

MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO

GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DE
PROCESSOS MULTIVARIADOS

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia do Campus de
Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista, para a obtenção
do título de Doutor em Engenharia
Mecânica na área de Transmissão e
Conversão de Energia.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Fernando Branco Costa

Co-orientador: Prof. Dr. Fernando Augusto Silva Marins

Guaratinguetá
2009

M149g Machado, Marcela Aparecida Guerreiro
Gráficos de controle para o monitoramento de processos multivariados / Marcela Aparecida Guerreiro Machado. - Guaratinguetá : [s.n.], 2009.

158f. : il.

Bibliografia: f. 134-145

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2009.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Fernando Branco Costa

Co-orientador: Prof. Dr. Fernando Augusto Silva Marins

1. Controle de qualidade – Métodos estatísticos I. Título

CDU 658.56

UNESP  UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

**"GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DE
PROCESSOS MULTIVARIADOS"**

MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"DOUTORA EM ENGENHARIA MECÂNICA"

PROGRAMA: ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA: TRANSMISSÃO E CONVERSÃO DE ENERGIA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Marcelo dos Santos Pereira
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. ANTONIO FERNANDO BRANCO COSTA
Orientador/UNESP-FEG

Prof^a. Dr^a. LINDA LEE HO
USP-SP

Prof. Dr. ROBERTO DA COSTA QUININO
UFMG-MG

Prof. Dr. MESSIAS BORGES SILVA
UNESP-FEG

Prof. Dr. UBIRAJARA ROCHA FERREIRA
UNESP-FEG

Abril de 2009

DADOS CURRICULARES

MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO

NASCIMENTO	14.05.1982 – SÃO PAULO / SP
FILIAÇÃO	Marcos de Lélis Brandão Machado Maria Sueli Guerreiro Machado
2000/2004	Curso de Graduação em Engenharia de Produção Mecânica FEG - UNESP
2005/2006	Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da UNESP
2006/2009	Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Doutorado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da UNESP

DEDICATÓRIA

de modo especial, ao meu marido, aos meus pais e às minhas irmãs,
que sempre me incentivaram em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, fonte de vida e esperança.

Ao meu marido Francisco, pelo apoio e cumplicidade.

Aos meus pais, Marcos e Maria Sueli, e às minhas irmãs, Mariana e Marília, que sempre me incentivaram ao longo deste caminho.

Ao meu orientador, *Prof. Dr. Antônio Fernando Branco Costa* pelos ensinamentos transmitidos. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível.

Ao co-orientador deste trabalho, *Prof. Dr. Fernando Augusto Silva Marins* pelos conselhos preciosos durante a elaboração dessa pesquisa.

Aos professores que participaram da banca examinadora, pelas críticas e sugestões que certamente contribuíram para melhorar o conteúdo deste trabalho.

Ao Departamento de Produção, por terem colaborado com a minha formação e pelo convívio sempre agradável.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

À FAPESP, pela concessão da bolsa de doutorado.

MACHADO, M. A. G. **Gráficos de controle para o monitoramento de processos multivariados**. 2009. 158f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

RESUMO

Esta tese oferece algumas contribuições à área de monitoramento de processos multivariados. Com respeito ao monitoramento do vetor de médias, investigou-se o desempenho dos gráficos de T^2 baseados em componentes principais e também o desempenho dos gráficos de médias utilizados em conjunto, sendo que cada gráfico monitora a média de uma das características de qualidade. Com respeito ao monitoramento da matriz de covariâncias, foi proposta uma nova estatística baseada nas variâncias amostrais (estatística de VMAX). O gráfico de VMAX é mais eficiente do que o gráfico da variância amostral generalizada $|S|$, que é o gráfico usual para o monitoramento da matriz de covariâncias. Uma vantagem adicional dessa nova estatística é que o usuário já está bem familiarizado com o cálculo de variâncias amostrais; o mesmo não pode ser dito em relação à variância amostral generalizada $|S|$. O desempenho do gráfico de VMAX foi também avaliado quando se utiliza a amostragem dupla, quando se variam os parâmetros do gráfico de controle, quando se adota o esquema de EWMA e quando se aplicam regras especiais de decisão. Investigou-se também o desempenho dos gráficos de controle destinados ao monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias.

PALAVRAS-CHAVE: Gráfico de T^2 de Hotelling, variância amostral generalizada $|S|$, processos multivariados, vetor de médias, matriz de covariâncias, componentes principais, estatística de VMAX, monitoramento simultâneo

MACHADO, M. A. G. **Control charts for monitoring multivariate processes**. 2009. 158f. Thesis (Doctorate in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

ABSTRACT

This thesis offers some contributions to the field of monitoring multivariate processes. Regarding to the monitoring of the mean vector, we investigated the performance of the T^2 charts based on principal components and also the performance of the mean charts used simultaneously, where each chart is assigned to control one quality characteristic. Regarding to the monitoring of the covariance matrix, we propose a new statistic based on the sample variances (the VMAX statistic). The VMAX chart is more efficient than the generalized variance $|S|$ chart, which is the usual chart for monitoring the covariance matrix. An additional advantage of this new statistic is that the user is already well familiar with the calculation of sample variances; we can't say the same regarding to the generalized variance $|S|$ statistic. We also studied the performance of the VMAX chart with double sampling, with adaptive schemes, with the EWMA procedure and also with special run rules. We also investigated the performance of the control charts designed for monitoring the mean vector and the covariance matrix simultaneously.

KEYWORDS: Hotelling's T^2 control chart, generalized variance $|S|$ chart, multivariate processes, mean vector, covariance matrix, principal components, VMAX statistic, monitoring simultaneously

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Gráfico de controle	31
FIGURA 2 – Gráfico de \bar{X} - ocorrência de um alarme falso	33
FIGURA 3 – Gráfico de \bar{X} - ocorrência de um alarme verdadeiro.....	33
FIGURA 4 – Gráfico <i>scree-plot</i> ($k=2$)	48
FIGURA 5 – Gráfico de controle T^2 de Hotelling	57
FIGURA 6 – Gráfico de controle de VMAX	73
FIGURA 7 – Gráfico de controle de VMAX com amostragem dupla.....	76
FIGURA 8 – Gráfico de controle de VMAX com amostra de tamanho variável ...	78
FIGURA 9 – Gráfico de VMAX com regra especial de decisão	82
FIGURA 10 – Gráfico de $ S $ com amostra de tamanho variável.....	87
FIGURA 11 – Diagrama de probabilidades	89

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Limites de controle	61
TABELA 2 – Autovalores (λ) para o caso bivariado.....	62
TABELA 3 – Autovetores para o caso bivariado.....	62
TABELA 4 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos de T^2 tradicional e de T^2 baseado em componentes principais ($p=2$ e $\rho=\pm 0,3$)	63
TABELA 5 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos de T^2 tradicional e de T^2 baseado em componentes principais ($p=2$ e $\rho=\pm 0,5$).....	64
TABELA 6 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos de T^2 tradicional e de T^2 baseado em componentes principais ($p=2$ e $\rho=\pm 0,7$).....	65
TABELA 7 – Autovalores (λ) para o caso trivariado	66
TABELA 8 – Autovetores para o caso trivariado	66
TABELA 9 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos de T^2 tradicional e de T^2 baseado em componentes principais ($p=3$ e $\rho_{12}=\rho_{13}=\rho_{23}=0$)	66
TABELA 10 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos de T^2 tradicional e de T^2 baseado em componentes principais ($p=3$ e $\rho_{12}=\rho_{13}=\rho_{23}=0,3$)	67
TABELA 11 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos de T^2 tradicional e de T^2 baseado em componentes principais ($p=3$ e $\rho_{12}=0,8, \rho_{13}=0,5, \rho_{23}=0,2$).....	68
TABELA 12 – Valores de <i>NMA</i> para o gráfico de T^2 tradicional e para os gráficos SU \bar{X} e PC ($\rho \geq 0,0$).....	69
TABELA 13 – Valores de <i>NMA</i> para o gráfico de T^2 tradicional e para os gráficos SU \bar{X} e PC ($\rho \leq 0,0$).....	70
TABELA 14 – Valores de <i>NMA</i> para o gráfico de VMAX ($p=2, n=5$)	97
TABELA 15 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos de VMAX e de $ S $ ($p=2, \rho=0,5$).....	97
TABELA 16 – Valores de <i>NMA</i> para o gráfico de VMAX	

	$(p=2; \rho=0,5; n=5; LC=3,668)$	97
TABELA 17 – Valores de NMA para o gráfico de VMAX		
	$(p=2, \bar{n} = 4, n_1=2, n_2=8, \rho=0,5)$	98
TABELA 18 – Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $ S $ com amostragem dupla	$(p=2, \bar{n} = 4, \rho=0,5)$	99
TABELA 19 – Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $ S $ com amostragem dupla	$(p=2, \bar{n} = 4, n_1=3, \rho=0,5)$	100
TABELA 20 – Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $ S $ com amostragem dupla	$(p=2, \bar{n} = 5, n_1=3, \rho=0,5)$	100
TABELA 21 – Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $ S $ com amostragem dupla	$(p=2, \bar{n} = 5, n_1=4, \rho=0,5)$	101
TABELA 22 – Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $ S $ com amostra de tamanho variável	$(p=2, \bar{n} = 4, n_1=3)$	102
TABELA 23 – Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $ S $ com amostra de tamanho variável	$(p=2, \bar{n} = 5, n_1=3)$	103
TABELA 24 – Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $ S $ com amostra de tamanho variável	$(p=2, \bar{n} = 5, n_1=4)$	104
TABELA 25 – Valores de NMA para os gráficos de $ S $, VMAX-EWMA e V-EWMA	$(p=2, n=4, r=0,2)$	106
TABELA 26 – Valores de NMA para o gráfico de VMAX-EWMA	$(p=2, n=4)$	107
TABELA 27 – Valores de NMA para o gráfico de VMAX-EWMA	$(p=2, n=5)$	107
TABELA 28 – Valores de NMA_{ss} para o gráfico de VMAX	$(p=2; \rho=0,5, n=5, \text{ caso I})$	109
TABELA 29 – Valores de NMA_{ss} para o gráfico de VMAX	$(p=2; \rho=0,5, n=5, \text{ caso II})$	109

TABELA 30 – Valores de NMA_{ss} para o gráfico de VMAX ($p=2;L=5; \rho=0,5$).....	110
TABELA 31 – Valores de NMA para o gráfico de VMAX ($p=3, n=5$).....	111
TABELA 32 – Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $ S $ ($p=3, \rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0,5$).....	111
TABELA 33 – Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $ S $ ($p=3, \rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0,5, n=5, LC=3,851$).....	111
TABELA 34 – Valores de NMA para o gráfico de VMAX ($p=4, n=5$).....	112
TABELA 35 – Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $ S $ ($p=4, n=5, \rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0,5$).....	112
TABELA 36 – Valores de NMA para os gráficos de T^2 e $ S $ e T^2 e VMAX em uso simultâneo ($\rho=0,0$).....	120
TABELA 37 – Valores de NMA para os gráficos de T^2 e $ S $ e T^2 e VMAX em uso simultâneo ($\rho=0,5$).....	120
TABELA 38 – Influência do parâmetro L no desempenho do gráfico MCMAX ($\rho=0,5$; matriz de covariâncias muda de Σ_0 para Σ_1).....	121
TABELA 39 – Valores de NMA - gráficos simultâneos de T^2 e $ S $ e gráfico MCMAX ($\rho=0,0$; matriz de covariâncias muda de Σ_0 para Σ_1).....	123
TABELA 40 – Valores de NMA - gráficos simultâneos de T^2 e $ S $ e gráfico MCMAX ($\rho=0,5$; matriz de covariâncias muda de Σ_0 para Σ_1).....	123
TABELA 41 – Valores de NMA - gráficos simultâneos de T^2 e $ S $ e gráfico MCMAX ($\rho=0,7$; matriz de covariâncias muda de Σ_0 para Σ_1).....	124
TABELA 42 – Valores de NMA - gráficos simultâneos de T^2 e $ S $ e gráfico MCMAX ($\rho=0,5$; matriz de covariâncias muda de Σ_0 para Σ_2).....	124
TABELA 43 – Valores de Pv para o gráfico de MCMAX (%).....	125

TABELA 44 – Valores de <i>NMA</i> - gráficos simultâneos de T^2 e $ S $ e gráfico de <i>R</i> ($\rho=0,5$; $D=0,8$; $D_1=1,0$; $LC=29,4$).....	126
TABELA 45 – Valores de <i>NMA</i> - gráficos simultâneos de T^2 e $ S $ e gráfico de <i>R</i> ($\rho=0,5$; $D=1,2$; $D_1=0,75$; $LC=32,6$).....	126
TABELA 46 – Valores de <i>NMA</i> - gráficos simultâneos de T^2 e $ S $ e gráfico de <i>R</i> ($\rho=0,7$; $D=2,0$; $D_1=0,7$; $LC=45,75$).....	127
TABELA 47 – Influência do parâmetro <i>D</i> no desempenho dos gráficos de <i>R</i> ($\rho=0,5$)	128
TABELA 48 – Influência do parâmetro D_1 no desempenho dos gráficos de <i>R</i> ($\rho=0,5$)	129
TABELA 49 – Valores de <i>Pv</i> para os gráficos de <i>R</i> (%) ($\rho=0,5$; $D=1,2$; $D_1=0,75$; $LC=32,6$).....	130

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- PC - Componentes principais
- PCA - Análise de componentes principais (do inglês, *Principal Components Analysis*)
- SU \bar{X} - Simultâneos univariados de \bar{X}
- VMAX - Máxima variância
- EWMA - Média móvel ponderada exponencialmente (do inglês, *Exponentially Weighted Moving-Average*)

LISTA DE SÍMBOLOS

X_i	- Variável de interesse i
μ_i	- Média da variável X_i
μ_{0i}	- Média da variável X_i em controle
$\boldsymbol{\mu}$	- Vetor de médias do processo
$\boldsymbol{\mu}_0$	- Vetor de médias com o processo em controle
$\boldsymbol{\mu}_1$	- Vetor de médias do processo após a ocorrência da causa especial
σ_i	- Desvio-padrão da variável X_i
$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$	- Covariância entre X_i e X_j
σ_i^2	- Variância de X_i
ρ	- Coeficiente de correlação
$\boldsymbol{\Sigma}_0$	- Matriz de covariâncias com o processo em controle
T^2	- Estatística de Hotelling com distribuição de Qui-Quadrado
δ_i	- Deslocamento da média da variável X_i em relação ao seu valor-alvo
p	- Número de variáveis do processo
LC	- Limite de controle
α	- Probabilidade de alarme falso – erro do tipo I
β	- Probabilidade de não-detecção – erro do tipo II
d	- Raiz quadrada da soma dos quadrados dos deslocamentos das médias das variáveis X_i
λ_d	- Parâmetro de não-centralidade do gráfico de controle de T^2
\bar{X}	- Média amostral
α'	- Erro total do tipo I

$f(z_1, z_2)$	- Função densidade conjunta de uma distribuição normal bivariada com correlação ρ
λ	- Autovalor
e_i	- Autovetor
LSC	- Limite superior de controle
LIC	- Limite inferior de controle
$ S $	- Variância amostral generalizada
Σ	- Matriz de covariâncias após a ocorrência da causa especial
Σ_1	- Matriz de covariâncias após a ocorrência da causa especial
Σ_2	- Matriz de covariâncias após a ocorrência da causa especial e com alteração de ρ
a_i	- Aumento do desvio-padrão
γ	- Magnitude da perturbação
ρ'	- Coeficiente de correlação após a ocorrência da causa especial
S_i^2	- Variância de X_i
n_1	- Tamanho de amostra no primeiro estágio para os gráficos de VMAX e de $ S $ com amostragem dupla Tamanho da menor amostra para os gráficos de VMAX e de $ S $ com amostra de tamanho variável
n_2	- Tamanho de amostra no segundo estágio para os gráficos de VMAX e de $ S $ com amostragem dupla Tamanho da maior amostra para os gráficos de VMAX e de $ S $ com amostra de tamanho variável
n	- Tamanho da amostra considerando os dois estágios da amostragem
\bar{n}	- Número médio de itens inspecionados por amostragem
S_{ip}^2	- Variância amostral de X_i no primeiro estágio da amostragem
S_{is}^2	- Variância amostral de X_i no segundo estágio da amostragem

$VMAX_p$	- Máxima variância amostral no primeiro estágio
$VMAX_s$	- Máxima variância amostral no segundo estágio
LA	- Limite de advertência para o gráfico de VMAX com amostragem dupla
LC_1	- Limite de controle do primeiro estágio para o gráfico de VMAX com amostragem dupla Limite de controle para o gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável quando a amostra de tamanho menor está em uso
LC_2	- Limite de controle do segundo estágio para o gráfico de VMAX com amostragem dupla Limite de controle para o gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável quando a amostra de tamanho maior está em uso
p_0	- Probabilidade de que a amostragem seja interrompida no primeiro estágio Probabilidade condicional de um ponto cair na região central dado que ele não caiu na região de ação quando o gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável está em uso
α_1	- Probabilidade de alarme falso no primeiro estágio
α_2	- Probabilidade de alarme falso no segundo estágio
p_1	- Probabilidade de alarme verdadeiro no primeiro estágio para o gráfico de VMAX com amostragem dupla
p_2	- Probabilidade de alarme verdadeiro no segundo estágio para o gráfico de VMAX com amostragem dupla
p_d	- Probabilidade de alarme verdadeiro
LA_1	- Limite de advertência para o gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável quando a amostra de tamanho menor está em uso
LA_2	- Limite de advertência para o gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável quando a amostra de tamanho maior está em uso
r	- Constante de amortecimento para os gráficos de VMAX-EWMA e V-EWMA
Z_i	- Estatística do gráfico de VMAX-EWMA
p	- Vetor de probabilidades iniciais para o gráfico VMAX-EWMA
R	- Matriz de probabilidades de transição para o gráfico VMAX-EWMA
NMA	- Número médio de amostras até o sinal
NMA_0	- Número médio de amostras até o sinal durante o período em controle

NMA_{zs}	- NMA que mede o tempo necessário para se detectar uma causa especial que esteja presente desde o início do monitoramento
NMA_{ss}	- NMA que mede o tempo necessário para se detectar uma causa especial que ocorre após um longo e indeterminado período de operação em controle
NA	- Número de amostras conformes entre ocorrências de amostras não-conformes
L	- Número máximo de amostras entre amostras não-conformes para que se tenha um alarme no gráfico de controle de VMAX com regra especial de decisão
k	- Fator de abertura dos limites de controle
k_1	- Fator de abertura do limite de controle LC_1
k_2	- Fator de abertura do limite de controle LC_2
P	- Matriz de probabilidades de transição
P^*	- Matriz de probabilidades de transição dos estados transitórios
D'	- Vetor de probabilidades iniciais do gráfico de $ S $ com amostra de tamanho variável
I	- Matriz identidade
b_1	- Probabilidade de se retirar uma amostra de tamanho n_1 , calcular a estatística $ S $ e o valor obtido ser inferior ao limite LA_1 , ou seja, a próxima amostra deve ser de tamanho n_1
b_2	- Probabilidade de se retirar uma amostra de tamanho n_2 , calcular a estatística $ S $ e o valor obtido estar entre os limites LA_2 e LC_2 , ou seja, a próxima amostra deve ser de tamanho n_2
χ_n^2	- Distribuição de qui-quadrado com n graus de liberdade
$\chi_{n,(\rho^2/1-\rho^2)}^2$	- Distribuição de qui-quadrado com n graus de liberdade e com o parâmetro de não-centralidade dado por $(\rho^2/1-\rho^2)\chi_n^2$

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1	INTRODUÇÃO	22
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	22
1.2	JUSTIFICATIVA E IMPORTÂNCIA.....	26
1.3	OBJETIVOS.....	27
1.3.1	Objetivo Geral	27
1.3.2	Objetivos Específicos	27
1.4	DELIMITAÇÕES DO TRABALHO	27
1.5	CARÁTER INÉDITO	28
1.6	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	29
2	GRÁFICOS DE CONTROLE	31
2.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	31
2.2	ALARMES NO GRÁFICO DE CONTROLE	32
2.3	DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE.....	34
2.4	GRÁFICOS DE CONTROLE UNIVARIADOS.....	36
2.5	GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS	40
2.5.1	O Vetor de médias e a matriz de covariâncias amostrais	41
2.5.2	Estimação de parâmetros: vetor de médias, matrizes de covariâncias e de correlação populacionais	43
2.5.3	Distribuição normal multivariada	45
2.5.4	Análise de componentes principais	46
2.6	GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DO VETOR DE MÉDIAS	49

2.7	GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS.....	52
3	DESCRIÇÃO DO GRÁFICO DE T^2 PADRÃO E DOS GRÁFICOS PROPOSTOS PARA O MONITORAMENTO DO VETOR DE MÉDIAS DO PROCESSO	56
3.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	56
3.2	GRÁFICO DE CONTROLE DE T^2 DE HOTELLING	56
3.3	GRÁFICOS DE CONTROLE DE T^2 BASEADOS EM COMPONENTES PRINCIPAIS.....	58
3.4	GRÁFICOS DE \bar{X} UNIVARIADOS PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS BIVARIADOS.....	59
4	ANÁLISE DE DESEMPENHO DO GRÁFICO DE T^2 PADRÃO E DOS GRÁFICOS PROPOSTOS PARA O MONITORAMENTO DO VETOR DE MÉDIAS DO PROCESSO	61
4.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	61
4.2	PROPRIEDADES DOS GRÁFICOS DE CONTROLE DE T^2 BASEADOS EM COMPONENTES PRINCIPAIS.....	61
4.3	ANÁLISE DE DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE \bar{X} UNIVARIADOS PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS BIVARIADOS	68
5	DESCRIÇÃO DOS GRÁFICOS PROPOSTOS PARA O MONITORAMENTO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS E DE ALGUNS ESQUEMAS CONCORRENTES.....	71
5.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	71
5.2	GRÁFICOS DE CONTROLE PROPOSTOS - CASO BIVARIADO	72
5.2.1	Gráfico da máxima variância (gráfico de VMAX).....	72
5.2.2	Descrição do gráfico de VMAX com amostragem dupla.....	74
5.2.3	Descrição do gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável.....	77

5.2.4	Gráfico de EWMA baseado na estatística de VMAX	79
5.2.5	Gráfico de VMAX com regra especial de decisão	81
5.3	ESQUEMAS CONCORRENTES – CASO BIVARIADO	84
5.3.1	Gráfico da variância amostral generalizada S	84
5.3.2	Gráfico de S com amostragem dupla proposto por Grigoryan e He (2005)	84
5.3.3	Gráfico de S com amostra de tamanho variável proposto por Aparisi et al. (2001)	86
5.3.4	Gráfico V-EWMA	90
5.4	GRÁFICO DE VMAX – CASO MULTIVARIADO	92
5.5	GRÁFICO DA VARIÂNCIA AMOSTRAL GENERALIZADA S - CASO MULTIVARIADO	94
6	ANÁLISE DE DESEMPENHO DOS GRÁFICOS PROPOSTOS PARA O MONITORAMENTO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS E DE ALGUNS ESQUEMAS CONCORRENTES	95
6.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	95
6.2	DESEMPENHO DOS GRÁFICOS PROPOSTOS - CASO BIVARIADO .	96
6.2.1	Gráfico de VMAX	96
6.2.2	Desempenho do gráfico de VMAX com amostragem dupla	98
6.2.3	Desempenho do gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável	101
6.2.4	Desempenho do gráfico de VMAX-EWMA	105
6.2.5	Desempenho do gráfico de VMAX com regra especial de decisão	108
6.3	DESEMPENHO DO GRÁFICO DE VMAX - CASO MULTIVARIADO	110
7	DESCRIÇÃO DOS GRÁFICOS PROPOSTOS PARA O MONITORAMENTO SIMULTÂNEOS DO VETOR DE MÉDIAS E DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS	113

7.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	113
7.2	GRÁFICOS DE T^2 E VMAX EM USO SIMULTÂNEO	114
7.3	GRÁFICO DE MCMAX.....	115
7.3.1	Propriedades do gráfico de MCMAX	116
7.4	GRÁFICOS DE CONTROLE BASEADOS NA ESTATÍSTICA DE QUI-QUADRADO NÃO CENTRAL.....	117
8	ANÁLISE DE DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE DESTINADOS AO MONITORAMENTO SIMULTÂNEO DO VETOR DE MÉDIAS E DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DE PROCESSOS BIVARIADOS	119
8.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	119
8.2	DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE T^2 E VMAX	119
8.3	DESEMPENHO DO GRÁFICO DE MCMAX.....	121
8.4	DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE R	125
9	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS.....	131
9.1	CONCLUSÕES	131
9.2	SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS	133
	REFERÊNCIAS	134
	APÊNDICE A – Obtenção do <i>NMA</i> para o gráfico de VMAX – caso bivariado	146
	APÊNDICE B – Obtenção do <i>NMA</i> para o gráfico de VMAX com amostragem dupla	148
	APÊNDICE C – Obtenção do <i>NMA</i> para o gráfico de VMAX – caso trivariado....	150
	APÊNDICE D – Obtenção da probabilidade p_s de W_1 e/ou W_2 exceder o limite de controle	153
	APÊNDICE E – Obtenção da probabilidade p_s de R_1 e/ou R_2 exceder o limite de controle	156

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O início formal do controle estatístico de processo se deu por volta de 1924, quando Walter A. Shewhart desenvolveu e aplicou os gráficos de controle na Bell Telephone Laboratories (SHEWHART, 1931). No início, como era de se esperar, poucos acreditaram no potencial desta nova técnica. Pouco a pouco, no entanto, os gráficos de controle ganharam a fama de serem ferramentas poderosas de monitoramento.

Quando o gráfico de Shewhart está em uso, amostras de tamanho fixo são retiradas do processo em intervalos regulares. De acordo com os fundamentos estabelecidos por Shewhart, sempre que um ponto é plotado na região de ação do gráfico, o responsável pelo processo deve iniciar uma investigação, visando encontrar causas especiais que afetam a qualidade dos produtos, como por exemplo, um desgaste de ferramenta que altera a dimensão dos eixos que estão sendo manufaturados. Em geral, o desempenho dos gráficos de controle tem sido medido pelo número médio de amostras, *NMA*, que o gráfico de controle precisa para sinalizar uma alteração no processo (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

O gráfico de Shewhart é uma ferramenta de monitoramento simples que não demanda recursos computacionais, portanto bastante oportuna para a época que surgiu. As facilidades computacionais de hoje têm alimentado alterações à idéia original de Shewhart. No caso do monitoramento de processos univariados, as estratégias que vêm sendo propostas, visando melhorar o desempenho dos gráficos de controle, consistem em variar os seus parâmetros de projeto (esquemas adaptativos), alterar o esquema de amostragem e as regras de decisão.

A idéia do esquema adaptativo consiste em variar os parâmetros de projeto dos gráficos de Shewhart (tamanho da amostra n , intervalo de tempo entre retirada de amostras h e fator de abertura k dos limites de controle), entre um valor mínimo e um máximo, com base nas informações obtidas após a inspeção da última amostra retirada do

processo. Os esquemas adaptativos melhoram o desempenho dos gráficos de controle, quanto à sinalização de desajustes no processo (ver Reynolds et al. (1988); Runger e Pignatiello (1991); Reynolds e Arnold (1989); Runger e Montgomery (1993); Prabhu; Runger e Keats (1993); Costa (1994, 1997, 1998, 1999, 1999a); Costa e De Magalhães (2006); De Magalhães et al. (2001, 2002, 2006); De Magalhães e Moura Neto (2005); Epprecht e Costa (2001); Epprecht; Costa e Mendes (2003, 2005); Michel e Fogliatto (2002)).

Uma segunda estratégia para melhorar o desempenho dos gráficos de controle adota esquemas alternativos de amostragem, tais como a amostragem dupla (DAUDIN, 1992) ou a amostragem em dois estágios (COSTA; RAHIM, 2004). Do mesmo modo que os esquemas adaptativos, a amostragem dupla melhora o desempenho dos gráficos de controle. Quando o gráfico de \bar{X} com amostragem dupla está em uso, a amostragem é realizada em dois estágios, sendo que as amostras de tamanho n são divididas em sub-amostras de tamanho n_1 e n_2 , tal que $n = n_1 + n_2$. Uma média amostral da sub-amostra de tamanho n_1 distante do valor-alvo da média do processo, leva ao segundo estágio da amostragem, onde as n_2 unidades restantes são inspecionadas e a média amostral considerando a amostra de tamanho n é calculada e comparada com os limites de controle.

De acordo com Costa e Rahim (2004, 2006), quando se tem um processo bastante estável, o monitoramento se torna monótono, pois raramente um valor amostral é plotado fora dos limites de controle. A adoção do gráfico de controle tradicional, neste contexto, tem como consequência natural (e negativa) uma tendência do usuário prestar cada vez menos atenção aos procedimentos necessários à obtenção dos valores das estatísticas utilizadas no monitoramento. A média, a variância e a amplitude amostral são exemplos destas estatísticas. Ressalta-se que tal falta de atenção pode levar ao uso indevido do gráfico de controle. Visando a minimização deste problema, Costa e Rahim (2004) propuseram um esquema alternativo de amostragem, isto é, o esquema de amostragem em dois estágios. A amostragem em dois estágios é um caso particular da amostragem dupla,

onde $n_1=1$. A grande vantagem da amostragem em dois estágios é que, durante o período em que o processo permanece isento de causas especiais, a amostragem na maioria das vezes se reduz a inspeção de um único item que, sendo feita por atributos, se torna mais simples e menos monótona.

Em uma terceira estratégia, a tomada de decisões é diferente daquela baseada em um único ponto na região de ação do gráfico de controle. O gráfico de Shewhart sinaliza uma deterioração do processo sempre que um ponto cai em sua região de ação. Alternativamente, Wu e Spedding (2000) propuseram um gráfico de controle com regra especial de decisão conhecido como *Synthetic Control Chart*. O *Synthetic Control Chart* sinaliza somente quando um segundo ponto cai na região de ação, e sob a condição de que o número de amostras entre os dois pontos que caíram na região de ação não seja superior a um valor inteiro L . O *Synthetic Control Chart* tem sido objeto recente de pesquisa, ver Wu e Spedding (2000, 2000a), Wu e Yeo (2001), Wu; Yeo e Spedding (2001), Calzada e Scariano (2001), Davis e Woodall (2002), Machado e Costa (2005,2005a), Costa e Rahim (2006a), Costa e Machado (2007) e Costa et al. (2008).

O aumento da complexidade e dos níveis de automação dos processos industriais e a crescente disponibilidade de suporte computacional têm alimentado o interesse pelo monitoramento simultâneo de várias características de qualidade, também chamadas de variáveis do processo (LOWRY; MONTGOMERY, 1995). Pouco a pouco as novas estratégias de monitoramento, originalmente propostas para melhorar o desempenho dos gráficos de controle univariados, estão sendo aplicadas ao monitoramento de processos multivariados.

Desde que foi criado, o gráfico de controle T^2 (HOTELLING, 1947) passou a ser o dispositivo estatístico mais utilizado no monitoramento do vetor de médias de duas ou mais características de qualidade correlacionadas. Lowry e Montgomery (1995) fazem uma revisão dos gráficos de controle multivariados. Mason e Young (2002) discutem exhaustivamente as aplicações do gráfico de controle T^2 .

O gráfico de controle T^2 de Hotelling é análogo ao gráfico \bar{X} de Shewhart, sendo ambos pouco sensíveis a pequenas alterações no processo. Desta forma, métodos estatísticos tais como o esquema CUSUM e o gráfico de EWMA, ver Costa; Epprecht e Carpinetti (2005), têm sido utilizados para o caso multivariado em que o vetor de médias está sujeito a pequenas alterações (ver Woodall e Ncube (1985); Crosier (1988); Pignatiello e Runger (1990); Lowry et al. (1992); Lowry e Montgomery (1995); Prabhu e Runger (1997); Qiu e Hawkins (2001)). A idéia de se variar os parâmetros dos gráficos de controle multivariados (gráficos adaptativos multivariados), tais como o tamanho da amostra e/ou o intervalo de tempo entre retiradas de amostras, tem sido explorada em artigos recentes (ver Aparisi (1996), Aparisi e Haro (2001), Aparisi e Haro (2003), Chou; Chen e Chen (2006)). A amostragem dupla para processos multivariados também tem sido objeto de estudo ((GRIGORYAN; HE, 2005) e (HE; GRIGORYAN, 2005)).

Grigoryan (2003) estudou o caso dos gráficos multivariados com amostragens múltiplas obtendo o *NMA* por meio de simulação. Alternativamente, Machado (2006) e Costa e Machado (2007) obtiveram as propriedades dos gráficos de controle bivariados com amostragem dupla e com regra especial de decisão por meio de desenvolvimentos teóricos.

Assim como é importante monitorar o vetor de médias de um processo, é também importante monitorar a sua matriz de covariâncias Σ (YEH et al., 2003, 2004, 2005; SURTIHADI et al., 2004; GRIGORYAN e HE, 2005).

O primeiro gráfico de controle utilizado no monitoramento da matriz de covariâncias Σ se baseou na estatística obtida do teste da razão de máxima verossimilhança generalizada (ALT, 1985). Para o caso bivariado, Alt (1985) propôs o uso da variância amostral generalizada $|S|$ para controlar a matriz de covariâncias Σ .

Aparisi et al. (1999) estenderam a aplicação da estatística $|S|$ para o caso em que o número de variáveis do processo sob monitoramento é maior do que dois ($p > 2$) e, considerando esta mesma estatística, propuseram um gráfico de controle bivariado com amostra de tamanho variável (APARISI et al., 2001). Grigoryan e He (2005) propuseram

o gráfico de controle multivariado com amostragem dupla para o monitoramento da matriz de covariâncias. Uma revisão recente de gráficos de controle para o monitoramento da matriz de covariâncias foi elaborada por Yeh et al. (2006). Chang e Zhang (2007) apresentaram uma metodologia para o monitoramento da variabilidade de processos multivariados autocorrelacionados.

Artigos que tratam do monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias são poucos e recentes, ver Khoo (2005), Chen, Cheng e Xie (2005) e Zhang e Chang (2008).

1.2 JUSTIFICATIVA E IMPORTÂNCIA

O avanço computacional tem impulsionado o reprojeto dos gráficos de controle. Neste contexto, tem se variado os parâmetros dos gráficos de controle. Seus parâmetros de projeto, em especial o tamanho das amostras, antes fixos, passaram a variar de maneira inteligente, acelerando assim a detecção de mudanças no processo. Nesta mesma linha, visando melhorar o desempenho dos gráficos de controle, novos esquemas de amostragem e critérios de decisão vêm sendo propostos. Surgiu assim uma nova geração dos gráficos de Shewhart. Em se tratando de processos univariados, a literatura sobre este tema é bastante rica. Esta tem sido a linha de pesquisa de Costa (1994, 1997, 1998, 1999, 1999a), Costa e Claro (2007), Costa e Machado (2003, 2003a, 2007, 2008, 2008a), Costa e De Magalhães (2005, 2007), Costa e Rahim (2001, 2004, 2004a, 2006, 2006a) e Costa; De Magalhães e Epprecht (2008).

Os trabalhos voltados a processos multivariados são poucos e recentes - ver Bernard (2001), Skinner (2002), Thomas (2002), Konrath (2002), Grigoryan (2003) e Testik (2003) - e, em geral, a complexidade dos modelos tem levado ao uso de técnicas de simulação para a obtenção das propriedades dos gráficos de controle. Por exemplo, Grigoryan (2003) utilizou simulação para estudar o desempenho dos gráficos multivariados com amostragens múltiplas.

Esta tese trata do monitoramento de processos multivariados. O foco principal do presente trabalho se voltou para o monitoramento da matriz de covariâncias. Este tema de pesquisa é recente e está em evidência (YEH et al., 2003, 2004, 2005; SURTIHADI et al., 2004; GRIGORYAN e HE, 2005).

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Encontrar estatísticas de monitoramento mais eficientes que as de T^2 e da variância generalizada $|S|$ na sinalização de desajustes no vetor de médias e na matriz de covariâncias de processos multivariados.

1.3.2 Objetivos Específicos

1. Propor novas estatísticas para o monitoramento do vetor de médias e da matriz de covariâncias de processos multivariados.
2. Para as estatísticas do item (1) estudar o desempenho dos esquemas EWMA, adaptativos, com amostragem dupla ou com regras especiais de decisão;
3. Comparar a eficiência dos gráficos de controle estudados no item (2) com a eficiência dos gráficos multivariados tradicionais.

1.4 DELIMITAÇÕES DO TRABALHO

Os resultados obtidos são válidos apenas para o caso de processos que seguem uma distribuição normal multivariada.

Além disso, os valores do vetor de médias e da matriz de covariâncias são supostos conhecidos.

1.5 CARÁTER INÉDITO

Em relação aos gráficos de controle destinados ao monitoramento do vetor de médias, não há na literatura consultada trabalhos que estudam o desempenho dos gráficos de T^2 baseados em componentes principais, ou dos gráficos de controle univariados de \bar{X} em uso conjunto para o monitoramento de processos multivariados. Nesta tese estudou-se o comportamento de tais gráficos em relação a diferentes tipos de perturbações e correlações.

Para o caso do monitoramento da matriz de covariâncias, propõe-se uma nova estatística de monitoramento baseada nas variâncias amostrais, que é muito mais simples de se trabalhar se comparada com a estatística tradicional utilizada no monitoramento da matriz de covariâncias, isto é, a estatística da variância generalizada $|S|$.

Em relação ao monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias, propõem-se estatísticas alternativas às estatísticas de T^2 e $|S|$.

Esta tese vem gerando vários artigos nacionais e internacionais. Vale salientar que, até o momento, do total de 11 artigos submetidos, oito já foram aceitos para publicação (COSTA; MACHADO, 2008a, 2009; MACHADO; COSTA, 2008, 2008a; MACHADO; DE MAGALHÃES; COSTA, 2008; MACHADO; COSTA, 2008d; MACHADO; COSTA; RAHIM, 2008; MACHADO; COSTA; MARINS, 2009) e os outros três artigos ainda se encontram em processo de revisão (MACHADO; COSTA, 2008e; COSTA; MACHADO; CLARO, 2008; MACHADO; COSTA; CLARO, 2008).

