^{-1} é a transformação inversa. Em particular,

$$\langle f(\alpha x), \phi(x) \rangle = \frac{1}{|\alpha|^m} \left\langle f(x), \phi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right\rangle \quad (\text{B.6})$$

- *Diferenciabilidade.* A derivada parcial f_{x_i} de uma distribuição f é definida por

$$\langle f_{x_i}, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, -\phi_{x_i} \rangle \quad (\text{B.7})$$

- *Produto de uma distribuição por uma função infinitamente diferenciável:* Seja $c(x) \in C^\infty$. Então

$$\langle c(x)f(x), \phi(x) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(x), c(x)\phi(x) \rangle. \quad (\text{B.8})$$

O conjunto das distribuições temperadas $\mathcal{S}'$ é fechado em relação a todas as operações acima, exceto a última, pois o produto de uma função infinitamente diferenciável por uma função teste em $\mathcal{S}$ não resulta necessariamente em outra função

em $\mathcal{S}$. Se restringimos as funções C^∞ àquelas que crescem lentamente no infinito, juntamente com suas derivadas, temos que a multiplicação acima é fechada em $\mathcal{S}'$.

Consideremos agora dois espaços independentes de funções testes, $\mathcal{S}_x$ e $\mathcal{S}_y$. Denotamos os conjuntos de funções temperadas correspondentes por $\mathcal{S}'_x$ e $\mathcal{S}'_y$, respectivamente. Seja agora uma função $\eta(x, y) \in \mathcal{S}_{x,y}$. Definimos o *produto direto*, ou *tensorial*, das duas distribuições $f \in \mathcal{S}'_x$ e $g \in \mathcal{S}'_y$ como

$$\langle f(x) \times g(y), \eta(x, y) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(x) \langle g(y), \eta(x, y) \rangle \rangle \quad (\text{B.9})$$

Pode ser mostrado que essa operação define uma distribuição temperada em $\mathcal{S}'_{x,y}$.

Com as operações de adição e multiplicação por um número definidas acima os conjuntos $\mathcal{S}'$ e $C_0^{\infty'}$ constituem-se em espaços lineares.

A transformada e a transformada inversa de Fourier de uma função teste ϕ são dadas por

$$\hat{\phi}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int dx^m \phi(x) \exp(ip \cdot x); \quad (\text{B.10})$$

$$\check{\phi}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int dp^m \phi(x) \exp(-ip \cdot x). \quad (\text{B.11})$$

Pode ser mostrado que a transformada de Fourier de uma função teste em $\mathcal{S}$ será também uma função teste em $\mathcal{S}$, o mesmo acontecendo com a transformada inversa.

A transformada de Fourier $\hat{f}$ de uma distribuição $f \in \mathcal{S}'$ é definida como

$$\langle \hat{f}, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \hat{\phi} \rangle. \quad (\text{B.12})$$

A transformada inversa $\check{f}$ é dada por

$$\langle \check{f}, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \check{\phi} \rangle. \quad (\text{B.13})$$

Pode ser mostrado que tanto $\hat{f}$ quanto $\check{f}$ pertencem ao espaço $\mathcal{S}'$, diferentemente do que ocorre com o espaço mais geral $C_0^{\infty'}$. As propriedades usuais da transformada de Fourier de funções ordinárias se aplicam às transformadas de Fourier de distribuições temperadas.

Em particular, usando as definições acima, podemos escrever:

$$\langle f, \phi \rangle = \langle \hat{f}, \check{\phi} \rangle. \quad (\text{B.14})$$

Apêndice C

Propriedades da matriz S

Neste apêndice apresentaremos algumas propriedades da matriz S e suas conseqüências sobre as distribuições T_n .

