



Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

**Fractais de Rauzy, Autômatos e
Frações Contínuas**

Gustavo Antonio Pavani

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi

Tese apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Câmpus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

São José do Rio Preto

Março/2015

GUSTAVO ANTONIO PAVANI

Fractais de Rauzy, Autômatos e Frações Contínuas

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Matemática, área de Geometria e Sistemas Dinâmicos junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Ali Messaoudi
Professor Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

Benito Frazão Pires
Professor Doutor
Universidade de São Paulo

Claudio Aguinaldo Buzzi
Professor Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

Daniel Gonçalves
Professor Doutor
Universidade Federal de Santa Catarina

Marcelo Sobottka
Professor Doutor
Universidade Federal de Santa Catarina

São José do Rio Preto
17 de Março de 2015

Pavani, Gustavo Antonio.

Fractais de Rauzy, autômatos e frações contínuas / Gustavo Antonio Pavani. – São José do Rio Preto, 2015.

78 f. : il.

Orientador: Ali Messaoudi

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Fractais.
4. Topologia. I. Messaoudi, Ali. II. Universidade Estadual Paulista, “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.
III. Título.

CDU - 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho agradeço:

Primeiramente à Deus.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ali Messaoudi, pelos inúmeros conselhos, pela paciência durante a realização desta tese e principalmente pela amizade ao longo de todos esses anos. Afinal, foram quase 10 anos, desde a iniciação científica! Muito obrigado!

À minha mãe Josefa que sempre esteve ao meu lado me apoiando em todas as minhas decisões.

À banca examinadora.

Ao Prof. Pierre Arnoux, por ter aceitado me coorientar durante o estágio de doutorado no Institut de Mathématiques de Luminy.

À Tati, pela amizade e ajuda com a tese.

À Capes, pelo auxílio financeiro, o qual possibilitou-me a realização do estágio na França, através do projeto de cooperação Capes-Cofecub.

Resumo

O objetivo desta tese é estudar algumas propriedades topológicas e aritméticas de uma classe de fractais de Rauzy que não possui a Propriedade (F). Em particular provamos que os fractais de Rauzy desta classe induzem um azulejamento periódico do plano complexo. Além disso, construímos um autômato finito capaz de gerar a fronteira desses fractais e parametrizá-las. Este autômato também é utilizado para estabelecer condições sobre o número de vizinhos que compõem as fronteiras desses fractais. Estudamos também as melhores aproximações diofantinas simultâneas para pares de números algébricos $v = (\theta, \theta^2)$, em que $1/\theta$ é um número de Pisot cúbico cujos conjugados não são números reais e $1/\theta$ não satisfaz a Propriedade (F).

Palavras-Chave: Substituições, sistemas dinâmicos, fractais.

Abstract

The aim of this doctoral thesis is to study some topological and arithmetical properties of a class of Rauzy fractals which do not have the (F) Property. In particular we proved that the Rauzy fractals of this class induce a periodic tiling of the complex plane. Furthermore, we studied the construction of a finite automaton able to generate the boundary of these fractals, and to parametrize them. This automaton is also used to establish conditions on the number of neighbors of these fractals. We also studied the best simultaneous diophantine approximation for pairs of algebraic numbers $v = (\theta, \theta^2)$, where $1/\theta$ is a cubic Pisot number whose conjugates are not real numbers, and $1/\theta$ does not satisfy the (F) Property.

Keywords: Substitutions, dynamical systems, fractals.

Sumário

1	Substituições e Sistemas Dinâmicos	13
1.1	Palavras	13
1.2	Sistemas Dinâmicos Simbólicos	14
1.3	Substituições	14
1.4	Sistemas de Numeração e Base β	16
1.4.1	β -representação	17
1.4.2	Números de Pisot e Propriedade (F)	18
1.4.3	Sistema de Numeração sobre os Inteiros	19
1.4.4	β -substituição	20
2	Fractais de Rauzy	22
2.1	Fractal de Rauzy Clássico	22
2.1.1	Métodos de Construção do Fractal de Rauzy Clássico	23
2.1.2	Método de Shunji Ito	23
2.1.3	Via Sistemas de Numeração	24
2.1.4	Método das Substituições Generalizadas	25
2.2	Caso Geral	26
2.2.1	Via β -substituição	26
3	Uma classe de Fractais de Rauzy que não possui a propriedade (F)	29
3.1	Propriedades topológicas do fractal de Rauzy	32
3.1.1	Compacidade	32
3.1.2	Azulejamento do plano	33
3.2	Fronteira de $\mathcal{R}$	36
4	Construção do Autômato que reconhece os pontos com duas representações	39

4.0.1	Construção Algoritmica dos números complexos que possuem duas representações	39
4.0.2	Autômato dos vizinhos	49
5	Parametrização da Fronteira de $\mathcal{R}_{3,-2}$	54
6	Sequência de Melhor Aproximação	61
6.1	Fractal de Rauzy	62
6.2	Norma de Rauzy	63
6.3	Sequência de melhor aproximação	64
7	Anexo	68
7.1	Determinação dos Estados do Autômato	68
7.2	Programa computacional	74

Introdução

Em 1982, Gérard Rauzy [27] descobriu um interessante subconjunto do plano complexo chamado Fractal de Rauzy. Inicialmente o intuito era estabelecer uma representação geométrica do sistema dinâmico simbólico associado à substituição σ definida por $\sigma(0) = 01$, $\sigma(1) = 02$, $\sigma(2) = 0$. Este conjunto foi estudado por vários matemáticos (ver, por exemplo, [20], [21], [22], [1], [8], [17]) e relacionado à diversas áreas da Matemática como Sistemas Dinâmicos e Teoria dos Números. Dentre as várias propriedades desse conjunto, destacam-se as seguintes: é um conjunto compacto, conexo e de interior simplesmente conexo, sua fronteira é uma curva de Jordan fractal e, além disso, esse conjunto induz um azulejamento periódico do plano complexo.

O Fractal de Rauzy pode ser obtido através dos Sistemas de Numeração, como segue:

Considere a sequência de Tribonacci $(T_n)_{n \geq 0}$ tal que $T_0 = T_1 = 0$, $T_2 = 1$ e satisfazendo a recorrência $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$, $n \geq 0$. É conhecido que usando o Algoritmo Greedy (“fominha”) todo inteiro natural n se escreve de maneira única como $n = \sum_{i=0}^N \varepsilon_i T_i$ (ver, por exemplo, [25]), em que os dígitos ε_i satisfazem a propriedade: $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ e $\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} \neq 111$, para todo $i \geq 0$.

O polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ é o polinômio característico da sequência $(T_n)_{n \geq 0}$. Este polinômio possui uma raiz real $\beta > 1$ e duas raízes complexas conjugadas α e $\bar{\alpha}$ de módulo estritamente menor que 1.

O Fractal de Rauzy é, por definição, o conjunto

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i, \varepsilon_i \in \{0, 1\} \text{ e } \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} \neq 111, \forall i \geq 0 \right\}.$$

A fronteira de $\mathcal{E}$ foi objeto de estudos de vários matemáticos. Por exemplo: em [17], Ito e Kimura calcularam a dimensão de Hausdorff da fronteira de $\mathcal{E}$. Em [20] Messaoudi mostrou que a fronteira de $\mathcal{E}$ é gerada por um autômato finito. Usando este fato ele provou várias propriedades da fronteira de $\mathcal{E}$, em particular que ela é uma curva de Jordan e um quase-círculo.

Em [23], os autores estenderam esses resultados para certos conjuntos $\mathcal{E}_a$, associados aos polinômios $P_{a,b}(x) = x^3 - ax^2 - bx - 1$ em que $a \geq b \geq 1$. Em [29] foram estudados os conjuntos

relacionados aos polinômios $P_a(x) = x^3 - ax^2 + x - 1$, com $a \geq 2$. Os fractais de Rauzy também foram estudados em [8] e [31], dentre muitos outros.

Nesta tese vamos considerar os Fractais de Rauzy $\mathcal{R}_{a,b}$ associados aos polinômios $P_{a,b}(x) = x^3 - ax^2 - bx - 1$, em que $-a + 1 \leq b \leq 2$, os quais também estão associados à substituição $\sigma(1) \mapsto 1^{(a-1)}2$, $\sigma(2) \mapsto 1^{(a+b-1)}3$, $\sigma(3) \mapsto 1^{(a+b)}3$. Essa classe é chamada classe de fractais de Rauzy sem a Propriedade (F) (ver Capítulo 3).

De modo análogo ao Fractal de Rauzy clássico podemos associar ao polinômio $P_{a,b}(x)$ o Fractal de Rauzy definido da seguinte maneira:

Seja $(R_n)_{n \geq 0}$ a sequência recorrente definida por:

$$R_0 = 1, R_1 = a, R_2 = a^2 + b, R_{n+3} = aR_{n+2} + bR_{n+1} + R_n,$$

para todo $n \geq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$, satisfazendo a condição $-a + 1 \leq b \leq -2$.

Usando o algoritmo fominha podemos provar (ver Proposição 3.0.1) que todo inteiro natural n pode ser representado de maneira única como soma de termos dessa sequência como $n = \sum_{i=0}^N \varepsilon_i R_i$, com $\varepsilon_i \in \{0, \dots, a-1\}$, em que $\varepsilon_j \varepsilon_{j-1} \dots \varepsilon_0 \leq_{lex} (a-1)(a+b-1)(a+b) \dots (a+b)$, para todo $j \geq 0$, e $<_{lex}$ representa a ordem lexicográfica.

Seja $P_{a,b}(x) = x^3 - ax^2 - bx - 1$, o polinômio característico da sequência $(R_n)_{n \geq 0}$ e β, α e λ suas raízes. Definimos o Fractal de Rauzy como:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{a,b} = \left\{ \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \theta_i, \forall j \geq n \geq 2, \varepsilon_j \varepsilon_{j-1} \dots \varepsilon_n \leq_{lex} (a-1)(a+b-1)(a+b) \dots (a+b) \right\}$$

em que $\theta_i = \alpha^i$, se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ou $\theta_i = (\alpha^i, \lambda^i)$, se $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ ou $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$, dependendo se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ou se $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nesta tese provamos várias propriedades de $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{a,b}$ e de sua fronteira, as quais resumimos nos seguintes Teoremas:

Teorema 1: $\mathcal{R}$ é compacto, induz um azulejamento do plano e a fronteira de $\mathcal{R}$ satisfaz $\partial \mathcal{R} = \bigcup_{u \in A} \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u)$, em que A é finito, de cardinalidade par e $A \supset \{\pm(1 + (b+1))\alpha, \pm\alpha, \pm(1 + b\alpha)\}$.

Teorema 2: Existe um autômato finito cujo conjunto dos estados é $S \supset \{0, \pm\alpha^2, \pm(\alpha + b\alpha^2), \pm(\alpha + (b+1)\alpha^2), \pm(1 + b\alpha + (a-1)\alpha^2), \pm(1 + (b+1)\alpha + (a+b)\alpha^2), \pm(1 + (b+1)\alpha + (a+b+1)\alpha^2)\}$, que gera a fronteira de $\mathcal{R}$.

Teorema 3: Se $\left\lfloor \frac{a-1}{a+b+1} \right\rfloor \geq 3$ então $\mathcal{R}$ não é homeomorfo a um disco.

Outro problema abordado nesta tese está relacionado às Sequências de melhores aproximações: Seja v um elemento de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{N}$ uma norma em $\mathbb{R}^2$ e q um número inteiro. Definimos

$$\mathcal{N}_0(qv) = \min\{\mathcal{N}(qv - (p, r)), (p, r) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Seja $(q_n)_{n \geq 0}$ uma sequência crescente de números inteiros. Dizemos que $(q_n)_{n \geq 0}$ é a sequência de melhor aproximação do vetor v para a norma $\mathcal{N}$ se para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e $0 < q < q_n$, tem-se $\mathcal{N}_0(qnv) < \mathcal{N}_0(qv)$.

Tal sequência depende muito da norma $\mathcal{N}$ e não existe um algoritmo eficiente que dê as sequências de melhores aproximações para todos elementos de $\mathbb{R}^2$. Quando $n = 1$ o problema está completamente resolvido: a sequência de melhor aproximação é dada pelo clássico algoritmo de frações contínuas unidimensional. Quando $n \geq 2$ o problema torna-se bastante difícil e não existe um algoritmo que fornece essa sequência para todos os vetores (ver [18]). Porém, podemos investigar esta questão para classe de vetores v cujas coordenadas são números de Pisot cúbicos.

O primeiro resultado nesta direção foi obtido em [11]. Seja β a raiz dominante do polinômio $X^3 - X^2 - X - 1$. Existe uma norma - chamada Norma de Rauzy - para a qual a sequência de Tribonacci dada por:

$$\begin{aligned} F_0 &= 1, F_1 = 1, F_2 = 2, \\ F_{n+3} &= F_{n+2} + F_{n+1} + F_n, \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

é a sequência de melhor aproximação para o vetor $(1/\beta, 1/\beta^2)$.

Usando um outro método, Chevallier [10] obteve uma generalização do resultado anterior. O método apresentado funciona para certa classe de números de Pisot de grau 3 que têm conjugados complexos. Este resultados foram estendidos ainda mais em [16] para uma grande classe de números de Pisot unitários de grau 3 que tem conjugados complexos. Para todo número real $\beta > 1$, associamos de maneira natural um sistema de numeração chamado β -representação (ver por exemplo [25]). Uma β -representação induz um sistema de numeração sobre os inteiros (sequência de inteiros naturais) no qual cada inteiro natural tem uma única representação neste sistema de numeração.

O fractal de Rauzy é obtido usando a β -representação (ver [27]). A compreensão da geometria deste fractal está muito relacionada com as propriedades aritméticas dos números de Pisot.

Dizemos que um número de Pisot possui a Propriedade (F) se a β -representação de todo elemento não negativo de $\mathbb{Z}[\beta]$ é finita. Os números de Pisot de grau 3 foram classificados por Akiyama, como mostra a proposição a seguir:

Proposição [2]. Seja β um número de Pisot cúbico unitário e denotemos por $d(1, \beta)$ a

representação do número 1 na base β . Se β satisfaz a Propriedade (F) com polinômio minimal $x^3 - ax^2 - bx - 1$. Então,

$$d(1, \beta) = .ab1 \text{ se } 1 \leq b \leq a;$$

$$d(1, \beta) = .(a-1)(a-1)01 \text{ se } b = -1 \text{ e } a \geq 2;$$

$$d(1, \beta) = .(a+1)00a1 \text{ se } b = a+1.$$

Se β não satisfaz a Propriedade (F), então,

$$d(1, \beta) = .(a-1)(a+b-1)\overline{(a+b)} \text{ e } -a+1 \leq b \leq -2$$

em que $\overline{(a+b)}$ é a expansão periódica $a+b, a+b, a+b, \dots$

Os trabalhos anteriores consideravam os números de Pisot unitários possuindo a Propriedade (F). Nesta tese investigamos se os resultados anteriores também seriam válidos para os números de Pisot que não possuísem a Propriedade (F) e provamos o seguinte resultado sobre as melhores aproximações usando os fractais de Rauzy:

Teorema 4: Seja β um número de Pisot cúbico, unitário e não totalmente real satisfazendo a equação $X^3 = aX^2 + bX + 1$, $-a+1 \leq b \leq -2$. Seja $(R_n)_{n \geq 0}$ a sequência de números inteiros definidos por:

$$\begin{aligned} R_0 &= 1, R_1 = a, R_2 = a^2 + b, \\ R_{n+3} &= aR_{n+2} + bR_{n+1} + R_n, \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Se β não possui a Propriedade (F), então existe uma norma $\mathcal{N}$ em $\mathbb{R}^2$ (chamada de norma de Rauzy) e um inteiro natural n_0 tal que $(R_n)_{n \geq n_0}$ é a sequência de melhor aproximação para o vetor $(1/\beta, 1/\beta^2)$ para a norma $\mathcal{N}$.

Esta tese está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 1 enunciamos alguns resultados sobre substituições e β -numeração. No Capítulo 2 mostramos métodos para a construção dos fractais de Rauzy. No Capítulo 3 apresentamos a classe de fractais de Rauzy que não possui a Propriedade (F), provamos que $\mathcal{R}_{a,b}$ induz um azulejamento do plano e obtemos algumas propriedades de sua fronteira. O Capítulo 4 é dedicado à construção de um autômato capaz de gerar a fronteira de $\mathcal{R}_{a,b}$. Este autômato será usado no Capítulo 5 para parametrizar a fronteira do fractal de Rauzy no caso particular em que $a = 3, b = -2$. As sequências de melhores aproximações são estudadas no Capítulo 6. O Anexo (Capítulo 7) contém alguns resultados complementares assim como um programa computacional para gerar os fractais de Rauzy.

Capítulo 1

Substituições e Sistemas Dinâmicos

Neste capítulo introduziremos conceitos sobre substituições, sistemas dinâmicos e β -numeração, e algumas de suas propriedades.

1.1 Palavras

Seja $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $\mathcal{A} = \{w_0, \dots, w_n\}$ um conjunto finito. O conjunto $\mathcal{A}$ é chamado de **alfabeto** e cada elemento w_i de **letra** (ou **símbolo**) do alfabeto $\mathcal{A}$.

Uma **palavra finita** em $\mathcal{A}$ é uma sequência finita de letras de $\mathcal{A}$. O conjunto de todas as palavras finitas sobre $\mathcal{A}$ e será denotado por $\mathcal{A}^*$. Da mesma forma, uma **palavra infinita** em $\mathcal{A}$ é uma sequência infinita de letras de $\mathcal{A}$. O conjunto de todas as palavras infinitas sobre $\mathcal{A}$ será denotado por $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Exemplo 1.1.1 *Considere o alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2\}$. A palavra $121 \in \mathcal{A}^*$ enquanto que a palavra $12121111 \dots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.*

Seja $w = w_1 \dots w_s$ uma palavra; s é chamado de **comprimento da palavra** w e denotado por $|w|$. Denotamos por $|w|_a$ o número de ocorrências de uma letra $a \in \mathcal{A}$ em uma palavra $w \in \mathcal{A}^*$.

A palavra infinita w é **periódica** (respectivamente **ultimamente periódica**) se existir um inteiro positivo p tal que

$$\forall n, w_n = w_{n+p} \text{ (respectivamente, } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, w_n = w_{n+p}).$$

Observação 1.1.1 Identificamos o conjunto das palavras infinitas $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ com o conjunto das seqüências com termos em $\mathcal{A}$, isto é, associamos uma palavra $x_0x_1x_2\cdots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ com a seqüência $(x_i)_{i \geq 0}$.

Observação 1.1.2 Em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ colocamos a topologia produto das topologias discretas sobre $\mathcal{A}$. Segue que este conjunto é compacto e a topologia em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ é igual a topologia induzida pela distância: $d(u, v) = 2^{-\min\{n \in \mathbb{N}, u_n \neq v_n\}}$, se $u \neq v \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$; e $d(u, v) = 0$ se $u = v$.

1.2 Sistemas Dinâmicos Simbólicos

Definição 1.2.1 O *deslocamento* ou *shift* é a aplicação $S : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ definida por

$$S(a_0a_1a_2\cdots) = a_1a_2\cdots$$

Dizemos que uma palavra w em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ é **periódica pelo deslocamento** ou **S-periódica** se existir um inteiro positivo h tal que $S^h(w) = w$.

Seja $w \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$; a **órbita** de w sobre S é o conjunto definido por $\mathcal{O}(w) = \{S^n(w) : n \in \mathbb{N}\}$.

Observação 1.2.1 O deslocamento $S : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ é uma aplicação sobrejetora e contínua (em relação a topologia produto das topologias discretas sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$).

Seja $\Omega_w = \overline{\mathcal{O}(w)}$ o fecho da órbita de w pela aplicação *shift*. É fácil verificar que $S(\Omega_w) \subset \Omega_w$. O **sistema dinâmico simbólico** gerado por uma palavra $w \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ é o par (Ω_w, S) .

Observação 1.2.2 Podemos definir $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ como o conjunto das palavras bi-infinitas sobre $\mathcal{A}$, isto é, $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} = \cdots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2\cdots$.

Nesse caso, o *shift*

$$S : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$$

$$\cdots x_{-1}.x_0x_1\cdots \mapsto \cdots x_0.x_1x_2\cdots$$

é um homeomorfismo.

1.3 Substituições

Uma **substituição** é uma aplicação $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ que a cada letra $a \in \mathcal{A}$ associa uma palavra $\sigma(a) \in \mathcal{A}^*$.

Podemos estender uma substituição σ ao conjunto das palavras finitas (respectivamente infinitas) por concatenação, isto é, $\sigma(w_0w_1\dots w_n) = \sigma(w_0)\sigma(w_1)\dots\sigma(w_n)$ ou $\sigma(w_0w_1\dots) = \sigma(w_0)\sigma(w_1)\dots$ no caso de palavras infinitas.

Suporemos que toda substituição satisfaça a seguinte propriedade:

Existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma^n(a)| = +\infty$, em que $|\sigma^n(a)|$ é o comprimento do n -ésimo iterado de a por σ .

Exemplo 1.3.1 *Exemplos clássicos de substituições definidas sobre um alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b\}$ são a substituição de Fibonacci, definida por $\sigma_1(a) = ab$ e $\sigma_1(b) = a$, e a substituição de Morse, definida por $\sigma_2(a) = ab$ e $\sigma_2(b) = ba$.*

Definição 1.3.1 *Seja w uma palavra de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Dizemos que w é um **ponto periódico** da substituição σ se existir $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $\sigma^k(w) = w$ e dizemos que w é um **ponto fixo** da substituição σ se $\sigma(w) = w$.*

Proposição 1.3.1 (*[26]*). *Toda substituição tem pelo menos um ponto periódico.*

Definição 1.3.2 *Seja σ uma substituição e u um ponto periódico de σ . O par (Ω_u, S) é chamado de **sistema dinâmico simbólico associado** à σ e à u .*

Dizemos que uma substituição σ definida sobre um alfabeto $\mathcal{A}$ é **primitiva** se existir $k > 0$ tal que para todo $a, b \in \mathcal{A}$, a letra a aparece em $\sigma^k(b)$.

Exemplo 1.3.2 *Na substituição de Fibonacci tem-se que a e b aparecem em $\sigma^2(a)$ e em $\sigma^2(b)$. Logo a substituição de Fibonacci é primitiva.*

Matriz da Substituição (ou Matriz de Incidência)

Seja σ a substituição definida sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{1, \dots, d\}$ de cardinalidade d . A **matriz de incidência** da substituição σ é, por definição, a matriz M_d com entradas de índices (i, j) dados por $|\sigma(j)|_i$, isto é, o número de ocorrências de i em $\sigma(j)$.

Exemplo 1.3.3 *As matrizes de incidência da substituição de Morse σ_2 e da substituição de Fibonacci σ_1 são respectivamente:*

$$M_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } M_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dizemos que uma substituição é **unimodular** se o determinante de sua respectiva matriz de incidência for igual a ± 1 .

Exemplo 1.3.4 *A substituição de Fibonacci é unimodular enquanto a substituição de Morse não o é.*

Homomorfismo canônico: Seja σ uma substituição definida sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{w_1, \dots, w_d\}$ de cardinalidade d . Seja $l : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbb{Z}^d$ o homomorfismo canônico, também chamado de homomorfismo de abelianização definido da seguinte maneira:

$$\forall w \in \mathcal{A}^*, l(w) = (|w|_{w_i})_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{N}^d.$$

Como consequência, a matriz de incidência M_σ satisfaz as seguintes relações:

$$M_\sigma = (l(\sigma(w_1)), \dots, l(\sigma(w_d)))$$

e

$$\forall w \in \mathcal{A}^*, l(\sigma(w)) = M_\sigma l(w).$$

Proposição 1.3.2 *Uma substituição σ é primitiva se e somente se a matriz M_σ é **primitiva**, isto é, todas suas entradas são não negativas e existe um inteiro $k \geq 0$ tal que a k -ésima potência da matriz possui entradas positivas.*

Substituições do Tipo Pisot

Definição 1.3.3 *Dizemos que γ é um número de Pisot se γ é um inteiro algébrico maior que 1 e todos os seus conjugados em relação à Galois possuem módulo estritamente menor que um. No caso em que γ é real (respectivamente complexo) dizemos que γ é um número de Pisot real (respectivamente complexo). Dizemos que uma substituição é do tipo Pisot se o polinômio minimal de M_σ possui uma raiz que é um número de Pisot.*

Proposição 1.3.3 ([9]) *Se σ é Pisot então σ é primitiva.*

Teorema 1.3.1 ([26]) *Seja σ uma substituição primitiva. Então o sistema dinâmico simbólico (Ω, S) associado a σ não depende do ponto periódico, isto é, $\Omega_u = \Omega_v$ para todo $u, v \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$ periódicos por σ . Além disso, (Ω, S) é minimal, unicamente ergódico e de entropia nula.*

1.4 Sistemas de Numeração e Base β

Neste capítulo estudaremos uma generalização do sistema de numeração tomando como base um número real $\beta > 1$ (ver [19]). Representações de número real em uma base arbitrária $\beta > 1$ chamada β -expansões, foram introduzidas por Rényi [28]. Estudaremos também um sistema de numeração sobre os inteiros e substituições associadas ao número β , as chamadas β -substituições.