Os artigos aceitos serão publicados nas seguintes revistas internacionais (I) e nacionais (N): International Journal of Production Economics, International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Pesquisa Operacional, Communications in Statistics e Produção, que segundo a avaliação Qualis-Engenharia III da Capes, são classificadas como A (I), A (I), B (I), B (I) e A (N), respectivamente.

1.6 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

A tese está estruturada em nove capítulos. Neste primeiro capítulo foi apresentado um breve histórico sobre os gráficos de controle, as justificativas para a escolha do tema, os objetivos, as delimitações do trabalho, seu caráter inédito e a seguir descreve-se a organização do texto.

O Capítulo 2 é dedicado aos gráficos de controle univariados e multivariados, apresentando de forma detalhada as pesquisas realizadas até o momento na área de controle estatístico de processo.

O Capítulo 3 é dedicado à descrição dos gráficos de T^2 baseados em componentes principais e, dando continuidade ao estudo dos gráficos de controle para o monitoramento do vetor de médias, neste mesmo capítulo são apresentados os gráficos univariados de \bar{X} para o monitoramento de processos multivariados.

Os principais resultados obtidos com a utilização dos gráficos de T^2 baseados em componentes principais e dos gráficos univariados de \bar{X} se encontram no Capítulo 4.

O Capítulo 5 trata dos gráficos de controle baseados na estatística da máxima variância, VMAX, proposta para o monitoramento da matriz de covariâncias de processos multivariados.

No Capítulo 6 o desempenho dos gráficos de controle propostos é comparado com o dos esquemas concorrentes.

O Capítulo 7 trata dos gráficos de controle destinados ao monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias de processos bivariados.

No Capítulo 8 o desempenho dos gráficos de controle propostos para o monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias é comparado com o dos gráficos de T^2 e $|\mathbf{S}|$.

No Capítulo 9 estão as conclusões e sugestões para futuras pesquisas.

No Apêndice A está o desenvolvimento matemático necessário para a obtenção do NMA do gráfico de VMAX para o caso de processos bivariados.

O Apêndice B apresenta o desenvolvimento matemático necessário para a obtenção do *NMA* do gráfico de VMAX com amostragem dupla para o caso de processos bivariados.

No Apêndice C está o desenvolvimento matemático necessário para a obtenção do *NMA* do gráfico de VMAX para processos trivariados. Esse desenvolvimento pode ser facilmente estendido para o caso em que $p > 3$.

O Apêndice D apresenta o desenvolvimento matemático necessário para a obtenção do *NMA* do gráfico de MCMAX, cujos pontos amostrais correspondem ao maior valor em módulo de quatro medidas das duas características de qualidade sob monitoramento, isto é, as suas médias e variâncias amostrais padronizadas.

No Apêndice E está o desenvolvimento matemático necessário para a obtenção do *NMA* dos gráficos de controle baseados na estatística de monitoramento proposta por Costa e Rahim (2004a), denominados gráficos de *R*.

2 GRÁFICOS DE CONTROLE

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os gráficos de controle são dispositivos que operam em um estado de controle estatístico (processo sob controle), contudo estão sujeitos a causas especiais que o desajustam.

O esquema de monitoramento de Shewhart (1931) para variáveis mensuráveis X , consiste em se retirar, a intervalos de tempos regulares de comprimento h_0 , amostras de tamanho n_0 . Para cada amostra é determinado o valor de uma estatística G adequada. Então estes valores são plotados em cartas onde estão especificados limites de controle (LIC é o limite inferior de controle e LSC é o limite superior de controle), cujo espaçamento em relação à linha central, LC , é estabelecido com base na variabilidade natural das medidas de X de uma característica de qualidade de produto estimada com o processo em controle (vide Figura 1).

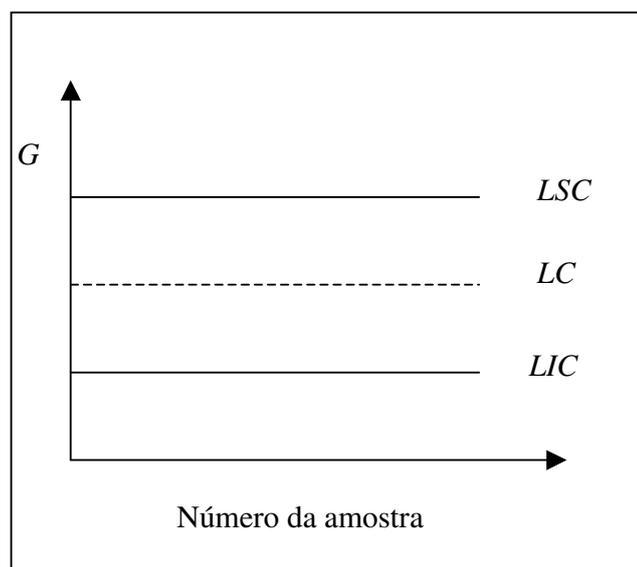


Figura 1: Gráfico de controle

As causas especiais alteram a distribuição da variável aleatória X , tirando sua média do valor-alvo e/ou aumentando a sua variabilidade (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005). Máquinas ajustadas ou controladas de maneira inadequada, erros do operador, ou matéria-prima defeituosa são exemplos de causas especiais.

As causas especiais fazem com que os valores da estatística G se afastem da linha central do gráfico de controle. Deste modo, a presença de uma causa especial é sinalizada por um valor de G além dos limites de controle.

Neste capítulo serão estudadas as propriedades dos gráficos de controle de Shewhart univariados e multivariados. Antes, porém, serão definidos os riscos estatísticos inerentes ao monitoramento de processos por meio de gráficos de controle. As figuras da próxima seção foram adaptadas de Costa; Epprecht e Carpinetti (2005).

2.2 ALARMES NO GRÁFICO DE CONTROLE

Considere o gráfico de controle das médias \bar{X} . Quando o processo está em um estado de controle estatístico, tem-se o risco α de um valor de \bar{X} cair fora dos limites de controle, sinalizando indevidamente uma causa especial (“alarme falso”). A Figura 2 retrata a ocorrência de um alarme falso no gráfico de \bar{X} . Quando o processo está fora de controle, portanto sob a influência de uma causa especial, tem-se o risco β de um valor de \bar{X} cair dentro dos limites de controle, não sinalizando assim a existência da causa especial. A Figura 3 retrata a ocorrência de um alarme verdadeiro no gráfico de \bar{X} .

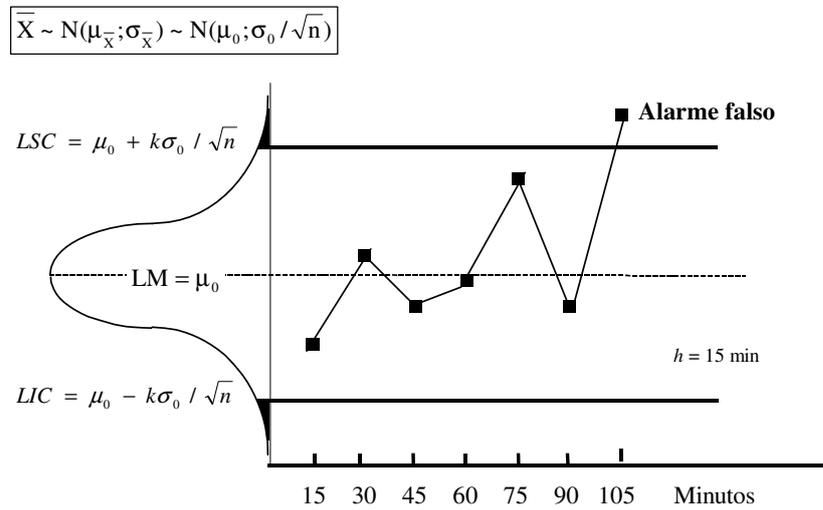


Figura 2: Gráfico de \bar{X} - ocorrência de um alarme falso

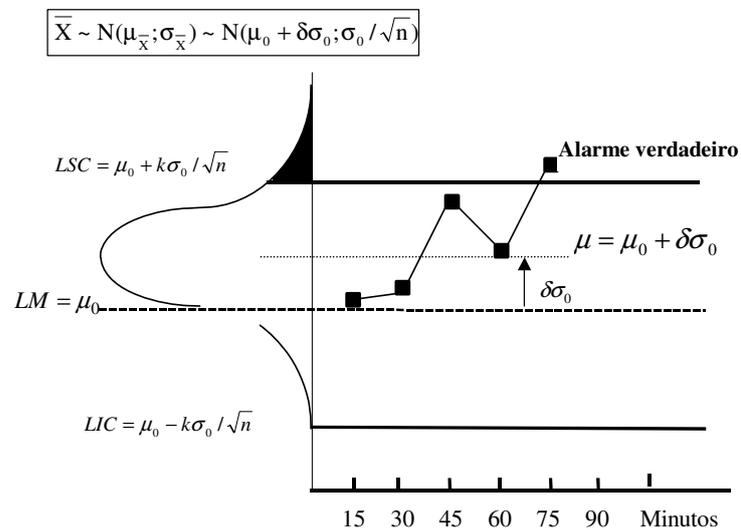


Figura 3: Gráfico de \bar{X} - ocorrência de um alarme verdadeiro

A consequência de ordem prática associada ao erro do tipo I (alarme falso) é de uma intervenção no processo na hora errada, quando o mesmo está isento de causas especiais

(o que em si já acarreta um custo – de interrupção do processo, de mão-de-obra – além de um risco de desajustar um processo que estava ajustado); e a consequência de ordem prática associada ao erro do tipo II (“não-detecção”) é a não intervenção no processo na hora certa, quando o mesmo está sob a influência de causas especiais. Em geral, as causas especiais comprometem a qualidade dos itens produzidos, portanto quanto antes forem descobertas e eliminadas melhor.

2.3 DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE

Com base na relação entre os custos de operação e a habilidade do dispositivo estatístico em detectar causas especiais, pode-se determinar a melhor combinação dos parâmetros dos gráficos de controle, ou seja, o tamanho da amostra n , o intervalo de tempo h entre retirada de amostras e o fator k de abertura dos limites de controle - ver Costa; Epprecht e Carpinetti (2005).

O desempenho dos gráficos de controle é medido pelo número médio de amostras até o sinal (NMA), para intervalo de tempo fixo entre amostras. Esta medida de desempenho, por sua vez, depende dos parâmetros de projeto do gráfico de controle n , h e k . Os parâmetros de projeto influenciam de forma diferente no desempenho dos gráficos de controle, nos riscos α e β e no custo de inspeção (COSTA; MACHADO, 2003, 2003a).

Durante o período em controle o $NMA=1/\alpha$ e é denominado NMA_0 e, durante o período fora de controle, $NMA=1/p_d$, sendo $p_d = 1- \beta$. Quando um processo está sob controle, é desejável que o número médio de amostras retiradas do processo desde o início do monitoramento até o sinal (NMA_0) seja grande, de modo a garantir poucos alarmes falsos. Quando um processo está fora de controle, é desejável que o número médio de amostras retiradas desde a ocorrência de uma causa especial até o sinal (NMA) seja pequeno, de modo a garantir uma rápida detecção da causa especial. Para $n=2$ e $k=3,00$, são necessárias 17,81 amostras em média para detectar uma causa especial que desloca a média do processo de um desvio-padrão ($\delta=1$).

Por exemplo, no processo de empacotamento de leite, se o volume X de cada pacote tem média μ_0 de 1000 ml e desvio-padrão σ_0 de 10 ml, trata-se então de uma causa especial que desloca a média para 990 ml ou 1010 ml. Se aumentarmos n para 5 o NMA se reduz a 4,47 (ver detalhes em Costa; Epprecht e Carpinetti (2005)).

Desta forma, observa-se que o aumento do tamanho da amostra melhora o desempenho do gráfico, ou seja, aumenta o poder em se detectar um desajuste do processo. Conseqüentemente, o risco β diminui. Porém, o custo de inspeção se eleva com o aumento do tamanho da amostra. O risco α independe de n .

Já o aumento de k tem um impacto negativo sobre o desempenho dos gráficos, pois diminui o seu poder. Em contrapartida, reduz-se a incidência de alarmes falsos, ou seja, o risco α diminui.

Quanto ao h , deve-se ter sempre em mente o seguinte: valores pequenos de h implicam em custos elevados com amostragens e maior incidência de alarmes falsos.

Antes de se aprofundar na escolha dos valores dos parâmetros do gráfico de controle é preciso investigar se as condições do processo a ser monitorado satisfazem as suposições necessárias para a utilização do gráfico, isto é, se as observações da característica de qualidade de interesse são independentes e normalmente distribuídas.

A suposição mais importante relativa aos gráficos de controle é a de independência das observações, porque os gráficos de controle convencionais não funcionam bem se a característica de qualidade apresenta níveis, ainda que baixos, de autocorrelação ao longo do tempo. Especificamente, esses gráficos de controle darão resultados enganosos sob a forma de demasiados alarmes falsos se os dados são autocorrelacionados (MONTGOMERY, 2004). Este aspecto tem sido enfatizado por vários autores, incluindo Russo e Camargo (2004), Moreira e Echeveste (2004), Moreira e Caten (2004), Machado (2005), Claro; Costa e Machado (2007) e Costa e Claro (2007).

Infelizmente, a suposição de observações independentes nem sempre é satisfeita em alguns processos de fabricação. Como exemplo podem-se citar processos químicos em

que medidas consecutivas de uma variável do processo, ou uma característica do produto, apresentam não raramente alto nível de autocorrelação (MONTGOMERY, 2004).

De fato, Shewhart ao criar os gráficos de controle, estava considerando indústrias de partes discretas, com nenhum ou quase nenhum grau de automação. Em tais processos, a condição de independência das observações geralmente é satisfeita. Hoje em dia, porém, processos contínuos e por batelada são extremamente freqüentes e, muitos desses processos, raramente produzem observações independentes, de modo que não podem ser monitorados pelos gráficos convencionais. Este problema não se restringe a processos contínuos e por bateladas: processos discretos altamente automatizados também costumam produzir dados autocorrelacionados (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

Portanto, é importante antes de iniciar o monitoramento de um processo, identificar se ele produz itens nos quais as observações da característica de qualidade de interesse são independentes ou autocorrelacionadas, pois um gráfico de controle inadequado, que produza alarmes falsos em excesso, acabará sendo descartado, ou pior, mantido apenas para cumprir alguma exigência formal. Os alarmes são simplesmente ignorados pelo pessoal envolvido com o processo.

Vale ressaltar também a importância de se analisar a capacidade de um processo, isto é, sua capacidade de produzir itens conformes, ou seja, de acordo com as especificações do projeto. Essa capacidade depende dessas próprias especificações e da variabilidade do processo; portanto, ela não está apenas vinculada à presença ou ausência de causas especiais, embora seja evidente que desajustes e/ou falta de estabilidade do processo (provocados por causas especiais) reduzem sua capacidade e aumentam o número de itens não conformes produzidos (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

2.4 GRÁFICOS DE CONTROLE UNIVARIADOS

Os gráficos de controle têm sido a principal ferramenta estatística utilizada no monitoramento de processos, graças a sua simplicidade operacional. De acordo com os

fundamentos de Shewhart, sempre que um ponto é plotado na região de ação do gráfico, o responsável pelo processo deve iniciar uma investigação, visando encontrar causas especiais que afetam a qualidade dos produtos. Por exemplo, a ocorrência de um desgaste de ferramenta alterará o diâmetro X dos eixos que estão sendo manufaturados. Entretanto, essa simplicidade torna o gráfico de controle lento na detecção de pequenas e moderadas alterações nos parâmetros dos processos que estão sendo monitorados, isto é, na média e/ou na variância da variável aleatória X . Diante disso, não têm sido poucas as propostas de alteração à idéia original de Shewhart como, por exemplo, variar os parâmetros dos gráficos de controle, alterar o esquema de amostragem e as regras de decisão (Wu e Spedding (2000) e Machado e Costa (2005, 2005a)).

A idéia de variar os parâmetros dos gráficos de controle univariados (gráficos adaptativos), tais como o tamanho de amostra e/ou o intervalo de tempo entre retirada de amostras, tem sido bastante explorada. Reynolds et al. (1988), Reynolds e Arnold (1989), Runger e Pignatiello (1991), Runger e Montgomery (1993) e Reynolds e Stoumbos (2001) estudaram o caso em que o intervalo entre retirada de amostras é variável (*VSI – Variable Sampling Interval*).

Quando os gráficos de controle com intervalo variável de tempo entre retirada de amostras estão em uso a ocorrência de uma observação na região central do gráfico não levanta suspeitas de que o processo esteja desajustado; conseqüentemente, o monitoramento é relaxado e um intervalo de tempo maior que o usual é adotado para a retirada da próxima amostra. Por outro lado, a ocorrência de uma observação na região de advertência do gráfico de controle levanta suspeita de que o processo se desajustou; conseqüentemente, a próxima amostra é retirada o mais breve possível visando confirmar ou não tal suspeita. Mantendo a mesma frequência de inspeção durante o período em que o processo permanece ajustado, o gráfico *VSI* demanda, em média, menos amostras para sinalizar um desajuste. De forma análoga é possível variar os demais parâmetros dos gráficos de controle.

A idéia do gráfico de controle com amostra de tamanho variável (*VSS – Variable Sample Size*) foi introduzida por Prabhu; Runger e Keats (1993) e Costa (1994). Prabhu;

Montgomery e Runger (1994) e Costa (1997, 1999) abordaram também o caso em que tanto o tamanho de amostra como o intervalo entre retiradas de amostras são variáveis (*VSSI – Variable Sampling Size Interval*). Costa (1998,1999a) estendeu o estudo do gráfico de controle *VSSI* e incluiu limites de ação variáveis, sendo este gráfico denominado gráfico de controle *VP (Variable Parameters)*.

Assim como o esquema adaptativo, o gráfico de controle com amostragem dupla proposto por Daudin (1992), foi criado para atender a necessidade de se ter uma ferramenta estatística ágil na detecção de alterações nos parâmetros do processo. Quando o gráfico de controle \bar{X} com amostragem dupla está em uso a amostragem é realizada em dois estágios com amostras de tamanho n , sendo $n = n_1 + n_2$. Se para a sub-amostra de tamanho n_1 obtém-se um valor de \bar{X} distante de μ_0 , a amostragem vai para o segundo estágio, onde as n_2 unidades restantes são inspecionadas e a média amostral considerando a amostra de tamanho n é calculada e comparada com os limites de controle. Caso contrário, a amostragem é interrompida no primeiro estágio.

A amostragem em dois estágios é um caso particular da amostragem dupla, onde $n_1 = 1$. Quando se tem um processo bastante estável, isto é, com média e variância que permanecem longos períodos de tempo sem se alterarem, o monitoramento se torna bastante monótono, pois raramente um valor de \bar{X} , ou de R , cai fora dos limites de controle. A consequência natural é de o usuário dar cada vez menos atenção aos passos necessários para a obtenção dos valores de \bar{X} e de R . Esta falta de atenção pode, em alguns casos, levar a sérios enganos.

A amostragem em dois estágios (COSTA; RAHIM, 2004, 2006) torna o monitoramento mais simples e menos monótono. No primeiro estágio, um item da amostra é inspecionado e seu valor de X é comparado com os limites do gráfico de Shewhart para observações individuais. Deste modo, se o ponto X cair dentro dos limites de controle a amostragem é interrompida; caso contrário, segue-se para o segundo estágio, quando então toda amostra é inspecionada e sua média \bar{X} é agora comparada com os limites do gráfico de Shewhart para médias (podendo também ser calculada a sua

amplitude R , para então ser comparada com os limites do gráfico de Shewhart para as amplitudes). Quando a amostragem em dois estágios está em uso, no primeiro estágio é possível trabalhar com atributos e, desta forma, reduzir o esforço com inspeção.

O gráfico de controle das médias móveis ponderadas exponencialmente (EWMA) foi introduzido por Roberts (1959) com o objetivo de se ter uma ferramenta ágil na detecção de pequenas perturbações na média do processo. Desde então, o gráfico de controle de EWMA vem sendo muito estudado (ver Lucas e Saccucci (1990), Saccucci e Lucas (1990), Domangue e Patch (1991), Chen et al. (2001), Costa e Rahim (2006b)).

O gráfico de Shewhart sinaliza uma deterioração do processo quando um ponto cai em sua região de ação. Alternativamente, Wu e Spedding (2000) propuseram um gráfico de controle com regra especial de decisão conhecido como *Synthetic Control Chart*. O *Synthetic Control Chart* sinaliza somente quando um segundo ponto cai na região de ação, e sob a condição de que o número de amostras entre os dois pontos que caíram na região de ação não seja superior a um valor inteiro L . O *Synthetic Control Chart* tem sido objeto recente de pesquisa, ver Wu e Spedding (2000, 2000a), Wu e Yeo (2001), Wu; Yeo e Spedding (2001), Calzada e Scariano (2001), Davis e Woodall (2002), Machado e Costa (2005, 2005a), Costa e Rahim (2006a) e Costa et al. (2008).

É comum o uso de dois gráficos de controle, um para o monitoramento da média do processo e outro para o monitoramento da variabilidade, ver Costa (1993), Gan (1995), Albin; Kang e Sheha (1997), Costa (1998 e 1999), Costa e Rahim (2000, 2001), Rahim e Costa (2000), Costa e Rahim (2004) e Costa; Epprecht e Carpinetti, (2005). A principal conclusão que pode ser tirada de todos esses estudos é que gráficos conjuntos não são confiáveis na identificação do tipo de causa especial.

Na prática, a velocidade com a qual os gráficos de controle detectam mudanças no processo parece ser mais importante do que a habilidade destes em identificar o tipo de mudança. Deste modo, faz sentido considerar um único gráfico de controle, baseado em uma única estatística, para o monitoramento simultâneo da média e da variância do processo, ver Domangue e Patch (1991), Chen; Cheng e Xie (2001, 2004), Costa e Rahim

(2004a, 2006), Costa e De Magalhães (2005), Costa; Epprecht e Carpinetti (2005), Barbosa; Machado e Costa (2005).

A combinação da regra de decisão de dois pontos na região de ação e de uma estatística única para o monitoramento da média e da variabilidade do processo tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores, ver Machado e Costa (2005,2005a). O objetivo é monitorar o processo de forma a detectar qualquer causa especial que altere a sua média μ de μ_0 para $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma_0$, onde $\delta \neq 0$, e/ou altere o seu desvio-padrão σ de σ_0 para $\sigma_1 = \gamma\sigma_0$, onde $\gamma > 1$. Sejam x_{ij} , $i = 1,2,3,\dots$, e $j = 1,2,\dots,n$ as observações da variável X organizadas em sub-grupos de tamanho $n > 1$, com i indexando o número do grupo. Seja $\bar{X}_i = (X_{i1} + \dots + X_{in})/n$ a i -ésima média amostral, e seja $e_i = \bar{X}_i - \mu_0$ a diferença entre a i -ésima média amostral e o valor alvo da média do processo. Então para $\xi_i = \begin{cases} D, & \text{se } e_i \geq 0 \\ -D, & \text{se } e_i < 0 \end{cases}$, tem-se

que:

$$R_i = \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \mu_0 + \xi_i \sigma_0)^2, \quad i = 1,2,\dots$$

onde D é uma constante positiva. Quando $D=0$, $R_i / (\gamma\sigma_0)^2$ tem distribuição de qui-quadrado não-central com n graus de liberdade e um parâmetro de não-centralidade $\lambda_d = n\delta^2 / \gamma^2$, ou seja $R_i / (\gamma\sigma_0)^2 \sim \chi_n^2(\lambda_d)$, ver Chen; Cheng e Xie (2004). O uso da estatística de Qui-quadrado não-central para controlar a média e a variância do processo tem sido também objeto de estudo de Costa e Rahim (2004a, 2006, 2006a, 2006b), Costa e De Magalhães (2005, 2007), Machado e Costa (2005, 2005a), Barbosa; Machado e Costa (2005) e Costa; De Magalhães e Epprecht (2008).

2.5 GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS

Até agora foram discutidos os gráficos de controle univariados. Porém, o aumento da complexidade e dos níveis de automação dos processos industriais e a crescente disponibilidade de suporte computacional, têm aumentado o interesse pelo monitoramento simultâneo de várias características de qualidade, também chamadas de variáveis do processo (LOWRY; MONTGOMERY, 1995). Pouco a pouco as novas estratégias de

monitoramento para processos univariados estão sendo estendidas ao monitoramento de processos multivariados.

Antes de discutir as estratégias de monitoramento para processos multivariados, são apresentadas na seção 2.5.1 algumas notações e definições de vetores aleatórios, matrizes de covariância e de correlação utilizados no controle estatístico de processos multivariados. Na seção 2.5.2 estão as equações para estimação das matrizes de covariâncias e de correlação através de dados amostrais; na seção 2.5.3 apresenta-se a distribuição normal multivariada e na seção 2.5.4 estão alguns conceitos relacionados à técnica de análise de componentes principais.

2.5.1 O vetor de médias e a matriz de covariâncias amostrais

Seja X um vetor contendo p componentes, onde cada componente é uma variável aleatória, isto é, X_i é uma variável aleatória onde $i = 1, 2, \dots, p$. Então, X é chamado de vetor aleatório e é denotado por:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}$$

O vetor transposto de vetor aleatório X é denotado por $X' = [X_1 \ X_2 \ X_3 \dots \ X_p]$.

O vetor $\mu = E(X)$ é chamado de vetor de médias do vetor $X' = [X_1 \ X_2 \ X_3 \dots \ X_p]$, sendo

$$\mu = E(X) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

onde $\mu_i = E(X_i)$ denota a média, ou esperança, da variável aleatória X_i , $i = 1, 2, \dots, p$.

A variância do i -ésimo componente do vetor X é denotada por $Var(X_i) = \sigma_i^2 = \sigma_{ii}$. O desvio-padrão é denotado por σ_i ou $\sqrt{\sigma_{ii}}$ e fornece a informação sobre a dispersão dos valores das variáveis X_i em relação a μ_i , isto é, indica se os valores de X_i estão próximos ou distantes da média μ_i . Assim, valores grandes de σ_i indicam uma maior dispersão de valores de X_i em relação à média μ_i .

A covariância entre os valores da i -ésima e j -ésima variáveis do vetor X é definida por:

$$Cov(X_i, X_j) = \sigma_{ij} = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \quad (2.1)$$

A covariância serve para medir o grau de relacionamento linear entre duas variáveis aleatórias. De acordo com a expressão (2.1), quando os valores de X_i acima (abaixo) da média μ_i tendem a estar associados aos valores de X_j acima (abaixo) da média μ_j , a covariância σ_{ij} tende a ser positiva. Portanto, à medida que a variável X_i cresce (decrece) numericamente, a variável X_j também cresce (decrece) linearmente. Quando os valores de X_i acima da média μ_i tendem a estar associados com valores de X_j abaixo da média μ_j , ou vice-versa, a covariância σ_{ij} tende a ser negativa. Neste caso, à medida que a variável X_i cresce (decrece) numericamente, a variável X_j decresce (cresce) linearmente. Embora a covariância tenha informação sobre o relacionamento linear entre duas variáveis, é difícil julgar se a relação é forte ou não, observando-se apenas os seus valores numéricos uma vez que não se tem um valor de referência mínimo ou máximo para comparação dos valores σ_{ij} . Assim, uma medida mais útil na prática é a correlação. (MINGOTI, 2005).

É prática comum apresentar os valores de σ_{ij} em uma matriz chamada matriz de covariâncias. A matriz de variâncias e covariâncias do vetor aleatório X é denotada por:

$$Cov(X) = \Sigma_{p \times p} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}.$$

A título de ilustração, a matriz $\Sigma_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ representa a matriz de covariâncias de um vetor aleatório $X' = [X_1 \ X_2]$, tal que $\sigma_{11} = \sigma_1^2 = 8$; $\sigma_{22} = \sigma_2^2 = 5$; $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -2$.

O coeficiente de correlação entre a i -ésima e j -ésima variáveis do vetor X é definido por:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii} \sigma_{jj}}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

onde $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, p$. A correlação é uma medida mais adequada para avaliar o grau de relacionamento linear entre duas variáveis aleatórias do que a covariância, pois seus valores estão sempre entre -1 e 1. Assim quanto mais próximo de 1, maior é o relacionamento linear positivo entre as variáveis X_i e X_j e quanto mais próximo de -1, maior o relacionamento linear negativo entre as variáveis. Uma correlação próxima de zero é uma indicação numérica de um não-relacionamento linear entre as variáveis em questão. Quando se têm muitas variáveis, o procedimento mais comum é apresentar os valores de ρ_{ij} em uma matriz chamada de matriz de correlação.

2.5.2 Estimação de parâmetros: vetor de médias, matrizes de covariâncias e de correlação populacionais

Na prática, as matrizes de covariâncias e de correlação teóricas precisam ser estimadas através de dados amostrais. Assim, supondo que se dispõe de uma amostra aleatória de tamanho n , onde, para cada elemento da amostra, tenha-se observado os valores de p -variáveis aleatórias de interesse, ou seja, têm-se n vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos da forma:

$$X_1 = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ \vdots \\ X_{p1} \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{p2} \end{bmatrix}, \dots, X_n = \begin{bmatrix} X_{1n} \\ X_{2n} \\ \vdots \\ X_{pn} \end{bmatrix}$$

sendo que o primeiro índice indica a variável e o segundo o elemento amostral.

O vetor de médias μ será estimado pelo vetor de médias amostrais \bar{X} definido por:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} [X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix}$$

onde \bar{X}_i é a média amostral da i -ésima variável, $i = 1, 2, \dots, p$. A matriz de covariâncias

$\Sigma_{p \times p}$ será estimada pela matriz de covariâncias amostrais $S_{p \times p}$ definida por:

$$S_{p \times p} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \dots & S_{pp} \end{bmatrix}$$

sendo $S_{ij} = S_{ji}$, $j \neq i$ e S_{ii} definidos respectivamente por:

$$S_{ii} = \frac{\sum_{l=1}^n (X_{il} - \bar{X}_i)^2}{n-1}$$

que é a variância amostral da i -ésima variável,

$$S_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^n (X_{il} - \bar{X}_i)(X_{jl} - \bar{X}_j)}{n-1}$$

que é a covariância amostral entre a i -ésima e j -ésima variáveis. A matriz de correlação

teórica $P_{p \times p}$ será estimada pela matriz de correlação amostral $R_{p \times p}$ definida por:

$$R_{p \times p} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1p} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{p1} & R_{p2} & \dots & R_{pp} \end{bmatrix}$$

onde $R_{p \times p} = \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii}S_{jj}}}$ é o coeficiente de correlação amostral entre as i -ésima e j -ésima variáveis, conhecido como coeficiente de correlação de Pearson (MINGOTI, 2005).

2.5.3 Distribuição normal multivariada

A distribuição normal multivariada é uma generalização da normal univariada para o caso no qual se trabalha com duas ou mais variáveis aleatórias simultaneamente. A distribuição normal univariada com média μ e variância σ^2 tem densidade de probabilidades dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}.$$

No caso de um vetor aleatório de dimensão p , ou seja, $X' = [X_1 \ X_2 \ X_3 \dots \ X_p]$ diz-se que este vetor tem uma distribuição normal p -variada, e denota-se $X \sim N(\mu, \Sigma_{p \times p})$, se a função densidade de probabilidade de X for dada por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu)\right\}.$$

A quantidade $(x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu)$ é referida como a distância de Mahalanobis do vetor x ao vetor de médias μ . Ela também é denominada de distância padronizada ou distância estatística (MINGOTI, 2005).

Quando $p = 2$, tem-se a distribuição normal bivariada. Nesse caso, a função densidade do vetor $X' = [X_1 \ X_2]$ é dada por:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu)\right\},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

sendo ρ o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 , $-1 < \rho < 1$, $|\Sigma| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$.

Quando $\rho=0$, a função $f(x_1, x_2)$ é o produto de duas densidades normais univariadas e, logo, as variáveis X_1 e X_2 são independentes, isto é,

$$f(x_1, x_2) = g(x_1)g(x_2)$$

onde,

$$g(x_1) = \frac{1}{(2\pi)\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}$$

$$g(x_2) = \frac{1}{(2\pi)\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

Portanto, no caso da distribuição normal bivariada, se X_1 e X_2 forem não correlacionadas também serão independentes (MINGOTI, 2005).

2.5.4 Análise de componentes principais

O objetivo principal da técnica de análise de componentes principais (PCA – *Principal Components Analysis*) é o de explicar a estrutura de variância e covariância de um vetor aleatório, composto de p variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_p , através da construção de combinações lineares das variáveis originais. Estas combinações lineares são chamadas de componentes principais e são não correlacionadas entre si. Se existem p variáveis originais é possível obter p componentes principais. No entanto, em geral deseja-se obter redução do número de variáveis a serem avaliadas e interpretação das combinações lineares construídas, ou seja, a informação contida nas p variáveis originais é substituída pela informação contida em k ($k < p$) componentes principais não correlacionadas (MINGOTI, 2005).

Considere as seguintes combinações lineares:

$$Y_1 = \mathbf{e}'_1 \mathbf{X} = e_{11}X_1 + e_{12}X_2 + \dots + e_{1p}X_p$$

$$\begin{aligned}
Y_2 &= \mathbf{e}'_2 \mathbf{X} = e_{21}X_1 + e_{22}X_2 + \cdots + e_{2p}X_p \\
&\vdots \\
Y_p &= \mathbf{e}'_p \mathbf{X} = e_{p1}X_1 + e_{p2}X_2 + \cdots + e_{pp}X_p
\end{aligned} \tag{2.2}$$

onde

$$\text{Var}(Y_i) = \mathbf{e}'_i \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{e}_i = \lambda_i \quad i = 1, 2, \dots, p \tag{2.3}$$

$$\text{Cov}(Y_i, Y_k) = \mathbf{e}'_i \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{e}_k = 0 \quad i, k = 1, 2, \dots, p \tag{2.4}$$

sendo $\boldsymbol{\Sigma}$ a matriz de covariâncias do vetor aleatório $\mathbf{X}' = [X_1, X_2, \dots, X_p]$ e $(\lambda_i, \mathbf{e}_i)$, os autovalores-autovetores de $\boldsymbol{\Sigma}$, com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$.

As componentes principais são aquelas combinações lineares Y_1, Y_2, \dots, Y_p não correlacionadas entre si cujas variâncias em (2.3) são as maiores possíveis. Desta forma, o sistema de variabilidade do vetor aleatório composto das p variáveis originais é aproximado pelo sistema de variabilidade do vetor aleatório que contém as k componentes principais. A qualidade da aproximação depende do número de componentes mantidas no sistema e pode ser medida através da avaliação da proporção de variância total explicada por elas (MINGOTI, 2005).

Suponha que \mathbf{X} é um vetor normal p com média e matriz de covariâncias dadas por $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$, respectivamente, ou seja, $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. A densidade de \mathbf{X} é constante no elipsóide centrado em $\boldsymbol{\mu}$

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = c^2 \tag{2.5}$$

o qual tem eixos iguais a $\pm c\sqrt{\lambda_i} \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, sendo

$$c^2 = \mathbf{x}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} = \frac{1}{\lambda_1} (\mathbf{e}'_1 \mathbf{x})^2 + \frac{1}{\lambda_2} (\mathbf{e}'_2 \mathbf{x})^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_p} (\mathbf{e}'_p \mathbf{x})^2 \tag{2.6}$$

onde $\mathbf{e}'_1 \mathbf{x}, \mathbf{e}'_2 \mathbf{x}, \dots, \mathbf{e}'_p \mathbf{x}$ são as componentes principais de \mathbf{x} (Johnson e Wichern (2002)).

Se $y_1 = \mathbf{e}'_1 \mathbf{x}, y_2 = \mathbf{e}'_2 \mathbf{x}, \dots, y_p = \mathbf{e}'_p \mathbf{x}$ tem-se

$$c^2 = \frac{1}{\lambda_1}(y_1)^2 + \frac{1}{\lambda_2}(y_2)^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_p}(y_p)^2. \quad (2.7)$$

Desta forma, a distância estatística (c^2) pode ser expressa em função dos valores de X (expressão (2.6)) ou em função dos valores de Y (expressão (2.7)).

Quando o objetivo é a redução de dimensionalidade, é necessário estabelecer critérios para escolher o número k de componentes principais. Os critérios mais utilizados, segundo Mingoti (2005), são:

1) Escolher k de maneira que $\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq 0,9 \sum_{j=1}^p \lambda_j$.

2) Escolher k de maneira que $\lambda_i \geq \lambda_m$, onde $\lambda_m = \frac{\sum_{j=1}^p \lambda_j}{p}$ e $i=1,2,\dots,k$.

3) Plotar λ_i em função de i , $i=1,2,\dots,k$, e selecionar o último valor de k antes do “cotovelo” da curva. No exemplo ilustrado na Figura 4, $k=2$.

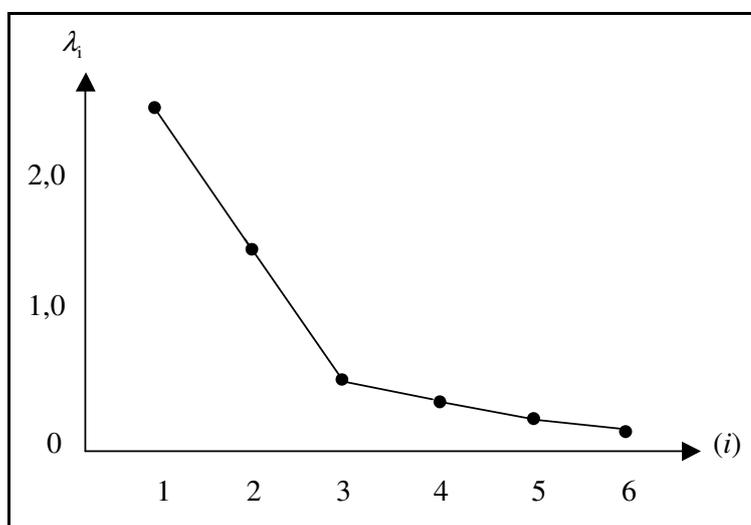


Figura 4 - Gráfico *scree-plot* ($k=2$)

Entretanto, em se tratando do uso de gráficos de controle baseados em componentes principais, um critério interessante é investigar o desempenho do gráfico de controle em função de k .

