

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Estabilidade Global e Bifurcação de Hopf em um Modelo de HIV baseado em Sistemas do Tipo Lotka-Volterra

Juliano Aparecido Véri

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias

Presidente Prudente, Junho de 2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Estabilidade Global e Bifurcação de Hopf em um Modelo de HIV baseado em Sistemas do Tipo Lotka-Volterra

Juliano Aparecido Véri

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Junho de 2013

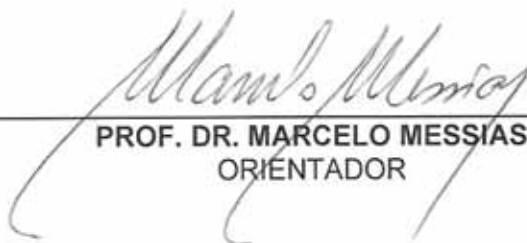
FICHA CATALOGRÁFICA

V637e Véri, Juliano Aparecido.
Estabilidade global e bifurcação de Hopf em um modelo de HIV baseado em sistemas do tipo Lotka-Volterra / Juliano Aparecido Véri. - Presidente Prudente : [s.n], 2013
103 f. : il.

Orientador: Marcelo Messias
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Bifurcação de Hopf. 2. Estabilidade global. 3. Sistemas do tipo Lotka-Volterra. I. Messias, Marcelo. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

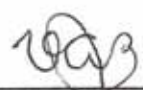
BANCA EXAMINADORA



PROF. DR. MARCELO MESSIAS
ORIENTADOR



PROF. DR. LUIS FERNANDO DE OSÓRIO MELLO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ



PROFA. DRA. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI
UNESP/FCT



JULIANO APARECIDO VÊRRI

PRESIDENTE PRUDENTE (SP), 05 DE JUNHO DE 2013

RESULTADO: APROVADO

*Aos meus pais,
Gilmar e Anita.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus pela sua luz e proteção durante esta caminhada, e por conceder-me a graça de concluir este curso de mestrado.

Agradeço a todos os meus familiares, principalmente aos meus pais Gilmar e Anita, verdadeiros alicerces da minha vida, e à minha irmã Giseli, por todo apoio e incentivo que possibilitaram-me chegar até aqui.

Agradeço ao Prof. Dr. Marcelo Messias pela orientação, dedicação e paciência que sempre teve comigo. Também estendo meu agradecimento aos Professores do PosMAC: Cristiane Néspoli, Messias Meneguette, Roberto Prado e Vanessa Botta, que lecionaram as disciplinas que cursei no mestrado e contribuíram muito para o meu crescimento acadêmico.

Agradeço aos professores do curso de graduação em Matemática da UNOESTE, e de modo especial, ao professor Dr. Luís Roberto Almeida Gabriel Filho, pela orientação na iniciação científica e pelo seu exemplo, que para mim foi uma grande inspiração para prosseguir nos estudos. Agradeço também ao amigo Daniel pela ajuda oferecida no tempo em que eu ainda buscava ingressar no mestrado.

Agradeço a todos os amigos do PosMAC. Aos da primeira turma: Marluce, Diego, Marluci, Tamiris, Marilaine e Vanderléa, que a todo momento compartilharam seus conhecimentos e experiências. Aos da minha turma: Camila, Larissa, Cristiane, Lívia, Clóvis, Pedro, Reginaldo e Tatiane, pelo companheirismo e amizade, que proporcionaram muitos momentos de alegria e ajudaram a superar os momentos de dificuldade. Aos da turma seguinte: Daiane, Hemily, Irineu, Marília, Mariane, Rafael, Renatinha, Wesley, Zé e, em especial, ao Alisson e a Patrícia, que me ajudaram muito no estudo das EDO's. Enfim, só tem parceria!

Agradeço aos funcionários da seção de Pós-graduação pelo auxílio prestado no decorrer do mestrado.

À PROPG-UNESP pelo apoio financeiro.

Finalmente, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração desta dissertação de mestrado.

“ Dê-me, Senhor, agudeza para entender, capacidade para reter, método e faculdade para aprender, sutileza para interpretar, graça e abundância para falar. Dê-me, Senhor, acerto ao começar, direção ao progredir e perfeição ao concluir.”

Santo Tomás de Aquino

Resumo

Nesta dissertação fazemos um estudo de modelos biológicos do tipo Lotka-Volterra, utilizando como ferramenta principal a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. Abordamos, no plano e no espaço, alguns modelos do tipo predador-presa. Analisamos os comportamentos das soluções sob a variação dos parâmetros e tratamos com detalhes a bifurcação de Hopf, que dá origem a uma órbita periódica isolada (ciclo limite). Estudamos também um teorema devido a Li e Muldowney [16] sobre a estabilidade global de um ponto de equilíbrio para um sistema $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Aplicamos este resultado no estudo de um modelo de HIV tridimensional, provando a estabilidade global de um ponto de equilíbrio, para certos valores dos parâmetros. Para o mesmo modelo, verificamos a ocorrência de uma dupla bifurcação de Hopf, que leva ao surgimento e posterior desaparecimento de um ciclo limite, ao variarmos um dos parâmetros envolvidos no sistema. As bifurcações de Hopf ocorrem simultaneamente à perda de estabilidade global do ponto de equilíbrio.

Palavras-chave: Bifurcação de Hopf; Estabilidade Global; Sistemas do Tipo Lotka-Volterra.

Abstract

In this work we present a study of biological models of Lotka-Volterra type, using as main tool the qualitative theory of ordinary differential equations. We analyze some two and three dimensional predator-prey models. The behavior of the solutions are studied under the variation of parameters and it is shown that a Hopf bifurcation occurs, leading to the creation of an isolated periodic orbit (limit cycle). We also study a theorem due to Li and Muldowney [16] about the global stability of an equilibrium point of a system $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$. We apply this result in the analysis of a three dimensional model of HIV with treatment, showing the global stability of an equilibrium point, for certain parameter values. For the same model, we prove the occurrence of two Hopf bifurcations, leading to the birth and subsequent death of a limit cycle, when we vary one of the parameters of the model. The Hopf bifurcations occurs simultaneously to the lack of global stability of the equilibrium point.

Keywords: Hopf Bifurcation; Global Stability; Systems of Lotka-Volterra Type.

Lista de Figuras

1.1	Ilustração de equivalência topológica.	15
2.1	Bifurcação de Hopf supercrítica.	24
2.2	Bifurcação de Hopf supercrítica no espaço (x_1, x_2, μ)	25
3.1	Retrato de fase do sistema (3.1)	44
3.2	Diagrama de bifurcação do sistema (3.6).	47
3.3	Retratos de fase do sistema (3.6): (a) $(\alpha, \varepsilon) = (0.5, 1) \in \Delta_1$; (b) $(\alpha, \varepsilon) = (0.5, 0.3) \in \Delta_2$ e (c) $(\alpha, \varepsilon) = (0.5, 0.15) \in \Delta_3$	51
3.4	Órbita periódica atratora criada a partir de uma bifurcação de Hopf do sistema (3.6).	51
3.5	Diagrama de bifurcação do sistema (3.11).	55
3.6	Retratos de Fase do sistema (3.11): (a) $(\alpha, \delta) \in \Delta_1$, (b) $(\alpha, \delta) \in \Delta_2$, (c) $(\alpha, \delta) \in \Delta_3$ e (d) $(\alpha, \delta) \in \Delta_4$	57
3.7	Reta L de equilíbrios não-isolados.	58
3.8	Superfícies de nível da função h	58
3.9	Soluções de (3.11) contidas em uma superfície M_c	59
3.10	Retrato de fase do sistema (3.19): (a) $\mu = -0.1$, (b) $\mu = 0$, (c) e (d) $\mu = 0.02$	65
3.11	Comportamento das soluções do sistema (3.19): (a) $0 < \mu < 0.051$, (b) $\mu = 0.051$ e (c) $\mu > 0.051$	66
3.12	(a) Retrato de fase do sistema (3.19), para $\mu = 0.051$, com tempo de integração $[0, 300]$ e as condições iniciais $(1, 1.01, 1)$ e $(1, 1.01, 1.01)$; neste caso, E_6 é um foco repulsor. (b) Órbita periódica criada a partir da bifurcação de Hopf.	66
4.1	(a) Retrato de fase do sistema (4.2) próximo ao equilíbrio P^* , nas condições da Proposição 4; com a condição inicial $(200, 460, 150)$ e tempo de integração $[0, 200]$. Os valores dos parâmetros são: $s = 0.1$, $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 2.4$, $k = 0.0027$, $T_{max} = 1500$, $N = 10$, $r = 2$ e $\sigma_1 = 0.8$. (b) Coordenada V	74
4.2	Curvas S (verde) e H (azul).	80
4.3	Órbita periódica atratora para os valores de parâmetros do Teorema 24. (a) No espaço (T, T^*, r) . (b) No plano (V, r)	82

4.4	Retrato de fase do sistema (4.2) próximo ao equilíbrio P^* , com a condição inicial $(200, 220, 150)$, tempo de integração $[0, 200]$. (a) P^* é um foco atrator para $r = 1$ e $\sigma_1 = 0.5$. (b) P^* é um foco atrator fraco para $r = 1$ e $\sigma_1 = 0.8$	83
4.5	(a) Órbita periódica atratora criada no sistema (4.2) a partir da bifurcação de Hopf. Condição inicial $(200, 220, 150)$ e os parâmetros $r = 1$ e $\sigma_1 = 0.9$. Tempo de integração $[2000, 2100]$. (b) Comportamento da coordenada $V(t)$. Tempo de integração $[0, 300]$	83
4.6	Projeção da órbita periódica no plano xy em vários estágios (a) – (i), da variação crescente de r para $\sigma_1 = 0.9$ fixo; iniciando (a) com $r \approx 0.1194141205$ e terminando (i) com $r \approx 1.337185031$	84

Sumário

Introdução	10
1 Resultados Preliminares	13
1.1 Campos vetoriais, equivalência e conjugação	13
1.2 Conjuntos invariantes	15
1.3 O problema da estabilidade global	18
2 Bifurcação de Hopf	23
2.1 Forma normal da bifurcação de Hopf	23
2.2 Teorema da bifurcação de Hopf	26
2.3 Método da projeção	36
2.4 Condição de transversalidade	41
3 Sistemas do Tipo Predador-Presa	43
3.1 Modelo Predador-Presa clássico	43
3.2 Bifurcação de Hopf em um modelo Predador-Presa em $\mathbb{R}^2$	44
3.3 Estudo de um modelo Predador-Presa em $\mathbb{R}^3$	51
3.4 Bifurcação de Hopf em um modelo Predador-Presa em $\mathbb{R}^3$	60
4 Dinâmica Global e Bifurcação de Hopf em um Modelo de HIV	67
4.1 Uma visão geral e o modelo escolhido	67
4.2 Modelo de HIV com tratamento RT	69
4.3 Estabilidade de P_0	71
4.4 Estabilidade global de P^*	73
4.5 Bifurcação de Hopf e simulações numéricas	79
5 Considerações Finais	85
Referências Bibliográficas	87
F Cálculo do Primeiro Coeficiente de Lyapunov (sistema (3.6))	89
G Cálculo do Primeiro Coeficiente de Lyapunov (sistema (4.2))	93

Introdução

Provavelmente a história das aplicações da Matemática em ecologia teve início com o livro “*An essay on the principle of population*”, escrito por Thomas Malthus em 1798. Nele é mencionado pela primeira vez que uma população com oportunidade para reprodução cresce exponencialmente no tempo. Usando a notação moderna, a dinâmica de uma população x sem limitações de recursos pode ser descrita pela equação

$$\dot{x} = ax, \quad (0.1)$$

onde $a > 0$ é a taxa de crescimento da população. Segundo esta equação, o crescimento é exponencial, uma vez que tem a solução $x(t) = x_0 e^{at}$, para uma população inicial $x(0) = x_0$.

O passo seguinte neste campo foi a introdução do modelo de uma população que é restrita no tamanho por alguns recursos necessários que são limitados. A dinâmica de tal população foi descrita por Verhülst (1838) através da equação

$$\dot{x} = \frac{ax(K - x)}{K}, \quad (0.2)$$

que é conhecida como equação logística, na qual $a > 0$ é a taxa de crescimento da população e $K > 0$ é o tamanho estacionário da população, determinado pelos recursos disponíveis.

Essas equações foram usadas para descrever apenas a dinâmica de uma única população, e somente na década de 1920 tiveram início os primeiros estudos matemáticos destinados a descrever as interações entre populações (Bazykin [2]). É nesta época que surge o primeiro modelo matemático destinado a descrever duas populações interagindo, com os trabalhos de Alfred J. Lotka (1880-1949) e Vito Volterra (1860-1940). O modelo proposto, hoje conhecido como modelo Lotka-Volterra, é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy, \\ \dot{y} &= -cy + dxy. \end{aligned} \quad (0.3)$$

No capítulo 2 apresentamos um estudo deste modelo, destacando o significado das constantes a , b , c e d . Vale ressaltar que, com o passar do tempo, várias modificações foram

e ainda continuam sendo feitas, adaptando tal modelo a diversos contextos de aplicação. Estes modelos são comumente chamados de modelos predador-presa.

Após um longo período de pausa neste campo da ciência, um novo estágio de intenso desenvolvimento da ecologia matemática surgiu a partir da década de 1960 e continua até hoje. Na realidade, o progresso na computação e o bem sucedido uso de computadores para resolver problemas em várias áreas, levou a natural esperança de que eles também podiam ser aplicados em problemas relacionados à ecologia (Bazykin [2]). De fato, hoje o computador é uma importante ferramenta de apoio no estudo de sistemas de equações diferenciais ordinárias aplicados à ecologia em geral.

A motivação deste trabalho se dá devido aos modelos de interações entre espécies, e em especial os do tipo predador-presa, serem, na atualidade, amplamente utilizados para descrever diversos fenômenos biológicos, principalmente aqueles relacionados à saúde humana. Somente neste caso, são vários os modelos criados com a finalidade de ajudar a entender e prever, por exemplo, a propagação de infecções, epidemias e vírus; o desenvolvimento do câncer e do HIV sob diversos tipos de aplicações de tratamentos, e de várias outras situações nas quais a matemática se mostra uma importante ferramenta para o desenvolvimento científico.

Neste trabalho, estudamos a dinâmica de alguns sistemas predador-presa a partir de uma abordagem qualitativa, voltando nossa atenção para a análise da estabilidade global e das bifurcações das soluções. Em particular, estudamos com detalhes a bifurcação de Hopf, caracterizada pela mudança de estabilidade de um equilíbrio, que leva ao surgimento de soluções periódicas. Tal fenômeno é observado em vários trabalhos que tratam de modelos biológicos (ver por exemplo, [3], [7], [23] e [24]).

O presente trabalho está organizado da seguinte forma. Nos capítulos 1 e 2, apresentamos a fundamentação teórica necessária ao desenvolvimento do texto, sendo que no primeiro capítulo apresentamos uma síntese dos principais resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, incluindo um critério para estudo da estabilidade global, desenvolvido por Li e Muldowney [16]. O segundo capítulo é integralmente dedicado à bifurcação de Hopf, que é abordada utilizando-se o método da projeção [12]. No capítulo 3 estudamos alguns sistemas do tipo predador-presa, no plano e no espaço, seguindo o que é apresentado em [2] e [9]. No capítulo 4, como uma aplicação da teoria estudada nos capítulos anteriores, fazemos uma análise de um sistema tridimensional, elaborado com base nos sistemas de Lotka-Volterra, que constitui um modelo de infecção pelo vírus HIV com tratamento, proposto por Wang [23]. Para este modelo, fazemos uma análise da estabilidade global de um ponto de equilíbrio específico, com base no método proposto por Li e Muldowney [16] e provamos a ocorrência de uma dupla bifurcação de Hopf, que leva ao surgimento e posterior desaparecimento de um ciclo limite, conforme variamos um dos parâmetros envolvidos no sistema. Mostramos assim, em parte analítica e em parte numericamente, o *nascimento e morte* de um ciclo limite, via bifurcações de Hopf.

Além do estudo teórico descrito anteriormente, desenvolvemos no decorrer do trabalho simulações computacionais, desenvolvidas com o software MAPLE, que auxiliam na descrição dos retratos de fase e também no estudo das bifurcações.

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentamos, de forma sucinta, alguns resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias que se aplicam no estudo de sistemas não lineares do tipo $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Estamos interessados principalmente no que se refere a estabilidade dos pontos de equilíbrio de tais sistemas, obtidos resolvendo-se a equação $\dot{x} = f(x) = 0$. Neste sentido, na primeira e segunda seções damos algumas definições e relembramos resultados importantes, como o Teorema de Hartman-Grobman, o Teorema da Variedade Estável, o Teorema de Poincaré-Bendixson e os Critérios de Bendixson e de Dulac, sendo estes três últimos relativos especificamente ao caso de sistemas planares, isto é, considerando-se $x \in \mathbb{R}^2$. Na terceira seção, apresentamos um critério de estabilidade global desenvolvido recentemente por Li e Muldowney [16], que é uma extensão para sistemas definidos no $\mathbb{R}^n$ do critério de Bendixson clássico em $\mathbb{R}^2$ e que será utilizado para o estudo da estabilidade global do equilíbrio de um sistema de HIV com tratamento, no último capítulo do trabalho.

1.1 Campos vetoriais, equivalência e conjugação

Para a elaboração desta seção, a qual é destinada a apresentação de alguns conceitos e resultados fundamentais da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, nos baseamos nos trabalhos de Doering [5] e Sotomayor [22].

Seja Δ um subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ em Δ é uma aplicação $f : \Delta \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^n$. Ao campo vetorial f associamos a equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

onde o ponto denota a derivada com relação à variável t .

As soluções da equação (1.1) são aplicações diferenciáveis $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Delta$ tais que

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(\phi(t)),$$

para todo $t \in I$, onde representamos por $\phi(t, y) = \phi_t(y)$ a solução de f por y , isto é, $\phi(0, y) = y$. Também dizemos que o conjunto $\gamma_y = \{\phi(t, y) : t \in I\} \subseteq \Delta$, isto é, a imagem da solução de (1.1) por y , é a *órbita* de f por y . A decomposição de Δ em órbitas de f é chamada de retrato de fase de f .

Um *ponto de equilíbrio* do campo f é um ponto $x_0 \in \Delta$ no qual $f(x_0) = 0$. Um ponto em que o campo não é nulo é chamado de *ponto regular*.

Definição 1. A aplicação $\phi : I \times \Delta \rightarrow \Delta$ tal que $\phi(t, x)$ é a solução de (1.1) com $\phi(0, x) = x$, chama-se *fluxo gerado por f* .

Definição 2. Dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio estável para f se, para qualquer vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que $W \subseteq \Delta \cap U$ e $\phi(t, x) \in U$, para quaisquer $x \in W$ e $t > 0$.

Definição 3. Dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para f se, além de ser estável, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x_0$, para qualquer $x \in W$.

Se x_0 não é um ponto de equilíbrio estável, dizemos que ele é instável.

Consideramos dois campos vetoriais como equivalentes se seus retratos de fase são qualitativamente semelhantes, em outras palavras, se um retrato de fase pode ser obtido a partir do outro por uma transformação contínua (ver Figura 1.1). Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 4. Sejam f_1 e f_2 campos vetoriais definidos nos abertos Δ_1 e Δ_2 de $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Diz-se que f_1 é topologicamente equivalente (C^r -equivalente) a f_2 quando existe um homeomorfismo (difeomorfismo de classe C^r) $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ que leva órbitas de f_1 em órbitas de f_2 preservando a orientação. Mais precisamente, sejam $y \in \Delta_1$ e $\gamma^1(y)$ a órbita orientada de f_1 passando por y ; então $h(\gamma^1(y))$ é a órbita orientada $\gamma^2(h(y))$ de f_2 passando por $h(y)$.

Definição 5. Sejam $\phi_1 : I_1 \times \Delta_1 \rightarrow \Delta_1$ e $\phi_2 : I_2 \times \Delta_2 \rightarrow \Delta_2$ os fluxos gerados pelos campos $f_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ respectivamente. Diz-se que f_1 é topologicamente conjugado (C^r -conjugado) a f_2 quando existe um homeomorfismo (difeomorfismo de classe C^r) $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ tal que $h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x))$ para todo $(t, x) \in I_1 \times \Delta_1$.

Definição 6. Um ponto de equilíbrio x_0 de um campo vetorial $f \in C^k$, $1 \leq k \leq \infty$ chama-se *hiperbólico* se todos os autovalores de $Df(x_0)$ têm parte real diferente de zero.

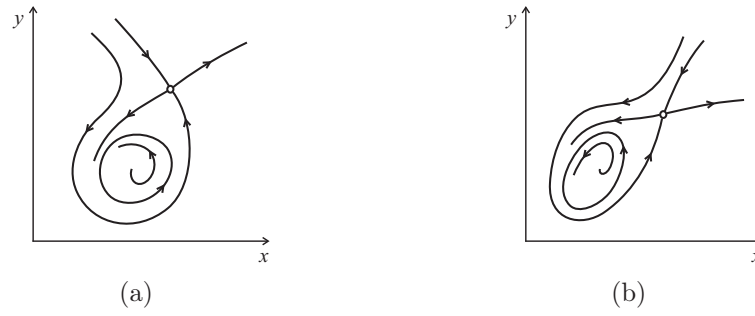


Figura 1.1: Ilustração de equivalência topológica.

O teorema a seguir, que é um dos resultados mais importantes da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, dá uma caracterização local dos pontos de equilíbrio hiperbólicos, do ponto de vista da conjugação topológica.

Teorema 1 (Teorema de Hartman-Grobman). *Seja $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 e $x_0 \in \Delta$ um ponto de equilíbrio hiperbólico de (1.1). Existem vizinhanças V de x_0 em Δ e W de 0 em $\mathbb{R}^n$ tais que $f|_V$ é topologicamente conjugado a $Df(x_0)|_W$.*

1.2 Conjuntos invariantes

Para não haver confusão e deixar n à vontade como indexador clássico de sequências, consideramos nesta seção campos de vetores em $\mathbb{R}^m$ em vez de $\mathbb{R}^n$. Também nesta seção seguimos basicamente as referências [5] e [22].