1.4.1 β -representação

Seja $\beta > 1$ um número real. Uma representação na base β de um número real não negativo x é uma sequência infinita $(x_i)_{i \leq k}$, $x_i \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$x = x_k \beta^k + x_{k-1} \beta^{k-1} + \cdots + x_1 \beta + x_0 + x_{-1} \beta^{-1} + x_{-2} \beta^{-2} + \cdots$$

em que k é um inteiro natural. Denotamos essa sequência por

$$x = x_k x_{k-1} \cdots x_1 x_0 . x_{-1} x_{-2} \cdots$$

Uma particular representação na base β , chamada β -expansão, pode ser calculada pelo algoritmo "greedy" (ou fominha) (ver [25] e [15]): denotamos por $\lfloor y \rfloor$ e $\{y\}$ as partes inteira e fracionária respectivamente do número y . Existe um número $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta^k \leq x < \beta^{k+1}$. Seja $x_k = \lfloor x/\beta^k \rfloor$ e $r_k = \{x/\beta^k\}$. Então para $i < k$, seja $x_i = \lfloor \beta r_{i+1} \rfloor$ e $r_i = \{\beta r_{i+1}\}$. Temos

$$x = x_k \beta^k + x_{k-1} \beta^{k-1} + \cdots$$

Se $k < 0$ ($x < 1$), colocamos $x_0 = x_{-1} = \cdots = x_{k+1} = 0$. Se uma β -representação termina com infinidade de zeros, então dizemos que ela é finita e omitimos esses zeros. Se β for um inteiro, os dígitos x_i obtidos pelo algoritmo pertencem ao conjunto $\mathcal{A} = \{0, \dots, \beta - 1\}$. Se β não é inteiro, então os dígitos pertencem ao conjunto $\mathcal{A} = \{0, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}$. O conjunto $\mathcal{A}$ é chamado de alfabeto canônico.

No caso em que $\beta = (1 + \sqrt{5})/2$ (número de ouro), o conjunto $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.

A β -representação de todo número real positivo x é a maior lexicograficamente entre todas as representações de x em base β . Algumas vezes, omitiremos o ponto entre a parte inteira e a parte fracionária da β -representação.

Para os números $0 \leq x < 1$, a representação definida acima coincide com a β -representação de Rényi [28]. Esta última pode ser definida através da β -transformação do intervalo $[0, 1]$, isto é:

$$T_\beta(x) = \{\beta x\}, x \in [0, 1].$$

Para $x \in [0, 1[$, temos $x_k = \lfloor \beta T_\beta^{k-1}(x) \rfloor$. Mas para $x = 1$ os dois algoritmos são diferentes. A β -representação de 1 dada pelo algoritmo greedy é $1 = 1.000 \cdots$, enquanto que a β -representação de Rényi de 1 é

$$d(1, \beta) = .t_{-1} t_{-2} \cdots,$$

em que

$$t_{-k} = \lfloor \beta T_\beta^{k-1}(1) \rfloor, \forall k \geq 1.$$

Exemplo 1.4.1 Seja $\beta = (1 + \sqrt{5})/2$. Podemos mostrar que $d(1, \beta) = .11$.

Definição 1.4.1 Seja $d(1, \beta) = (t_i)_{i \geq 1}$ a β -expansão de 1. Os números β tais que $d(1, \beta)$ é ultimamente periódica são chamados **números de Parry** e aqueles cuja $d(1, \beta)$ é finita são chamados de **números de Parry simples**.

Proposição 1.4.1 ([7]) Se β é de Pisot, então β é um número de Parry ou número de Parry simples.

Definição 1.4.2 Dizemos que uma seqüência $(a_i)_{i \geq 0}$ (ou palavra $a_0a_1a_2 \dots$) é inferior lexicograficamente à seqüência $(b_i)_{i \geq 0}$ se existir um inteiro $s \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n < s$ $a_n = b_n$ e $a_s < b_s$. Notação: $(a_i)_{i \geq 0} <_{lex} (b_i)_{i \geq 0}$. Dizemos que uma palavra finita $a_0a_1 \dots a_n <_{lex} b_0b_1 \dots b_s$ se $a_0a_1 \dots a_n000 \dots <_{lex} b_0b_1 \dots b_s000 \dots$.

Proposição 1.4.2 ([6]) Seja $d^*(1, \beta) = d(1, \beta)$ se $d(1, \beta)$ é infinita, e $d^*(1, \beta) = (t_1 \dots t_{n-1}(t_n - 1))^\infty$ se $d(1, \beta) = t_1 \dots t_{n-1}t_n$ for finita ($t_n \neq 0$). Então o conjunto das β -expansões de números reais em $[0, 1)$ é exatamente o conjunto das seqüências $(u_i)_{i \geq 1}$ em $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq 1, (u_i)_{i \geq k} \leq_{lex} d^*(1, \beta).$$

Exemplos:

1. Seja $\beta = (1 + \sqrt{5})/2$. Tem-se, $d(1, \beta) = .11$.

Neste caso, $u_k u_{k+1} \dots = (u_i)_{i \geq k} \leq_{lex} (10)^\infty$. Isto implica que $u_i u_{i-1} <_{lex} 11, \forall i \in \mathbb{N}^*$.

2. Seja $\beta^3 = a\beta^2 + b\beta + 1$, em que $a \geq b \geq 1$. Tem-se, $d(1, \beta) = .ab1, \forall i \in \mathbb{N}^*$.

Neste caso, $(u_i)_{i \geq k} \leq_{lex} (ab0)^\infty$. Isto implica que $u_i u_{i-1} u_{i-2} <_{lex} ab1$, para todo $i \geq k + 2$.

3. Seja $\beta^3 = a\beta^2 + b\beta + 1$, em que $-a + 1 \leq b \leq -2$. Tem-se $d(1, \beta) = d^*(1, \beta) = .(a - 1)(a + b - 1)(a + b)^\infty$.

Neste caso, $(u_i)_{i \geq k} <_{lex} (a - 1)(a + b - 1)(a + b)(a + b) \dots$.

1.4.2 Números de Pisot e Propriedade (F)

Denotamos por $\text{Fin}(\beta)$ o conjunto dos números que possuem uma β -representação finita. Algumas vezes denotaremos uma β -representação $x_n \dots x_k, n \geq k$ por $(x_i)_{n \geq k}$.

Dizemos que β satisfaz a Propriedade (F) (ou Propriedade de Finitude) se

$$\mathbb{Z}[\beta] \cap [0, +\infty[\subset \text{Fin}(\beta).$$

Na sequência suporemos que β é um número de Pisot.

Akiyama ([2]) mostrou que a classe dos números de Pisot que possuem a Propriedade (F) é igual à classe dos números reais que são exatamente as raízes dominantes do seguinte polinômio (com coeficientes inteiros):

$$x^3 - ax^2 - bx - 1, \quad a \geq 0 \text{ e } -1 \leq b \leq a + 1.$$

(Se $b = -1$ adicionamos a restrição $a \geq 2$.)

A β -representação de Rényi de 1 em relação a esses números é dada pela proposição seguinte (ver [2]):

Proposição 1.4.3 *Seja β um número de Pisot cúbico unitário. Se β satisfaz a Propriedade (F) com polinômio minimal $x^3 - ax^2 - bx - 1$. Então,*

- i) $d(1, \beta) = .ab1$ se $0 \leq b \leq a$;
- ii) $d(1, \beta) = .(a-1)(a-1)01$ se $b = -1$ e $a \geq 2$;
- iii) $d(1, \beta) = .(a+1)00a1$ se $b = a + 1$.

Se β não satisfaz a Propriedade (F), então,

- iv) $d(1, \beta) = .(a-1)(a+b-1)\overline{(a+b)}$ e $-a+1 \leq b \leq -2$,

em que $\overline{(a+b)}$ é a expansão periódica $a+b, a+b, a+b, \dots$

Na sequência suporemos que β é um número de Pisot cúbico unitário e denotaremos por α e γ seus Galois-conjugados. Seja $P(x) = x^3 - ax^2 - bx - 1$ o polinômio minimal de β .

1.4.3 Sistema de Numeração sobre os Inteiros

Consideraremos agora uma outra generalização de sistemas de numeração, que se aplica somente a representação de inteiros. Descreveremos um sistema de numeração sobre os inteiros induzidos pelas β -representações da seguinte maneira:

Caso 1: $d(1, \beta) = .a_{-1} \cdots a_{-t}$ em que $a_{-t} \neq 0$.

Seja $(R_n)_{n \geq 0}$ a sequência de números inteiros definida por:

$$\begin{aligned} R_0 &= 1, \quad R_1 = a, \quad R_2 = a^2 + b, \\ R_{n+3} &= aR_{n+2} + bR_{n+1} + R_n, \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Observe que $R_2 = aR_1 + bR_0 + R_{-1}$, onde $R_{-1} = 0$.

Como o polinômio $Q(x) = x^t - a_{-1}x^{t-1} - \dots - a_{-t}$ é múltiplo do polinômio $x^3 - ax^2 - bx - 1$, a sequência $(R_n)_{n \geq 0}$ satisfaz

$$R_{n+t} = a_{-1}R_{n+t-1} + a_{-2}R_{n+t-2} + \dots + a_{-t}R_n, \forall n \geq 0.$$

1.4.4 β -substituição

Podemos associar de maneira natural uma substituição σ_β - chamada β -substituição - aos números β em dois casos, quando β é um número de Parry ou quando β número de Parry simples, da seguinte forma:

Caso 1. Substituição associada a um número de Parry simples.

Assumimos $d(1, \beta) = t_1 \dots t_{n-1}t_n$, com $t_n \neq 0$. Portanto $d^*(1, \beta) = (t_1 \dots t_{n-1}(t_n - 1))^\infty$. Definimos σ_β sobre o alfabeto $\{1, 2, \dots, n\}$ como mostrado abaixo;

$$\sigma_\beta : \begin{cases} 1 & \mapsto 1^{t_1}2 \\ 2 & \mapsto 1^{t_2}3 \\ \vdots & \vdots \\ n-1 & \mapsto 1^{t_{n-1}}n \\ n & \mapsto 1^{t_n} \end{cases}$$

Caso 2. Substituição associada a um número de Parry não-simples.

Assumimos $d(1, \beta)$ é infinito. Logo $d(1, \beta) = d^*(1, \beta) = t_1 \dots t_n(t_{n+1} \dots t_{n+p})^\infty$, com $n \geq 1$, $t_n \neq t_{n+p}$ e $t_{n+1} \dots t_{n+p} \neq 0^p$. Definimos σ_β sobre o alfabeto $\{1, 2, \dots, n+p\}$ como mostrado abaixo:

$$\sigma_\beta : \begin{cases} 1 & \mapsto 1^{t_1}2 \\ 2 & \mapsto 1^{t_2}3 \\ \vdots & \vdots \\ n+p-1 & \mapsto 1^{t_{n+p-1}}(n+p) \\ n+p & \mapsto 1^{t_{n+p}}(n+1) \end{cases}$$

Exemplo 1.4.2

1. Número de ouro. Seja $\beta = (1 + \sqrt{5})/2$ o número de ouro, e a maior raiz de $X^2 - X - 1$. Temos $d(1, \beta) = 11$ (β é um número de Parry simples) e $d^*(1, \beta) = (10)^\infty$. Logo a β -substituição associada é a substituição de Fibonacci: $\sigma_\beta : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1$.

2. Número de Tribonacci. Seja β o número de Tribonacci, isto é, a raiz Pisot do polinômio $X^3 - X^2 - X - 1$. Temos $d(1, \beta) = 111$ (β é um número de Parry simples) e $d^*(1, \beta) = (110)^\infty$. A substituição associada é $\sigma_\beta : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$.

3. Ainda no caso do Número de Tribonacci, seja β a raiz Pisot do polinômio $X^3 - aX^2 - bX - 1$, com $-a + 1 \leq b \leq -2$. Temos $d(1, \beta) = d^*(1, \beta) = (a - 1)(a + b - 1)(a + b)^\infty$. A substituição associada é $\sigma_\beta : \sigma(1) \mapsto 1^{(a-1)}2, \sigma(2) \mapsto 1^{(a+b-1)}3, \sigma(3) \mapsto 1^{(a+b)}3$.

Capítulo 2

Fractais de Rauzy

Neste capítulo mostramos como os fractais de Rauzy são construídos. Começamos com o fractal de Rauzy clássico, em seguida apresentamos como obter os fractais de Rauzy no caso geral através da β -substituição.

2.1 Fractal de Rauzy Clássico

Consideremos o polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. Este polinômio possui uma raiz real $\beta > 1$ e duas raízes complexas conjugadas α e $\bar{\alpha}$ de módulo estritamente menor que 1. O Fractal de Rauzy é o conjunto

$$\mathcal{E} = \{\sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i \mid \varepsilon_i \in \{0, 1\}; \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} = 0, \forall i \geq 3\}.$$

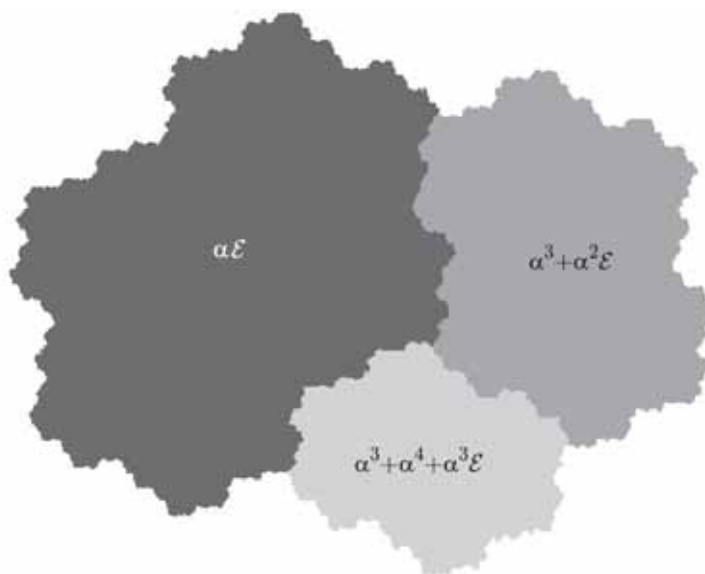


Figura 1. Fractal de Rauzy.

Este Fractal possui várias propriedades, as quais resumimos no seguinte Teorema:

Teorema 2.1.1 $\mathcal{E}$ é um conjunto compacto de $\mathbb{C}$, conexo, com fronteira fractal e interior simplesmente conexo e induz um azulejamento periódico de $\mathbb{C}$ módulo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$, isto é, $\mathbb{C} = \bigcup_{u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha} (\mathcal{E} + u)$ e para todo $u, v \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$, se $u \neq v$ então $\text{int}(\mathcal{E} + u) \cap (\mathcal{E} + v) = \emptyset$. Além disso o Fractal é dividido em três regiões similares que induzem um azulejamento auto-similar do plano complexo. Essas regiões são: $\mathcal{E}_0 = \alpha\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1 = \alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}_2 = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2\mathcal{E}$.

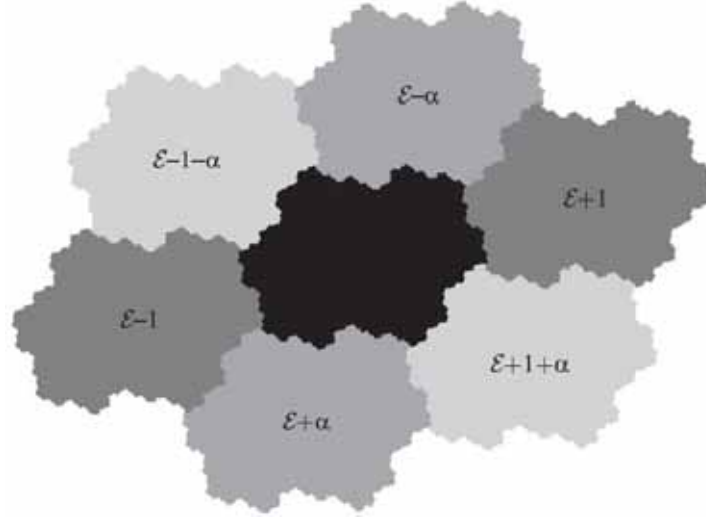


Figura 2. Azulejamento periódico do plano através do fractal de Rauzy.

Existem várias formas de se obter o Fractal de Rauzy. Nas próximas seções explicamos detalhadamente algumas delas para o caso do Fractal de Rauzy Clássico, para uma melhor compreensão, e em seguida mostramos o caso geral.

2.1.1 Métodos de Construção do Fractal de Rauzy Clássico

2.1.2 Método de Shunji Ito

Consideremos o alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{A}^*$ o conjunto das palavras finitas sobre $\mathcal{A}$. Seja $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ a substituição definida por $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$ e $\sigma(3) = 1$.

Aplicando σ a letra 1 obtemos $\sigma(1) = 12$. Aplicando σ a palavra 12 obtida, temos $\sigma(12) = \sigma(1)\sigma(2) = 1213$. Aplicando σ novamente a palavra 1213 obtemos $\sigma(1213) = 1213121$. Notemos então que usando σ repetidamente obteremos uma palavra $u = u_0u_1\ldots = 1213121121312112131\ldots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Notemos que u é o ponto fixo para a substituição σ , uma vez que $\sigma(u) = u$. É fácil verificar que σ é primitiva e tem somente um ponto fixo u .

Consideremos agora o espaço $\mathbb{R}^3$ com a base canônica $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e I_k os segmentos de origem O e de extremidade N_k tal que $\overrightarrow{ON_k} = \sum_{i=1}^k \bar{e}_{u_i}$, $u_1 \cdots u_k$ sendo a parte inicial do ponto fixo u de σ . Projetando os pontos N_k sobre um plano conveniente paralelamente ao vetor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \theta^2 \end{pmatrix}$, em que $\beta = \frac{1}{\theta}$ é a raiz real do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, obteremos um conjunto limitado nesse plano (figura abaixo). O fecho desse conjunto é o Fractal de Rauzy ([1]).

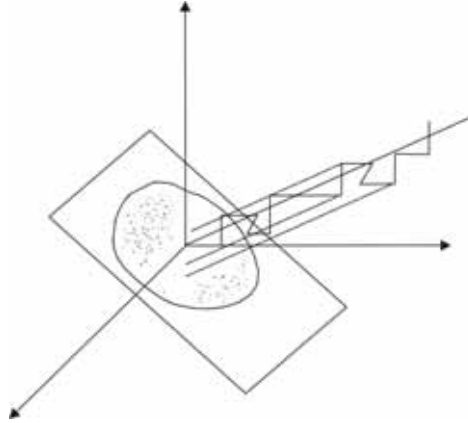


Figura 3. Fractal de Rauzy pelo Método de Shunji-Ito.

Observação: Este método está relacionado a frações contínuas de dimensão dois, uma vez que a direção dos vetores $\vec{v}_k = \sum_{i=1}^k \bar{e}_{u_i}$ converge quando k tende ao infinito para a direção do vetor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \theta^2 \end{pmatrix}$, o que fornece uma aproximação simultânea de θ e θ^2 através dos elementos de $\mathbb{Z}^2$. Este assunto será estudado no Capítulo 6.

Observemos ainda que este método pode ser aplicado às substituições do tipo Pisot. No entanto, as características do conjunto obtido (como conexidade e simples conexidade, por exemplo) dependem muito das propriedades combinatórias da substituição.

2.1.3 Via Sistemas de Numeração

Seja $(T_n)_{n \geq 0}$ a sequência recorrente definida por $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = 1$, $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$, para todo $n \geq 0$. Essa sequência é chamada de sequência de Tribonacci. É conhecido que, usando o algoritmo "greedy" (fominha), todo inteiro natural n pode ser representado de maneira única como soma de termos dessa sequência como $n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i T_i$, com $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ e $\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} = 0$, para todo $i \geq 3$ (ver [32]).

Consideremos agora $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, o polinômio característico da sequência $(T_n)_{n \geq 0}$. Este polinômio possui uma raiz real $\beta > 1$ e duas raízes complexas conjugadas α e $\bar{\alpha}$ de módulo estritamente menor que 1.

Definimos o fractal de Rauzy como sendo o conjunto

$$\mathcal{E} = \{\sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i; \varepsilon_i \in \{0, 1\}; \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} = 0, \forall i \geq 3\}.$$

Observe que $\mathcal{E} = \{\sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i; \varepsilon_i \in \{0, 1\}; \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} <_{lex} 111 \forall i \geq 3\}$.

2.1.4 Método das Substituições Generalizadas

Este método, que consiste em aplicar uma determinada transformação sobre três faces de um paralelepípedo, foi realizado por S. Ito e M. Mizutani (ver por exemplo, [1]).

Seja $v = (1, x, y)^t$ um autovetor de ${}^t M_\sigma$ e $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, v \rangle = 0\}$ e $\mathcal{P}^+ = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, v \rangle \geq 0\}$. Seja i um elemento de $\{0, 1, 2\}$ e $E_i = \{ae_j + be_k; a, b \in [0, 1]\}$ e $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ (faces).

Consideremos o conjunto $S = \{(x, E) \in \mathbb{Z}^3 \times \{E_0, E_1, E_2\}; x \in \mathcal{P}^+, x - e_i \notin \mathcal{P}^+ \text{ se } (x, E) = (x, E_i)\}$.

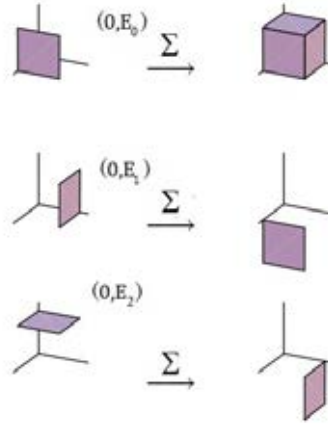


Figura 4. Etapas da construção do Fractal de Rauzy ([1]).

Seja Π a projeção de $\mathbb{R}^3$ em $\mathcal{P}$ paralelamente à w , em que w é um autovetor de M_σ . Pode-se verificar que $\bigcup_{(x, E) \in S} \Pi(x + E)$ é um azulejamento de $\mathcal{P}$ pelos 3 paralelepípedos $\Pi(0, E_i)$, $i = 0, 1, 2$.

Seja $\mathcal{G} = \{\bigcup_{a \in I} (x_a, E_a), \text{card}(I) < +\infty, (x_a, E_a) \in S\}$.

Consideremos uma substituição Σ sobre o conjunto $\mathcal{G}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Sigma : (0, E_0) &\mapsto (0, E_2) + (e_1 - e_2, E_1) + (e_0 - e_2, E_0) \\ (0, E_1) &\mapsto (0, E_0) \end{aligned}$$

$$(0, E_2) \mapsto (0, E_1)$$

$$\text{e } \Sigma(x, S) = M^{-1}x + \Sigma(\bigcup_{a \in I} (x_a, E_a)) = \bigcup_{a \in I} \Sigma(x_a, E_a).$$

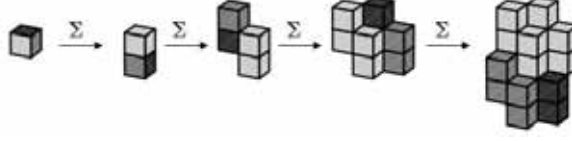


Figura 5. Etapas da construção do Fractal de Rauzy ([1]).

Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Façamos $D_n = \Pi(\Sigma^n(U))$, onde $U = \bigcup_{i=0,1,2} (e_i, E_i)$ e $D_n^i = \Pi(\Sigma^n(e_i, E_i))$. Pode-se mostrar que D_n converge para o plano $\mathcal{P}$ (no sentido de que $D_n \subset D_{n+1}$ e $\mathcal{P} = \bigcup_n D_n$), e o conjunto $M_\sigma^{-n} \Pi(\Sigma^n(U)) \subset \mathbb{R}^3$, converge para o fractal de Rauzy $\mathcal{E}$.

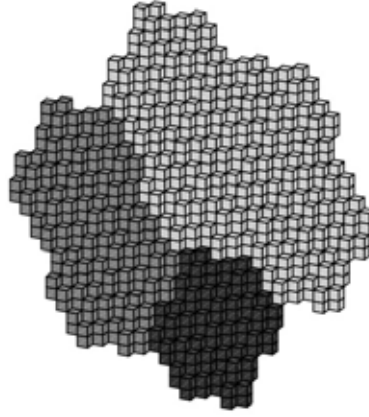


Figura 6. Fractal de Rauzy. ([1]).

2.2 Caso Geral

2.2.1 Via β -substituição

Como fizemos no caso do Fractal de Rauzy Clássico, nesta seção vamos dar uma interpretação geométrica de um ponto periódico u de uma substituição do tipo Pisot e unitária. Vamos mergulhar u em um hiperplano gerado pelos conjugados algébricos dos autovalores dominantes da matriz de incidência. O fecho das projeções dos prefixos de u formarão o Fractal de Rauzy. Esse método é uma generalização do método apresentado na Seção 1 (Shunji-Ito) (ver [31]).

Daqui por diante vamos supor que σ é uma substituição Pisot primitiva e unitária.

Definição 2.2.1 (“Broken Line” ou “Linha Quebrada” associada a uma substituição do tipo Pisot). Seja $u = \dots u_{-2}u_{-1}.u_0u_1\dots$ um ponto periódico de σ . A palavra infinita u está “mer-

gulhada” como uma linha discreta em $\mathbb{R}^n$ ao substituir cada letra u_i de u pelo correspondente vetor da base canônica e_{u_i} . A linha discreta possui vértices $\{\sum_{i=0}^N e_{u_i}, N \in \mathbb{N}^*\}$.

Decomposição do Espaço Vamos introduzir uma decomposição de $\mathbb{R}^n$ em relação aos autoespaços da matriz de incidência M associada ao autovalor dominante β . Vamos denotar por d o grau algébrico de β ; temos então $d \leq n$, uma vez que o polinômio característico de M pode ser redutível.

Seja $r - 1$ o número de conjugados reais de β ; eles serão denotados por $\beta^{(2)}, \dots, \beta^{(r)}$. Cada autoespaço correspondente tem dimensão um, devido a primitividade da substituição. Seja $2s$ o número de conjugados complexos de β . Eles são denotados por $\beta^{(r+1)}, \dots, \overline{\beta^{(r+1)}}, \dots, \beta^{(r+s)}, \overline{\beta^{(r+s)}}$. Cada par de autovetores em conjunto com o seu conjugado complexo geram um plano 2-dimensional.