2.6 GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DO VETOR DE MÉDIAS

Desde que foi criado, o gráfico de controle baseado na estatística T^2 para o monitoramento de processos multivariados (HOTELLING, 1947) passou a ser o dispositivo estatístico mais usual no monitoramento do vetor de médias de duas ou mais características de qualidade.

O gráfico de controle T^2 é utilizado no monitoramento simultâneo de p variáveis de interesse. Quando o vetor das médias e a matriz de covariâncias, μ_0 e Σ_0 , de um processo p -variado distribuído normalmente são conhecidos, a estatística T^2 de Hotelling para a i -ésima amostra é dada por:

$$T_i^2 = n(\bar{X}_i - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (\bar{X}_i - \mu_0),$$

onde n é o tamanho da i -ésima amostra e \bar{X}_i é o vetor das médias amostrais dos p parâmetros para a amostra i . Quando o processo está sob controle, T_i^2 segue uma distribuição de qui-quadrado com p graus de liberdade.

Quando o vetor das médias e a matriz de covariâncias são desconhecidos, costuma-se utilizar os estimadores $\hat{\mu}_0$ e $\hat{\Sigma}_0$ baseados em m amostras:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma}_0 = \bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i,$$

onde \bar{X}_i e S_i são respectivamente o vetor das médias da amostra e a matriz de covariâncias da i -ésima amostra aleatória e independente de uma distribuição normal p -variada com vetor das médias μ_0 e matriz de covariâncias Σ_0 . Assim, a estatística utilizada no monitoramento do processo para o caso em que os parâmetros são estimados, é dada por:

$$T_i^2 = n(\bar{X}_i - \hat{\mu}_0)' \hat{\Sigma}_0^{-1} (\bar{X}_i - \hat{\mu}_0),$$

neste caso, T_i^2 segue uma distribuição F não-central. Champ, Jones-Farmer e Rigdon (2005) estudaram as propriedades do gráfico de controle T^2 quando os parâmetros são estimados.

O gráfico de controle T^2 de Hotelling é análogo ao gráfico \bar{X} de Shewhart, sendo ambos pouco sensíveis a deslocamentos pequenos e moderados no vetor das médias. Desta forma, métodos estatísticos univariados tais como, o esquema CUSUM e o gráfico de EWMA, ver Costa; Epprecht e Carpinetti (2005), têm sido estendidos para o caso multivariado em que o vetor de médias está sujeito a pequenas alterações (ver Woodall e Ncube (1985); Crosier (1988); Pignatiello e Runger (1990); Lowry et al. (1992); Lowry e Montgomery (1995); Prabhu e Runger (1997); Qiu e Hawkins (2001); Runger et al. (1999)).

A idéia de variar os parâmetros dos gráficos de controle multivariados (gráficos adaptativos multivariados), tais como o tamanho da amostra e o intervalo de tempo entre retiradas de amostras, tem sido explorada em artigos recentes (Aparisi (1996), Aparisi e Haro (2001), Aparisi e Haro (2003), Chou; Chen e Chen (2006)).

A adoção da amostragem dupla para o caso de processos multivariados tem sido estudada por Grigoryan (2003), Grigoryan e He (2005) e He e Grigoryan (2005). Eles estudaram o caso dos gráficos multivariados com amostragens múltiplas obtendo o *NMA* por meio de simulação. Alternativamente Machado (2006), Machado e Costa (2006, 2006a), Costa e Machado (2007, 2008) desenvolveram expressões analíticas para a obtenção do *NMA* de gráficos de controle bivariados com amostragem dupla.

Uma dificuldade encontrada ao se lidar com qualquer gráfico de controle multivariado é a interpretação prática de um sinal de fora de controle. Especificamente, não se sabe ao certo qual das k variáveis (ou qual subconjunto delas) é responsável pelo sinal. A prática padrão consiste em plotar gráficos \bar{X} univariados para as variáveis $X_1 X_2 X_3 \dots X_p$. Woodall e Ncube (1985) e Pignatiello e Runger (1990) sugeriram o uso de gráficos CUSUMs univariados para cada característica de qualidade. Serel et al. (2000)

utilizaram gráficos \bar{X} univariados para controlar cada característica de qualidade de um processo normal multivariado sob uma perspectiva econômica.

Mason e Young (2002) discutem como o método da decomposição ortogonal pode auxiliar na interpretação de um sinal no gráfico T^2 . Thomas (2002) estendeu os estudos realizados por Mason et al. (1995) sobre a decomposição da estatística T^2 de Hotelling para identificação das variáveis fora de controle quando em uso um esquema de monitoramento multivariado. Konrath (2002) estudou o gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling, decompondo a estatística T^2 por meio de um algoritmo computacional, também baseado na abordagem proposta por Mason et al. (1995).

Jackson (1980) sugeriu o uso dos gráficos de controle de T^2 baseados em componentes principais. Schall e Chandra (1987) apresentaram um método baseado nas propriedades das componentes principais e da análise de regressão multivariada para prever causas de variação. Souza e Rigão (2005) apresentaram procedimentos para identificar as variáveis responsáveis pela instabilidade do processo. Eles utilizaram, inicialmente, o gráfico de T^2 para verificar o estado do processo. Quando o processo é considerado fora de controle, outra investigação é realizada. Para variáveis fracamente correlacionadas, um gráfico de \bar{X} com limites de Bonferroni é utilizado e, para variáveis fortemente correlacionadas, considera-se um gráfico de \bar{X} baseado em componentes principais.

Antes de se utilizar um esquema de monitoramento multivariado deve-se investigar se os vetores de observações são independentes, assim como para o caso univariado. As observações de um processo multivariado são p -dimensional e as componentes são, em geral, autocorrelacionadas. Para o caso univariado, uma abordagem que se tem revelado útil quando se lida com dados autocorrelacionados consiste em modelar diretamente a estrutura correlacional com um modelo apropriado de série temporal, usar esse modelo para remover a autocorrelação dos dados e aplicar gráficos de controle aos resíduos (MONTGOMERY; MASTRANGELO, 1991 e LU; REYNOLDS, 1999).

São poucos, até o momento, os esquemas de monitoramento existentes para o caso multivariado quando as observações do processo são autocorrelacionadas. Kalgonda e Kulkarni (2004) propõem um esquema para o monitoramento da média de um processo multivariado autocorrelacionado. Eles consideram que as observações do processo seguem um modelo de série temporal vetorial de primeira ordem estacionário, VAR (1), e investigam o desempenho do esquema de monitoramento proposto em diagnosticar o sinal.

2.7 GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS

Assim como é importante monitorar o vetor de médias de um processo, é também importante monitorar a sua matriz de covariâncias Σ (YEH et al., 2003, 2004, 2005; SURTIHADI et al., 2004; GRIGORYAN e HE, 2005).

O primeiro gráfico de controle utilizado no monitoramento da matriz de covariâncias Σ se baseou na estatística obtida do teste da razão de máxima verossimilhança generalizada (ALT, 1985):

$$A_1 = -pn + pn \ln n - n \ln \left(\frac{|\mathbf{S}|}{|\Sigma_0|} \right) + tr(\Sigma_0^{-1} \cdot \mathbf{S}) \quad (2.8)$$

onde \mathbf{S} é a matriz de covariâncias,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

sendo s_{ii} a variância amostral da i -ésima variável e s_{ij} a correlação amostral entre a i -ésima e a j -ésima variáveis. $|\mathbf{S}|$ é o determinante da matriz \mathbf{S} e $tr(\mathbf{S})$ é o traço da matriz \mathbf{S} (a soma dos elementos da diagonal).

Quando o processo está sob controle, isto é $\Sigma = \Sigma_0$, A_1 é assintoticamente distribuído como uma qui-quadrado com $p(p+1)/2$ graus de liberdade.

Para o caso bivariado, Alt (1985) propôs o uso da variância amostral generalizada $|S|$ para controlar a matriz de covariâncias Σ . S é a matriz de covariâncias amostral

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix}.$$

Quando o processo está sob controle, $\frac{2 \cdot (n-1) \cdot |S|^{1/2}}{|\Sigma_0|^{1/2}}$ tem distribuição de qui-quadrado com $2n-4$ graus de liberdade (ALT (1985)).

É importante salientar que os testes estatísticos para igualdade de matrizes de covariâncias foram propostos bem antes de serem utilizados no monitoramento de processos. Em Anderson (2003), os leitores interessados encontrarão detalhes destes testes.

Tang e Barnett (1996) apresentaram procedimentos para o monitoramento da dispersão de processos normais bivariados baseados em dados subgrupados. Eles deram atenção especial para as situações onde informações *a priori* sobre Σ não estão disponíveis, como ocorre freqüentemente em corridas de produção curtas. Entretanto, uma abordagem alternativa foi também proposta para os casos em que Σ é especificada ou assumida como conhecida, a qual envolve a decomposição da matriz de covariâncias e utiliza componentes independentes resultantes. Tang e Barnett (1996a) compararam as técnicas propostas por Tang e Barnett (1996) com várias técnicas concorrentes. Por meio de simulações, mostraram que as técnicas propostas são mais eficientes do que as já existentes em detectar alterações na matriz de covariâncias em diversas situações.

Aparisi et al. (1999) estenderam a aplicação da estatística $|S|$ para o caso em que o número de variáveis do processo sob monitoramento é maior do que dois ($p > 2$) e, considerando esta mesma estatística, propuseram um gráfico de controle bivariado com amostra de tamanho variável (APARISI et al., 2001).

Yeh et al. (2003, 2004, 2005) estudaram os gráficos de controle de EWMA destinados ao monitoramento da matriz de covariâncias de processos multivariados. Yeh et al. (2003) propuseram um gráfico, denominado V-EWMA, projetado para detectar pequenas perturbações na variabilidade de características de qualidade multivariadas correlacionadas. Através de exemplos e simulações, eles verificaram que o gráfico proposto é superior ao gráfico de $|S|$ na detecção de pequenas perturbações na variabilidade do processo. Em Yeh et al. (2004, 2005) o monitoramento foi baseado em observações individuais. Em todos esses trabalhos utilizaram-se técnicas de simulação para obter as propriedades dos gráficos de controle.

Grigoryan e He (2005) propuseram o gráfico de controle multivariado com amostragem dupla para o monitoramento da matriz de covariâncias. Eles obtiveram as propriedades do gráfico proposto por meio de simulações. Uma revisão recente de gráficos de controle para o monitoramento da matriz de covariâncias foi elaborada por Yeh et al. (2006).

García-Díaz (2007) propôs um gráfico de controle multivariado baseado na raiz p da variância amostral generalizada $|S_p|^{1/p}$ para monitorar a matriz de covariâncias de processos com dados faltantes. A este gráfico deram o nome de gráfico de controle da variância eficaz. Como dados faltantes são problemas freqüentes na manufatura, o gráfico da variância eficaz parece ser uma ferramenta de monitoramento bastante interessante.

Chang e Zhang (2007) introduziram uma metodologia para o monitoramento da variabilidade de processos multivariados com observações autocorrelacionadas, adotando um gráfico de EWMA multivariado. Para filtrar a autocorrelação, eles consideraram um modelo linear dinâmico multivariado (DLM) ao invés dos modelos de séries temporais clássicos, tais como os modelos ARIMA (do inglês, *autoregressive integrated moving average*).

Artigos que tratam do monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias são poucos e recentes.

Khoo (2005) propôs um gráfico de controle baseado nas estatísticas de T^2 e de $|S|$ para o monitoramento de processos bivariados. A habilidade do gráfico proposto em sinalizar alterações no vetor de médias e/ou na matriz de covariâncias foi avaliada por meio de simulações. Os resultados obtidos não são animadores, pois o dispositivo é por demais lento na sinalização de desajustes do processo.

Chen et al. (2005) propuseram um gráfico de EWMA que é mais eficiente que os gráficos conjuntos de T^2 e $|S|$ na sinalização de pequenas mudanças no processo.

Zhang e Chang (2008) propuseram dois gráficos de EWMA baseados em observações individuais que são capazes não só de detectar alterações no processo, mas também diagnosticar, com um bom índice de acerto, o tipo de alteração, se apenas no vetor de médias ou apenas na matriz de covariâncias, ou em ambos. A performance destes gráficos não foram comparadas com a performance dos gráficos conjuntos de T^2 e $|S|$.

De acordo com a literatura consultada, muitas estratégias utilizadas para melhorar o desempenho dos gráficos para o caso univariado foram também propostas para o caso multivariado, com exceção dos gráficos com regras especiais de decisão que só foram desenvolvidos para o caso univariado. Com base na pesquisa bibliográfica efetuada não se tem conhecimento de outro trabalho similar ao de Costa e Machado (2007), que tratou de um gráfico de controle com regra especial de decisão e amostragens em dois estágios para o monitoramento do vetor de médias de processos bivariados.

No próximo capítulo serão detalhados os gráficos de controle utilizados no monitoramento do vetor de médias.

3 DESCRIÇÃO DO GRÁFICO DE T^2 PADRÃO E DOS GRÁFICOS PROPOSTOS PARA O MONITORAMENTO DO VETOR DE MÉDIAS DO PROCESSO ¹

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo se dedica à descrição dos gráficos de controle propostos para o monitoramento do vetor de médias de processos multivariados. São eles: gráfico de T^2 baseado em componentes principais (gráfico de PC) e os gráficos simultâneos de \bar{X} univariados (gráficos $SU\bar{X}$), ver Machado e Costa (2008).

Antes disso, descreve-se o gráfico de T^2 tradicional com o qual os gráficos multivariados propostos concorrem.

3.2 GRÁFICO DE CONTROLE DE T^2 DE HOTELLING

O gráfico de controle baseado na estatística T^2 para o monitoramento de processos multivariados foi criado por Hotelling (1947). Semelhante ao gráfico de \bar{X} , o gráfico de T^2 é pouco sensível a deslocamentos pequenos a moderados dos parâmetros do processo. A Figura 5 apresenta o gráfico de T^2 de Hotelling.

¹ Extratos deste capítulo foram aceitos para publicação na **Revista Pesquisa Operacional**, artigo intitulado “**The use of principal components and univariate charts to control multivariate processes**”, dos autores Machado e Costa (2008).

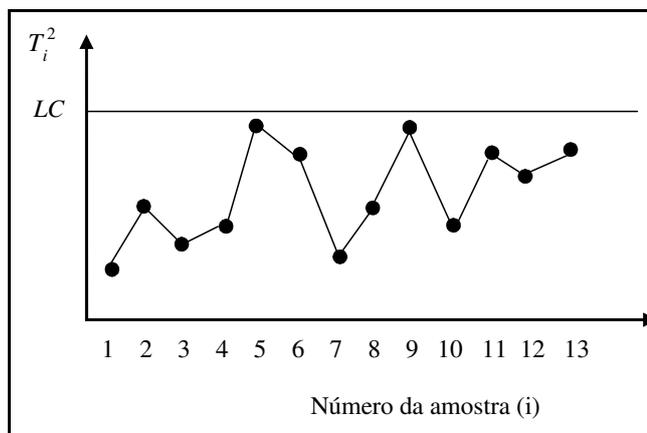


Figura 5: Gráfico de controle T^2 de Hotelling

A estatística T^2 tem distribuição de qui-quadrado, $T_i^2 \sim \chi_p^2$. Portanto:

$$LC = \chi_{p,\alpha}^2$$

onde α é a probabilidade de alarme falso e p é o número de variáveis sendo monitoradas. Os estudos que seguem neste e no próximo capítulo se restringem aos casos bivariados e trivariados, isto é, $p=2$ e 3 , respectivamente.

Durante o período em controle o número médio de amostras até o sinal é denominado NMA_0 e é igual ao inverso de α , isto é, $NMA_0 = 1/\alpha$. Durante o período fora de controle, a causa especial gera alterações de magnitude d nos parâmetros do processo, sendo $d = \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)}$, onde $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor de médias das p características de qualidade após a ocorrência da causa especial. Após a ocorrência da causa especial, T_i^2 tem distribuição de qui-quadrado não-central com parâmetro de não-centralidade $\lambda_d = nd^2$, sendo n o tamanho da amostra, isto é, $T_i^2 \sim \chi_p^2(\lambda_d)$, ver Aparisi (1996).

O NMA é dado por:

$$NMA = \frac{1}{1 - \beta} \quad (3.1)$$

onde $\beta = Pr(\chi_p^2(\lambda_d) < LC)$.

3.3 GRÁFICOS DE CONTROLE DE T^2 BASEADOS EM COMPONENTES PRINCIPAIS

Esta seção se dedica a descrição dos gráficos de controle de T^2 baseados em componentes principais, empregados para o monitoramento de duas ou três características de qualidade.

Quando $p=2$, assume-se que as variáveis originais têm uma distribuição normal bivariada com o vetor de médias e a matriz de covariâncias dados respectivamente por

$$\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}'_0 = (0; 0) \text{ e } \boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}. \text{ Com o processo em controle, assume-se que}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1 .$$

Quando $p=3$, as variáveis originais têm uma distribuição normal trivariada com o vetor de médias e a matriz de covariâncias dados, respectivamente por $\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}'_0 = (0; 0; 0)$ e

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \text{ Com o processo em controle, assume-se que } \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 1 .$$

Após a ocorrência da causa especial, o vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ do processo se altera de $\boldsymbol{\mu}'_0 = (0,0)$ para $\boldsymbol{\mu}'_1 = (\mu_{01} + \delta_1\sigma_1; \mu_{02} + \delta_2\sigma_2)$ se $p=2$ e de $\boldsymbol{\mu}'_0 = (0,0,0)$ para $\boldsymbol{\mu}'_1 = (\mu_{01} + \delta_1\sigma_1; \mu_{02} + \delta_2\sigma_2; \mu_{03} + \delta_3\sigma_3)$ se $p=3$.

Os gráficos a serem comparados com o gráfico de T^2 de Hotelling são: o gráfico de T^2 baseado na primeira componente principal (gráfico de PC1), na segunda componente principal (gráfico de PC2), na terceira componente principal (gráfico de PC3), na primeira e na segunda componentes principais (gráfico de PC12), na primeira e na terceira componentes principais (gráfico de PC13), na segunda e na terceira componentes principais (gráfico de PC23).

O limite de controle (LC) para diferentes valores de p é dado por $LC = \chi_{p,\alpha}^2$, lembrando que p é o número de variáveis consideradas para obter a estatística de T^2 e α é o erro do tipo I.

3.4 GRÁFICOS DE \bar{X} UNIVARIADOS PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS BIVARIADOS

Como um exemplo de como controlar diferentes variáveis com gráficos de \bar{X} , considere duas características de qualidade, representadas pelas variáveis normalmente distribuídas X_1 e X_2 . Primeiramente considere o caso em que as duas características são independentes e monitoradas separadamente por dois gráficos de \bar{X} univariados com limites de controle de 3 desvios-padrão. Cada ponto amostral tem uma probabilidade do erro do tipo I igual a 0,0027 (ou seja, $\alpha=0,0027$) de exceder os limites de controle de 3 desvios-padrão. A probabilidade de que as médias amostrais estejam dentro dos limites quando o processo está em controle é igual a $(1-0,0027)(1-0,0027)$. Então a probabilidade do erro total do tipo I (denotada por α') para este caso é dada por $\alpha' = 1-(1-0,0027)(1-0,0027)=1-0,994607=0,005393$. No caso de p características de qualidade estatisticamente independentes a probabilidade do erro total do tipo I será dada por,

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p. \quad (3.2)$$

Caso se deseje manter controlada a probabilidade do erro do tipo I para um processo p -variado com variáveis aleatórias independentes, a equação (3.2) pode ser utilizada para calcular a probabilidade do erro do tipo I de cada gráfico (MONTGOMERY, 2004). Conseqüentemente, obtém-se o coeficiente de abertura dos limites de controle de cada gráfico.

Se as variáveis são dependentes, que é o caso mais comum, a obtenção dos limites de controle de cada gráfico deixa de ser trivial. Para simplificar, considere o caso bivariado em que as variáveis seguem uma distribuição normal onde, com o processo em controle, o vetor de médias é dado por $\boldsymbol{\mu}'_0 = (\mu_{01}, \mu_{02})$ e a matriz de covariâncias é dada por

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \text{ sendo } \rho \text{ o coeficiente de correlação entre as variáveis } X_1 \text{ e}$$

X_2 . Se gráficos de \bar{X} univariados são utilizados para controlar cada característica de qualidade, então α' será dado por:

$$\begin{aligned}\alpha' &= 1 - \Pr\left(-a < \frac{\bar{X}_1 - \mu_{01}}{\sigma_1/\sqrt{n}} < a \cap -a < \frac{\bar{X}_2 - \mu_{02}}{\sigma_2/\sqrt{n}} < a\right) \\ &= 1 - P(-a < Z_1 < a \cap -a < Z_2 < a) \\ &= 1 - \int_{-a}^a \int_{-a}^a f(z_1, z_2) dz_1 dz_2\end{aligned}\quad (3.3)$$

onde n é o tamanho da amostra e $f(z_1, z_2)$ é a função densidade conjunta de uma distribuição normal bivariada com correlação ρ .

Então os limites de controle são dados por $\mu_{01} \pm a\sigma_1/\sqrt{n}$ para \bar{X}_1 e $\mu_{02} \pm a\sigma_2/\sqrt{n}$ para \bar{X}_2 . Por exemplo, utilizando a expressão (3.3), se as variáveis X_1 e X_2 são não correlacionadas ($\rho = 0$), $a = 3,2005$. Por outro lado, se X_1 e X_2 são correlacionadas ($\rho = 0.7$), $a = 3,1828$.

Neste trabalho estudou-se o uso simultâneo de dois gráficos de \bar{X} univariados (gráficos SU \bar{X}) para controlar processos bivariados. Alternativamente, considerou-se também o uso de dois gráficos simultâneos univariados baseados em componentes principais (gráficos de PC). A sub-rotina para calcular os limites de controle e o poder conjunto dos gráficos SU \bar{X} é baseada no algoritmo de Serel et al. (2000). O limite de controle para cada um dos gráficos de PC é dado por $LC = \chi_{p,\alpha}^2$, onde $p = 1$ e α é o erro do tipo I para cada gráfico dado pela expressão (3.2). Por exemplo, considerando um erro tipo I total α' de 0,005, tem-se que o limite de controle para cada um dos gráficos de PC é dado por $LC = \chi_{1;0,0025}^2$.

No próximo capítulo faz-se uma comparação de desempenho entre o gráfico de T^2 padrão e os gráficos propostos.

4 ANÁLISE DE DESEMPENHO DO GRÁFICO DE T^2 PADRÃO E DOS GRÁFICOS PROPOSTOS PARA O MONITORAMENTO DO VETOR DE MÉDIAS DO PROCESSO

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo são feitas comparações entre o desempenho do gráfico de T^2 baseado em componentes principais para o monitoramento de processos bivariados e trivariados e dos gráficos de \bar{X} univariados para o monitoramento de processos bivariados com o desempenho do gráfico de T^2 tradicional. A comparação de desempenho dos esquemas é feita pelo NMA , sob iguais taxas de alarmes falsos. Adota-se $NMA_0=200,0$, ou seja, $\alpha=0,005$.

4.2 DESEMPENHO DO GRÁFICO DE CONTROLE DE T^2 BASEADO EM COMPONENTES PRINCIPAIS

Nesta seção compara-se a eficiência do gráfico de T^2 tradicional baseado nas variáveis originais com a do gráfico de T^2 baseado em componentes principais.

Na Tabela 1 estão os limites de controle (LC) para diferentes valores de p .

Tabela 1 – Limites de controle

p	$LC = \chi^2_{p,\alpha=0,005}$
1	7,8787
2	10,5977
3	12,8384

A análise de componentes principais requer o cálculo de autovalores e autovetores da matriz de covariâncias. Esses valores dependem do coeficiente de correlação ρ , ver Tabelas 2 e 3 ($p=2$) e 7 e 8 ($p=3$). Os valores de NMA estão nas Tabelas 4, 5 e 6 ($p=2$ e

$\rho = 0,0; \pm 0,3; \pm 0,5; \pm 0,7$) e nas Tabelas 9, 10, e 11, onde $p=3$ e $(\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}) = (0,0; 0,0; 0,0); (0,3; 0,3; 0,3); (0,8; 0,5; 0,2)$. Nas tabelas deste capítulo adotou-se δ_1, δ_2 e $\delta_3 \in \{0,5; 1,0; 1,5\}$, que são os valores usuais encontrados na literatura para a magnitude da perturbação na média do processo de cada uma das variáveis originais em unidades do desvio-padrão.

Tabela 2 - Autovalores (λ) para o caso bivariado

	ρ			
	0,0	$\pm 0,3$	$\pm 0,5$	$\pm 0,7$
variável 1	1,0	1,3	1,5	1,7
variável 2	1,0	0,7	0,5	0,3

Tabela 3 – Autovetores para o caso bivariado

ρ		variável 1	variável 2	ρ		variável 1	variável 2
0,0	e_1	1,0	0,0	-0,3	e_1	0,7071	-0,7071
	e_2	0,0	1,0		e_2	0,7071	0,7071
0,3	e_1	0,7071	0,7071	-0,5	e_1	0,7071	-0,7071
	e_2	0,7071	-0,7071		e_2	0,7071	0,7071
0,5	e_1	0,7071	0,7071	-0,7	e_1	0,7071	-0,7071
	e_2	0,7071	-0,7071		e_2	0,7071	0,7071
0,7	e_1	0,7071	0,7071				
	e_2	0,7071	-0,7071				

As Tabelas 4, 5 e 6 comparam o gráfico de T^2 tradicional baseado nas variáveis originais com o gráfico de PC1 e com o gráfico de PC2. De acordo com os resultados, o uso do gráfico de PC1 ou do gráfico de PC2 em substituição ao gráfico de T^2 tradicional é arriscado, especialmente quando o usuário não conhece a natureza da perturbação. Runger e Alt (1996) também lidaram com critérios para a escolha de componentes principais para o controle de processos multivariados. Eles consideraram perturbações específicas no vetor de médias. Os gráficos de T^2 baseados em componentes principais são eficientes em detectar perturbações no vetor de médias para as quais eles foram projetados. Entretanto, existem outras perturbações para as quais esses gráficos são insensíveis.

Das Tabelas 4, 5 e 6 observa-se que quando as duas variáveis originais são não correlacionadas ($\rho=0$), o gráfico de PC1 é insensível a qualquer perturbação na variável X_2 e o gráfico de PC2 é insensível a qualquer perturbação na variável X_1 .

Quando as duas variáveis originais são correlacionadas ($\rho>0$), o gráfico de PC2 é insensível a perturbações de mesma magnitude em μ_1 e μ_2 , ou seja, para $\delta_1 = \delta_2$.

Quando a correlação é negativa ($\rho < 0$), observa-se que para correlações moderada e alta correlação, o gráfico de PC2 é o que tem melhor desempenho. Este resultado já havia sido observado em estudos anteriores, ver Wang (2005). Dependendo da perturbação, um dos três gráficos, T^2 tradicional, PC1 ou PC2, tem o menor *NMA* (valor em negrito).

Tabela 4 – Valores de *NMA* para os gráficos de T^2 tradicional e de T^2 baseado em componentes principais ($p = 2$ e $\rho = \pm 0,3$)

δ_1	δ_2	ρ								
		-0,3			0			0,3		
		PC1	PC2	T^2	PC1	PC2	T^2	PC1	PC2	T^2
0,0	0,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
0,0	0,5	139,35	109,04	110,44	200,0	90,93	115,54	139,35	109,04	110,44
0,0	1,0	68,12	39,97	37,96	200,0	28,21	41,92	68,12	39,97	37,96
0,0	1,5	32,93	16,16	13,85	200,0	10,46	15,78	32,93	16,16	13,85
0,5	0,0	139,35	109,04	110,44	90,93	200,0	115,54	139,35	109,04	110,44
0,5	0,5	200,0	39,97	57,78	90,93	90,93	76,87	68,12	200,0	91,64
0,5	1,0	139,35	16,16	22,75	90,93	28,21	32,95	32,93	109,04	40,09
0,5	1,5	68,12	7,57	9,39	90,93	10,46	13,64	17,06	39,97	15,75
1,0	0,0	68,12	39,97	37,96	28,21	200,0	41,92	68,12	39,97	37,96
1,0	0,5	139,35	16,16	22,75	28,21	90,93	32,95	32,93	109,04	40,09
1,0	1,0	200,0	7,57	11,28	28,21	28,21	18,49	17,06	200,0	25,81
1,0	1,5	139,35	4,10	5,65	28,21	10,46	9,36	9,57	109,04	13,03
1,5	0,0	32,93	16,16	13,85	10,46	200,0	15,78	32,93	16,16	13,85
1,5	0,5	68,12	7,57	9,39	10,46	90,93	13,64	17,06	39,97	15,75
1,5	1,0	139,35	4,10	5,65	10,46	28,21	9,36	9,57	109,04	13,03
1,5	1,5	200,0	2,54	3,40	10,46	10,46	5,76	5,82	200,0	8,53

Tabela 5 - Valores de NMA para os gráficos de T^2 tradicional e de T^2 baseado em componentes principais ($p = 2$ e $\rho = \pm 0,5$)

δ_1	δ_2	ρ								
		-0,5			0			0,5		
		PC1	PC2	T^2	PC1	PC2	T^2	PC1	PC2	T^2
0,0	0,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
0,0	0,5	145,43	90,93	99,72	200,0	90,93	115,54	145,43	90,93	99,72
0,0	1,0	75,53	28,21	30,60	200,0	28,21	41,92	75,53	28,21	30,60
0,0	1,5	38,10	10,46	10,51	200,0	10,46	15,78	38,10	10,46	10,51
0,5	0,0	145,43	90,93	99,72	90,93	200,0	115,54	145,43	90,93	99,72
0,5	0,5	200,0	28,21	41,92	90,93	90,93	76,87	75,53	200,0	99,72
0,5	1,0	145,43	10,46	15,01	90,93	28,21	32,95	38,10	90,93	41,92
0,5	1,5	75,53	4,77	6,10	90,93	10,46	13,64	20,30	28,21	15,01
1,0	0,0	75,53	28,21	30,60	28,21	200,0	41,92	75,53	28,21	30,60
1,0	0,5	145,43	10,46	15,01	28,21	90,93	32,95	38,10	90,93	41,92
1,0	1,0	200,0	4,77	6,88	28,21	28,21	18,49	20,30	200,0	30,60
1,0	1,5	145,43	2,64	3,48	28,21	10,46	9,36	11,58	90,93	15,01
1,5	0,0	38,10	10,46	10,51	10,46	200,0	15,78	38,10	10,46	10,51
1,5	0,5	75,53	4,77	6,10	10,46	90,93	13,64	20,30	28,21	15,01
1,5	1,0	145,43	2,64	3,48	10,46	28,21	9,36	11,58	90,93	15,01
1,5	1,5	200,0	1,73	2,16	10,46	10,46	5,76	7,08	200,0	10,51

Tabela 6 - Valores de NMA para os gráficos de T^2 tradicional e de T^2 baseado em componentes principais ($p = 2$ e $\rho = \pm 0,7$)

		ρ								
		-0,7			0			0,7		
δ_1	δ_2	PC1	PC2	T^2	PC1	PC2	T^2	PC1	PC2	T^2
0,0	0,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
0,0	0,5	150,40	64,09	77,97	200,0	90,93	115,54	150,40	64,09	77,97
0,0	1,0	82,17	15,44	18,98	200,0	28,21	41,92	82,17	15,44	18,98
0,0	1,5	43,02	5,21	5,94	200,0	10,46	15,78	43,02	5,21	5,94
0,5	0,0	150,40	64,09	77,97	90,93	200,0	115,54	150,40	64,09	77,97
0,5	0,5	200,0	15,44	23,38	90,93	90,93	76,87	82,17	200,0	106,69
0,5	1,0	150,40	5,21	7,35	90,93	28,21	32,95	43,02	64,09	38,73
0,5	1,5	82,17	2,43	3,04	90,93	10,46	13,64	23,50	15,44	11,36
1,0	0,0	82,17	15,44	18,98	28,21	200,0	41,92	82,17	15,44	18,98
1,0	0,5	150,40	5,21	7,35	28,21	90,93	32,95	43,02	64,09	38,73
1,0	1,0	200,0	2,43	3,23	28,21	28,21	18,49	23,50	200,0	35,25
1,0	1,5	150,40	1,51	1,80	28,21	10,46	9,36	13,63	64,09	15,73
1,5	0,0	43,02	5,21	5,94	10,46	200,0	15,78	43,02	5,21	5,94
1,5	0,5	82,17	2,43	3,04	10,46	90,93	13,64	23,50	15,44	11,36
1,5	1,0	150,40	1,51	1,80	10,46	28,21	9,36	13,63	64,09	15,73
1,5	1,5	200,0	1,17	1,29	10,46	10,46	5,76	8,40	200,0	12,58

As Tabelas 9, 10 e 11 comparam o gráfico de T^2 tradicional baseado nas variáveis originais com o gráfico de PC1, gráfico de PC2, gráfico de PC3, gráfico de PC12, gráfico de PC13 e gráfico de PC23, sendo $\rho \geq 0,0$. As conclusões em relação ao desempenho dos gráficos baseados em componentes principais são similares às do caso bivariado. Os casos em que $\rho < 0,0$ também foram investigados. A principal conclusão é que o gráfico de PC3 tem, em alguns casos, um melhor desempenho geral, como por exemplo, quando $(\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23})$ é igual a $(-0,3; -0,3; -0,3)$ ou a $(-0,8; -0,5; -0,2)$.

Atualmente, com a automatização do processo de coleta de dados, é comum lidar com um número grande de variáveis ($p > 3$). Desta forma, a redução das p variáveis originais para k componentes principais é vantajosa. Entretanto, o que se pode concluir deste estudo onde se considerou $p = 2$ e 3 , é que antes de adotar o gráfico de T^2 baseado em componentes principais, o usuário deve investigar como esse gráfico se comporta em relação a diferentes tipos de perturbações.

Tabela 7 - Autovalores (λ) para o caso trivariado

	$(\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23})$		
	$(0,0;0,0;0,0)$	$(0,5; 0,5;0,5)$	$(0,8;0,5;0,2)$
	variável 1	1,0	2,0
variável 2	1,0	0,5	0,822
variável 3	1,0	0,5	0,137

Tabela 8 – Autovetores para o caso trivariado

	$(\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23})$								
	$(0,0;0,0;0,0)$			$(0,5;0,5;0,5)$			$(0,8;0,5;0,2)$		
	e_1	e_2	e_3	e_1	e_2	e_3	e_1	e_2	e_3
variável 1	1,0	0,0	0,0	0,5774	0,8165	0,0	0,6706	-0,0996	0,7351
variável 2	0,0	1,0	0,0	0,5774	-0,4082	0,7071	0,5993	-0,5113	-0,6159
variável 3	0,0	0,0	1,0	0,5774	-0,4082	-0,7071	0,4372	0,8536	-0,2832

Tabela 9 - Valores de NMA para os gráficos de T^2 tradicional e de T^2 baseado em componentes principais ($p = 3$ e $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0$)

δ_1	δ_2	δ_3	gráfico						T^2
			PC1	PC2	PC3	PC12	PC13	PC23	
0,0	0,0	0,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
0,0	0,0	1,5	200,0	200,0	10,46	200,0	15,78	15,78	20,41
0,0	0,5	1,5	200,0	90,94	10,46	115,55	15,78	13,64	17,65
0,0	1,0	1,5	200,0	28,21	10,46	41,92	15,78	9,36	12,07
0,0	1,5	1,5	200,0	10,46	10,46	15,78	200,0	15,78	20,41
0,5	1,0	0,0	90,94	28,21	200,0	32,95	115,55	41,92	41,76
0,5	1,0	0,5	90,94	28,21	90,94	32,95	76,87	32,95	34,05
0,5	1,0	1,0	90,94	28,21	28,21	32,94	32,95	18,49	20,41
0,5	1,0	1,5	90,94	28,21	10,46	32,95	13,64	9,36	10,79
1,0	0,0	0,0	28,21	200,0	200,0	41,92	41,92	200,0	52,41
1,0	0,5	0,5	28,21	90,94	90,94	32,95	32,95	76,87	34,05
1,0	1,0	1,0	28,21	28,21	28,21	18,49	18,49	18,49	13,58
1,0	1,5	1,5	28,21	10,46	10,46	9,36	9,36	5,76	5,35
1,5	0,0	0,0	10,46	200,0	200,0	15,78	15,78	200,0	20,41
1,5	0,0	0,5	10,46	200,0	90,94	15,78	13,64	115,55	17,65
1,5	0,0	1,0	10,46	200,0	28,21	15,78	9,36	41,92	12,07
1,5	0,0	1,5	10,46	200,0	10,46	15,78	5,76	15,78	7,33

Tabela 10 - Valores de NMA para os gráficos de T^2 tradicional e de T^2 baseado em componentes principais ($p = 3$ e $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0,3$)

δ_1	δ_2	δ_3	gráfico						T^2
			PC1	PC2	PC3	PC12	PC13	PC23	
0,0	0,0	0,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
0,0	0,0	1,5	58,34	12,07	52,12	13,73	41,73	13,23	13,43
0,0	0,5	1,5	34,25	23,60	29,75	18,42	21,43	17,05	13,87
0,0	1,0	1,5	20,88	50,61	17,77	20,39	11,67	17,98	11,56
0,0	1,5	1,5	13,29	113,25	11,16	18,01	6,83	15,24	8,21
0,5	1,0	0,0	58,34	43,17	200,0	36,91	80,48	61,90	46,50
0,5	1,0	0,5	34,25	131,43	158,05	44,27	46,97	133,87	52,04
0,5	1,0	1,0	20,88	185,14	93,58	30,95	25,78	114,19	32,56
0,5	1,0	1,5	13,29	69,98	52,11	15,82	14,35	46,27	15,16
1,0	0,0	0,0	100,80	150,54	29,75	109,10	35,78	40,84	42,34
1,0	0,5	0,5	34,25	185,14	93,58	49,17	39,01	114,19	48,16
1,0	1,0	1,0	13,29	200,0	200,0	20,12	20,12	200,0	25,94
1,0	1,5	1,5	6,13	185,14	93,58	8,94	8,14	114,19	10,39
1,5	0,0	0,0	58,34	113,25	11,16	64,00	12,82	15,24	15,21
1,5	0,0	0,5	34,25	196,11	17,77	49,94	15,12	26,78	19,50
1,5	0,0	1,0	20,88	82,37	29,75	24,69	15,73	33,08	17,19
1,5	0,0	1,5	13,29	27,30	52,12	11,01	14,35	25,26	11,07

Tabela 11 - Valores de NMA para os gráficos de T^2 tradicional e de T^2 baseado em componentes principais ($p = 3$ e $\rho_{12}=0,8, \rho_{13}=0,5, \rho_{23} = 0,2$)

δ_1	δ_2	δ_3	gráfico						T^2
			PC1	PC2	PC3	PC12	PC13	PC23	
0,0	0,0	0,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
0,0	0,0	1,5	100,18	12,26	20,61	16,21	26,05	9,10	10,69
0,0	0,5	1,5	60,60	21,35	4,91	22,39	6,04	4,65	5,14
0,0	1,0	1,5	37,02	39,68	1,99	26,80	2,26	2,28	2,40
0,0	1,5	1,5	23,32	77,57	1,25	26,51	1,32	1,39	1,42
0,5	1,0	0,0	62,76	68,33	60,33	51,50	47,76	50,22	41,37
0,5	1,0	0,5	43,65	182,43	25,14	60,79	21,82	36,80	27,64
0,5	1,0	1,0	30,80	135,82	11,75	40,82	10,60	16,63	13,02
0,5	1,0	1,5	22,13	45,08	6,20	20,21	5,68	7,05	5,89
1,0	0,0	0,0	97,78	190,00	4,86	119,41	6,48	7,00	8,24
1,0	0,5	0,5	41,20	194,73	47,49	58,91	31,86	66,80	40,24
1,0	1,0	1,0	18,69	151,38	104,04	26,63	24,15	111,82	29,41
1,0	1,5	1,5	9,45	100,79	8,00	12,66	4,68	10,75	5,54
1,5	0,0	0,0	55,69	178,67	1,76	74,39	2,06	2,19	2,40
1,5	0,0	0,5	38,89	140,50	2,40	50,49	2,76	3,12	3,28
1,5	0,0	1,0	27,60	46,87	3,62	24,16	3,84	4,27	4,10
1,5	0,0	1,5	19,95	16,82	6,08	10,99	5,39	5,06	4,37

4.3 ANÁLISE DE DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE \bar{X} UNIVARIADOS PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS BIVARIADOS

Nesta seção apresenta-se o estudo do desempenho de dois gráficos de \bar{X} univariados (gráficos SU \bar{X}) utilizados para o monitoramento de processos bivariados. Alternativamente, considerou-se também o uso de gráficos simultâneos univariados baseados em componentes principais (gráficos de PC). Nas Tabelas 12 e 13 os valores de NMA para os gráficos propostos são comparados com os valores de NMA para o gráfico de T^2 , onde δ_1 e $\delta_2 = 0,5; 1,0; 1,5$ e $\rho = 0,0; \pm 0,3; \pm 0,5; \pm 0,7$. Nessas tabelas, considera-se somente os casos em que $\delta_2 \geq \delta_1$. A condição contrária ($\delta_1 < \delta_2$) leva aos mesmos valores de NMA s.