Definição 7. *Dizemos que um conjunto $C \subseteq \Delta$ é invariante pelo fluxo ϕ do campo f se $\phi_t(C) \subseteq C$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mais precisamente, dizemos que C é positivamente invariante se $\phi_t(C) \subseteq C$, para todo $t \geq 0$, e negativamente invariante se $\phi_t(C) \subseteq C$, para todo $t \leq 0$.*

O conjunto estável de um ponto de equilíbrio x_0 é o conjunto $W^s(x_0)$ dos pontos cujas trajetórias tendem à x_0 quando t tende para infinito, ou seja, $y \in W^s(x_0)$ se, e somente se, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, y) = x_0$. Analogamente, o conjunto instável de um ponto de equilíbrio x_0 é o conjunto $W^u(x_0)$ dos pontos tais que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, y) = x_0$. Na realidade, $W^s(x_0)$ é uma superfície de dimensão igual à dimensão do espaço vetorial gerado pelos autovetores da matriz jacobiana $Df(x_0)$, associados aos autovalores com parte real negativa. Nesse caso, o conjunto estável é denominado variedade estável. Lembremos que o conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^m$ é uma superfície imersa de classe C^1 e dimensão k se existe uma aplicação injetora $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que $g(\mathbb{R}^k) = S$ e a aplicação linear $Dg(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ é injetora para cada $x \in \mathbb{R}^k$. Vale o seguinte resultado.

Teorema 2 (Teorema da Variedade Estável). *Seja $x_0 \in E$ um equilíbrio hiperbólico do campo de vetores $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ definido no aberto $\Delta \subseteq \mathbb{R}^m$. A variedade estável $W^s(x_0)$ é uma superfície imersa de classe C^1 e o espaço tangente a $W^s(x_0)$ em x_0 é o subespaço*

vetorial de $\mathbb{R}^m$ gerado pelos autovetores associados aos autovalores de $Df(x_0)$ com parte real negativa.

Resultado análogo é válido para o conjunto instável $W^u(x_0)$.

Definição 8 (Conjuntos α -limite e ω -limite). *Sejam $f : \Delta \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ definido no aberto Δ e $\phi(t) = \phi(t, p)$ a órbita de f passando por p , definida no seu intervalo máximo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_-(p) = -\infty$ e $\omega_+(p) = \infty$, definimos os conjuntos α -limite e ω -limite de p por*

$$\omega(p) = \{q \in \Delta : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \phi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\};$$

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \phi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

O resultado seguinte dá algumas propriedades básicas dos conjuntos α e ω -limite.

Teorema 3. *Seja $f : \Delta \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ definido no aberto Δ , e sejam $\gamma^+(p) = \{\phi(t, p) : t \geq 0\}$ e $\gamma^-(p) = \{\phi(t, p) : t \leq 0\}$ as semi-órbitas positiva e negativa, respectivamente, do campo f pelo ponto p . Se $\gamma^+(p)$ (respectivamente, $\gamma^-(p)$) está contida num subconjunto compacto $K \subset \Delta$ então:*

- i. $\omega(p) \neq \emptyset$ (respectivamente, $\alpha(p)$);
- ii. $\omega(p)$ é compacto (respectivamente, $\alpha(p)$);
- iii. $\omega(p)$ é invariante por f , (respectivamente, $\alpha(p)$), isto é se $q \in \omega(p)$, então a órbita de f por q está contida em $\omega(p)$;
- iv. $\omega(p)$ é conexo (respectivamente, $\alpha(p)$).

O resultado a seguir, de elegância e profundidade ímpar, dá uma caracterização completa dos conjuntos ω -limite de órbitas limitadas de campos vetoriais planares, isto é, definidos no plano.

Teorema 4 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Seja $\phi(t) = \phi(t, p)$ uma órbita de f , definida para todo $t \geq 0$, tal que $\gamma^+(p)$ esteja contida num compacto $K \subset \Delta \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que o campo f possui um número finito de pontos de equilíbrio em $\omega(p)$. Têm-se as seguintes alternativas:*

- (a) *Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.*
- (b) *Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e de equilíbrio então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tendendo a um desses pontos de equilíbrio quando $t \rightarrow \pm\infty$.*
- (c) *Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto de equilíbrio.*

O seguinte teorema e a respectiva demonstração foram extraídos de [1].

Teorema 5 (Princípio de invariância de LaSalle). *Sejam $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções de classe C^1 . Seja S uma constante real tal que $\Omega_S = \{x \in \mathbb{R}^m : L(x) < S\}$ seja limitado. Admita que $\dot{L}(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega_S$ e defina $E = \{x \in \Omega_S : \dot{L}(x) = 0\}$. Seja B o maior conjunto invariante contido em E . Então, toda solução de (1.1) iniciando em Ω_S converge para B quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Sejam $y \in \Omega_S$ e $\phi(t, y)$ a solução da equação diferencial com $\phi(0, y) = y$. Seja $[0, t_+)$ o intervalo máximo de existência desta solução, enquanto permanece em Ω_S . Então $\dot{L}(\phi(t, y)) \leq 0$ neste intervalo e $L(\phi(t, y))$ é decrescente. Consequentemente $L(\phi(t, y)) \leq L(y) < S$. Isto implica que $t_+ = \infty$ e $\omega(y)$ está contido no conjunto $\{x \in \Omega_S : L(x) \leq L(y), \forall y \in \Omega_S\}$, o qual é um subconjunto compacto de Ω_S . Como $L(\phi(t, y))$ é decrescente e inferiormente limitada, $L(\phi(t, y)) \rightarrow \eta \in \mathbb{R}$, quando $t \rightarrow \infty$. Uma vez que $\omega(y)$ é um conjunto invariante de (1.1), tem-se que $L \equiv \eta$ em $\omega(y)$ e portanto $\dot{L} \equiv 0$ em $\omega(y)$. Conclui-se portanto que $\phi(t, y) \rightarrow \omega(y) \subset B$, quando $t \rightarrow \infty$. $\square$

Quando o domínio $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ do campo f é simplesmente conexo, o clássico Teorema de Green dá uma restrição sobre o tipo de campo vetorial que pode ter uma órbita periódica. Para enunciar esse resultado, lembramos que

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \operatorname{tr} Df,$$

ou seja, o traço da matriz jacobiana de f , é a *divergência* do campo $f = (f_1, f_2)$, que define uma função $\operatorname{div} f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 6 (Critério de Bendixson). *Se o campo $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^1 no aberto simplesmente conexo Δ de $\mathbb{R}^2$, tem uma órbita periódica, então ou $\operatorname{div} f$ é identicamente nula ou troca de sinal em Δ .*

Demonstração. Suponha que γ é uma órbita periódica de $f = (f_1, f_2)$ que está inteiramente contida em Δ , a qual é parametrizada pela solução de $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ por um ponto qualquer de γ , e tem período T . Se R denota o interior de γ , segue do Teorema de Green que

$$\iint_R \operatorname{div} f dx dy = \oint_{\gamma} (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \int_0^T (f_1 f_2 - f_2 f_1) dt = 0.$$

Como $f \in C^1$ em Δ , a divergência de f é contínua e, portanto, a igualdade

$$\iint_R \operatorname{div} f dx dy = 0,$$

garante que $\operatorname{div} f$ é identicamente nula ou troca de sinal em R . $\square$

Um resultado mais geral cuja demonstração pode ser encontrada em [20], é dado a seguir.

Teorema 7 (Critério de Dulac). *Seja $f : \Delta \rightarrow \Delta$, de classe C^1 , Δ aberto e simplesmente conexo em $\mathbb{R}^2$. Se existir uma função $H : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que, ou $\text{div}(Hf) < 0$ em Δ , ou $\text{div}(Hf) > 0$ em Δ , então (1.1) não possui órbita fechada em Δ . Se A é uma região anular em Δ tal que ou $\text{div}(Hf) < 0$ em Δ , ou $\text{div}(Hf) > 0$ em Δ , então existe no máximo um ciclo limite de (1.1) em A .*

Os teoremas 6 e 7 são bastante úteis e importantes no escopo da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. Porém, apresentam certa limitação, já que valem somente para campos vetoriais planares. Muitos trabalhos foram desenvolvidos com o objetivo de estender estes resultados para campos vetoriais (ou sistemas de equações diferenciais) definidos no $\mathbb{R}^n$, com $n > 2$. Na próxima seção, apresentamos um resultado obtido nesta linha de pesquisa.

1.3 O problema da estabilidade global

Consideremos o campo vetorial $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $f \in C^1$, ao qual associamos a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.2)$$

e continuamos denotando por $\phi(t, y)$ a solução de (1.2) tal que $\phi(0, y) = y$. No trabalho intitulado “*A geometric approach to global-stability problems*”, Li e Muldowney [16] apresentam um novo critério de estabilidade global, aplicável a sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomas n -dimensionais ou, equivalentemente, a campos vetoriais definidos no $\mathbb{R}^n$.

Relembremos aqui que um equilíbrio x_0 de (1.2) é dito globalmente assintoticamente estável, ou simplesmente globalmente estável, com respeito a um conjunto aberto $\Delta_1 \subset \Delta$, se ele é localmente assintoticamente estável e sua bacia de atração contém Δ_1 , ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(y) = x_0$, para qualquer $y \in \Delta_1$.

A estabilidade local de um equilíbrio pode ser verificada de forma relativamente simples, através da linearização do sistema. De fato, uma condição suficiente mas não necessária, para que um ponto de equilíbrio seja localmente assintoticamente estável, é que todos os autovalores da matriz jacobiana do sistema, calculada neste equilíbrio, tenham parte real negativa. No entanto, sabemos que a estabilidade global nem sempre é obtida como consequência da estabilidade local e, portanto, para uma análise global se faz necessário o uso de outros métodos. Neste particular, o método mais comumente utilizado é o de funções de Lyapunov (ver por exemplo [22]). Porém, sua aplicação é em geral difícil de ser utilizada, dada a dificuldade de se obter funções de Lyapunov globais, não havendo uma técnica geral para a construção de tais funções.

No que segue, apresentaremos resumidamente o método desenvolvido em [16] para estudo da estabilidade global de um ponto de equilíbrio de um sistema do tipo (1.2).

Definição 9. Dizemos que um conjunto K é absorvente em Δ para o sistema (1.2), se $\phi(t, K_1) \subset K$ para cada conjunto compacto $K_1 \subset \Delta$, e t suficientemente grande.

Problema 1 (O problema da estabilidade global). Assuma que

(H1). Δ é simplesmente conexo;

(H2). Existe um conjunto compacto absorvente $K \subset \Delta$;

(H3). x_0 é o único equilíbrio de (1.2) em Δ .

Encontrar condições sob as quais a estabilidade local de x_0 implica em sua estabilidade global, com respeito a Δ .

Definição 10. Um ponto $x \in \Delta$ é errante para (1.2) se existe uma vizinhança U de x e $T > 0$ tais que $U \cap \phi(t, U) = \emptyset$ para todo $t > T$. Um ponto $x \in \Delta$ é dito não-errante se para toda vizinhança U de x e $T > 0$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $t > T$ e $U \cap \phi(t, U) \neq \emptyset$.

Definição 11. Uma função $g \in C^1(\Delta \rightarrow \mathbb{R}^n)$ é dita uma ε -perturbação local de f em $x \in \Delta$, se existe uma vizinhança aberta U de x em Δ tal que o suporte $\text{supp}(f - g) \subset U$ e $\|f - g\|_{C^1} < \varepsilon$, onde

$$\|f - g\|_{C^1} = \sup \left\{ \|f(x) - g(x)\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x) - \frac{\partial g}{\partial x}(x) \right\| : x \in \Delta \right\},$$

e $\|\cdot\|$ denota uma norma vetorial em $\mathbb{R}^n$ e também denota a norma de matrizes em $\mathbb{R}^{n \times n}$, isto é, o espaço de todas as matrizes $n \times n$.

Para tal g consideramos a correspondente equação diferencial

$$\dot{x} = g(x). \quad (1.3)$$

Lema 1 (Closing Lemma). Seja $f \in C^1(\Delta \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Suponha que x é um ponto não-errante para (1.2) e que $f(x) \neq 0$. Então, para cada vizinhança U de x e $\varepsilon > 0$, existe uma ε -perturbação local C^1 g de f em x tal que

1. $\text{supp}(f - g) \subset U$ e
2. o sistema (1.3) tem uma solução periódica não-constante, cuja trajetória passa por x .

Um critério de Bendixson para (1.2) é uma condição satisfeita por f que impede a existência de soluções periódicas não-constantes para esse sistema (por exemplo, no $\mathbb{R}^2$

temos os critérios de Bendixson e Dulac vistos anteriormente); tal critério é *robusto sob perturbações locais* C^1 de f em x se, para cada $\varepsilon > 0$ e vizinhança U de x , suficientemente pequenos, ele é satisfeito para toda ε -perturbação local C^1 g de f , tal que $\text{supp}(f-g) \subset U$.

Observemos que o fato de o sistema (1.2) satisfazer um critério de Bendixson é fundamental para a prova da estabilidade global de um equilíbrio x_0 . Com efeito, se existir uma órbita periódica (ou outro conjunto invariante disjunto de x_0) então x_0 não pode ser um atrator global.

No trabalho de Li e Muldowney [16] são apresentados como exemplos, alguns critérios de Bendixson, inclusive o resultado clássico de Bendixson em $\mathbb{R}^2$. No que segue nos deteremos apenas no que será a base para o desenvolvimento do resultado principal desta seção.

A *medida de Lozinskiĭ*, com respeito a uma norma vetorial $\|\cdot\|$ qualquer, é uma aplicação $\mu : \mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada matriz E de ordem $N \times N$ um número real $\mu(E)$, e é definida como

$$\mu(E) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I + hE\| - 1}{h}.$$

Esta medida tem sido usada para a estimação de autovalores de matrizes (Coppel [4]).

Seja X uma matriz $n \times n$ em $\mathbb{R}^{n \times n}$. A segunda componente aditiva de X , denotada por $X^{[2]}$, é uma matriz $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ tal que, se $X = (x_{ij})$ é uma matriz 3×3 , então

$$X^{[2]} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{22} & x_{23} & -x_{13} \\ x_{32} & x_{11} + x_{33} & x_{12} \\ -x_{31} & x_{21} & x_{22} + x_{33} \end{pmatrix}.$$

Mais detalhes a respeito dessa classe de matrizes podem ser encontrados em [15].

Seja $P : \Delta \rightarrow P(x)$ uma função com valor matricial $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ que é C^1 em Δ e seja μ a medida de Lozinskiĭ em $\mathbb{R}^{N \times N}$, onde $N = \binom{n}{2}$. Sob as hipóteses **(H1)** e **(H2)** do Problema 1, é provado em [14] que, se $\delta > 0$ e

$$\mu \left(P_f P^{-1} + P \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x} P^{-1} \right) \leq -\delta < 0 \quad \text{em } K, \quad (1.4)$$

então nenhuma curva retificável fechada simples em Δ pode ser invariante com respeito ao fluxo de (1.2). Aqui P_f é a matriz obtida trocando cada elemento p_{ij} em P , por sua derivada direcional na direção do campo f

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x} \cdot f(x) = \langle \text{grad}(p_{ij}), f(x) \rangle,$$

e $\partial f^{[2]}/\partial x$ é a segunda componente aditiva de $\partial f/\partial x$. A condição (1.4) exclui não só trajetórias periódicas, mas também trajetórias homoclínicas e heteroclínicas uma vez que cada caso dá origem a uma curva invariante retificável fechada simples.

Seja $V : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Então a condição

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \langle \text{grad}(V(x)), f(x) \rangle < 0 \text{ se } f(x) \neq 0 \quad (1.5)$$

é um critério de Bendixon, já que $V(x)$ é estritamente decrescente ao longo de cada solução de (1.2). Tal função é geralmente chamada de *função global de Lyapunov* para (1.2).

Suponha que f satisfaz um critério de Bendixon que é robusto sob perturbações locais C^1 em todos os pontos regulares não-errantes de (1.2). Então para cada ε -perturbação local C^1 g de f em tal ponto não-errante, quando ε é suficientemente pequeno, (1.3) não pode ter qualquer solução periódica não-constante. Portanto o Lema 1 implica que todo ponto regular de (1.2) deve ser errante. Assim temos o seguinte resultado.

Proposição 1. *Suponha que um critério de Bendixon para (1.2) é robusto sob perturbações locais C^1 de f em todo ponto regular não-errante de (1.2). Então todo ponto não-errante para (1.2) é um ponto de equilíbrio.*

Supondo $\Delta = \mathbb{R}^n$ e todas as soluções de (1.2) limitadas para $t \geq 0$. Então para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x)$ é não vazio e compacto. Se assumirmos que (1.2) tem um único equilíbrio x_0 em $\mathbb{R}^n$, então as condições da Proposição 1 implicam que $\omega(x) = x_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se x_0 também é estável, então ele é globalmente estável com respeito a Δ . Isto fornece uma solução para o problema da estabilidade global.

Teorema 8 (Princípio da estabilidade global). *Assuma que*

1. $\Delta = \mathbb{R}^n$ e todas as soluções de (1.2) são limitadas para $t \geq 0$,
2. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é o único equilíbrio de (1.2) em $\mathbb{R}^n$, e
3. (1.2) satisfaz um critério de Bendixon que é robusto sob perturbações locais C^1 de f em cada ponto não-errante x_1 tal que $f(x_1) \neq 0$.

Então x_0 é globalmente estável em $\mathbb{R}^n$, desde que seja estável.

Se $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto, então o Teorema 8, também é válido sob a hipótese **(H2)** do Problema 1, que Δ contém um conjunto compacto absorvente K . Neste caso, a trajetória de cada solução de (1.2) entra em K e, ficando confinada neste conjunto, ela não tende para o bordo de Δ . A condição (3) do Teorema 8 implica que seu conjunto ω -limite é o equilíbrio $\{x_0\}$. Portanto, temos a seguinte versão local do Teorema 8.

Teorema 9. *Suponha que as hipóteses **(H2)** e **(H3)** do Problema 1 são mantidas e que (1.2) satisfaz um critério de Bendixon que é robusto sob perturbações locais C^1 de f em todo ponto regular não-errante para (1.2). Então x_0 é globalmente assintoticamente estável com respeito a Δ , desde que seja estável.*

Em muitos casos, um critério de Bendixson implicaria que o único equilíbrio x_0 é localmente estável. Este é o caso para as condições (1.4) e (1.5). O seguinte resultado que contém o resultado clássico de estabilidade global de Lyapunov, foi provado em [15].

Teorema 10. *Sob as hipóteses (H1), (H2) e (H3), x_0 é globalmente assintoticamente estável em Δ , desde que a condição (1.4) ou (1.5) seja satisfeita.*

Assuma que (1.2) tem um conjunto compacto absorvente $K \subset \Delta$. Então toda solução $\phi(t, x)$ de (1.2) existe para todo $t > 0$. A seguinte quantidade está bem definida

$$\bar{q}_2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(B(\phi(s, x))) ds, \quad (1.6)$$

onde

$$B = P_f P^{-1} + P \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x} P^{-1}, \quad (1.7)$$

e P é uma função como em (1.4).

Em [16] é provado o seguinte resultado.

Teorema 11. *Sob as hipóteses (H1) e (H2) do Problema 1, se*

$$\bar{q}_2 < 0, \quad (1.8)$$

então nenhuma curva retificável fechada simples em Δ pode ser invariante com respeito ao fluxo de (1.2). Em particular (1.8) é um critério de Bendixson para (1.2).

Temos então o seguinte resultado, cuja prova se encontra em [16].

Teorema 12. *Sob as hipóteses (H1), (H2) e (H3), o único equilíbrio x_0 é globalmente estável em Δ se $\bar{q}_2 < 0$.*

Bifurcação de Hopf

Neste capítulo apresentamos um estudo da bifurcação de Hopf para famílias a um parâmetro de equações do tipo $\dot{x} = f(x, \mu)$, onde $\mu \in \mathbb{R}$. Iniciamos com o caso bidimensional, o qual é mais conhecido e mais simples. Em seguida estendemos o estudo para sistemas n -dimensionais, utilizando o método da projeção. O capítulo está baseado no livro clássico de Kuznetsov [12], e em [6] e [7].

2.1 Forma normal da bifurcação de Hopf

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais dependendo de um parâmetro real μ

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Suponhamos que, para qualquer $\mu \in \mathbb{R}$, a origem $(x_1, x_2) = (0, 0)$ é ponto de equilíbrio de (2.1) com a matriz jacobiana dada por

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix},$$

que possui autovalores $\lambda_1 = \mu + i$ e $\lambda_2 = \mu - i$. Introduzindo a variável complexa $z = x_1 + ix_2$, podemos reescrever (2.1), na sua forma complexa

$$\dot{z} = (\mu + i)z \pm z|z|^2. \quad (2.2)$$

Usando a representação $z = \rho e^{i\theta}$, obtemos

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\theta} + \rho i\dot{\theta}e^{i\theta}, \quad (2.3)$$

por conseguinte,

$$\dot{\rho}e^{i\theta} + \rho i\dot{\theta}e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}(\mu + i \pm \rho^2). \quad (2.4)$$

Assim, é possível escrever (2.1) em sua forma polar

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\mu \pm \rho^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A partir da primeira equação de (2.5), percebemos que $\rho = 0$ é um ponto de equilíbrio, qualquer que seja o valor de $\mu \geq 0$. Outro ponto de equilíbrio irá existir para determinados valores de μ , dependendo do sinal do termo cúbico em (2.5). Supondo, por exemplo, (2.5) com o sinal negativo

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\mu - \rho^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nesse caso, para $\mu > 0$, $\rho(\mu) = \sqrt{\mu}$ é um ponto de equilíbrio da primeira equação, descrevendo uma órbita periódica circular percorrida com velocidade constante no sentido anti-horário. Assim, a origem é um foco atrator para $\mu < 0$, foco repulsor para $\mu > 0$ e para o valor crítico $\mu = 0$ temos um foco atrator “fraco”. Quando $\mu > 0$, a origem fica isolada por uma órbita fechada (ciclo limite) que é única, atratora e centrada na origem. Assim sendo, todas as órbitas internas ou externas a este ciclo, com exceção da origem, tendem ao ciclo limite quando $t \rightarrow +\infty$ (ver Figura 2.1).

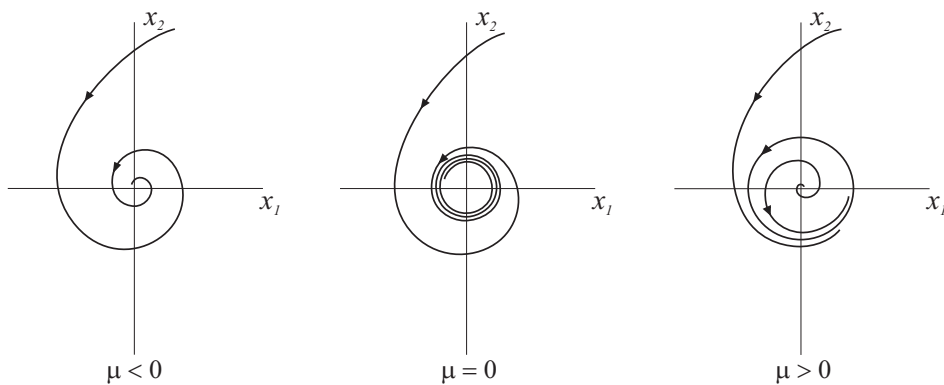


Figura 2.1: Bifurcação de Hopf supercrítica.