Causalidade. Consideremos duas funções teste $g_1(x)$ e $g_2(x)$ cujos suportes, por hipótese, sejam temporalmente disjuntos em algum referencial de Lorentz, i.e.,

$$\text{supp } g_1 \subset \{x \in \mathcal{M} | x^0 \in (-\infty, r)\} \quad \text{supp } g_2 \subset \{x \in \mathcal{M} | x^0 \in (r, \infty)\} \quad (\text{C.1})$$

A condição de causalidade sobre a matriz S é enunciada como

$$S(g_1 + g_2) = S(g_2)S(g_1). \quad (\text{C.2})$$

Essa condição, *a priori*, não tem significado físico em teorias quantizadas envolvendo interações de longo alcance, pois não é possível *desligar* a interação em nenhum intervalo de tempo. $S(g_1)$, por exemplo, coincide com o operador $\mathbf{1}$ para $t > r$, o que significa que a interação é nula nesse intervalo. A condição acima tem origem em teorias onde o campo de interação é externo (não quantizado). Nesses casos, a fatoração (C.2) surge naturalmente e possui interpretação física [20, 30]. Em teorias quantizadas a condição de causalidade só pode ser justificada *a posteriori*, através de suas conseqüências.

Se g_1 e g_2 satisfazem (C.1) então em um referencial de Lorentz arbitrário existirá uma superfície do tipo espaço separando os suportes dessas funções. Assim, escrevemos

$$\text{supp } g_1 < \text{supp } g_2, \quad (\text{C.3})$$

significando que o suporte de g_1 é *anterior* ao de g_2 . Em geral, dados dois conjuntos cujos elementos são pontos do espaço-tempo de Minkowski, usaremos a notação $\mathbf{X} < \mathbf{Y}$ sempre que existir algum referencial de Lorentz em que todos os pontos de $\mathbf{X}$ sejam anteriores aos pontos de $\mathbf{Y}$. Nesse caso, em um referencial de Lorentz arbitrário haverá uma superfície do tipo espaço separando os dois conjuntos, de tal maneira que os pontos do conjunto $\mathbf{Y}$ estejam *acima* dos pontos do conjunto $\mathbf{X}$.

A condição (C.2) terá implicações sobre as distribuições T_n . Da expansão (4.1), temos que

$$S(g_1 + g_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n T_n(x_1, \dots, x_n) [g_1(x_1) + g_2(x_1)] \dots [g_1(x_n) + g_2(x_n)]. \quad (\text{C.4})$$

O produto de funções testes no integrando acima terá 2^n termos, cada um consistindo em um produto de n funções teste e apresentando a seguinte forma geral

$$\begin{array}{ccc} [g_2(x_1) \dots g_2(x_m)] & \times & [g_1(x_{m+1}) \dots g_1(x_n)], \\ m \text{ fatores} & & (n - m) \text{ fatores} \end{array} \quad (\text{C.5})$$

onde $m = 0, \dots, n$. Para cada valor fixo de m haverá $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ termos, diferindo entre si apenas por permutações dos argumentos x_i . Como a integral (C.4) é invariante sob essas permutações, podemos escrevê-la como

$$S(g_1 + g_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \int dx_1 \dots dx_n T(x_1, \dots, x_n) [g_2(x_1) \dots g_2(x_m)] \times [g_1(x_{m+1}) \dots g_1(x_n)]. \quad (\text{C.6})$$

Da condição de causalidade (C.2), temos

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \int dx_1 \dots dx_n T(x_1, \dots, x_n) [g_2(x_1) \dots g_2(x_m)] \\ & \quad \times [g_1(x_{m+1}) \dots g_1(x_n)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \int dx_1^{(2)} \dots dx_n^{(2)} dx_1^{(1)} \dots dx_m^{(1)} T_n(x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) T_m(x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}) \\ & \quad \times g_2(x_1^{(2)}) \dots g_2(x_n^{(2)}) g_1(x_1^{(1)}) \dots g_1(x_m^{(1)}), \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

onde o produto de distribuições $T_m T_{n-m}$ no integrando é bem definido, pois representa um produto *tensorial*. Redefinindo os índices de somatória podemos escrever o lado direito dessa equação como