Quando a correlação é positiva ($\rho > 0$), os gráficos de \bar{X} univariados têm, em geral, um melhor desempenho, ver Tabela 12. Quando a correlação é negativa ($\rho < 0$), os gráficos de PC tem, em geral, um melhor desempenho, ver Tabela 13. Se é conhecida a informação de que a causa especial altera apenas uma variável de cada vez, então o gráfico de T^2 é a melhor opção, exceto quando $\rho=0,0$. Entretanto, mesmo neste caso, a redução no *NMA* fornecida pelos gráficos SU \bar{X} ou gráficos de PC é muito pequena.

Para o caso em que as variáveis são não correlacionadas ($\rho=0,0$), o gráfico de PC e os gráficos individuais de \bar{X} têm o mesmo desempenho para qualquer perturbação.

A idéia de se utilizar gráficos de \bar{X} univariados para o monitoramento de processos trivariados também foi explorada. Quando comparado com o dos gráficos de Hotelling, o desempenho dos gráficos de \bar{X} univariados em uso conjunto foi insatisfatório. Deste modo, a autora deste trabalho se sentiu desmotivada em dar continuidade a esses estudos. Dedicou-se, então, ao estudo dos gráficos de controle para o monitoramento da matriz de covariâncias de processos multivariados. Os principais resultados obtidos se encontram nas próximas seções.

Tabela 12 - Valores de *NMA* para o gráfico de T^2 tradicional e para os gráficos SU \bar{X} e PC ($\rho \geq 0,0$)

		ρ										
		0,0		0,3			0,5			0,7		
		SU \bar{X}	T^2	SU \bar{X}	SUPC	T^2	SU \bar{X}	SUPC	T^2	SU \bar{X}	SUPC	T^2
<i>LSC</i>		3,023	10,597	3,021	9,138	10,597	3,015	9,138	10,597	2,996	9,138	10,597
<i>LIC</i>		-3,023	-	-3,021	-	-	-3,015	-	-	-2,996	-	-
δ_1	δ_2											
0,0	0,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
0,0	0,5	117,4	115,6	117,4	115,1	110,5	117,5	104,2	99,7	115,8	81,5	78,0
0,0	1,0	41,6	41,9	41,6	43,6	38,0	41,5	34,7	30,6	40,3	20,8	19,0
0,0	1,5	15,1	15,8	15,1	17,5	13,9	15,0	12,8	10,5	14,5	6,65	5,94
0,5	0,5	83,2	76,9	84,0	93,0	91,7	85,4	101,3	99,7	87,0	108,4	106,7
0,5	1,0	36,4	33,0	36,9	43,3	40,1	37,5	46,5	41,9	37,8	44,7	38,7
0,5	1,5	14,4	13,6	14,5	19,4	15,8	14,6	19,3	15,0	14,5	15,0	11,4
1,0	1,0	23,44	18,5	24,1	25,2	25,8	24,93	30,0	30,60	25,96	34,8	35,25
1,0	1,5	11,89	9,36	12,3	13,3	13,0	12,65	15,9	15,01	13,01	17,8	15,73
1,5	1,5	8,09	5,76	8,50	8,02	8,53	8,91	9,94	10,51	9,42	12,0	12,58

Tabela 13 - Valores de NMA para o gráfico de T^2 tradicional e para os gráficos $SU \bar{X}$ e PC ($\rho \leq 0,0$)

		ρ										
		0,0		-0,3			-0,5			-0,7		
		$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	SUPC	T^2	$SU \bar{X}$	SUPC	T^2	$SU \bar{X}$	SUPC	T^2
LSC		3,023	10,597	3,021	9,138	10,597	3,015	9,138	10,597	2,996	9,138	10,597
LIC		-3,023	-	-3,021	-	-	-3,015	-	-	-2,996	-	-
δ_1	δ_2											
0,0	0,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
0,0	0,5	117,4	115,6	117,4	115,1	110,5	117,5	104,2	99,7	115,8	81,5	78,0
0,0	1,0	41,6	41,9	41,6	43,6	38,0	41,5	34,7	30,6	40,3	20,8	19,0
0,0	1,5	15,1	15,8	15,1	17,5	13,9	15,0	12,8	10,5	14,5	6,65	5,94
0,5	0,5	83,2	76,9	82,6	58,0	57,8	81,7	41,6	41,9	78,3	22,7	23,4
0,5	1,0	36,4	33,0	36,1	23,1	22,8	35,7	14,9	15,0	34,1	7,06	7,35
0,5	1,5	14,4	13,6	14,3	10,1	9,39	14,1	6,27	6,10	13,6	2,99	3,04
1,0	1,0	23,44	18,5	23,1	10,7	11,3	22,8	6,44	6,88	21,8	3,02	3,23
1,0	1,5	11,89	9,36	11,7	5,42	5,65	11,5	3,30	3,48	11,1	1,72	1,80
1,5	1,5	8,09	5,76	7,85	3,18	3,40	7,71	2,03	2,16	7,43	1,25	1,29

No capítulo seguinte serão detalhados os gráficos de controle utilizados no monitoramento da matriz de covariâncias.

5 DESCRIÇÃO DOS GRÁFICOS PROPOSTOS PARA O MONITORAMENTO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS E DE ALGUNS ESQUEMAS CONCORRENTES

5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo se dedica à descrição dos gráficos de controle propostos para o monitoramento da matriz de covariâncias. Esses gráficos se baseiam em uma nova estatística de monitoramento, a estatística da máxima variância ou estatística VMAX. Primeiramente são descritos os gráficos destinados ao controle de processos bivariados. São eles: o gráfico de VMAX (MACHADO; COSTA, 2008), o gráfico de VMAX com amostragem dupla (MACHADO; DE MAGALHÃES; COSTA, 2008), o gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável (COSTA; MACHADO, 2008), o gráfico de EWMA baseado na estatística de VMAX (MACHADO; COSTA, 2008a) e o gráfico de VMAX com regra especial de decisão (MACHADO; RAHIM; COSTA, 2008). Além disso, descreve-se também o gráfico de VMAX destinado ao monitoramento de processos multivariados (COSTA; MACHADO, 2009).

São descritos também alguns gráficos de controle existentes na literatura com os quais os gráficos propostos concorrem. Para o caso particular de duas variáveis, os gráficos concorrentes são: o gráfico da variância amostral generalizada (gráfico de $|S|$) objeto de estudo de Alt (1985); o gráfico de $|S|$ com amostragem dupla proposto por Grigoryan e He (2005); o gráfico de $|S|$ com amostra de tamanho variável estudado por Aparisi et al. (2001) e o gráfico de V-EWMA proposto por Yeh et al. (2003). Para o caso multivariado, o gráfico proposto concorre com o gráfico de $|S|$ proposto por Aparisi et al. (1999).

5.2 GRÁFICOS DE CONTROLE PROPOSTOS – CASO BIVARIADO

5.2.1 Gráfico da máxima variância (gráfico de VMAX)

Nesta seção apresenta-se o gráfico de controle proposto para o monitoramento da matriz de covariâncias Σ de um processo bivariado.

A estatística de monitoramento corresponde ao maior valor das variâncias amostrais

padronizadas $S_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2}{n}$ e $S_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_{2j}^2}{n}$, onde $x_{1j} = (X_{1j} - \mu_1)/\sigma_1$ e

$x_{2j} = (X_{2j} - \mu_2)/\sigma_2$, sendo X_1 e X_2 duas características de qualidade que seguem uma distribuição normal, ou seja, $VMAX = \max\{S_1^2, S_2^2\}$. Faz-se uso das variâncias amostrais padronizadas devido ao fato de, na prática, as variáveis possuírem variâncias diferentes.

Supõe-se que com o processo em controle, a matriz de covariâncias é dada por

$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$, sendo σ_{11} e σ_{22} as variâncias de X_1 e X_2 e $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, as covariâncias

entre X_1 e X_2 . O gráfico proposto é denominado gráfico de VMAX.

Analogamente a Surtihadi et al. (2004), assume-se duas possíveis maneiras de uma causa especial alterar a matriz de covariâncias, resultando na matriz

$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{12} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} \end{pmatrix}$, sendo $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$.

A primeira possibilidade (caso I) supõe que a causa especial afeta somente a variância da variável aleatória X_1 , isto é, $a_1 = \gamma$ e $a_2 = 1$, ou somente a variância da variável aleatória X_2 , neste caso $a_2 = \gamma$ e $a_1 = 1$. A segunda possibilidade (caso II) supõe que a causa especial altera tanto a variância de X_1 quanto a de X_2 , isto é, $a_1 = a_2 = \sqrt{\gamma}$, sendo $\gamma > 1$ a magnitude da perturbação. Em ambos os casos, a

correlação $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$ entre X_1 e X_2 não é afetada pela causa especial. Se $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, então $\rho = \sigma_{12} = \sigma_{21}$.

Considera-se também outro tipo de causa especial que altera a matriz de covariâncias inicial para $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} \end{pmatrix}$. Neste caso, o coeficiente de correlação é alterado de ρ para $\rho' = \frac{\sigma_{12}}{a_1 a_2 \sigma_1 \sigma_2}$. Por exemplo, se $\rho=0,5$, $a_1^2 = 1,3$ e $a_2^2 = 1,0$, a causa especial não só altera as variâncias de X_1 e X_2 como também reduz a correlação entre as variáveis, isto é, $\rho' = 0,4385$.

Quando o gráfico de VMAX está em uso, amostras de tamanho n são retiradas do processo em intervalos de tempo regulares. As duas características de qualidade X_1 e X_2 das n unidades da amostra são medidas e a estatística VMAX é calculada. Se a estatística VMAX for maior do que o limite de controle LC , o gráfico sinaliza um desajuste do processo. Após a ocorrência do sinal, o usuário pode imediatamente examinar as variâncias amostrais de X_1 e X_2 para descobrir quais variáveis foram afetadas pela causa especial, ou seja, aquelas cujas variâncias amostrais são maiores que LC . O limite de controle LC do gráfico de VMAX é obtido utilizando a expressão (A6) do Apêndice A. A Figura 6 apresenta o gráfico de VMAX.

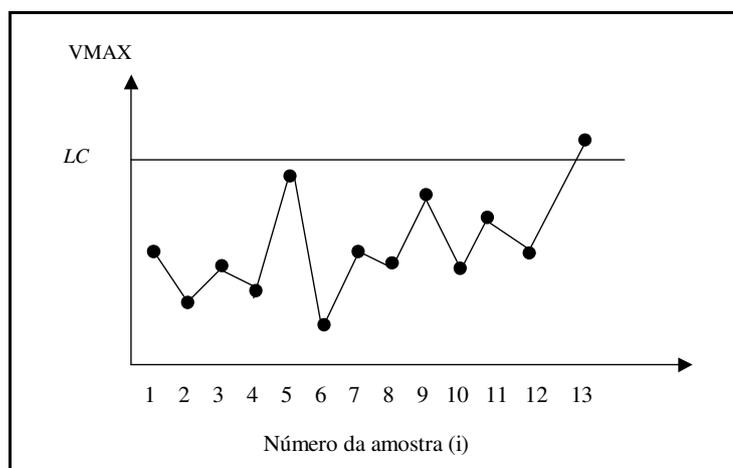


Figura 6 - Gráfico de controle de VMAX

A eficiência do gráfico de VMAX em detectar uma alteração no processo é medida também pelo *NMA*, número médio de amostras até o sinal. A expressão do *NMA* para o gráfico de VMAX está no Apêndice A.

Neste estudo considerou-se o caso de uma distribuição normal bivariada com matriz de covariâncias conhecida. Na prática, essa matriz não é conhecida. Para o caso univariado, Maravelakis et al. (2002) estudaram o gráfico de S^2 quando a variância é estimada. Como o gráfico de VMAX combina dois gráficos de S^2 em um único gráfico, pode-se considerar a abordagem de Maravelakis et al. (2002) para obter as propriedades do gráfico de VMAX quando S_1^2 e S_2^2 são estimados. Além disso, é necessário estimar o coeficiente de correlação. No próximo capítulo será verificado que o coeficiente de correlação tem influência, porém pequena, nos valores de *NMA*; conseqüentemente, ele não precisa ser estimado com precisão.

5.2.2 Descrição do gráfico de VMAX com amostragem dupla²

Esta seção é dedicada ao gráfico de VMAX com amostragem dupla empregado no monitoramento da matriz de covariâncias Σ de duas características de qualidade X_1 e X_2 descritas por uma distribuição normal bivariada.

Similar ao gráfico de controle de Shewhart, amostras de tamanho $n = n_1 + n_2$ são retiradas do processo em intervalos de tempo regulares. A amostragem é realizada em dois estágios. No primeiro estágio (índice p) n_1 unidades são inspecionadas, duas características de qualidade X_1 e X_2 são medidas e a estatística $VMAX_p = \max\{S_{1p}^2, S_{2p}^2\}$ é calculada, sendo S_{1p}^2 e S_{2p}^2 as variâncias amostrais de X_1 e X_2 da sub-amostra de tamanho n_1 .

Se $VMAX_p$ for menor do que o limite de advertência, LA , a amostragem é interrompida e o processo é julgado em controle. Se $VMAX_p$ for maior do que o limite de

² Extratos desta seção foram aceitos para publicação na **Revista Produção**, artigo intitulado “Gráfico de controle de VMAX para o monitoramento da matriz de covariâncias”, dos autores Machado; De Magalhães e Costa (2008).

controle do primeiro estágio, LC_1 , o gráfico de controle sinaliza um desajuste do processo. Se $LA < VMAX_p < LC_1$, a amostragem vai para o segundo estágio (índice s), onde as n_2 unidades restantes são inspecionadas e a estatística $VMAX_s = \max\{S_{1s}^2, S_{2s}^2\}$ é calculada, sendo S_{2s}^2 e S_{1s}^2 as variâncias amostrais de X_1 e X_2 levando em consideração a amostra de tamanho n . O gráfico também sinaliza um desajuste do processo quando $VMAX_s > LC_2$, sendo LC_2 o limite de controle do segundo estágio.

A região dada por (LA, LC_1) corresponde a região de advertência. A região acima de LC_1 é a região de ação do primeiro estágio e a região acima de LC_2 é a região de ação do segundo estágio.

Se um ponto cai na região de ação com o processo em controle, isto é, quando $\Sigma = \Sigma_0$, tem-se um alarme falso. Em outras palavras, o gráfico de controle sinaliza erroneamente a existência de uma causa especial. No primeiro estágio a probabilidade de se ter um alarme falso é dada por α_1 e, no segundo estágio, por α_2 .

Se um ponto cai na região de ação após a ocorrência da causa especial, isto é, quando $\Sigma \neq \Sigma_0$, tem-se um alarme verdadeiro. No primeiro estágio a probabilidade de se ter um alarme verdadeiro é dada por p_1 e, no segundo estágio, por p_2 .

Deste modo, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ é a probabilidade de se ter um alarme falso quando a amostragem dupla está em uso e $p_d = p_1 + p_2$ é o poder de detecção do gráfico de VMAX.

Durante o período em controle, o número médio de itens inspecionados por amostragem, \bar{n} , é dado por

$$\bar{n} = n_1 + n_2(1 - p_0) \quad (5.1)$$

onde p_0 é a probabilidade de que a amostragem seja interrompida no primeiro estágio.

A Figura 7 mostra um gráfico de VMAX com os valores de $VMAX_p$ e $VMAX_s$ plotados. O gráfico de controle dá um sinal quando $VMAX_p > LC_1$ ou quando $VMAX_s > LC_2$. Os pontos amostrais $VMAX_p$, ao caírem na região de advertência, disparam a inspeção de toda a amostra, e, nestes casos, a estatística $VMAX_s$ é calculada e

comparada com LC_2 . Para evitar o uso de dois gráficos, um para o primeiro estágio e outro para o segundo estágio, o usuário pode construir o gráfico de VMAX com duas escalas, uma do lado esquerdo e uma do lado direito, como ilustrado na Figura 7. Os valores $VMAX_p$ correspondem aos pontos pretos que são plotados considerando a escala da esquerda, e os valores $VMAX_s$ correspondem aos pontos brancos que são plotados considerando a escala da direita. A idéia de construir gráficos de controle com duas escalas foi sugerida por Costa (1999).

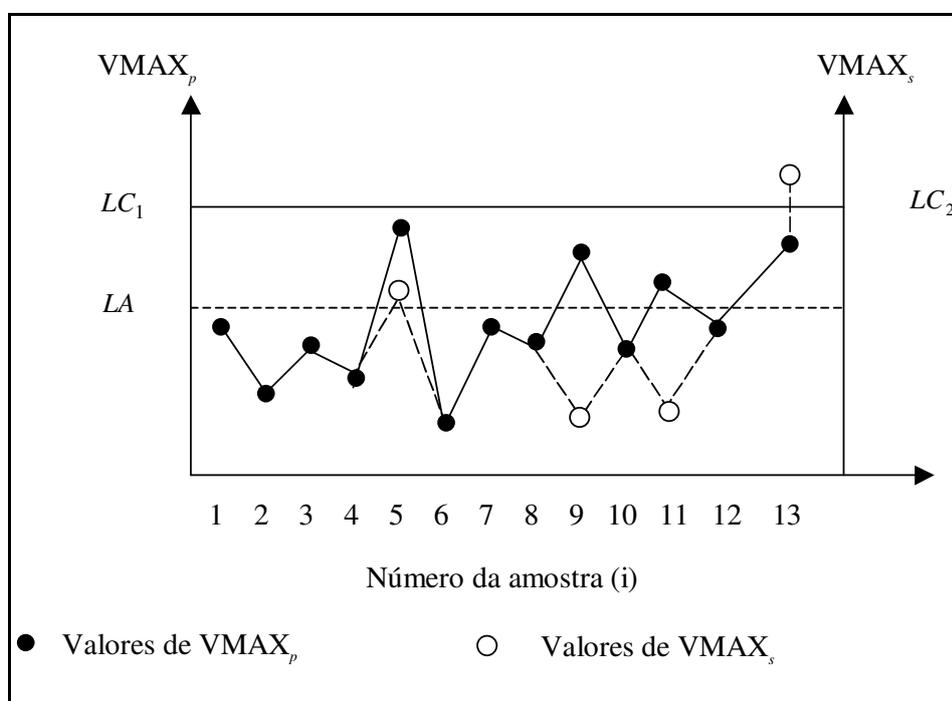


Figura 7 - Gráfico de controle de VMAX com amostragem dupla

Com a amostragem dupla, a eficiência do gráfico de controle em detectar uma alteração no processo, é medida também pelo NMA , número médio de amostras até o sinal. A expressão do NMA para o gráfico de VMAX com amostragem dupla encontra-se no Apêndice B.

5.2.3 Descrição do gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável³

Esta seção é dedicada ao gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável. Os valores de $VMAX = \max\{S_1^2, S_2^2\}$ são plotados no gráfico de controle, o qual possui limites de advertência LA_i e limites de controle LC_i . Os limites do gráfico, por sua vez, dependem do tamanho da amostra n_i , $i = 1, 2$, onde $n_2 > n_1$.

Para evitar o uso de dois gráficos, um para amostras pequenas e outro para amostras grandes, o usuário pode construir o gráfico de controle com duas escalas, uma do lado esquerdo e uma do lado direito, como ilustrado na Figura 8. Os valores de VMAX procedentes de amostras pequenas correspondem aos pontos pretos que são plotados considerando a escala da esquerda e, os valores de VMAX procedentes de amostras grandes, correspondem aos pontos brancos que são plotados considerando a escala da direita.

O tamanho de cada amostra depende do que é observado na amostra anterior. Se o ponto amostral cai na região central, isto é, $VMAX < LA_i$, então o tamanho da próxima amostra deve ser n_1 e, se o ponto amostral cai na região de advertência, ou seja, $LA_i < VMAX < LC_i$, então o tamanho da próxima amostra deve ser n_2 . O gráfico de controle dá um sinal quando um ponto amostral cai na região de ação. Se o processo está em controle com $\Sigma = \Sigma_0$, então o sinal é um alarme falso. Para facilitar os cálculos, LA_i e LC_i , $i = 1, 2$, são especificados sob a condição de que durante o período em controle a probabilidade condicional, p_0 , de um ponto cair na região central, dado que ele não caiu na região de ação é dada por:

$$\begin{aligned} p_0 &= \Pr[VMAX < LA_1 \mid n = n_1, VMAX < LC_1] = \\ &= \Pr[VMAX < LA_2 \mid n = n_2, VMAX < LC_2] \end{aligned} \quad (5.2)$$

³ Extratos desta seção foram aceitos para publicação em **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, artigo intitulado "A new chart for monitoring the covariance matrix of bivariate processes", dos autores Costa e Machado (2008a).

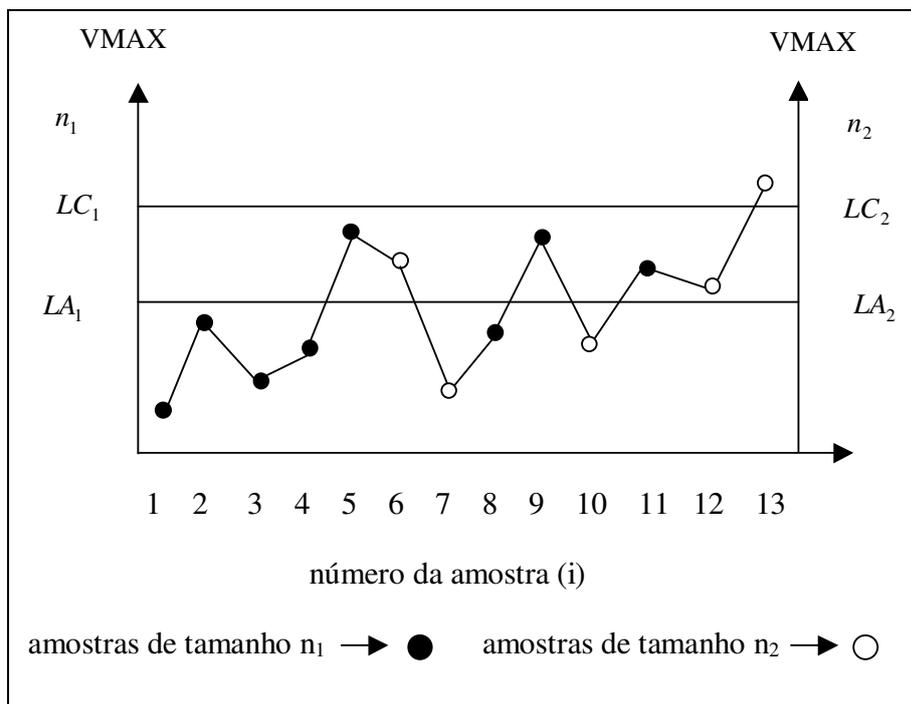


Figura 8 - Gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável

A primeira amostra retirada do processo logo no seu início, ou após a ocorrência de alarme falso, é escolhida para ser pequena com probabilidade p_0 ou grande com probabilidade $(1-p_0)$. Durante o período em controle, todas as amostras tem uma probabilidade p_0 de serem pequenas e uma probabilidade $1-p_0$ de serem grandes.

Com a amostra de tamanho variável, a eficiência do gráfico de controle em detectar uma alteração no processo, é medida também pelo *NMA*, número médio de amostras até o sinal.

Supõe-se que o processo permanece em controle com $\Sigma = \Sigma_0$ por um longo período. Após a ocorrência da causa especial a matriz de covariâncias se altera, isto é, $\Sigma = \Sigma_1$. Durante o período em controle o número médio de itens inspecionados por amostragem, \bar{n} , é dado por

$$\bar{n} = n_1 p_0 + n_2 (1 - p_0) \quad (5.3)$$

Quando o processo está fora de controle, o *NMA* é obtido utilizando cadeias de Markov (ver Costa (1994) para detalhes):

$$NMA = p_0 \left[\frac{1 - p_{22} + p_{12}}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right] + (1 - p_0) \left[\frac{1 - p_{11} + p_{21}}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right] \quad (5.4)$$

onde

$$p_{11} = \Pr[\text{VMAX} < LA_1 \mid n = n_1, \Sigma = \Sigma_1]$$

$$p_{12} = \Pr[LA_1 < \text{VMAX} < LC_1 \mid n = n_1, \Sigma = \Sigma_1]$$

$$p_{21} = \Pr[\text{VMAX} < LA_2 \mid n = n_2, \Sigma = \Sigma_1]$$

$$p_{22} = \Pr[LA_2 < \text{VMAX} < LC_2 \mid n = n_2, \Sigma = \Sigma_1]$$

5.2.4 Gráfico de EWMA baseado na estatística de VMAX ⁴

Esta seção é dedicada ao gráfico de EWMA baseado na estatística de VMAX (gráfico de VMAX-EWMA). O gráfico VMAX-EWMA se baseia na seguinte estatística:

$$Z_i = r\text{VMAX}_i + (1 - r)Z_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5.5)$$

onde $\text{VMAX}_i = \max\{S_{1_i}^2, S_{2_i}^2\}$, sendo $S_{1_i}^2$ e $S_{2_i}^2$ as variâncias amostrais de X_1 e X_2 e r , a constante de amortecimento ($0 < r \leq 1$).

Valores pequenos de r fazem com que os dados históricos (observações anteriores à última disponível) tenham peso grande no cálculo de Z_i , (veja a fórmula recursiva (5.5)) e, inversamente, valores grandes de r fazem com que a última observação tenha peso grande no cálculo de Z_i . Para $r=1$, o gráfico de VMAX-EWMA se reduz ao gráfico de VMAX e os dados históricos deixam de ter influência no cálculo de Z_i . O valor inicial Z_0 é geralmente igualado ao valor-alvo (ver Lucas e Saccucci (1990)). Um sinal é dado quando $Z_i > LC$, onde LC é o limite de controle do gráfico de VMAX-EWMA.

⁴ Extratos desta seção foram aceitos para publicação em *International Journal of Production Economics*, artigo intitulado "The double sampling and the EWMA charts based on the sample variances", dos autores Machado e Costa (2008a).

Assume-se que o *NMA* é obtido após o processo alcançar o regime permanente (*NMA steady-state* ou *NMA_{ss}*), ou seja, considera-se que a causa especial ocorre após um longo período em operação, alterando a matriz de covariâncias. O *NMA_{ss}* para o gráfico de VMAX-EWMA é obtido utilizando-se a cadeia de Markov descrita por Saccucci e Lucas (1990).

A região em controle no gráfico é dividida em $[t=2m+1]$ subintervalos de largura 2Δ . O estado absorvente da cadeia é alcançado sempre que a estatística Z_i tiver seu valor fora dos limites de controle. O j -ésimo estado transiente é alcançado sempre que a estatística Z_i tiver seu valor no intervalo:

$$S_j - \Delta < Z_i \leq S_j + \Delta \quad (5.6)$$

onde S_j representa o ponto médio do j -ésimo intervalo e $-m \leq j \leq m$. O número médio de amostras até o sinal (*NMA_{ss}*) é dado por:

$$NMA_{ss} = \mathbf{p}^T (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1} \quad (5.7)$$

onde \mathbf{p} é o vetor de probabilidades iniciais após o processo ter alcançado o regime estacionário (*steady state probabilities*), \mathbf{I} é a matriz identidade ($t \times t$), $\mathbf{1}$ é um vetor coluna unitário ($t \times 1$) e \mathbf{R} é a submatriz de probabilidades de transição, isto é:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} P_{-m,-m} & P_{-m,-m+1} & \cdot & \cdot & P_{-m,m} \\ P_{-m+1,-m} & P_{-m+1,-m+1} & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & P_{m-1,m-1} & P_{m-1,m} \\ P_{m,-m} & \cdot & \cdot & P_{m,m-1} & P_{m,m} \end{bmatrix}$$

onde:

$$P_{jk} = \Pr\{r^{-1}[(S_k - \Delta) - (1-r)S_j] < VMAX_i \leq r^{-1}[(S_k + \Delta) - (1-r)S_j]\} \quad (5.8)$$

O vetor de probabilidades iniciais \mathbf{p} é obtido resolvendo o sistema $\mathbf{p} = \mathbf{P}^T \mathbf{p}$ sujeito a $\mathbf{1}^T \mathbf{p} = 1$ (ver ÇINLAR, 1975), onde $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$. Durante o período em controle, o número médio de amostras até o sinal é dado por

$$NMA_0 = \mathbf{p}^{*T} (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1} \quad (5.9)$$

onde $\mathbf{p}^{*T} = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_{2m+1}^*)$, sendo $p_{i \neq m+1}^* = 0$ e $p_{m+1}^* = 1$. Neste estudo o intervalo $[0;LC]$ foi dividido em 101 intervalos iguais, isto é, $m=50$.

5.2.5 Gráfico de VMAX com regra especial de decisão ⁵

O gráfico de VMAX com regra especial de decisão é empregado no monitoramento da matriz de covariâncias de duas características de qualidade X_1 e X_2 , descritas por uma distribuição normal bivariada.

Quando o gráfico de controle com regra especial de decisão está em uso, a decisão sobre o estado do processo é baseada no número de amostras conformes entre ocorrências de amostras não-conformes, NA . Uma amostra será não-conforme quando seu valor amostral gerar um ponto fora dos limites de controle. No início do monitoramento, o primeiro NA corresponde ao número de amostras retiradas do processo antes da ocorrência da primeira amostra não-conforme. Se o NA for menor ou igual a L , onde L é um número inteiro positivo especificado, o processo é considerado fora de controle e um sinal é gerado.

A Figura 9 mostra um gráfico de VMAX com regra especial de decisão, onde uma amostra é classificada como não conforme sempre que $VMAX_i > LC$ e o gráfico de VMAX dá um sinal quando $NA \leq L$. O primeiro ponto amostral na região de ação é o da nona amostra, portanto trata-se de amostra não-conforme. A próxima amostra não-conforme é a 13^a. O NA neste caso é igual a quatro, ou seja, há três amostras conformes entre a nona e a 13^a amostras. Como o NA é menor do que L (=cinco), o gráfico de VMAX sinaliza uma alteração no processo.

⁵ Extratos desta seção foram aceitos para publicação em **Quality and Reliability Engineering International**, artigo intitulado “**The synthetic control chart based on two sample variances for monitoring the covariance matrix**”, dos autores Machado; Costa e Rahim (2008).

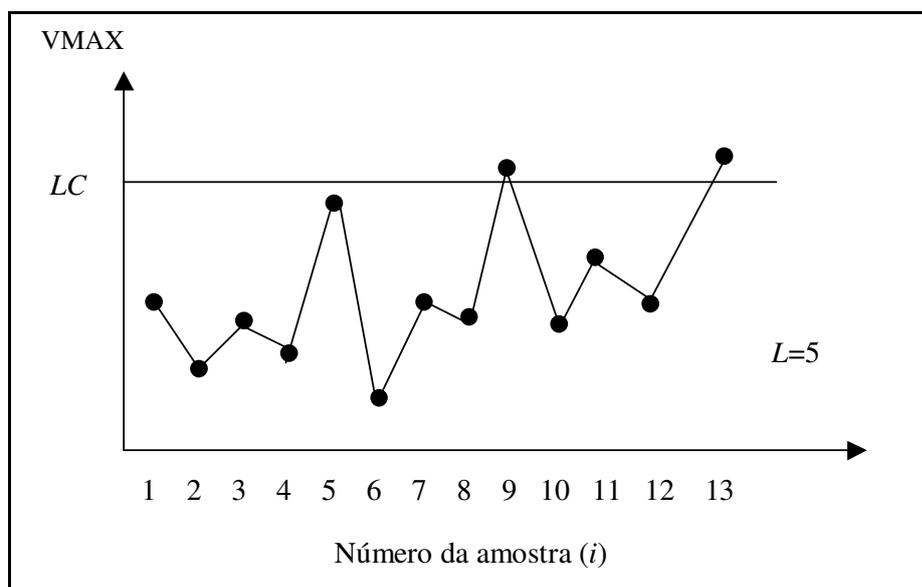


Figura 9 - Gráfico de VMAX com regra especial de decisão

Quando o intervalo de amostragem é fixo, o *NMA* mede o tempo necessário para se detectar uma causa especial que esteja presente desde o início do monitoramento ou desde a ocorrência da causa especial. No primeiro caso o *NMA* é obtido com o processo em regime transiente (*NMA zero-state* ou NMA_{zs}), enquanto que no segundo caso o *NMA* é obtido após o processo alcançar o regime permanente (*NMA steady-state* ou NMA_{ss}). Entretanto, é mais provável que a causa especial ocorra após um longo e indeterminado período em operação, alterando a matriz de covariâncias. Assim, a causa especial ocorre entre duas amostras não-conformes.

De acordo com Wu e Spedding (2000) tem-se:

$$NMA_{zs} = \frac{1}{Q} \times \frac{1}{1 - (1-Q)^L}. \quad (5.10)$$

onde $Q = 1 - \Pr[(S_1^2 < k) \cap (S_2^2 < k)]$. Durante o período em controle, $Q = \alpha$ e durante o período fora de controle $Q = 1 - \beta$.

O NMA_{ss} mede o tempo que o gráfico de controle com regra especial de decisão leva para sinalizar uma alteração no processo. O NMA_{ss} para o gráfico de VMAX com regra especial de decisão foi obtido utilizando-se o modelo de cadeia de Markov descrito por Davis e Woodall (2002). A probabilidade Q é obtida através da expressão (A6) do Apêndice A. Utilizou-se a sub-rotina DCSNDF da biblioteca IMSL *FORTRAN* (1995)

para o cálculo da função de distribuição de qui-quadrado não-central. O procedimento utilizado para obter o NMA_{ss} para o gráfico de VMAX com regra especial de decisão é descrito abaixo:

1) Especificar ρ , NMA_0 , n , L , a_1 e a_2 ;

2) Com L e NMA_0 encontrar o valor de Q_0 que satisfaça

$$\mathbf{s}'_0 \times \mathbf{M} \times \mathbf{1} = NMA_0 \quad (5.11)$$

onde \mathbf{M} é uma matriz de zeros exceto para $m_{11} = Q_0$; $m_{12} = -Q_0$; $m_{i, i+1} = Q_0 - 1$, $i=1, 2, \dots, L$; e $m_{L+1,1} = Q_0 - 1$; $\mathbf{1}$ é um $(L+1) \times 1$ vetor unitário; e \mathbf{s}_0 é um $(L+1) \times 1$ vetor com $s_1 = [1 + (L-1)Q_0]^{-1}$ e $s_j = Q_0 s_1$, $j=2, \dots, L+1$.

3) Com $a_1 = a_2 = 1$, ρ , n e equação (A6), ver Apêndice A, encontrar o valor de k que satisfaça $Q = Q_0$;

4) Com ρ , n e k e os valores de a_1 e a_2 especificados, calcular Q pela equação (A6);

5) Com L e Q recalculamos \mathbf{M} e então o NMA_{ss}

$$NMA_{ss} = \mathbf{s}'_0 \times \mathbf{M} \times \mathbf{1}$$

onde \mathbf{M} é agora a matriz de zeros exceto para $m_{11} = Q$; $m_{12} = -Q$; $m_{i, i+1} = Q - 1$, $i=1, 2, \dots, L$; e $m_{L+1,1} = Q - 1$; $\mathbf{1}$ é um $(L+1) \times 1$ vetor de uns; e \mathbf{s}_0 permanece um vetor $(L+1) \times 1$ com $s_1 = [1 + (L-1)Q]^{-1}$ e $s_j = Q s_1$, $j=2, \dots, L+1$.