O surgimento da órbita periódica e a mudança de estabilidade do foco a partir da perturbação do sistema, com o parâmetro μ , é o que chamamos de *Bifurcação de Hopf Supercrítica*. Este fenômeno também pode ser representado no espaço (x_1, x_2, μ) (ver

Figura 2.2), onde podemos visualizar o “nascimento” da órbita periódica atratora quando, de uma forma crescente, μ passa pelo seu valor crítico. Agora, considerando (2.5) com o

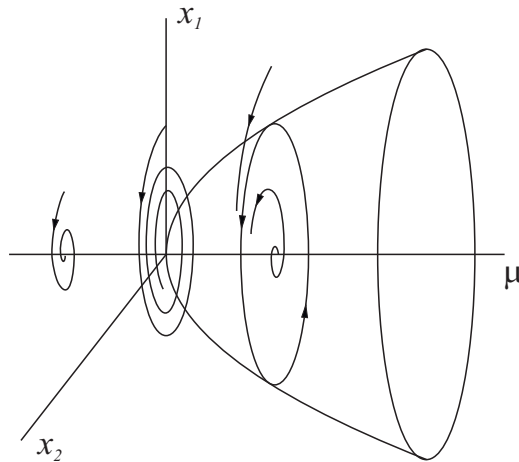


Figura 2.2: Bifurcação de Hopf supercrítica no espaço (x_1, x_2, μ) .

sinal positivo temos,

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(\mu + \rho^2), \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\tag{2.7}$$

A análise do sistema (2.7) com sinal positivo é análoga, e pode ser encontrada em Kuznetsov [12]. Neste caso a bifurcação de Hopf é dita *Subcrítica*, e é caracterizada pelo desaparecimento de uma órbita periódica repulsora que ocorre quando passamos pelo valor crítico do parâmetro μ .

Definição 12. *Os sistemas (2.5), ou equivalentemente, (2.6) e (2.7), são denominados formas normais das bifurcações de Hopf.*

Considere agora o caso em que (2.1) tem sinal dos termos de terceira ordem negativo,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.\tag{2.8}$$

A demonstração do Lema a seguir pode ser encontrada em [12].

Lema 2. *O sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4),\tag{2.9}$$

onde $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = x_1^2 + x_2^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $O(\|x\|^4)$ representa os termos de ordem maior ou igual a 4, dependendo suavemente de μ , é localmente topologicamente equivalente em uma vizinhança da origem ao sistema (2.8).

2.2 Teorema da bifurcação de Hopf

Como vimos na seção anterior, o sistema (2.1) representa a forma normal da bifurcação de Hopf, cujo sinal dos termos de terceira ordem determinam o tipo da bifurcação: supercrítica ou subcrítica. Nesta seção encontraremos condições para que um sistema qualquer seja topologicamente conjugado à forma normal apresentada.

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

com f suave, tendo para $\mu = 0$ o equilíbrio x_0 com autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. De acordo com o Teorema da Função Implícita, como $\lambda = 0$ não é um autovalor da matriz Jacobiana, o sistema possui um único equilíbrio $x_0(\mu)$ em uma vizinhança da origem para todo $|\mu|$ suficientemente pequeno. Nesse caso, através de uma mudança de coordenadas, podemos levar este equilíbrio para a origem, de modo que, assumimos sem perda de generalidade, que $x = x_0$ é o equilíbrio do sistema para $|\mu|$ suficientemente pequeno.

Assim, temos que o sistema pode ser escrito como

$$\dot{x} = A(\mu)x + F(x, \mu), \tag{2.10}$$

onde F é uma função suave cujos componentes $F_{1,2}$, tem expansão de Taylor em x começando com, pelo menos, os termos de segunda ordem. A matriz Jacobiana $A(\mu)$ pode ser escrita como

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} a(\mu) & b(\mu) \\ c(\mu) & d(\mu) \end{pmatrix},$$

com seus elementos sendo funções suaves de μ . Os autovalores de $A(\mu)$, são as raízes da equação característica

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

onde, $\sigma = \sigma(\mu) = a(\mu) + d(\mu) = \text{tr}A(\mu)$, e $\Delta = \Delta(\mu) = a(\mu)d(\mu) - b(\mu)c(\mu) = \det A(\mu)$.

Então,

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \frac{1}{2} \left(\sigma(\mu) \pm \sqrt{\sigma^2(\mu) - 4\Delta(\mu)} \right).$$

A condição para a bifurcação de Hopf implica em

$$\sigma(0) = 0, \quad \Delta(0) = \omega_0^2 > 0.$$

Para $|\mu|$ pequeno, temos que

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{2}\sigma(\mu), \quad \omega(\mu) = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2(\mu) - 4\Delta(\mu)},$$

obtendo assim, a seguinte representação para os autovalores

$$\lambda_1(\mu) = \lambda(\mu), \quad \lambda_2(\mu) = \bar{\lambda}(\mu),$$

em que,

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu), \quad \alpha(0) = 0 \text{ e } \omega(0) = \omega_0 > 0.$$

Lema 3. *Introduzindo uma variável complexa z , o sistema (2.10) pode ser escrito, para $|\mu|$ suficientemente pequeno, em uma única equação da forma:*

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + g(z, \bar{z}, \mu), \quad (2.11)$$

onde $g = O(\|z\|^2)$ é uma função suave de $(z, \bar{z}, \mu)$.

Demonstração. Seja $q(\mu) \in \mathbb{C}^2$ um autovetor complexo de $A(\mu)$ correspondente ao autovalor $\lambda(\mu)$, dado por:

$$A(\mu)q(\mu) = \lambda(\mu)q(\mu),$$

e seja $p(\mu) \in \mathbb{C}^2$ um autovetor da matriz transposta $A^T(\mu)$ correspondente ao seu autovalor $\bar{\lambda}(\mu)$, isto é,

$$A^T(\mu)p(\mu) = \bar{\lambda}(\mu)p(\mu).$$

É sempre possível normalizar p em relação a q , de modo que

$$\langle p(\mu), q(\mu) \rangle = 1, \quad (2.12)$$

em que $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$ é o produto interno usual em $\mathbb{C}^2$. Assim, qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^2$ pode ser representado unicamente como

$$x = zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \quad (2.13)$$

para todo μ pequeno, e para algum número complexo z . Aplicando o produto escalar em ambos os membros de (2.13), obtemos

$$\langle p, x \rangle = \langle p, zq + \bar{z}\bar{q} \rangle = \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle = z \langle p, q \rangle + \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle.$$

Da igualdade (2.12), temos $\langle p, q \rangle = 1$, e a partir de

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \left\langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \langle p, \bar{q} \rangle \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

podemos concluir que

$$\langle p, \bar{q} \rangle = 0, \quad (2.14)$$

pois $\omega(\mu) > 0$, para $|\mu|$ suficientemente pequeno, e assim $\lambda \neq \bar{\lambda}$.

Temos então, a seguinte fórmula para determinarmos z :

$$z = \langle p(\mu), x \rangle. \quad (2.15)$$

Assim, utilizando (2.10), (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15) temos que a variável complexa z satisfaz a equação

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \langle p(\mu), \dot{x} \rangle \\ &= \langle p, Ax + F(x) \rangle \\ &= \langle p, Ax \rangle + \langle p, F(x) \rangle \\ &= \langle p, A(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \langle p, A(zq) \rangle + \langle p, A(\bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \langle p, z\lambda q \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{\lambda}\bar{q} \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \lambda z \langle p, q \rangle + \bar{\lambda}\bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \lambda(\mu)z + \langle p(\mu), F(zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \mu) \rangle, \end{aligned}$$

obtendo assim, a equação (2.11), com $g(z, \bar{z}, \mu) = \langle p(\mu), F(zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \mu) \rangle$. $\square$

Escrevendo g em série de Taylor nas duas variáveis complexas (z e $\bar{z}$), temos que

$$g(z, \bar{z}, \mu) = \sum_{k+\ell \geq 2} \frac{1}{k!\ell!} g_{k\ell}(\mu) z^k \bar{z}^\ell,$$

em que,

$$g_{k\ell}(\mu) = \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial z^k \partial \bar{z}^\ell} \langle p(\mu), F(zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \mu) \rangle \Big|_{z=0},$$

para $k + \ell \geq 2$, $k, \ell = 0, 1, \dots$.

Suponha que, para $\mu = 0$, a função $F(x, \mu)$ de (2.10) seja representada como

$$F(x, 0) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4),$$

em que, $B(x, y)$, $C(x, y, u)$, são funções multilineares simétricas de $x, y, u \in \mathbb{R}^2$. Em coordenadas, temos

$$\begin{aligned} B_i(x, y) &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k, \\ C_i(x, y, u) &= \sum_{j,k,\ell=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_\ell} \Big|_{\xi=0} x_j y_k u_\ell, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Então,

$$B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}),$$

e

$$C(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^3 C(q, q, q) + 3z^2 \bar{z} C(q, q, \bar{q}) + 3z \bar{z}^2 C(q, \bar{q}, \bar{q}) + \bar{z}^3 C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}),$$

em que, $q = q(0)$, $p = p(0)$. Logo, os coeficientes de Taylor g_{kl} , $k + l = 2$ dos termos quadráticos em $g(z, \bar{z}, 0)$ podem ser expressos pelas seguintes fórmulas,

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

e dos termos cúbicos por

$$g_{30} = \langle p, C(q, q, q) \rangle, \quad g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{12} = \langle p, C(q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{03} = \langle p, C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle.$$

A seguir faremos mudanças de coordenadas (complexas) não-lineares a fim de simplificar a equação (2.11). Primeiramente, iremos remover todos os termos quadráticos, utilizando o seguinte lema.

Lema 4. *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3), \quad (2.16)$$

em que, $\lambda = \lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$, $\alpha(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\mu)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenadas complexas

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2,$$

para $|\mu|$ suficientemente pequeno, na equação sem termos quadráticos

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3).$$

Demonstração. A mudança de variável inversa é dada por

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3).$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z} - h_{20}z\dot{z} - h_{11}(\bar{z}\dot{z} + z\dot{\bar{z}}) - h_{02}\bar{z}\dot{\bar{z}} + \dots \\
&= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20}\right)z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda}h_{11})z\bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda}h_{02}\right)\bar{z}^2 + \dots \\
&= \lambda w + \frac{1}{2}(g_{20} - \lambda h_{20})w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda}h_{11})w\bar{w} + \frac{1}{2}(g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda)h_{02})\bar{w}^2 + O(|w|^3).
\end{aligned}$$

Escolhendo

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}} \quad \text{e} \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda},$$

os termos quadráticos de (2.16) são eliminados. Essas substituições são sempre possíveis, pois, os denominadores são sempre diferentes de zero, para $|\mu|$ suficientemente pequeno, uma vez que, $\lambda(0) = i\omega_0$, com $\omega_0 > 0$. $\square$

No que segue, assumindo que todos os termos quadráticos já foram removidos, também tentaremos eliminar todos os termos cúbicos via mudança de variáveis. Veremos que isso não é possível devido a um termo “resistente”.

Lema 5. *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4), \quad (2.17)$$

em que, $\lambda = \lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$, $\alpha(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\mu)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenadas complexa

$$z = w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3,$$

para todo $|\mu|$ suficientemente pequeno, na equação com apenas um termo cúbico,

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4),$$

onde, $c_1 = c_1(\mu)$.

Demonstração. Seja a transformação inversa,

$$w = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2} z^2 \dot{z} - \frac{h_{21}}{2} (2z\bar{z}\dot{z} + z^2 \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{12}}{2} (\dot{z}\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2} \bar{z}^2 \dot{\bar{z}} + \dots \\
&= \lambda z + \left(\frac{g_{30}}{6} - \lambda \frac{h_{30}}{2} \right) z^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \bar{\lambda} \frac{h_{21}}{2} \right) z^2 \bar{z} + \left(\frac{g_{12}}{2} - \lambda \frac{h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) z \bar{z}^2 \\
&\quad + \left(\frac{g_{03}}{6} - \bar{\lambda} \frac{h_{03}}{2} \right) \bar{z}^3 + \dots \\
&= \lambda w + \frac{1}{6} (g_{30} - 2\lambda h_{30}) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{21}) w^2 \bar{w} + \frac{1}{2} (g_{12} - 2\bar{\lambda} h_{12}) w \bar{w}^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} (g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda}) h_{03}) \bar{w}^3 + O(|w|^4).
\end{aligned}$$

Fazendo,

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\lambda} \quad \text{e} \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda},$$

conseguimos eliminar todos os termos cúbicos com exceção do termo $w^2 \bar{w}$, o qual será tratado separadamente. Devido os denominadores envolvidos não se anularem para todo $|\mu|$ suficientemente pequeno, as substituições acima são válidas.

Uma tentativa de eliminar o termo $w^2 \bar{w}$ seria escolher

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}.$$

Isto é possível para $\mu \neq 0$ pequeno, porém quando $\mu = 0$ o denominador se anula, pois, $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = i\omega_0 - i\omega_0$. Portanto, para obtermos uma transformação que dependa suavemente de μ , escolhemos $h_{21} = 0$, o que resulta em

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2}.$$

□

O termo cúbico restante $w^2 \bar{w}$ é chamado *termo ressonante*. Observe que seu coeficiente é o mesmo coeficiente do termo cúbico $z^2 \bar{z}$ da equação original.

Combinando os dois Lemas anteriores temos o resultado.

Lema 6 (Forma Normal de Poincaré para a Bifurcação de Hopf). *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+\ell \leq 3} \frac{1}{k!\ell!} g_{k\ell} z^k \bar{z}^\ell + O(|z|^4), \quad (2.18)$$

em que, $\lambda = \lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$, $\alpha(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\mu)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenadas

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3,$$

para todo $|\mu|$ suficientemente pequeno, na equação com somente o termo cúbico ressonante:

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4), \quad (2.19)$$

em que, $c_1 = c_1(\mu)$.

Demonstração. Obviamente, uma composição das transformações definidas nos Lemas 4 e 5 resolve o problema. Primeiramente, façamos a transformação

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2, \quad (2.20)$$

com $h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}$, $h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}$ e $h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$, definidas no Lema 4. Isto anulará todos os termos quadráticos, no entanto, também alterará os coeficientes de termos cúbicos. Representaremos o coeficiente de $w^2 \bar{w}$ por $\frac{1}{2} \tilde{g}_{21}$. Ao aplicarmos o Lema 5 eliminamos todos os termos cúbicos exceto o termo $\frac{1}{2} \tilde{g}_{21}$, que é o termo ressonante. $\square$

Tudo o que necessitamos para obter o coeficiente c_1 nos termos da equação dada (2.18) é um novo coeficiente $\frac{1}{2} \tilde{g}_{21}$ do termo $w^2 \bar{w}$ depois da transformação quadrática (2.20). Podemos calcular $\dot{z}$ diferenciando (2.20),

$$\dot{z} = \dot{w} + h_{20} w \dot{w} + h_{11} (\dot{w} \bar{w} + w \dot{\bar{w}}) + h_{02} \bar{w} \dot{\bar{w}}.$$

Substituindo $\dot{w}$ e $\dot{\bar{w}}$ e levando em conta (2.19), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \lambda w + \left(\frac{\lambda h_{20} + g_{20}}{2} \right) w^2 + (\lambda h_{11} + g_{11}) w \bar{w} + \left(\bar{\lambda} h_{02} + \frac{g_{02}}{2} \right) \bar{w}^2 \\ &\quad + \left[g_{20} h_{11} + g_{11} \left(\frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11} \right) + \frac{g_{02} \bar{h}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2} \right] w^2 \bar{w} + \dots \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes do termo cúbico $w^2 \bar{w}$ nas duas equações obtidas anteriormente, e utilizando $h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}$, $h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}$, $h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$, temos

$$\begin{aligned} c_1(\mu) &= g_{20} h_{11} + g_{11} \left(\frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11} \right) + \frac{g_{02} \bar{h}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{g_{20} g_{11} (2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda + \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}. \end{aligned}$$

Para $\mu = 0$, temos que $\lambda(0) = i\omega_0$, logo

$$c_1 = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20} g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}.$$

Agora pretendemos transformar a forma normal de Poincaré na forma normal estudada na seção anterior.

Lema 7. *Consideremos a equação*

$$\frac{dw}{dt} = (\alpha(\mu) + i\omega(\mu))w + c_1(\mu)w|w|^2 + O(|w|^4), \quad (2.21)$$

onde, $\alpha(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

Suponha que $\alpha'(0) \neq 0$ e $\operatorname{Re} c_1(0) \neq 0$. Então (2.21) pode ser transformada, por mudança de coordenada e reescalonamento do tempo, na equação

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4), \quad (2.22)$$

em que u é a nova coordenada complexa e; θ e β são os novos tempo e parâmetro, respectivamente; e $s = \operatorname{sign} [\operatorname{Re} c_1(0)] = \pm 1$.

Demonstração. Considere um novo tempo $\tau = \omega(\mu)t$. A direção de τ é preservada, uma vez que $\omega(\mu) > 0$, para todo $|\mu|$ suficientemente pequeno. Então,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= [(\alpha(\mu) + i\omega(\mu))w + c_1(\mu)w|w|^2 + O(|w|^4)] \frac{1}{\omega(\mu)} \\ &= \frac{\alpha(\mu) + i\omega(\mu)}{\omega(\mu)}w + \frac{c_1(\mu)}{\omega(\mu)}w|w|^2 + O(|w|^4) \\ &= (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4), \end{aligned}$$

em que

$$\beta = \beta(\mu) = \frac{\alpha(\mu)}{\omega(\mu)} \text{ e } d_1(\beta) = \frac{c_1(\mu(\beta))}{\omega(\mu(\beta))}.$$

Podemos considerar β como novo parâmetro, pois,

$$\beta(0) = 0, \quad \beta'(0) = \frac{\alpha'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

e, portanto, o Teorema da Função Inversa garante a existência local e suave de μ como função de β . Note que d_1 é complexo.

Através da mudança $\theta = \theta(\tau, \beta)$, vamos reparametrizar, novamente, o tempo onde

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|w|^2)d\tau,$$

com $e_1(\beta) = \operatorname{Im} d_1(\beta)$.

Agora, considerando a expansão de $\frac{1}{(1+e_1(\beta)|w|^2)}$, para w próximo de zero, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\theta} &= \frac{dw}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta} \\ &= [(\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)] \frac{1}{(1 + e_1(\beta)|w|^2)} \\ &= [(\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)][1 - e_1(\beta)|w|^2 - e_1^2(\beta)|w|^4 + \dots]\end{aligned}$$

Como $e_1(\beta) = \text{Im } d_1(\beta)$, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\theta} &= (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 - (\beta + i)e_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4) \\ &= (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 - \beta e_1(\beta)w|w|^2 - ie_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4) \\ &= (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 - \beta e_1(\beta)w|w|^2 - i \text{Im } d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4) \\ &= (\beta + i)w + (\text{Re } d_1(\beta) - \beta e_1(\beta))w|w|^2 + O(|w|^4).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

em que $l_1(\beta) = \text{Re } d_1(\beta) - \beta e_1(\beta)$, é um número real, com $l_1(0) = \text{Re } d_1(0)$, assim temos que,

$$l_1(0) = \text{Re} \left(\frac{c_1(\mu(0))}{\omega(\mu(0))} \right) = \text{Re} \frac{c_1(0)}{\omega(0)}. \quad (2.23)$$

Introduzindo a nova variável complexa u , dada por:

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}},$$

a qual é possível, pois $\text{Re } c_1(0) \neq 0$, e, assim, $l_1(0) \neq 0$. Então, a equação fica da forma desejada:

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|}u|u|^2 + O(|u|^4) = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4),$$

com $s = \text{sign } l_1(0) = \text{sign } \text{Re } c_1(0)$. □

Definição 13. A função real $l_1(\beta)$ é chamada de primeiro coeficiente de Lyapunov.

Segue da equação (2.23) que o primeiro coeficiente de Lyapunov em $\beta = 0$, pode ser calculado pela fórmula

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \text{Re} (ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}). \quad (2.24)$$

Agora, resumimos os resultados obtidos anteriormente no seguinte teorema.

Teorema 13 (Teorema de Hopf). *Suponhamos que o sistema bidimensional*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (2.25)$$

com f suave, tendo a singularidade $x = 0$, para todo $|\mu|$ suficientemente pequeno, com autovalores

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

onde $\alpha(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Suponha que são satisfeitas as seguintes condições:

1. $\alpha'(0) \neq 0$ (transversalidade);
2. $l_1(0) \neq 0$, em que l_1 é o primeiro coeficiente de Lyapunov (Condição de não degenerescência).

Então existem coordenadas invertíveis, mudanças de parâmetros e uma reparametrização do tempo que transforma (2.25) em

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4).$$

Finalmente, usando o Lemma 2, chegamos no seguinte resultado geral.

Teorema 14 (Forma Normal da Bifurcação de Hopf). *Qualquer sistema bidimensional*

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (2.26)$$

tendo em $\mu = 0$ o equilíbrio $x = 0$, com autovalores

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0,$$

é localmente topologicamente equivalente em uma vizinhança da origem, a uma das seguintes formas normais:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Os dois últimos teoremas, junto com a análise da forma normal da seção anterior e a fórmula dada por (2.24) para $l_1(0)$, fornecem todas as ferramentas necessárias para análise da bifurcação de Hopf em sistemas genéricos bidimensionais.

2.3 Método da projeção

Nesta seção apresentamos o método da projeção, o qual é utilizado quando lidamos com bifurcações de Hopf em sistemas n -dimensionais, onde $n > 2$. Este método tem como base a transformação do sistema,

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \mu \in \mathbb{R}^m,$$

em uma base formada por seus autovetores generalizados e, posteriormente, na projeção deste sistema usando apenas os autovetores correspondentes aos autovalores críticos (único par de autovalores com partes reais nulas) para restringi-lo ao caso bidimensional já estudado.