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \int dx_1 \dots dx_n T_m(x_1, \dots, x_m) T_{n-m}(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ & \quad \times [g_2(x_1) \dots g_2(x_m)] [g_1(x_{m+1}) \dots g_1(x_n)]. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Como $\text{supp } g_1 < \text{supp } g_2$, o produto de funções teste nos integrandos em (C.7) e (C.8) será diferente de zero somente se $\{x_1, \dots, x_m\} > \{x_{m+1}, \dots, x_n\}$. Nesse caso, podemos identificar

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = T_m(x_1, \dots, x_m) T_{n-m}(x_{m+1}, \dots, x_n). \quad (\text{C.9})$$

Invariância translacional. Denotamos por $U(a, \mathbf{1})$ o operador unitário de translações no espaço de Fock $\mathcal{F}$, que é definido por

$$[U(a, \mathbf{1})\Phi]_j(x) = \Phi_j(x_1 + a, \dots, x_j + a) \quad \text{para} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{C.10})$$

onde $\Phi_j(x_1, \dots, x_j)$ é a projeção do estado $\Phi \in \mathcal{F}$ sobre o setor de j partículas. A matriz $S(g)$ transforma-se como

$$S(g) \rightarrow U(a, \mathbf{1})S(g)U(a, \mathbf{1})^\dagger. \quad (\text{C.11})$$

Através da expansão (4.1) concluímos que as distribuições T_n também transformam-se segundo essa mesma lei. Logo, usando a equação (B.4) do apêndice A, obtemos

$$U(a, \mathbf{1})T_n(x_1, \dots, x_n)U(a, \mathbf{1})^\dagger = T_n(x_1 + a, \dots, x_n + a). \quad (\text{C.12})$$

Unitaridade. Se a matriz S for unitária no espaço de Fock completo da teoria, então

$$S(g)^{-1} = S(g)^\dagger. \quad (\text{C.13})$$

Substituindo essa condição sobre a expansão (4.1), obtemos

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = T_n(x_1, \dots, x_n)^\dagger. \quad (\text{C.14})$$

Essa condição não será mais satisfeita se o espaço de Fock da teoria contiver setores não físicos, como é o caso das QED's espinorial e escalar.

Matriz inversa. Determinaremos, em termos das distribuições T_n , as distribuições $\tilde{T}_n$ correspondentes à expansão (4.9) para a matriz inversa $S^{-1}(g)$. Para isso consideremos a inversão formal da série (4.1):

$$\begin{aligned} S(g)^{-1} &= (\mathbf{1} + T)^{-1} \\ &= \mathbf{1} + \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} T^r &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_r=1}^{\infty} \frac{1}{n_1! \dots n_r!} \\ &\quad \int dx_1^{(1)} \dots dx_{n_1}^{(1)} \dots dx_1^{(r)} \dots dx_{n_r}^{(r)} [T_{n_1}(\mathbf{X}^{(1)}) \dots T_{n_r}(\mathbf{X}^{(r)})] g(x_1^{(1)}) \dots g(x_{n_r}^{(r)}) \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \sum_{n_1 + \dots + n_r = n} \frac{1}{n_1! \dots n_r!} \\ &\quad \int dx_1 \dots dx_n [T_{n_1}(\mathbf{X}^{(1)}) \dots T_{n_r}(\mathbf{X}^{(r)})] g(x_1) \dots g(x_n). \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

O produto de r distribuições que aparece nas integrais acima é um produto tensorial e, portanto, bem definido. Substituindo esse resultado em (4.9) e invertendo a ordem das somatórias em r e n , obtemos

$$\begin{aligned} \int dx_1 \dots dx_n \tilde{T}_n(\mathbf{X}) g(x_1) \dots g(x_n) &= \sum_{r=1}^n (-1)^r \sum_{n_1 + \dots + n_r = n} \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} \int dx_1 \dots dx_n \\ &\times [T_{n_1}(\mathbf{X}^{(1)}) \dots T_{n_r}(\mathbf{X}^{(r)})] g(x_1) \dots g(x_r) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