Seja v_β o autovetor dominante de tM tal que $\langle v_\beta, e_1 \rangle = 1$ e u_β o único autovetor dominante de M tal que $\langle v_\beta, u_\beta \rangle = 1$ (esta normalização é necessária para incluir os casos de β -numeração). Ambos vetores possuem coordenadas em $\mathbb{Q}[\beta]$. Além disso, como u_β é o autovetor dominante de uma matriz primitiva, cada entrada de u_β possui o mesmo sinal. O mesmo é válido para v_β . Obtemos os autoevetores $u_{\beta^{(i)}}$ e $v_{\beta^{(i)}}$ para os conjugados algébricos de $\beta^{(i)}$ de β substituindo β por $\beta^{(i)}$ nas coordenadas dos vetores. Por construção, estes vetores satisfazem $\langle v_{\beta^{(i)}}, u_{\beta^{(k)}} \rangle = 0$ se $i \neq k$ e $\langle v_{\beta^{(i)}}, u_{\beta^{(k)}} \rangle = 1$ se $i = k$ (ver [9]).

A partir desses vetores introduzimos uma decomposição de $\mathbb{R}^n$ da seguinte maneira:

O espaço β -contratante da matriz M é o subespaço $\mathbb{H}_c$ gerado pelos autoespaços associados aos β -conjugados, isto é, $u_{\beta^{(2)}}, \dots, u_{\beta^{(r)}}, \Re(u_{\beta^{(r+1)}}), \Im(u_{\beta^{(r+1)}}), \dots, \Re(u_{\beta^{(r+s)}}), \Im(u_{\beta^{(r+s)}})$. Este espaço tem dimensão: $r + 2s - 1 = d - 1$.

Denotamos por $h : \mathbb{H}_c \mapsto \mathbb{H}_c$ a restrição de M a $\mathbb{H}_c$; h é uma contração cujos autovalores são conjugados de β . Em $\mathbb{H}_c$ definimos a seguinte norma:

$$\forall x \in \mathbb{H}_c, \|x\| = \max\{|\langle x, v_{\beta^{(i)}} \rangle|, i = 2, \dots, r + s\}. \quad (2.1)$$

Isto implica que

$$\forall x \in \mathbb{H}_c, \|Mx\| = \|hx\| \leq \max\{|\beta^{(i)}|, i = 2, \dots, r + s\} \|x\|. \quad (2.2)$$

Denotamos por $\mathbb{H}_e$ a linha β -expansora de M , isto é, a linha real gerada pelo β -autovetor u_β .

Seja Min_β o polinômio minimal de β . O β -espaço suplementar é definido por $\mathbb{H}_s = \text{Min}_\beta(M(\mathbb{R}^n))$. Pode-se verificar que este é um espaço invariante de M que satisfaz $\mathbb{R}^n = \mathbb{H}_c \oplus \mathbb{H}_e \oplus \mathbb{H}_s$. O espaço

$\mathbb{H}_s$ é gerado pelos autoespaços correspondentes aos autovalores de M que não são conjugados de β . Ele é trivial se e somente se a substituição é irreduzível.

A partir da definição de $\mathbb{H}_s$ e o fato de $\mathbf{v}_\beta$ pertencer ao núcleo de $\text{Min}_\beta({}^t M)$, deduzimos que o espaço $\mathbb{H}_s$ é ortogonal a v_β , de fato, $\langle v_\beta, \mathbb{H}_s \rangle = \langle v_\beta, \text{Min}(M(\mathbb{R}^n)) \rangle = \text{Min}_\beta({}^t M)v_\beta, \mathbb{R}^n \rangle = 0$.

Seja $\pi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ a projeção de $\mathbb{H}_c$ sobre $\mathbb{H}_e \oplus \mathbb{H}_s$, de acordo com a decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{H}_c \oplus \mathbb{H}_e \oplus \mathbb{H}_s$. Então, a relação $\mathbf{l}(\sigma(w)) = \mathbf{M}\mathbf{l}(w)$, para todo $w \in \mathcal{A}^*$ implica na seguinte relação comutativa:

$$\forall w \in \mathcal{A}^*, \pi(\mathbf{l}(\sigma(w))) = \mathbf{h}\pi(\mathbf{l}(w)). \quad (2.3)$$

Considerando que os vetores $\mathbf{v}_{\beta(i)}$ e os vetores $\mathbf{v}_{\beta(j)}$ são ortogonais, obtemos a seguinte representação de π na base formada de autovetores

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \pi(x) = \sum_{2 \leq i \leq r+2s} \langle x, v_{\beta(i)} \rangle u_{\beta(i)}. \quad (2.4)$$

Novamente estamos identificando $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$.

Para os vetores com coordenadas racionais, a seguinte relação segue considerando-se os Galois-conjugados de 2.4

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Q}^n, \pi(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{y}) \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle. \quad (2.5)$$

Esta equação quer dizer que enquanto dois pontos com coordenadas racionais coincidem no espaço β -contratante, eles coincidem também ao longo da linha β -expansora.

Definição do conjunto central. No caso irreduzível é conhecido que quando assumimos que a substituição é Pisot, isso implica que a linha discreta de σ permanece a uma distância limitada da direção de expansão da matriz de incidência (ver [1]). No caso redutível, a linha discreta pode ter outras direções expansoras, mas devido a 2.4, a projeção da linha discreta por π garante a existência de um conjunto limitado em $\mathbb{H}_c \simeq \mathbb{R}^{d-1}$.

Definição 2.2.2 *Seja σ uma substituição de Pisot unitária com autovalor dominante β . O Fractal de Rauzy associado a σ é o fecho da projeção sobre o β -espaço contratante da linha quebrada associada a qualquer ponto periódico $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de σ , isto é,*

$$\mathcal{R} = \overline{\{\pi(\mathbf{l}(u_0 \cdots u_{k-1}))\}}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Capítulo 3

Uma classe de Fractais de Rauzy que não possui a propriedade (F)

Neste capítulo vamos estudar uma classe de fractais de Rauzy, cuja respectiva β -expansão associada não satisfaz a propriedade (F). Mostraremos várias propriedades obtidas sobre essa classe de fractais.

Seja $(R_n)_{n \geq 0}$ a sequência recorrente definida por: $R_0 = 1$, $R_1 = a$, $R_2 = a^2 + b$ e $R_{n+3} = aR_{n+2} + bR_{n+1} + R_n$, para todo $n \geq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$, satisfazendo a condição $-a + 1 \leq b \leq -2$.

Proposição 3.0.1 *Todo inteiro natural n pode ser representado de maneira única como $n = \sum_{i=0}^N \varepsilon_i R_i$, onde $\varepsilon_i \in \{0, \dots, a-1\}$, em que $\varepsilon_j \varepsilon_{j-1} \cdots \varepsilon_{j-k} \leq_{\text{lex}} \underbrace{(a-1)(a+b-1)(a+b) \cdots (a+b)}_{k+1}$, para todo $j \geq k \geq 0$.*

Para a prova precisamos do seguinte lema:

Lema 3.0.1 *A sequência $(R_n)_{n \geq 4}$ satisfaz*

$$R_n = (a-1)R_{n-1} + (a+b-1)R_{n-2} + (a+b)R_{n-3} + \cdots + (a+b)R_1 + (a+b+1)R_0, \forall n \geq 4.$$

Demonstração:

A demonstração será feita por indução sobre n .

Primeiramente, mostremos que a relação é válida para $n = 4, 5$ e 6 .

Para $n = 4$,

$$\begin{aligned} R_4 &= aR_3 + bR_2 + R_1 \\ &= (a-1)R_3 + (a+b)R_2 + (b+1)R_1 + R_0 \\ &= (a-1)R_3 + (a+b-1)R_2 + (a+b+1)R_1 + (b+1)R_0, \text{ pois } R_2 = aR_1 + bR_0 \\ &= (a-1)R_3 + (a+b-1)R_2 + (a+b)R_1 + (a+b+1)R_0, \text{ pois } R_1 = aR_0. \end{aligned}$$

Se $n = 5$,

$$\begin{aligned}
R_5 &= aR_4 + bR_3 + R_2 \\
&= (a-1)R_4 + (a+b)R_3 + (b+1)R_2 + R_1 \\
&= (a-1)R_4 + (a+b-1)R_3 + (a+b+1)R_2 + (b+1)R_1 + R_0 \\
&= (a-1)R_4 + (a+b-1)R_3 + (a+b)R_2 + (a+b+1)R_1 + (b+1)R_0 \\
&= (a-1)R_4 + (a+b-1)R_3 + (a+b)R_2 + (a+b)R_1 + (a+b+1)R_0.
\end{aligned}$$

Para $n = 6$,

$$\begin{aligned}
R_6 &= aR_5 + bR_4 + R_3 \\
&= (a-1)R_5 + (a+b)R_4 + (b+1)R_3 + R_2 \\
&= (a-1)R_5 + (a+b-1)R_4 + (a+b+1)R_3 + (b+1)R_2 + R_1 \\
&= (a-1)R_5 + (a+b-1)R_4 + (a+b)R_3 + (a+b+1)R_2 + (b+1)R_1 + R_0 \\
&= (a-1)R_5 + (a+b-1)R_4 + (a+b)R_3 + (a+b)R_2 + (a+b)R_1 + (a+b+1)R_0.
\end{aligned}$$

Suponhamos agora que a propriedade é válida para todo $k < n$.

Como $R_n = aR_{n-1} + bR_{n-2} + R_{n-3}$, então

$R_n = aR_{n-1} + bR_{n-2} + X$, onde

$$X = (a-1)R_{n-4} + (a+b-1)R_{n-5} + (a+b)R_{n-6} + \cdots + (a+b)R_1 + (a+b+1)R_0$$

Resta provar que:

$$aR_{n-1} + bR_{n-2} + (a-1)R_{n-4} + (a+b-1)R_{n-5} = (a-1)R_{n-1} + (a+b-1)R_{n-2} + (a+b)R_{n-3} + (a+b)R_{n-4} + (a+b)R_{n-5}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&aR_{n-1} + bR_{n-2} + (a-1)R_{n-4} + (a+b-1)R_{n-5} \\
&= (a-1)R_{n-1} + (a+b)R_{n-2} + bR_{n-3} + aR_{n-4} + (a+b-1)R_{n-5} \\
&= (a-1)R_{n-1} + (a+b-1)R_{n-2} + (a+b)R_{n-3} + (a+b)R_{n-4} + (a+b)R_{n-5}.
\end{aligned}$$

□

Prova da Proposição 3.0.1

Demonstração.

Os dígitos $(\varepsilon_j)_{k(N) \geq j \geq 0}$ são obtidos usando o algoritmo *greedy*. Como $-a+1 \leq b \leq -2$, então a sequência $(R_n)_{n \geq 0}$ é uma sequência crescente de inteiros naturais. Logo, usando a definição de algoritmo *greedy*, podemos provar que para todo $0 \leq j \leq k(N)$, $\sum_{i=0}^j \varepsilon_i R_i < R_{j+1}$, [25].

Portanto, temos

$$\varepsilon_j \varepsilon_{j-1} \cdots \varepsilon_{j-k} <_{lex} (a-1)(a+b-1)(a+b) \cdots (a+b)(a+b+1), \forall j \geq k \geq 0 \quad (3.1)$$

Usando a relação 3.1 obtemos que $\varepsilon_j \cdots \varepsilon_{j-k} \leq_{lex} (a-1)(a+b-1)(a+b) \cdots (a+b)$.

□

Exemplo 3.0.1 1. Se $a = 3$ e $b = -2$, então $d(1, \beta) = .210111111 \dots$, temos então:

$$1 = \frac{2}{\beta} + \frac{1}{\beta^3} + \dots + \frac{1}{\beta^n} + \dots, \text{ e } \varepsilon_j \dots \varepsilon_{j-k} <_{lex} 201 \dots 12, \text{ ou } \varepsilon_j \dots \varepsilon_{j-k} \leq_{lex} 201 \dots 11.$$

2. Se $a = 5$ e $b = -3$ então $d(1, \beta) = .41222 \dots$, neste caso,

$$1 = \frac{4}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{2}{\beta^4} + \dots, \text{ e } \varepsilon_j \dots \varepsilon_{j-k} <_{lex} 41222 \dots 23, \text{ ou } \varepsilon_j \dots \varepsilon_{j-k} \leq_{lex} 41222 \dots 22.$$

Fractal de Rauzy

Seja $P_{a,b}(x) = x^3 - ax^2 - bx - 1$, o polinômio característico da sequência $(R_n)_{n \geq 0}$ e $\beta > 1, \alpha$ e λ suas raízes. Definimos o Fractal de Rauzy como:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{a,b} = \left\{ \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \theta_i, \forall j \geq n \geq 2, \varepsilon_j \varepsilon_{j-1} \dots \varepsilon_n \leq_{lex} (a-1)(a+b-1)(a+b) \dots (a+b) \right\}$$

em que $\theta_i = \alpha^i$, se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e $\theta_i = (\alpha^i, \lambda^i)$, se $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ ou $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$, dependendo se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ou se $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.0.2 1. No caso em que $a = 3$ e $b = -2$, podemos mostrar que o polinômio $P_{3,-2}(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ possui uma raiz real $\beta > 1$ e duas raízes complexas e conjugadas $\alpha, \bar{\alpha}$ que satisfazem $|\alpha|, |\bar{\alpha}| < 1$. Neste caso $\alpha \approx 0.33764 + 0.56228i$. O Fractal de Rauzy é:

$$\mathcal{R}_{3,-2} = \left\{ \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i, \forall j \geq n \geq 2, \varepsilon_j \varepsilon_{j-1} \dots \varepsilon_n \leq_{lex} 201 \dots 1 \right\}.$$

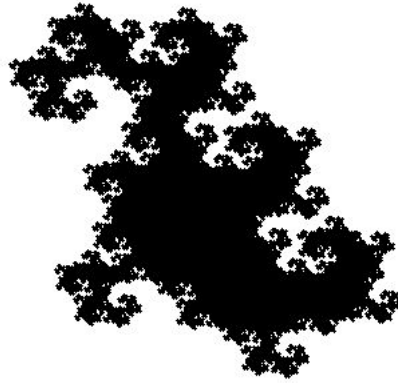


Figura 7. Fractal de Rauzy, caso $a=3, b=-2$.

2. No caso em que $a = 6$ e $b = -5$, podemos mostrar que o polinômio $P_{6,-5}(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 1$ possui três raízes reais, que são: $\beta = 5.048917340$, $\alpha = 0.3079785280$ e $\lambda = 0.6431041320$. O Fractal de Rauzy neste caso é dado por:

$$\mathcal{R}_{6,-5} = \left\{ \left(\sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i, \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \lambda^i \right), \forall j \geq n \geq 2, \varepsilon_j \varepsilon_{j-1} \dots \varepsilon_n \leq_{lex} 501 \dots 1 \right\}.$$

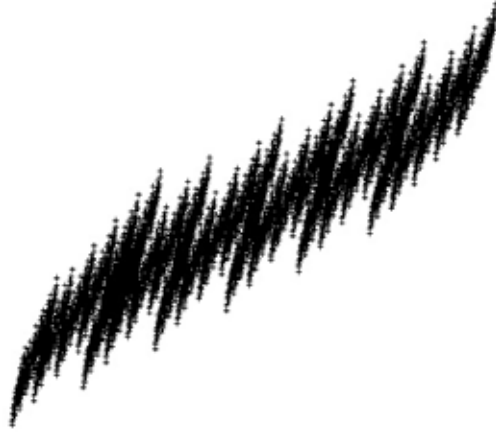


Figura 8. Fractal de Rauzy, caso $a=6$, $b=-5$.

Observação 3.0.1 Essa classe de Fractais de Rauzy também pode ser obtida através da β -substituição associada (Capítulo 1), definida sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$, da seguinte maneira:

$$\sigma(1) \mapsto 1^{(a-1)}2, \sigma(2) \mapsto 1^{(a+b-1)}3, \sigma(3) \mapsto 1^{(a+b)}3.$$

3.1 Propriedades topológicas do fractal de Rauzy

Por simplicidade, vamos supor que $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Logo $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$. Todos os resultados a serem apresentados valem no caso $\alpha \in \mathbb{R}$. Denotaremos por $\mathcal{N}$ o conjunto $\mathcal{N} = \{(\varepsilon_i)_{i \geq l}, l \in \mathbb{Z}, \forall n \geq l, \varepsilon_n \cdots \varepsilon_{n-k} \leq_{lex} (a-1)(a+b-1)\overline{(a+b)}\}$.

3.1.1 Compacidade

Teorema 3.1.1 O conjunto $\mathcal{R}$ é compacto.

Demonstração:

Seja $(z_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de elementos em $\mathcal{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$. Vamos mostrar que $z \in \mathcal{R}$. Suponhamos que $z_n = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i^{(n)} \alpha_i$ em que $(\varepsilon_i^{(n)})_{i \geq 2} \in \mathcal{N}$. Como $\mathcal{N}$ está contido em $\{0, \dots, a-1\}^{\mathbb{N}}$ que é compacto pela topologia produto das topologias discretas sobre $\{0, \dots, a-1\}$, então existe uma subsequência $(\varepsilon_i^{(p_n)})_{i \geq 2}$ convergente para $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}$ em $\{0, \dots, a-1\}^{\mathbb{N}}$. Pode-se provar que $(\varepsilon_i)_{i \geq 3}$ pertence a $\mathcal{N}$. Assim $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_{p_n} = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = z \in \mathcal{R}$. Logo $\mathcal{R}$ é fechado. Por outro lado, $|\sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i| \leq \sum_{i=2}^{\infty} |\varepsilon_i \alpha^i| \leq (a-1) \sum_{i=2}^{\infty} |\alpha|^i = \frac{(a-1)|\alpha|^2}{1-|\alpha|}$. Logo $\mathcal{R}$ é limitado. Portanto $\mathcal{R}$ é compacto. □

3.1.2 Azulejamento do plano

Teorema 3.1.2 $\mathbb{C} = \bigcup_{u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha} (\mathcal{R} + u)$.

Para provarmos o Teorema 3.1.2 precisamos dos seguintes resultados:

Lema 3.1.1 *Seja $(G_n)_{n \geq 0}$ a sequência recorrente definida por $G_0 = G_1 = 0$, $G_2 = 1$, $G_{n+3} = aG_{n+2} + bG_{n+1} + G_n$, para todo $n \geq 0$ e $-a + 1 \leq b \leq -2$. Para todo $n \geq 3$ tem-se $\alpha^n = G_n \alpha^2 + (G_{n+1} - aG_n)\alpha + G_{n-1}$. Em particular, para todo $(\varepsilon_i)_{2 \leq i \leq N} \in \mathcal{N}$ tem-se $\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \alpha^i = n\alpha^2 + a_n \alpha + b_n$ onde $n = \sum_{i=2}^N \varepsilon_i G_i$, $a_n = \sum_{i=2}^N \varepsilon_i (G_{i+1} - aG_i)$ e $b_n = \sum_{i=2}^N \varepsilon_i G_{i-1}$.*

Demonstração:

A fórmula é válida para $n = 3$. De fato, temos $\alpha^3 = a\alpha^2 + b\alpha + 1$. Como $G_3 = a$, $G_4 = a^2 + b$ e $G_2 = 1$, então $\alpha^3 = G_3 \alpha^2 + (G_4 - aG_3)\alpha + G_2$.

Suponhamos que a fórmula seja válida para $n > 3$. Então,

$\alpha^{n+1} = G_n \alpha^3 + (G_{n+1} - aG_n)\alpha^2 + G_{n-1}\alpha$. Como $\alpha^3 = a\alpha^2 + b\alpha + 1$ e $G_{n+2} - aG_{n+1} = bG_n + G_{n-1}$, obtemos

$$\alpha^{n+1} = G_{n+1}\alpha^2 + (G_{n+2} - aG_{n+1})\alpha + G_n.$$

Portanto obtemos o resultado. □

Proposição 3.1.1 *Sejam $c, d \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha^2 = c + d\alpha$. Então $(1, c, d)$ é $\mathbb{Q}$ -linearmente Independente.*

Demonstração. Sejam $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha^2 = c + d\alpha$. Vamos mostrar que $\{1, c, d\}$ é $\mathbb{Q}$ -linearmente independente. Sejam $P(x) = x^3 - ax^2 - bx - 1$ e $Q(x) = x^2 - cx - d$. Dividindo o polinômio $P(x)$ por $Q(x)$, resulta que $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$, com $S(x) = x + (c - a)$ e $R(x) = [(c(c - a) + (d - b))x + (c - a)d - 1]$. Temos que $R(\alpha) = 0$. Como $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ então

$$\begin{cases} c(c - a) + (d - b) = 0 \\ d(c - a) - 1 = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Suponhamos que $\{1, c, d\}$ seja $\mathbb{Q}$ -linearmente dependente. Então existem $p, q, r \in \mathbb{Z}$ tais que

$$p + q \cdot c + d \cdot r = 0 \quad (3.3)$$

Multiplicando a 1ª e a 2ª equações de (3.2) por q e r respectivamente e somando-as obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -p \cdot c + q \cdot d = r - pa + qb \\ q \cdot c + r \cdot d = -p \end{cases} \quad (3.4)$$

Analisemos os casos para a solução do sistema acima:

Caso 1. $-pr - q^2 \neq 0$. Nesse caso as soluções são

$$c = \frac{r^2 - arp + brq + qp}{-rp - q^2} \in \mathbb{Q}$$

e

$$d = \frac{p^2 - qr + qpa - q^2b}{-rp - q^2} \in \mathbb{Q}$$

Logo, $\alpha^2 = c\alpha + d = \frac{s}{t}\alpha + \frac{m}{n}$. Seja $p = mmc(t, m)$. Então existem $k, l \in \mathbb{Z}$ tais que $p\alpha^2 = k\alpha + l$. Assim, α é um inteiro algébrico de grau 2, o que não ocorre.

Caso 2. $-pr - q^2 = 0$. Nesse caso vamos analisar o sistema

$$\begin{cases} c \cdot \alpha + d = \alpha^2 \\ c \cdot q + d \cdot r = -p \end{cases} \quad (3.5)$$

Vamos supor que $\alpha r - q \neq 0$ ou $\alpha r \neq q$.

As soluções são

$$c = \frac{r\alpha^2 + p}{\alpha r - q}$$

e

$$d = \frac{-\alpha p - \alpha^2 q}{\alpha r - q}.$$

Caso 1.1. $r \neq 0$. Então, $p = \frac{-q^2}{r}$. Assim $c = \frac{r\alpha^2 + \frac{-q^2}{r}}{\alpha r - q} = \frac{\alpha r - q}{r} = \alpha - \frac{q}{r}$.

Logo $c = \alpha - \frac{q}{r}$ ou $\alpha = c + \frac{q}{r} \in \mathbb{R}$. Absurdo.

Portanto $r = 0$ e $q = 0$, implica que $p = 0$. Temos então que $\{1, c, d\}$ é $\mathbb{Q}$ -linearmente independente.

□

Demonstração do Teorema 3.1.2.

Pela Proposição 3.1.1 e o Teorema de Kronecker o conjunto $\{n\alpha^2 + p\alpha + q, n \in \mathbb{N}, p, q \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{C}$. Seja $z \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que para todo $k \geq N$, $|z - z_k| < \varepsilon$, e para todo $k \geq N$, $z_k = n_k\alpha^2 + p_k\alpha + q_k$, $(n_k, p_k, q_k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2$. Para todo k ,

sejam a_{n_k} e b_{n_k} os números definidos no Lema anterior. Temos $z_k + (a_{n_k} - p_k)\alpha + (b_{n_k} - q_k) = n_k\alpha^2 + a_{n_k}\alpha + b_{n_k} = x_k \in \mathcal{R}$.

Para todo $k \geq N$, $|x_k - z_k| \leq |x_k - z| + |z - z_k| \leq \varepsilon + |z| + M$ onde $M = \max\{|x|, x \in \mathcal{R}\}$. Por outro lado como $x_k - z_k \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ que é um grupo discreto, então existe uma sequência crescente $(k_i)_{i \geq 1}$ de inteiros tais que para todo i , $x_{k_i} - z_{k_i} = y_0$, em que $y_0 = q + p\alpha$ pertence a $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$. Logo para todo $i \geq 1$, $|z - x_{k_i} + y_0| < \varepsilon$. Como $\mathcal{R}$ é compacto e $x_{k_i} \in \mathcal{R}$, existe um elemento $z^* \in \mathcal{R}$ tal que $|z - z^* + y| \leq \varepsilon$. Logo $z \in \overline{(\mathcal{R} - y_0)} = \mathcal{R} - y_0$. Portanto obtemos o resultado. □

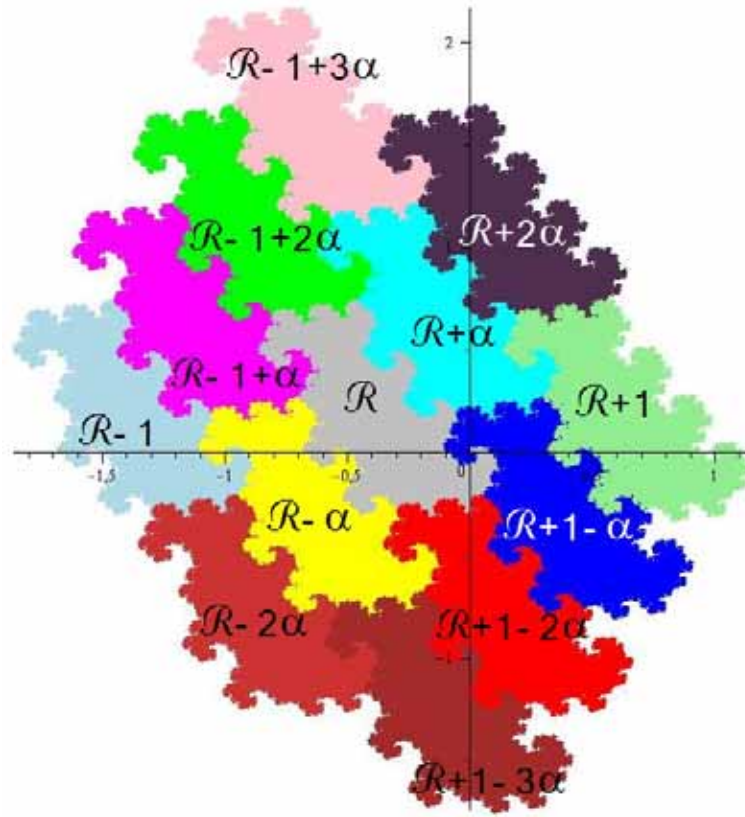


Figura 9. Azulejamento do plano induzido por $\mathcal{R}_{4,-2}$.