Consideremos então o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.27)$$

onde $F(x) = O(\|x\|^2)$ é uma função suave e A corresponde à parte linear do sistema, com um ponto de equilíbrio não hiperbólico $x = 0$ e um único par de autovalores imaginários puros $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. Seja $q \in \mathbb{C}^n$ um autovetor complexo correspondente a λ_1 . Então,

$$Aq = i\omega_0 q, \quad A\bar{q} = -i\omega_0 \bar{q}.$$

Introduzimos também o autovetor adjunto $p \in \mathbb{C}^n$, tal que,

$$A^T p = -i\omega_0 p, \quad A^T \bar{p} = i\omega_0 \bar{p},$$

satisfazendo a normalização

$$\langle p, q \rangle = 1,$$

em que $\langle p, q \rangle = \sum_i \bar{p}_i q_i$ é o produto interno canônico de $\mathbb{C}^n$. O autoespaço real generalizado T^c , correspondente ao par de autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ da matriz A , tem dimensão dois e é gerado por $\{\text{Re}(q), \text{Im}(q)\}$. O autoespaço real T^{su} , correspondente a todos os outros autovalores de A , possui dimensão $n - 2$.

Lema 8. $y \in T^{su}$ se, e só se, $\langle p, y \rangle = 0$.

Como $\mathbb{R}^n = T^c \oplus T^{su}$, dado $x \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$x = zq + \bar{z}\bar{q} + y,$$

onde $z \in \mathbb{C}$, $zq + \bar{z}\bar{q} \in T^c$ e $y \in T^{su}$. Logo, podemos explicitar y e z com relação a x ,

$$\langle p, x \rangle = \langle p, zq + \bar{z}\bar{q} + y \rangle = \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle + \langle p, y \rangle = z \langle p, q \rangle + \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle = z,$$

pois, $\langle p, y \rangle = 0$, $\langle p, q \rangle = 1$ e $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. Assim, ficamos com o sistema

$$\begin{aligned} z &= \langle p, x \rangle \\ y &= x - \langle p, x \rangle q - \langle \bar{p}, x \rangle \bar{q}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Lema 9. *Nas coordenadas de (2.28), o sistema (2.27) é dado por*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\omega_0 z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ \dot{y} &= Ay + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Demonstração. Diferenciando z e considerando que se $y \in T^{su}$, então $Ay \in T^{su}$ e consequentemente $\langle p, Ay \rangle = 0$; temos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \langle p, \dot{x} \rangle \\ &= \langle p, Ax + F(x) \rangle \\ &= \langle p, Ax \rangle + \langle p, F(x) \rangle \\ &= \langle p, A(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ &= \langle p, zAq \rangle + \langle p, \bar{z}A\bar{q} \rangle + \langle p, Ay \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ &= z \langle p, i\omega_0 q \rangle + \bar{z} \langle p, -i\omega_0 \bar{q} \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ &= i\omega_0 z \langle p, q \rangle - i\omega_0 \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ &= i\omega_0 z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle. \end{aligned}$$

Agora, sendo $\langle p, Ay \rangle$, $\langle \bar{p}, Ay \rangle$, $\langle \bar{p}, \bar{q} \rangle$, $\langle p, \bar{q} \rangle$ e $\langle \bar{p}, q \rangle$ todos nulos, temos:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x} - \langle p, \dot{x} \rangle q - \langle \bar{p}, \dot{x} \rangle \bar{q} \\ &= Ax + F(x) - \langle p, Ax + F(x) \rangle q - \langle \bar{p}, Ax + F(x) \rangle \bar{q} \\ &= A(zq + \bar{z}\bar{q} + y) + F(x) - \langle p, A(zq + \bar{z}\bar{q} + y) + F(x) \rangle q - \langle \bar{p}, A(zq + \bar{z}\bar{q} + y) + F(x) \rangle \bar{q} \\ &= Azq + A\bar{z}\bar{q} + Ay + F(x) - \langle p, zAq \rangle q - \langle p, \bar{z}A\bar{q} \rangle \bar{q} - \langle p, Ay \rangle q - \langle p, F(x) \rangle q \\ &\quad - \langle \bar{p}, zAq \rangle \bar{q} - \langle \bar{p}, \bar{z}A\bar{q} \rangle \bar{q} - \langle \bar{p}, Ay \rangle \bar{q} - \langle \bar{p}, F(x) \rangle \bar{q} \\ &= i\omega_0 zq - i\omega_0 \bar{z}\bar{q} + Ay + F(x) - i\omega_0 \bar{z} \langle p, q \rangle q + i\omega_0 z \langle p, \bar{q} \rangle q - \langle p, F(x) \rangle q - i\omega_0 \bar{z} \langle \bar{p}, q \rangle \bar{q} \\ &\quad + i\omega_0 z \langle \bar{p}, \bar{q} \rangle \bar{q} - \langle \bar{p}, F(x) \rangle \bar{q} \\ &= Ay + F(x) - \langle p, F(x) \rangle q - \langle \bar{p}, F(x) \rangle \bar{q} \\ &= Ay + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q}. \end{aligned}$$

□

Expandindo o sistema (2.29) em série de Taylor, em z , $\bar{z}$ e y , obtemos

$$\begin{aligned}\dot{z} &= i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + \langle G_{10}, y \rangle z + \langle G_{01}, y \rangle \bar{z} + \dots \\ \dot{y} &= Ay + \frac{1}{2}H_{20}z^2 + H_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}H_{02}\bar{z}^2 + \dots,\end{aligned}\tag{2.30}$$

em que $G_{20}, G_{11}, G_{02}, G_{21} \in \mathbb{C}$; $G_{10}, G_{01}, H_{ij} \in \mathbb{C}^n$; e podem ser calculados pelas seguintes fórmulas

$$\begin{aligned}G_{ij} &= \left. \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \right|_{z=0}, \quad i+j \geq 2, \\ \bar{G}_{10,i} &= \left. \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial z} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \right|_{(z,y)=(0,0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \bar{G}_{01,i} &= \left. \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial \bar{z}} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \right|_{(z,y)=(0,0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ H_{ij} &= \left. \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} F(zq + \bar{z}\bar{q}) \right|_{z=0} - G_{ij}q - \bar{G}_{ji}\bar{q}, \quad i+j = 2,\end{aligned}$$

e ainda, $\langle G, y \rangle = \sum_i^n \bar{G}_i y_i$.

Teorema 15 (Teorema da Variedade Central). *Localmente, existe um conjunto invariante $W^c(0)$ de (2.27) que é tangente a T^c em $x = 0$. Este conjunto é o gráfico de uma aplicação suave cujas derivadas parciais de todas as ordens são unicamente determinadas. Se $\phi(t, x)$ denota o fluxo associado ao sistema (2.27), então existe uma vizinhança U de $x_0 = 0$ tal que, se $\phi(t, x) \in U$, $\forall t \geq 0$ ($t \leq 0$), então $\phi(t, x) \rightarrow W^c(0)$ quando $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$).*

Definição 14. *O conjunto $W^c = W^c(0)$ é chamado de variedade central da origem.*

A variedade central tem a representação

$$y = V(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}w_{20}z^2 + w_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}w_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3),\tag{2.31}$$

onde $\langle p, w_{ij} \rangle = 0$. Diferenciando (2.31), e substituindo as derivadas $\dot{z}$ e $\dot{\bar{z}}$ usando (2.30) obtemos,

$$\dot{y} = w_{20}z\dot{z} + (\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}})w_{11} + w_{02}\bar{z}\dot{\bar{z}} + \dots = i\omega_0 w_{20}z^2 - i\omega_0 w_{02}\bar{z}^2 + \dots\tag{2.32}$$

Por outro lado, da segunda equação de (2.30), após substituirmos y pela expressão dada em (2.31) e agrupando os termos semelhantes, temos,

$$\dot{y} = \frac{1}{2}(Aw_{20} + H_{20})z^2 + (Aw_{11} - H_{11})z\bar{z} + \frac{1}{2}(Aw_{02} + H_{02})\bar{z}^2 + \dots\tag{2.33}$$

Igualando (2.32) e (2.33), chegamos que os vetores $w_{ij} \in \mathbb{C}^n$ dos termos quadráticos são dados pelas seguintes fórmulas

$$\begin{aligned} w_{20} &= (2i\omega_0 E - A)^{-1} H_{20}, \\ w_{11} &= -A^{-1} H_{11}, \\ w_{02} &= (-2i\omega_0 E - A)^{-1} H_{02}, \end{aligned}$$

onde E é a matriz identidade. Assim, a expressão (2.31) fica,

$$y = V(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}(2i\omega_0 E - A)^{-1} H_{20} z^2 - A^{-1} H_{11} z \bar{z} + \frac{1}{2}(-2i\omega_0 E - A)^{-1} H_{02} \bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

e portanto, o sistema (2.30) restrito à sua variedade central pode ser escrito como,

$$\dot{z} = i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + \langle G_{10}, V(z, \bar{z}) \rangle z + \langle G_{01}, V(z, \bar{z}) \rangle \bar{z} + \dots,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}(G_{21} - 2\langle G_{10}, A^{-1}H_{11} \rangle + \langle G_{01}, (2i\omega_0 E - A)^{-1}H_{20} \rangle) z^2\bar{z} + \dots, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde usamos o produto escalar em $\mathbb{C}^n$. Uma boa característica do algoritmo acima é que ele dá o sistema restrito, na forma complexa adequada para o cálculo do coeficiente de Lyapunov. Assim, vamos escrever $F(x)$ em termos de funções multilineares $B(x, y)$, $C(x, y, z)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4). \quad (2.35)$$

Então podemos expressar

$$\langle G_{10}, y \rangle = \langle p, B(q, y) \rangle, \quad \langle G_{01}, y \rangle = \langle p, B(\bar{q}, y) \rangle,$$

e escrever a equação restrita (2.34) na forma

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}(G_{21} - 2\langle p, B(q, A^{-1}H_{11}) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 E - A)^{-1}H_{20}) \rangle) z^2\bar{z} + \dots, \end{aligned} \quad (2.36)$$

em que

$$G_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad G_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad G_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad G_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle, \quad (2.37)$$

e

$$\begin{aligned} H_{20} &= B(q, q) - \langle p, B(q, q) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, q) \rangle \bar{q} \\ H_{11} &= B(q, \bar{q}) - \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, \bar{q}) \rangle \bar{q}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Substituindo (2.37) e (2.38) em (2.36) e, utilizando as identidades

$$A^{-1}q = \frac{1}{i\omega_0}q, \quad A^{-1}\bar{q} = \frac{-1}{i\omega_0}\bar{q}, \quad (2i\omega_0 E - A)^{-1}q = \frac{1}{i\omega_0}q, \quad (2i\omega_0 E - A)^{-1}\bar{q} = \frac{1}{3i\omega_0}\bar{q},$$

conseguimos transformar (2.36) na seguinte equação

$$\dot{z} = i\omega_0 z + \frac{1}{2}g_{20}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}g_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}g_{21}z^2\bar{z} + \dots,$$

em que

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle,$$

e

$$\begin{aligned} g_{21} &= \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle \\ &\quad - 2 \langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 E - A)^{-1}B(q, q)) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{i\omega_0} \langle p, B(q, q) \rangle \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle \\ &\quad - \frac{2}{i\omega_0} |\langle p, B(q, \bar{q}) \rangle|^2 - \frac{1}{3i\omega_0} |\langle p, B(q, \bar{q}) \rangle|^2. \end{aligned}$$

Note que os termos da última linha da equação anterior são imaginários puros e a terceira linha é dada por $g_{20}g_{11}$. Assim, aplicando a fórmula da seção anterior

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \text{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}),$$

dada em (2.24), obtemos

$$\begin{aligned} l_1(0) &= \frac{1}{2\omega_0} \text{Re}[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle \\ &\quad + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 E - A)^{-1}B(q, q)) \rangle]. \end{aligned}$$

Esta fórmula parece ser a mais conveniente para um estudo analítico da bifurcação de Hopf, em sistemas n -dimensionais. Ela expressa $l_1(0)$ usando os termos lineares, quadráticos e cúbicos, originais; assumindo que somente os autovetores críticos - ordinários e adjuntos - da matriz jacobiana são conhecidos.

2.4 Condição de transversalidade

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais a um parâmetro

$$\dot{x} = A(\mu)x + F(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (2.39)$$

onde $F(x, \mu) = O(\|x\|^2)$ é uma função suave de x , com sua expansão em Taylor iniciando com pelo menos termos quadráticos, e dependendo suavemente de μ ; e $A(\mu)$ corresponde à parte linear do sistema com um par de autovalores complexos conjugados

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \gamma(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

onde para $\mu = 0$ são satisfeitas as condições,

$$\gamma(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0.$$

Lema 10 (Condição de Transversalidade). *Considere o sistema (2.39) cuja matriz Jacobiana $A(\mu)$ possui um par de autovalores imaginários puros para $\mu = 0$, $\lambda_{1,2} = \gamma(\mu) \pm i\omega(\mu)$, $\gamma(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Então,*

$$\frac{d\gamma}{d\mu}(0) = \operatorname{Re} \left\langle p, \frac{dA}{d\mu}(0)q \right\rangle,$$

onde $p, q \in \mathbb{C}^n$ satisfazem

$$A(0)q = i\omega_0 q, \quad A^T(0)p = -i\omega_0 p, \quad \text{e} \quad \langle p, q \rangle = 1.$$

Demonstração. Derivando ambos os membros da equação

$$A(\mu)q(\mu) = \lambda(\mu)q(\mu),$$

em relação a μ obtemos

$$\frac{dA}{d\mu}(\mu)q(\mu) + A(\mu)\frac{dq}{d\mu}(\mu) = \frac{d\lambda}{d\mu}(\mu)q(\mu) + \lambda(\mu)\frac{dq}{d\mu}(\mu).$$

Aplicando, agora, o produto escalar por p em ambos os membros, temos

$$\begin{aligned}\left\langle p, \frac{dA}{d\mu}q + A \frac{dq}{d\mu} \right\rangle &= \left\langle p, \frac{d\lambda}{d\mu}q + \lambda \frac{dq}{d\mu} \right\rangle \\ \left\langle p, \frac{dA}{d\mu}q \right\rangle + \left\langle p, A \frac{dq}{d\mu} \right\rangle &= \left\langle p, \frac{d\lambda}{d\mu}q \right\rangle + \left\langle p, \lambda \frac{dq}{d\mu} \right\rangle \\ \left\langle p, \frac{dA}{d\mu}q \right\rangle + \left\langle A^T p, \frac{dq}{d\mu} \right\rangle &= \frac{d\lambda}{d\mu} \langle p, q \rangle + \lambda \left\langle p, \frac{dq}{d\mu} \right\rangle.\end{aligned}$$

Quando $\mu = 0$, temos $A^T p = -i\omega_0 p$, assim

$$\begin{aligned}\left\langle p, \frac{dA}{d\mu}(0)q \right\rangle + i\omega_0 \left\langle p, \frac{dq}{d\mu} \right\rangle &= \left(\frac{d\lambda}{d\mu}(0) + i \frac{d\omega}{d\mu}(0) \right) \langle p, q \rangle + i\omega_0 \left\langle p, \frac{dq}{d\mu} \right\rangle \\ \left\langle p, \frac{dA}{d\mu}(0)q \right\rangle &= \left(\frac{d\lambda}{d\mu}(0) + i \frac{d\omega}{d\mu}(0) \right) \langle p, q \rangle,\end{aligned}$$

e como $\langle p, q \rangle = 1$,

$$\left\langle p, \frac{dA}{d\mu}(0)q \right\rangle = \frac{d\lambda}{d\mu}(0) + i \frac{d\omega}{d\mu}(0),$$

e portanto

$$\frac{d\gamma}{d\mu}(0) = \text{Re} \left\langle p, \frac{dA}{d\mu}(0)q \right\rangle.$$

□

Sistemas do Tipo Predador-Presa

Tendo estabelecido os fundamentos teóricos nos capítulos anteriores, no presente capítulo iniciamos em nosso trabalho, o estudo de modelos biológicos. Na primeira seção dedicamo-nos ao estudo do modelo clássico de predador-presa no plano; na segunda seção, analisamos um sistema de predador-presa modificado, no qual ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica. Na terceira e quarta seções passamos ao estudo de sistemas tipo predador-presa no espaço $\mathbb{R}^3$, considerando dois casos respectivos: no primeiro, o sistema estudado possui superfícies invariantes que folheiam o espaço de fase; no segundo sistema ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica, que dá origem uma órbita periódica.

3.1 Modelo Predador-Presa clássico

O primeiro modelo matemático elaborado para descrever a dinâmica de duas populações interagindo como um sistema predador-presa foi sugerido independentemente por A. Lotka (1925) e V. Volterra (1931), e é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy, \\ \dot{y} &= -cy + dxy.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Neste sistema $x > 0$ e $y > 0$ denotam os tamanhos das populações da presa e do predador, respectivamente, $a > 0$ é a taxa de reprodução da população de presas na ausência de predadores, $b > 0$ é a taxa per capita do consumo de presas pela população de predadores, $c > 0$ é a taxa de mortalidade dos predadores na ausência das presas e $d > 0$ é a taxa de biomassa de presas que é convertida em biomassa de predadores.

O modelo (3.1) tem como base as seguintes idealizações:

1. na ausência de predadores, a população de presas cresce exponencialmente de acordo com a lei de Malthus;

2. se não houver presas, a população de predadores decai exponencialmente;
3. a quantidade total de presas consumidas pelos predadores por unidade de tempo depende linearmente da densidade populacional de ambos, predadores e presas;
4. a porção de biomassa de presas que é convertida em biomassa de predadores é constante;
5. nenhum outro fator afeta a dinâmica do sistema.

Os cálculos feitos em Hirsch *et al* [10] mostram que a função

$$L(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y, \quad (3.2)$$

é uma integral primeira para o sistema (3.1). Logo, esta função é constante ao longo das soluções de (3.1) quando $x, y > 0$.

O sistema (3.1) foi bastante estudado, e mostra-se que para qualquer população inicial $(x(0), y(0)) \neq A$ dada, com $x(0) > 0$ e $y(0) > 0$, as populações do predador e da presa oscilam ciclicamente (ver Figura 3.1).

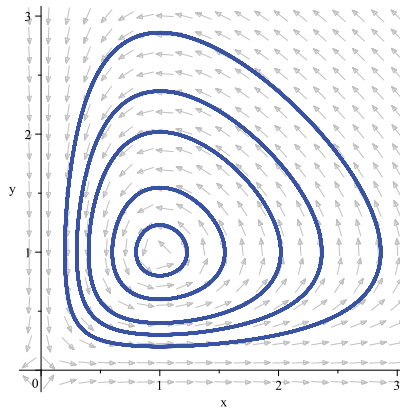


Figura 3.1: Retrato de fase do sistema (3.1)

3.2 Bifurcação de Hopf em um modelo Predador-Presa em $\mathbb{R}^2$

No modelo que estudaremos a seguir, será incluído a equação de crescimento logístico

$$A(x) = ax - ex^2 = ax \left(\frac{K - x}{K} \right), \quad a, K = \frac{a}{e} \in \mathbb{R}_+, \quad (3.3)$$

e uma função resposta do tipo Holling II

$$B(x, \cdot) = \frac{bx}{1 + rx}, \quad b, r \in \mathbb{R}_+. \quad (3.4)$$

Em um âmbito ecológico, este é um melhoramento considerável em relação ao sistema (3.1), principalmente no que se refere à aproximação do modelo a uma situação real, pois, incluindo (3.3) torna-se impossível o crescimento ilimitado das populações, o que é interpretado como se houvesse competição entre as presas. Já incluindo (3.4), leva-se em conta o efeito causado pela saturação do predador. Uma descrição das funções respostas tipo Holling I, II, III e IV, bem como uma breve interpretação de seus efeitos num contexto ecológico, podem ser encontradas no trabalho de Silva [21].

Bazykin [2], estudou as mudanças causadas na dinâmica de (3.1), incluindo separadamente (3.3) e (3.4); no primeiro caso obteve estabilidade assintótica para o equilíbrio não trivial existente e, no segundo, instabilidade.

Incluindo as equações (3.3) e (3.4) no modelo clássico (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax \frac{K - x}{K} - \frac{bxy}{1 + rx}, \\ \dot{y} &= -cy + \frac{dxy}{1 + rx}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Fixando $t = \tau/a$, $x = (c/d)u$ e $y = (a/b)v$, o sistema fica da forma

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u - \frac{uv}{1 + \alpha u} - \varepsilon u^2, \\ \dot{v} &= -\gamma v \left(1 - \frac{u}{1 + \alpha u} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

com os parâmetros $\alpha = rc/d$, $\varepsilon = c/Kd$ e $\gamma = c/a$, sendo que o ponto agora representa a derivada com relação a τ . Devido ao parâmetro γ não influenciar na dinâmica de (3.6), daremos sequência ao nosso estudo considerando $\gamma = 1$ fixo e, quando necessário, trataremos (3.6) como um campo de vetores $f : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$, com

$$f(u, v) = \left(u - \frac{uv}{1 + \alpha u} - \varepsilon u^2, -v \left(1 - \frac{u}{1 + \alpha u} \right) \right), \quad (3.7)$$

onde $\bar{\Omega} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0\}$ e $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v > 0\}$.

O lema a seguir é de obtenção imediata.

Lema 11. *O sistema (3.6) possui três pontos de equilíbrio:*

$$O = (0, 0), \quad A = \left(\frac{1}{\varepsilon}, 0 \right) \quad e \quad B = \left(\frac{1}{1 - \alpha}, \frac{1 - \alpha - \varepsilon}{(1 - \alpha)^2} \right).$$

Como podemos ver, os equilíbrios O e A sempre irão existir no retrato de fase, pois $\varepsilon > 0$. No entanto existe uma restrição sobre os parâmetros para que o equilíbrio B exista: $\varepsilon + \alpha < 1$. Isto sugere que o retrato de fase do sistema (3.6) muda suas características topológicas dependendo das mudanças nos parâmetros, ou seja, ocorrem bifurcações no sistema.

Antes de tratarmos da estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema, provaremos através dos dois lemas a seguir, que as soluções de (3.6) com $(u_0, v_0) \in \Omega$, permanecem limitadas em Ω quando $\tau \rightarrow \infty$.