A integral acima é obviamente invariante sob permutações das variáveis de integração. Em particular, será invariante sob quaisquer partições do conjunto $\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ em r subconjuntos disjuntos $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(r)}$, contendo respectivamente $n_1, \dots, n_r$ elementos. O número de tais partições é dado por $\frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$. Agora, somando sobre todas os possíveis valores de n_i tais que $\sum_{i=1}^r n_i = n$ é o mesmo que considerar a soma sobre *todas as partições* do conjunto $\mathbf{X}$ em r subconjuntos disjuntos. Denotando essa soma $\sum_{P_r}$, a última equação acima nos permite identificar

$$\tilde{T}_n(\mathbf{X}) = \sum_{r=1}^n (-1)^r \sum_{P_r} [T_{n_1}(\mathbf{X}^{(1)}) \dots T_{n_r}(\mathbf{X}^{(r)})] , \quad (\text{C.17})$$

onde P_r denota todas as partições do conjunto $\mathbf{X}$ em r subconjuntos disjuntos:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(1)} \cup \dots \cup \mathbf{X}^{(r)} \quad (\text{C.18})$$

com $|\mathbf{X}^{(j)}| = n_j$, $\mathbf{X}^{(j)} \neq \emptyset$ e $\mathbf{X}^{(i)} \cap \mathbf{X}^{(j)} = \emptyset$ se $i \neq j$.

Referências

- [1] L. de Broglie, *Compt. Rend.* **199** (1934) 445.
- [2] G. Petiau, *Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect 8* **16**, No. 2 (1936).
- [3] N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc. A* **166** (1938) 127.
- [4] R.J. Duffin, *Phys. Rev.* **54** (1938) 1114.
- [5] N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc. A* **173** (1939) 91.
- [6] H.J. Bhabha, *Rev. Mod. Phys.* **17** (1945) 200.
- [7] R.A. Krajcik e M.M. Nieto, *Am. J. Phys.* **35** (1977) 818.
- [8] A.I. Akhiezer e V.B. Berestetskii, *Quantum Electrodynamics* (Interscience, New York, 1965).
- [9] E. Fishbach, M.M. Nieto e C.K. Scott, *J. Math. Phys.* **14** (1973) 1760; *Phys. Rev. D* **7** (1973) 207.
- [10] E. Friedman e G. Kälbermann, *Phys. Rev. C* **34** (1986) 2244.
- [11] B.C. Clark, S. Hama, G.R. Kälbermann, R.L. Mercer e L. Ray, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 592.
- [12] R.E. Kozack, B.C. Clark, S. Hama, V.K. Mishra, R.L. Mercer e L. Ray, *Phys. Rev. C* **40** (1989) 2181.
- [13] V. Ya. Fainberg e B.M. Pimentel, *Phys. Lett. A* **271** (2000) 16.
- [14] V. Ya. Fainberg e B.M. Pimentel, *Theor. Math. Phys.* **124** (2000) 445; *Phys. Lett. A* **271** (2000) 16; *Braz. J. Phys.* **30** (2000) 275.
- [15] B.M. Pimentel e J.L. Tomazelli, *Prog. Theor. Phys.* **93** (1995) 1105.
- [16] V. Gribov, *Eur. Phys. J. C* **10** (1999) 71.