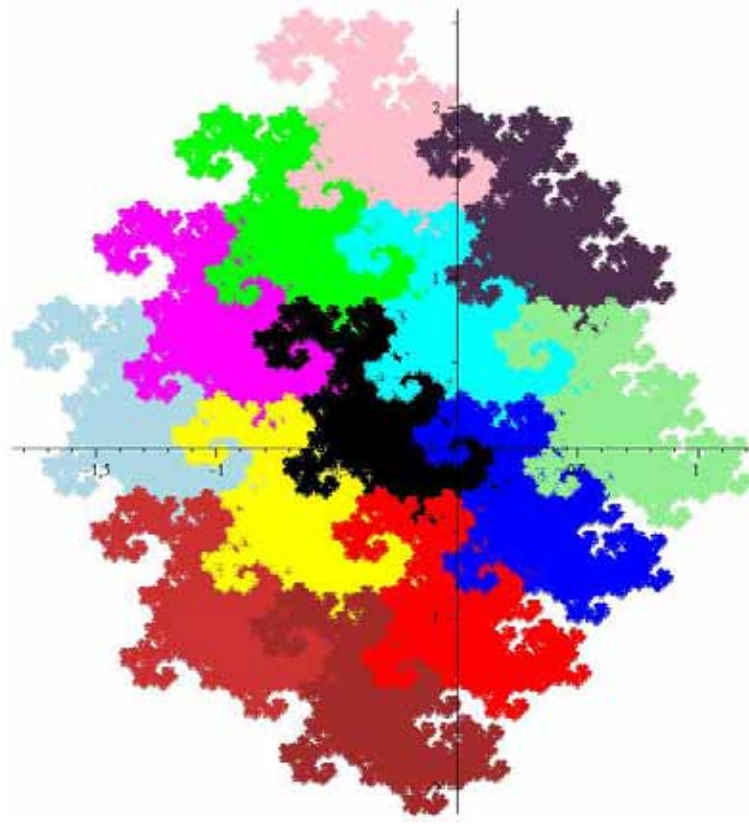


Figura 10. Azulejamento do plano induzido por $\mathcal{R}_{3,-2}$.

3.2 Fronteira de $\mathcal{R}$

Proposição 3.2.1 *A Fronteira de $\mathcal{R}$ satisfaz a seguinte propriedade:*

$\partial\mathcal{R} = \bigcup_{u \in A} \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u)$, em que A é finito, de cardinalidade par e $A \supset \{\pm(1 + (b + 1)\alpha), \pm\alpha, \pm(1 + b\alpha)\}$.

Antes da demonstração precisamos do seguinte Lema:

Lema 3.2.1 *Sejam w_1, w_2, w_3, z_1 e z_2 dados por:*

$$w_1 = \frac{1}{1 - \alpha^6}((b + 2)\alpha^4 + (a + b)\alpha^5 + (a - 2)\alpha^6) = \psi(0000((b + 2)(a + b)(a - 2)^\infty)).$$

$$w_2 = \alpha + b\alpha^2 + (a - 1)\alpha^3 + \frac{1}{1 - \alpha^6}((b + 2)\alpha^7 + (a + b)\alpha^8 + (a - 2)\alpha^9) = \psi(01b(a - 1)000((b + 2)(a + b)(a - 2)^\infty)).$$

$$w_3 = 1 + (b + 1)\alpha + (a + b)\alpha^2 + (a - 2)\alpha^3 + \frac{1}{1 - \alpha^6}((b + 2)\alpha^7 + (a + b)\alpha^8 + (a - 2)\alpha^9) = \psi(1(b + 1)(a + b)(a - 2)000((b + 2)(a + b)(a - 2)^\infty)).$$

$$z_1 = 1 + b\alpha + (a - 1)\alpha^2 = \psi(1b(a - 1)).$$

$$z_2 = (b + 2)\alpha^3 + (a + b + 1)\alpha^4 + (a + b)\frac{\alpha^5}{1 - \alpha} = \psi(000(b + 2)(a + b + 1)(a + b)^\infty).$$

Então $w_1 = w_2 = w_3$ e $z_1 = z_2$.

Demonstração

Mostremos que $w_1 = w_2$ ou equivalentemente $w_1 - w_2 = 0$. De fato,

$$w_1 - w_2 = (b+2)\frac{(\alpha^4-\alpha^7)}{1-\alpha^6} + (a+b)\frac{(\alpha^5-\alpha^8)}{1-\alpha^6} + (a-2)\frac{(\alpha^6-\alpha^9)}{1-\alpha^6} - \alpha - b\alpha^2 - (a-1)\alpha^3 = 0 \iff$$

$$\alpha^4(b+2)\frac{(1-\alpha^3)}{1-\alpha^6} + \alpha^5(a+b)\frac{(1-\alpha^3)}{1-\alpha^6} + \alpha^6(a-2)\frac{(1-\alpha^3)}{1-\alpha^6} - \alpha - b\alpha^2 - (a-1)\alpha^3 = 0. (1)$$

Como $\frac{1-\alpha^3}{1-\alpha^6} = \frac{1}{1+\alpha^3}$, então a equação (1) fica:

$$\frac{\alpha^4(b+2)}{1+\alpha^3} + \frac{\alpha^5(a+b)}{1+\alpha^3} + \frac{\alpha^6(a-2)}{1+\alpha^3} - \alpha - b\alpha^2 - (a-1)\alpha^3 = 0. (2)$$

Multiplicando a equação (2) por $(1+\alpha^3)$, obtemos,

$$\alpha^4(b+2) + \alpha^5(a+b) + \alpha^6(a-2) - \alpha(1+\alpha^3) - b\alpha^2(1+\alpha^3) - \alpha^3(a-1)(1+\alpha^3) = 0$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade acima obtemos:

$$\alpha^4(b+2) + \alpha^5(a+b) + \alpha^6(a-2) - \alpha(1+\alpha^3) - b\alpha^2(1+\alpha^3) - \alpha^3(a-1)(1+\alpha^3) = b\alpha^4 + \alpha +$$

$$\alpha^4 + a\alpha^5 - \alpha^6 - \alpha - a\alpha^3 - b\alpha^2 = b\alpha^4 + \alpha^4 + a\alpha^5 - a\alpha^5 - b\alpha^4 - \alpha^3 - \alpha - a\alpha^3 + \alpha^3 = 0.$$

Mostremos que $w_2 = w_3$

Basta mostrar que $\alpha + b\alpha^2 + (a-1)\alpha^3 = 1 + (b+1)\alpha + (a+b)\alpha^2 + (a-2)\alpha^3$. De fato, desenvolvendo o lado direito da equação obtemos:

$$1 + (b+1)\alpha + (a+b)\alpha^2 + (a-2)\alpha^3 = \underbrace{1 + b\alpha + a\alpha^2}_{=\alpha^3} + \alpha + b\alpha^2 + (a-2)\alpha^3 = \alpha + b\alpha^2 + (a-1)\alpha^3.$$

□

Demonstração da Proposição 3.2.1:

Seja $z \in \partial\mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}} \setminus \text{int}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \setminus \text{int}(\mathcal{R})$. Como $\mathbb{C} = \bigcup_{u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha} (\mathcal{R} + u)$, então existe uma sequência $(z_n)_{n \geq 0}$ de elementos de $\mathbb{C}$ tal que

$$\lim z_n = z \text{ e } z_n \notin \mathcal{R}, \forall n \geq 0.$$

Pelo Teorema 3.1.2 existe uma sequência $(u_n)_{n \geq 0}$ de elementos de $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \setminus \{0\}$ tal que $z_n \in \mathcal{R} + u_n$, para todo $n \geq 0$. Logo $(u_n)_{n \geq 0}$ é limitada. Como $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ é um grupo discreto então $(u_n)_{n \geq 0}$ é uma sequência que possui um número finito de termos. Assim, existe uma subsequência $(u_{k_n})_{n \geq 0}$ de $(u_n)_{n \geq 0}$ tal que $u_{k_n} = u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \setminus \{0\}$. Como $z_{k_n} \in \mathcal{R} + u_{k_n} = \mathcal{R} + u$ temos que

$$z = \lim z_{k_n} \in \mathcal{R} + u,$$

pois $\mathcal{R} + u$ é fechado. Portanto $\partial\mathcal{R} \subset \bigcup_{u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha} \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u)$.

Por outro lado, se $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u)$, $u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \setminus \{0\}$, como $\text{int}(\mathcal{R}) \cap (\mathcal{R} + u) = \emptyset$, então $z \notin \text{int}(\mathcal{R})$. Portanto $z \in \partial\mathcal{R}$.

Portanto, $\partial\mathcal{R} = \bigcup_{u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha} \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u) = \bigcup_{u \in A} \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u)$, em que $A = \{u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \setminus \{0\}, \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u) \neq \emptyset\}$.

O conjunto A é finito pois A é limitado e está contido em $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$, que é discreto. Por fim a cardinalidade de A é par pois se $u \in A$, então $-u \in A$.

Agora vamos provar que $A \supset \{\pm(1 + (b + 1)\alpha, \pm\alpha, \pm(1 + b\alpha)\}$.

De fato, pelo Lema 3.2.1 temos que

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{1}{1 - \alpha^6}((b + 2)\alpha^4 + (a + b)\alpha^5 + (a - 2)\alpha^6) \\
 &= \alpha + b\alpha^2 + (a - 1)\alpha^3 + \frac{1}{1 - \alpha^6}((b + 2)\alpha^7 + (a + b)\alpha^8 + (a - 2)\alpha^9) \\
 &= 1 + (b + 1)\alpha + (a + b)\alpha^2 + (a - 2)\alpha^3 + \frac{1}{1 - \alpha^6}((b + 2)\alpha^7 + (a + b)\alpha^8 + (a - 2)\alpha^9)
 \end{aligned}$$

Logo, $w_1 \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha) \cap (\mathcal{R} + 1 + (b + 1)\alpha)$. Da mesma forma, o ponto $z_2 \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + 1 + b\alpha)$. Portanto, $\pm\alpha$, $\pm(1 + b\alpha)$ e $\pm(1 + (b + 1)\alpha)$ pertencem a A .

□

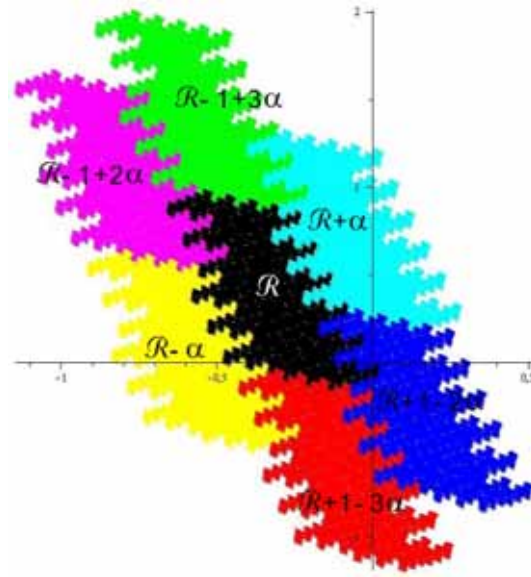


Figura 11. Fractal de Rauzy $\mathcal{R}_{6,-3}$ com 6 vizinhos.

Capítulo 4

Construção do Autômato que reconhece os pontos com duas representações

Neste capítulo provaremos que existe um autômato finito e explícito que reconhece todos os pontos que tem duas representações. Estes pontos pertencem à fronteira de $\mathcal{R}$.

Teorema 4.0.1 *Sejam $x = \sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i$ e $y = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$, em que $l \in \mathbb{Z}$ e $(a_i)_{i \geq l}, (b_i)_{i \geq l}$ pertencem à $\mathcal{N}$. Então $x = y$ se e somente se o conjunto $A(x, y) = \{x(k) - y(k), k \geq l\}$ é finito, onde*

$$x(k) = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k a_i \alpha^i \text{ e } y(k) = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k b_i \alpha^i, \forall k \geq l.$$

Além disso, $\bigcup_{(x,y)} A(x, y) \supset \{0, \pm \alpha^2, \pm(\alpha + b\alpha^2), \pm(\alpha + (b+1)\alpha^2), \pm(1 + b\alpha + (a-1)\alpha^2), \pm(1 + (b+1)\alpha + (a+b)\alpha^2), \pm(1 + (b+1)\alpha + (a+b+1)\alpha^2)\}$.

Antes de provarmos este Teorema, vamos definir o autômato:

4.0.1 Construção Algorítmica dos números complexos que possuem duas representações

Definição 4.0.1 *Um **autômato finito** é a uma terna (S, A, C) , onde A é o alfabeto do autômato, S o conjunto dos estados e C um subconjunto de $S \times A \times S$.*

Observação 4.0.1 *Podemos adicionar ao autômato um conjunto I dos estados iniciais e um conjunto F dos estados finais. Neste trabalho vamos precisar somente do conjunto dos estados iniciais, I .*

Definição 4.0.2 Dizemos que uma palavra $a_1 \cdots a_n$ (resp. uma palavra infinita $a_1 \cdots a_n \cdots$) é **reconhecível pelo autômato** (S, A, C) , se existe uma palavra $s_0 \cdots s_n$ de S , $s_0 \in I$ (resp. uma sequência $(s_n \in A^{\mathbb{N}})$) tal que $(s_{i-1}, a_i, s_i) \in C$, para $i = 1, \dots, n$ (resp. para todo $i \in \mathbb{N}^*$).

Definição do autômato que reconhece os pontos com duas expansões

Sejam p e q dois estados do autômato. O conjunto das arestas é $(p, (c, d), q) \in S \times \{0, 1, \dots, a-1\}^2 \times S$ de modo que satisfaça $q = \frac{p}{\alpha} + (c - d)\alpha^2$. O conjunto dos estados iniciais é $I = \{(0, (0, 0), 0)\}$. Suponhamos que $S = \{0, \pm\alpha^2, \pm(\alpha + b\alpha^2), \pm(\alpha + (b+1)\alpha^2), \pm(1 + b\alpha + (a-1)\alpha^2), \pm(1 + (b+1)\alpha + (a+b)\alpha^2), \pm(1 + (b+1)\alpha + (a+b+1)\alpha^2)\}$.

Vamos explicar como construir o autômato. Sejam $x = \sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i$, $y = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$, em que as sequências $(a_i)_{i \geq l}$ e $(b_i)_{i \geq l}$ pertencem à $\mathcal{N}$. Suponhamos que $x = y$ e coloquemos para todo $k \geq l$, $A_k = x(k) - y(k)$. Temos,

$$A_{k+1} = \frac{A_k}{\alpha} + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2.$$

Seja t o menor inteiro tal que $a_t \neq b_t$. Então $A_i = 0$, para todo $i \in \{l, \dots, t-1\}$. Suponhamos que $a_t > b_t$. Então $A_t = (a_t - b_t) = \alpha^2$. Logo, $A_{t+1} = \alpha + (a_{t+1} - b_{t+1})\alpha^2$, $A_{t+1} \in S$. Portanto $A_{t+1} = \alpha + b\alpha^2$, se $(a_{t+1}, b_{t+1}) = (\varepsilon + b, \varepsilon)$ ou $A_{t+1} = \alpha + (b+1)\alpha^2$, se $(a_{t+1}, b_{t+1}) = (\varepsilon + b + 1, \varepsilon)$, em que $\varepsilon \in \{0, 1, \dots, a-1\}$.

Logo, $(\alpha^2, (\varepsilon + b, \varepsilon), \alpha + b\alpha^2)$ é uma aresta que liga o estado α^2 ao estado $\alpha + b\alpha^2$ e $(\alpha^2, (\varepsilon + b + 1, \varepsilon), \alpha + (b+1)\alpha^2)$ é uma aresta que liga o estado α^2 ao estado $\alpha + (b+1)\alpha^2$.

Como o conjunto dos estados S é finito, obtemos um autômato finito. (Figura abaixo).

Observação: A determinação de todos os estados do autômato está explicitada no Anexo.

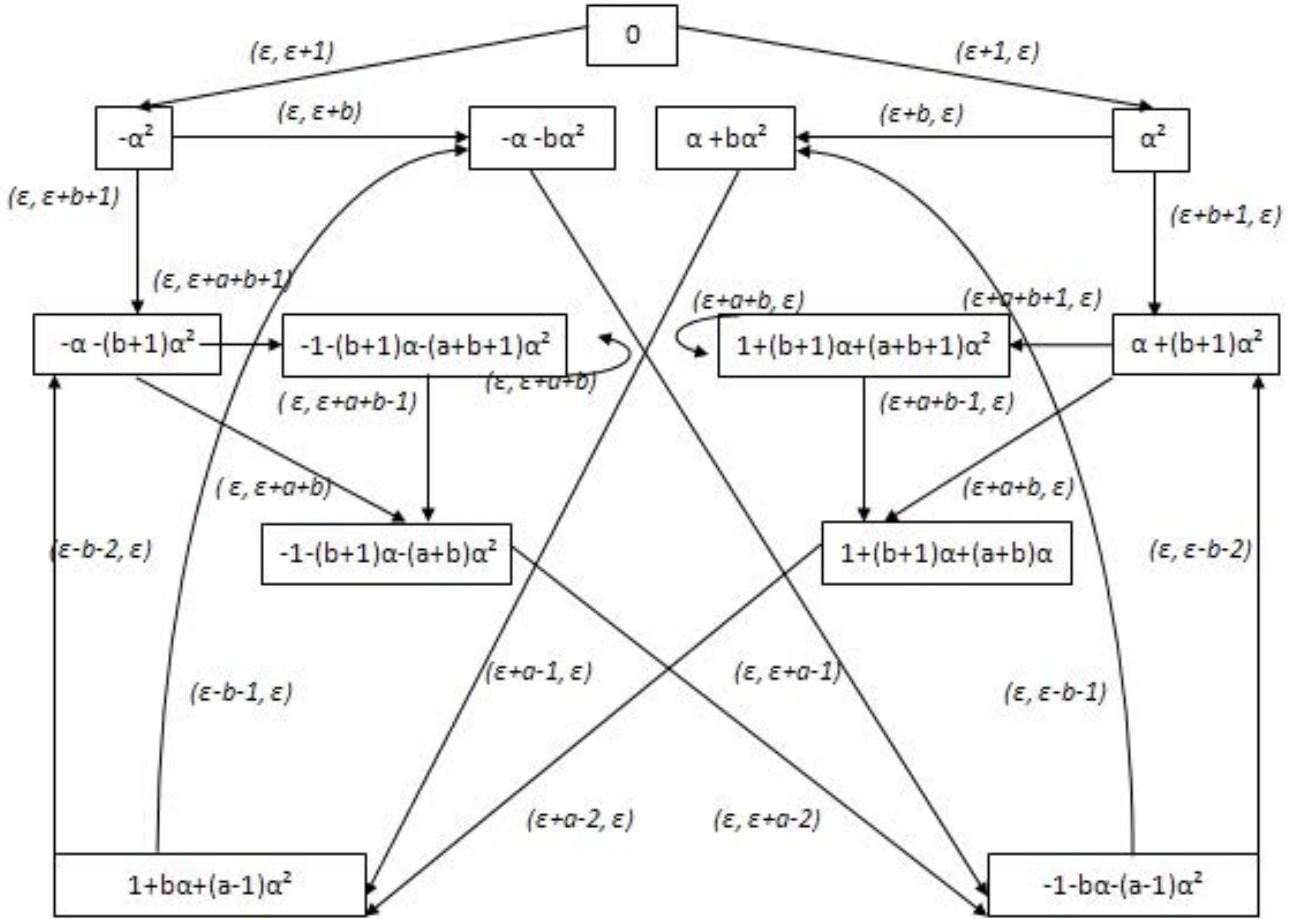


Figura 12. Autômato $\mathcal{B}$ no caso $n = 1$.

Demonstração do Teorema 4.0.1

Temos, $\alpha^{k-2}(x(k) - y(k)) = \sum_{i=0}^k a_i \alpha^i - \sum_{i=0}^k b_i \alpha^i$.

Se $x(k) - y(k) \in S$, então $x(k) - y(k)$ é limitado, independentemente de k , logo:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha^{k-2}(x(k) - y(k)) = 0 = x - y,$$

pois $|\alpha| < 1$. Portanto $x = y$.

Vamos provar a implicação direta. Sejam $x = \sum_{i=2}^{\infty} a_i \alpha^i$ e $y = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \alpha^i$. Suponhamos que $x = y$, portanto $\alpha^{-k+2}x = \alpha^{-k+2}y$.

Afirmção: O conjunto $\{x(k) - y(k), k \geq 0\}$ é finito.

Como $x(k) - y(k) = \alpha^{-k+2}(\sum_{i=0}^k a_i \alpha^i - \sum_{i=0}^k b_i \alpha^i) = \alpha^{-k+2}(\sum_{i=k+1}^{+\infty} b_i \alpha^i - \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i \alpha^i) = \sum_{j=3}^{+\infty} (b_{k+j-2} - a_{k+j-2}) \alpha^j$. Logo $|x(k) - y(k)| \leq C$, onde $C \in \mathbb{R}$.

Seja $A_k = x(k) - y(k)$, A_k é um inteiro algébrico e seus conjugados são $\tilde{A}_k$ e $\bar{A}_k$, onde $\tilde{A}_k = \sum_{i=0}^k (a_i - b_i) \beta^{i-k+2}$ e $\bar{A}_k = \sum_{i=0}^k (a_i - b_i) \bar{\alpha}^{i-k+2}$.

Temos $|\bar{A}_k| = |A_k| \leq C$.

e,

$$|\tilde{A}_k| = \left| \sum_{i=l}^k (a_i - b_i) \beta^{i-k+2} \right| = |(a_0 - b_0) \beta^{-k+2} + \dots + (a_k - b_k) \beta^2| \leq C \frac{\beta^2}{1 - (1/\beta)} = K.$$

onde $C = 2 \cdot \max\{|a_i|, a_i \in \{0, 1, \dots, a-1\}\} = 2(a-1)$.

Logo existe $K > 0$ tal que A_k e todos seus conjugados são limitados por K , independentemente de k . Seja P_k o polinômio minimal de cada A_k (inteiro algébrico de grau menor ou igual a 3). Os coeficientes de A_k são expressos como funções simétricas de A_k e de seus conjugados. Como estes são limitados por K e estão em $\mathbb{Z}$ então $\{P_k, k \geq 0\}$ é finito. Portanto $\{A_k, k \geq 0\}$ é finito. □

Como consequência deste Teorema, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.0.2 *Sejam $(a_i)_{i \geq l}$ e $(b_i)_{i \geq l}$ dois elementos distintos de $\mathcal{N}$, então $\sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$ se e somente se a sequência $((a_i, b_i))_{i \geq l}$ é reconhecível pelo autômato $\mathcal{B}$.*

Lema 4.0.2 *Para todo $k \geq l$, $|\tilde{A}_k| = \left| \sum_{i=l}^k (a_i - b_i) \beta^{i-k+2} \right| < \beta^3$.*

Demonstração.

Suponhamos sem perda de generalidade que $\tilde{A}_k = \sum_{i=l}^k (a_i - b_i) \beta^{i-k+2} > 0$. Logo, $\tilde{A}_k \in \mathbb{Z}[\beta] \cap \mathbb{R}^+$. Portanto, como β é um número de Pisot, $\tilde{A}_k = \sum_{i=-\infty}^L c_i \beta^i$, em que $(c_i)_{i \leq L}$ é ultimamente periódica (ver [30]). Logo $\sum_{i=l}^k a_i \beta^{i-k+2} = \sum_{i=l}^k b_i \beta^{i-k+2} + \sum_{i=-\infty}^L c_i \beta^i$. Suponhamos agora que exista $i \geq 3$ tal que $c_i > 0$. Logo $\sum_{i=l}^k a_i \beta^{i-k+2} \geq \beta^3$. Absurdo, pois $0a_2 \dots a_l <_{lex} 10 \dots 0$. Logo $L \leq 2$ e $\tilde{A}_k < \beta^3$. □

Proposição 4.0.2 *Sejam $S = \{A_k = n_k + p_k \alpha + q_k \alpha^2, k \geq 0 \text{ e } (n_k, p_k, q_k) \in I, \text{ onde } I \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ finito}\}$ e $t = \max\{|n_k|, k \geq 0\}$. Se $t = 1$, então o conjunto dos estados do autômato é $S = \{0, \pm \alpha^2, \pm(\alpha + b\alpha^2), \pm(\alpha + (b+1)\alpha^2), \pm(1 + b\alpha + (a-1)\alpha^2), \pm(1 + (b+1)\alpha + (a+b)\alpha^2), \pm(1 + (b+1)\alpha + (a+b+1)\alpha^2)\}$.*

Demonstração.