5.3 ESQUEMAS CONCORRENTES – CASO BIVARIADO

5.3.1 Gráfico da variância amostral generalizada $|\mathbf{S}|$

Esta seção é dedicada à descrição do gráfico da variância amostral generalizada $|\mathbf{S}|$. Segundo Alt (1985), quando $p=2$ e o processo está sob controle, $\frac{2(n-1)|\mathbf{S}|^{1/2}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}$ tem distribuição de qui-quadrado com $2n-4$ graus de liberdade. A matriz de covariâncias \mathbf{S} é dada por $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$, sendo s_{11} e s_{22} as variâncias amostrais de X_1 e X_2 respectivamente e $s_{12} = s_{21}$ as covariâncias amostrais. O limite de controle para o gráfico de $|\mathbf{S}|$ é dado por:

$$LC = \frac{(\chi_{2n-4, \alpha}^2)^2 |\boldsymbol{\Sigma}_0|}{4(n-1)^2} \quad (5.12)$$

A magnitude da perturbação é dada por γ^2 , onde γ^2 é a razão entre $|\boldsymbol{\Sigma}_1|$ e $|\boldsymbol{\Sigma}_0|$. Sendo assim, o gráfico de $|\mathbf{S}|$ terá o mesmo poder de detecção para qualquer perturbação na matriz de covariâncias que resulte no mesmo valor de γ^2 , independente da causa especial afetar apenas a variável X_1 ou apenas a variável X_2 (caso I), ou ambas (caso II). De acordo com a expressão (5.13) do *NMA* para o gráfico de $|\mathbf{S}|$, o desempenho deste gráfico independe da correlação (APARISI et al., 2001):

$$NMA = \frac{1}{\Pr(\chi_{2n-4}^2 \geq (\chi_{2n-4, \alpha}^2)/\gamma)} \quad (5.13)$$

5.3.2 Gráfico de $|\mathbf{S}|$ com amostragem dupla proposto por Grigoryan e He (2005)

Grigoryan e He (2005) propuseram um gráfico de controle multivariado com amostragem dupla baseado na estatística $|\mathbf{S}|$. Nesta tese foram utilizados os resultados

obtidos por esses autores apenas para o caso bivariado. Os limites de controle do primeiro estágio são dados por V_1 e V_2 e, no segundo estágio, por V_3 . As constantes b_1, b_2, b_{11}, b_{22} dependem de n_1, n_2 e de p e são dadas por:

$$b_1 = \left[1/(n_1 - 1)^p \prod_{i=1}^p (n_1 - i)\right]$$

$$b_2 = \left[1/(n_1 - 1)^{2p} \prod_{i=1}^p (n - i) \left[\prod_{j=1}^p (n_1 - j + 2) - \prod_{j=1}^p (n_1 - j) \right]\right]$$

$$b_{11} = \left[1/(n_1 + n_2 - 1)^p \prod_{i=1}^p (n_1 + n_2 - i)\right]$$

$$b_{22} = \left[1/(n_1 + n_2 - 1)^{2p} \prod_{i=1}^p (n - i) \left[\prod_{j=1}^p (n_1 + n_2 - j + 2) - \prod_{j=1}^p (n_1 + n_2 - j) \right]\right]$$

O esquema de decisão baseado na amostragem dupla é descrito por Grigoryan e He (2005) em 5 passos:

Passo 1: Retire a primeira sub-amostra de tamanho n_1 e calcule a estatística $Y = (|\mathbf{S}_1| - b_1 |\boldsymbol{\Sigma}_0|) / b_2^{1/2} |\boldsymbol{\Sigma}_0|$, sendo \mathbf{S}_1 a matriz de covariâncias amostral.

Passo 2: Se Y estiver no intervalo $[-V_1, V_1]$ então o gráfico de controle indica que o processo está em controle.

Passo 3: Se Y estiver no intervalo $[V_2, \infty]$ ou $[-\infty, -V_2]$, então o gráfico de controle indica que o processo está fora de controle.

Passo 4: Se Y estiver no intervalo $[-V_2, -V_1]$ ou $[V_1, V_2]$, então retire a sub-amostra de tamanho n_2 e calcule a seguinte estatística:

$Y_1 = (|\mathbf{S}_{12}| - b_{11} |\boldsymbol{\Sigma}_0|) / b_{22}^{1/2} |\boldsymbol{\Sigma}_0|$, sendo \mathbf{S}_{12} a matriz de covariâncias amostral da amostra $n = n_1 + n_2$.

Passo 5: Se Y_1 estiver no intervalo $[-V_3, V_3]$ então o gráfico de controle indica que o processo está em controle; caso contrário, o gráfico de controle sinaliza um desajuste do processo.

Para um $\alpha = 0,5\%$ e uma determinada perturbação na variabilidade do processo, medida por γ^2 , Grigoryan e He (2005) determinaram os valores ótimos de n_1 e n_2 que minimizam o *NMA*. Os limites de controle V_1 , V_2 e V_3 foram obtidos por simulação, para um determinado risco α . Os valores de α_1 e α_2 não foram apresentados.

5.3.3 Gráfico de $|\mathbf{S}|$ com amostra de tamanho variável proposto por Aparisi et al. (2001)

Aparisi et al. (2001) estudaram o gráfico de $|\mathbf{S}|$ com amostra de tamanho variável para o monitoramento de processos bivariados.

Os valores de $|\mathbf{S}|$ são plotados no gráfico de controle, o qual possui limites de advertência LA_i e limites de controle LC_i . Os limites do gráfico, por sua vez, dependem do tamanho da amostra n_i , $i = 1, 2$, onde $n_2 > n_1$, conforme ilustrado na Figura 10.

Quando o gráfico de $|\mathbf{S}|$ com amostra de tamanho variável está em uso, n_i , o tamanho da i -ésima amostra dependem do valor de $|\mathbf{S}|_{i-1}$:

$$n_i = \begin{cases} n_1 & \text{se } |\mathbf{S}|_{i-1} < LA_i \\ n_2 & \text{se } LA_i < |\mathbf{S}|_{i-1} < LC_i \end{cases}$$

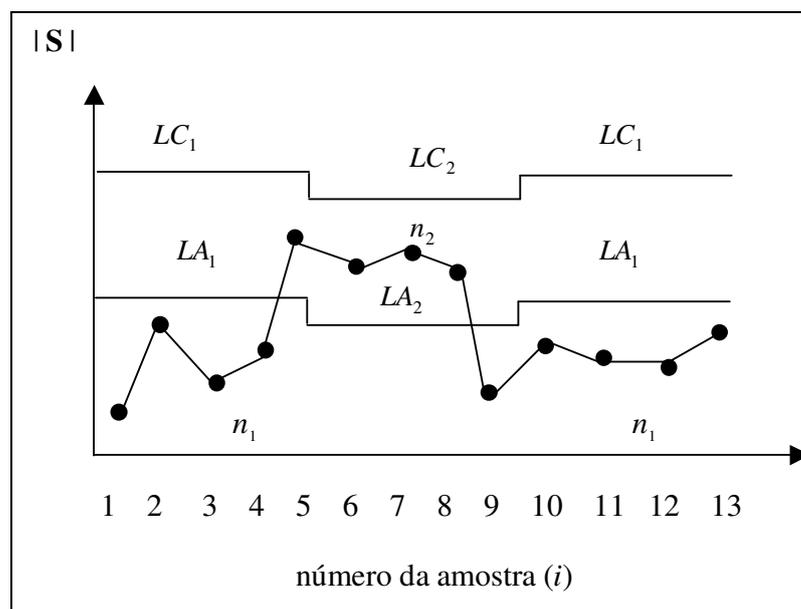


Figura 10 - Gráfico de $|S|$ com amostra de tamanho variável

Por meio de um modelo de cadeia de Markov é possível obter medidas de desempenho do gráfico de $|S|$ com amostra de tamanho variável. A cada instante de amostragem um dos seis estados da cadeia é alcançado de acordo com a posição de $|S|_{i-1}$:

Estado 1: $|S|_{i-1} \in (0, LA_1)$.

Estado 2: $|S|_{i-1} \in (LA_1, LC_1)$.

Estado 3: $|S|_{i-1} \in (LC_1, \infty)$, isto é, $|S|_{i-1} > LC_1$.

Estado 4: $|S|_{i-1} \in (0, LA_2)$.

Estado 5: $|S|_{i-1} \in (LA_2, LC_2)$.

Estado 6: $|S|_{i-1} \in (LC_2, \infty)$, isto é, $|S|_{i-1} > LC_2$.

Os estados 1, 2, 4 e 5 são transitórios. Os estados 3 e 6 são estados absorventes.

A matriz de probabilidade de transição é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,3} & P_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{2,4} & P_{2,5} & P_{2,6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ P_{4,1} & P_{4,2} & P_{4,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{5,4} & P_{5,5} & P_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $P_{i,j}$ é a probabilidade de transição do estado i para o estado j . Por exemplo, $P_{1,1}$ é a probabilidade de transição do estado 1 para o estado 1, isto é, com uma amostra de tamanho n_1 , o valor de $|\mathbf{S}| \in (0, LA_1)$.

A velocidade com que o gráfico de $|\mathbf{S}|$ com amostra de tamanho variável detecta uma alteração no processo é dada por:

$$NMA = D'(I - P^*)^{-1} \mathbf{1} \quad (5.14)$$

onde $D' = (d_1, d_2, d_4, d_5)$ é o vetor de probabilidade iniciais, sendo $d_1 + d_2 = 1$ e $d_4 = d_5 = 0$. P^* é a matriz 4x4 de probabilidades de transição onde os elementos associados com o estado absorvente foram eliminados. I é a matriz identidade de ordem 4 e $\mathbf{1}$ é o vetor unitário, isto é, $\mathbf{1}' = (1, 1, 1, 1)$.

Estando em uso o esquema de amostragens com amostra de tamanho variável tem-se que o número médio de itens inspecionados por amostragem é dado por:

$$\Pr(n_1) \times n_1 + \Pr(n_2) \times n_2 = \bar{n}. \quad (5.15)$$

Os valores de $\Pr(n_i)$ são calculados a partir do diagrama de probabilidades do gráfico de $|\mathbf{S}|$ com amostra de tamanho variável, ver Figura 11.

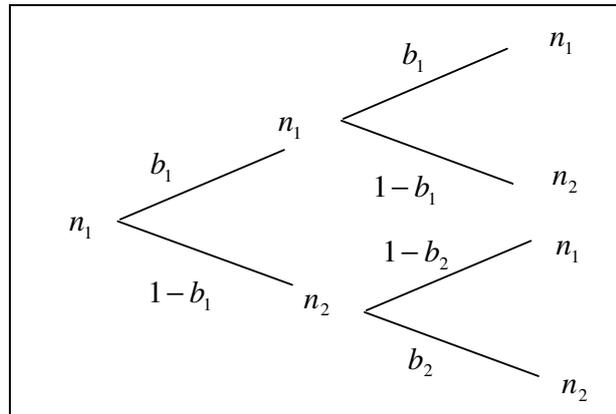


Figura 11 – Diagrama de probabilidades

Tem-se que $b_1 = \Pr(\mathbf{S} \leq LA_1 / n_1)$ e $b_2 = \Pr(LA_2 \leq \mathbf{S} \leq LC_2 / n_2)$. Para calcular $\Pr(n_1)$ e $\Pr(n_2)$ uma cadeia de Markov foi utilizada baseada no diagrama da Figura 11:

$$\{\Pr(n_1), \Pr(n_2)\} = \{\Pr(n_1), \Pr(n_2)\} \times \begin{pmatrix} b_1 & 1-b_1 \\ 1-b_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Da equação (5.16) e da condição $\Pr(n_1) + \Pr(n_2) = 1$, seguem que:

$$\Pr(n_1) = \frac{1-b_2}{2-b_1-b_2} \text{ e } \Pr(n_2) = \frac{1-b_1}{2-b_1-b_2}.$$

Assim, a equação (5.15) pode ser reescrita:

$$\bar{n} = \frac{1-b_2}{2-b_1-b_2} \times n_1 + \frac{1-b_1}{2-b_1-b_2} \times n_2$$

$$\bar{n} = \frac{[1 - \Pr(LA_2 \leq \mathbf{S} \leq LC_2 / n_2)] \times n_1 + [1 - \Pr(\mathbf{S} \leq LA_1 / n_1)] \times n_2}{2 - \Pr(\mathbf{S} \leq LA_1 / n_1) - \Pr(LA_2 \leq \mathbf{S} \leq LC_2 / n_2)} \quad (5.17)$$

Da equação (5.14) tem-se que:

$$\begin{aligned}
NMA(\gamma^2, n_1, n_2, LA_1, LA_2) &= (Pr(|\mathbf{S}| < LA_1), 1 - Pr(|\mathbf{S}| < LA_1), 0, 0) \\
&\times \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - R \right)^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.18}
\end{aligned}$$

$$\text{onde } R = \begin{pmatrix} Pr(|\mathbf{S}| < LA_1) & Pr(LA_1 < |\mathbf{S}| < LC_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pr(|\mathbf{S}| < LA_2) & Pr(LA_2 < |\mathbf{S}| < LC_2) \\ Pr(|\mathbf{S}| < LA_1) & Pr(LA_1 < |\mathbf{S}| < LC_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pr(|\mathbf{S}| < LA_2) & Pr(LA_2 < |\mathbf{S}| < LC_2) \end{pmatrix}$$

De 5.17 segue,

$$\begin{aligned}
Pr(|\mathbf{S}| \leq x / \gamma^2, n) &= F_{\chi^2_{2n-4}} \left(\sqrt{\frac{x}{\gamma^2}} \cdot 2 \cdot (n-1); \gamma^2, n \right) \\
&= \frac{1}{2^{2-n} \cdot \Gamma(n-2)} \int_0^{\sqrt{x/\gamma^2 \cdot 2 \cdot (n-1)}} y^{n-3} \cdot e^{-y/2} \cdot dy \tag{5.19}
\end{aligned}$$

sendo $F_{\chi^2_{2n-4}}$ a função de distribuição de uma variável qui-quadrado com $2n - 4$ graus de liberdade.

Aparisi et al. (2001) encontraram os valores de n_1 e n_2 que minimizam os *NMA*s para valores de \bar{n} e γ^2 .

5.3.4 Gráfico V-EWMA

O gráfico de V-EWMA foi proposto por Yeh et al. (2003). Esses autores consideram $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ um vetor aleatório p -variado, onde p é o número de características de qualidade correlacionadas. Quando o processo está em controle a distribuição de \mathbf{X} é $N_p(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$, isto é, uma distribuição normal p -variada. O vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_0$ e a matriz de covariâncias podem ser estimados por um conjunto de k amostras de tamanho n , retiradas

do processo em controle. Com base nas k amostras eles calculam $\bar{S} = \sum_{i=1}^k S_{ij} / k$, onde

$S_{ij} = \left[\sum_{k=1}^n (X_{ik} - \bar{X}_i)(X_{jk} - \bar{X}_j)' / n \right]$ é a matriz de covariâncias amostral da i -ésima amostra, $i = j = 1, 2, \dots, k$.

Para monitorar a qualidade do processo, a cada ponto amostral t calcula-se a probabilidade:

$$v_t = P \left(\prod_{i=1}^p F_{n-i, N-k+1-i} \leq \left(\prod_{i=1}^p \frac{N-k+1-i}{n-i} \right) \times \frac{|n\mathbf{S}_t|}{|N\bar{\mathbf{S}}|} \right), \quad (5.20)$$

onde $|n\mathbf{S}_t|$ (similarmente $|N\bar{\mathbf{S}}|$) é o determinante da matriz $n\mathbf{S}_t$, $N = n \times k$ e $F_{n-i, N-k+1-i}$ tem uma distribuição F com $n-i$ e $N-k+1-i$ graus de liberdade.

O gráfico de V-EWMA se baseia na seguinte estatística:

$$S_v(t) = r \times (v_t - 0,5) + (1-r) \times S_v(t-1), \quad (5.21)$$

onde $0 < r < 1$ e $S_v(0) = 0$.

Para $t \geq 1$ e um dado valor de r , os dois limites de controle e a linha central do gráfico de V-EWMA são dados por:

$$LSC = L \times \sqrt{\frac{1}{12} \left(\frac{r}{2-r} \right) (1 - (1-r)^{2t})}$$

$$LC = 0$$

$$LIC = -L \times \sqrt{\frac{1}{12} \left(\frac{r}{2-r} \right) (1 - (1-r)^{2t})}$$

onde L é escolhido em função do valor do risco α desejado.

Para o caso bivariado, os valores de L são obtidos por simulação de Monte Carlo, assumindo que o processo em controle tem distribuição normal bivariada e parâmetros conhecidos, sendo $\boldsymbol{\mu}_0 = 0$ e $\boldsymbol{\Sigma}_0 = I$, onde I é uma matriz identidade de ordem 2.

5.4 GRÁFICOS DE VMAX – CASO MULTIVARIADO ⁶

Analogamente ao caso bivariado, a estatística de monitoramento corresponde ao maior valor das variâncias amostrais padronizadas $S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}^2}{n}$ $i = 1, 2, \dots, p$, onde $x_{ij} = (X_{ij} - \mu_i)/\sigma_i$ com X_1, X_2, \dots, X_p sendo p características de qualidade que seguem uma distribuição normal, ou seja, $VMAX = \max\{S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2\}$.

Supõe-se que com o processo em controle a matriz de covariâncias é dada por

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \sigma_{ij}, i = j = 1, 2, \dots, p \text{ as variâncias de } X_1, X_2, \dots, X_p$$

e σ_{ij} , com $i \neq j = 1, 2, \dots, p$, as covariâncias entre X_i e X_j .

Admite-se p possíveis maneiras de uma causa especial alterar a matriz de covariâncias, resultando na matriz

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{12} & \cdots & a_1 \cdot a_p \cdot \sigma_{1p} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} & \cdots & a_2 \cdot a_p \cdot \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 \cdot a_p \cdot \sigma_{p1} & a_2 \cdot a_p \cdot \sigma_{p2} & \cdots & a_p \cdot a_p \cdot \sigma_{pp} \end{bmatrix}.$$

A primeira possibilidade (caso I) supõe que a causa especial afeta somente a variância da variável aleatória X_i , isto é, $a_i = \gamma$ e $a_{j \neq i} = 1$, $i, j = 1, 2, \dots, p$. A segunda possibilidade (caso II) supõe que a causa especial altera tanto a variância de X_i e X_j , isto é, $a_i = a_{j \neq i} = \sqrt{\gamma}$ e $a_{k \neq i, j} = 1$, $i, j, k = 1, 2, \dots, p$. Analogamente, definem-se também os casos III, IV, ..., $p-1$. O caso p considera que a causa especial altera as variâncias de

⁶ Extratos desta seção foram aceitos para publicação em **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, artigo intitulado "A new chart based on the sample variances for monitoring the covariance matrix of multivariate processes", dos autores Costa e Machado (2009).

X_1, X_2, \dots, X_p , isto é, $a_i = \sqrt[p]{\gamma}$, $i = 1, 2, \dots, p$, sendo $\gamma > 1$ a magnitude da perturbação.

Em todos os casos as correlações $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, p$, com $i \neq j$, não são afetadas pela causa especial.

Considera-se também outro tipo de causa especial que altera a matriz de covariâncias inicial para $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & a_p \cdot a_p \cdot \sigma_{pp} \end{bmatrix}$. Neste caso, os

coeficientes de correlação são alterados de ρ_{ij} para $\rho'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{a_i a_j \sigma_i \sigma_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, p$, com $i \neq j$.

Quando o gráfico de VMAX está em uso, amostras de tamanho n são retiradas do processo em intervalos de tempo regulares. As p características de qualidade X_1, X_2, \dots, X_p das n unidades da amostra são medidas e a estatística VMAX é calculada.

Se a estatística VMAX for maior do que o limite de controle LC , o gráfico sinaliza um desajuste do processo. Após a ocorrência do sinal, o usuário pode imediatamente examinar as variâncias amostrais de X_1, X_2, \dots, X_p para descobrir quais variáveis são responsáveis pelo desajuste do processo, ou seja, aquelas cujas variâncias amostrais são maiores que LC . O limite de controle LC do gráfico de VMAX é obtido utilizando a expressão (C4) do Apêndice C para $p=3$. A expressão (C4) pode ser facilmente estendida para os casos em que $p > 3$. A expressão do NMA para o gráfico de VMAX também está no Apêndice C.

5.5 GRÁFICO DA VARIÂNCIA AMOSTRAL GENERALIZADA ISI - CASO MULTIVARIADO

Quando se tem p variáveis para controlar, a distribuição de $|\mathbf{S}|$ é dada por (Anderson (2003)):

$$\frac{(n-1)^p \cdot |\mathbf{S}|}{|\boldsymbol{\Sigma}_0|} \equiv \prod_{i=1}^p \chi_{n-1}^2.$$

Aparisi et al. (1999) obtiveram a expressão para calcular a função densidade de probabilidade de $J_{n,p} \equiv \frac{(n-1)^p \cdot |\mathbf{S}|}{|\boldsymbol{\Sigma}_0|}$. Baseado em $J_{n,p}$, o limite superior de controle para o gráfico de $|\mathbf{S}|$ é:

$$LSC = \frac{J_{n,p}^\alpha \cdot |\boldsymbol{\Sigma}_0|}{(n-1)^p} \quad (5.22)$$

e o poder do gráfico é dado por:

$$1 - \beta = \Pr\left(J_{n,p} > \frac{J_{n,p}^\alpha}{\gamma^2}\right). \quad (5.23)$$

No próximo capítulo será comparado o desempenho dos gráficos propostos com o de esquemas concorrentes.

6 ANÁLISE DE DESEMPENHO DOS GRÁFICOS PROPOSTOS PARA O MONITORAMENTO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS E DOS ESQUEMAS CONCORRENTES

6.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo compara-se o desempenho dos gráficos de VMAX propostos com o desempenho dos esquemas concorrentes. Assim, o gráfico de VMAX com ou sem regra especial de decisão foi comparado com o gráfico da variância amostral generalizada (gráfico de $|S|$); o gráfico de VMAX com amostragem dupla foi comparado com o gráfico de $|S|$ com amostragem dupla, o gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável foi comparado com o gráfico de $|S|$ com amostra de tamanho variável e o gráfico de EWMA baseado na estatística de VMAX é comparado com o gráfico de V-EWMA.

Para poder utilizar os resultados existentes na literatura quando da comparação dos esquemas de monitoramento, adotou-se NMA_0 de 200,0, ou seja, $\alpha=0,005$. Uma alteração no processo é medida por γ^2 . Nas tabelas deste capítulo adotou-se para γ^2 os valores 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 2,0; 3,0 e 5,0. Especificamente, nas Tabelas 15 e 33, uma alteração no processo é medida por a_i^2 , $i=1,2,3$, com $a_i^2 \in \{1,2;1,5;2,0\}$ e na Tabela 24, por a_i , $i=1,2$, com $a_i \in \{1,1;1,25;1,5\}$.

Nas Tabelas de 14 a 30 estão os valores de NMA para o caso bivariado, ou seja, $p=2$. Nas Tabelas de 14 a 16 estão os valores de NMA para o gráfico de VMAX. Nessas tabelas $\rho = 0; 0,3; 0,5; 0,7$. Nas Tabelas de 17 a 21 estão os valores de NMA para o gráfico de VMAX com amostragem dupla para $\rho=0,5$, $\bar{n} = 4$ e 5 e diversos valores de n_1 e n_2 . Na Tabela 17, $\alpha_1=0, 0,001$ e $0,0025$. Observa-se desta tabela que o gráfico de VMAX com amostragem dupla tem melhor desempenho quando $\alpha_1=0$. Desta forma, nas Tabelas de 18 a 21 adota-se $\alpha_1=0$.

Os valores de NMA para o gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável estão nas Tabelas de 22 a 24. Para este gráfico adotou-se $\rho=0,5$, $\bar{n} = 4$ e 5 e diversos

valores de n_1 e n_2 . Nas Tabelas de 25 a 27 estão os valores de *NMA* para o gráfico de EWMA baseado na estatística VMAX, em que $\rho=0,5$, $n = 4$ e 5 e $r \in \{0,2; 0,5; 0,7\}$.

Os *NMA*s para o gráfico de VMAX com regra especial de decisão estão nas Tabelas 28, 29 e 30, em que $\rho=0,5$, $n = 4$ e 5 , $L = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20$ e 50 .

Nas Tabelas 31, 32 e 33 estão os *NMA*s para o gráfico de VMAX para $p = 3$ e $(\rho_{12}; \rho_{13}; \rho_{23}) = (0,5; 0,5; 0,5)$, $(0,7; 0,7; 0,7)$, $(0,7; 0,5; 0,2)$. Nas Tabelas 34 e 35, $p=4$ e $(\rho_{12}; \rho_{13}; \rho_{14}; \rho_{23}; \rho_{24}; \rho_{34}) = (0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5)$, $(0,7; 0,7; 0,5; 0,5; 0,2; 0,2)$.

6.2 DESEMPENHO DOS GRÁFICOS PROPOSTOS – CASO BIVARIADO

6.2.1 Gráfico de VMAX

De acordo com a Tabela 14 o coeficiente de correlação têm uma certa influência nas propriedades do gráfico de VMAX. Para o caso I, o gráfico de VMAX é menos sensível à influência da correlação. Para o caso II, o *NMA* sempre aumenta a medida que a correlação aumenta. Da Tabela 15 observa-se que o gráfico de VMAX é sempre mais eficiente que o gráfico da variância amostral generalizada $|\mathbf{S}|$. Essa tabela foi construída para $\rho=0,5$. Para o caso I, em que a causa especial afeta apenas uma das variáveis, o gráfico de VMAX tem um desempenho bem superior ao do gráfico de controle proposto por Alt (1985). Da Tabela 16 observa-se que os valores de *NMA* são praticamente iguais considerando Σ_1 ou Σ_2 .

Tabela 14 - Valores de *NMA* para o gráfico de VMAX ($p=2, n = 5$)

		caso I				caso II			
		ρ				ρ			
		0,0	0,3	0,5	0,7	0,0	0,3	0,5	0,7
γ^2	<i>LC</i>	3,677	3,675	3,668	3,646	3,677	3,675	3,668	3,646
1,0		200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1		132,1	132,3	132,5	132,8	139,1	139,3	139,7	140,5
1,2		86,5	86,6	86,8	86,8	101,6	101,8	102,4	103,6
1,3		58,1	58,2	58,3	58,1	77,1	77,4	78,0	79,3
1,4		40,6	40,7	40,7	40,4	60,5	60,8	61,4	62,6
1,5		29,5	29,6	29,6	29,3	48,7	49,0	49,6	50,8
2,0		9,62	9,53	9,62	9,50	21,6	21,9	22,3	23,2
3,0		3,38	3,38	3,38	3,34	8,64	8,80	9,09	9,59
5,0		1,67	1,67	1,67	1,66	3,73	3,82	3,98	4,25

Tabela 15 - Valores de *NMA* para os gráficos de VMAX e de $|S|$ ($p=2, \rho=0,5$)

		<i>n</i>					
		4			5		
		$ S $	VMAX		$ S $	VMAX	
			caso I	caso II		caso I	caso II
γ^2	<i>LC</i>	6,134	4,094	4,094	5,375	3,668	3,668
1,0		200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1		146,8	136,6	143,0	141,4	132,5	139,7
1,2		112,5	92,4	107,0	104,6	86,8	102,4
1,3		89,1	63,9	82,9	80,5	58,3	78,0
1,4		73,3	45,7	66,1	64,1	40,7	61,4
1,5		60,4	33,9	54,1	51,9	29,6	49,6
2,0		30,2	11,6	25,4	24,1	9,62	22,3
3,0		13,6	4,09	10,7	10,2	3,38	9,09
5,0		6,37	1,95	4,77	4,58	1,67	3,98

Tabela 16 - Valores de *NMA* para o gráfico de VMAX
($p=2; \rho=0,5; n=5; LC = 3,668$)

a_1^2	a_2^2	Σ_1	Σ_2	a_1^2	a_2^2	Σ_1	Σ_2
1,0	1,0	200,0	200,0	2,0	2,0	5,50	5,22
1,2	1,0	86,8	86,4	3,0	1,0	3,38	3,37
1,2	1,2	56,2	55,5	3,0	3,0	2,13	2,00
1,5	1,0	29,6	29,4	5,0	1,0	1,67	1,67
1,5	1,5	16,8	16,3	5,0	5,0	1,24	1,19
2,0	1,0	9,62	9,58				

6.2.2 Desempenho do gráfico de VMAX com amostragem dupla

As tabelas desta seção foram obtidas fixando $LC_1 = \infty$, ou seja, $\alpha_1 = 0$. Neste caso, o gráfico de controle dá um sinal somente quando $VMAX_s > LC_2$. Os pontos amostrais $VMAX_p$, ao caírem na região de advertência, que para o caso em que $LC_1 = \infty$ corresponde a região acima de LA , disparam a inspeção de toda a amostra, e, nestes casos, a estatística $VMAX_s$ é calculada e comparada com LC_2 . Em geral, o desempenho do gráfico de VMAX tende a piorar sempre que se adota valores de $\alpha_1 > 0$, ver Tabela 17.

Tabela 17 - Valores de NMA para o gráfico de VMAX com amostragem dupla
($p=2$, $\bar{n} = 4$, $n_1=2$, $n_2=8$, $\rho=0,5$)

	$\alpha_1=0$		$\alpha_1=0,001$		$\alpha_1=0,0025$	
	caso I	caso II	caso I	caso II	caso I	caso II
LA	1,928	1,928	1,923	1,923	1,917	1,917
LC_1	∞	∞	7,593	7,593	6,672	6,672
γ^2 LC_2	2,571	2,571	2,590	2,590	2,636	2,636
1,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1	121,6	130,2	125,5	133,4	132,8	139,8
1,2	73,3	90,1	76,5	93,4	83,2	100,4
1,3	46,1	65,5	48,1	68,2	52,7	74,3
1,4	30,6	49,5	31,8	51,7	34,8	56,7
1,5	21,5	38,7	22,3	40,4	24,2	44,4
2,0	6,68	15,7	6,88	16,3	7,17	17,7
3,0	2,58	6,01	2,61	6,16	2,65	6,54
5,0	1,53	2,70	1,53	2,74	1,54	2,83

A Tabela 18 compara os gráficos de VMAX e de $|S|$ com amostragem dupla. Os valores da Tabela 18 para o gráfico de $|S|$ com amostragem dupla foram obtidos por Grigoryan e He (2005) por meio de simulações, ver seção 5.3.2. De acordo com a Tabela 18, observa-se que quando a amostragem dupla está em uso o gráfico proposto tem, em geral, um desempenho superior ao do gráfico de $|S|$.

Tabela 18 - Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $|S|$ com amostragem dupla
($p=2, \bar{n} = 4, \rho=0,5$)

γ^2	n_1	n_2	LA	LC_2	VMAX		S
					caso I	caso II	
1,1	3	23	3,175	1,701	108,6	118,9	102,0
1,2	3	23	3,175	1,701	59,7	76,9	72,6
1,3	3	23	3,175	1,701	35,6	53,2	49,5
1,5	3	24	3,207	1,678	16,2	29,3	29,4
2,0	3	19	3,031	1,818	5,62	11,9	14,0
3,0	3	19	3,031	1,818	2,59	4,85	6,45
5,0	3	11	2,613	2,193	1,50	2,47	3,59

As Tabelas de 19 a 21 contêm os valores do NMA para o gráfico de VMAX com amostragem dupla. Nestas tabelas n_1 é fixo enquanto n_2 assume diferentes valores. Quando n_2 aumenta, o gráfico de VMAX se torna mais ágil na detecção de pequenas alterações; porém, se torna lento na detecção de grandes alterações. Por exemplo, da Tabela 19 observa-se que para $\gamma^2 = 1,3$ o NMA diminui de 44,7 para 38,0 quando n_2 aumenta de 8 para 16 (caso I). Por outro lado, para $\gamma^2 = 5,0$, o NMA aumenta de 1,47 para 1,58 quando n_2 passa de 8 para 16 (caso I).

O efeito da escolha de n_1 na velocidade com que o gráfico de VMAX sinaliza o desajuste pode ser observado comparando os NMA s das Tabelas 20 e 21. Quando n_2 é pequeno e n_1 aumenta de 3 para 4 o gráfico de VMAX se mostra mais ágil. Por exemplo, observa-se que para $\gamma^2 = 1,2$ e $n_2=10$, o NMA diminui de 65,6 para 65,0 quando n_1 passa de 3 para 4 (caso I). Para a mesma perturbação, porém para n_2 grande ($n_2=20$), o NMA aumenta de 55,6 para 57,4 quando n_1 passa de 3 para 4. As Tabelas de 19 a 21 apresentam também os NMA s para o gráfico de $|S|$ com amostragem dupla. Quando a amostragem dupla está em uso e apenas uma das variáveis é afetada pela causa especial (caso I), o gráfico de VMAX é sempre mais eficiente na detecção da perturbação do que o gráfico de $|S|$. Porém, se as duas variáveis são afetadas pela causa especial (caso II) e o valor de n_2 é grande, o gráfico de VMAX tem desempenho inferior ao do gráfico de $|S|$, exceto para

grandes perturbações. Vale salientar que nesses casos, os desempenhos dos dois gráficos não são substancialmente diferentes e que o gráfico de VMAX é bem mais simples de ser utilizado, pois o usuário está muito mais familiarizado com o cálculo das variâncias amostrais do que com o do determinante de uma matriz de covariâncias.

Tabela 19 - Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $|S|$ com amostragem dupla
($p=2$, $\bar{n} = 4$, $n_1=3$, $\rho=0,5$)

		n_2								
		8			12			16		
		S	VMAX		S	VMAX		S	VMAX	
caso I	caso II		caso I	caso II		caso I	caso II			
γ^2	LA	1,076	2,363	2,363	1,544	2,680	2,680	1,925	2,901	2,901
	LC ₂	2,489	2,450	2,450	2,207	2,127	2,127	2,039	1,923	1,923
	1,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
	1,1	131,1	120,3	129,1	126,5	115,7	125,2	119,7	112,5	122,3
	1,2	93,8	71,7	88,8	86,0	66,7	84,0	79,1	63,3	80,7
	1,3	70,3	44,7	64,2	62,3	40,6	59,6	55,9	38,0	56,5
	1,4	55,2	29,5	48,3	46,3	26,4	44,2	41,7	24,7	41,6
	1,5	43,9	20,6	37,6	37,3	18,4	34,0	32,2	17,2	31,8
	2,0	19,8	6,38	15,1	16,0	5,81	13,3	13,7	5,62	12,4
	3,0	9,09	2,48	5,76	7,19	2,43	5,13	6,39	2,50	4,89
	5,0	4,68	1,47	2,60	4,04	1,52	2,46	3,64	1,58	2,48

Tabela 20 - Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $|S|$ com amostragem dupla
($p=2$, $\bar{n} = 5$, $n_1=3$, $\rho=0,5$)

		n_2								
		10			15			20		
		S	VMAX		S	VMAX		S	VMAX	
caso I	caso II		caso I	caso II		caso I	caso II			
γ^2	LA	0,644	1,984	1,984	1,025	2,312	2,312	1,328	2,538	2,538
	LC ₂	2,326	2,334	2,334	2,064	2,038	2,038	1,922	1,855	1,855
	1,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
	1,1	128,1	115,1	124,9	120,0	109,3	119,9	114,1	105,2	116,4
	1,2	89,4	65,6	83,6	79,6	59,6	77,8	75,6	55,6	73,8
	1,3	65,2	39,4	59,1	56,6	34,7	53,7	51,2	31,8	50,1
	1,4	50,0	25,3	43,6	42,3	21,9	38,9	37,4	20,0	35,9
	1,5	39,9	17,4	33,4	32,5	14,9	29,4	28,4	13,6	26,9
	2,0	18,0	5,21	12,8	14,0	4,63	10,9	12,1	4,43	9,88
	3,0	7,87	2,10	4,76	6,48	2,07	4,12	5,71	2,14	3,87
	5,0	4,23	1,34	2,19	3,73	1,40	2,05	3,51	1,46	2,07

Tabela 21 - Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $|S|$ com amostragem dupla
($p=2$, $\bar{n} = 5$, $n_1=4$, $\rho =0,5$)

		n_2								
		10			15			20		
		$ S $	VMAX		$ S $	VMAX		$ S $	VMAX	
			caso I	caso II		caso I	caso II		caso I	caso II
γ^2	LA	1,694	2,319	2,319	2,151	2,574	2,574	2,507	2,750	2,750
	LC_2	2,487	2,240	2,240	2,193	1,963	1,963	2,028	1,787	1,787
	1,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
	1,1	127,3	114,5	124,4	116,3	109,9	120,4	111,6	106,8	117,6
	1,2	85,9	65,0	83,0	73,6	60,3	78,4	66,7	57,4	75,3
	1,3	60,3	39,0	58,5	51,0	35,4	54,3	44,5	33,4	51,5
	1,4	44,3	25,0	43,2	36,4	22,5	39,5	31,6	21,2	37,2
	1,5	34,5	17,2	33,1	27,6	15,4	29,9	23,8	14,6	28,1
	2,0	13,9	5,17	12,7	10,9	4,83	11,2	8,98	4,79	10,6
	3,0	5,66	2,09	4,71	4,54	2,12	4,30	3,95	2,21	4,21
	5,0	2,92	1,32	2,19	2,54	1,38	2,14	2,35	1,42	2,21

6.2.3 Desempenho do gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável

As Tabelas 22, 23 e 24 comparam os valores de NMA para o gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável com os valores de NMA para o gráfico de $|S|$ com amostra de tamanho variável. As tabelas foram construídas fixando $\rho =0,5$.