Lema 12. *As retas $v = 0$ e $u = 0$ são invariantes.*

Demonstração. Basta mostrarmos que o campo $f(u, v)$, definido em (3.7), restrito a cada uma dessas retas não possui componente normal a elas, e portanto, qualquer solução tendo um ponto em comum com uma dessas retas, fica inteiramente contida nela. De fato, se $v = 0$, temos

$$\langle f(u, 0), (0, 1) \rangle = \langle (u - \varepsilon u^2, 0), (0, 1) \rangle = 0,$$

e para $u = 0$,

$$\langle f(0, v), (1, 0) \rangle = \langle (0, -v), (1, 0) \rangle = 0.$$

□

Lema 13. *Toda solução de (3.6) com $(u_0, v_0) \in \Omega$ tende a um subconjunto limitado de Ω .*

Demonstração. Considere a equação da reta $r = \{(u, v) : u + v = p\}$ onde $p \in \mathbb{R}_+$, e o vetor normal a ela $s = (1, 1)$. Para provar o lema basta mostrar que existe $p > 0$, tal que a função $g(u, v) = \langle f(u, v), s \rangle$ tem sinal negativo ao longo de toda a reta r . De fato,

$$g(u, v) = \langle f(u, v), s \rangle = u - \varepsilon u^2 - v.$$

Na reta r temos

$$g(u, c - u) = -\varepsilon u^2 + 2u - p.$$

Para que g seja estritamente negativa basta que o discriminante $\Delta = 1 - \varepsilon p$ seja negativo, ou seja, $p > 1/\varepsilon$. Portanto, quando $\tau \rightarrow \infty$ as soluções de (3.6) ficam limitadas no interior de $\Gamma = \{(u, v) \in \Omega : u + v < p, \text{ onde } p > 1/\varepsilon\}$. □

Estudemos agora a estabilidade dos equilíbrios. A origem sempre terá o comportamento de sela para todos os valores de parâmetros, uma vez que a matriz jacobiana aplicada neste ponto é

$$Jf(O) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que possui os autovalores 1 e -1 associados aos autovetores canônicos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente.

Definição 15. *Definimos os seguintes conjuntos:*

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \{(\alpha, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2 : \alpha + \varepsilon > 1\}; \\ \Delta_2 &= \{(\alpha, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2 : \alpha + \varepsilon < 1, \varepsilon > \alpha(1 - \alpha)/(\alpha + 1)\}; \\ \Delta_3 &= \{(\alpha, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2 : \varepsilon < \alpha(1 - \alpha)/(\alpha + 1)\}.\end{aligned}$$

É fácil ver que os conjuntos Δ_1 , Δ_2 , e Δ_3 são disjuntos e que as curvas $S = \{(\alpha, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2 : \alpha + \varepsilon = 1\}$ e $N = \{(\alpha, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2 : \varepsilon = \alpha(1 - \alpha)/(\alpha + 1)\}$, contêm os pontos de transição de Δ_1 para Δ_2 e de Δ_2 para Δ_3 , respectivamente. Na realidade, como veremos a seguir, essas curvas completam o diagrama de bifurcação de (3.6) (Figura 3.2).

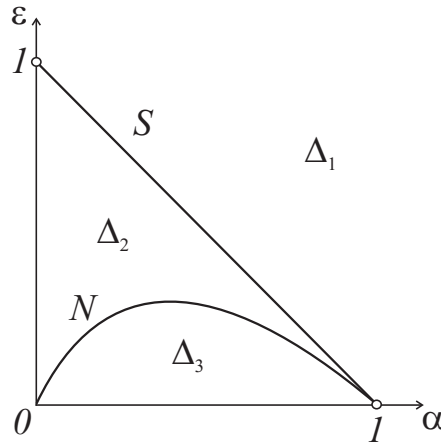


Figura 3.2: Diagrama de bifurcação do sistema (3.6).

Lema 14. *O ponto de equilíbrio A é um nó estável para $(\alpha, \varepsilon) \in \Delta_1$ e uma sela se $(\alpha, \varepsilon) \in \Delta_2 \cup \Delta_3$, sendo que, para $(\alpha, \varepsilon) \in S$, A é um equilíbrio não-hiperbólico.*

Demonstração. A matriz jacobiana do sistema calculada no ponto A é dada por

$$Jf(A) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{\varepsilon + \alpha} \\ 0 & \frac{1 - \varepsilon - \alpha}{\varepsilon + \alpha} \end{pmatrix},$$

que possui o seguinte polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{(2\varepsilon + 2\alpha - 1)}{\varepsilon + \alpha}\lambda + \frac{\varepsilon + \alpha - 1}{\varepsilon + \alpha},$$

que por sua vez tem como zeros

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \varepsilon - \alpha}{\varepsilon + \alpha}.$$

Como podemos ver, $\lambda_2 < 0$ se $\alpha + \varepsilon > 1$ ($(\alpha, \varepsilon) \in \Delta_1$), e portanto A é um nó estável. Devido não haver pontos de equilíbrio em Ω , com uma aplicação direta do Teorema de Poincaré-Bendixson dado no capítulo 1, podemos, nesta situação, descartar a possibilidade de haver alguma órbita periódica contida nesse conjunto. Consequentemente, para todo $\phi(0) = (u_0, v_0) \in \Omega \cup \{(u, 0) : u > 0\}$, $\phi(\tau) \rightarrow A$ quando $\tau \rightarrow \infty$, e portanto A é um atrator global em $\Omega \cup \{(u, 0) : u > 0\}$.

Temos, $\lambda_2 > 0$ se $\alpha + \varepsilon < 1$ ($(\alpha, \varepsilon) \in \Delta_2 \cup \Delta_3$) e então A apresenta um comportamento de sela, em que $(-1, 1)$ é o autovetor associado à λ_2 e a variedade estável de A está sobre o eixo u . E por fim, $\lambda_2 = 0$ caso tenhamos $\alpha + \varepsilon = 1$ ($(\alpha, \varepsilon) \in S$); e A torna-se um equilíbrio não-hiperbólico. $\square$

Em [8], é mostrado, através do cálculo da forma normal, que o equilíbrio não-hiperbólico A (o qual existe quando $(\alpha, \varepsilon) \in S$) é do tipo sela-nó não-degenerado. E a partir deste surge em Ω o equilíbrio B , quando $(\alpha, \varepsilon) \in \Delta_2$.

Agora nos deteremos à análise da estabilidade do equilíbrio B , o qual, como dito anteriormente, existe sob a condição de que $\varepsilon + \alpha < 1$, ou seja, $(\alpha, \varepsilon) \in \Delta_2 \cup \Delta_3$.

Teorema 16. *O equilíbrio B do sistema (3.6) é um nó ou foco estável para valores de parâmetros $(\alpha, \varepsilon) \in \Delta_2$, e nesse caso ele é um atrator global em Ω . Se $(\alpha, \varepsilon) \in N$, B é um foco atrator fraco. Já para $(\alpha, \varepsilon) \in \Delta_3$, B é um foco instável e surge um ciclo limite estável em torno dele. Em outras palavras, ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica em B , quando (α, ε) passa de Δ_2 para Δ_3 .*

Demonstração. No equilíbrio B temos

$$Jf(B) = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{\varepsilon(\alpha + 1)}{1 - \alpha} & -1 \\ 1 - \alpha - \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tem o seguinte polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - p(\alpha, \varepsilon)\lambda + q(\alpha, \varepsilon),$$

com

$$\begin{aligned} p(\alpha, \varepsilon) &= \text{tr}(Jf(B)) = \alpha - \frac{\varepsilon(\alpha + 1)}{1 - \alpha}, \\ q(\alpha, \varepsilon) &= \det(Jf(B)) = 1 - \alpha - \varepsilon. \end{aligned}$$

Os zeros deste polinômio são

$$\lambda_{1,2} = \frac{p(\alpha, \varepsilon)}{2} \pm \frac{\sqrt{p(\alpha, \varepsilon)^2 - 4q(\alpha, \varepsilon)}}{2}.$$

É fácil de ver que $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$ para todo $(\alpha, \varepsilon) \in \Delta_2$.

Neste caso, resta-nos verificar se B é um atrator global em Ω , para isso utilizamos o critério de Dulac (ver Teorema 7). Seja a função

$$h(u, v) = \frac{1 + \alpha u}{u} v^\theta,$$

onde θ é uma constante a ser determinada. Quer-se calcular $\operatorname{div}(h(u, v)f(u, v))$, em que $f(u, v)$ é o campo de vetores (3.7). Desse modo

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(h(u, v)f(u, v)) &= \frac{\partial(h(u, v)u)}{\partial u} + \frac{\partial(h(u, v)v)}{\partial v} \\ &= \frac{v^\theta}{u} (-2\varepsilon\alpha u^2 + (1 + \theta - \varepsilon - \theta\alpha)u - 1 - \theta). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se fizermos

$$\theta = \frac{\alpha - 1 + (1 + 3\alpha)\varepsilon}{(1 - \alpha)^2},$$

(3.8) fica

$$\operatorname{div}(h(u, v)f(u, v)) = \frac{v^\theta}{u} (-2\varepsilon\alpha(1 - \alpha)^2 u^2 + 4\alpha\varepsilon(1 - \alpha)u + \alpha - \alpha^2 - (1 + 3\alpha)\varepsilon).$$

Não é difícil ver que a equação

$$-2\varepsilon\alpha(1 - \alpha)^2 u^2 + 4\alpha\varepsilon(1 - \alpha)u + \alpha - \alpha^2 - (1 + 3\alpha)\varepsilon = 0$$

não possui raízes reais com $(\alpha, \varepsilon) \in \Delta_2$. Assim $\operatorname{div}(hf) < 0$ em Ω , e portanto não há órbitas periódicas contidas neste conjunto. Como as soluções de (3.6) tendem a um conjunto limitado em Ω , O e A são instáveis, tem-se, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, que B é um atrator global em Ω . Portanto, para toda solução $\phi(\tau)$ de (3.6) com $\phi(0) = (u_0, v_0) \in \Omega$, tem-se $\phi(\tau) \rightarrow B$ quando $\tau \rightarrow \infty$.

Fazendo $p(\alpha, \varepsilon) = 0$ encontramos o valor crítico

$$\varepsilon_{cr} = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{\alpha + 1},$$

cuja expressão descreve a curva N no plano (α, ε) . Neste caso, para parâmetros $(\alpha, \varepsilon_{cr})$, os autovalores são $\lambda_{1,2} = \pm i\omega(\alpha, \varepsilon_{cr})$, onde

$$\omega(\alpha, \varepsilon_{cr})^2 = \frac{4(1-\alpha)^3}{\alpha+1} > 0.$$

Calculando a derivada de $\mu(\alpha, \varepsilon)$ em relação a ε para algum $\alpha = \alpha_0 < 1$ fixo, encontramos

$$\frac{d\mu}{d\varepsilon}(\alpha_0, \varepsilon_{cr}) = -\frac{\alpha_0}{2\varepsilon_{cr}} < 0.$$

Assim, quando a curva N é intersectada, a parte real dos autovalores passa por zero com velocidade não nula, fazendo com que haja a mudança de estabilidade no equilíbrio B . Com isso, a condição de transversalidade é satisfeita.

Fazendo um *scaling* no tempo, com $\tau = (1+\alpha u)\theta$, encontramos um sistema polinomial que é orbitalmente equivalente ao sistema (3.6), a saber

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u(1+\alpha u)(1-\varepsilon u) - uv, \\ \dot{v} &= -v(1+u(\alpha-1)),\end{aligned}$$

sendo que aqui o ponto indica a derivada em relação ao novo tempo θ .

Usando o algoritmo apresentado por Kuznetsov [12] e descrito no capítulo 2, encontramos a expressão do primeiro coeficiente de Lyapunov dada por

$$l_1 = -\frac{\alpha^2(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}}{(\alpha+1)^{\frac{1}{2}}},$$

que é negativa ao longo de toda a curva de Hopf N . No Apêndice F deste trabalho mostramos os cálculos e o algoritmo feito no software Maple, para encontrar l_1 .

Portanto, se os parâmetros (α, ε) atravessarem a curva N , passando de Δ_2 para Δ_3 , o equilíbrio B perde sua estabilidade via bifurcação de Hopf supercrítica, resultando no aparecimento de um ciclo limite estável ρ em torno dele. $\square$

Biologicamente, podemos observar que, para $(\alpha, \varepsilon) \in \Delta_2$, o fator dominante é a competição entre presas, fazendo com que haja coexistência estável entre as populações. Contudo, conforme diminuimos o valor de ε enfraquecemos o fator de estabilidade e, ao entrarmos em Δ_3 , surge o ciclo limite estável ρ . Nesse caso, com o passar do tempo as populações só podem coexistir em um regime oscilatório. O conjunto completo de retratos de fase é mostrado na Figura 3.3, e o crescimento da órbita periódica para alguns valores de ε na Figura 3.4.

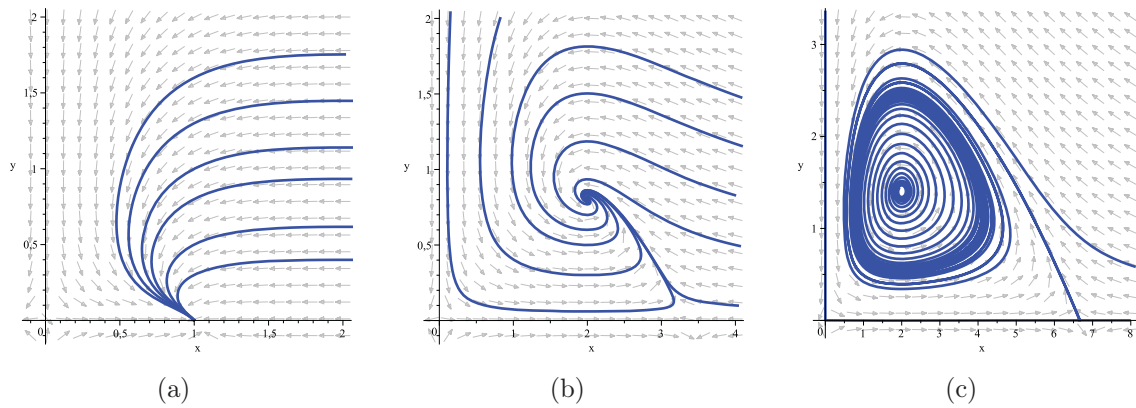


Figura 3.3: Retratos de fase do sistema (3.6): (a) $(\alpha, \varepsilon) = (0.5, 1) \in \Delta_1$; (b) $(\alpha, \varepsilon) = (0.5, 0.3) \in \Delta_2$ e (c) $(\alpha, \varepsilon) = (0.5, 0.15) \in \Delta_3$.

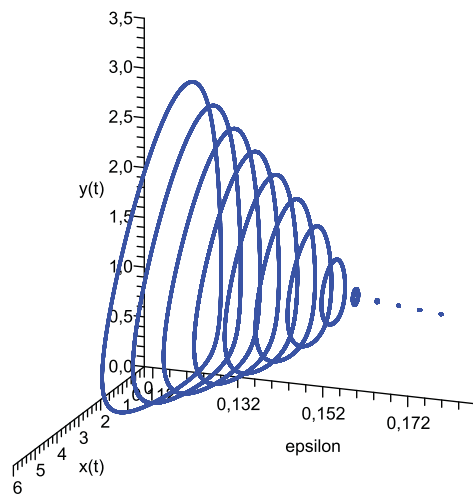


Figura 3.4: Órbita periódica atratora criada a partir de uma bifurcação de Hopf do sistema (3.6).

3.3 Estudo de um modelo Predador-Presa em $\mathbb{R}^3$

Passemos agora ao estudo de um modelo tipo predador-presa no espaço $\mathbb{R}^3$. Em primeiro lugar, vale ressaltar que a teoria qualitativa de equações diferenciais para sistemas de ordem maior ou igual a três, diferente do caso bidimensional, está longe de ser completa, deixando ainda em aberto várias questões envolvendo possíveis estruturas de atratores e suas classificações no espaço de fase.

O sistema que estudaremos a seguir é obtido basicamente incluindo mais um predador no sistema clássico (3.1), e mantendo as relações entre as populações como sendo descritas

da mesma forma. Desse modo o sistema é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - b_1xy - b_3xz, \\ \dot{y} &= -c_1y + d_1xy - b_2yz, \\ \dot{z} &= -c_2z + d_2yz + d_3xz.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Os parâmetros de (3.9) têm os seguintes significados:

- $a > 0$ é a taxa de crescimento de x , nas ausências de y e z ,
- $b_1 > 0$ é a taxa de consumo de x pela população y ,
- $b_3 > 0$ é a taxa de consumo de x pela população z ,
- $c_1 > 0$ é a taxa de mortalidade de y , nas ausências de x e z ,
- $d_1 > 0$ é a taxa de substância-energia de x que é aproveitada por y ,
- $b_2 > 0$ é a taxa de consumo de y pela população z ,
- $c_2 > 0$ é a taxa de mortalidade de z , nas ausências de x e y ,
- $d_2 > 0$ é a taxa de substância-energia de y que é aproveitada por z ,
- $d_3 > 0$ é a taxa de substância-energia de x que é aproveitada por z .

Fixando $t = \tau/a$, $x = (c_1/d_1)u$, $y = (a/b_1)v$ e $z = (c_1/b_2)w$, encontramos

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u(1 - v - \beta w), \\ \dot{v} &= -\gamma_1 v(1 - u + w), \\ \dot{w} &= -\gamma_2 w(\alpha - v - \delta u),\end{aligned}\tag{3.10}$$

onde $\gamma_1 = c_1/a$, $\gamma_2 = d_2/b_1$, $\alpha = c_2b_1/ad_2$, $\beta = c_1b_3/ab_2$ e $\delta = b_1c_1d_3/ad_1d_2$. Note que todos esses novos parâmetros são positivos e manteremos $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ fixos; de modo que o sistema a ser estudado tem a forma

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u(1 - v - \beta w), \\ \dot{v} &= v(-1 + u - w), \\ \dot{w} &= w(-\alpha + v + \delta u).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Também será útil tratar (3.11) como um campo de vetores $f : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$, com

$$f(u, v, w) = (u(1 - v - \beta w), v(-1 + u - w), w(-\alpha + v + \delta u)),\tag{3.12}$$

onde $\bar{\Omega} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0\}$ e $\Omega = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u > 0, v > 0, w > 0\}$.

Lema 15. *Os planos $u = 0$, $v = 0$ e $w = 0$ são invariantes pelo fluxo de (3.12).*

Demonstração. Basta mostrarmos que o campo $f(u, v, w)$, restrito a cada um desses planos não possui componente normal a eles, e portanto, qualquer solução tendo um ponto em comum com um plano coordenado, fica inteiramente contida nele. De fato:

- $u = 0$

$$\langle f(0, v, w), (1, 0, 0) \rangle = \langle (0, -v(1+w), w(-\alpha+v)), (1, 0, 0) \rangle = 0,$$

- $v = 0$

$$\langle f(u, 0, w), (0, 1, 0) \rangle = \langle (u(1-\beta w), 0, w(-\alpha+\delta u)), (0, 1, 0) \rangle = 0,$$

- $w = 0$

$$\langle f(u, v, 0), (0, 0, 1) \rangle = \langle (u(1-v), -v(1-u), 0), (0, 0, 1) \rangle = 0.$$

□

Uma observação importante a se fazer é que o sistema (3.11) torna-se o sistema clássico de predador-presa (3.1), apresentado no capítulo anterior, quando restrito aos planos invariantes $v = 0$ e $w = 0$. Assim, nesses planos as trajetórias de (3.11) consistem de órbitas fechadas não-isoladas.

Lema 16. *O sistema (3.11) apresenta os seguintes equilíbrios:*

- se $(\alpha, \delta) \neq (\beta+1, \beta)$:

$$O = (0, 0, 0), \quad A_1 = (1, 1, 0), \quad A_2 = \left(\frac{\alpha}{\delta}, 0, \frac{1}{\beta} \right) \quad e$$

$$A_3 = \left(\frac{1+\beta-\alpha}{\beta-\delta}, \frac{\alpha\beta-\delta(\beta+1)}{\beta-\delta}, \frac{1-\alpha+\delta}{\beta-\delta} \right).$$

- se $(\alpha, \delta) = (\beta+1, \beta)$:

$$O = (0, 0, 0) \quad e \quad L = \{(u, v, w) \in \overline{\Omega}; u = w+1, v = -\beta w+1, w = w\}.$$

Os equilíbrios O , A_1 e A_2 sempre irão existir em $\overline{\Omega}$. No entanto, existem restrições nos parâmetros para que tenhamos $A_3 \in \Omega$. Para melhor organizar nosso estudo, utilizamos a seguinte definição.

Definição 16. *Definimos os seguintes conjuntos:*

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \{(\alpha, \delta) \in \mathbb{R}_+^2; \delta < \beta, \delta < \alpha\beta/(\beta+1), \delta > \alpha-1\}; \\ \Delta_2 &= \{(\alpha, \delta) \in \mathbb{R}_+^2; \delta > \alpha\beta/(\beta+1), \delta > \alpha-1\}; \\ \Delta_3 &= \{(\alpha, \delta) \in \mathbb{R}_+^2; \delta > \beta, \delta > \alpha\beta/(\beta+1), \delta < \alpha-1\}; \\ \Delta_4 &= \{(\alpha, \delta) \in \mathbb{R}_+^2; \delta < \alpha\beta/(\beta+1), \delta < \alpha-1\}.\end{aligned}$$

Linearizando (3.11) encontramos que a origem O é sempre uma sela tridimensional com u sendo a direção instável associada ao autovalor $\lambda_1 = 1$ e v e w sendo as direções estáveis associadas aos autovalores $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -\alpha$, respectivamente. De acordo com a Definição 16, é fácil de ver que $A_3 \in \Omega$ se, e somente se $(\alpha, \delta) \in \Delta_1 \cup \Delta_3$.

Lema 17. *Os equilíbrios A_1 e A_2 são não-hiperbólicos, com as seguintes estabilidades na direção dos autovetores transversais aos planos coordenados:*

- para $(\alpha, \delta) \in \Delta_1$, os dois são instáveis,
- para $(\alpha, \delta) \in \Delta_2$, A_1 é instável e A_2 é estável,
- para $(\alpha, \delta) \in \Delta_3$, os dois são estáveis, e
- para $(\alpha, \delta) \in \Delta_4$, A_1 é estável e A_2 é instável.

Demonstração. Considere a matriz jacobiana de (3.11) para qualquer $(u, v, w) \in \overline{\Omega}$

$$Jf(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 - v - \beta w & -u & -\beta u \\ v & -1 + u - w & -v \\ \delta w & w & -\alpha + v + \delta u \end{pmatrix}.$$

Começamos pelo equilíbrio A_1 . O polinômio característico associado a $Jf(A_1)$ é

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha - \delta - 1)\lambda^2 + \lambda + \alpha - \delta - 1,$$

e possui os zeros $\lambda_1 = 1 + \delta - \alpha$ e $\lambda_{2,3} = \pm i$. É claro que os autovalores imaginários puros $\lambda_{2,3}$, estão associados aos autovetores que estão contidos no plano $w = 0$, o qual, como visto anteriormente, está repleto de órbitas periódicas. No entanto, λ_1 está associado ao autovetor que é transversal ao plano $w = 0$ e é fácil ver que $\lambda_1 < 0$ para $(\alpha, \delta) \in \Delta_3 \cup \Delta_4$ e $\lambda_1 > 0$ para $(\alpha, \delta) \in \Delta_1 \cup \Delta_2$.