Sejam $A_k = n_k + p_k \alpha + q_k \alpha^2$ e $t = \max\{|n_k|, k \geq 0\}$. Vamos supor que $t = 1$. Então existe um inteiro k tal que $A_k = 1 + p\alpha + q\alpha^2$. Logo $A_{k+1} = \frac{1}{\alpha} + p + q\alpha^2$. Portanto $A_{k+1} = (p-b) + (q-a)\alpha + (d+1)\alpha^2$, onde $d \in \Lambda = \{-a+1, \dots, a-1\}$. Como $t = 1$, então $p \in \{b-1, b, b+1\}$.

Vamos analisar todos os casos possíveis para p .

Caso 1. $p = b$

Nesse caso, $A_{k+1} = (q - a)\alpha + (d + 1)\alpha^2$ e $A_{k+2} = (q - a) + (d + 1)\alpha + e\alpha^2$, $e \in \Lambda$.

Logo, $q \in \{a - 1, a, a + 1\}$. Temos $\tilde{A}_k = 1 + b\beta + q\beta^2$. Pelo Lema 4.0.2, devemos ter $\tilde{A}_k < \beta^3$, logo $q = a - 1$, pois caso contrário $\tilde{A}_k \geq 1 + b\beta + q\beta^2 = \beta^3$.

Portanto temos o estado $\mathbf{A}_k = \mathbf{1} + \mathbf{b}\alpha + (\mathbf{a} - \mathbf{1})\alpha^2$.

Caso 2. $p = b - 1$.

Temos: $A_{k+1} = -1 + (q - a)\alpha + (d + 1)\alpha^2$. Como $-A_{k+1} = 1 - (q - a)\alpha - (d + 1)\alpha^2 \in S_{a,b}$, obtemos, como foi feito anteriormente que $a - q \in \{b - 1, b, b + 1\}$. Vamos provar que estes casos não ocorrem.

Caso 2.1. $q = a - b + 1$.

Nesse caso, $\tilde{A}_k = 1 + (b - 1)\beta + (a - b + 1)\beta^2 = \beta^3 - \beta + (1 - b)\beta^2\beta^3 - \beta + 3\beta^2 > \beta^3$. Portanto $\tilde{A}_k > \beta^3$.

Caso 2.2. $q = a - b$.

Temos, $\tilde{A}_k = 1 + (b - 1)\beta + (a - b)\beta^2 = \beta^3 - \beta - b\beta^2 \geq \beta^3 - \underbrace{\beta + 2\beta^2}_{>0} > \beta^3$.

Caso 2.3. $q = a - b - 1$.

$\tilde{A}_k = 1 + (b - 1)\beta + (a - b - 1)\beta^2 = \beta^3 - \beta + (-1 - b)\beta^2 \geq \beta^3 - \underbrace{\beta + \beta^2}_{>0} > \beta^3$.

Portanto não temos o caso $p = b - 1$.

Caso 3. $p = b + 1$.

Temos: $A_{k+1} = 1 + (q - a) + (d + 1)\alpha^2$ e $A_{k+2} = (q - a - b) + (d + 1 - a)\alpha + (e + 1)\alpha^2$. Logo, $q = a + b + r$, em que $|r| \leq 1$.

Então, $\tilde{A}_k = 1 + p\beta + q\beta^2 = 1 + (b + 1)\beta + (a + b + r)\beta^2$, $|r| \leq 1$. Analisemos os casos possíveis.

Caso 3.1 $q = a + b$ Nesse caso, $\tilde{A}_k = 1 + (b + 1)\beta + (a + b)\beta^2 = \beta^3 + \beta + b\beta^2 \leq \beta^3 + \underbrace{\beta - 2\beta^2}_{<0} < \beta^3$

Portanto temos o estado $\mathbf{A}_k = \mathbf{1} + (\mathbf{b} + \mathbf{1})\alpha + (\mathbf{a} + \mathbf{b})\alpha^2$.

Caso 3.2 $q = a + b + 1$

Temos: $\tilde{A}_k = 1 + (b + 1)\beta + (a + b + 1)\beta^2 = \beta^3 + \beta + (b + 1)\beta^2 \leq \beta^3 + \underbrace{\beta - \beta^2}_{<0} < \beta^3$

Logo, obtemos o estado $\mathbf{A}_k = \mathbf{1} + (\mathbf{b} + \mathbf{1})\alpha + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{1})\alpha^2$.

Caso 3.3 $q = a + b - 1$

Nesse caso, $\tilde{A}_k = 1 + (b + 1)\beta + (a + b - 1)\beta^2$. Calculando A_{k+1} , obtemos que $A_{k+1} = 1 + (b - 1)\alpha + (d + 1)\alpha^2$, $d \in \Lambda$, o qual não existe, pelo *Caso 2*.

Portanto este caso não ocorre.

Consideremos agora $A_k = n + p\alpha + q\alpha^2$. Vamos supor que $n = 0$. Então, $A_k = p\alpha + q\alpha^2$ e $A_{k+1} = p + q\alpha + d\alpha^2$. Logo, $p \in \{-1, 0, 1\}$. Analisemos os casos possíveis, como anteriormente:

Caso 1. Se $p = 0$, então $A_k = q\alpha^2$. Logo obtemos os estados $\mathbf{A}_k = \mathbf{0}$, se $q = 0$ e $\mathbf{A}_k = \pm\alpha^2$, se $q = \pm 1$.

Caso 2. Se $p = 1$, então $A_k = \alpha + q\alpha^2$ e $A_{k+1} = 1 + q\alpha + d\alpha^2$.

Portanto, $A_{k+2} = (q - b) + (d - a)\alpha + (e + 1)\alpha^2$. Logo $q \in \{b - 1, b, b + 1\}$. Analisemos os casos possíveis.

Caso 2.1 $q = b - 1$. Esse caso não ocorre, como já vimos no *Caso 2*.

Caso 2.2 $q = b$. Nesse caso temos o estado $\mathbf{A}_k = \alpha + b\alpha^2$.

Caso 2.3 $q = b + 1$. Temos o estado, $\mathbf{A}_k = \alpha + (b + 1)\alpha^2$.

□

Proposição 4.0.3 *Suponhamos que $t = n$ onde $1 < n \leq \frac{a-1}{a+b+1}$. Se $a + b \geq 3$ então $A_k = n + (n + nb)\alpha + (na + nb + n)\alpha^2$ é um estado de $\mathcal{B}$.*

Caso A: $t = n \geq 2$.

Suponhamos que $A_k = n + p\alpha + q\alpha^2$. Então

$A_{k+1} = (p - nb) + (q - na)\alpha + (f + n)\alpha^2$, $|f| \leq a - 1$. Fazendo $p - nb = s$, onde $s \in \{-n, \dots, n\}$, então $A_{k+1} = s + (q - na)\alpha + (f + n)\alpha^2$. Logo,

$A_{k+2} = (q - na - sb) + (f + n - sa)\alpha + (g + s)\alpha^2$, $|g| \leq a - 1$. Fazendo $q = na + sb + l$, $l = -n, \dots, n$ obtemos $A_k = n + (nb + s)\alpha + (na + sb + l)\alpha^2$.

Vamos mostrar que $s = n$, no caso em que $a + b \geq 3$.

Temos $\tilde{A}_k = n + (nb + s)\beta + (na + sb + l)\beta^2$. Fazendo $n + nb\beta + na\beta^2 = n\beta^3$, obtemos $\tilde{A}_k = n\beta^3 + (sb + l)\beta^2 + s\beta = \beta^3 + (n - 1)\beta^3 + (sb + l)\beta^2 + s\beta$.

Seja $X = (n - 1)\beta^3 + (sb + l)\beta^2 + s\beta$. Usando o fato que $\beta^2 = (a - 1)\beta + (a + b - 1) + (a + b)(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \dots)$, pois $d(1, \beta) = (a - 1)(a + b - 1)(a + b) \cdots (a + b)$, obtemos

$$\begin{aligned} X/\beta &= (n - 1)\beta^2 + (sb + l)\beta + s \\ &= [(n - 1)(a - 1) + sb + l]\beta + [(n - 1)(a + b - 1) + s] + \underbrace{(n - 1)(a + b)(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \dots)}_R. \end{aligned}$$

Suponhamos que $s < n$.

Caso 1. $-n \leq s \leq 0$.

$$\begin{aligned} X/\beta &= [(n - 1)(a - 1) + sb + l]\beta + [(n - 1)(a + b - 1) + s] + R \\ &\geq [l + (n - 1)(a - 1)]\beta + [(n - 1)(a + b - 1) + s] + R, \text{ pois } sb \geq 0 \\ &\geq [(n - 1)(a - 1) - n]\beta + [(n - 1)(a + b - 1) - n] + R, \text{ pois } l \geq -n \text{ e } s \geq -n. \end{aligned}$$

Caso 1.0. $a + b - 1 \geq 2$. Como $n \geq 2$, $a \geq 3$ e $R \geq 0$ obtemos $X/\beta \geq 0$ e então $X \geq 0$. Logo $\tilde{A}_k = \beta^3 + X > \beta^3$. Absurdo.

Caso 1.1. Se $a + b - 1 = 1$, então:

$$\begin{aligned} X/\beta &\geq [(n-1)(a-1) - n]\beta - 1 + R \\ &\geq (2(n-1) - n)\beta - 1 + R \\ &= (n-2)\beta - 1 + R. \end{aligned}$$

Caso 1.1.1. Se $n \geq 3$ então $X/\beta \geq \beta - 1 + R \geq 0$, pois $\beta > 1$. Portanto $\tilde{A}_k > \beta^3$. Absurdo.

Caso 1.1.2. Se $n = 2$, então:

$$X/\beta \geq (a-3)\beta - 1 + R \geq 0, \text{ se } a \geq 4. \text{ Se } a = 3 \text{ então } b = -2. \text{ Nesse caso, } a + b - 1 = 0.$$

Esse caso será tratado em seguida.

Caso 1.2. $a + b - 1 = 0$.

$$X/\beta \geq ((n-1)(a-1) - n)\beta - n + R.$$

Caso 1.2.1 Se $a \geq 3$ e $n \geq 3$.

$$X/\beta \geq \beta - 3 + R, \text{ onde } R = \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} + \dots.$$

Usando o fato que $\beta = 2 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \dots$, obtemos

$$X/\beta \geq -1 + \frac{2}{\beta} + \frac{3}{\beta^2} + \frac{3}{\beta^4} + \dots.$$

Usando novamente o fato que $\frac{2}{\beta} = 1 - \frac{1}{\beta^3} - \frac{1}{\beta^4} - \dots$, obtemos:

$$X/\beta \geq \frac{3}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{2}{\beta^4} + \dots \geq 0.$$

Caso 1.2.2. Se $a > 3$ e $n = 2$.

$$X/\beta \geq \beta - 2 + R \geq 0, \text{ pois } \beta > 2.$$

Caso 1.2.3. Se $a = 3$ e $n = 2$

$X/\beta \geq -2 + R$. Esse caso não ocorre pois, se $a = 3$ então $b = -2$ e nesse caso $\mathcal{R}_{3,-2}$ tem exatamente 6 vizinhos (ver Anexo).

Caso 2. $n - 1 \geq s \geq 0$.

$$X/\beta \geq [(n-1)(a-1) + sb + l]\beta + [(n-1)(a+b-1) + s] + R.$$

$$\geq [(n-1)(a+b-1) - n]\beta + [(n-1)(a+b-1) - n] + R \geq 0, \text{ pois } n-1 \geq s \text{ e } l \geq -n.$$

Caso 2.1. Se $a + b \geq 3$ então $a + b - 1 \geq 2$. Assim, $X/\beta \geq (n-1)\beta + (n-1) + R \geq 0$. Absurdo.

Logo, se $a + b \geq 3$ então $s = n$. Nesse caso $A_k = n + (nb + n)\alpha + (na + nb + l)\alpha^2$ e $A_{k+1} = n + (nb + l)\alpha + (f + n)\alpha^2$.

Logo, pelo que vimos antes, $l = n$ e $f = na + nb$.

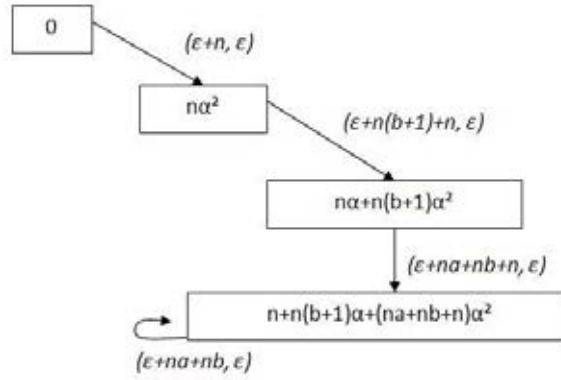


Figura 13. Estados do Autômato $\mathcal{B}$.

Condições:

Como $na + nb + n$ é um dígito, então deve satisfazer: $0 \leq na + nb + n \leq a - 1$, isto é $n \leq \frac{a-1}{a+b+1}$.

Caso B. $1 < m < t = n$.

Seja $A_k = m + p\alpha + q\alpha^2$, com $m < t$, então

$A_{k+1} = (p - mb) + (q - ma)\alpha + (d + m)\alpha^2$. Logo, $A_{k+1} = s + (q - ma)\alpha + (d + m)\alpha^2$ e $A_{k+2} = (q - ma - sb) + (d + m - sa)\alpha + (g + s)\alpha^2$, $|s| \leq t$, $|q| \leq t$, $|l| \leq t$.

Portanto, $A_k = m + (mb + s)\alpha + (ma + sb + l)\alpha^2$.

□

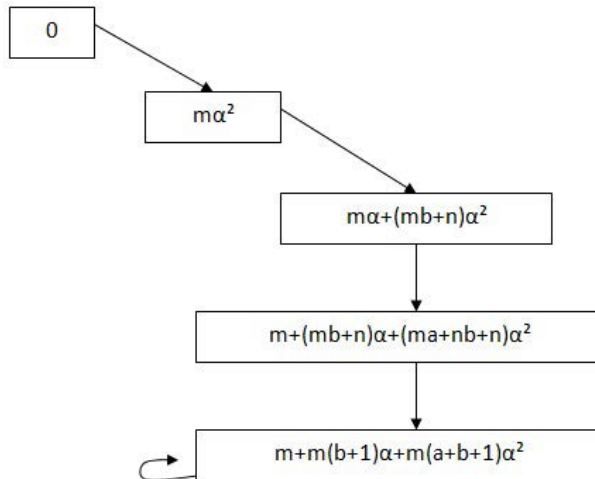


Figura 14. Estados do Autômato $\mathcal{B}$.

Seja $A_k = m + (m + nb)\alpha + (ma + nb + n)\alpha^2$. Logo, $A_{k+1} = n + (n + nb)\alpha + (f + m)\alpha^2$, e então, $A_{k+1} = n + (n + nb)\alpha + (n + na + nb)\alpha^2$ e $(n(a + b + 1) - m, 0)$ é o caminho que liga o estado A_k ao estado A_{k+1} .

Teorema 4.0.3 *O autômato tem no mínimo $2(6 + 3(K - 1))$ estados não nulos, onde $K = \left\lfloor \frac{a - 1}{a + b + 1} \right\rfloor$. O conjunto dos estados do autômato contém $S \cup \{\pm n\alpha^2, \pm(n\alpha + n(b + 1)\alpha^2, \pm(n + n(b + 1)\alpha + n(a + b + 1)\alpha^2)\}$, onde $n \leq \left\lfloor \frac{a - 1}{a + b + 1} \right\rfloor$ e $S = \{0, \pm\alpha^2, \pm(\alpha + b\alpha^2), \pm(\alpha + (b + 1)\alpha^2), \pm(1 + b\alpha + (a - 1)\alpha^2), \pm(1 + (b + 1)\alpha + (a + b)\alpha^2), \pm(1 + (b + 1)\alpha + (a + b + 1)\alpha^2)\}$.*

Demonstração.

Como vimos na proposição anterior, o autômato pode ter outros estados. □

Corolário 4.0.1 *$\mathcal{R}$ possui no mínimo $6 + 2(K - 1)$ vizinhos da forma $u + \mathcal{R}$, onde $\pm u \in \{\pm\alpha, \pm(1 + b\alpha), \pm(1 + (b + 1)\alpha)\} \cup \{\pm(n + n(b + 1)\alpha)\}$ e $n \leq \left\lfloor \frac{a - 1}{a + b + 1} \right\rfloor$.*

Corolário 4.0.2 *Se $2a + 3b + 4 \leq 0$ então $\mathcal{R}$ não é homeomorfo a um disco topológico.*

Demonstração. Se $2a + 3b + 4 \leq 0$ então $3 \leq \frac{a - 1}{a + b + 1}$, isto é, $K = \left\lfloor \frac{a - 1}{a + b + 1} \right\rfloor \geq 3$. Portanto $\mathcal{R}$ possui pelo menos $6 + 2(K - 1) \geq 10$ vizinhos. Por um teorema clássico da teoria dos azulejamentos (ver [4]), deduzimos que $\mathcal{R}$ não é homeomorfo a um disco topológico. □

Exemplos: Casos $a = 7, b = -5$ e $a = 8, b = -6$. Nesses casos os fractais de Rauzy não são homeomorfos a um disco.

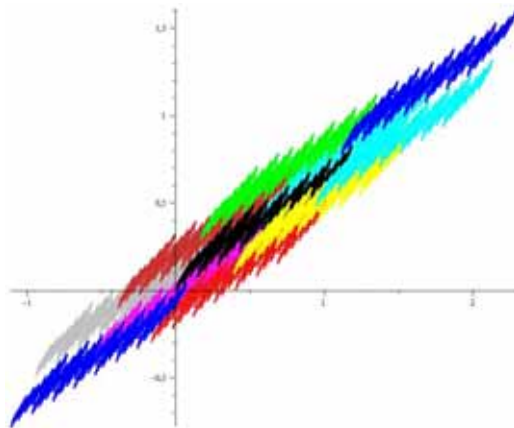


Figura 15. Fractal de Rauzy, caso $a = 7, b = -5$. $\mathcal{R}_{7,-5}$ possui 10 vizinhos.

Observação 4.0.2 *O autômato pode ter outros estados da forma $\{\pm m + (mb + n)\alpha + (ma + nb + n)\alpha^2\}$, onde $m, n \leq \left\lfloor \frac{a-1}{a+b+1} \right\rfloor$.*

Observação 4.0.3 *No caso em que $n = \left\lfloor \frac{a-1}{a+b+1} \right\rfloor = 1$, $\mathcal{R}$ pode ter 6 ou 8 vizinhos.*

De fato, nos casos $a = 4, b = -3$ e $a = 3, b = -2$ temos $n = 1$. Porém, $\mathcal{R}_{4,-3}$ possui 8 vizinhos enquanto que $\mathcal{R}_{3,-2}$ possui somente 6 vizinhos.

As figuras abaixo ilustram esses fatos:

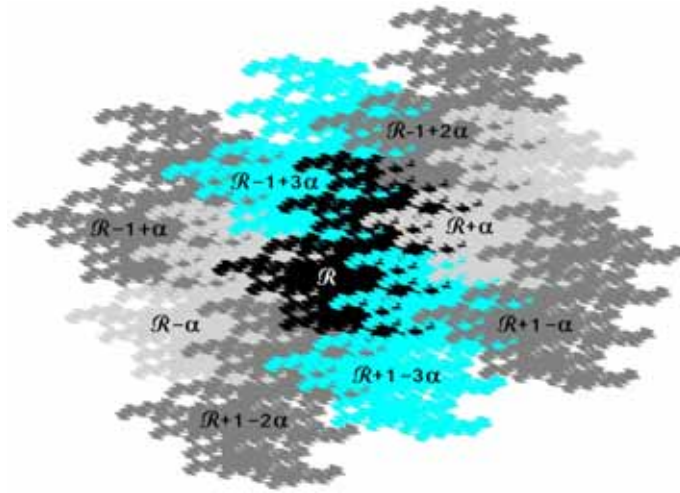


Figura 16. Fractal de Rauzy, caso $a = 4, b = -3$. $\mathcal{R}$ possui 8 vizinhos.

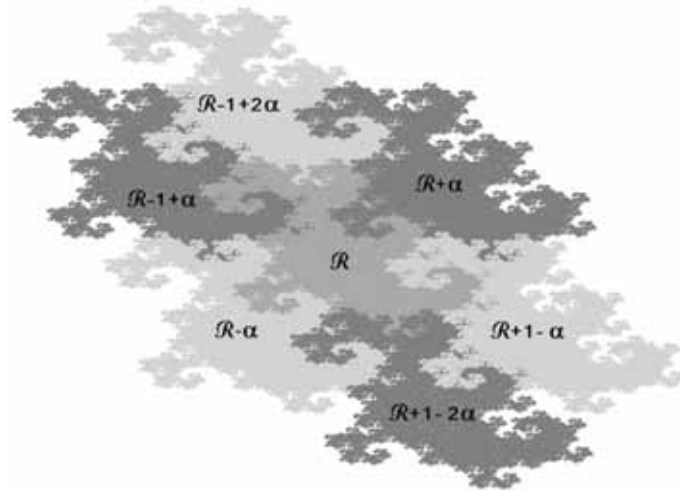


Figura 17. Fractal de Rauzy, caso $a = 3, b = -2$. $\mathcal{R}$ possui 6 vizinhos.

Observação. A demonstração de que $\mathcal{R}_{3,-2}$ possui somente 6 vizinhos está no Anexo.

4.0.2 Autômato dos vizinhos

Vamos construir um autômato finito $\mathcal{C}$ tal que se $n, p \in \mathbb{Z}$ e $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{N}$, $n + p\alpha + \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$ se e somente se, $(n, 0)(p, 0)(\varepsilon_2, \varepsilon'_2) \cdots$ é um caminho infinito no autômato $\mathcal{C}$.

Os estados do autômato $\mathcal{C}$ são dados da mesma maneira que no autômato $\mathcal{B}$, isto é, se $n + p\alpha + \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$ associamos a ele os estados: $A_0 = 0$, $A_1 = n\alpha + p$, $A_{k+1} = \frac{A_k}{\alpha} + (\varepsilon_k - \varepsilon'_k)\alpha^2$, para todo $k \geq 1$. Observemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$.

Autômato dos vizinhos

Suponhamos que $\mathcal{R}$ possua somente 6 vizinhos. Então pelo Corolário 4.0.1 estes vizinhos são $\mathcal{R} \pm \alpha$, $\mathcal{R} \pm (1 + b\alpha)$ e $\mathcal{R} \pm (1 + (b+1)\alpha)$.

Proposição 4.0.4 *Se $\mathcal{R}$ possui somente 6 vizinhos então o conjunto dos estados do autômato dos vizinhos é $S = \{0, \pm\alpha^2, \pm(\alpha + b\alpha^2), \pm(\alpha + (b+1)\alpha^2), \pm(1 + b\alpha + (a-1)\alpha^2), \pm(1 + (b+1)\alpha + (a+b)\alpha^2), \pm(1 + (b+1)\alpha + (a+b+1)\alpha^2)\}$. Portanto $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.*

Demonstração.

Suponhamos que $\mathcal{R}$ tenha 6 vizinhos.

Sejam $x = \sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i$, $y = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$. Suponhamos que $x = y$ e seja $A_k = x(k) - y(k)$, em que $x(k) = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k a_i \alpha^i$ e $y(k) = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k b_i \alpha^i$. Temos, para todo $k \geq l$,

$$A_{k+1} = \frac{A_k}{\alpha} + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2.$$

Suponhamos que $a_0 = b_0$. Logo $A_0 = 0$.

Sejam $c_0, c_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $c_0 + c_1\alpha + \sum_{i=2}^{+\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{+\infty} b_i \alpha^i$.

Caso 1. $c_0 + c_1\alpha = 0$. Temos $A_0 = 0$, $A_1 = 0$ e $A_2 = (a_2 - b_2)\alpha^2$. Por outro lado, $(a_2 - b_2)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{+\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=3}^{+\infty} b_i \alpha^i$. Logo, $(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)\alpha + \sum_{i=4}^{+\infty} a_i \alpha^{i-2} = \sum_{i=4}^{+\infty} b_i \alpha^{i-2}$. Então, $(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)\alpha + \mathcal{R}$ é um vizinho de $\mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ tem 6 vizinhos, segue que $(a_2 - b_2) \in \{0, \pm 1\}$. Portanto temos que $A_2 \in \{\pm\alpha^2, 0\}$.

Caso 2: $c_0 + c_1\alpha = 1 + b\alpha$.

Temos $A_0 = 0$, $A_1 = \alpha + b\alpha^2$, $A_2 = 1 + b\alpha + (a_2 - b_2)\alpha^2$.

Por outro lado, $1 + b\alpha + \sum_{i=2}^{+\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{+\infty} b_i \alpha^i$, logo

$1 + b\alpha + (a_2 - b_2)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{+\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=3}^{+\infty} b_i \alpha^i$. Portanto,

$(a_2 - b_2 - a)\alpha^2 + (a_3 + 1) + \sum_{i=4}^{+\infty} a_i \alpha^{i-1} = \sum_{i=3}^{+\infty} b_i \alpha^{i-1}$ (pois $1 + b\alpha = \alpha^3 - a\alpha^2$).

Então, $(a_2 - b_2 - a) + (a_3 + 1)\alpha + \sum_{i=4}^{+\infty} a_i \alpha^{i-1} = \sum_{i=4}^{+\infty} b_i \alpha^{i-1}$ (pois $1 + b\alpha = \alpha^3 - a\alpha^2$). Isso implica que $a_2 - b_2 - a \in \{0, \pm 1\}$. Como $(a_2 - b_2) \leq a - 1$, então $a_2 - b_2 = a - 1$. Temos também que $a_3 + 1 \in \{-b, -b - 1\}$. Logo, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{1} + \mathbf{b}\alpha + (\mathbf{a} - \mathbf{1})\alpha^2$.