Tabela 22 - Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $|S|$ com amostra de tamanho variável ($p=2$, $\bar{n} = 4$ e $n_1=3$)

	8			n_2 12			16		
	$ S $	VMAX		$ S $	VMAX		$ S $	VMAX	
		caso I	caso II		caso I	caso II		caso I	caso II
LC	-	-	-	-	-	-	-	-	-
LA_1	0,632	1,968	1,968	1,164	2,425	2,425	1,571	2,697	2,697
LC_1	7,018	4,758	4,758	7,018	4,758	4,758	7,018	4,758	4,758
LA_2	1,262	1,612	1,612	1,591	1,685	1,685	1,687	1,676	1,676
LC_2	4,086	2,966	2,966	3,305	2,523	2,523	2,889	2,276	2,276
γ^2									
1,1	149,3	136,7	143,3	150,1	136,9	143,6	150,6	137,0	143,8
1,2	114,4	91,4	106,6	115,1	91,1	106,7	115,5	90,9	106,9
1,3	89,7	61,7	81,7	89,8	60,9	81,6	89,9	60,3	81,5
1,4	71,6	42,8	64,3	71,2	41,6	63,8	70,8	40,6	63,6
1,5	58,2	30,7	51,7	57,2	29,2	51,0	56,5	28,1	50,6
2,0	25,4	9,22	22,2	23,3	8,23	20,9	21,9	7,66	20,0
3,0	9,53	3,23	8,31	8,23	3,01	7,36	7,70	2,97	6,82
5,0	4,23	1,78	3,58	3,92	1,79	3,23	3,98	1,83	3,11

Tabela 23 - Valores de NMA para os gráficos de $VMAX$ e de $|S|$ com amostra de tamanho variável ($p=2$, $\bar{n} = 5$ e $n_1=3$)

	n_2								
	10			15			20		
	$ S $	VMAX		$ S $	VMAX		$ S $	VMAX	
	caso I	caso II							
LC	-	-	-	-	-	-	-	-	-
LA_1	0,385	1,673	1,673	0,781	2,113	2,113	1,106	2,382	2,382
LC_1	7,018	4,758	4,758	7,018	4,758	4,758	7,018	4,758	4,758
LA_2	1,069	1,408	1,408	1,364	1,500	1,500	1,468	1,510	1,510
LC_2	3,624	2,707	2,707	2,974	2,327	2,327	2,626	2,114	2,114
γ^2									
1,1	143,9	132,7	140,2	145,2	133,0	140,7	146,0	133,3	141,0
1,2	106,0	85,2	101,9	106,9	84,6	102,1	107,4	84,2	102,3
1,3	79,8	55,1	76,3	79,7	53,6	76,0	79,6	52,5	75,8
1,4	61,3	36,7	58,7	60,3	34,7	57,9	59,4	33,3	57,3
1,5	48,1	25,4	46,2	46,3	23,4	45,0	50,0	21,9	44,1
2,0	18,5	7,15	18,4	16,2	6,18	16,6	14,8	5,70	15,4
3,0	6,58	2,67	6,56	5,65	2,54	5,60	5,38	2,56	5,13
5,0	3,15	1,62	2,94	3,08	1,68	2,68	3,32	1,73	2,63

Tabela 24 - Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $|S|$ com amostra de tamanho variável ($p=2$, $\bar{n} = 5$ e $n_1 = 4$)

	10			n_2 15			20		
	$ S $	VMAX		$ S $	VMAX		$ S $	VMAX	
		caso I	caso II		caso I	caso II		caso I	caso II
LC	-	-	-	-	-	-	-	-	-
LA_1	1,140	1,971	1,971	1,732	2,349	2,349	2,135	2,569	2,569
LC_1	6,134	4,094	4,094	6,134	4,094	4,094	6,134	4,094	4,094
LA_2	1,388	1,615	1,615	1,635	1,659	1,659	1,692	1,639	1,639
LC_2	3,624	2,707	2,707	2,974	2,327	2,327	2,626	2,114	2,114
γ^2									
1,1	142,1	132,3	139,8	142,6	132,5	140,0	142,9	132,6	140,1
1,2	104,5	85,4	101,8	104,7	85,1	101,8	104,8	84,8	101,9
1,3	79,0	55,9	76,6	78,7	54,9	76,4	78,5	54,2	76,3
1,4	61,2	37,7	59,3	60,4	36,4	58,8	59,8	35,4	58,5
1,5	48,5	26,4	47,0	47,2	25,0	46,3	46,3	23,9	45,8
2,0	19,4	7,53	19,2	17,5	6,72	18,0	16,4	6,30	17,1
3,0	6,93	2,71	6,92	6,01	2,58	6,12	5,71	2,58	5,71
5,0	3,17	1,58	3,02	3,00	1,60	2,78	3,07	1,63	2,72

De acordo com as Tabelas 22, 23 e 24 o gráfico de VMAX com amostra de tamanho variável é sempre mais eficiente que o gráfico da variância amostral generalizada $|S|$ com amostra de tamanho variável, exceto em alguns casos em que o tamanho de amostra é alternado entre um tamanho pequeno e um tamanho muito grande.

A escolha de n_1 e n_2 influi, porém de forma moderada, na velocidade com que o gráfico detecta perturbações, tanto para o caso I quanto para o caso II. Por exemplo, se $\bar{n} = 5$, $n_2=10$ e $\gamma^2 = 1,4$, a medida que n_1 aumenta de 3 para 4 (caso I) o NMA aumenta de 36,7 para 37,7. E, se $\bar{n} = 5$, $n_1 = 4$ e $\gamma^2 = 1,4$, o NMA diminui de 37,7 para 36,4 a medida que n_2 aumenta de 10 para 15 (caso I).

6.2.4 Desempenho do gráfico de VMAX-EWMA

A Tabela 25 compara o gráfico de VMAX-EWMA com o gráfico de V-EWMA proposto por Yeh et al. (2003). Detalhes sobre o gráfico de V-EWMA podem ser encontrados na seção 5.3.4.

De acordo com a Tabela 25, o gráfico de VMAX-EWMA tem, na maioria dos casos, um desempenho superior ao do gráfico de V-EWMA. Nessa tabela estão também os valores de *NMA* para o gráfico de $|S|$. O gráfico de VMAX-EWMA é sempre mais eficiente do que o gráfico de $|S|$. Porém, o mesmo não ocorre quando se compara o gráfico de V-EWMA com o gráfico de $|S|$, principalmente nos casos em que se tem grandes perturbações e coeficiente de correlação elevado.

Observa-se que ρ tem grande influência nas propriedades do gráfico de V-EWMA. Por exemplo, quando $(a_1; a_2) = (1,10; 1,00)$, o *NMA* para o gráfico de V-EWMA reduz de 114,1 para 25,0 quando ρ passa de 0,0 para 0,8 (caso I). Por outro lado, para uma perturbação maior, por exemplo $(a_1; a_2) = (1,50; 1,00)$, o *NMA* para o gráfico de V-EWMA aumenta de 20,4 para 125,1 quando ρ passa de 0,0 para 0,8 (caso I). Em resumo, se o processo é altamente correlacionado o gráfico de V-EWMA se torna mais lento na sinalização a medida que a magnitude da perturbação aumenta (caso I). Trata-se de um comportamento totalmente adverso ao do esperado de um gráfico de controle. Embora ρ também tenha influência nas propriedades do gráfico de VMAX-EWMA, observa-se, da Tabela 25, que essa influência é pequena. Por exemplo, quando $(a_1; a_2) = (1,10; 1,00)$, o *NMA* para o gráfico de VMAX-EWMA aumenta de 58,5 para 61,3 quando ρ passa de 0,0 para 0,8 (caso I). E, quando $(a_1; a_2) = (1,50; 1,00)$, o *NMA* para o gráfico de VMAX-EWMA reduz de 5,86 para 5,80 quando ρ passa de 0,0 para 0,8 (caso I).

Tabela 25 - Valores de NMA para os gráficos de $|S|$, VMAX-EWMA e V-EWMA
($p=2, n=4, r=0,2$)

		$\rho = 0,0$		$\rho = 0,5$		$\rho = 0,8$			
		$ S $	V	VMAX	V	VMAX	V	VMAX	
	$(a_1; a_2)$	LC	6,134	*	2,054	*	2,013	*	1,921
	(1,00, 1,00)	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
caso	(1,10, 1,00)	146,8	114,1	58,5	141,3	59,9	25,0	61,3	
I	(1,25,1,00)	99,4	51,7	16,8	126,8	17,2	46,6	17,1	
	(1,50,1,00)	60,4	20,4	5,86	41,7	5,92	125,1	5,80	
	(1,10, 1,10)	110,7	64,4	29,8	133,9	31,3	39,4	34,3	
II	(1,25,1,25)	54,9	17,4	8,16	33,0	8,68	138,8	9,66	
	(1,50,1,50)	23,8	7,03	3,34	9,31	3,53	32,6	3,90	

* $L = 2,490$

De um modo geral, menores valores de r melhoram o poder de detecção do gráfico. Por exemplo, da Tabela 26 quando $\gamma^2 = 1,4$ o NMA diminui de 40,8 para 27,6 quando r passa de 0,7 para 0,2 (caso I).

O efeito de n na velocidade com que o gráfico de VMAX-EWMA sinaliza o desajuste do processo pode ser observado comparando os NMA s das Tabelas 25 e 26. Quando n aumenta, o poder de detecção do gráfico também aumenta. Por exemplo, quando $\gamma^2 = 1,3$, o NMA diminui de 52,5 para 46,6 quando n aumenta de 4 para 5 (caso I).

Tabela 26 - Valores de *NMA* para o gráfico de VMAX-EWMA ($p=2, n = 4$)

		caso I			caso II		
		<i>r</i>			<i>r</i>		
γ^2	<i>LC</i>	0,2	0,5	0,7	0,2	0,5	0,7
		2,013	2,783	3,292	2,013	2,783	3,292
1,0		200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1		106,8	125,2	131,3	111,6	131,2	137,6
1,2		62,8	79,5	86,0	71,5	91,7	99,6
1,3		40,1	52,5	58,1	49,8	67,4	75,2
1,4		27,6	36,4	40,8	36,9	51,6	58,7
1,5		20,3	26,5	29,9	28,8	40,9	47,2
2,0		7,81	9,07	10,1	12,9	17,8	21,1
3,0		3,53	3,56	3,74	6,30	7,58	8,81
5,0		1,98	1,88	1,89	3,57	3,74	4,09

Tabela 27 - Valores de *NMA* para o gráfico de VMAX-EWMA ($p=2, n = 5$)

		caso I			caso II		
		<i>r</i>			<i>r</i>		
γ^2	<i>LC</i>	0,2	0,5	0,7	0,2	0,5	0,7
		1,891	2,549	2,982	1,891	2,549	2,982
1,0		200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1		100,3	119,7	126,4	105,8	126,3	133,4
1,2		56,4	72,9	79,8	65,4	85,8	94,2
1,3		34,9	46,6	52,2	44,4	61,6	69,6
1,4		23,6	31,5	35,7	32,4	46,3	53,5
1,5		17,2	22,5	25,6	25,0	36,1	42,3
2,0		6,59	7,47	8,32	11,1	15,1	18,1
3,0		3,04	2,98	3,10	5,45	6,35	7,37
5,0		1,74	1,64	1,63	3,14	3,18	3,44

6.2.5 Desempenho do gráfico de VMAX com regra especial de decisão

Nas Tabelas 28, 29 e 30 estão os valores de NMA_{ss} para o gráfico de VMAX com regra especial de decisão.

As Tabelas 28 e 29 mostram o efeito de L na velocidade com que o gráfico de VMAX com regra especial de decisão sinaliza o desajuste do processo. Da Tabela 28 observa-se que a medida que L aumenta de 1 para 20, todos os valores de NMA_{ss} diminuem. Por exemplo, se $\gamma^2 = 1,3$, o NMA_{ss} diminui de 59,5 para 46,2, o que significa em termos percentuais, uma redução de aproximadamente 22%. O efeito de variar L de 20 para 50 quase não afeta a velocidade com que o gráfico detecta pequenas ou grandes alterações. Por exemplo, se $\gamma^2 = 1,3$, o NMA_{ss} aumenta de 46,2 para 46,3 e, se $\gamma^2 = 3,0$, o NMA_{ss} aumenta de 2,81 para 2,83, o que representa um aumento percentual de 0,22% e 0,71%, respectivamente.

Nas Tabelas 28 e 29 estão também os NMA s dos gráficos de $|S|$ e de VMAX, já que não existem na literatura consultada gráficos multivariados com regra especial de decisão para fazer esta comparação. O gráfico de VMAX com regra especial de decisão é sempre mais eficiente do que o gráfico de $|S|$. Observa-se o mesmo quando o gráfico de VMAX com regra especial de decisão é comparado com o gráfico de VMAX, exceto para os casos em que L é pequeno ($L = 1$ ou 2) e a causa especial afeta apenas uma variável (caso I).

Tabela 28 - Valores de NMA_{ss} para o gráfico de VMAX ($p=2; \rho=0,5; n=5$; caso I)

	S	VMAX	L							
			1	2	3	4	5	10	20	50
LC	5,375	3,668	2,339	2,507	2,602	2,668	2,718	2,869	3,011	3,181
γ^2										
1,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1	141,4	132,5	130,5	126,4	124,3	123,1	122,2	120,2	119,0	119,1
1,2	104,6	86,8	86,7	81,3	78,7	77,2	76,1	73,6	72,3	72,4
1,3	80,5	58,3	59,5	54,3	51,9	50,5	49,5	47,3	46,2	46,3
1,4	64,1	40,7	42,5	37,9	35,8	34,6	33,8	32,0	31,2	31,4
1,5	51,9	29,6	31,5	27,6	25,9	24,9	24,2	22,9	22,3	22,5
2,0	24,1	9,62	11,0	9,20	8,50	8,13	7,89	7,44	7,29	7,38
3,0	10,2	3,38	4,16	3,49	3,24	3,11	3,04	2,88	2,81	2,83
5,0	4,58	1,67	2,24	1,93	1,81	1,74	1,70	1,60	1,55	1,54

Tabela 29 - Valores de NMA_{ss} para o gráfico de VMAX ($p=2; \rho=0,5; n=5$; caso II)

	S	VMAX	L							
			1	2	3	4	5	10	20	50
LC	5,375	3,668	2,339	2,507	2,602	2,668	2,718	2,869	3,011	3,181
γ^2										
1,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1	141,4	139,7	134,9	131,4	129,6	128,6	127,9	126,3	125,6	126,0
1,2	104,6	102,4	96,4	91,9	89,7	88,5	87,6	85,9	85,1	85,8
1,3	80,5	78,0	72,0	67,5	65,4	64,2	63,4	61,7	61,2	62,0
1,4	64,1	61,4	55,9	51,7	49,7	48,7	47,9	46,5	46,1	47,0
1,5	51,9	49,6	44,7	40,8	39,1	38,2	37,5	36,3	36,0	36,9
2,0	24,1	22,3	19,8	17,5	16,5	16,0	15,7	15,2	15,2	15,8
3,0	10,2	9,09	8,31	7,19	6,77	6,56	6,43	6,24	6,27	6,52
5,0	4,58	3,98	3,96	3,43	3,24	3,14	3,09	3,00	2,99	3,08

A Tabela 30 mostra o efeito de n nos valores de NMA_{ss} do gráfico proposto. Dessa tabela observa-se que a medida que n aumenta de 4 para 5, todos os valores de NMA_{ss} diminuem. Por exemplo, se $\gamma^2 = 1,3$ e a causa especial afeta somente uma das variáveis (case I), o NMA_{ss} diminui de 55,4 para 49,5, o que representa uma redução percentual no NMA_{ss} de aproximadamente 10%. A Tabela 30 apresenta também os NMA_s para o

gráfico de $|\mathbf{S}|$. O gráfico de VMAX com regra especial de decisão é sempre mais eficiente do que o gráfico de $|\mathbf{S}|$.

Tabela 30 - Valores de NMA_{ss} para o gráfico de VMAX ($p=2; L=5; \rho=0,5$)

		n					
		4			5		
		VMAX			VMAX		
		$ \mathbf{S} $	caso I	caso II	$ \mathbf{S} $	caso I	caso II
γ^2	LC	6,134	2,964	2,964	5,375	2,718	2,718
1,0		200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1		146,8	127,3	132,3	141,4	122,2	127,9
1,2		112,5	82,4	93,1	104,6	76,1	87,6
1,3		89,1	55,4	68,9	80,5	49,5	63,4
1,4		73,3	38,9	53,0	64,1	33,8	47,9
1,5		60,4	28,5	42,1	51,9	24,2	37,5
2,0		30,2	9,67	18,4	24,1	7,89	15,7
3,0		13,6	3,67	7,70	10,2	3,04	6,43
5,0		6,37	1,95	3,67	4,58	1,70	3,09

6.3 DESEMPENHO DO GRÁFICO DE VMAX – CASO MULTIVARIADO

Analogamente ao caso bivariado, os coeficientes de correlação têm uma certa influência nas propriedades do gráfico de VMAX, ver Tabelas 31 e 34. Das Tabelas 32 e 35 observa-se que o gráfico de VMAX é sempre mais eficiente que o gráfico da variância amostral generalizada $|\mathbf{S}|$. Essas tabelas foram construídas fixando os coeficientes de correlação iguais a 0,5. Da Tabela 33 observa-se que os valores de NMA são praticamente iguais considerando Σ_1 ou Σ_2 . O mesmo pôde ser observado considerando $p>3$. Para o caso I, em que a causa especial afeta apenas uma das p variáveis X_1, X_2, \dots, X_p , o gráfico de VMAX tem um desempenho bem superior ao do gráfico de $|\mathbf{S}|$, para qualquer valor de p .

Tabela 31 - Valores de NMA para o gráfico de VMAX ($p=3, n=5$)

ρ_{12}	0,5	0,7	0,7	0,5	0,7	0,7	0,5	0,7	0,7	
ρ_{13}	0,5	0,7	0,5	0,5	0,7	0,5	0,5	0,7	0,5	
ρ_{23}	0,5	0,7	0,2	0,5	0,7	0,2	0,5	0,7	0,2	
		caso I			caso II			caso III		
γ^2	LC	3,851	3,810	3,843	3,851	3,810	3,843	3,851	3,810	3,843
1,0		200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1		146,3	146,9	147,4	153,0	154,1	154,1	155,2	156,3	155,3
1,2		101,9	101,9	102,8	118,6	119,9	120,2	123,8	125,5	123,9
1,3		70,5	70,1	71,1	93,5	94,9	95,3	101,3	103,3	101,5
1,4		49,7	49,2	50,0	75,1	76,4	76,9	84,7	86,9	84,9
1,5		36,1	35,6	36,3	61,4	62,6	63,1	72,3	74,5	72,5
2,0		11,3	11,0	11,3	27,8	28,6	29,1	38,6	40,5	38,7
3,0		3,72	3,65	3,71	10,9	11,4	11,6	18,2	19,6	18,2
5,0		1,75	1,73	1,75	4,55	4,80	4,88	8,35	9,20	8,34

Tabela 32 - Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $|S|$ ($p=3, \rho_{12}=\rho_{13}=\rho_{23}=0,5$)

		n							
		4				5			
		$ S $	VMAX			$ S $	VMAX		
γ^2	LC		caso I	caso II	caso III		caso I	caso II	caso III
		4,050	4,313	4,313	4,313	4,620	3,851	3,851	3,851
1,0		200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1		160,4	149,9	155,9	157,8	155,2	146,3	153,0	155,2
1,2		135,3	107,7	123,0	127,7	125,3	101,9	118,6	123,8
1,3		116,9	76,8	98,7	105,8	103,5	70,5	93,5	101,3
1,4		102,9	55,6	80,4	89,5	87,3	49,7	75,1	84,7
1,5		89,4	41,3	66,6	77,1	74,5	36,1	61,4	72,3
2,0		54,6	13,7	31,7	42,6	41,6	11,3	27,8	38,6
3,0		29,8	4,55	12,9	20,9	20,7	3,72	10,9	18,2
5,0		15,8	2,06	5,49	9,86	9,93	1,75	4,55	8,35

Tabela 33 - Valores de NMA para o gráfico de VMAX
($p=3, \rho_{12}=\rho_{13}=\rho_{23}=0,5, n=5, LC=3,851$)

a_1^2	a_2^2	a_3^2	Σ_1	Σ_2	a_1^2	a_2^2	a_3^2	Σ_1	Σ_2
1,0	1,0	1,0	200,0	200,0	1,5	1,5	1,0	20,73	20,63
1,5	1,0	1,0	36,14	35,82	1,0	1,5	1,5	20,72	20,87
1,0	1,5	1,0	36,13	36,26	1,5	1,0	1,5	20,73	20,79
1,0	1,0	1,5	36,13	36,73	1,5	1,5	1,5	14,95	14,95

Tabela 34 - Valores de *NMA* para o gráfico de VMAX ($p=4, n = 5$)

$\rho_{12} = \rho_{13}$	0,5	0,7	0,5	0,7	0,5	0,7	0,5	0,7
$\rho_{14} = \rho_{23}$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$\rho_{24} = \rho_{34}$	0,5	0,2	0,5	0,2	0,5	0,2	0,5	0,2
	caso I		caso II		caso III		caso IV	
γ^2 LC	3,980	3,970	3,980	3,970	3,980	3,970	3,980	3,970
1,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1	152,7	158,6	160,0	162,9	162,5	164,9	164,5	166,0
1,2	112,9	116,9	128,8	130,1	134,7	138,8	135,8	139,1
1,3	79,4	82,1	105,2	108,1	114,6	114,8	118,0	115,0
1,4	56,9	57,9	85,4	87,9	97,3	99,9	99,6	102,7
1,5	41,4	41,9	70,9	73,7	82,9	84,7	88,7	89,9
2,0	12,6	12,8	32,5	33,7	45,3	48,3	52,9	54,3
3,0	3,95	3,92	12,4	13,1	20,9	22,8	27,9	28,4
5,0	1,80	1,80	5,05	5,37	9,49	10,1	13,5	14,2

Tabela 35 - Valores de *NMA* para os gráficos de VMAX e de $|S|$
($p=4, n = 5, \rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0,5$)

γ^2 LC	S	VMAX			
		caso I	caso II	caso III	caso IV
	2,000	3,980	3,980	3,980	3,980
1,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1	166,8	152,7	160,0	162,5	164,5
1,2	145,6	112,9	128,8	134,7	135,8
1,3	127,9	79,4	105,2	114,6	118,0
1,4	108,5	56,9	85,4	97,3	99,6
1,5	96,9	41,4	70,9	82,9	88,7
2,0	61,1	12,6	32,5	45,3	52,9
3,0	35,7	3,95	12,4	20,9	27,9
5,0	19,2	1,80	5,05	9,49	13,5

No próximo capítulo serão detalhados os gráficos de controle utilizados no monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias de processos bivariados.

7 DESCRIÇÃO DOS GRÁFICOS PROPOSTOS PARA O MONITORAMENTO SIMULTÂNEO DO VETOR DE MÉDIAS E DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS

7.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo trata do monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias de processos bivariados. Os gráficos de controle considerados no monitoramento são: os gráficos de T^2 e de VMAX (MACHADO; COSTA, 2008b, 2008c); o gráfico de controle MCMAX, cujos pontos amostrais correspondem ao maior valor em módulo de quatro medidas das duas características de qualidade sob monitoramento, isto é, as suas médias e variâncias amostrais padronizadas (COSTA; MACHADO; CLARO, 2008); e dois gráficos de controle baseados na estatística de monitoramento proposta por Costa e Rahim (2004a), denominados gráficos de R (MACHADO; COSTA, 2008d). Estes gráficos concorrem com os gráficos de T^2 e $|S|$ encontrados em Chen, Cheng e Xie (2005).

Os gráficos propostos são utilizados no monitoramento de duas características de qualidade, X_1 e X_2 , que seguem uma distribuição normal com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$. Quando o processo está em controle, $\boldsymbol{\mu}'_0 = (\mu_{01}; \mu_{02})$ e

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

A causa especial desloca o vetor de médias de $\boldsymbol{\mu}_0$ para $\boldsymbol{\mu}'_1 = (\mu_{01} + \delta_1\sigma_1; \mu_{02} + \delta_2\sigma_2)$ e/ou altera a matriz de covariâncias de $\boldsymbol{\Sigma}_0$ para $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{12} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} \end{pmatrix}$ ou

para $\boldsymbol{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} \end{pmatrix}$. No primeiro caso, em que $\boldsymbol{\Sigma}_0$ se altera para $\boldsymbol{\Sigma}_1$, a

causa especial não afeta a correlação entre X_1 e X_2 , que é dada por $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$. No

segundo caso, no entanto, a causa especial reduz a correlação de ρ para $\rho' = \frac{\sigma_{12}}{a_1a_2\sigma_1\sigma_2}$.

7.2 GRÁFICOS DE T^2 E VMAX EM USO SIMULTÂNEO ⁷

Esta seção se dedica a descrição dos gráficos de T^2 e de VMAX em uso simultâneo para o monitoramento do vetor de médias e da matriz de covariâncias de um processo bivariado.

As estatísticas de T^2 e de VMAX para processos bivariados são dadas, respectivamente, por:

$$T^2 = (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

e

$$\text{VMAX} = \max\{S_1^2, S_2^2\}.$$

Quando $\delta_1 = 0$ e $a_1 = a_2$, $T^2 \sim \chi_{n, \lambda_d}^2$ sendo $\lambda_d = \frac{n\delta_2^2}{t_2^2(1-\delta_{12}^2)}$. A probabilidade p_m do gráfico de T^2 sinalizar é dada por:

$$p_m = Pr [T^2 > k_{chi}].$$

onde k_{chi} é o fator de abertura do limite de controle do gráfico de T^2 .

A probabilidade p_s do gráfico de VMAX sinalizar é dada pela expressão (D7) do Apêndice D. Com base na propriedade de que alterações no vetor de médias do processo não afetam a matriz de covariâncias, segue a expressão de p_d , isto é, da probabilidade do gráfico de T^2 e/ou do gráfico de VMAX sinalizarem:

$$p_d = p_m + p_s - p_m p_s$$

⁷ Extratos desta seção foram aceitos para apresentação oral em dois congressos internacionais: o International Symposium on Business and Industrial Statistics (ISBIS-2008) e o International Conference on Reliability and Quality in Design, ver Machado e Costa (2008b, 2008c).

7.3 GRÁFICO DE MCMAX

Quando o gráfico MCMAX está em uso, amostras de tamanho n são retiradas do processo em intervalos regulares de tempo h e as duas características de qualidade X_1 e X_2 das unidades que compõe a amostra são medidas.

Com os dados da amostra, são calculadas as médias amostrais padronizadas, $Z_1 = \sqrt{n}(\bar{X}_1 - \mu_{01})/\sigma_1$, $Z_2 = \sqrt{n}(\bar{X}_2 - \mu_{02})/\sigma_2$, e as variâncias amostrais ponderadas e padronizadas, $W_1 = kS_1^2/\sigma_1^2$ e $W_2 = kS_2^2/\sigma_2^2$. O ponto no gráfico MCMAX corresponde ao maior valor, em módulo, das quatro medidas amostrais, isto é, $MCMAX = \max(|Z_1|, |Z_2|, W_1, W_2)$. A constante de ponderação k é determinada de tal sorte que, durante o período em controle, as quatro estatísticas $(|Z_1|, |Z_2|, W_1, W_2)$ tenham todas a mesma probabilidade de assumirem valores maiores que LC , isto é, de excederem o limite de controle do gráfico MCMAX.

O gráfico proposto sinaliza um desajuste no processo quando ao menos um dos valores amostrais das quatro estatísticas $(|Z_1|, |Z_2|, W_1, W_2)$ exceder o limite de controle, LC .

Como o gráfico proposto requer apenas o cálculo de estatísticas já familiares do usuário, isto é, médias e variâncias amostrais, ele é muito mais simples de ser utilizado se comparado com os gráficos de T^2 e $|S|$. Além disso, com base em qual, ou quais, das estatísticas $|Z_1|, |Z_2|, W_1, W_2$ excederem os limites de controle, é possível saber as variáveis que foram afetadas pela causa especial.

7.3.1 Propriedades do gráfico de MCMAX ⁸

A probabilidade p_m de $|Z_1|$ e/ou $|Z_2|$ exceder o limite de controle é dada por:

$$p_m = 1 - \int_{LC-\delta_1\sqrt{n}}^{UC-\delta_1\sqrt{n}} \int_{LC-\delta_2\sqrt{n}}^{UC-\delta_2\sqrt{n}} f(Z_1, Z_2) d_{Z_1} d_{Z_2} \quad (7.1)$$

A probabilidade p_s de W_1 e/ou W_2 exceder o limite de controle é dada pela expressão (D7) do Apêndice D. O fato das variáveis Z_1 e Z_2 serem independentes de W_1 e de W_2 facilita a obtenção das propriedades do gráfico MCMAX, isto é, o risco α de um alarme falso e o poder p_d de detecção do gráfico:

$$p_d = p_m + p_s - p_m p_s$$

Quando a regra especial de decisão está em uso, o NMA_{ss} mede o tempo que o gráfico de controle com regra especial de decisão leva para sinalizar uma alteração no processo. O NMA_{ss} para o gráfico de MCMAX com regra especial de decisão foi obtido utilizando-se o modelo de cadeia de Markov descrito por Davis e Woodall (2002), lembrando que com a regra especial de decisão o sinal é dado quando ocorrem dois pontos na região de ação, não necessariamente vizinhos, porém não distantes um do outro por mais de L intervalos h . O procedimento utilizado para obter o NMA_{ss} para o gráfico de MCMAX com regra especial de decisão é descrito abaixo:

Com L e NMA_0 dados, encontrar o valor de Q_0 tal que:

$$s_0 \times M \times \mathbf{1} = \left(1 - \sqrt{1 - 1/NMA_0}\right)^{-1} \quad (7.2)$$

⁸ Extratos desta seção foram submetidos para publicação na Revista Gestão & Produção, artigo intitulado “Gráfico de controle MCMAX para o monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias”, dos autores Costa, Machado e Claro (2008).

onde NMA_0 é número médio de amostras entre alarmes falsos (especificado quando da construção do gráfico de controle), \mathbf{M} é uma matriz de zeros exceto $m_{11} = Q_0$; $m_{12} = -Q_0$; $m_{i, i+1} = Q_0 - 1$, $i=1, 2, \dots, L$; e $m_{L+1,1} = Q_0 - 1$; $\mathbf{1}$ é um $(L+1) \times 1$ vetor de uns; e \mathbf{s}_0 é um vetor $(L+1) \times 1$ com $s_1 = [1 + (L-1)Q_0]^{-1}$ e $s_j = Q_0 s_1$, $j=2, \dots, L+1$. O limite de controle do gráfico proposto, LC , é obtido da expressão (7.1), fazendo $\delta_1 = \delta_2 = 0$ e $p_d = 1 - \sqrt{1 - Q_0}$. A constante de ponderação k é obtida pela expressão (D7) fazendo $a_1 = a_2 = 1$ e $p_s = 1 - \sqrt{1 - Q_0}$.

Com a_1 , a_2 , δ_1 e δ_2 dados tem-se:

$$NMA_{ss} = \mathbf{s}'_0 \times \mathbf{M} \times \mathbf{1} \quad (7.3)$$

onde \mathbf{M} é agora uma matriz de zeros exceto para $m_{11} = Q$; $m_{12} = -Q$; $m_{i, i+1} = Q - 1$, $i=1, 2, \dots, L$; e $m_{L+1,1} = Q - 1$, sendo $Q = 1 - p_d$ com p_d dado pela expressão (7.2); e $\mathbf{1}$ é um vetor $(L+1) \times 1$ de uns.

7.4 GRÁFICOS DE CONTROLE BASEADOS NA ESTATÍSTICA DE QUI-QUADRADO NÃO-CENTRAL⁹

Esta seção se dedica a descrição de dois gráficos baseados na estatística R de qui-quadrado utilizados no monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias de processos bivariados. Eles são denominados gráficos de R .

Quando os gráficos de R estão em uso, amostras de tamanho n são retiradas do processo em intervalos regulares de tempo. Seja X_{1i} e X_{2i} , $i=1, 2, 3, \dots, n$ as medidas das

⁹ Extratos desta seção foram aceitos para publicação na Revista Brazilian Journal of Operations and Production Management, artigo intitulado "Monitoring the mean vector and the covariance matrix of bivariate processes", dos autores Machado e Costa (2008d).

variáveis X_1 e X_2 . Seja $\bar{X}_1 = (X_{11} + \dots + X_{1n})/n$ e $\bar{X}_2 = (X_{21} + \dots + X_{2n})/n$ as médias amostrais das variáveis X_1 e X_2 e seja $e_1 = \bar{X}_1 - \mu_{01}$ e $e_2 = \bar{X}_2 - \mu_{02}$ as diferenças entre as médias amostrais e os valores alvo das médias do processo. Os pontos amostrais R_1 e R_2 são dados por:

$$R_1 = \sum_{i=1}^n (X_{1i} - \mu_{01} + \xi_1 \sigma_1)^2,$$

$$R_2 = \sum_{i=1}^n (X_{2i} - \mu_{02} + \xi_2 \sigma_2)^2, \quad (7.5)$$

sendo

$\xi_1 = D$ e $\xi_2 = -D$	se $e_1 \geq 0$ e $e_2 < 0$
$\xi_1 = \xi_2 = D \times D_1$	se $e_1 \geq 0$ e $e_2 \geq 0$
$\xi_1 = \xi_2 = -D \times D_1$	se $e_1 < 0$ e $e_2 < 0$
$\xi_1 = -D$ e $\xi_2 = D$	se $e_1 < 0$ e $e_2 \geq 0$

onde os parâmetros D e D_1 são constantes positivas. Se R_1 e/ou R_2 exceder o limite de controle LC , os gráficos de R sinalizam um desajuste no processo. A expressão para obter a probabilidade dos gráficos de R sinalizarem está no Apêndice E.

O uso dos gráficos de R é uma alternativa ao uso dos gráficos simultâneos de T^2 e $|\mathbf{S}|$ e é recomendado para aqueles que consideram importante identificar a variável responsável pelo desajuste do processo.

No próximo capítulo será comparado o desempenho dos gráficos propostos com o dos gráficos de T^2 e $|\mathbf{S}|$ em uso simultâneo.

8 ANÁLISE DE DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE DESTINADOS AO MONITORAMENTO SIMULTÂNEO DO VETOR DE MÉDIAS E DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DE PROCESSOS BIVARIADOS

8.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo compara-se o desempenho dos gráficos propostos para o monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias com o desempenho dos gráficos de T^2 e $|S|$ em uso simultâneo.

Uma alteração no vetor de médias do processo é medida por δ_i , $i=1,2$, com $\delta_i \in \{0,25; 0,5; 0,75; 1,0; 1,25; 1,5; 2,0\}$ e na matriz de covariâncias por a_i , $i=1,2$, com $a_i \in \{1,25; 1,5; 1,75; 2,0\}$. Adotou-se NMA_0 de 200,0, ou seja, $\alpha=0,005$.

Nas tabelas 36 e 37 estão os valores de NMA para os gráficos de T^2 e VMAX em uso simultâneo. Nas Tabelas de 38 a 42 estão os valores de NMA para o gráfico de MCMAX. Nas Tabelas de 44 a 48 estão os valores de NMA para os gráficos de R . Nas Tabelas 43 e 49 estão os valores da probabilidade dos gráficos de MCMAX e de R , respectivamente, sinalizarem erroneamente que a causa especial afetou a média e/ou a variância da variável X_1 quando na verdade ela afetou a média e/ou a variância da variável X_2 .

8.2 DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE T^2 E VMAX

As Tabelas 36 e 37 comparam os gráficos simultâneos de T^2 e VMAX e de T^2 e $|S|$. A probabilidade total do erro do tipo I para os gráficos de T^2 e $|S|$ ou de T^2 e VMAX é de $1 - (1 - 0,0025)^2 \approx 0,005$, ou seja, a probabilidade do erro do tipo I de cada gráfico é de 0,0025. Isto é equivalente a um $NMA_0 = 200,0$. O gráfico de T^2 combinado com o gráfico de VMAX ou com o gráfico de $|S|$ leva praticamente aos mesmos valores de NMA .

Tabela 36: Valores de NMA para os gráficos de T^2 e $|S|$ e T^2 e $VMAX$ em uso simultâneo ($\rho=0,0$)

$n=5$	δ_2						
	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	
$a_1 = a_2$							
1,0	*	200,0	129,8	48,4	16,7	6,6	3,2
	**	200,0	129,8	48,4	16,7	6,6	3,2
1,25	*	15,5	13,8	9,9	6,2	3,8	2,5
	**	15,0	13,3	9,6	6,1	3,8	2,5
1,5	*	4,3	4,1	3,8	3,0	2,4	1,9
	**	4,0	3,8	3,8	2,9	2,3	1,9

* T^2 e $|S|$; ** T^2 e $VMAX$

Tabela 37: Valores de NMA para os gráficos de T^2 e $|S|$ e T^2 e $VMAX$ em uso simultâneo ($\rho=0,5$)

$n=5$	δ_2						
	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	
$a_1 = a_2$							
1,0	*	200,0	114,0	34,6	10,6	4,2	2,1
	**	200,0	114,0	34,6	10,6	4,2	2,1
1,25	*	15,5	13,2	8,6	5,0	2,9	1,9
	**	15,4	13,1	8,6	5,0	2,9	1,9
1,5	*	4,3	4,1	3,4	2,7	2,1	1,6
	**	4,2	3,9	3,4	2,7	2,1	1,6

* T^2 e $|S|$; ** T^2 e $VMAX$

A idéia de se utilizar o gráfico de T^2 combinado com o gráfico de $VMAX$ não trouxe melhorias na velocidade de detecção de desajustes do processo em relação ao uso do gráfico de T^2 combinado com o gráfico de $|S|$. Contudo, vale lembrar que a estatística de $VMAX$ é bem mais simples que a de $|S|$. O gráfico de $MCMAX$ foi proposto com o pensamento voltado a uma ferramenta estatística simples para o monitoramento de processos bivariados. O desempenho deste gráfico é viável quando se utiliza a regra

especial de decisão de dois pontos na região de ação. Como o usuário normalmente não se sente seguro em intervir no processo após a ocorrência de um ponto na região de ação, o uso desta regra especial de decisão com o gráfico de VMAX parece ser bem oportuno.

8.3 DESEMPENHO DO GRÁFICO DE MCMAX

A Tabela 38 mostra o efeito do parâmetro de projeto L no desempenho do gráfico MCMAX. A medida em que L aumenta, o desempenho do gráfico melhora. A melhora é mais acentuada na faixa em que L varia de 1 até 6. Por exemplo, se L varia de 1 até 6, considerando $a = b = 1$ e $c = d = 0,5$, o NMA diminui de 21,4 para 17,5, o que representa uma redução percentual no valor do NMA de aproximadamente 18,0%. Por outro lado, se L varia de 6 até 10, o NMA diminui de 5,2 para 5,1, o que representa uma redução percentual no valor do NMA de aproximadamente 2,0%.