Passemos agora para A_2 . O polinômio característico associado a $Jf(A_2)$ é

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{\delta + \beta\alpha - \beta\delta}{\beta\delta}\lambda^2 + \alpha\lambda + \frac{\alpha(\delta - \beta\alpha + \beta\delta)}{\beta\delta},$$

e possui os zeros $\lambda_1 = (\beta\alpha - \beta\delta - \delta)/\beta\delta$ e $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\alpha}$. Como no caso de A_1 , os autovalores imaginários puros $\lambda_{2,3}$, estão associados aos autovetores que estão contidos no

plano $v = 0$ e λ_1 está associado ao autovetor transversal ao plano $v = 0$. Analisando λ_1 vemos que, $\lambda_1 < 0$ para $(\alpha, \delta) \in \Delta_2 \cup \Delta_3$ e $\lambda_1 > 0$ para $(\alpha, \delta) \in \Delta_1 \cup \Delta_4$. $\square$

As retas $r_1 = \{(\alpha, \delta); \delta = \alpha - 1\}$ e $r_2 = \{(\alpha, \delta); \delta = \alpha\beta/(\beta + 1)\}$, contém os pontos nos quais um autovalor de $Jf(A_1)$ e $Jf(A_2)$, respectivamente, se anula. Na realidade, estas são retas de bifurcação do tipo sela-nó (Bazykin [2]). Dependendo da direção em que r_1 e r_2 são atravessadas pelos parâmetros, A_3 pode surgir em Ω a partir de um desses equilíbrios ou sair de Ω fundindo-se com um deles. A Figura 3.5 mostra o diagrama de bifurcação de (3.11) no plano (α, δ) .

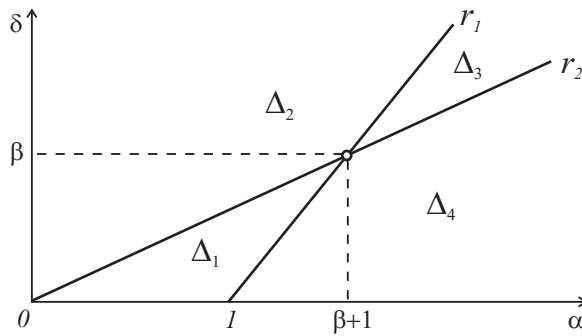


Figura 3.5: Diagrama de bifurcação do sistema (3.11).

Para o estudo da estabilidade de A_3 , utilizaremos a definição e o resultado que seguem.

Definição 17. *Seja*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

um polinômio de grau n com coeficientes reais. Dizemos que p é um polinômio estável se todas as raízes de p têm parte real menor que zero. Caso contrário, p é instável.

Teorema 17. *Considere o polinômio*

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad (3.13)$$

com coeficientes reais, então

a) (Critério de Routh-Hurwitz) *p é estável se, e só se,*

$$a, b, c > 0 \quad \text{e} \quad ab - c > 0 \quad (3.14)$$

b) *Se $c > 0$ e $ab - c < 0$, então p tem duas raízes com parte real positiva e uma raiz real negativa.*

c) Se $a, b, c > 0$ e $ab - c = 0$, então p tem duas raízes complexas conjugadas com parte real nula e uma raiz real negativa.

Teorema 18. O equilíbrio A_3 é instável para todo $(\alpha, \delta) \in \Delta_1 \cup \Delta_3$.

Demonstração. Linearizando o sistema (3.11) na vizinhança de A_3 obtemos,

$$Jf(A_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha - \beta - 1}{\beta - \delta} & \frac{\beta(\alpha - \beta - 1)}{\beta - \delta} \\ \frac{\beta\alpha - \delta - \beta\delta}{\beta - \delta} & 0 & -\frac{\beta\alpha - \delta - \beta\delta}{\beta - \delta} \\ -\frac{\delta(-1 - \delta + \alpha)}{\beta - \delta} & -\frac{-1 - \delta + \alpha}{\beta - \delta} & 0 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico associado a essa matriz é

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \eta_1\lambda^2 + \eta_2\lambda + \eta_3, \quad (3.15)$$

onde

- $\eta_1 = 0$,
- $\eta_2 = \frac{2\beta\alpha - 2\delta - \beta\delta^2\alpha + \beta^2\delta^2 - \delta^2 + \beta\delta\alpha^2 - \alpha\beta^2\delta - 2\beta\alpha^2 + 2\delta\alpha + \beta^2\alpha - 2\beta\delta + \beta\delta\alpha}{(\beta - \delta)^2}$,
- $\eta_3 = \frac{(-1 - \delta + \alpha)(\beta\alpha - \delta - \beta\delta)(\alpha - \beta - 1)}{(\beta - \delta)^2}$.

Para o caso em que $(\alpha, \delta) \in \Delta_1$, temos $\eta_3 > 0$ e $\eta_1\eta_2 - \eta_3 < 0$. Logo, A_3 é instável com $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0$ e $\lambda_3 < 0$. E para $(\alpha, \delta) \in \Delta_3$, temos $\eta_3 < 0$ e $\eta_1\eta_2 - \eta_3 > 0$. Portanto, pelo Teorema 17 concluímos que (3.15) é instável para todo $(\alpha, \delta) \in \Delta_1 \cup \Delta_3$ e consequentemente A_3 também o é. $\square$

Os retratos de fase do sistema para as correspondentes regiões de parâmetros são mostrados na Figura 3.6.

No que segue, analisamos o sistema para o caso particular em que $(\alpha, \delta) = (\beta + 1, \beta)$, no qual existe uma linha de equilíbrios não isolados L em $\overline{\Omega}$ (ver Figura 3.7). Iniciamos apresentando o seguinte Teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [17].

Teorema 19. Seja $c \in \mathbb{R}^n$ um valor regular da aplicação $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. A imagem inversa $M_c = h^{-1}(c) = \{x \in U : h(x) = c\}$ é uma superfície de classe C^k e dimensão m em $\mathbb{R}^{m+n}$. O espaço vetorial tangente T_pM , em cada ponto $p \in M$, é o núcleo da transformação linear $dh_p : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde dh_p é a diferencial de h em p .

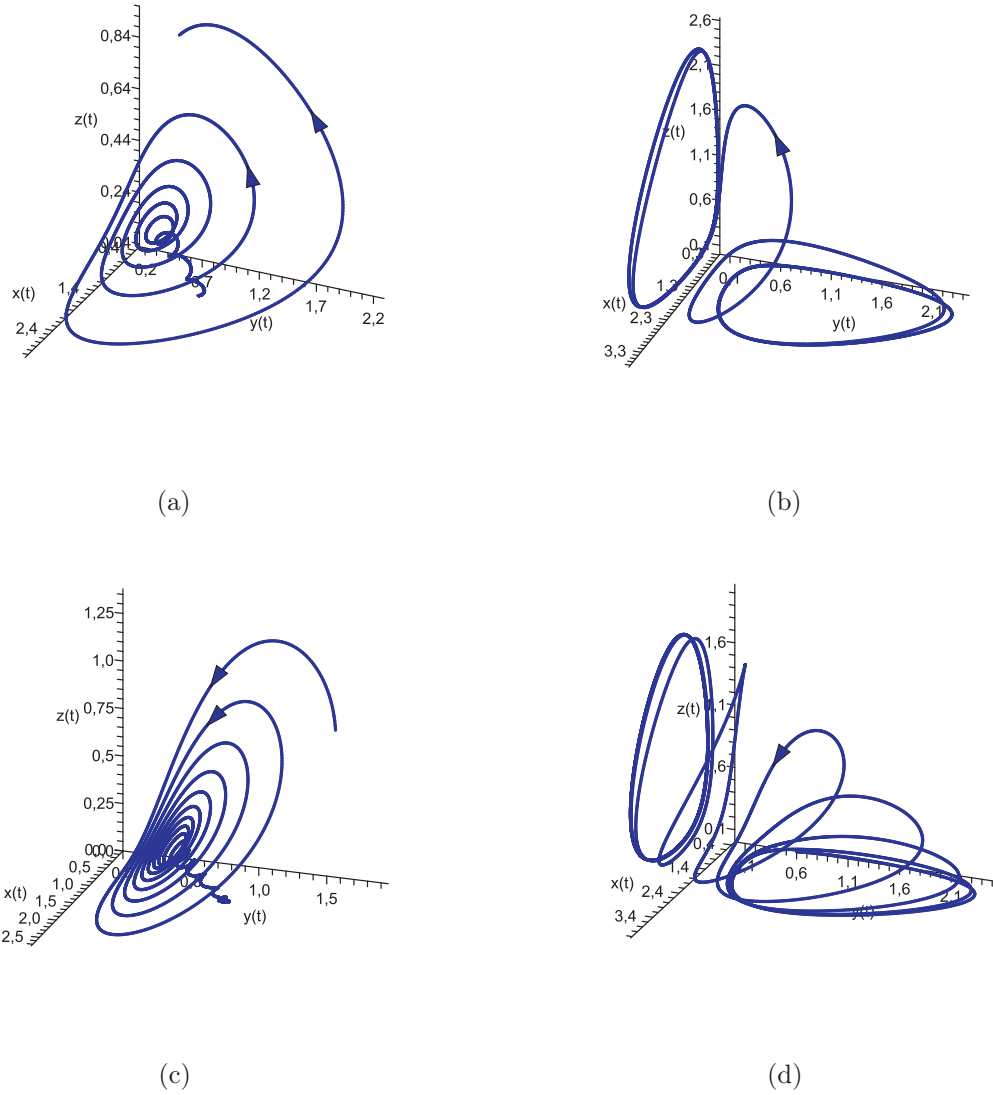


Figura 3.6: Retratos de Fase do sistema (3.11): (a) $(\alpha, \delta) \in \Delta_1$, (b) $(\alpha, \delta) \in \Delta_2$, (c) $(\alpha, \delta) \in \Delta_3$ e (d) $(\alpha, \delta) \in \Delta_4$.

Seja a função

$$\begin{aligned}
 h : \overline{\Omega} - \{v = 0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (u, v, w) &\longmapsto h(u, v, w) = \frac{uw}{v^\beta},
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

pelo Teorema 19, $h(u, v, w) = c$, com $c > 0$ define uma superfície implicitamente em Ω . Também é fácil ver que, para todo $p = (u_1, v_1, w_1) \in \Omega$, existe $c > 0$ tal que $p \in M_c$, onde $M_c = h^{-1}(c) = \{(u, v, w) \in \Omega : h(u, v, w) = c\}$. Para isto, basta definir $c = u_1 w_1 / v_1^\beta$. Portanto, temos que as superfícies de nível de h folheiam Ω (ver Figura 3.8).

O seguinte resultado garante que h é uma integral primeira de (3.12), quando $(\alpha, \delta) = (\beta + 1, \beta)$.

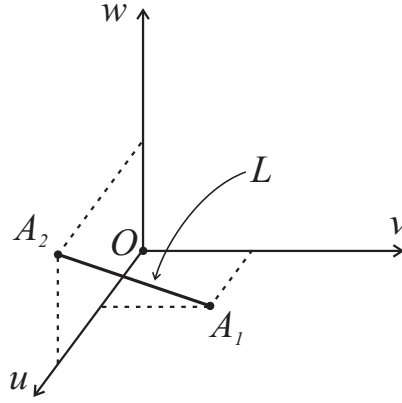


Figura 3.7: Reta L de equilíbrios não-isolados.

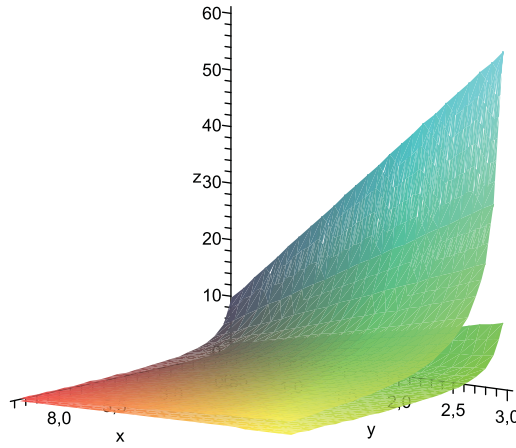


Figura 3.8: Superfícies de nível da função h .

Lema 18. Se $(\alpha, \delta) = (\beta + 1, \beta)$, então, para todo $c > 0$, $M_c = h^{-1}(c)$ é uma superfície invariante pelo fluxo de (3.12).

Demonstração. De fato, para todo $p \in h^{-1}(c)$, $f(p) \in T_p M_c$. Como M_c é dada pela imagem inversa do valor regular c , $T_p M_c = \text{Nuc}(dh_p)$. Seja $\phi(\tau, p)$ solução de (3.12), com $\phi(0, p) = p$, calculando-se $dh_p(f(p)) = \frac{dh}{d\tau}(\phi(\tau, p))$ segue que

$$\begin{aligned}
 \frac{dh}{d\tau}(\phi(\tau, p)) &= \langle \text{grad}h(u, v, w), f(u, v, w) \rangle \\
 &= \left\langle \left(\frac{w}{v^\beta}, -\frac{\beta uw}{v^{\beta+1}}, \frac{u}{v^\beta} \right), (u - uv - \beta uw, -v + uv - vw, -\alpha w + vw + \beta uw) \right\rangle \\
 &= (1 + \beta) \frac{uw}{v^\beta} - \alpha \frac{uw}{v^\beta} = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto o campo (3.12) é tangente à superfície $M_c = h^{-1}(c)$. Sendo assim, toda solução $\phi(\tau, p)$ de (3.11), com $\phi(0, p) \in M_c$, permanece em M_c para todo $\tau \in \mathbb{R}$. $\square$

A Figura 3.9 mostra algumas soluções de (3.11) contidas numa mesma superfície M_c .

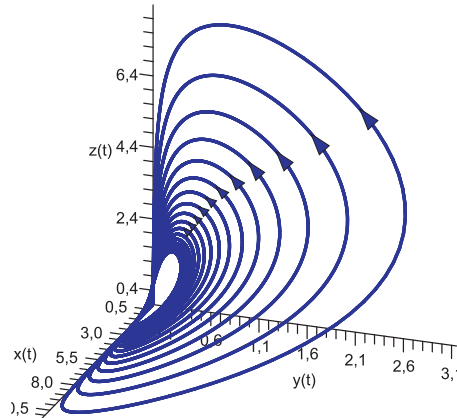


Figura 3.9: Soluções de (3.11) contidas em uma superfície M_c .

A restrição de (3.11) à M_c é da forma

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u - uv - \beta cv^\beta, \\ \dot{v} &= -v + uv - c \frac{v^{\beta+1}}{u}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Na Figura 3.9, onde é mostrado o comportamento de algumas soluções, vemos que as trajetórias são fechadas e periódicas para todas as condições iniciais que tomamos. Nesse caso, uma questão que fica em aberto para se responder é se as órbitas periódicas contidas nas superfícies invariantes são isoladas. Isto poderia ser resolvido encontrando uma integral primeira para o sistema (3.17).

Vejamos uma interpretação biológica para estes resultados. No caso especial onde $(\alpha, \delta) = (\beta+1, \beta)$, para o qual a dinâmica global pode ser estudada por meio das superfícies invariantes que encontramos, a interpretação ecológica é baseada na suposição de que existe um aproveitamento total e constante, por parte do predador, da taxa de biomassa que é subtraída da presa. E isso em todas as relações predador-presa que o sistema contempla. Notemos que esta suposição é bem artificial.

Para $(\alpha, \delta) \in \Delta_4$, a população w tem uma alta taxa de mortalidade e por isso essa espécie é extinta após um determinado tempo. Se $(\alpha, \delta) \in \Delta_2$ temos que todas soluções com condições iniciais em Ω tendem para um regime de coexistência estável entre u e w .

Para $(\alpha, \delta) \in \Delta_3$, temos os equilíbrios A_1 e A_2 , correspondendo a coexistência estável entre as populações u e v , e u e w , respectivamente. Passando para $(\alpha, \delta) \in \Delta_1$, a principal mudança que ocorre é em relação à estabilidade desses pontos de equilíbrio, na

direção transversal aos planos coordenados. Neste caso, a instabilidade significa que se houver uma eventual invasão da terceira espécie, esta tende a aumentar com o passar do tempo de forma indeterminada, devido ao sistema dar origem a oscilações com amplitude crescente.

3.4 Bifurcação de Hopf em um modelo Predador-Presa em $\mathbb{R}^3$

Vimos anteriormente, na seção 3.1, que o sistema predador-presa clássico em $\mathbb{R}^2$ possui órbitas periódicas não isoladas, independentemente dos valores atribuídos aos parâmetros. Já no caso do sistema modificado, apresentado na seção 3.2, provamos a existência de uma órbita periódica atratora, criada a partir de uma bifurcação de Hopf supercrítica e, na seção anterior vimos um sistema em $\mathbb{R}^3$ que, para um caso bem particular, tem seu retrato de fase folheado por superfícies invariantes pelo fluxo. Embora não tenhamos provado, a Figura 3.9 indica a possibilidade das órbitas contidas nestas superfícies invariantes serem periódicas e não isoladas.

Vale ressaltar que, devido a dificuldade de se mostrar a existência de órbitas periódicas isoladas para sistemas não-lineares com mais de duas equações, a questão a respeito da possibilidade de existir tais órbitas para sistemas tipo predador-presa no $\mathbb{R}^3$ ficou sem resposta durante muito tempo. Somente em 1979 foi provada a existência de um ciclo-limite, originado de uma bifurcação de Hopf, para uma classe destes sistemas, por Coste, Peyraud e Couillet (conforme Glendinning [9]).

Nesta seção estudaremos o sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \sum_{j=1}^3 a_{ij}(1 - x_j), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.18)$$

e provaremos, utilizando o método da projeção apresentado no capítulo 2, a ocorrência de uma bifurcação de Hopf supercrítica. Tal sistema foi também estudado [9], utilizando-se outra técnica.

Seja

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \mu & 3 & 2 \\ 2 & 1 - \mu & 0 \\ 0 & 2 & 1 - \mu \end{pmatrix},$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$.

Desse modo, representando as variáveis x_1, x_2, x_3 , por x, y, z , respectivamente, escrevemos o sistema (3.18) como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(8 - \mu - (3 - \mu)x - 3y - 2z), \\ \dot{y} &= y(3 - \mu - 2x - (1 - \mu)y), \\ \dot{z} &= z(3 - \mu - 2y - (1 - \mu)z).\end{aligned}\tag{3.19}$$

Lema 19. *O sistema (3.19) apresenta os seguintes equilíbrios:*

$$\begin{aligned}E_0 &= (0, 0, 0), \quad E_1 = \left(\frac{\mu - 8}{\mu - 3}, 0, 0\right), \quad E_2 = \left(0, 0, \frac{\mu - 3}{\mu - 1}\right), \quad E_3 = \left(\frac{\mu^2 - 7\mu + 2}{\mu^2 - 4\mu + 3}, 0, \frac{\mu - 3}{\mu - 1}\right) \\ E_4 &= \left(0, \frac{\mu - 3}{\mu - 1}, 0\right), \quad E_5 = \left(\frac{\mu^2 - 6\mu - 1}{\mu^2 - 4\mu - 3}, \frac{\mu^2 - 4\mu - 7}{\mu^2 - 4\mu - 3}, 0\right), \quad E_6 = (1, 1, 1) \\ e \quad E_7 &= \left(0, \frac{\mu - 3}{\mu - 1}, \frac{\mu^2 - 2\mu - 3}{\mu^2 - 2\mu - 1}\right).\end{aligned}$$

Aqui também faremos uso da notação de campo de vetores $g : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$, com $g(x, y, z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, onde $\overline{\Omega} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ e $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

Lema 20. *Os planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ são invariantes pelo fluxo do campo g .*

Demonstração. Basta mostrarmos que o campo $g(x, y, z)$, restrito a cada um desses planos não possui componente normal a eles, e portanto, qualquer solução tendo um ponto em comum com um desses planos, fica inteiramente contida nele. De fato:

- $x = 0$

$$\langle g(0, y, z), (1, 0, 0) \rangle = 0,$$

- $y = 0$

$$\langle g(x, 0, z), (0, 1, 0) \rangle = 0,$$

- $z = 0$

$$\langle g(x, y, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0.$$

□

Através da análise linear, é possível verificar que, para valores pequenos de $|\mu|$, os equilíbrios E_0 e E_4 são hiperbólicos tipo nó, instável e estável, respectivamente; e os equilíbrios E_1 , E_2 , E_3 e E_5 são hiperbólicos, todos com comportamento de sela. O equilíbrio E_7 , neste caso, não é biologicamente admissível, por apresentar coordenadas negativas.

Na sequência, focaremos nosso estudo no comportamento do único equilíbrio pertencente ao interior do primeiro octante: $E_6 = (1, 1, 1)$. A matriz jacobiana de (3.19) aplicada em E_6 é dada por

$$A = \begin{pmatrix} \mu - 3 & -3 & -2 \\ -2 & \mu - 1 & 0 \\ 0 & -2 & \mu - 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz possui o polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (5 - 3\mu)\lambda^2 + (1 - 10\mu + 3\mu^2)\lambda + 5 - \mu + 5\mu^2 - \mu^3,$$

e os autovalores $\lambda_1(\mu) = \mu + i$, $\lambda_2(\mu) = \mu - i$ e $\lambda_3(\mu) = \mu - 5$.

Observe que, para $\mu < 0$, E_6 é, localmente, um atrator; se $\mu > 0$, temos $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0$, e nesse caso E_6 é instável. Mas, tomando o valor crítico $\mu = 0$, têm-se dois autovalores imaginários puros $\lambda_{1,2}(0) = \pm i$, e outro real e negativo, $\lambda_3(0) = -5$; caracterizando uma das hipóteses para a ocorrência da bifurcação de Hopf no equilíbrio E_6 . No que segue, provaremos o seguinte resultado.

Lema 21. *Considere o sistema (3.19). Para o valor crítico $\mu = 0$, ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica no ponto de equilíbrio E_6 e, portanto, existe uma órbita periódica atratora no retrato de fase, para pequenos valores de μ positivos.*

Demonstração. Para o cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov utilizaremos o método de projeção, apresentado na seção 2.3. No valor crítico $\mu = 0$, a matriz jacobiana é dada por

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Os vetores

$$q = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, 1, -1 + i \right)$$

e

$$p = \left(-\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i, \frac{9}{26} + \frac{7}{26}i, -\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i \right)$$

são os autovetores de A e A^T , correspondente aos autovetores $\lambda_1(0) = i\omega$ e $\lambda_2(0) = -i\omega$, respectivamente, ou seja, $Aq = i\omega q$ e $A^T p = -i\omega p$ onde $\omega = 1$. Além disso, satisfazem a normalização $\langle p, q \rangle = 1$.