Caso 2.1. $a_3 = -b - 1$. Temos $1 + b\alpha + (a - 1)\alpha^2 - (b + 1 - b_3)\alpha^2 + \sum_{i=4}^{+\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=4}^{+\infty} b_i \alpha^i$

Se $A_2 = 1 + b\alpha + (a - 1)\alpha^2 - (b + 1 - b_3)\alpha^2$, então

$$A_3 = -\alpha + (-b - b_3)\alpha^2 + \sum_{i=4}^{+\infty} a_i \alpha^{i-1} = \sum_{i=4}^{+\infty} b_i \alpha^{i-1} \text{ e}$$

$$A_4 = -1 + (-b - b_3)\alpha + \sum_{i=4}^{+\infty} a_i \alpha^{i-2} = \sum_{i=4}^{+\infty} b_i \alpha^{i-2}.$$

Assim, $-b - b_3 \in \{-b, -b - 1\}$. Isto implica que $b_3 = 0$ ou $b_3 = 1$.

Logo $\mathbf{A}_3 = -\alpha - \mathbf{b}\alpha^2$ ou $\mathbf{A}_3 = -\alpha - (\mathbf{b} + \mathbf{1})\alpha^2$.

Caso 2.1.1. Se $A_3 = -\alpha - b\alpha^2$. Temos,

$$-1 - b\alpha + \sum_{i=4}^{+\infty} a_i \alpha^{i-2} = \sum_{i=4}^{+\infty} b_i \alpha^{i-2}.$$

Logo, $A_4 = -\alpha^2$ e $A_5 = -\alpha - b\alpha^2$.

Caso 2.1.2. $A_3 = -\alpha - (b + 1)\alpha^2$.

Temos, $-1 - (b + 1)\alpha + \sum_{i=4}^{+\infty} a_i \alpha^{i-2} = \sum_{i=4}^{+\infty} b_i \alpha^{i-2}$. Logo,

$$(a - 1)\alpha + (a_4 - 1)\alpha^2 + \sum_{i=5}^{+\infty} a_i \alpha^{i-3} = \sum_{i=4}^{+\infty} b_i \alpha^{i-3}. \text{ Então}$$

$$(a - 1) + (a_4 - 1)\alpha + \sum_{i=5}^{+\infty} a_i \alpha^{i-4} = \sum_{i=4}^{+\infty} b_i \alpha^{i-4}.$$

Temos: se $a - 1 = 1$ então $a_4 - 1 = b$ ou $a_4 - 1 = b + 1$ e estamos no caso $1 + b\alpha$ ou no caso $1 + (b + 1)\alpha$.

Se $a - 1 = -1$ então $a_4 - 1 = -b$ ou $a_4 - 1 = -b - 1$ e estamos no caso $-1 - b\alpha$ ou no caso $-1 - (b + 1)\alpha$.

Caso 2.2. Se $a_3 = -b - 2$.

Temos: $-\alpha + (-b - 1 - b_3)\alpha^2 + \sum_{i=4}^{+\infty} a_i \alpha^{i-1} = \sum_{i=4}^{+\infty} b_i \alpha^{i-1}$. Logo

$$-1 + (-b - 1 - b_3)\alpha + \sum_{i=4}^{+\infty} a_i \alpha^{i-2} = \sum_{i=4}^{+\infty} b_i \alpha^{i-2}.$$

Segue que $b_3 = 0$ ou $b_3 = 1$. Portanto,

$A_3 = -\alpha - (b + 1)\alpha^2$ ou $A_3 = -\alpha - b\alpha^2$, que são casos já vistos.

Caso 3. $c_0 + c_1\alpha = 1 + (b + 1)\alpha$.

Temos $A_0 = 0$, $A_1 = \alpha + (b + 1)\alpha^2$, $A_2 = 1 + (b + 1)\alpha + (a_2 - b_2)\alpha^2$.

Por outro lado,

$$1 + (b + 1)\alpha + (a_2 - b_2)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{+\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=3}^{+\infty} b_i \alpha^i$$

$$1 + (a_2 - b_2 - a)\alpha + (a_3 + 1)\alpha^2 + \sum_{i=4}^{+\infty} a_i \alpha^{i-1} = \sum_{i=3}^{+\infty} b_i \alpha^{i-1}. \text{ Logo } a_2 - b_2 - a \in \{b, b + 1\}.$$

Então, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{1} + (\mathbf{b} + \mathbf{1})\alpha + (\mathbf{a} + \mathbf{b})\alpha^2$ ou $\mathbf{A}_2 = \mathbf{1} + (\mathbf{b} + \mathbf{1})\alpha + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{1})\alpha^2$.

Então, $A_3 = 1 + (b+1)\alpha + (a_3+1)\alpha^2$. Estamos no caso $c_0 + c_1\alpha = 1 + (b+1)\alpha$.

$$(p, 0)(q, 0)(\varepsilon_2, \varepsilon_2') \cdots$$

é um caminho no autômato dos vizinhos.

Suponhamos que $p = m$ e $q = mb + n$, onde $n = \lfloor \frac{a-1}{a+b+1} \rfloor$ e $m \leq n$. Logo, $z = m + (mb + n)\alpha + \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i$.

Por outro lado, existe $r > 0$ tal que para todo $w \in B(z, r)$, temos $w \in \mathcal{R}$. Seja N suficientemente grande tal que

$$w = p + q\alpha + \sum_{i=2}^N \varepsilon_i \alpha^i \in B(z, r) \subset \mathcal{R}.$$

Então,

$$w = p + q\alpha + \sum_{i=2}^N \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i'' \alpha^i.$$

Logo,

$$(p, 0)(q, 0)(\varepsilon_2, \varepsilon_2'') \cdots (\varepsilon_N, \varepsilon_N'')(0, \varepsilon_{N+1}'')(0, \varepsilon_{N+2}'')$$

é um caminho no autômato. Absurdo.

□

Proposição 4.0.6 $0 \in \text{int}(\mathcal{R} \cup (\mathcal{R} + 1 + (b+1)\alpha))$.

Para a demonstração, precisamos do seguinte lema:

Lema 4.0.3 $\mathcal{R} \cap (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha) = \{0, -1 - (b+1)\alpha\}$.

Demonstração.

Observemos que 0 e $-1 - (b+1)\alpha \in \mathcal{R}$. Suponhamos que existam $n, p \in \mathbb{Z}$ tal que $n + p\alpha = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i$, em que $(\varepsilon_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{N}$. Suponhamos que $n > 0$. Então,

$$(n, 0)(p, 0)(0, \varepsilon_2)(0, \varepsilon_2) \cdots$$

é um caminho no autômato dos vizinhos. Absurdo.

□

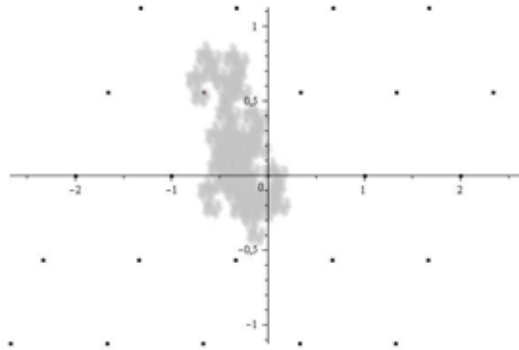


Figura 19. $\mathcal{R}_{3,-2} \cap \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$.

Demonstração da Proposição 4.0.6:

Seja $c = D(\mathcal{R}, \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \setminus \{0, -1 - (b+1)\alpha\})$. Seja $B(0, c)$ a boala de centro em 0 e raio c . Existem $n \in \mathbb{N}, p, q \in \mathbb{Z}$ de forma que $n\alpha^2 + p\alpha + q \in B(0, c)$. Logo, $|n\alpha^2 + p\alpha + q| = |n\alpha^2 + p_n\alpha + q_n - ((p_n - p)\alpha + (q_n - q))| < c$. Como $n\alpha^2 + p_n\alpha + q_n \in \mathcal{R}$, então $(p_n - p)\alpha + (q_n - q) \in \{0, 1 + (b+1)\alpha\}$.

Caso 1. $(p_n - p)\alpha + q_n - q = 0$, então $p_n = p$ e $q_n = q$. Logo, $n\alpha^2 + p\alpha + q \in \mathcal{R}$.

Caso 2. $(p_n - p)\alpha + q_n - q = 1 + (b+1)\alpha$. Então, $p = p_n - 1$ e $q = q_n - (b+1)$. Portanto, $n\alpha^2 + p\alpha + q = n\alpha^2 + p_n\alpha + q_n - 1 - (b+1)\alpha \in \mathcal{R} + (1 + (b+1)\alpha)$.

□

Corolário 4.0.3 Para todo $z \in \mathbb{C}$, $z = \alpha^k w$, onde $w \in \mathcal{R} \cup (1 + (b+1)\alpha + \mathcal{R})$.

Corolário 4.0.4 $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^{-k} \mathcal{R} \neq \mathbb{C}$, isto é, o conjunto $\{\sum_{i=l}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i, l \in \mathbb{Z}, (\varepsilon_i) \in \mathcal{N}\} \neq \mathbb{C}$.

Demonstração.

Utilizando o Autômato deduzimos que $1 + b\alpha \notin \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^{-k} \mathcal{R} \neq \mathbb{C}$.

□

Capítulo 5

Parametrização da Fronteira de $\mathcal{R}_{3,-2}$

Neste capítulo vamos utilizar o Autômato construído no capítulo interior para parametrizar a fronteira de $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{3,-2}$. Temos que $\mathcal{R}_{3,-2}$ tem somente 6 vizinhos (ver Anexo).

Seja $u \in \{\pm\alpha, \pm(1-\alpha), \pm(1-2\alpha)\}$. Denotamos por $\mathcal{R}_u = \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u)$ as 6 curvas que constituem a fronteira de $\mathcal{R}$.

Proposição 5.0.7 *As seguintes propriedades são válidas:*

1. $\mathcal{R}_{1-\alpha} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{k+1,k} \alpha^{k+1} + \alpha^k \mathcal{R}_{1-2\alpha}$, onde $\varepsilon_{k+1,k} \in \{0, 1, 2\}$, para todo $k \geq 0$.
2. $\mathcal{R}_{\alpha} = \alpha \mathcal{R}_{1-2\alpha} \bigcup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_{k+1,k} \alpha^{k+2} + \alpha^{k+1} \mathcal{R}_{1-2\alpha})$, onde $\varepsilon_{k+1,k} \in \{0, 1, 2\}$, para todo $k \geq 0$.

Demonstração.

1. Seja $z \in \mathcal{R}_{1-\alpha}$. Então $z = 1 - \alpha + \sum_{i=2} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=2} \varepsilon'_i \alpha^i$. Logo, pelo Autômato $\mathcal{C}$, temos que $C = (1, 0)(-1, 0)(\varepsilon_2 + 1, \varepsilon_2)(1, 0) \cdots$ ou $C = (1, 0)(-1, 0)(2, 0) \underbrace{(1, 0)(1, 0) \cdots (1, 0)}_{k\text{-vezes}} (\varepsilon_{3+k}, \varepsilon_{3+k})(1, 0) \cdots$

são caminhos no autômato começando no estado inicial.

Caso 1. $C = (1, 0)(-1, 0)(\varepsilon_2 + 1, \varepsilon_2)(1, 0) \cdots$.

$$z = 1 - \alpha + (\varepsilon_2 + 1)\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 w = \varepsilon_2 \alpha^2 + \alpha^4 w', \text{ onde } w, w' \in \mathbb{C}.$$

$$\frac{z}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - 1 + (\varepsilon_2 + 1)\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 w = \varepsilon_2 \alpha + \alpha^3 w'.$$

Como $1/\alpha = \alpha^2 - 3\alpha + 2$, então:

$$\frac{z}{\alpha} = 1 + (\varepsilon_2 - 2)\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 w = \varepsilon_2 \alpha + \alpha^3 w'.$$

$$\text{Logo, } \frac{z}{\alpha} - \varepsilon_2 \alpha = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 w = \alpha^3 w' \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}.$$

Por outro lado, se $z \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}$, então $\alpha z + \varepsilon_2 \alpha^2 \in (\varepsilon_2 \alpha^2 + \alpha \mathcal{R}) \cap (\alpha + \varepsilon_2 \alpha^2 + \alpha \mathcal{R}) \in \mathcal{R}_{1-\alpha}$. De fato, se $z \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}$ então $z = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 w$, onde $w \in \mathbb{C}$. Então, $\alpha z + \varepsilon_2 \alpha^2 = \alpha + (\varepsilon_2 \alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4 w) = 1 + (\alpha - 2\alpha) + (\varepsilon_2 - 2 + 3)\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 w = 1 - \alpha = (\varepsilon_2 + 1)\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 w \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}$, se $\varepsilon_2 \geq 1$.

Caso 2. $C = (1, 0)(-1, 0)(2, 0) \underbrace{(1, 0)(1, 0) \cdots (1, 0)}_{k\text{-vezes}} (\varepsilon_{3+k}, \varepsilon_{3+k})(1, 0) \cdots$ (Looping).

$z = 1 - \alpha + 2\alpha^2 + \underbrace{\alpha^3 + \cdots + \alpha^{k+2}}_{k\text{-vezes}} + \varepsilon_{3+k}\alpha^{3+k} + \alpha^{4+k} + \alpha^{5+k}w_k = \varepsilon_{3+k}\alpha^{3+k} + \alpha^{5+k}w'_k$, onde $w_k, w'_k \in \mathbb{C}$, para todo $k \geq 0$. Então,

$$\frac{z}{\alpha^{k+2}} = \alpha^{-k-2} - \alpha^{-k-1} + 2\alpha^{-k} + \alpha^{-k+1} + \cdots + 1 + \varepsilon_{3+k}\alpha + \alpha^2 + \alpha^3w_k = \varepsilon_{3+k}\alpha + \alpha^3w'_k.$$

* Se $k = 0$ então $z = 1 - \alpha + 2\alpha^2 + \varepsilon_3\alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5w_0 = \varepsilon_3\alpha^3 + \alpha^5w'_0$.
 $\frac{z}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 2 + \varepsilon_3\alpha + \alpha^2 + \alpha^3w_0 = \varepsilon_3\alpha + \alpha^3w'_0$. Como $\frac{1}{\alpha^2} = 1 - 5\alpha + 2\alpha^2$ e $\frac{1}{\alpha} = \alpha^2 - 3\alpha + 2$, então

$$\frac{z}{\alpha^2} = 1 + (\varepsilon_3 - 2)\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3w_0 = \varepsilon_3\alpha + \alpha^3w'_0.$$

Logo, $\frac{z}{\alpha^2} - \varepsilon_3\alpha = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3w_0 = \alpha^3w'_0 \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}$.

* Se $k = 1$ então $z = 1 - \alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 + \varepsilon_4\alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6w_1 = \varepsilon_4\alpha^4 + \alpha^6w'_1$. Então,

$$\frac{z}{\alpha^3} = \alpha^{-3} - \alpha^{-2} + 2\alpha^{-1} + 1 + \varepsilon_4\alpha + \alpha^2 + \alpha^3w_1 = \varepsilon_4\alpha + \alpha^3w'_1.$$

Como $\alpha^{-3} = \alpha^2 - \alpha - 3$, obtemos

$$\frac{z}{\alpha^3} = 1 + (\varepsilon_4 - 2)\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3w_1 = \varepsilon_4\alpha + \alpha^3w'_1.$$

Logo, $\frac{z}{\alpha^3} - \varepsilon_4\alpha = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3w_1 = \alpha^3w'_1 \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}$.

Assim, por indução, podemos mostrar que $\frac{z}{\alpha^{k+2}} - \varepsilon_{k+3}\alpha \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}$.

2. Se $z \in \mathcal{R}_\alpha$ então $z = \alpha + \sum_{i=2} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=2} \varepsilon'_i \alpha^i$. Logo, $C = (0, 0)(1, 0)(-2, 0)(2, 0) \cdots$ ou $C = (0, 0)(1, 0)(-1, 0) \cdots$ são caminhos no Autômato começando no estado inicial.

Caso 1. $C = (0, 0)(1, 0)(-2, 0)(2, 0) \cdots$

$z = \alpha - 2\alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4w_2 = \alpha^4w'_2$. Então,

$$\frac{z}{\alpha} = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3w_2 = \alpha^3w'_2 \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}.$$

Caso 2. $C = (0, 0)(1, 0)(-1, 0) \cdots$

$z = \alpha - \alpha^2 + \alpha^3w_3 = \alpha^3w'_3$. Então,

$$\frac{z}{\alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2w_3 = \alpha^2w'_3 \in \mathcal{R}_{1-\alpha}.$$

(Estamos no Caso 1).
 portanto, $\mathcal{R}_\alpha = \alpha\mathcal{R}_{1-2\alpha} \cup \alpha\mathcal{R}_{1-\alpha} = \alpha\mathcal{R}_{1-2\alpha} \bigcup_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{k+1,k}\alpha^{k+2} + \alpha^{k+1}\mathcal{R}_{1-2\alpha}$.

□

Para todo $z \in \mathbb{C}$, consideremos as seguintes funções:

$$f_0(z) = -\alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^2z;$$

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= (\varepsilon_3 - 1)\alpha^3 + (\varepsilon_4 + 3)\alpha^4 - \alpha^5 + \alpha^3 z, \text{ onde } \varepsilon_4 = 0, \text{ se } \varepsilon_3 = 1 \text{ e } \varepsilon_4 \in \{0, 1\}, \text{ se } \varepsilon_3 = 0; \\
f_2(z) &= \varepsilon_3\alpha^3 + \alpha^4 + (\varepsilon_5 + 2)\alpha^5 - 2\alpha^6 + \alpha^4 z, \text{ onde } \varepsilon_3, \varepsilon_5 \in \{0, 1\}; \\
f_3(z) &= \varepsilon_3\alpha^3 + 2\alpha^4 + (\varepsilon_6 + 2)\alpha^6 - 2\alpha^7 + \alpha^5 z, \text{ onde } \varepsilon_3, \varepsilon_6 \in \{0, 1\}; \\
f_{2+k}(z) &= \varepsilon_3\alpha^3 + 2\alpha^4 + (\sum_{j=1}^{k-1} \alpha^{4+j}) + (\varepsilon_{5+k} + 2)\alpha^{5+k} - \alpha^{6+k} + \alpha^{4+k} z, \text{ para todo } k \geq 2.
\end{aligned}$$

Teorema 5.0.4 $\mathcal{R}_{1-2\alpha} = f_0(\mathcal{R}_{1-2\alpha}) \cup f_1(\mathcal{R}_{1-2\alpha}) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} f_{2+k}(\mathcal{R}_{1-2\alpha})$.

Demonstração.

Primeiramente devemos mostrar que $f_i \subset \mathcal{R}_{1-2\alpha}$, para $i = 0, 1$ e que $f_{2+k} \subset \mathcal{R}_{1-2\alpha}$, para todo $k \geq 2$. Mostremos para f_0 . Temos:

$$f_0(\mathcal{R}_{1-2\alpha}) = f_0(\mathcal{R}) \cap f_0(\mathcal{R} + 1 - 2\alpha) = (-\alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{R}) \cap (\alpha^2\mathcal{R}) = (1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^2\mathcal{R}) \cap (\alpha^2\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}_{1-2\alpha}.$$

Seja $z \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}$. Utilizando o Autômato $\mathcal{C}$ temos os seguintes caminhos, começando no estado inicial:

$$1. (0, 1)(0, -2)(0, 2)(0, 1)(2, 0) \dots$$

$$z = 2\alpha^4 + \alpha^5 w_0 = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^5 w'_0, \text{ onde } w_0, w'_0 \in \mathbb{C}. \text{ Neste caso, } f_0^{-1}(z) = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 w_0 = \alpha^3 w'_0 \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}, \text{ ou seja, } z \in f_0(\mathcal{R}_{1-2\alpha}).$$

$$2. (0, 1)(0, -2)(0, 2)(\varepsilon_3, \varepsilon_3)(\varepsilon_4 + 1, \varepsilon_4)(1, 0) \dots$$

$$z = \varepsilon_3\alpha^3 + (\varepsilon_4 + 1)\alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 w_1 = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \varepsilon_3\alpha^3 + \varepsilon_4\alpha^4 + \alpha^6 w'_1. \text{ Neste caso, } f_1^{-1}(z) = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 w_1 = \alpha^3 w'_1 \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}, \text{ ou seja, } z \in f_1(\mathcal{R}_{1-2\alpha}).$$

$$3. (0, 1)(0, -2)(0, 2)(\varepsilon_3, \varepsilon_3)(2, 0)(\varepsilon_5, \varepsilon_5)(1, 0) \dots$$

$$z = \varepsilon_3\alpha^3 + 2\alpha^4 + \varepsilon_5\alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^7 w_2 = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \varepsilon_3\alpha^3 + \varepsilon_5\alpha^5 + \alpha^7 w'_2. \text{ Neste caso, } f_2^{-1}(z) = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 w_2 = \alpha^3 w'_2 \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}, \text{ ou seja, } z \in f_2(\mathcal{R}_{1-2\alpha}).$$

$$4. (0, 1)(0, -2)(0, 2)(\varepsilon_3, \varepsilon_3)(2, 0) \underbrace{(1, 0)(1, 0) \dots (1, 0)}_{k-\text{vezes}} (\varepsilon_{5+k}, \varepsilon_{5+k})(1, 0) \dots$$

$$z = \varepsilon_3\alpha^3 + 2\alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 + \dots + \alpha^{4+k} + \varepsilon_{5+k}\alpha^{5+k} + \alpha^{6+k} + \alpha^{7+k} w_{2+k} = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \varepsilon_3\alpha^3 + \varepsilon_{5+k}\alpha^{5+k} + \alpha^{7+k} w'_{2+k}. \text{ Temos } f_{2+k}^{-1}(z) = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 w_{2+k} = \alpha^3 w'_{2+k} \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}, \text{ para todo } k \geq 1 \text{ ou seja, } z \in f_{2+k}(\mathcal{R}_{1-2\alpha}) \text{ para todo } k \geq 1.$$

$$\text{Portanto } \mathcal{R}_{1-2\alpha} = f_0(\mathcal{R}_{1-2\alpha}) \cup f_1(\mathcal{R}_{1-2\alpha}) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} f_{2+k}(\mathcal{R}_{1-2\alpha}).$$

□

O próximo Lema mostra pontos do Fractal que possuem três α -representações (ponto triplo). Consequentemente estes pontos estão na interseção de três vizinhos do Fractal. Estes pontos estão mostrados na Figura 20.

Lema 5.0.4 *As seguintes propriedades são verificadas.*

1. $\mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{R}_{1-\alpha} = \alpha + \frac{\alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5}{1 - \alpha^6}$
2. $\mathcal{R}_{1-\alpha} \cap \mathcal{R}_{1-2\alpha} = \frac{\alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6}{1 - \alpha^6}$.
3. $\mathcal{R}_{1-2\alpha} \cap \mathcal{R}_{-\alpha} = \frac{\alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5}{1 - \alpha^6}$.
4. $\mathcal{R}_{-\alpha} \cap \mathcal{R}_{-1+\alpha} = -1 + \alpha + \frac{\alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6}{1 - \alpha^6}$.
5. $\mathcal{R}_{-1+\alpha} \cap \mathcal{R}_{-1+2\alpha} = -1 + 2\alpha + \frac{\alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5}{1 - \alpha^6}$.
6. $\mathcal{R}_{-1+2\alpha} \cap \mathcal{R}_\alpha = -1 + 2\alpha + \frac{\alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6}{1 - \alpha^6}$.

Demonstração: 1. Se $w \in \mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{R}_{1-\alpha}$ então existem $x = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i$, $y = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$ e $z = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon''_i \alpha^i$, onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon''_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{N}$ tais que $w = x + \alpha = y + 1 - \alpha = z$, ou $w + \alpha = x + 2\alpha = y + 1 = z + \alpha$.

Usando o Autômato $\mathcal{B}$ com $a = 3, b = -2$ (Figura 21), obtemos os caminhos:

i) $(0, 1)(2, 0)(0, 2)(1, 1)(1, 0)(1, 0)(0, 0)(0, 1)(0, 1)(1, 1) \dots$

$$\text{Assim, } w + \alpha = 1 + 2\alpha^2 + \alpha^3 + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{6i+1} + \alpha^{6i+2} + \alpha^{6i+3}).$$

$$\text{Logo, } w = y + 1 - \alpha = 1 - \alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{6i+1} + \alpha^{6i+2} + \alpha^{6i+3}).$$

ii) $(0, 0)(2, 1)(0, 1)(1, 0)(1, 0)(1, 1)(0, 1)(0, 1)(0, 0)(1, 0)(1, 0)(1, 1) \dots$

$$\text{Obtemos, } w + \alpha = \alpha + \alpha^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{6i-1} + \alpha^{6i} + \alpha^{6i+1}).$$

$$\text{Portanto, } w = z = \alpha^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{6i-1} + \alpha^{6i} + \alpha^{6i+1}).$$

Por outro lado,

$$w + \alpha = 2\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{6i-3} + \alpha^{6i-2} + \alpha^{6i-1})$$

ou

$$w = x + \alpha = \alpha + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{6i-3} + \alpha^{6i-2} + \alpha^{6i-1}).$$

2. Se $w \in \mathcal{R}_{1-\alpha} \cap \mathcal{R}_{1-2\alpha}$, então existem $x = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i$, $y = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$ e $z = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon''_i \alpha^i$, onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon''_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{N}$ tais que $w = x + 1 - \alpha = y + 1 - 2\alpha = z$ ou $w + 2\alpha = x + 1 + \alpha = y + 1 = z + 2\alpha$.