- [17] I.V. Kanatchikov, *Rep. Math. Phys.* **46** (2000) 107.
- [18] M. de Montigny, F.C. Khanna, A.E. Santana, E.S. Santos e J.D.M. Vianna, *J. Phys.* **A 33** (2000), L273.
- [19] L.K. Kerr, B.C. Clark, S. Hama, L. Ray e G. W Hoffmann, *Prog. Theor. Phys.* **103** (2000) 321.
- [20] N.N. Bogoliubov e D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, 3rd ed. (Wiley, New York, 1979).
- [21] H. Umezawa, *Quantum Field Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1956).
- [22] J.T. Lunardi, B.M. Pimentel, R.G. Teixeira e J. S. Valverde, *Phys. Lett.* **A 268** (2000) 165.
- [23] V. de Sabbata e M. Gasperini, *Introduction to Gravitation* (World Scientific, 1985).
V. de Sabbata e C. Sivaram, *Spin and Torsion in Gravitation* (World Scientific, 1994).
- [24] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel e R. G. Teixeira, *preprint* gr-qc/0105122. A ser publicado em *Gen. Rel. Grav.*
- [25] J.T. Lunardi, B.M. Pimentel e R.G. Teixeira, “Duffin-Kemmer-Petiau equation in Riemannian Space-times”, publicado em *Geometrical Aspects of Quantum Fields (Proceedings of the 2000 Londrina Workshop)*, p. 111. A.A. Bytchenko, A.E. Gonçalves e B.M. Pimentel (editores) (World Scientific, Singapore, 2001).
- [26] K. Hayashi e T. Shirafuji, *Phys. Rev.* **D 19** (1979), 3524.
- [27] V.C. de Andrade e J.G. Pereira, *Gen. Rel. Grav.* **30** (1998) 263.
- [28] F.W. Hehl, J.D. McCrea, E.W. Mielke e Y. Ne’eman, *Phys. Rep.* **258** (1995) 1.
- [29] M. Dutsch, F. Krahe e G. Scharf, *Il Nuovo Cim.* **A 106** (1993) 277.
- [30] H. Epstein e V. Glaser, *Ann. Inst. H. Poincaré* **A 19** (1973) 211.
- [31] G. Scharf, *Finite Quantum Electrodynamics: the Causal Approach*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 1995).

- [32] J.T.Lunardi, L.A. Manzoni e B.M. Pimentel, *preprint* hep-th/0008098. A ser publicado em *Int. J. Mod. Phys. A*.
- [33] Harish-Chandra, *Proc. Roy. Soc. A* **186** (1946) 502.
- [34] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory* (Wiley, New York, 1984).
- [35] M. Nowakowski, *Phys. Lett. A* **244** (1998) 329.
- [36] V. C. de Andrade e J. G. Pereira, *Phys. Rev. D* **56** (1997) 4689; *Int. J. Mod. Phys. D* **8** (1999) 141.
- [37] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen e J. G. Pereira, a ser publicado em *Phys. Rev. D*.
- [38] J.W. Maluf, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 335.
- [39] V.C. de Andrade, L.C.T. Guillen e J.G. Pereira, *preprint* gr-qc/0104102. A ser publicado em *Phys. Rev. D*, *Brief Report*.
- [40] R. Aldrovandi e J.G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific, Singapore, 1995).
- [41] E. Schrödinger, *Space-Time Structure* (Cambridge, London, 1950).
- [42] C. Itzykson e J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, Singapore, 1980).
- [43] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, *Ann. Phys.* **140** (1982) 372.
- [44] A. Aste, *Ann. Phys.* **257** (1997) 158.
- [45] G. Scharf, W.F. Wreszinski, B.M. Pimentel e J.L. Tomazelli, *Ann. Phys.* **231** (1294) 185.
- [46] L.A. Manzoni, B.M. Pimentel e J.L. Tomazelli, *Eur. Phys. J. C* **8** (1999) 353; *ibid.* **12** (2000) 701.
- [47] G.C. Wick, *Phys. Rev.* **80** (1950) 268.
- [48] I.L. Shapiro, *preprint* hep-th/0103093, a ser publicado em *Phys. Rep.*
I.L. Buchbinder e I.L. Shapiro, *Class. Quantum Grav.* **7** (1990) 1197.
- [49] T. Kinoshita, *Progr. Theor. Phys.* **3** (1950) 473.

- [50] I.M. Gel'Fand e G.E. Shilov, *Generalized Functions* (Academic Press, New York, 1964).
- [51] A.H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis: An Introduction to Generalized Functions, with Applications* (Dover Publications, New York, 1968).