Agora calcularemos as funções multilineares simétricas, conforme apresentado no capítulo 2. Para isso, escrevemos o sistema (3.19) da seguinte forma

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (3.20)$$

onde $F(x)$ é uma função suave, e pode ser expandida da forma

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4),$$

em que $B(x, x)$ e $C(x, x, x)$, são funções bilineares e trilineares simétricas, respectivamente. Tais funções, para $i = 1, 2, 3$, são dadas por

$$\begin{aligned} B_i(x, y) &= \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k, \\ C_i(x, y, z) &= \sum_{j,k,\ell=1}^3 \frac{\partial^3 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_\ell} \Big|_{\xi=0} x_j y_k z_\ell, \end{aligned}$$

onde x, y e $z \in \mathbb{R}^3$; e escrevemos $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ e $z = (z_1, z_2, z_3)^T$. Assim, a função bilinear pode ser expressada como,

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} B_1(x, y) \\ B_2(x, y) \\ B_3(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x_1y_1 - 3x_1y_2 - 2x_1y_3 - 3x_2y_1 - 2x_3y_1 \\ -2(x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2) \\ -2(x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3) \end{pmatrix},$$

enquanto que $C(x, y, z) \equiv 0$, devido a todas as derivadas parciais de (3.20) de ordem três serem nulas. Portanto,

$$B(q, q) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo $s = A^{-1}B(q, \bar{q})$, temos que

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo $r = (2i\omega I - A)^{-1}B(q, q)$, onde I é a matriz identidade de ordem 3, obtemos

$$r = \begin{pmatrix} \frac{1}{87} + \frac{104}{87}i \\ -\frac{14}{87} - \frac{2}{29}i \\ \frac{80}{87} - \frac{148}{87}i \end{pmatrix}.$$

Finalmente, aplicando a fórmula

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re} [\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, s) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, r) \rangle],$$

encontramos

$$l_1(0) = -\frac{50}{377}.$$

Para provar que de fato ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica, resta-nos apenas verificar a condição de transversalidade. Calculando a derivada da matriz jacobiana $A(\mu)$ em relação ao parâmetro μ e aplicando no valor crítico $\mu = 0$ encontramos

$$\frac{dA}{d\mu}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo a equação

$$\frac{d\gamma}{d\mu}(0) = \operatorname{Re} \left\langle p, \frac{dA}{d\mu}(0)q \right\rangle,$$

obtemos,

$$\frac{d\gamma}{d\mu}(0) = 1 \neq 0.$$

E com isso terminamos a demonstração. $\square$

As Figuras 3.10 e 3.12 contêm algumas simulações numéricas que realizamos, onde podemos ver que, para $\mu < 0$, o equilíbrio E_6 é um atrator local; para $\mu = 0$ identificamos E_6 como um foco atrator fraco e para $\mu > 0$ este torna-se repulsor com o surgimento da órbita periódica atratora.

Algo importante a observar é que, conforme o valor de $\mu > 0$ aumenta, a órbita periódica cresce até um tamanho máximo, delimitado pelas variedades instáveis dos equilíbrios E_1 , E_3 e E_5 , respectivamente; o qual é atingido quando $\mu \rightarrow \bar{\mu} \approx 0.051$. A Figura 3.11 mostra um esboço das soluções, ilustrando tal fenômeno.

Biologicamente, a bifurcação de Hopf supercrítica em um equilíbrio não trivial (pertencente à Ω) significa uma mudança na forma de coexistência entre as populações; com o surgimento do ciclo limite estável, essas populações, que a partir de qualquer condição inicial em Ω após determinado tempo coexistiam de uma forma estacionária, passam a coexistir de modo oscilatório periódico.

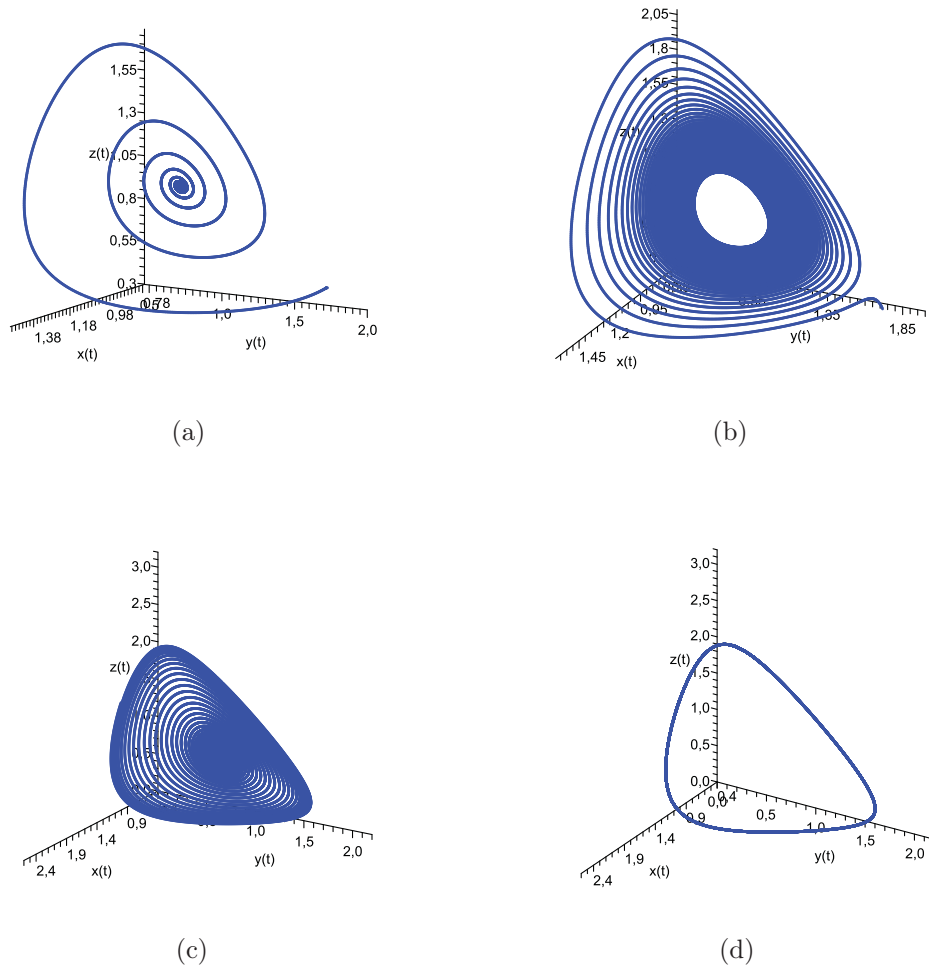


Figura 3.10: Retrato de fase do sistema (3.19): (a) $\mu = -0.1$, (b) $\mu = 0$, (c) e (d) $\mu = 0.02$.

Uma outra mudança muito importante na dinâmica das soluções ocorre com a destruição do ciclo limite, quando $\mu \rightarrow \bar{\mu} \approx 0.051$. Com efeito, neste caso passamos de uma coexistência oscilatória periódica entre as três populações x , y e z , para uma situação estacionária, representada pelo ponto de equilíbrio E_4 , na qual subsiste apenas a espécie y .

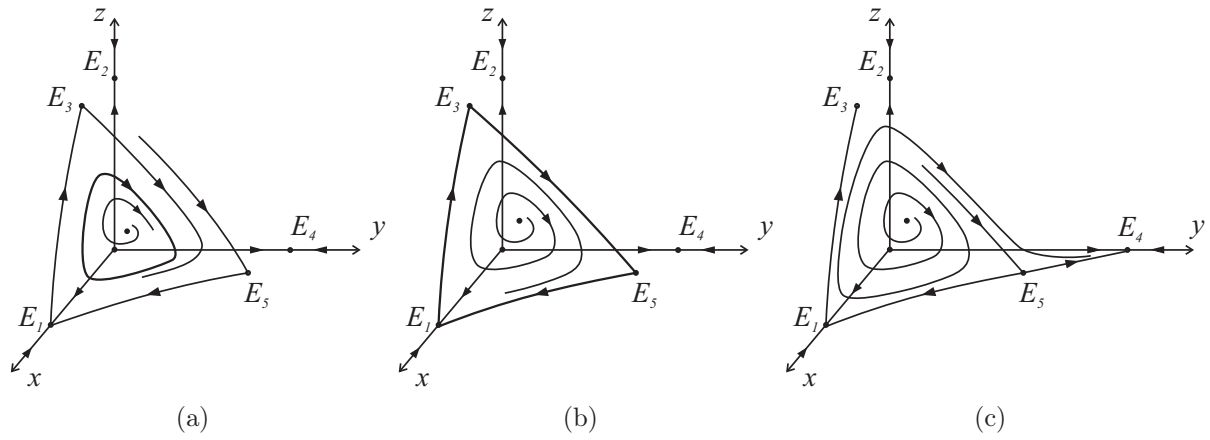


Figura 3.11: Comportamento das soluções do sistema (3.19): (a) $0 < \mu < 0.051$, (b) $\mu = 0.051$ e (c) $\mu > 0.051$.

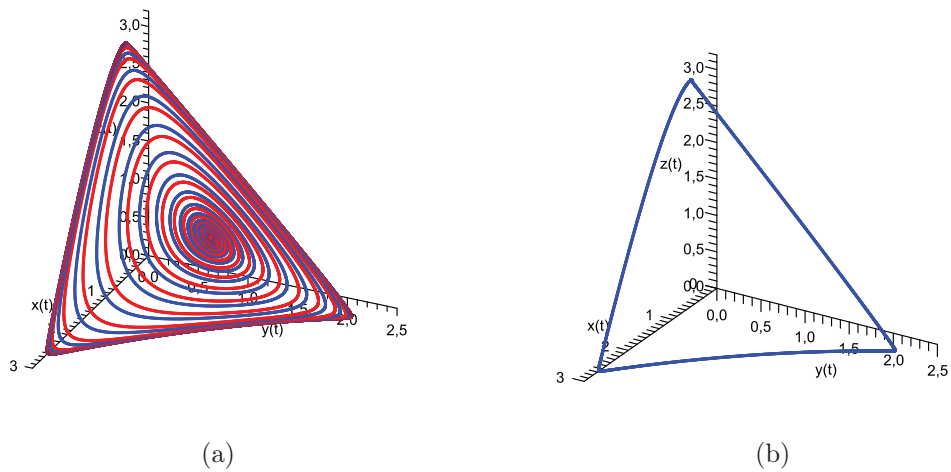


Figura 3.12: (a) Retrato de fase do sistema (3.19), para $\mu = 0.051$, com tempo de integração $[0, 300]$ e as condições iniciais $(1, 1.01, 1)$ e $(1, 1.01, 1.01)$; neste caso, E_6 é um foco repulsor. (b) Órbita periódica criada a partir da bifurcação de Hopf.

Dinâmica Global e Bifurcação de Hopf em um Modelo de HIV

Neste capítulo estudamos, a partir de uma abordagem qualitativa, um modelo com três equações diferenciais, proposto por Wang [23], para descrever a interação entre o vírus HIV e as células T CD4+, no qual é considerado a aplicação de um tratamento.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na primeira seção discorremos de forma breve sobre a modelagem do vírus HIV usando equações diferenciais ordinárias, e na segunda realizamos uma análise das características gerais do modelo escolhido. Na terceira e quarta seções estudamos a estabilidade local e global dos equilíbrios P_0 e P^* , respectivamente. Neste último, utilizamos o critério de estabilidade desenvolvido por Li e Muldowney [16], o qual foi utilizado em [23] para o estudo da estabilidade global. Na última seção do capítulo apresentamos um estudo da bifurcação de Hopf que ocorre no sistema, levando a ocorrência de comportamento periódico das soluções, e apresentamos algumas simulações numéricas.

4.1 Uma visão geral e o modelo escolhido

O vírus HIV (*Human Immunodeficiency Virus*) tem como alvo principal as células T CD4+, fazendo com que haja o esgotamento destas células. Devido ao papel central das células T CD4+ estar ligado à regulação imunológica, sua diminuição resulta em efeitos prejudiciais generalizados no funcionamento do sistema imunológico como um todo (Perelson *et al.* [19]). A descoberta do vírus HIV se deu no início da década de 1980 e, mesmo com o intenso avanço tecnológico nas áreas relacionadas à saúde, ainda não existe um tratamento que consiga eliminar tal vírus do corpo humano; no mais, o que se tem na

atualidade são tratamentos que visam retardar a velocidade do processo de dano causado no sistema imunológico.

Modelos matemáticos que descrevem a interação entre o vírus HIV e as células T CD4+ têm sido muito estudados nos últimos anos. Modelos simples têm desempenhado um papel significativo no desenvolvimento de uma melhor compreensão da doença e das várias estratégias de terapias de droga usadas contra ela (Leenheer & Smith [13]).

Em termos de equações diferenciais, geralmente a ação do vírus HIV pode ser descrita pelo seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{T} &= s - \alpha T - kVT + f(T, T^*), \\ \dot{T}^* &= kVT - \beta T^*, \\ \dot{V} &= N\beta T^* - \gamma V,\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde T , T^* e V representam as concentrações de células T saudáveis (não-infectadas), células T infectadas e vírus livre, respectivamente. É assumido que as células T CD4+ são produzidas pelo corpo humano em uma taxa constante s , e que as células T recém-produzidas são saudáveis, mas suscetíveis ao vírus HIV. Os parâmetros α , β e γ são as taxas de mortalidade das células T saudáveis, células T infectadas e das partículas de vírus, respectivamente. A infecção se dá através de um contato direto entre o vírus e as células T saudáveis; e a incidência é descrita por um simples termo kTV de massa-ação, onde $k > 0$ é a taxa de contato entre o vírus e as células T saudáveis. As células infectadas produzem vírus e cada célula T infectada produz N vírus durante seu tempo de vida. A função f é um termo que governa o crescimento das células T (Wang [23]).

Uma das terapias usadas atualmente em pacientes infectados pelo vírus HIV envolve a inibição da transcriptase reversa (*reverse transcriptase* - RT), em que o HIV pode entrar em uma célula T mas pode não infectá-la, isto é, somente uma parte de células T são infectadas.

Neste capítulo estudamos um modelo de HIV proposto por Wang [23], o qual é obtido de (4.1) incluindo um termo logístico completo $f(T, T^*) = rT(1 - (T + T^*)/T_{max})$, em que T_{max} é a capacidade populacional máxima de células T , e um novo parâmetro σ_1 , relativo ao efeito do tratamento supracitado. Portanto trabalharemos com o seguinte modelo

$$\begin{aligned}\dot{T} &= s - \alpha T + rT \left(1 - \frac{T + T^*}{T_{max}}\right) - kVT, \\ \dot{T}^* &= \sigma_1 kVT - \beta T^*, \\ \dot{V} &= N\beta T^* - \gamma V,\end{aligned}\tag{4.2}$$

onde $0 \leq \sigma_1 \leq 1$ e $1 - \sigma_1$ é a eficiência do tratamento. Por exemplo: se $\sigma_1 = 0$, temos que o tratamento é 100% eficiente.

4.2 Modelo de HIV com tratamento RT

Antes de iniciarmos o estudo de (4.2), recordamos aqui que os parâmetros $s, \alpha, r, T_{max}, k, \sigma_1, N, \beta$ e γ são todos positivos, e que as variáveis T, T^* e V só possuem significado biológico para valores positivos. Assim, o domínio em que vamos estudar as variáveis se reduz ao conjunto $\mathbb{R}_+^3 = \{(T, T^*, V) \in \mathbb{R}^3 : T \geq 0, T^* \geq 0, V \geq 0\}$.

Quando conveniente também iremos fazer referência a (4.2) como um campo de vetores $F : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$, onde $F(T, T^*, V)$ é dado por

$$\left(s - \alpha T + rT \left(1 - \frac{T + T^*}{T_{max}} \right) - kVT, \sigma_1 kVT - \beta T^*, N\beta T^* - \gamma V \right). \quad (4.3)$$

Lema 22. *O conjunto $\mathbb{R}_+^3$ é positivamente invariante com respeito ao fluxo de (4.3).*

Demonstração. Para demonstrar este lema mostraremos que os ângulos entre o campo (4.3) restrito aos planos coordenados, e os vetores normais a esses planos apontando para dentro de $\mathbb{R}_+^3$, não são obtusos. De fato

- $T = 0$

$$\langle F(0, T^*, V), (1, 0, 0) \rangle = s \geq 0;$$

- $T^* = 0$

$$\langle F(T, 0, V), (0, 1, 0) \rangle = \sigma_1 kVT \geq 0;$$

- $V = 0$

$$\langle F(T, T^*, 0), (0, 0, 1) \rangle = N\beta T^* \geq 0.$$

□

Na ausência da infecção HIV, a dinâmica das células T pode ser descrita por

$$\dot{T} = s - \alpha T + rT \left(1 - \frac{T}{T_{max}} \right).$$

E neste caso a concentração de células T se estabiliza no nível T_0 , onde

$$T_0 = \frac{T_{max}}{2r} \left((r - s) + \sqrt{(r - s)^2 + \frac{4sr}{T_{max}}} \right).$$

Lema 23. *Existe um conjunto compacto $\Gamma \subset \mathbb{R}_+^3$ tal que as soluções de (4.2) com condição inicial em Γ permanecem nesse conjunto para $t > 0$.*

Demonstração. Segue a partir da primeira equação de (4.2) que se $T(0) < T_0$, então $T(t) < T_0$ para todo $t > 0$. Além disso, seja a função $G = \sigma_1 T(t) + T^*(t)$, calculando sua derivada encontramos

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \sigma_1 \dot{T} + \dot{T}^* \\ &= \sigma_1 s - \sigma_1 \alpha T - \beta T^* + \sigma_1 r T \left(1 - \frac{T + T^*}{T_{max}}\right) \\ &\leq \sigma_1 s + \sigma_1 r T_0 - \theta(\sigma_1 T + T^*) \end{aligned}$$

onde $\theta = \min\{\alpha, \beta\}$. Portanto G é limitada, o que implica a limitação de T^* e consequentemente a de V . Portanto provamos que existe um número $M > 0$ tal que o conjunto $\Gamma = \{(T, T^*, V) \in \mathbb{R}_+^3 : T \leq T_0, T^* \leq M, V \leq M\}$ é positivamente invariante com respeito a (4.3). $\square$

Para encontrar os pontos de equilíbrio de (4.2), resolvemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} s - \alpha T + r T \left(1 - \frac{T + T^*}{T_{max}}\right) - kVT &= 0, \\ \sigma_1 kVT - \beta T^* &= 0, \\ N\beta T^* - \gamma V &= 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Obviamente, $P_0 = (T_0, 0, 0)$ é um ponto de equilíbrio de (4.2) que existe para todos os valores de parâmetros. Também P_0 é referido como sendo o *estado estacionário não infectado*.

Seja o valor crítico

$$\bar{\sigma} = \frac{\gamma}{kNT_0}. \tag{4.5}$$

O seguinte resultado estabelece a existência e a unicidade de um outro ponto de equilíbrio $P^* \in \overset{\circ}{\Gamma}$, em que $\overset{\circ}{\Gamma} = \text{int}(\Gamma)$, representando um *estado estacionário infectado*.

Proposição 2. *Se $\sigma_1 \leq \bar{\sigma}$, então o sistema (4.2) tem somente o estado estacionário não infectado $P_0 = (T_0, 0, 0)$; enquanto que se $\sigma_1 \geq \bar{\sigma}$, então o sistema (4.2) tem dois estados estacionários: P_0 e um único estado estacionário infectado $P^* = (\bar{T}, \bar{T}^*, \bar{V})$, em que $\bar{T} > 0$, $\bar{T}^* > 0$, e $\bar{V} > 0$, são dados por*

$$\bar{T} = \frac{\gamma}{\sigma_1 kN}, \quad \bar{T}^* = \frac{\gamma}{N\beta} \bar{V} \quad e \quad \bar{V} = \frac{s + (r - \alpha)\bar{T} - \frac{r}{T_{max}}\bar{T}^2}{\left(k + \frac{r\gamma}{\beta NT_{max}}\right)\bar{T}}.$$

Demonstração. Resolvendo o sistema (4.4), pode-se mostrar que $\bar{V} > 0$ se, e somente se, $\sigma_1 > \bar{\sigma}$. $\square$

4.3 Estabilidade de P_0

De acordo com a Proposição 2, o sistema (4.2) tem no máximo dois pontos de equilíbrio em Γ . Nesta seção, estudamos a estabilidade de P_0 , localmente e globalmente.

Teorema 20. *Se $\sigma_1 < \bar{\sigma}$, então P_0 é localmente assintoticamente estável. Se $\sigma_1 = \bar{\sigma}$, então P_0 é não-hiperbólico. Se $\sigma_1 > \bar{\sigma}$, então P_0 é instável e as soluções com condições iniciais suficientemente próximas de P_0 , afastam-se deste ponto, exceto aquelas pertencentes ao eixo invariante T .*

Demonstração. A matriz jacobiana do sistema (4.2) em P_0 é

$$JF(P_0) = \begin{pmatrix} -\alpha + r \left(1 - \frac{T_0}{T_{max}}\right) - \frac{rT_0}{T_{max}} & -\frac{rT_0}{T_{max}} & -kT_0 \\ 0 & -\beta & \sigma_1 kT_0 \\ 0 & N\beta & -\gamma \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico desta matriz é

$$p(\lambda) = \left[\lambda + \alpha - r \left(1 - \frac{T_0}{T_{max}}\right) + \frac{rT_0}{T_{max}} \right] [\lambda^2 + (\beta + \gamma)\lambda + \beta\gamma - \sigma_1 kN\beta T_0].$$

Um zero deste polinômio é

$$\lambda_1 = -\alpha + r \left(1 - \frac{T_0}{T_{max}}\right) - \frac{rT_0}{T_{max}}.$$

A primeira equação de (4.4) nos dá

$$-\alpha + r \left(1 - \frac{T_0}{T_{max}}\right) = -\frac{s}{T_0},$$

aplicando essa relação na expressão do autovalor λ_1 obtemos

$$\lambda_1 = -\frac{s}{T_0} - \frac{rT_0}{T_{max}} < 0.$$

Os outros dois zeros de $p(\lambda)$ são as raízes da equação

$$\lambda^2 + (\beta + \gamma)\lambda + \beta\gamma - \sigma_1 kN\beta T_0 = 0,$$

que são

$$\lambda_{2,3} = -\frac{\beta + \gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{(\beta + \gamma)^2 - 4(\beta\gamma - \sigma_1 k N \beta T_0)}}{2}.$$

Portanto $\operatorname{Re} \lambda_{2,3} < 0$ se, e somente se, $\beta\gamma - \sigma_1 k N \beta T_0 > 0$, condição equivalente a $\sigma_1 < \bar{\sigma}$. Se $\sigma_1 = \bar{\sigma}$, o equilíbrio P_0 é não-hiperbólico, com um autovalor zero e os outros dois reais negativos. Se $\sigma_1 > \bar{\sigma}$, um autovalor é positivo, e nesse caso P_0 é instável. $\square$

Uma vez que a limitação das soluções já foi provada no Lema 23, usando o Lema 22 juntamente com o Teorema 4.1 de [11] e argumentos semelhantes aos usados para provar a Proposição 4.2 de [16], pode-se mostrar que quando P_0 torna-se instável o sistema (4.2) é uniformemente persistente, o que significa existir uma constante $\varepsilon > 0$, tal que, qualquer solução $(T(t), T^*(t), V(t))$ de (4.2), com condição inicial $(T(0), T^*(0), V(0)) \in \overset{\circ}{\Gamma}$, satisfaz

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} T(t) \geq \varepsilon, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} T^*(t) \geq \varepsilon \quad \text{e} \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} V(t) \geq \varepsilon.$$

Isto implica a existência de um conjunto compacto absorvente $K \subset \overset{\circ}{\Gamma}$ (ver [16]).