Usando o autômato, obtemos os caminhos:

i) $(0, 1)(2, 1)(0, 1)(0, 1)(1, 1)(1, 0)(1, 0)(0, 0)(0, 1)(0, 1)(1, 1) \dots$

Obtemos, $w + 2\alpha = 2\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{6i-2} + \alpha^{6i-1} + \alpha^{6i})$

ou

$$w = z = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{6i-2} + \alpha^{6i-1} + \alpha^{6i}).$$

Por outro lado,

$$w + 2\alpha = 1 + \alpha + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{6i-4} + \alpha^{6i-3} + \alpha^{6i-2}).$$

Portanto,

$$w = x + 1 - \alpha = 1 - \alpha + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{6i-4} + \alpha^{6i-3} + \alpha^{6i-2}).$$

ii) $(0, 1)(2, 0)(0, 2)(0, 0)(1, 0)(1, 0)(1, 1)(0, 1)(0, 1)(0, 0)(1, 0)(1, 0)(1, 1) \dots$

Logo,

$$w = y + 1 - 2\alpha = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{6i-4} + \alpha^{6i-3} + \alpha^{6i-2}).$$

As outras relações decorrem do fato de que:

$$\mathcal{R}_{1-2\alpha} \cap R_{-\alpha} = \mathcal{R}_{\alpha} \cap R_{1-\alpha} - \alpha,$$

$$\mathcal{R}_{-\alpha} \cap R_{-1+\alpha} = \mathcal{R}_{1-\alpha} \cap R_{1-2\alpha} - 1 + \alpha, \mathcal{R}_{-1+\alpha} \cap \mathcal{R}_{-1+2\alpha} = \mathcal{R}_{\alpha} \cap \mathcal{R}_{1-\alpha} - 1 + \alpha \text{ e } \mathcal{R}_{-1+2\alpha} \cap \mathcal{R}_{\alpha} = \mathcal{R}_{1-\alpha} \cap \mathcal{R}_{1-2\alpha} - 1 + 2\alpha.$$

□

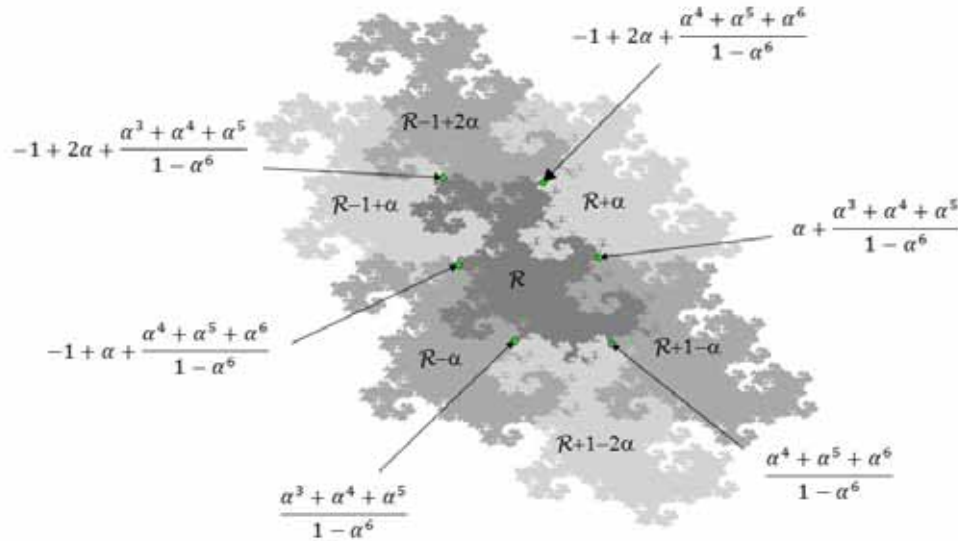


Figura 20. Pontos com três α -representações. Caso $a = 3, b = -2$.

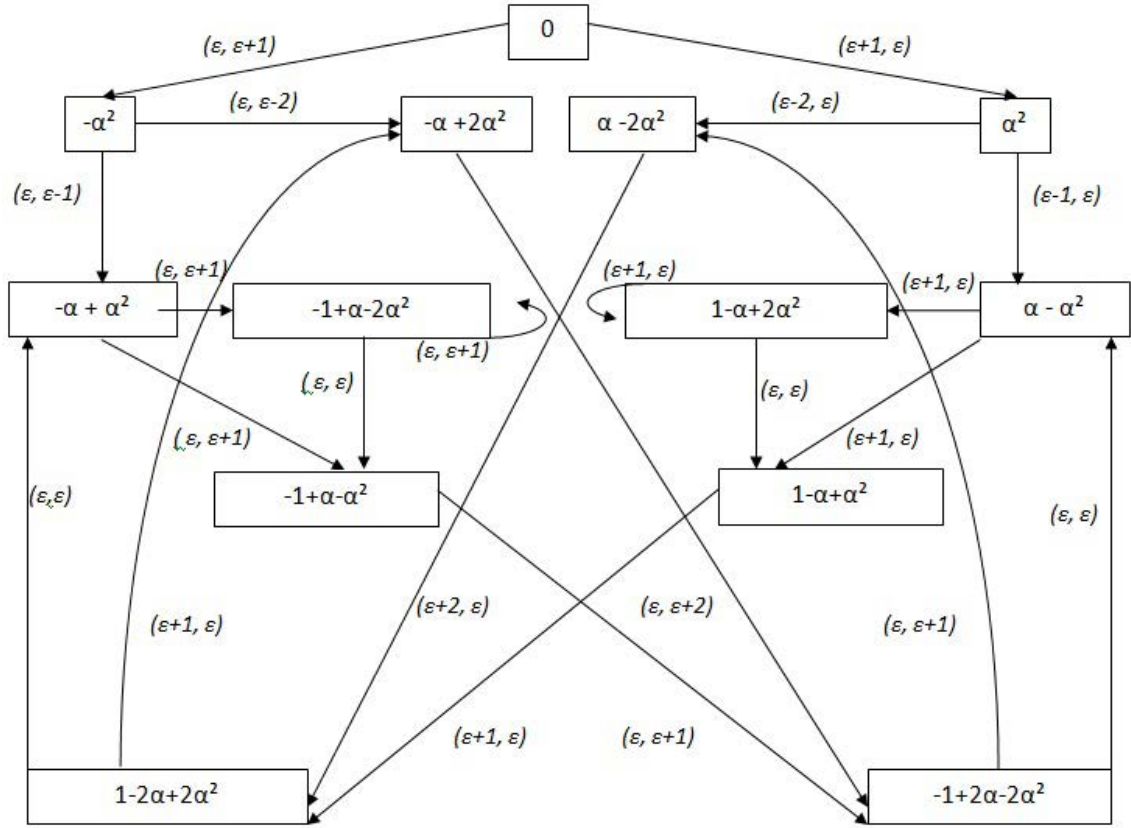


Figura 21. Autômato Caso $a = 3, b = -2$.

Temos $\mathcal{R}_{1-2\alpha} = \bigcup_{a_n, n \in \mathbb{N}}^{+\infty} f_{a_n}(\mathcal{R}_{1-2\alpha})$, onde $a_n \in \{0, 1, (2+k); k \in \mathbb{N}\}$.

Seja $z \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}$. Logo $z = f_{a_0}(z_0) = f_{a_0} \circ f_{a_1} \circ \dots \circ f_{a_n}(z_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{a_0} \circ \dots \circ f_{a_n}(z_n)$, $z_n \in \mathcal{R}_{1-2\alpha}$ e z é fixo. Logo

$$\mathcal{R}_{1-2\alpha} = \overline{\bigcup_{a_0, \dots, a_n} f_{a_0} \circ \dots \circ f_{a_n}(z)}.$$

Parametrização de $\mathcal{R}_{1-2\alpha}$.

Conjectura 5.0.2 Conjecturamos que existem índices $i_k, k \in \mathbb{N}$, e $\{i_k, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ tais que $f_{i_k}(\mathcal{R}) \cap f_{i_{k+1}}(\mathcal{R}) = \{z_k\}$. Com isso podemos mostrar que existe uma função contínua $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}_{1-2\alpha}$.

Dimensão de Hausdorff

Conjectura 5.0.3 Conjecturamos que as funções f_k satisfazem as condições de Moran ([24]), isto é: existe U aberto de $\mathbb{C}$ tal que $f_k(U) \subset U$ e $f_k(U) \cap f_{k'}(U) = \emptyset$, para todo $k \neq k'$. Com isso deduzimos que $\dim_H(\mathcal{R}_{1-2\alpha}) = \inf\{s, \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^s \leq 1\}$.

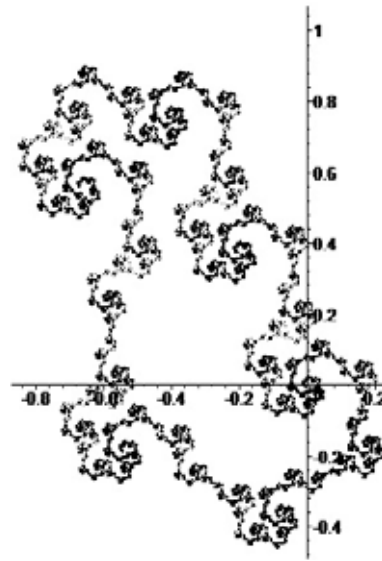


Figura 22. Fronteira de $\mathcal{R}_{3,-2}$.

Capítulo 6

Sequência de Melhor Aproximação

Neste capítulo estudamos as melhores aproximações diofantinas simultâneas para pares de números algébricos $v = (\theta, \theta^2)$, em que $1/\theta$ é um número de Pisot de grau 3 cujos outros dois conjugados não são números reais. No caso $d = 1$, o problema está completamente resolvido: a sequência (q_n) é dada pelos quocientes do desenvolvimento em frações contínuas de $v \in \mathbb{R}$, isto é, $v = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$, onde $a_i \in \mathbb{Z}$ e $\frac{p_r}{q_r} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_r}}}}$. No caso $d > 1$ o problema se torna bastante difícil. Porém, podemos investigar esta questão para classe de vetores v cujas coordenadas são números de Pisot cúbicos, como feito em [11], [10] e [16].

Definição 6.0.3 *Sejam v um elemento de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, $\mathcal{N}$ uma norma em $\mathbb{R}^d$ e q um número inteiro. Definimos*

$$\mathcal{N}_0(qv) = \min\{\mathcal{N}(qv - (p_1, \dots, p_d)), (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Seja $(q_n)_{n \geq 0}$ uma sequência crescente de números inteiros. Dizemos que $(q_n)_{n \geq 0}$ é a sequência de melhor aproximação do vetor v para a norma $\mathcal{N}$, se para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e $0 < q < q_n$, tem-se $\mathcal{N}_0(qnv) < \mathcal{N}_0(qv)$.

Provaremos o seguinte Teorema:

Teorema 6.0.5 *Seja β um número de Pisot cúbico, unitário e não totalmente real satisfazendo a equação $X^3 = aX^2 + bX + 1$, $-a+1 \leq b \leq -2$ e a Conjectura $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. Seja $(R_n)_{n \geq 0}$ a sequência de números inteiros definidos por:*

$$\begin{aligned} R_0 &= 1, \quad R_1 = a, \quad R_2 = a^2 + b, \\ R_{n+3} &= aR_{n+2} + bR_{n+1} + R_n, \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Se β não possui a propriedade (F), então existe uma norma $\mathcal{N}$ em $\mathbb{R}^2$ (chamada de norma de Rauzy) e um inteiro natural n_0 tal que $(R_n)_{n \geq n_0}$ é uma sequência de melhor aproximação para o vetor $(1/\beta, 1/\beta^2)$ para a norma $\mathcal{N}$.

Observação. Se $\mathcal{R}$ tem 6 vizinhos então o Teorema 6.0.5 é válido.

6.1 Fractal de Rauzy

Sejam $N \in \mathbb{Z}^+$ e $(\varepsilon_j)_{k(N) \geq j \geq 0}$ a R -representação de N , isto é, $N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i R_i$, onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 0} \leq_{lex}$ $(a-1)(a+b-1)(a+b) \cdots (a+b)$. Seja

$$\delta(N) = N(1/\beta, 1/\beta^2) - (P_N, Q_N),$$

onde

$$P_N = \sum_{j=1}^{k(N)} \varepsilon_j R_{j-1}, Q_N = \sum_{j=2}^{k(N)} \varepsilon_j R_{j-2}.$$

Seja:

$$B = \begin{pmatrix} -b/\beta & -1/\beta \\ 1 - b/\beta^2 & -1/\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Lema 6.1.1 Para todo $n \geq 2$,

$$B \begin{pmatrix} R_n/\beta - R_{n-1} \\ R_n/\beta^2 - R_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{n+1}/\beta - R_n \\ R_{n+1}/\beta^2 - R_{n-1} \end{pmatrix}$$

onde $(R_n)_{n \geq 0}$ é a sequência definida anteriormente.

Demonstração.

Temos:

$$\begin{aligned} B \begin{pmatrix} R_n/\beta - R_{n-1} \\ R_n/\beta^2 - R_{n-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -bR_n/\beta^2 + bR_{n-1}/\beta - R_n/\beta^3 + R_{n-2}/\beta \\ R_n/\beta - R_{n-1} - bR_n/\beta^3 + bR_{n-1}/\beta^2 - R_n/\beta^4 + R_{n-2}/\beta^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\beta(R_{n-2} - R_n/\beta^2 + aR_n + bR_{n-1} - bR_n/\beta) - aR_n/\beta \\ 1/\beta^2(R_n\beta - \beta^2 R_{n-1} - bR_n/\beta + bR_{n-1} - R_n/\beta^2 + R_{n-2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\beta R_{n+1} - R_n \underbrace{(1/\beta^3 + 1/\beta^2 + a/\beta)}_{=1} \\ 1/\beta^2(R_n \underbrace{(\beta - b/\beta - 1/\beta^2)}_{=a} - \beta^2 R_{n-1} + bR_{n-1} + R_{n-2} + \beta^2 R_{n-1}) - R_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} R_{n+1}/\beta - R_n \\ R_{n+1}/\beta^2 - R_{n-1} \end{pmatrix}.$$

□

Corolário 6.1.1 Se $N = \sum_{j=0}^{k(N)} \varepsilon_j R_j$ então $\delta(N) = \sum_{j=0}^{k(N)} \varepsilon_j B^j \delta(1)$, onde $\delta(1) = (1/\beta, 1/\beta^2)$.

Demonstração.

Temos:

$$B^n \begin{pmatrix} R_0/\beta - R_{-1} \\ R_0/\beta^2 - R_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_n/\beta - R_{n-1} \\ R_n/\beta^2 - R_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Como $N = \sum_{j=0}^{k(N)} \varepsilon_j R_j$, então

$$\begin{aligned} \delta(N) &= \sum_{j=0}^{k(N)} \varepsilon_j R_j (1/\beta, 1/\beta^2) - (\sum_{j=1}^{k(N)} \varepsilon_j R_{j-1}, \sum_{j=2}^{k(N)} \varepsilon_j R_{j-2}) \\ &= \sum_{j=0}^{k(N)} \varepsilon_j (R_j/\beta - R_{j-1}, R_j/\beta^2 - R_{j-2}) \\ &= \sum_{j=0}^{k(N)} \varepsilon_j B^j \delta(1). \end{aligned}$$

□

Definimos o fractal de Rauzy como sendo o conjunto

$$\mathcal{E} = \overline{\{\delta(N); N \in \mathbb{Z}^+\}} \subset \mathbb{R}^2.$$

6.2 Norma de Rauzy

Seja $M = \begin{pmatrix} \gamma + b/\beta & 1/\beta \\ -\alpha - b/\beta & -1/\beta \end{pmatrix}$. Podemos verificar que a matriz B definida anteriormente é similar à matriz $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ e satisfaz

$$MB = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} M.$$

Caso 1: β não é totalmente real.

A norma de Rauzy $\mathcal{N}$ é definida por:

$$\mathcal{N}(x) = |(\alpha + b/\beta)x_1 + x_2/\beta|, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Observemos que $\mathcal{N}(x) = |\pi_1 Mx|$, onde $\pi_1(x, y) = x$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Lema 6.2.1 $\mathcal{N}(Bx) = |\alpha|\mathcal{N}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Demonstração.

Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Então,

$$Mx = \begin{pmatrix} (\gamma + b/\beta)x_1 + 1/\beta x_2 \\ (-\alpha - b/\beta)x_1 - 1/\beta x_2 \end{pmatrix}.$$

Temos, $\mathcal{N}(x) = |\pi_1(Mx)|$. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(Bx) &= |\pi_1(MBx)| = \left| \pi_1 \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} Mx \right| \\ &= |\alpha|\mathcal{N}(x). \end{aligned}$$

□

Corolário 6.2.1 Seja $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ uma β -representação, então

$$\mathcal{N}(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n B^n \delta(1)) = \mathcal{N}(\delta(1) | \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \alpha^n).$$

Em particular, $\mathcal{N}(\delta(G_n)) = \mathcal{N}(\delta(1))|\alpha^n|$, para todo $n \geq 0$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n B^n \delta(1)) &= |\pi_1 M(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n B^n \delta(1))| \\ &= |\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \pi_1 M B^n \delta(1)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \pi_1 \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \gamma^n \end{pmatrix} M \delta(1) \right| = |\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \alpha^n \pi_1 M \delta(1)| \\ &= |\pi_1 M \delta(1)| |\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \alpha^n| = \mathcal{N}(\delta(1)) |\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \alpha^n|. \end{aligned}$$

□

6.3 Sequência de melhor aproximação

Início da prova do Teorema 6.0.5

A prova será feita através de várias proposições.

Teorema 6.3.1 Existe um número real $c > 0$ tal que para todo $q \in \mathbb{Z}^+$ e para todo $g \in \mathbb{Z}^2$, $\mathcal{N}(q(1/\beta, 1/\beta^2) - g) < c$ implica que $q(1/\beta, 1/\beta^2) - g = \delta(q)$ ou $q(1/\beta, 1/\beta^2) - g = \delta(q) - (1, 1)$.

Como corolário temos:

Corolário 6.3.1 Existe um número real $c > 0$ tal que para todo $q \in \mathbb{Z}^+$, se $\mathcal{N}_0(q(1/\beta, 1/\beta^2)) < c$ então $\mathcal{N}_0(q(1/\beta, 1/\beta^2)) = \mathcal{N}(\delta(q))$.

A próxima Proposição pode ser encontrada em [16]. Para um melhor entendimento, refaremos a prova com as devidas adequações ao caso no qual estamos interessados.

Proposição 6.3.1 *Existe uma aplicação linear e bijetiva de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{C}$ tal que $f(\mathcal{E}) = \mathcal{R}$ e $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$.*

Demonstração.

Como $(R_n)_{n \geq 0}$ é recorrente, existem $h, l \in \mathbb{C}$ tais que $R_n = h\beta^n + l\alpha^n + \bar{l}\bar{\alpha}^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta(R_n) = \begin{pmatrix} R_n/\beta - R_{n-1} \\ R_n/\beta^2 - R_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\alpha^{n+2} + \bar{c}\bar{\alpha}^{n+2} \\ d\alpha^{n+2} + \bar{d}\bar{\alpha}^{n+2} \end{pmatrix}.$$

onde $c = \frac{l}{\alpha^2}(1/\beta - 1/\alpha)$ e $d = \frac{l}{\alpha^2}(1/\beta^2 - 1/\alpha^2)$. Podemos provar resolvendo o sistema dado pelos valores iniciais de R_0 , R_1 e R_2 que

$$l = \frac{\alpha^2}{(\alpha - \bar{\alpha})(\alpha - \beta)}.$$

Logo,

$$c\bar{d} - d\bar{c} = \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha} - \alpha} \neq 0.$$

Façamos $g(z) = \begin{pmatrix} cz + \bar{c}\bar{z} \\ dz + \bar{d}\bar{z} \end{pmatrix}$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e $f = g^{-1}$, obtemos $f(\mathcal{E}) = \mathcal{R}$. Por outro lado, $g(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ b \end{pmatrix}$ e $g(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De fato, $g(1) = \begin{pmatrix} c + \bar{c} \\ d + \bar{d} \end{pmatrix} = \delta(R_{-2}) = \begin{pmatrix} R_{-2}/\beta - R_{-3} \\ R_{-2}/\beta^2 - R_{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \end{pmatrix}$, uma vez que $R_{-1} = R_{-2} = 0$, $R_{-3} = 1$ e $R_{-4} = -b$.

Agora,

$$g(\alpha) = \begin{pmatrix} c\alpha + \bar{c}\bar{\alpha} \\ d\alpha + \bar{d}\bar{\alpha} \end{pmatrix} = \delta(R_{-1}) = \begin{pmatrix} R_{-1}/\beta - R_{-2} \\ R_{-1}/\beta^2 - R_{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha = f(\mathbb{Z}^2)$.

□

Prova do Teorema 6.3.1

Temos $\mathcal{R} \cap \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha = \{0, -1 - (b+1)\alpha\}$. Logo $\mathcal{E} \cap \mathbb{Z}^2 = (f^{-1}(0), f^{-1}(-1 - (b+1)\alpha)) = (0, (1, 1))$. Então existe um número real $c > 0$ tal que para todo $g \in \mathbb{Z}^2$, $\inf_{x \in \mathcal{E}} \mathcal{N}(g - x) < c$

implica que $g = 0$ ou $g = (1, 1)$. Suponhamos que $\mathcal{N}(q(1/\beta, 1/\beta^2) - g) < c$. Como $\delta(q) - q(1/\beta, 1/\beta^2) \in \mathbb{Z}^2$ e $\delta(q) \in \mathcal{E}$, então $\mathcal{N}(\delta(q) - (\delta(q) - q(1/\beta, 1/\beta^2) - g)) < c$. Portanto $\delta(q) - q(1/\beta, 1/\beta^2) + g = 0$ ou $\delta(q) - q(1/\beta, 1/\beta^2) + g = (1, 0)$, isto é, $\delta(q) = q(1/\beta, 1/\beta^2) - g$ ou $q(1/\beta, 1/\beta^2) - g = \delta(q) - (1, 1)$.

□

Final da demonstração do Teorema 6.0.5

Vamos provar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(R_n)_{n \geq n_0}$ é a sequência de melhor aproximação do vetor $(1/\beta, 1/\beta^2)$ para a norma $\mathcal{N}$.

Seja c um número real como definido no Teorema 6.3.1. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{N}(\delta(R_{n_0})) = d|\alpha^{n_0}| < c$, onde $d = \mathcal{N}(\delta(1))$. Seja $n \geq n_0$ e $0 < q < R_n$. Vamos provar que $\mathcal{N}_0(R_n v) < \mathcal{N}_0(qv)$.

Suponhamos que $\mathcal{N}_0(qv) \leq \mathcal{N}_0(R_n v) \leq \mathcal{N}(R_n v) = d|\alpha^n| \leq d|\alpha^{n_0}| < c$. Logo, $\mathcal{N}_0(qv) < c$.

Suponhamos que $\mathcal{N}_0(qv) = \mathcal{N}(qv - g)$. Temos, pelo Teorema 6.3.1 que $qv - g = \delta(q)$ ou $qv - g = \delta(q) - (1, 1)$.

Caso 1. $qv - g = \delta(q)$.

Temos: $\mathcal{N}_0(qv) = \mathcal{N}(\delta(q)) < \mathcal{N}(\delta(R_n))$. (1)

Como $q < R_n$, então $q = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i R_i$. Logo, $\mathcal{N}(\delta(q)) = d|\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \alpha^i|$. (2)

A partir de (1) e (2) obtemos que $|\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \alpha^i| < |\alpha^n|$.

Por outro lado, $\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \beta^i \in \mathbb{Q}$ pois caso contrário, $\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \beta^i = \frac{c}{d}$, $c, d \in \mathbb{Z}$. Então $N\beta^2 + p_N\beta + q_n = \frac{c}{d}$, ou seja, $dN\beta^2 + p_N d\beta + q_n d = c$. Seque que $dN = p_N d = 0$ e $q_n d = c$ e portanto $d = 0$. Absurdo. Portanto $\gamma = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \beta^i$ é algébrico de grau 3 pois $\mathbb{Q}(\gamma) \subset \mathbb{Q}(\beta)$. Logo $\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \alpha^i$, $\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \bar{\alpha}^i$ e $\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \beta^i$ são Galois-conjugados, $|\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \alpha^i \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \bar{\alpha}^i \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \beta^i| \in \mathbb{Z}$.

Logo, $|\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \alpha^i|^2 \geq \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \beta^i} \geq \frac{1}{\beta^n} = |\alpha|^{2n}$. Ou seja, $|\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \alpha^i| \geq |\alpha|^n$. Absurdo.

Caso 2. $qv - g = \delta(q) - (1, 1)$.

$\mathcal{N}_0(qv - g) = \mathcal{N}(qv - g) = \mathcal{N}(qv - (1, 1))$.

Temos: $\mathcal{N}(qv - g) = d|\sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k \alpha^k|$.

Suponhamos:

$$\mathcal{N}(qv - (1, 1)) = d|\sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k \alpha^k + 1 + (b+1)\alpha|.$$

Afirmção:

$$\mathcal{N}(qv - (1, 1)) \geq \mathcal{N}(\delta(R_n)) = |\alpha^n|.$$

De fato,

$$|1 + (b+1)\alpha + \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k \alpha^k|^2 \cdot |1 + (b+1)\beta + \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k \beta^k| \geq 1.$$

ou

$$|1 + (b+1)\alpha + \sum \varepsilon_k \alpha^k| \geq \frac{1}{|1+(b+1)\beta + \sum \varepsilon_k \beta^k|}.$$

Por outro lado, seja $n \geq n_0$ suficientemente grande tal que $1 + (b+1)\beta + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \beta^k > 0$.