Tabela 38: Influência do parâmetro L no desempenho do gráfico MCMAX

($\rho = 0,5$; matriz de covariâncias muda de Σ_0 para Σ_1)

					$n=5$										
					L										
a_1	a_2	δ_1	δ_2	LC	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1,0	1,0	0	0		2,350	2,469	2,536	2,582	2,617	2,644	2,667	2,687	2,703	2,719	
		0	0,5		200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
		0,5	0,5		45,3	40,9	39,1	37,9	37,3	36,8	36,3	36,1	35,9	35,7	
1,25	1,25	0	0		21,4	19,2	18,4	17,9	17,7	17,5	17,4	17,3	17,3	17,3	
		0	0,5		13,6	12,0	11,3	11,0	10,8	10,8	10,6	10,6	10,6	10,6	
		0,5	0,5		8,9	7,8	7,3	7,1	7,0	7,0	6,9	6,9	6,9	6,9	
1,5	1,0	0	0		6,5	5,7	5,4	5,3	5,2	5,2	5,2	5,1	5,1	5,1	
		0	0,5		10,1	8,5	7,9	7,5	7,3	7,3	7,1	7,0	7,0	7,0	
		0,5	0		7,6	6,5	6,1	5,9	5,8	5,8	5,7	5,7	5,7	5,7	
		0,5	0,5		7,2	6,0	5,6	5,3	5,2	5,2	5,0	5,0	5,0	4,9	
					5,8	5,0	4,7	4,5	4,4	4,4	4,3	4,3	4,3	4,3	

As Tabelas de 39 a 42 apresentam os *NMAs* do gráfico MCMAX e dos gráficos de T^2 e $|S|$ em uso simultâneo para diferentes perturbações nos parâmetros do processo. As Tabelas de 39 a 41 consideram que a causa especial altera a matriz de covariâncias de Σ_0 para Σ_1 , enquanto que a Tabela 42 considera o caso em que Σ_0 muda para Σ_2 . Na detecção de desajustes do processo, o gráfico proposto tem um desempenho geral superior ao dos gráficos de T^2 e $|S|$ em uso simultâneo, exceto quando a correlação entre as duas características de qualidade é muito alta.

Quando a correlação é muito alta e a causa especial desloca a média e/ou a variabilidade de apenas uma das variáveis, X_1 ou X_2 , os gráficos de T^2 e $|S|$ são, em geral, mais ágeis do que gráfico MCMAX. Quando a correlação é moderada e a causa especial altera Σ_0 para Σ_2 , o gráfico de MCMAX sinaliza esta condição de falta de controle com maior rapidez. A habilidade dos gráficos de T^2 e $|S|$ em uso simultâneo em sinalizar um desajuste no processo é tanto melhor quanto maior for a correlação ρ entre as variáveis X_1 e X_2 . A correlação ρ tem pouca influência no desempenho do gráfico MCMAX.

Tabela 39: Valores do NMA - gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$ e gráfico MCMAX
($\rho = 0,0$; matriz de covariâncias muda de Σ_0 para Σ_1)

		<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th colspan="5">$n=5$</th> <th colspan="5">$L=7$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>δ_1</td> <td>0</td><td>0</td><td>0,5</td><td>0,5</td><td>0</td> <td>0,75</td><td>0,75</td><td>0</td><td>1,0</td><td>1,0</td> </tr> <tr> <td>δ_2</td> <td>0</td><td>0,5</td><td>0</td><td>0,5</td><td>0,75</td> <td>0</td><td>0,75</td><td>1,0</td><td>0</td><td>1,0</td> </tr> </tbody> </table>											$n=5$					$L=7$					δ_1	0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0	δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0
	$n=5$					$L=7$																																						
δ_1	0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0																																		
δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0																																		
a_1	a_2																																											
1,0	1,0	200,0	48,9*	49,2	19,9	16,7	16,8	5,4	6,8	6,6	2,3																																	
		200,0	36,3**	36,3	17,4	10,8	10,8	5,1	4,3	4,3	2,3																																	
1,25	1,0	42,6	22,2	17,5	11,0	11,2	8,9	4,4	5,2	4,7	2,1																																	
		28,2	15,0	12,1	8,6	7,3	6,2	3,8	3,7	3,5	2,1																																	
1,5	1,0	15,3	10,7	9,0	6,7	6,9	5,8	3,5	4,0	3,7	2,0																																	
		7,5	5,9	5,2	4,5	4,2	3,8	3,8	2,8	2,7	1,9																																	
1,25	1,25	15,6	9,9	9,8	9,8	6,2	6,3	3,5	3,9	3,9	2,0																																	
		10,2	6,7	6,7	5,0	4,4	4,4	2,9	2,9	2,9	1,9																																	
1,5	1,5	4,4	3,6	3,6	3,1	3,0	3,0	2,3	2,4	2,4	1,7																																	
		3,0	2,6	2,6	2,4	2,3	2,3	1,9	1,9	1,9	1,6																																	

* gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$; **gráfico MCMAX

Tabela 40: Valores do NMA - gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$ e gráfico MCMAX
($\rho = 0,5$; matriz de covariâncias muda de Σ_0 para Σ_1)

		<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th colspan="5">$n=5$</th> <th colspan="5">$L=7$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>δ_1</td> <td>0</td><td>0</td><td>0,5</td><td>0,5</td><td>0</td> <td>0,75</td><td>0,75</td><td>0</td><td>1,0</td><td>1,0</td> </tr> <tr> <td>δ_2</td> <td>0</td><td>0,5</td><td>0</td><td>0,5</td><td>0,75</td> <td>0</td><td>0,75</td><td>1,0</td><td>0</td><td>1,0</td> </tr> </tbody> </table>											$n=5$					$L=7$					δ_1	0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0	δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0
	$n=5$					$L=7$																																						
δ_1	0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0																																		
δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0																																		
a_1	a_2																																											
1,0	1,0	200,0	38,4*	38,5	34,8	10,8	10,8	10,6	4,1	4,2	4,1																																	
		200,0	36,3**	36,3	17,4	10,8	10,8	5,1	4,3	4,3	2,3																																	
1,25	1,0	41,6	17,7	14,1	15,8	7,6	6,6	7,1	3,5	3,5	3,5																																	
		26,5	14,4	11,7	8,4	7,2	6,1	3,8	3,6	3,5	2,1																																	
1,5	1,0	14,6	8,9	7,7	8,4	5,2	4,6	5,0	3,0	2,9	3,0																																	
		7,1	5,7	5,0	4,3	4,1	3,7	2,8	2,7	2,7	1,9																																	
1,25	1,25	15,9	8,7	8,6	8,6	4,9	4,8	4,9	2,9	2,9	2,9																																	
		10,6	6,9	6,9	5,1	4,5	4,5	3,0	2,9	2,9	1,9																																	
1,5	1,5	4,3	3,5	3,5	3,4	2,7	2,7	2,7	2,1	2,1	2,1																																	
		3,2	2,8	2,8	2,5	2,4	2,4	2,0	2,0	2,0	1,6																																	

* gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$; **gráfico MCMAX

Tabela 41: Valores do NMA - gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$ e gráfico MCMAX
($\rho = 0,7$; matriz de covariâncias muda de Σ_0 para Σ_1)

		<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="2"></th> <th colspan="5">$n=5$</th> <th colspan="5">$L=7$</th> </tr> <tr> <th>δ_1</th> <th></th> <th>0</th><th>0</th><th>0,5</th><th>0,5</th> <th>0</th><th>0,75</th><th>0,75</th><th>0</th><th>1,0</th><th>1,0</th> </tr> <tr> <th></th> <th>δ_2</th> <th>0</th><th>0,5</th><th>0</th><th>0,5</th> <th>0,75</th><th>0</th><th>0,75</th><th>1,0</th><th>0</th><th>1,0</th> </tr> </thead> </table>												$n=5$					$L=7$					δ_1		0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0		δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0
		$n=5$					$L=7$																																								
δ_1		0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0																																				
	δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0																																				
a_1	a_2																																														
1,0	1,0	200,0	20,6*	20,2	39,7	5,7	5,6	12,9	2,3	2,3	5,0																																				
		200,0	36,3**	36,3	17,4	10,8	10,8	5,1	4,3	4,3	2,3																																				
1,25	1,0	39,1	11,9	9,8	17,1	4,6	4,2	8,2	2,2	2,2	4,1																																				
		25,1	14,0	11,4	8,2	7,1	6,0	3,8	3,6	3,6	2,1																																				
1,5	1,0	13,1	6,9	5,8	8,3	3,6	3,4	5,3	2,0	2,1	3,3																																				
		6,7	5,5	4,9	4,2	4,0	3,6	2,7	2,7	2,6	1,9																																				
1,25	1,25	15,7	6,9	6,8	9,2	3,5	3,5	5,4	2,0	2,0	3,3																																				
		11,2	7,2	7,2	5,3	4,6	4,6	3,0	3,0	3,0	1,9																																				
1,5	1,5	4,3	3,1	3,1	3,6	2,3	2,3	2,9	1,7	1,7	2,2																																				
		3,4	2,9	2,9	2,6	2,5	2,5	2,0	2,0	2,0	1,6																																				

*gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$; **gráfico MCMAX

Tabela 42: Valores do NMA - gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$ e gráfico MCMAX
($\rho = 0,5$; matriz de covariâncias muda de Σ_0 para Σ_2)

		<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="2"></th> <th colspan="5">$n=5$</th> <th colspan="5">$L=7$</th> </tr> <tr> <th>δ_1</th> <th></th> <th>0</th><th>0</th><th>0,5</th><th>0,5</th> <th>0</th><th>0,75</th><th>0,75</th><th>0</th><th>1,0</th><th>1,0</th> </tr> <tr> <th></th> <th>δ_2</th> <th>0</th><th>0,5</th><th>0</th><th>0,5</th> <th>0,75</th><th>0</th><th>0,75</th><th>1,0</th><th>0</th><th>1,0</th> </tr> </thead> </table>												$n=5$					$L=7$					δ_1		0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0		δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0
		$n=5$					$L=7$																																								
δ_1		0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0																																				
	δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0																																				
a_1	a_2																																														
1,0	1,0	200,0	34,1*	34,4	33,9	10,5	10,5	10,6	4,2	4,1	4,2																																				
		200,0	36,3**	36,3	17,4	10,8	10,8	5,0	4,3	4,3	2,3																																				
1,25	1,0	30,8	13,9	11,8	14,2	6,6	5,9	6,8	3,4	3,3	3,4																																				
		23,0	13,3	10,9	7,9	6,9	5,9	3,7	3,6	3,4	2,1																																				
1,5	1,0	10,2	6,9	6,3	6,9	4,4	4,0	4,4	2,7	2,8	2,8																																				
		6,5	5,3	4,8	4,2	3,9	3,5	2,7	2,7	2,6	1,9																																				
1,25	1,25	10,1	6,5	6,3	6,8	4,1	4,1	4,2	2,7	2,7	2,7																																				
		8,7	6,0	6,1	4,7	4,2	4,2	2,8	2,8	2,8	1,9																																				
1,5	1,5	3,1	2,7	2,7	2,7	2,3	2,3	2,3	1,9	1,9	1,8																																				
		2,7	2,5	2,5	2,2	2,2	2,2	1,8	1,9	1,9	1,5																																				

* gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$; ** gráfico MCMAX

Na Tabela 43 estão os valores de P_v , que corresponde a probabilidade do gráfico de controle sinalizar que a causa especial afetou a média e/ou a variância da variável X_1 , isto é, $Z_1 > LC$ ou $W_1 > LC$, quando na verdade ela afetou a média e/ou a variância de X_2 . Dessa tabela, observa-se que a probabilidade do gráfico sinalizar erroneamente é muito pequena (menor do que 1,0 %).

Tabela 43: Valores de P_v para o gráfico de MCMAX (%)

		$n=5$ $L=7$					
		δ_1	0	0	0	0	0
		δ_2	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0
a_1	a_2						
1,0	1,25	0,68	0,61	0,49	0,23	0,06	
1,0	1,5	0,65	0,57	0,47	0,25	0,09	
1,0	1,75	0,61	0,54	0,46	0,27	0,12	
1,0	2,0	0,58	0,52	0,44	0,28	0,14	

8.4 DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE R

Nas Tabelas de 44 a 46 estão os valores de NMA para os gráficos de R e de T^2 e $|S|$ em uso simultâneo, para $\rho = 0,0; 0,5; 0,7$. Os gráficos simultâneos de R têm, em geral, um desempenho superior ao dos gráficos de T^2 e $|S|$ (veja os valores em negrito), exceto quando as variáveis X_1 e X_2 são altamente correlacionadas ($\rho = 0,7$).

Tabela 44: Valores de NMA - gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$ e gráficos de R
 $(\rho = 0,0; D = 0,8; D_1 = 1,0; LC = 29,4)$

		$n=5$										
		δ_1	0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0
		δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0
a_1	a_2											
1,0	1,0	200,0	48,9*	49,2	19,9	16,7	16,8	5,4	6,8	6,6	2,3	
		200,0	41,1**	41,1	22,6	14,4	14,4	7,7	6,0	6,0	3,3	
1,25	1,0	42,6	22,2	17,5	11,0	11,2	8,9	4,4	5,2	4,7	2,1	
		29,5	18,8	11,5	9,6	10,5	6,0	4,5	5,2	5,2	2,5	
1,5	1,0	15,3	10,7	9,0	6,7	6,9	5,8	3,5	4,0	3,7	2,0	
		8,1	7,3	5,2	4,8	5,6	3,5	3,1	3,8	2,5	2,0	
1,25	1,25	15,6	9,9	9,8	6,8	6,2	6,3	3,5	3,9	3,9	2,0	
		15,9	8,8	8,8	6,1	5,3	5,3	3,4	3,3	3,3	2,1	
1,5	1,5	4,4	3,6	3,6	3,1	3,0	3,0	2,3	2,4	2,4	1,7	
		4,4	3,5	3,5	2,9	2,7	2,7	2,1	2,2	2,2	1,6	

*gráficos de T^2 e $|S|$; **gráficos de R

Tabela 45: Valores de NMA - gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$ e gráficos de R
 $(\rho = 0,5; D = 1,2; D_1 = 0,75; LC = 32,6)$

		$n=5$										
		δ_1	0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0
		δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0
a_1	a_2											
1,0	1,0	200,0	38,4*	38,5	34,8	10,8	10,8	10,6	4,1	4,2	4,1	
		200,0	33,0**	33,0	29,5	11,0	11,0	9,9	4,6	4,6	4,2	
1,25	1,0	41,6	17,7	14,1	15,8	7,6	6,6	7,1	3,5	3,5	3,5	
		29,6	15,8	10,2	11,3	8,1	5,1	5,6	4,0	3,0	3,0	
1,5	1,0	14,6	8,9	7,7	8,4	5,2	4,6	5,0	3,0	2,9	3,0	
		8,0	6,5	4,9	5,3	4,7	3,3	3,5	3,0	2,3	2,4	
1,25	1,25	15,9	8,7	8,6	8,6	4,9	4,8	4,9	2,9	2,9	2,9	
		16,7	8,0	8,0	7,3	4,5	4,5	4,1	2,8	2,8	2,5	
1,5	1,5	4,3	3,5	3,5	3,4	2,7	2,7	2,7	2,1	2,1	2,1	
		4,6	3,4	3,4	3,3	2,6	2,6	2,4	2,0	2,0	1,8	

*gráficos de T^2 e $|S|$; **gráficos de R

Tabela 46: Valores de NMA - gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$ e gráficos de R
 $(\rho = 0,7; D = 2,0; D_1 = 0,7; LC = 45,75)$

		$n=5$										
		δ_1	0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0
		δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0
a_1	a_2											
1,0	1,0	200,0	20,6*	20,2	39,7	5,7	5,6	12,9	2,3	2,3	5,0	
		200,0	21,2**	21,2	34,1	6,9	6,9	11,1	3,0	3,0	4,7	
1,25	1,0	39,1	11,9	9,8	17,1	4,6	4,2	8,2	2,2	2,2	4,1	
		33,6	11,5	8,7	13,3	5,2	4,1	6,3	2,7	2,4	3,4	
1,5	1,0	13,1	6,9	5,8	8,3	3,6	3,4	5,3	2,0	2,1	3,3	
		9,4	5,6	4,6	6,0	3,6	2,9	3,9	2,2	2,0	2,6	
1,25	1,25	15,7	6,9	6,8	9,2	3,5	3,5	5,4	2,0	2,0	3,3	
		19,3	6,9	6,9	8,7	3,6	3,6	4,8	2,1	2,1	2,9	
1,5	1,5	4,3	3,1	3,1	3,6	2,3	2,3	2,9	1,7	1,7	2,2	
		5,5	3,4	3,4	3,9	2,3	2,3	2,9	1,7	1,7	2,1	

*gráficos de T^2 e $|S|$; **gráficos de R

A Tabela 47 mostra o efeito de D na velocidade com que os gráficos de R sinalizam o desajuste do processo. Valores grandes de D são melhores na detecção de alterações no vetor de médias com $a_1 = a_2 = 1,0$, e piores na detecção de alterações na matriz de covariâncias com $\delta_1 = \delta_2 = 0,0$. Por exemplo, quando $a_1 = a_2 = 1,0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0,5$, o NMA diminui de 50,3 para 20,3 a medida que D aumenta de 0 para 2,0. Por outro lado, quando $\delta_1 = \delta_2 = 0,0$ e $a_1 = a_2 = 1,25$, o NMA aumenta de 13,8 para 22,3 a medida que D aumenta de 0 para 2,0.

Tabela 47: Influência do parâmetro D no desempenho dos gráficos de R ($\rho = 0,5$)

				$D_1=1,0$					
				D	0	0,5	0,7	1,0	2,0
				LC	18,33	24,10	27,50	33,50	61,12
a_1	a_2	δ_1	δ_2						
1,0	1,0	0	0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
		0	0,5	76,7	47,8	42,6	38,7	34,9	
		0,5	0,5	50,3	28,5	25,5	23,1	20,3	
		0	1,0	12,0	6,8	6,1	5,6	4,9	
		1,0	1,0	7,2	4,2	3,9	3,5	3,1	
1,25	1,0	0	0	24,5	26,5	29,0	31,1	38,2	
		0	0,5	21,3	19,5	19,4	19,6	20,7	
		0,5	0	13,7	11,7	11,6	11,3	12,1	
		0,5	0,5	12,8	10,5	10,3	9,8	10,3	
		0	1,0	8,8	5,9	5,5	5,0	4,6	
		1,0	0	4,9	3,8	3,6	3,5	3,4	
		1,0	1,0	4,1	3,0	2,8	2,7	2,6	
1,25	1,25	0	0	13,8	15,2	16,8	18,1	22,3	
		0	0,5	9,7	8,8	9,1	9,2	9,9	
		0,5	0,5	7,8	6,9	6,7	6,7	7,2	
		0	1,0	4,3	3,5	3,4	3,3	3,3	
		1,0	1,0	3,0	2,4	2,4	2,3	2,3	

A Tabela 48 mostra o efeito de D_1 na velocidade com que os gráficos de R sinalizam o desajuste do processo. Em geral, valores grandes de D_1 são melhores na detecção de alterações no vetor de médias quando as duas variáveis são afetadas pela causa especial e valores pequenos de D_1 são melhores na detecção de alterações no vetor de médias quando apenas uma das variáveis é afetada pela causa especial.

Tabela 48: Influência do parâmetro D_1 no desempenho dos gráficos de R ($\rho = 0,5$)

				$D=1,0$				
				D_1	0,5	0,75	1,0	2,0
				LC	26,85	29,15	33,50	61,00
a_1	a_2	δ_1	δ_2					
1,0	1,0	0	0	200,0	200,0	200,0	200,0	
		0	0,5	34,8	35,7	38,7	38,1	
		0,5	0,5	50,6	28,6	23,1	20,5	
		0	1,0	5,1	4,9	5,6	6,3	
		1,0	1,0	6,6	4,2	3,5	3,1	
1,25	1,0	0	0	28,5	27,4	31,1	42,1	
		0	0,5	15,5	16,2	19,6	24,4	
		0,5	0	10,5	10,4	11,3	14,2	
		0,5	0,5	14,6	10,8	9,8	10,1	
		0	1,0	4,2	4,3	5,0	6,1	
		1,0	0	3,2	3,1	3,5	4,6	
		1,0	1,0	4,1	3,0	2,7	2,6	
1,25	1,25	0	0	16,2	15,5	18,1	23,6	
		0	0,5	8,2	7,9	9,2	11,9	
		0,5	0,5	8,8	7,0	6,7	7,5	
		0	1,0	2,9	2,8	3,3	4,4	
		1,0	1,0	3,1	2,5	2,3	2,3	

Na Tabela 49 estão os valores de P_v , que corresponde a probabilidade do gráfico de controle sinalizar que a causa especial afetou a média e/ou a variância da variável X_1 , isto é, $R_1 > LC$, quando na verdade ela afetou a média e/ou a variância de X_2 . Dessa tabela, observa-se que a probabilidade do gráfico sinalizar erroneamente uma variável não afetada pela causa especial é pequena (menor do que 5,0 %).

Tabela 49: Valores de P_v para os gráficos de R (%)
 ($\rho = 0,5; D = 1,2; D_1 = 0,75; LC = 32,6$)

		$n=5$					
		δ_1	0	0	0	0	0
		δ_2	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0
a_1	a_2						
1,0	1,25		5,0	3,0	1,9	1,2	1,0
1,0	1,5		2,0	1,6	1,4	1,0	0,9
1,0	1,75		1,2	1,1	0,9	0,8	0,7
1,0	2,0		0,9	0,9	0,8	0,7	0,6

9 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

9.1 CONCLUSÕES

Nesta tese foram consideradas novas estratégias de monitoramento para processos multivariados. Tratou-se do monitoramento do vetor de médias, do monitoramento da matriz de covariâncias e do monitoramento tanto do vetor de médias quanto da matriz de covariâncias. Dedicção especial foi dada ao monitoramento da matriz de covariâncias e ao monitoramento conjunto do vetor de médias e da matriz de covariâncias, uma vez que estes assuntos estão em evidência dentre os temas atuais de pesquisa na área de monitoramento de processos.

Para tanto, inicialmente fez-se uma revisão acerca dos gráficos de controle univariados e multivariados, abordando as pesquisas mais recentes sobre o assunto. Foram estudadas as propriedades dos gráficos de controle e a medida usual de desempenho utilizada, o número médio de amostras até o sinal (*NMA*). Foram detalhados os gráficos de controle propostos bem como os gráficos concorrentes.

Estudou-se o desempenho dos gráficos de T^2 baseados em componentes principais e dos gráficos de controle univariados de \bar{X} em uso conjunto para o monitoramento do vetor de médias de processos multivariados. Não havia na literatura consultada trabalhos similares. Este estudo já está sendo divulgado em Machado e Costa (2007, 2007a, 2008).

Todos os cálculos necessários para a obtenção das propriedades dos gráficos propostos para o monitoramento da matriz de covariâncias e para o monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias foram mostrados. Fez-se uso de teorias conhecidas na área de Probabilidade e Estatística, o que possibilitou a obtenção de expressões analíticas para o *NMA*. Estas expressões são inéditas e constituem a principal contribuição deste trabalho. Estes resultados estão sendo divulgados nos seguintes artigos: Costa e Machado (2008a, 2009), Machado; De Magalhães e Costa (2008) e Machado e Costa (2008, 2008a).

As principais conclusões extraídas deste estudo são:

a) o usuário nunca deve utilizar os gráficos de controle baseados em componentes principais antes de investigar como estes se comportam em relação a diferentes tipos de perturbações, pois não existe um gráfico de controle baseado em componente principal que seja sempre mais eficiente que o gráfico tradicional de Hotelling, exceto em alguns casos em que se tem correlações negativas, ver Tabelas de 4 a 6 e Tabelas de 9 a 11.

b) quando a correlação é positiva os gráficos de \bar{X} univariados têm, em geral, um melhor desempenho. Se é conhecida a informação de que a causa especial altera apenas uma variável de cada vez, então o gráfico de T^2 é a melhor opção, exceto quando $\rho=0,0$. A idéia de se utilizar gráficos de \bar{X} univariados para o monitoramento de processos trivariados foi também explorada. Quando comparado com o do gráfico de Hotelling, o desempenho dos gráficos de \bar{X} univariados em uso conjunto foi insatisfatório, ver Tabelas 12 e 13.

c) os gráficos de controle baseados na estatística de VMAX para o monitoramento da matriz de covariâncias de processos multivariados se mostraram sempre mais eficientes que os gráficos de controle tradicionais baseados na estatística da variância amostral generalizada $|S|$. Da forma como foi definida a estatística de VMAX, isto é, baseada nas variâncias amostrais, tem-se uma melhor capacidade de diagnóstico, ou seja, é mais fácil identificar a variável que teve sua variabilidade alterada pela ocorrência da causa especial, ver tabelas do capítulo 6.

d) em relação ao monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias, observou-se que o uso dos gráficos de T^2 e VMAX não trouxe melhorias na velocidade de detecção de desajustes do processo em relação ao uso dos gráficos de T^2 e $|S|$. Contudo, vale lembrar que a estatística de VMAX é bem mais simples que a de $|S|$. Seguindo esta mesma linha de raciocínio, o gráfico de MCMAX também é muito mais simples de ser utilizado se comparado com os gráficos de T^2 e $|S|$, pois requer apenas o cálculo de estatísticas conhecidas do usuário, isto é, médias e variâncias amostrais. O desempenho deste gráfico é viável quando se utiliza a regra especial de decisão de dois pontos na região de ação. Finalmente, propôs-se o uso dos gráficos de R , que em geral,

têm um desempenho superior ao dos gráficos de T^2 e $|S|$, exceto quando as variáveis X_1 e X_2 são altamente correlacionadas. Os gráficos de R são recomendados para aqueles que consideram importante identificar a variável responsável pelo desajuste do processo.

Esta tese gerou vários artigos nacionais e internacionais. Contribuiu o fato da doutoranda ter elaborado seu trabalho de Iniciação Científica (bolsa FAPESP), trabalho de graduação de curso, dissertação de mestrado (bolsa CAPES) e tese de doutorado (bolsa FAPESP) todos no mesmo assunto: gráficos de controle.

9.2 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Uma possível extensão deste trabalho é a ampliação dos estudos para o caso em que os parâmetros do processo são estimados, portanto considerados desconhecidos. Seria interessante aplicar os resultados obtidos nesta tese no monitoramento de um processo real.

Finalmente, destaca-se que ainda há na literatura um espaço em aberto quando o assunto é a autocorrelação em processos multivariados. Em dois trabalhos recentes, Claro, Costa e Machado (2008, 2008a) trataram dos gráficos de controle de EWMA ou com amostragem dupla utilizados no monitoramento de processos cujas observações podem ser descritas por um modelo autoregressivo de primeira ordem (AR1). Os resultados obtidos restringem-se ao caso univariado. Sugere-se como futura pesquisa, que os modelos empregados pelos autores sejam estendidos para o caso multivariado.

REFERÊNCIAS

ALBIN, S. L.; KANG, L.; SHEHA, G. An X and EWMA chart for individual observations. **Journal of Quality Technology**, v. 29, p. 41-48, 1997.

ALT, F. B. **Multivariate control charts**. Encyclopedia of Statistical Sciences. Kotz, S., Johnson, N. L., Eds.; Wiley, 1985.

ANDERSON, T. W. An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Stanford: John Wiley. 2003.

APARISI, F. Hotelling's T^2 control chart with adaptive sample sizes. **International Journal of Production Research**, v. 34, p. 2853-2862, 1996.

APARISI, F., HARO, C.L. Hotelling's T^2 control chart with variable sampling intervals. **International Journal of Production Research**, v. 39, p. 3127-3140, 2001.

APARISI, F.; HARO, C. L. A comparison of T^2 control charts with variable sampling schemes as opposed to MEWMA chart. **International Journal of Production Research**, v. 41, p. 2169-2182, 2003.

APARISI, F.; JABALOYES, J.; CARRIÓN, A. Statistical properties of the ISI multivariate control chart. **Communication in Statistics – Theory and Methods**, v. 28, p. 2671-2686, 1999.

APARISI, F.; JABALOYES, J.; CARRIÓN, A. Generalized variance chart design with adaptive sample sizes. The bivariate case. **Communication in Statistics – Simulation and Computation**, v. 30, p. 931-948, 2001.

BARBOSA, A.S.; MACHADO, M. A. G.; COSTA, A.F.B. Estudo das propriedades dos gráficos de shewhart com regra especial de decisão via simulações. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 37, 2005, Gramado. **CD ROM**. Rio de Janeiro: SOBRAPO, 2005, 6 p.

BERNARD, S. A. **A multivariate EWMA approach to monitor process dispersion**. 2001. 125 f. Thesis (PhD) - Department of Decision and Information Technology of the University of Maryland, 2001.

CALZADA, M.E.; SCARIANO, S.M. The robustness of the synthetic control chart to non-normality. **Communications in Statistics: Simulation and Computation**, v. 30, p. 311-326, 2001.

CHAMP, C. W.; APARISI, F. Double sampling Hotelling's T^2 charts. **Quality and Reliability Engineering International**, aceito, 2007.

CHAMP, C. W.; JONES-FARMER, L. A.; RIGDON, S. E. Properties of the T^2 control chart when parameters are estimated. **Technometrics**, v. 47, p. 437-445, 2005.

CHANG, S. I.; ZHANG, K. Statistical process control for variance shift detections of multivariate autocorrelated processes. *Quality Technology and Quantitative Management*, v. 4, p. 413-435, 2007.

CHEN, G.; CHENG, S. W.; XIE, H. Monitoring process mean and variability with one EWMA chart. **Journal of Quality Technology**, v. 33, p. 223-233, 2001.

CHEN, G.; CHENG, S. W.; XIE, H. A new EWMA control chart for monitoring both location and dispersion. **Quality Technology and Quantitative Management**, v.1, p.217-231, 2004.

CHEN, G.; CHENG, S. W.; XIE, H. A new multivariate control chart for monitoring both location and dispersion. **Communications in Statistics-Simulation and Computation**, v. 34, p. 203-217, 2005.

CHOU, C.Y.; CHEN, C.H.; CHEN, C.H. Economic design of variable sampling intervals T^2 control charts using genetic algorithms. **Expert Systems with Applications**, v. 30, n. 2, p. 233-242, 2006.

CLARO, F. A. E.; COSTA, A.F.B.; MACHADO, M. A. G. Gráficos de controle de EWMA e \bar{X} para monitoramento de processos autocorrelacionados. **Produção**, v. 17, p. 536-546, 2007.

COSTA, A.F.B. Joint economic design of \bar{X} and R control charts for processes subject to two independent assignable causes. **IIE Transactions**, v. 25, p. 27-33, 1993.

COSTA, A.F.B. \bar{X} control charts with variable sample size. **Journal of Quality Technology**, v. 26, p. 155-163, 1994.

COSTA, A.F.B. \bar{X} control charts with variable sample sizes and sampling intervals. **Journal of Quality Technology**, v. 29, p. 197-204, 1997.

COSTA, A. F. B. Joint \bar{X} and R charts with variable parameters. **IIE Transactions**, v. 30, p. 505-514, 1998.

COSTA, A. F. B. Joint \bar{X} and R charts with variable sample sizes and sampling intervals. **Journal of Quality Technology**, v. 31, p. 387-397, 1999.

COSTA, A. F. B. \bar{X} charts with variable parameters. **Journal of Quality Technology**, v. 31, p. 408-416, 1999a.

COSTA, A. F. B.; CLARO, F. A. E. Double sampling \bar{X} control chart for a first-order autoregressive and moving average process model. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, in press, 2007.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Estudo das propriedades dos gráficos de controle por meio de simulações. In: JORNADA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E DE PÓS-GRADUAÇÃO, 5, 2003, Guaratinguetá. **CD ROM**. Guaratinguetá: Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2003, 5p.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. M. Estudo das propriedades dos gráficos de controle por meio de simulações. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 15, 2003a, Marília. **CD ROM**. Marília: Universidade Estadual Paulista, 2003a, 1p.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Synthetic control chart with two-stage sampling for monitoring bivariate processes. **Pesquisa Operacional**, v. 27, p. 117-130, 2007.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Bivariate control charts with double sampling. **Journal of Applied Statistics**, v. 35, p. 809-822, 2008.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. A new chart for monitoring the covariance matrix of bivariate processes. **Communications in Statistics – Simulation and Computation**, v. 37, p. 1453-1465, 2008a.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. A new chart based on the sample variances for monitoring the covariance matrix of multivariate processes. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 41, p. 770-779, 2009.

COSTA, A.F.B.; De MAGALHÃES, M.S. O uso da estatística de qui-quadrado no monitoramento de processos. **Gestão&Produção**, v. 12, p. 271-277, 2005.

COSTA, A.F.B.; De MAGALHÃES, M.S. an adaptative chart for monitoring the process mean and variance. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 23, p. 821-831, 2007.

COSTA, A.F.B.; RAHIM, M. A. Economic design of \bar{X} and R charts under weibull shock models. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 16, p. 143-156, 2000.

COSTA, A.F.B.; RAHIM, M. A. Economic design of charts with variable parameters: the markov chain approach. **Journal of Applied Statistics**, v. 28, p. 875-885, 2001.

COSTA, A.F.B.; RAHIM, M. A. Joint \bar{X} and R charts with two stage samplings. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 20, p. 699-708, 2004.

COSTA, A.F.B.; RAHIM, M. A. Monitoring process mean and variability with one non-central qui-square chart. **Journal of Applied Statistics**, v. 31, p. 1171-1183, 2004a.

COSTA, A.F.B.; RAHIM, M. A. The non-central chi-square chart with two stage samplings. **European Journal of Operation Research**, v. 171, p. 64-73, 2006.

COSTA, A.F.B.; RAHIM, M. A. A synthetic control chart for monitoring the process mean and variance. **Journal of Quality In Maintenance Engineering**, v. 12, p. 81-88, 2006a.

COSTA, A. F. B.; RAHIM, M. A. A single EWMA chart for monitoring process mean and process variance. **Quality Technology and Quantitative Management**, v. 3, p. 295-305, 2006b.

COSTA, A.F.B.; EPPRECHT E.K.; CARPINETTI, L.C.R. **Controle Estatístico de Qualidade**. 2. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2005. 334 p.

COSTA, A.F.B.; DE MAGALHÃES, M. S.; EPPRECHT E.K. Monitoring the process mean and variance using a synthetic control chart with two-stage testing. **International Journal of Production Research**, aceito, 2008.

COSTA, A.F.B.; MACHADO, M. A. G.; CLARO, F. A. E. Gráfico de controle MCMAX para o monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias. **Gestão & Produção**, submetido, 2008.

CROSIER, R.B. Multivariate generalizations of cumulative sum quality control schemes. **Technometrics**, v. 30; n. 3, p.291-303, 1988.

DAUDIN, J. J. Double sampling \bar{X} charts. **Journal of Quality Technology**, v. 24, p. 78-87, 1992.

DAVIS, R.B.; WOODALL, W.H. Evaluating and improving the synthetic control chart. **Journal of Quality Technology**, v. 34, p. 200-208, 2002.

DE MAGALHÃES, M. S.; EPPRECHT, E. K.; COSTA, A. F. B. Economic design of a VP \bar{X} Chart. **International Journal of Production Economics**, v. 74, p. 191-200, 2001.

DE MAGALHÃES, M. S.; COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K. Constrained optimization model for the design of an adaptive \bar{X} chart. **International Journal of Production Research**, v. 40, p. 3199-3218, 2002.

DE MAGALHÃES, M. S.; MOURA NETO, F. D. Joint economic model for totally adaptive \bar{X} and R charts. **European Journal of Operational Research**, v. 161, p.148-161, 2005.

DE MAGALHÃES, M. S.; COSTA, A. F. B.; MOURA NETO, F. D. Adaptive control charts: a Markovian approach for processes subject to independent out-of-control disturbances. **International Journal of Production Economics**, v. 99, p. 236-246, 2006.

DOMANGUE, R.; PATCH, S. C. Some omnibus exponentially weighted moving average statistical process monitoring schemes. **Technometrics**, v. 33, p. 299-313, 1991.

EPPRECHT, E. K.; COSTA, A. F. B. Adaptive sample size control charts for attributes. **Quality Engineering**, v. 13, p. 465-473, 2001.

EPPRECHT, E. K.; COSTA, A. F. B.; MENDES, F. C. T. Adaptive control charts for attributes. **IIE Transactions**, v. 35, p. 567-582, 2003.

EPPRECHT, E. K.; COSTA, A. F. B.; MENDES, F. C. T. Gráficos de controle por atributos e seu projeto na prática. **Pesquisa Operacional**, v. 25, p. 113-134, 2005.

GAN, F. F. Joint monitoring of process mean and variance using exponentially weighted moving average control charts. **Technometrics**, v. 37, p. 446-453, 1995.

GARCÍA-DÍAZ, J. C. The 'effective variance' control chart for monitoring the dispersion process with missing data. **European Journal Industrial Engineering**, v. 1, p. 40-55, 2007.

GRIGORYAN, A. **Statistical design of multiple sampling charts**. 2003. 174f. Thesis (PhD in Industrial Engineering and Operations Research) – Graduate College of the University of Illinois, Chicago, 2003.

GRIGORYAN, A.; HE, D. Multivariate double sampling $|S|$ charts for controlling process variability. **International Journal of Production Research**, v. 43, p. 715-730, 2005.

HE, D.; GRIGORYAN, A. Multivariate multiple sampling charts. **IIE Transactions**, v.37, p. 509-521, 2005.

HOTELLING, H. Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bombsights. **Techniques of Statistical Analysis**, p. 111-184, New York, McGraw Hill, 1947.

JACKSON, J. E. Principal components and factor analysis: part I – principal components. **Journal of Quality Technology**, v. 12, p. 201-213, 1980.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2002.

KALGONDA, A. A.; KULKARNI, S. R. Multivariate quality control chart for autocorrelated processes. **Journal of Applied Statistics**, v. 31, p. 317-327, 2004.