Temos $1 + (b+1)\beta + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \beta^k \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k \beta^k \leq \beta^n$, pois $b+1 \leq -1$. Logo,

$$\frac{1}{1 + (b+1)\beta + \sum \varepsilon_k \beta^k} \geq \frac{1}{\beta^n} = |\alpha|^{2n}.$$

Portanto $1 + (b+1)\beta + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \beta^k \geq |\alpha|^n$. Absurdo.

□

Capítulo 7

Anexo

7.1 Determinação dos Estados do Autômato

Sejam $x = \sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i$, $y = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$, em que as sequências $(a_i)_{i \geq l}$ e $(b_i)_{i \geq l}$ pertencem à $\mathcal{N}$. Suponhamos que $x = y$ e seja $A_k = x(k) - y(k)$, em que $x(k) = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k a_i \alpha^i$ e $y(k) = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k b_i \alpha^i$. Temos,

$$A_{k+1} = \frac{A_k}{\alpha} + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2.$$

Seja $\mathcal{B}$ o automato constituído pelos estados A_k , em que A_k pertence ao conjunto $S = \{0, \pm\alpha^2, \pm(\alpha + b\alpha^2), \pm(\alpha + (b+1)\alpha^2), \pm(1 + b\alpha + (a-1)\alpha^2), \pm(1 + (b+1)\alpha + (a+b)\alpha^2), \pm(1 + (b+1)\alpha + (a+b+1)\alpha^2)\}$. Dois estados A_k e A_{k+1} são ligados por flechas (A_{k+1}, b_{k+1}) , em que a_{k+1} e b_{k+1} podem assumir os valores possíveis pelos quais pode-se passar de um estado A_k ao estado A_{k+1} .

Seja t o menor inteiro tal que $a_t \neq b_t$. Coloquemos $A_{t-1} = 0$, que é o estado inicial do autômato, e suponhamos que $(a_t, b_t) = (\varepsilon + 1, \varepsilon)$. Logo $A_t = \alpha^2$.

Temos os seguintes casos:

1. $A_k = \alpha^2$

$$\begin{aligned} \text{Neste caso, } A_{k+1} &= \alpha + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2 = \\ &= \begin{cases} \alpha + b\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon + b, \varepsilon) \\ \alpha + (b+1)\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon + b + 1, \varepsilon) \end{cases} \end{aligned}$$

2. $A_k = \alpha + b\alpha^2$

$$A_{k+1} = 1 + b\alpha + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2 = 1 + b\alpha + (a-1)\alpha^2, \text{ se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon + a - 1, \varepsilon).$$

$$3. A_k = 1 + b\alpha + (a-1)\alpha^2$$

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{1}{\alpha} + b + (a-1)\alpha + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2 = -\alpha + (a_{k+1} - b_{k+1} + 1)\alpha^2 = \\ &= \begin{cases} -\alpha - (b+1)\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon - b - 2, \varepsilon) \\ -\alpha - b\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon - b - 1, \varepsilon) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. A_k &= -\alpha - (b+1)\alpha^2 \quad A_{k+1} = -1 - (b+1)\alpha + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2 = \\ &= \begin{cases} -1 - (b+1)\alpha - (a+b+1)\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon, \varepsilon + a + b + 1) \\ -1 - (b+1)\alpha - (a+b)\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon, \varepsilon + a + b) \end{cases} \end{aligned}$$

$$5. A_k = -1 - (b+1)\alpha - (a+b+1)\alpha^2$$

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= -\frac{1}{\alpha} - (b+1) - (a+b+1)\alpha + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2 = \\ &= \begin{cases} -1 - (b+1)\alpha - (a+b)\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon, \varepsilon + a + b - 1) \\ -1 - (b+1)\alpha - (a+b+1)\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon, \varepsilon + a + b) \end{cases} \end{aligned}$$

$$6. A_k = -1 - (b+1)\alpha - (a+b)\alpha^2$$

$$A_{k+1} = -\frac{1}{\alpha} - (b+1) - (a+b)\alpha + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2 = -1 - b\alpha - (a-1)\alpha^2, \text{ se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon, \varepsilon + a - 2).$$

$$7. A_k = -\alpha - b\alpha^2$$

$$A_{k+1} = -1 - b\alpha + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2 = -1 - b\alpha - (a-1)\alpha^2, \text{ se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon, \varepsilon + a - 1).$$

$$8. A_k = -1 - b\alpha - (a-1)\alpha^2$$

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= -\frac{1}{\alpha} - b - (a-1)\alpha + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2 = \\ &= \begin{cases} \alpha + b\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon, \varepsilon - b - 1) \\ \alpha + (b+1)\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon, \varepsilon - b - 2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$9. A_k = \alpha + (b+1)\alpha^2$$

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= -1 + (b+1)\alpha + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2 = \\ &= \begin{cases} 1 + (b+1)\alpha + (a+b+1)\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon + a + b + 1, \varepsilon) \\ 1 + (b+1)\alpha + (a+b)\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon + a + b, \varepsilon) \end{cases} \end{aligned}$$

$$10. A_k = 1 + (b+1)\alpha + (a+b+1)\alpha^2$$

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= -\frac{1}{\alpha} + (b+1) + (a+b+1)\alpha + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2 = \\ &= \begin{cases} 1 + (b+1)\alpha + (a+b+1)\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon + a + b, \varepsilon) \\ 1 + (b+1)\alpha + (a+b)\alpha^2, & \text{se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon + a + b - 1, \varepsilon) \end{cases} \end{aligned}$$

$$11. A_k = 1 + (b+1)\alpha + (a+b)\alpha^2$$

$$A_{k+1} = \frac{1}{\alpha} + (b+1) + (a+b)\alpha + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2 = 1 + b\alpha + (a-1)\alpha^2 \text{ se } (a_{k+1}, b_{k+1}) = (\varepsilon + a - 2, \varepsilon).$$

Observação

1. Estando no estado inicial poderíamos ter suposto que $(a_t, b_t) = (\varepsilon, \varepsilon + 1)$ e então estaríamos no estado $A_t = -\alpha^2$.

Apresentamos a seguir uma demonstração de que o fractal de Rauzy no caso $a = 3, b = -2$ possui somente 6 vizinhos.

Teorema 7.1.1 *O Fractal de Rauzy $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{3,-2}$ possui exatamente 6 vizinhos da forma $\mathcal{R}_{3,-2} + u$, em que $u \in \{\pm\alpha, \pm 1 - 2\alpha, \pm 1 - \alpha\}$, isto é,*

$$\forall u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \setminus \{0\}, \mathcal{R}_{3,-2} \cap \mathcal{R}_{3,-2} + u \neq \emptyset \iff u \in \{\pm\alpha, \pm 1 - 2\alpha, \pm 1 - \alpha\}.$$

Demonstração: Suponhamos que $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + p + q\alpha) \neq \emptyset$, então existe $z \in \mathcal{R}$ tal que

$$z = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = p + q\alpha + \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i, \text{ onde } (\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{N}.$$

Por outro lado, agrupando os termos temos:

$$\sum_{i=2}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) \alpha^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \gamma_{4i} \alpha^{4i+2},$$

$$\text{onde } \gamma_{4i} = (\varepsilon_{2+4i} - \varepsilon'_{2+4i}) + \dots + (\varepsilon_{5+4i} - \varepsilon'_{5+4i}) \alpha^3.$$

Assim,

$$|p + q\alpha|^2 \leq \left(\frac{k|\alpha|^2}{1 - |\alpha|^4} \right)^2,$$

em que $k = \max\{\sum_{i=0}^3 |\varepsilon_i - \varepsilon'_i| |\alpha|^i, \varepsilon_i, \varepsilon'_i \in \{0, 1, 2\}\}$. Podemos mostrar que $\left(\frac{k|\alpha|^2}{1 - |\alpha|^4} \right)^2 \leq 3,1605$.

Por outro lado, considere $\alpha = c + di$, em que $c = 0,3376\dots$ e $d = 0,5622\dots$. Logo, $|p + q\alpha|^2 = (p + qc)^2 + q^2 d^2$. Portanto, $|q| \leq 3$, pois se $|q| \geq 4$ teríamos $q^2 d^2 \geq 5,0571 > 3,1605$. Vamos então analisar os casos nos quais $q \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$:

Caso 1. Se $q = -3$ então $p = 1$. De fato, $|p + q\alpha|^2 = (p - 3c)^2 + 9d^2 \leq 3,1605 \implies (p - 3c)^2 \leq 3,1605 - 2,8446 = 0,3159$. Neste caso a única possibilidade é $p = 1$. Temos então a região associada $\mathcal{R} + 1 - 3\alpha$.

Caso 2. Se $q = -2$ então $p \in \{0, 1, 2\}$. De fato, $|p + q\alpha|^2 = (p - 2c)^2 + 4d^2 \leq 3,1605 \implies (p - 2c)^2 \leq 3,1605 - 1,2642 = 1,8963$. Neste caso os valores possíveis de p são $\{0, 1, 2\}$ e as regiões associadas são $\mathcal{R} - 2\alpha$, $\mathcal{R} + 1 - 2\alpha$ e $\mathcal{R} + 2 - 2\alpha$.

Caso 3. Se $q = -1$ então $p \in \{-1, 0, 1, 2\}$. De fato, $|p + q\alpha|^2 = (p - c)^2 + d^2 \leq 3,1605 \implies (p - c)^2 \leq 3,1605 - 0,3160 = 2,8445$. Neste caso os valores possíveis de p são $\{-1, 0, 1, 2\}$ e as regiões associadas são $\mathcal{R} - 1 - \alpha$, $\mathcal{R} - \alpha$, $\mathcal{R} + 1 - \alpha$ e $\mathcal{R} + 2 - \alpha$.

Caso 4. Se $q = 0$ então $p \in \{-1, 0, 1\}$. De fato, $|p + q\alpha|^2 = |p|^2 \leq 3,1605 \implies p = -1, 0, 1$. Temos as regiões $\mathcal{R}$, $\mathcal{R} - 1$ e $\mathcal{R} + 1$.

Caso 5. Se $q = 1$ então $p \in \{-2, -1, 0, 1\}$. De fato, $|p + q\alpha|^2 = (p + c)^2 + d^2 \leq 3,1605 \implies (p + c)^2 \leq 3,1605 - 0,3160 = 2,8445$. Neste caso os valores possíveis de p são $\{-2, -1, 0, 1\}$ e as regiões associadas são $\mathcal{R} - 2 + \alpha$, $\mathcal{R} + \alpha$, $\mathcal{R} - 1 + \alpha$ e $\mathcal{R} + 1 + \alpha$.

Caso 6. Se $q = 2$ então $p \in \{-2, -1, 0\}$. De fato, $|p + q\alpha|^2 = (p + 2c)^2 + 4d^2 \leq 3,1605 \implies (p + 2c)^2 \leq 3,1605 - 1,2642 = 1,8963$. Neste caso os valores possíveis de p são $\{-2, -1, 0\}$ e as regiões associadas são $\mathcal{R} + 2\alpha$, $\mathcal{R} - 1 + 2\alpha$ e $\mathcal{R} - 2 + 2\alpha$.

Caso 7. Se $q = 3$ então $p = -1$. De fato, $|p + q\alpha|^2 = (p + 3c)^2 + 9d^2 \leq 3,1605 \implies (p + 3c)^2 \leq 3,1605 - 2,8446 = 0,3159$. Neste caso a única possibilidade é $p = -1$. Temos então a região associada $\mathcal{R} - 1 + 3\alpha$.

Portanto, obtemos até agora as regiões $\mathcal{R} \pm \alpha$, $\mathcal{R} \pm (1 - \alpha)$, $\mathcal{R} \pm (1 - 2\alpha)$, $\mathcal{R} \pm 1$, $\mathcal{R} \pm 2\alpha$, $\mathcal{R} \pm (1 + \alpha)$, $\mathcal{R} \pm (2 - \alpha)$, $\mathcal{R} \pm (2 - 2\alpha)$ e $\mathcal{R} \pm (1 - 3\alpha)$. Vamos mostrar que podemos excluir estas 6 últimas regiões.

1. Suponhamos que $\mathcal{R} \cap \mathcal{R} + 2\alpha \neq \emptyset$.

Logo, $2\alpha = \sum_{i=2}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i)\alpha^i$, onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{N}$. Portanto,

$$|2\alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2)\alpha^2| = \left| \sum_{i=3}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i)\alpha^i \right| < |\alpha| \cdot 3,1605 = 2,0731. \quad (7.1)$$

Lembre-mo-nos que $|\alpha| \approx 0.6558$.

Por outro lado,

$$|2\alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2)\alpha^2| \subset \{|2\alpha|, |2\alpha + \alpha^2|, |2\alpha - \alpha^2|, |2\alpha + 2\alpha^2|, |2\alpha - 2\alpha^2|\} \approx X_0, \quad (7.2)$$

onde $X_0 = \{1, 31; 1, 57; 1, 50; 1, 90; 1, 13\}$. Por 7.1 e 7.2 obtemos uma contradição.

2. Suponhamos que $\mathcal{R} \cap \mathcal{R} + 1 - 3\alpha \neq \emptyset$.

Logo, $1 - 3\alpha = \sum_{i=2}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i)\alpha^i$, onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{N}$. Portanto,

$$|1 - 3\alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2)\alpha^2| = \left| \sum_{i=3}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i)\alpha^i \right| < |\alpha| \cdot 3,1605 = 2,0731. \quad (7.3)$$

Por outro lado,

$$|1 - 3\alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2)\alpha^2| \subset \{|1 - 3\alpha|, |1 - 3\alpha + \alpha^2|, |1 - 3\alpha - \alpha^2|, |1 - 3\alpha + 2\alpha^2|, |1 - 3\alpha - 2\alpha^2|\} \approx X_1, \quad (7.4)$$

onde $X_1 = \{1, 68; 1, 32; 2, 07; 1, 02; 2, 47\}$. Por 7.3 e 7.4 obtemos uma contradição.

3. Suponhamos que $\mathcal{R} \cap \mathcal{R} + 2 - 2\alpha \neq \emptyset$.

Logo, $2 - 2\alpha = \sum_{i=2}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i)\alpha^i$, onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{N}$. Portanto,

$$|2 - 2\alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2)\alpha^2| = \left| \sum_{i=3}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i)\alpha^i \right| < |\alpha| \cdot 3,1605 = 2,0731. \quad (7.5)$$

Por outro lado,

$$|2 - 2\alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2)\alpha^2| \subset \{|2 - 2\alpha|, |2 - 2\alpha + \alpha^2|, |2 - 2\alpha - \alpha^2|, |2 - 2\alpha + 2\alpha^2|, |2 - 2\alpha - 2\alpha^2|\} \approx X_2, \quad (7.6)$$

onde $X_2 = \{1, 73; 1, 34; 2, 14; 1, 2, 55\}$. Por 7.5 e 7.6 obtemos uma contradição.

4. Suponhamos que $\mathcal{R} \cap \mathcal{R} + 2 - \alpha \neq \emptyset$.

Logo, $2 - \alpha = \sum_{i=2}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i)\alpha^i$, onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{N}$. Portanto,

$$|2 - \alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2)\alpha^2| = \left| \sum_{i=3}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i)\alpha^i \right| < |\alpha| \cdot 3,1605 = 2,0731. \quad (7.7)$$

Por outro lado,

$$|2 - \alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2)\alpha^2| \subset \{|2 - \alpha|, |2 - \alpha + \alpha^2|, |2 - \alpha - \alpha^2|, |2 - \alpha + 2\alpha^2|, |2 - \alpha - 2\alpha^2|\} \approx X_3, \quad (7.8)$$

onde $X_3 = \{1, 75; 1, 47; 2, 08; 1, 27; 2, 45\}$. Por 7.7 e 7.8 obtemos uma contradição.

5. Suponhamos que $\mathcal{R} \cap \mathcal{R} + 1 + \alpha \neq \emptyset$.

Logo, $1 + \alpha = \sum_{i=2}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i)\alpha^i$, onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{N}$. Portanto,

$$|1 + \alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2)\alpha^2| = \left| \sum_{i=3}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i)\alpha^i \right| < |\alpha| \cdot 3,1605 = 2,0731. \quad (7.9)$$

Por outro lado,

$$|1 + \alpha + (\varepsilon_2' - \varepsilon_2)\alpha^2| \subset \{|1 + \alpha|, |1 + \alpha + \alpha^2|, |1 + \alpha - \alpha^2|, |1 + \alpha + 2\alpha^2|, |1 + \alpha - 2\alpha^2|\} \approx X_4, \quad (7.10)$$

onde $X_4 = \{1, 45; 1, 47; 1, 55; 1, 61; 1, 75\}$. Por 7.9 e 7.10 obtemos uma contradição.

6. Suponhamos que $\mathcal{R} \cap \mathcal{R} + 1 \neq \emptyset$.

Logo, $1 = \sum_{i=2}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon_i')\alpha^i$, onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon_i')_{i \geq 2} \in \mathcal{N}$. Portanto,

$$|1 + (\varepsilon_2' - \varepsilon_2)\alpha^2| = \left| \sum_{i=3}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon_i')\alpha^i \right| < |\alpha| \cdot 3,1605 = 2,0731. \quad (7.11)$$

Por outro lado,

$$|1 + (\varepsilon_2' - \varepsilon_2)\alpha^2| \subset \{|1|, |1 + \alpha^2|, |1 - \alpha^2|, |1 + 2\alpha^2|, |1 - 2\alpha^2|\} \approx \{1; 0,88; 1,26; 1,59; 0,96\}. \quad (7.12)$$

Por 7.11 e 7.12 obtemos uma contradição.

7.2 Programa computacional

Nesta seção apresentamos um programa escrito em Maple que pode ser utilizado para desenhar qualquer Fractal de Rauzy pertencente às classes mencionadas no trabalho.

```
> myproc:=proc(n) global R,R1,R2,R3,R4,R5,R6,E;
> 'Calcula a sequencia (T[n])
> T[0]:=0; T[1]:=0; T[2]:=1;
> a:=3; b:=-2; 'Exemplo: a=4, b=-3
> i:=0;
> T[i+3]:=a*T[i+2]+b*T[i+1]+T[i];
> k:=2;
> while T[i+3]<=n do
> k:=k+1; i:=i+1;
> T[i+3]:=a*T[i+2]+b*T[i+1]+T[i]; end do;
> 'Calcula o vetor E (digitos) através do algoritmo greedy
> i:=k; soma:=0;
> for j from i to 1 by -1 do
> x:=a;
> if x*T[j]+soma<=n then
> E[j]:=x; soma:=soma+x*T[j]; controle:=true;
> else;
> controle:=false; end if;
> while controle = false do
> x:=x-1;
> if x*T[j]+soma<=n then
> E[j]:=x; soma:=soma+x*T[j]; controle:=true;
> else;
> controle:=false;
> end if; end do; end do;
> 'Calcula as raizes do polinômio;
> X:=evalf(solve(x^3-a*x^2-b*x-1)):
> alfa:=X[2];
> S:=0;
```

```

> for l from 2 to k do
> S:= S+(E[l]*(alfa^l));
> end do;
> R[n]:=S; R1[n]:=S+1+b*alfa; R2[n]:=S-1-b*alfa;
> R3[n]:=S+alfa; R4[n]:=S-alfa;
> R5[n]:=S-1-(b+1)*alfa; R6[n]:=S+1+(b+1)*alfa; end proc;
> 'Executa a Procedure
> for i from 1 to 10000 do
> myproc(i);
> end do:
> 'Separa os pontos encontrados em parte Real e Imaginaria
> for i from 2 to 10000 do
> Z[i]:=map(z->[Re(z),Im(z)],R[i]); Z1[i]:=map(z->[Re(z),Im(z)],R1[i]);
> Z2[i]:=map(z->[Re(z),Im(z)],R2[i]); Z3[i]:=map(z->[Re(z),Im(z)],R3[i]);
> Z4[i]:=map(z->[Re(z),Im(z)],R4[i]); Z5[i]:=map(z->[Re(z),Im(z)],R5[i]);
> Z6[i]:=map(z->[Re(z),Im(z)],R6[i]);
> end do:
> 'Plotar os pontos do Fractal
> S:=seq(Z[i],i=2..10000);
> S1:=seq(Z1[i],i=2..10000); S2:=seq(Z2[i],i=2..10000);
> S3:=seq(Z3[i],i=2..10000); S4:=seq(Z4[i],i=2..10000);
> S5:=seq(Z5[i],i=2..10000); S6:=seq(Z6[i],i=2..10000);
> with(plots):
> V:=plot([[S]],style=point,color=black):
> V1:=plot([[S1]],style=point,color=blue):
> V2:=plot([[S2]],style=point,color=cyan):
> V3:=plot([[S3]],style=point,color=red):
> V4:=plot([[S4]],style=point,color=orange):
> V5:=plot([[S5]],style=point,color=green):
> V6:=plot([[S6]],style=point,color=yellow):
> display(V,V1,V2,V3,V4,V5,V6);

```

Referências Bibliográficas

- [1] P. ARNOUX, S. ITO, **Pisot substitutions and Rauzy fractals**, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 8, 2001, 181-207.
- [2] S. AKIYAMA, **Cubic Pisot units with finite beta expansions**, Algebraic Number theory and Diophantine Analysis, 2000, 11-26.
- [3] S. AKIYAMA, **On the boundary of self affine tilings generated by Pisot numbers**, Journal of Mathematical Society of Japan, vol. 54 (2002), no. 2, 283-308.
- [4] C. BANDT, G. GELBRICH, **Classification of Self-Affine Lattice Tilings**, J. London Math. Soc. (1994) 50 (3): 581-593.
- [5] M. BARNESLEY, **Fractals everywhere**. Ac.Press, 1988.
- [6] V. BERTHÉ, A. SIEGEL, **Purely Periodic Beta-Expansions in the Non-Unit Case**, Journal of Number Theory, Elsevier, 2007, 127, pp.153-172.
- [7] A. BERTRAND, **Développements en base de Pisot et répartition modulo 1**. C. R.
- [8] V. CANTERINI, **Connectedness of geometric representation of substitutions of Pisot type**, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 10(1):7789, 2003.
- [9] V. CANTERINI, A. SIEGEL, **Geometric representation of substitutions of Pisot type**, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 5121-5144. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 285(6):A419A421, 1977.
- [10] N. CHEVALLIER, **Best simultaneous diophantine approximations of some cubic algebraic numbers**, J. Théor. Nombres Bordeaux 14, 403-414, 2002.
- [11] N. CHEKHOVA, P. HUBERT, A. MESSAOUDI, **Propriétés combinatoires, ergodiques et arithmétiques de la substitution de Tribonacci**, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, 13, 371-394 (2001).

- [12] N. P. FOGG, **Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics**, Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel. Volume 1794, Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [13] A.S. FRAENKEL, **System of numeration**. Amer. Math. Monthly 92, 1985, 105-114.
- [14] C. FROUGNY; B. SOLOMYAK, **Finite Beta-expansions**. Ergod. Th. and Dynam. Systems 12, 1988, 4, 713-723.
- [15] C. FROUGNY, **Number Representation and Finite Automata**, Topics in Symbolic Dynamics and Applications, London Mathematical Society Lecture Note Series 279, pp. 207-228, 2000. Editado por F. Blanchard, A. Maass e A. Nogueira.
- [16] P. HUBERT, A. MESSAOUDI, **Best simultaneous diophantine approximation of Pisot numbers and Rauzy fractals**, Acta arithmetica, v. 124 (1) 1-15, 2006.
- [17] S. ITO, M. KIMURA, **On the Rauzy Fractal**, Japan J. Indust. Appl. Math. 8, 1991, 461-486.
- [18] J.C. LAGARIAS, **Best simultaneous diophantine approximations II. Behaviour of consecutive best approximations**. Pacific Journal of Mathematics, 102, 1982.
- [19] M. LOTHAIRE, **Algebraic Combinatorics on Words**, Cambridge University Press, 2002.
- [20] A. MESSAOUDI, **Propriétés arithmétiques et dynamiques du fractal de Rauzy**. J. Théor. Nombres Bordeaux 10, 1998, 135-162.
- [21] A. MESSAOUDI, **Frontière du fractal de Rauzy et système de numération complexe**. Acta Arithmetica, v. 95 pp. 195-224, 2000.
- [22] A. MESSAOUDI, **Propriétés arithmétiques et topologiques d'une classe d'ensembles fractales**. Acta Arithmetica, v. 121.4, pp. 341-265, 2006.
- [23] A. MESSAOUDI, J. THUSWALDNER, B. LORIDANT, P. SURER, **Topological Properties for a class of cubic Rauzy fractals**. Theoret. Comput. Sci., 477 pp. 6 - 31, 2013.
- [24] P. A. P. MORAN **Additive functions of intervals and Hausdorff measure**. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 42, 1946, pp 15-23.

- [25] . W. PARRY, **On the Beta-expansion of real numbers**, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 11:401-416, 1960.
- [26] M. QUEFFÉLEC, **Substitution dynamical systems - spectral analysis**. Lecture Notes in Mathematics, 1294. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [27] G. RAUZY, **Nombres algébriques et substitutions**, Bull. Soc. Math. France 110, 1982, 147-178.
- [28] A. RÉNYI, **Representations for real numbers and their ergodic properties**, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 8 (1957), 477-493.
- [29] T. M. RODRIGUES, **Propriedades aritméticas e topológicas de uma classe de fractais de Rauzy**, Tese de Doutorado, USP, 2010.
- [30] K. SCHMIDT, **On Periodic Expansions of Pisot Numbers and Salem Numbers**, Bull. London Math. Soc. (1980) 12 (4): 269-278.
- [31] A. SIEGEL, J. THUSWALDNER, **Topological properties of Rauzy fractals**, Société Mathématiques de France, 118, pp.144, 2009, Mémoires de la SMF
- [32] E. ZECKENDORFF, **Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas**, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 41, 1972, 179-182.