KHOO, M. B. C. A new bivariate control chart to monitor the multivariate process mean and variance simultaneously. **Quality Engineering**, v.17, p.109-118, 2005.

KONRATH, A. C. **Decomposição da estatística do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling por meio de um algoritmo computacional**. 2002. 90f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

LOWRY, C. A.; MONTGOMERY, D. C. A review of multivariate control charts. **IIE Transactions**, v. 27, p. 800-810, 1995.

LOWRY, C.A. et al. A multivariate exponentially weighted moving average control chart. **Technometrics**, v. 32; n. 1, p. 46-53, 1992.

LU, C. W.; REYNOLDS, M. R. Control charts for monitoring the mean and variance of autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v.31, p. 259-274, 1999.

LUCAS, J. M.; SACCUCCI, M. S. Exponentially weighed moving average control schemes: properties and enhancements. **Technometrics**, v. 32, p. 1-16, 1990.

MACHADO, M. A. G. **Considerações sobre a utilização dos gráficos de Shewhart em um processo produtivo de uma empresa do setor de fabricação de componentes automotivos**. 2005. 48f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia de

Produção Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2005.

MACHADO, M. A. G. **Estudo das propriedades dos gráficos de controle bivariados com amostragem dupla**. 2006. 129f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2006.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Synthetic control chart for monitoring the process mean and variance. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INDUSTRIAL ENGINEERING AND OPERATIONS MANAGEMENT , 11, ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 25, 2005, Porto Alegre. **Proceedings of the XI International Conference on Industrial Engineering and Operations Management**, Porto Alegre: ABEPRO, 2005, p. 17-23.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Gráficos de Shewhart baseados na estatística de qui-quadrado e com regra especial de decisão. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 37, 2005a, Gramado. **CD ROOM**. Rio de Janeiro: SOBRAPO, 2005a, 8 p.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Gráficos de controle com amostragens duplas para o monitoramento de processos bivariados. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 38, 2006, Goiânia.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Gráficos de controle com amostragens duplas para o monitoramento de processos bivariados. In: SINAPE - SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 17, 2006a, Caxambu.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Some comments on the multivariate process control. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON BUSINESS AND INDUSTRIAL STATISTICS, 3, 2007, Portugal. **Book of Abstracts**. Ponta Delgada: Centro de Matemática Aplicada, 2007.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. The use of principal components and univariate charts to control multivariate processes. In: 56th Session of the International Statistical Institute, 56, 2007a, Portugal. **CD ROOM**. Lisboa: ISI, 2007a.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. The use of principal components and simultaneous univariate charts to control multivariate processes. **Pesquisa Operacional**, v. 28, p. 173-196, 2008.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. The double sampling and the EWMA charts based on the sample variances. **International Journal of Production Economics**, v. 114, p. 134-148, 2008a.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Some comments on the multivariate process control. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON BUSINESS AND INDUSTRIAL STATISTICS, aceito, Praga. 2008b.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Monitoring the covariance matrix with the VMAX chart. In: INTERNATIONAL SOCIETY OF SCIENCE AND APPLIED TECHNOLOGIES, aceito, Orlando. 2008c.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Monitoring the mean vector and the covariance matrix of bivariate processes. **Brazilian Journal of Operations and Production Management**, aceito, 2008d.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Some comments on the multivariate process control. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, submetido, 2008e.

MACHADO, M. A. G.; De MAGALHÃES, M.S; COSTA, A. F. B. Gráfico de controle de VMAX para o monitoramento da matriz de covariâncias, **Revista Produção**, v. 18, p. 222-239, 2008.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B.; RAHIM, M. A. The synthetic control chart based on two sample variances for monitoring the covariance matrix. **Quality and Reliability Engineering International**, aceito, 2008.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B.; CLARO, F. A. E. Monitoring bivariate processes. **Pesquisa Operacional**, submetido, 2008.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B.; MARINS, F. A. S. Control charts for monitoring the mean vector and the covariance matrix of bivariate processes. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, aceito, 2009.

MARAVELAKIS, P. E.; PANARETOS, J.; PSARAKIS, S. Effect of estimation of the process parameters on the control limits of the univariate control charts for process dispersion. **Communications in Statistics – Simulation and Computation**, v. 31, p. 443-461, 2002.

MASON, R. L.; YOUNG, J. C. **Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications**. 1st. ed. Philadelphia: ASA-SIAM, 2002, 263p.

MASON, R. L.; TRACY, N.D.; YOUNG, J. C. Decomposition of T^2 for multivariate control chart interpretation. **Journal of Quality Technology**, v. 27, p. 99-108, 1995.

MICHEL, R.; FOGLIATTO, F. S. Projeto econômico de cartas adaptativas para monitoramento de processos. **Gestão&Produção**, v. 9, p. 17-31, 2002.

MICROSOFT FORTRAN POWER STATION 4.0. Professional Edition with Microsoft IMSL Mathematical and Statistical Libraries. **Microsoft Corporation**, 1995.

MINGOTI, S. A. **Análise de dados através de métodos de estatística multivariada: uma abordagem aplicada**. 1. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005. 297 p.

MONTGOMERY, D. C. **Introduction to statistical quality control**. John Wiley & Sons, Inc., New York, New York, 2004.

MONTGOMERY, D. C.; MASTRANGELO, C. M. Some statistical process control methods for autocorrelated data. **Journal of Quality Technology**, v. 23, p. 179-193, 1991.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F.A.; BOES, D.C. **Introduction to the theory of statistics**, McGraw-Hill, 1974.

MOREIRA, F.; ECHEVESTE, M. E. Uma abordagem de análise para o controle estatístico de processo com dados autocorrelacionados. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 24, 2004, Florianópolis. **CD ROM**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2004, 8p.

MOREIRA, F.; CATEN, C. S. Proposta de uma carta de controle estatístico de dados autocorrelacionados. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 24, 2004, Florianópolis. **CD ROM**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2004, 8p.

PIGNATIELLO, J.; RUNGER, G. Comparisons of Multivariate CUSUM Charts. **Journal of Quality Technology**, v. 22, p.173-186, 1990.

PRABHU, S. S.; RUNGER, G. C.; KEATS, J. B. An adaptative sample size \bar{X} chart. **International Journal of Production Research**, v. 31, p. 2895-2909, 1993.

PRABHU, S. S.; MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. A combined adaptative sample size and interval \bar{X} control chart, **Journal of Quality Technology**, v. 26, p. 164-176, 1994.

PRABHU, S.S.; RUNGER, G.C. Designing a multivariate EWMA control chart. **Journal of Quality Technology**, v. 29, p. 8-15, 1997.

QIU, P.; HAWKINS, D. A rank-based multivariate CUSUM procedure. **Technometrics**, v. 43, n. 2, p. 120-132, 2001.

RAHIM, M. A.; COSTA, A. F. B. Joint economic design of \bar{X} and R charts under weibull shock models. **International Journal of Production Research**, v. 28, p. 2871-2889, 2000.

REYNOLDS, M. R.; STOUMBOS, Z.G. Monitoring the process mean and variance using individual observations and variable sampling intervals. **Journal of Quality Technology**, v. 33, p. 181-205, 2001.

REYNOLDS, M. R. et al. \bar{X} charts with variable sampling interval. **Technometrics**, v. 30, p. 181-192, 1988.

REYNOLDS, M. R.; ARNOLD, J. C. Optimal one-side Shewhart control chart with variable sampling intervals. **Sequential Analysis**, v. 8, p. 51-77, 1989.

ROBERTS, S. W. Control chart tests based on geometric moving averages. **Technometrics**, v. 1, p. 239-250, 1959.

RUNGER, G. C.; ALT, F. B. Choosing principal components for multivariate statistical process control. **Communications in Statistics – Theory and Methods**, v. 25, p. 909-922, 1996.

RUNGER, G. C.; PIGNATIELLO, J. J. Adaptive sampling for process control. **Journal of Quality Technology**, v. 23, p. 133-155, 1991.

RUNGER, G. C.; MONTGOMERY, D. C. Adaptive sampling enhancements for Shewhart control charts. **IIE Transactions**, v. 25, p. 41-51, 1993.

RUNGER, G. C.; KEATS, B.; MONTGOMERY, D. C.; SCRATON, R. D. Improving the performance of the multivariate exponentially weighted moving average control chart. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 15, p. 161-166, 1999.

RUSSO, S.; CAMARGO, M. E Controle estatístico de processo: solução de um estudo de caso usando procedimentos estatísticos. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS, 24, 2004, Florianópolis. **CD ROM**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2004, 6p.

SACCUCCI, M. S.; LUCAS, J. M. Average run lengths for exponentially weighted moving average control schemes using the Markov chain approach. **Journal of Quality Technology**, v. 22, p. 154-162, 1990.

SCHALL, S.; CHANDRA, J. Multivariate quality control using principal components. **International Journal of Production Research**, v. 25, p. 571-588, 1987.

SEREL, D. A.; MOSKOWITZ, H.; TANG, J. Univariate \bar{X} control charts for individual characteristics in a multinormal model. **IIE Transactions**, v. 32, p. 1115-1125, 2000.

SHEWHART, W. A. Economic control of quality of manufactured product. D. Van Nostrand Company, NY-EUA, 501 p., 1^a ed., 1931.

SKINNER, K. R. **Multivariate process control for discrete data**. 2002. 117f. Thesis (PhD) - Arizona State University, 2002.

SOUZA, A. M.; RIGÃO, M. H. Identificação de variáveis fora de controle em processos produtivos multivariados. **Revista Produção**, v. 15, p. 74-86, 2005.

SURTIHADI, J.; RAGHAVACHARI, M.; RUNGER, G. Multivariate control charts for process dispersion. **International Journal of Production Research**, v. 42, p. 2993-3009, 2004.

TANG, P. F.; BARNETT, N. S. Dispersion control for multivariate processes. **Australian Journal of Statistics**, v. 38, p. 235-25, 1996.

TANG, P. F.; BARNETT, N. S. Dispersion control for multivariate processes – some comparisons. **Australian Journal of Statistics**, v. 38, p. 253-273, 1996a.

TESTIK, M. C. **Univariate and multivariate statistical process control: a generalized likelihood ratio approach**. 2003. 135f. Tese (PhD) - Arizona State University, 2003.

THOMAS, J. B. **Interpretation of multivariate control chart signals**. 2002. 128f. Thesis (PhD in the Program of Applied Statistics) – Graduate School of The University of Alabama, Tuscaloosa, 2002.

ZHANG, G.; CHANG, S. I. Multivariate EWMA control charts using individual observations for process mean and variance monitoring and diagnosis. **International Journal of Production Research**, 2008.

WANG, F. K. A simple data transformation of auto-correlated data for SPC. **International Journal of Production Research**, v. 43, p. 981-989.

WOODALL, W. H.; NCUBE, M.M. Multivariate CUSUM quality control procedures. **Technometrics**, v. 27; n. 3, p. 285-292, 1985.

WU, Z.; SPEDDING, T.A. A synthetic control chart for detecting small shifts in the process mean. **Journal of Quality Technology**, v. 32, p. 32-38, 2000.

WU, Z.; SPEDDING, T.A. Implementing synthetic control charts. **Journal of Quality Technology**, v. 32, p. 75-78, 2000a.

WU, Z.; YEO, S.H. Implementing synthetic control charts for attributes. **Journal of Quality Technology**, v. 33, p. 112-114, 2001.

WU, Z.; YEO, S.H.; SPEDDING, T.A. A synthetic control chart for detecting fraction nonconforming increases. **Journal of Quality Technology**, v. 33, p. 104-111, 2001.

YEH, A. B.; LIN, D. K. J.; ZHOU, H.; VENKATARAMANI, C. A multivariate exponentially weighted moving average control chart for monitoring process variability. **Journal of Applied Statistics**, v. 30, p. 507-536, 2003.

YEH, A. B.; HUWANG, L.; WU, Y. F. A likelihood-ratio-based EWMA control chart for monitoring variability of multivariate normal processes. **IIE Transactions**, v. 36, p. 865-879, 2004.

YEH, A. B.; HUWANG, L.; WU, C. W. A multivariate EWMA control chart for monitoring process variability with individual observations. **IIE Transactions**, v. 37, p. 1023-1035, 2005.

YEH, A. B.; LIN, D. K. J.; MCGRATH, R. N. Multivariate control charts for monitoring covariance matrix: a review. **Quality Technology and Quantitative Management**, v. 3, p. 415-436, 2006.

APÊNDICE A: OBTENÇÃO DO NMA PARA O GRÁFICO DE VMAX – CASO BIVARIADO

Considere as estatísticas $S_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2}{n}$ e $S_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_{2j}^2}{n}$, onde $x_{1j} = (X_{1j} - \mu_1)/\sigma_1$ e $x_{2j} = (X_{2j} - \mu_2)/\sigma_2$. O poder do gráfico de VMAX é dado por:

$$p_d = 1 - \Pr[(S_1^2 < k) \cap (S_2^2 < k)] \quad (A1)$$

onde k é o fator de abertura dos limites de controle. Portanto,

$$NMA = \frac{1}{1 - \Pr[(S_1^2 < k) \cap (S_2^2 < k)]} \quad (A2)$$

Supõe-se que com o processo em controle a matriz de covariâncias é dada por

$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$. A ocorrência da causa especial altera a matriz de covariâncias inicial

para $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{12} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} \end{pmatrix}$, sendo $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$.

Para o caso I, $a_1 = \gamma$ e $a_2 = 1$ (ou $a_2 = \gamma$ e $a_1 = 1$) e para o caso II, $a_1 = a_2 = \sqrt{\gamma}$. Se $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, então $\rho = \sigma_{12} = \sigma_{21}$.

Considera-se também outro tipo de causa especial que altera a matriz de covariâncias inicial para $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} \end{pmatrix}$. Neste caso, o coeficiente de

correlação é alterado de ρ para $\rho' = \frac{\sigma_{12}}{a_1 a_2 \sigma_1 \sigma_2}$.

Se X_1 e X_2 são normalmente distribuídos:

$$\frac{nS_1^2}{a_1^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{1i}}{a_1} \right)^2 \sim \chi_n^2 \quad (A3)$$

e

$$\frac{x_{2i} | x_{1i}}{a_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \sim N\left(\frac{\rho x_{1i}}{a_1 \sqrt{1 - \rho^2}}, 1\right). \quad (\text{A4})$$

Conseqüentemente,

$$\frac{nS_2^2 | x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}}{a_2^2(1 - \rho^2)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{2i} | x_{1i}}{a_2 \sqrt{1 - \rho^2}}\right)^2 \sim \chi_{n, (\rho^2/1-\rho^2)}^2 \chi_n^2 \quad (\text{A5})$$

e

$$p_d = 1 - \int_0^{nk/a_1^2} \Pr\left[\chi_{n, (\rho^2/1-\rho^2)}^2 < \frac{nk}{a_2^2(1-\rho^2)}\right] \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-t/2} t^{(n/2)-1} dt, \quad (\text{A6})$$

lembrando que a notação χ_n^2 representa uma distribuição de qui-quadrado com n graus de liberdade e $\chi_{n, (\rho^2/1-\rho^2)}^2$ representa uma distribuição de qui-quadrado com n graus de liberdade e com o parâmetro de não-centralidade dado por $(\rho^2/1-\rho^2)\chi_n^2$. Fazendo uso da sub-rotina DCSNDF da biblioteca IMSL *FORTRAN* (1995), a qual calcula a função de distribuição de qui-quadrado não-central, torna-se mais simples obter o valor da integral na expressão (A6).

Durante o período em controle, $a_1 = a_2 = 1$. Como o risco de alarme falso é uma função decrescente contínua de k , realiza-se uma busca exaustiva utilizando a expressão (A6) para obter o valor de k que torna p_d igual a um valor de α especificado, lembrando que $NMA_0 = 1/\alpha$. Durante o período fora-de-controle, com os valores de ρ , n e k , a_1 e a_2 especificados, a expressão (A6) é utilizada para obter o NMA , lembrando que $NMA = (1/p_d)$.

APÊNDICE B: OBTENÇÃO DO NMA PARA O GRÁFICO DE VMAX COM AMOSTRAGEM DUPLA

Sejam as variâncias amostrais padronizadas $S_{11}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}^2}{n_1}$, $S_{12}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} x_{2j}^2}{n_1}$, $S_{21}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2}{n}$ e

$$S_{22}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_{2j}^2}{n}, \text{ onde } x_{1j} = (X_{1j} - \mu_1)/\sigma_1 \text{ e } x_{2j} = (X_{2j} - \mu_2)/\sigma_2.$$

No primeiro estágio, a probabilidade p_1 do gráfico de controle sinalizar um desajuste do processo após a inspeção da amostra de tamanho n_1 é dada por:

$$p_1 = 1 - \Pr[(S_{11}^2 < k_1) \cap (S_{12}^2 < k_1)], \quad (\text{B1})$$

onde k_1 é o fator de abertura do limite de controle LC_1 .

Considerando $f(t_i) = \frac{1}{2^{n_i/2} \Gamma(n_i/2)} e^{-t_i/2} t_i^{(n_i/2)-1}$ $i = 1, 2$, tem-se que

$$p_1 = 1 - \int_0^{n_1 k_1 / a_1^2} \Pr\left[\chi_{n_1, t_1}^2(\rho^2 / (1 - \rho^2)) < \frac{n_1 k_1}{a_2^2 (1 - \rho^2)}\right] f(t_1) dt_1. \quad (\text{B2})$$

Durante o período fora-de-controle, $a_1 = a_2 = 1$ e uma busca exaustiva utilizando (B2) é realizada para obter o fator de abertura k_1 que torna p_1 igual a um valor especificado de α_1 .

A probabilidade p_s , da amostragem ser interrompida no primeiro estágio, é dada por:

$$p_s = p_1 + \int_0^{n_1 w / a_1^2} \Pr\left[\chi_{n_1, t_1}^2(\rho^2 / (1 - \rho^2)) < \frac{n_1 w}{a_2^2 (1 - \rho^2)}\right] f(t_1) dt_1, \quad (\text{B3})$$

onde w é o fator de abertura de LA .

Quando o processo está em controle, $p_1 = \alpha_1$, $a_1 = a_2 = 1$ e uma busca exaustiva utilizando (B3) é realizada para obter o fator de abertura w que torna p_s igual a um dado valor de p_0 . A probabilidade p_0 é função dos valores de n_1 , n_2 e \bar{n} especificados pelo usuário, ver expressão (5.1).

No segundo estágio o gráfico de controle tem uma probabilidade p_2 de sinalizar um desajuste após a inspeção dos $n_1 + n_2$ itens da amostra, e ela é dada por:

$$p_2 = 1 - (p_{2a} + p_{2b}) \quad (\text{B4})$$

onde

$$\begin{aligned} p_{2a} &= \Pr[(S_{21}^2 < k_2) \cap (S_{22}^2 < k_2) | (S_{11}^2 < w) \cap (w < S_{12}^2 < k_1)] \cdot \Pr[(S_{11}^2 < w) \cap (w < S_{12}^2 < k_1)] \\ &= \int_0^{n_1 w / a_1^2} \int_0^{n k_2 / a_1^2 - t_1} \Pr\left[\chi_{n, (t_1 + t_2)(\rho^2 / 1 - \rho^2)}^2 < \frac{n k_2}{a_2^2 (1 - \rho^2)} \mid \frac{n_1 w}{a_2^2 (1 - \rho^2)} < \chi_{n_1, t_1(\rho^2 / 1 - \rho^2)}^2 < \frac{n_1 k_1}{a_2^2 (1 - \rho^2)}\right] \\ &\quad \Pr\left[\frac{n_1 w}{a_2^2 (1 - \rho^2)} < \chi_{n_1, t_1(\rho^2 / 1 - \rho^2)}^2 < \frac{n_1 k_1}{a_2^2 (1 - \rho^2)}\right] f(t_1) f(t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

e

$$\begin{aligned} p_{2b} &= \Pr[(S_{21}^2 < k_2) \cap (S_{22}^2 < k_2) | (w < S_{11}^2 < k_1) \cap (S_{12}^2 < k_1)] \cdot \Pr[(w < S_{11}^2 < k_1) \cap (S_{12}^2 < k_1)] \\ p_{2b} &= \int_{n_1 w / a_1^2}^{n_1 k_1 / a_1^2} \int_0^{n k_2 / a_1^2 - t_1} \Pr\left[\chi_{n, (t_1 + t_2)(\rho^2 / 1 - \rho^2)}^2 < \frac{n k_2}{a_2^2 (1 - \rho^2)} \mid \chi_{n_1, t_1(\rho^2 / 1 - \rho^2)}^2 < \frac{n_1 k_1}{a_2^2 (1 - \rho^2)}\right] \\ &\quad \Pr\left[\chi_{n_1, t_1(\rho^2 / 1 - \rho^2)}^2 < \frac{n_1 k_1}{a_2^2 (1 - \rho^2)}\right] f(t_1) f(t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

onde k_2 é o fator de abertura de LC_2 .

Durante o período em controle, $a_1 = a_2 = 1$ e uma busca exaustiva utilizando (B6) é utilizada para obter o fator de abertura k_2 que torna p_2 igual a um valor especificado de α_2 , lembrando que k_1 foi obtido por uma busca exaustiva utilizando (B2).

O poder do gráfico de controle com amostragem dupla é dado por:

$$p_d = p_1 + p_2. \quad (\text{B7})$$

Então, $NMA = (1/p_d)$.

Quando $a_1 = a_2 = 1$ nas expressões (B2) e (B4), $\alpha = p_1 + p_2$.

APÊNDICE C: OBTENÇÃO DO NMA PARA O GRÁFICO DE VMAX – CASO TRIVARIADO

Considere as estatísticas $S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}^2}{n}$, $i = 1,2,3$, onde $x_{ij} = (X_{ij} - \mu_i)/\sigma_i$. O poder do gráfico de VMAX é dado por:

$$p_d = 1 - \Pr[(S_1^2 < k) \cap (S_2^2 < k) \cap (S_3^2 < k)] , \quad (C1)$$

onde k é o fator de abertura do limite de controle. O NMA é dado por

$$NMA = \frac{1}{1 - \Pr[(S_1^2 < k) \cap (S_2^2 < k) \cap (S_3^2 < k)]} \quad (C2)$$

Considere também os seguintes eventos:

$$A: S_1^2 < k, \quad B: S_2^2 < k \quad e \quad C: S_3^2 < k.$$

Supõe-se que com o processo em controle a matriz de covariâncias é dada por

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \text{ Assume-se três possíveis maneiras da causa especial alterar a}$$

matriz de covariâncias, resultando na matriz

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{12} & a_1 \cdot a_3 \cdot \sigma_{13} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} & a_2 \cdot a_3 \cdot \sigma_{23} \\ a_1 \cdot a_3 \cdot \sigma_{31} & a_2 \cdot a_3 \cdot \sigma_{23} & a_3 \cdot a_3 \cdot \sigma_{33} \end{pmatrix}, \text{ onde } \rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad i \neq j \in \{1,2,3\} \text{ e}$$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Para o caso I, $a_1 = \gamma$ e $a_2 = a_3 = 1$ (ou $a_2 = \gamma$ e $a_1 = a_3 = 1$, ou $a_3 = \gamma$ e $a_1 = a_2 = 1$). Para o caso II, $a_1 = a_2 = \sqrt{\gamma}$ e $a_3 = 1$, ou $a_1 = a_3 = \sqrt{\gamma}$ e $a_2 = 1$, ou $a_2 = a_3 = \sqrt{\gamma}$ e $a_1 = 1$. Para o caso III, $a_1 = a_2 = a_3 = \sqrt[3]{\gamma}$. Assume-se também um outro tipo de causa especial que altera a matriz de covariâncias inicial para

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & a_p \cdot a_p \cdot \sigma_{pp} \end{bmatrix}. \text{ Neste caso, os coeficientes de correlação}$$

são alterados de ρ_{ij} para $\rho'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{a_i a_j \sigma_i \sigma_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, p$, sendo $i \neq j$.

O poder do gráfico é dado por:

$$p_d = 1 - \Pr(A \cap B \cap C) \quad (\text{C3})$$

ou seja

$$p_d = \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) + \Pr(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \quad (\text{C4})$$

onde

$$\Pr(A) = \int_0^{k/a_1^2} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-t/2} t^{(n/2)-1} dt, \quad (\text{C5})$$

$$\Pr(B) = \int_0^{k/a_2^2} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-t/2} t^{(n/2)-1} dt, \quad (\text{C6})$$

$$\Pr(C) = \int_0^{k/a_3^2} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-t/2} t^{(n/2)-1} dt, \quad (\text{C7})$$

$$\Pr(A \cap B) = \int_0^{k/a_1^2} \Pr \left[\chi_{n, (t\rho_{12}^2/1-\rho_{12}^2)}^2 < \frac{nk}{a_2^2(1-\rho_{12}^2)} \right] \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-t/2} t^{(n/2)-1} dt, \quad (\text{C8})$$

$$\Pr(A \cap C) = \int_0^{k/a_1^2} \Pr \left[\chi_{n, (t\rho_{13}^2/1-\rho_{13}^2)}^2 < \frac{nk}{a_3^2(1-\rho_{13}^2)} \right] \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-t/2} t^{(n/2)-1} dt, \quad (\text{C9})$$

$$\Pr(B \cap C) = \int_0^{k/a_2^2} \Pr \left[\chi_{n, (t\rho_{23}^2/1-\rho_{23}^2)}^2 < \frac{nk}{a_3^2(1-\rho_{23}^2)} \right] \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-t/2} t^{(n/2)-1} dt \quad (\text{C10})$$

e

$$\Pr(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = \int_{k/a_1^2}^{\infty} p_1 p_2 \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-t/2} t^{(n/2)-1} dt, \quad (\text{C11})$$

com p_1 e p_2 sendo

$$p_1 = 1 - \Pr \left[\chi_{n, (t\rho_{12}^2/1-\rho_{12}^2)}^2 < \frac{nk}{a_2^2(1-\rho_{12}^2)} \right] \quad (\text{C12})$$

e

$$p_2 = 1 - \Pr \left[\chi_{n, (t\rho_{13}^2/1-\rho_{13}^2)}^2 < \frac{nk}{a_3^2(1-\rho_{13}^2)} \right]. \quad (\text{C13})$$

A expressão (C3) depende apenas da probabilidade da variância amostral das três variáveis X_1 , X_2 e X_3 serem inferiores ao limite de controle. Para a obtenção desta probabilidade é necessário supor independência entre duas das três variáveis ($\rho = 0$). Como em geral isto não ocorre, tem-se que os valores teóricos do *NMA* não são exatos.

Para obtenção de valores do *NMA* mais próximos dos valores exatos, propõe-se o uso da expressão (C4) para o cálculo do poder do gráfico de controle. Na expressão (C4) apenas o último termo, que corresponde a probabilidade das variâncias amostrais de X_1 , X_2 e X_3 serem superiores ao limite de controle, é obtido de forma aproximada. Como esta probabilidade é pequena e contribui pouco para o cálculo do poder do gráfico de controle, a não exatidão em sua obtenção não afeta o valor do *NMA*, ao menos em termos práticos. A expressão (C4) pode ser facilmente estendida para os casos em que $p > 3$.

APÊNDICE D: OBTENÇÃO DA PROBABILIDADE p_s DE w_1 E/OU w_2 EXCEDER O LIMITE DE CONTROLE

Considere as estatísticas $W_1 = \frac{kS_1^2}{\sigma_1^2}$ e $W_2 = \frac{kS_2^2}{\sigma_2^2}$, onde $S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{X}_1)^2}{n-1}$ e $S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{X}_2)^2}{n-1}$ são as variâncias amostrais de duas características de qualidade, X_1 e X_2 . A probabilidade de W_1 e/ou W_2 exceder o limite de controle é dada por:

$$p_s = 1 - \Pr[(W_1 < LC) \cap (W_2 < LC)]. \quad (D1)$$

Com o processo em controle o vetor de médias e a matriz de covariâncias são dados por $\boldsymbol{\mu}'_0 = (\mu_{01}; \mu_{02})$ e $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$, respectivamente. A causa especial desloca o vetor de médias de $\boldsymbol{\mu}_0$ para $\boldsymbol{\mu}'_1 = (\mu_{01} + \delta_1\sigma_1; \mu_{02} + \delta_2\sigma_2)$ e/ou altera a matriz de covariâncias de $\boldsymbol{\Sigma}_0$ para $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{12} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} \end{pmatrix}$ ou para $\boldsymbol{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} \end{pmatrix}$.

No primeiro caso, em que $\boldsymbol{\Sigma}_0$ se altera para $\boldsymbol{\Sigma}_1$, a causa especial não afeta a correlação entre X_1 e X_2 , que é dada por $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$. No segundo caso, no entanto, a causa especial reduz a correlação de ρ para $\rho' = \frac{\sigma_{12}}{a_1a_2\sigma_1\sigma_2}$. Se X_1 e X_2 são normalmente distribuídos,

$$[x_{2i} - (\mu_2 + \gamma_2\sigma_2)] | x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} \sim N\left(\rho \frac{a_2\sigma_2}{a_1\sigma_1} [x_{1i} - (\mu_1 + \delta_1\sigma_1)]; a_2^2\sigma_2^2(1 - \rho^2)\right) \quad (D2)$$

ou ainda

$$\frac{[x_{2i} - (\mu_2 + \delta_2\sigma_2)] + \rho \frac{a_2\sigma_2}{a_1\sigma_1} [(\mu_1 + \delta_1\sigma_1) - \bar{X}_1]}{a_2\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}} | x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} \sim N\left(\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left(\frac{x_{1i} - \bar{X}_1}{a_1\sigma_1}\right), 1\right) \quad (D3)$$

Como $\rho \frac{a_2 \sigma_2}{a_1 \sigma_1} [(\mu_1 + \delta_1 \sigma_1) - \bar{X}_1] = (\mu_2 + \delta_2 \sigma_2) - \bar{X}_2$, segue que (ver página 168, MOOD et al., 1974):

$$\left(\frac{x_{2i} - \bar{X}_2}{a_2 \sigma_2} \right) \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \Big|_{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}} \sim N \left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{x_{1i} - \bar{X}_1}{a_1 \sigma_1} \right), 1 \right) \quad (D4)$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)S_2^2}{a_2^2 \sigma_1^2 \sqrt{1-\rho^2}} \Big|_{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}} &= \frac{(n-1)W_2}{ka_2^2 \sqrt{1-\rho^2}} \Big|_{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{2i} - \bar{X}_2}{a_2 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \right)^2 \Big|_{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}} \sim \chi_{n, (\rho^2/1-\rho^2)}^2 \chi_{n-1}^2 \end{aligned} \quad (D5)$$

Como

$$\frac{(n-1)S_1^2}{a_1^2 \sigma_1^2} = \frac{(n-1)W_1}{ka_1^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{1i} - \bar{X}_1}{a_1 \sigma_1} \right)^2 \sim \chi_{n-1}^2 \quad (D6)$$

tem-se que

$$p_s = 1 - \int_0^{\frac{(n-1)LC}{ka_1^2}} \Pr \left[\chi_{n, (\rho^2/1-\rho^2)}^2 < \frac{(n-1)LC}{ka_2^2 (1-\rho^2)} \right] \frac{1}{2^{(n-1)/2} \Gamma[(n-1)/2]} e^{-t/2} t^{[(n-1)/2]-1} dt \quad (D7)$$

lembrando que a notação $\chi_{n, (\rho^2/1-\rho^2)}^2$ representa uma distribuição de qui-quadrado com n graus de liberdade e com o parâmetro de não-centralidade dado por $(\rho^2/1-\rho^2) \chi_n^2$.

A constante de ponderação k é obtida pela expressão (D7), fazendo $a_1 = a_2 = 1$,

$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$ e $p_s = 1 - \sqrt{1-\alpha}$, lembrando que o limite de controle, LC , é obtido da expressão

(7.1). Utilizou-se a sub-rotina CSNDF da biblioteca IMSL *FORTRAN* (1995) para o cálculo da função de distribuição de qui-quadrado não-central.

APÊNDICE E: OBTENÇÃO DA PROBABILIDADE p_s DE R_1 E/OU R_2 EXCEDER O LIMITE DE CONTROLE

Quando o processo está em controle, $\boldsymbol{\mu}'_0 = (\mu_{01}; \mu_{02})$ e $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$. A causa especial desloca o vetor de médias de $\boldsymbol{\mu}_0$ para $\boldsymbol{\mu}'_1 = (\mu_{01} + \delta_1 \sigma_1; \mu_{02} + \delta_2 \sigma_2)$ e/ou altera a matriz de covariâncias de $\boldsymbol{\Sigma}_0$ para $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{12} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} \end{pmatrix}$. Considera-se que a causa especial não afeta a correlação entre X_1 e X_2 , que é dada por $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$.

Seja X_{1i} e X_{2i} , $i=1,2,3,\dots,n$ as medidas das variáveis X_1 e X_2 . Seja $\bar{X}_1 = (X_{11} + \dots + X_{1n})/n$ e $\bar{X}_2 = (X_{21} + \dots + X_{2n})/n$ as médias amostrais das variáveis X_1 e X_2 e seja $e_1 = \bar{X}_1 - \mu_{01}$ e $e_2 = \bar{X}_2 - \mu_{02}$ as diferenças entre as médias amostrais e os valores alvo das médias do processo. Os pontos amostrais R_1 e R_2 são dados por:

$$R_1 = \sum_{i=1}^n (X_{1i} - \mu_{01} + \xi_1 \sigma_1)^2,$$

$$R_2 = \sum_{i=1}^n (X_{2i} - \mu_{02} + \xi_2 \sigma_2)^2, \quad (\text{E1})$$

Após alguns cálculos, tem-se que:

$$\frac{R_1}{a_1^2 \sigma_1^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{a_1^2 \sigma_1^2} + \left(Z_{\bar{x}_1} + \frac{\delta_1 + \xi_1}{a_1} \sqrt{n} \right)^2$$

$$\frac{R_2}{a_2^2 \sigma_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{a_2^2 \sigma_2^2} + \left(Z_{\bar{x}_2} + \frac{\delta_2 + \xi_2}{a_2} \sqrt{n} \right)^2 \quad (\text{E2})$$

$$\text{onde } Z_{x_1}^- = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_1 - \mu_1 - \delta_1 \sigma_1}{a_1 \sigma_1} \right) \text{ e } Z_{x_2}^- = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_2 - \mu_2 - \delta_2 \sigma_2}{a_2 \sigma_2} \right).$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned} P_s(Z_{x_1}^-, Z_{x_2}^-) &= \Pr\left[(T(x_1) < LC\sigma_1^2) \cap (T(x_2) < LC\sigma_2^2) \mid Z_{x_1}^-, Z_{x_2}^-\right] = \\ &= \Pr\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{a_1^2 \sigma_1^2} < LC_1\right) \cap \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{a_2^2 \sigma_2^2} < LC_2\right) \mid Z_{x_1}^-, Z_{x_2}^- \right] \end{aligned} \quad (\text{E3})$$

$$\text{onde } LC_1 = \frac{LC}{a_1^2} - \left(Z_{x_1}^- + \frac{\delta_1 + \xi_1}{a_1} \sqrt{n} \right)^2 \text{ e } LC_2 = \frac{LC}{a_2^2} - \left(Z_{x_2}^- + \frac{\delta_2 + \xi_2}{a_2} \sqrt{n} \right)^2.$$

Se X_1 e X_2 são normalmente distribuídos,

$$[X_{2i} - (\mu_2 + \delta_2 \sigma_2)] \mid X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n} \sim N\left(\rho \frac{a_2 \sigma_2}{a_1 \sigma_1} [X_{1i} - (\mu_1 + \delta_1 \sigma_1)]; a_2^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)\right)$$

ou

$$\frac{[X_{2i} - (\mu_2 + \delta_2 \sigma_2)] + \rho \frac{a_2 \sigma_2}{a_1 \sigma_1} [(\mu_1 + \delta_1 \sigma_1) - \bar{X}_1]}{a_2 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \mid X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n} \sim N\left(\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left(\frac{X_{1i} - \bar{X}_1}{a_1 \sigma_1}\right), 1\right)$$

Como $\rho \frac{a_2 \sigma_2}{a_1 \sigma_1} [(\mu_1 + \delta_1 \sigma_1) - \bar{X}_1] = (\mu_2 + \delta_2 \sigma_2) - \bar{X}_2$, segue que (ver página 168,

MOOD et al., 1974):

$$\left(\frac{X_{2i} - \bar{X}_2}{a_2 \sigma_2}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \mid X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n} \sim N\left(\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left(\frac{X_{1i} - \bar{X}_1}{a_1 \sigma_1}\right), 1\right) \quad (\text{E4})$$

Conseqüentemente,

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{a_2^2 \sigma_2^2 \sqrt{1-\rho^2}} \Big| X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{2i} - \bar{X}_2}{a_2 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \right)^2 \Big| X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n} \sim \chi_{n, (\rho^2/1-\rho^2)}^2 \chi_{n-1}^2 \quad (\text{E5})$$

Como

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{a_1^2 \sigma_1^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{1i} - \bar{X}_1}{a_1 \sigma_1} \right)^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

então

$$p_s(Z_{x_1}^-, Z_{x_2}^-) = \int_0^{LC_1} \Pr \left[\chi_{n, (\rho^2/1-\rho^2)}^2 < \frac{LC_2}{(1-\rho^2)} \right] \frac{1}{2^{(n-1)/2} \Gamma[(n-1)/2]} e^{-t/2} t^{[(n-1)/2]-1} dt \quad (\text{E6})$$

lembrando que a notação $\chi_{n, (\rho^2/1-\rho^2)}^2$ representa uma distribuição de qui-quadrado com n graus de liberdade e com o parâmetro de não-centralidade dado por $(\rho^2/1-\rho^2)\chi_n^2$. Utilizou-se a sub-rotina CSNDF da biblioteca IMSL *FORTRAN* (1995) para o cálculo da função de distribuição de qui-quadrado não-central.

Finalmente, a probabilidade de R_1 e/ou R_2 exceder o limite de controle é dada por:

$$p = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} p_s(Z_{x_1}^-, Z_{x_2}^-) f(Z_{x_1}^-, Z_{x_2}^-) dz_{x_1}^- dz_{x_2}^- \quad (\text{E7})$$

onde $f(Z_{x_1}^-, Z_{x_2}^-)$ é uma função densidade normal bivariada padronizada com correlação ρ .