Proposição 3. *Se $\sigma_1 > \bar{\sigma}$, então o sistema (4.2) é uniformemente persistente, e existe um conjunto compacto absorvente $K \subset \overset{\circ}{\Gamma}$.*

A estabilidade local de P_0 foi estabelecida no Teorema 20, onde provamos que ele é localmente assintoticamente estável para $\sigma_1 < \bar{\sigma}$, e instável para $\sigma_1 > \bar{\sigma}$. No que segue, utilizaremos o Princípio de Invariância de LaSalle (ver Teorema 5) para estabelecer nosso resultado referente à estabilidade global de P_0 , o qual garante que se $\sigma_1 \leq \bar{\sigma}$, então todas as soluções com condição inicial em Γ tendem para P_0 ; e nesse caso ele é um atrator em Γ .

Teorema 21. *Assuma que $\sigma_1 \leq \bar{\sigma}$, então P_0 é globalmente assintoticamente estável em Γ .*

Demonstração. Seja $L = NT^* + V$. Então, a derivada de L ao longo das soluções de (4.2) é

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \langle \operatorname{grad} L(T, T^*, V), F(T, T^*, V) \rangle = N(\sigma_1 k VT - \beta T^*) + N\beta T^* - \gamma V = \\ &= N\sigma_1 k VT - \gamma V = \gamma V \left(\frac{N\sigma_1 k}{\gamma} T - 1 \right) \leq \gamma V \left(\frac{N\bar{\sigma} k}{\gamma} T - 1 \right) \leq \gamma V \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) \leq 0 \end{aligned}$$

em Γ . $\dot{L} = 0$ se, e somente se $V = 0$ ou $\sigma_1 = \bar{\sigma}$ e $T = T_0$. O conjunto máximo invariante em $\{(T, T^*, V) \in \Gamma : \dot{L} = 0\}$ é o equilíbrio P_0 . Logo, pelo Teorema 5, resulta que todas as soluções convergem para P_0 . Isto e a estabilidade local de P_0 estabelecida pelo Teorema 20 implicam a estabilidade assintótica global de P_0 em Γ . $\square$

Portanto, o Teorema 21 resolve o problema de determinar a dinâmica global de (4.2) em Γ quando $\sigma_1 \leq \bar{\sigma}$. Biologicamente, este resultado implica que se o inibidor RT é pelo menos $1 - \bar{\sigma}$ eficiente, então todas as células T infectadas e as partículas de vírus são eliminadas; acarretando que, após algum tempo - independente do estado inicial - a infecção HIV deixa de existir. Nesse caso, a doença desaparece e as células T saudáveis se estabilizam no nível T_0 .

4.4 Estabilidade global de P^*

Nesta seção estudamos a estabilidade local e global do equilíbrio P^* , que, como já sabemos, pertence ao interior de Γ quando $\sigma_1 > \bar{\sigma}$.

A matriz jacobiana do sistema (4.2) em $P^* = (\bar{T}, \bar{T}^*, \bar{V})$ é dada por

$$JF(P^*) = \begin{pmatrix} -\alpha + r \left(1 - \frac{\bar{T} + \bar{T}^*}{T_{max}} \right) - \frac{r\bar{T}}{T_{max}} - k\bar{V} & -\frac{r\bar{T}}{T_{max}} & -k\bar{T} \\ \sigma_1 k \bar{V} & -\beta & \sigma_1 k \bar{T} \\ 0 & N\beta & -\gamma \end{pmatrix}.$$

A partir da primeira equação de (4.4) temos

$$-\alpha + r \left(1 - \frac{\bar{T} + \bar{T}^*}{T_{max}} \right) - k\bar{V} = -\frac{s}{\bar{T}}, \quad (4.6)$$

note também que

$$\gamma = \sigma_1 k N \bar{T}. \quad (4.7)$$

Utilizando (4.6) e (4.7), o polinômio característico associado a $JF(P^*)$ pode ser escrito como

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (a + \beta + \gamma)\lambda^2 + \left[a(\beta + \gamma) + \frac{\sigma_1 k r}{T_{max}} \bar{V} \bar{T} \right] \lambda + \frac{\sigma_1 k r \gamma}{T_{max}} \bar{V} \bar{T} + k\beta\gamma\bar{V},$$

onde $a = \frac{s}{\bar{T}} + \frac{r\bar{T}}{T_{max}}$. Todos os coeficientes são positivos. Logo pelo critério de Routh-Hurwitz, todos os zeros de $p(\lambda)$ têm parte real negativa se e somente se

$$\Delta = (a + \beta + \gamma) \left[a(\beta + \gamma) + \frac{\sigma_1 k r}{T_{max}} \bar{V} \bar{T} \right] - \frac{\sigma_1 k r \gamma}{T_{max}} \bar{V} \bar{T} - k\beta\gamma\bar{V} > 0.$$

Se reescrevermos Δ da forma

$$\begin{aligned}\Delta &= (a + \beta) \left[a(\beta + \gamma) + \frac{kr}{T_{max}} \bar{V} \bar{T} \right] + a\gamma(\beta + \gamma) - k\beta\gamma\bar{V} \\ &= (a + \beta) \left[a(\beta + \gamma) + \frac{kr}{T_{max}} \bar{V} \bar{T} \right] + b\gamma(\beta + \gamma) + k\gamma^2\bar{V},\end{aligned}$$

onde $b = a - k\bar{V} = \alpha - r + r(2\bar{T} + \bar{T}^*)/T_{max}$, obtemos que $\Delta > 0$ se $b \geq 0$. Um olhar mais atento em b como uma função de r revela que $b \geq 0$ para r pequeno ou grande. Assim obtemos o seguinte resultado para a estabilidade local de P^* .

Proposição 4. *Seja $\sigma_1 > \bar{\sigma}$, então o estado estacionário infectado P^* é localmente assintoticamente estável se*

$$\alpha - r + r \frac{2\bar{T} + \bar{T}^*}{T_{max}} \geq 0. \quad (4.8)$$

Em particular, a condição (4.8) é verdadeira quando r é suficientemente pequeno ou suficientemente grande.

O retrato de fase do sistema (4.2) nas condições da Proposição 4 é mostrado na Figura 4.1.

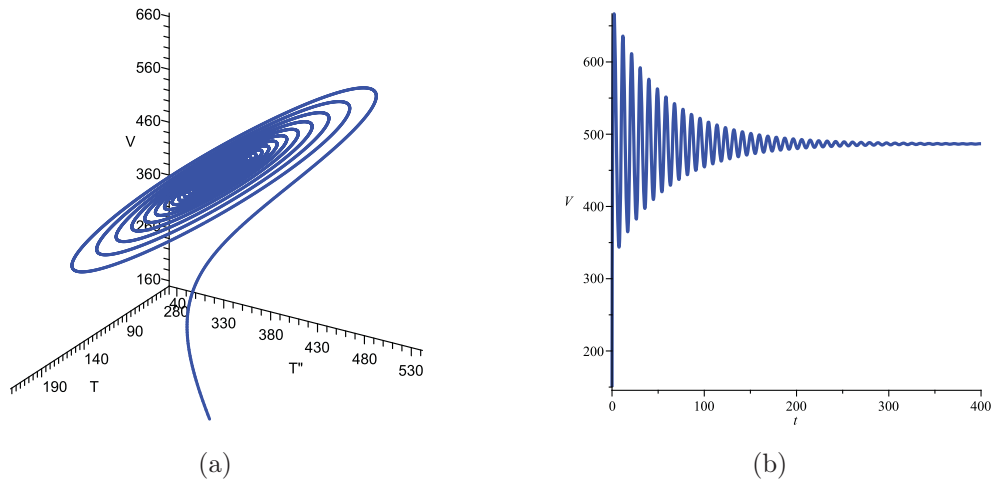


Figura 4.1: (a) Retrato de fase do sistema (4.2) próximo ao equilíbrio P^* , nas condições da Proposição 4; com a condição inicial $(200, 460, 150)$ e tempo de integração $[0, 200]$. Os valores dos parâmetros são: $s = 0.1$, $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 2.4$, $k = 0.0027$, $T_{max} = 1500$, $N = 10$, $r = 2$ e $\sigma_1 = 0.8$. (b) Coordenada V .

Para o estudo da estabilidade global do equilíbrio P^* usaremos o critério de estabilidade desenvolvido por Li e Muldowney [16], que foi apresentado na Seção 1.3 deste trabalho, que reescrevemos abaixo.

Teorema 22. *Para o sistema $\dot{x} = f(x)$, assuma que Δ é simplesmente conexo e que as hipóteses (H1) e (H2) do Problema 1 são satisfeitas. Então o único equilíbrio x_0*

do sistema é globalmente assintoticamente estável em Δ se existe uma função P e uma medida de Lozinskiĩ μ tal que $\bar{q}_2 < 0$.

Evidentemente $\overset{\circ}{\Gamma}$ é simplesmente conexo e P^* é o único equilíbrio em $\overset{\circ}{\Gamma}$ quando $\sigma_1 > \bar{\sigma}$. A Proposição 3 implica a existência de um compacto absorvente $K \subset \overset{\circ}{\Gamma}$, e pela Proposição 4 temos que se r é pequeno ou grande, então P^* é localmente assintoticamente estável. Agora provaremos que P^* é globalmente assintoticamente estável quando σ_1 é grande o suficiente e r é suficientemente pequeno.

Teorema 23. *Assuma que $\sigma_1 > \max\{\bar{\sigma}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}\}$ e que r satisfaz*

$$0 < r < \min \left\{ \frac{T_{max}(\sigma_1(\alpha + \beta) - \beta)}{\sigma_1(T_{max} - 3\varepsilon)}, \frac{T_{max}}{T_0} \beta \right\},$$

onde ε é a constante de persistência uniforme, e assumimos que $3\varepsilon < T_{max}$. Então, P^* é globalmente assintoticamente estável em $\overset{\circ}{\Gamma}$.

Demonstração. Para usar o Teorema 22, precisamos mostrar que existe uma função P e uma medida de Lozinskiĩ μ tal que $\bar{q}_2 < 0$.

Fazendo $p = \alpha - r \left(1 - \frac{T+T^*}{T_{max}}\right) + \frac{rT}{T_{max}} + kV$, a matriz jacobiana de (4.2) aplicada no equilíbrio $P^* = (\bar{T}, \bar{T}^*, \bar{V})$ fica

$$JF(P^*) = \begin{pmatrix} -p & -\frac{r\bar{T}}{T_{max}} & -k\bar{T} \\ \sigma_1 k\bar{V} & -\beta & \sigma_1 k\bar{T} \\ 0 & N\beta & -\gamma \end{pmatrix},$$

e sua segunda componente aditiva $J^{[2]}$ é

$$J^{[2]}F(P^*) = \begin{pmatrix} -p - \beta & \sigma_1 kT & kT \\ N\beta & -p - \beta & -\frac{rT}{T_{max}} \\ 0 & \sigma_1 kV & -\beta - \gamma \end{pmatrix}.$$

Definimos a função $P(x) = P(T, T^*, V) = \text{diag}\{1, \frac{T^*}{V}, \frac{T^*}{V}\}$. Logo $P^{-1}(x) = \text{diag}\{1, \frac{V}{T^*}, \frac{V}{T^*}\}$ e

$$P_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x} f(x) & \frac{\partial p_{12}}{\partial x} f(x) & \frac{\partial p_{13}}{\partial x} f(x) \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x} f(x) & \frac{\partial p_{22}}{\partial x} f(x) & \frac{\partial p_{23}}{\partial x} f(x) \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x} f(x) & \frac{\partial p_{32}}{\partial x} f(x) & \frac{\partial p_{33}}{\partial x} f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{T}^*}{V} - \frac{T^* \dot{V}}{V^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{T}^*}{V} - \frac{T^* \dot{V}}{V^2} \end{pmatrix}.$$

Fazendo os cálculos para encontrar a matrix $X = P_f \cdot P^{-1} + P \cdot J^{[2]} F \cdot P^{-1}$, obtemos

$$X = \begin{pmatrix} -p - \beta & \frac{\sigma_1 kTV}{T^*} & \frac{kTV}{T^*} \\ \frac{N\beta T^*}{V} & \frac{\dot{T}^*}{T^*} - \frac{\dot{V}}{V} - p - \gamma & -\frac{rT}{T_{max}} \\ 0 & \sigma_1 kV & \frac{\dot{T}^*}{T^*} - \frac{\dot{V}}{V} - \beta - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}.$$

onde $X_{11} = (-p - \beta)$, $X_{12} = (\frac{\sigma_1 kTV}{T^*}, \frac{kTV}{T^*})$, $X_{21} = (\frac{N\beta T^*}{V}, 0)^T$ e

$$X_{22} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{T}^*}{T^*} - \frac{\dot{V}}{V} - p - \gamma & -\frac{rT}{T_{max}} \\ \sigma_1 kV & \frac{\dot{T}^*}{T^*} - \frac{\dot{V}}{V} - \beta - \gamma \end{pmatrix}.$$

É fácil de ver que $\|(u, v, w)\| = \max\{|u|, |v| + |w|\}$ define uma norma em $\mathbb{R}^3$. Seja μ a medida de Lozinskiĭ com respeito a esta norma. Então, temos a estimativa (ver Martin [18]).

$$\mu(X) \leq \max\{g_1, g_2\} \quad (4.9)$$

onde

$$g_1 = \mu_1(X_{11}) + \|X_{12}\| \text{ e } g_2 = \|X_{21}\| + \mu_1(X_{22})$$

e $\|X_{12}\|$, $\|X_{21}\|$ são as normas l_1 dessas matrizes, e μ_1 é a medida de Lozinskiĭ com respeito a norma l_1 . Mais especificamente,

$$\mu_1(X_{11}) = -p - \beta, \quad \|X_{12}\| = \frac{kTV}{T^*} \text{ e } \|X_{21}\| = \frac{N\beta T^*}{V}.$$

Para calcular $\mu_1(X_{22})$, ver [25], adicionamos o valor absoluto dos elementos fora da diagonal ao elemento da diagonal em cada coluna de X_{22} , e então tomamos o máximo das duas somas,

$$\begin{aligned}
\mu_1(X_{22}) &= \max \left\{ \frac{\dot{T}^*}{T^*} - \frac{\dot{V}}{V} - p - \gamma + \sigma_1 kV, \frac{\dot{T}^*}{T^*} - \frac{\dot{V}}{V} - \beta - \gamma + \frac{rT}{T_{max}} \right\} \\
&= \frac{\dot{T}^*}{T^*} - \frac{\dot{V}}{V} - \gamma + \max \left\{ -\alpha + r - \frac{2rT}{T_{max}} - \frac{rT^*}{T_{max}} - kV + \sigma_1 kV, -\beta + \frac{rT}{T_{max}} \right\} \\
&\leq \frac{\dot{T}^*}{T^*} - \frac{\dot{V}}{V} - \gamma + \max \left\{ -\alpha + r - \frac{3r\varepsilon}{T_{max}}, -\beta + \frac{rT_0}{T_{max}} \right\},
\end{aligned}$$

uma vez que $T(t) < T_0$ e $T(t), T^*(t) \geq \varepsilon$. A partir da segunda e terceira equações de (4.2) obtemos

$$\frac{\dot{T}^*}{T^*} = \frac{\sigma_1 kVT}{T^*} - \beta \quad \text{e} \quad \frac{\dot{V}}{V} = \frac{N\beta T^*}{V} - \gamma,$$

respectivamente. Usando este fato segue que

$$\begin{aligned}
g_1 &= -p - \beta + \frac{kTV}{T^*} \\
&= \frac{1}{\sigma_1} \frac{\dot{T}^*}{T^*} - \alpha + r \left(1 - \frac{T + T^*}{T_{max}} \right) - \frac{rT}{T_{max}} - kV + \frac{\beta}{\sigma_1} - \beta \\
&< \frac{1}{\sigma_1} \frac{\dot{T}^*}{T^*} - \left(\alpha - r + \frac{3r\varepsilon}{T_{max}} - \frac{\beta}{\sigma_1} + \beta \right), \\
g_2 &\leq \frac{N\beta T^*}{V} + \frac{\dot{T}^*}{T^*} - \frac{\dot{V}}{V} - \gamma + \max \left\{ -\alpha + r - \frac{3r\varepsilon}{T_{max}}, -\beta + \frac{rT_0}{T_{max}} \right\} \\
&= \frac{\dot{T}^*}{T^*} - \min \left\{ \alpha - r + \frac{3r\varepsilon}{T_{max}}, \beta - \frac{rT_0}{T_{max}} \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto, de (4.9) obtemos,

$$\mu(X) \leq \max \left\{ \frac{1}{\sigma_1} \frac{\dot{T}^*}{T^*}, \frac{\dot{T}^*}{T^*} \right\} - \eta,$$

onde

$$\eta = \min \left\{ \alpha - r + \frac{3r\varepsilon}{T_{max}} - \frac{\beta}{\sigma_1} + \beta, \beta - \frac{rT_0}{T_{max}} \right\} > 0,$$

por hipótese. Note que

$$\max \left\{ \frac{1}{\sigma_1} \frac{\dot{T}^*}{T^*}, \frac{\dot{T}^*}{T^*} \right\} = \frac{\dot{T}^*}{T^*} + \max \left\{ \frac{1}{\sigma_1} \frac{\dot{T}^*}{T^*} - \frac{\dot{T}^*}{T^*}, 0 \right\} = \frac{\dot{T}^*}{T^*} + \omega \max \left\{ \frac{\dot{T}^*}{T^*}, 0 \right\}$$

onde $\omega = \frac{1}{\sigma_1} - 1 > 0$. Seja $(T(t), T^*(t), V(t))$, uma solução iniciando em K e seja $\bar{t}$ sendo o tempo tal que $(T(t), T^*(t), V(t)) \in K$ para todo $t \geq \bar{t}$. Então ao longo de cada solução $(T(t), T^*(t), V(t))$ de (4.2) tal que $(T(0), T^*(0), V(0)) \in K$ e $t \geq \bar{t}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(X) ds &= \frac{1}{t} \int_0^{\bar{t}} \mu(X) ds + \frac{1}{t} \int_{\bar{t}}^t \mu(X) ds \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^{\bar{t}} \mu(X) ds + \frac{1}{t} \int_{\bar{t}}^t \left(\max \left\{ \frac{1}{\sigma_1} \frac{\dot{T}^*}{T^*}, \frac{\dot{T}^*}{T^*} \right\} - \eta \right) ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^{\bar{t}} \mu(X) ds + \frac{1}{t} \int_{\bar{t}}^t \frac{\dot{T}^*}{T^*} ds + \frac{\omega}{t} \int_{\bar{t}}^t \max \left\{ \frac{\dot{T}^*}{T^*}, 0 \right\} ds - \frac{1}{t} \int_{\bar{t}}^t \eta ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^{\bar{t}} \mu(X) ds + \frac{1}{t} \ln \frac{T^*(t)}{T^*(\bar{t})} + \frac{\omega}{t} \int_{\bar{t}}^t \max \left\{ \frac{\dot{T}^*}{T^*}, 0 \right\} ds - \frac{t - \bar{t}}{t} \eta. \end{aligned}$$

Se existe um número $\tilde{t} \geq \bar{t}$ tal que $\dot{T}^* > 0$ para todo $t \geq \tilde{t}$, vamos tomar $\tilde{t} = \bar{t}$ por conveniência, então $\frac{\omega}{t} \int_{\bar{t}}^t \max \left\{ \frac{\dot{T}^*}{T^*}, 0 \right\} ds = \frac{\omega}{t} \ln \frac{T^*(t)}{T^*(\bar{t})}$. Se $\dot{T}^* < 0$ para todo $t \geq \bar{t}$, então $\frac{\omega}{t} \int_{\bar{t}}^t \max \left\{ \frac{\dot{T}^*}{T^*}, 0 \right\} ds = 0$. Isto e a limitação de T^* implica $\bar{q}_2 < 0$. Se $\dot{T}^*$ oscila em torno de zero, assuma que $\dot{T}^*(\bar{t}) > 0$ e seja (t_{2i}, t_{2i+1}) , $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ intervalos tais que $\dot{T}^*(t) > 0$, e (t_{2i+1}, t_{2i+2}) , $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ intervalos tais que $\dot{T}^*(t) < 0$. Desse modo, para $t \in [t_{2i}, t_{2i+1}]$ vale

$$\int_{\bar{t}}^t \max \left\{ \frac{\dot{T}^*}{T^*}, 0 \right\} ds = \ln \frac{T^*(t)}{T^*(\bar{t})},$$

e para $t \in (t_{2i+1}, t_{2i+2})$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\bar{t}}^t \max \left\{ \frac{\dot{T}^*}{T^*}, 0 \right\} ds &= \int_{\bar{t}}^{t_{2i+1}} \max \left\{ \frac{\dot{T}^*}{T^*}, 0 \right\} ds + \int_{t_{2i+1}}^t \max \left\{ \frac{\dot{T}^*}{T^*}, 0 \right\} ds \\ &= \int_{\bar{t}}^{t_{2i+1}} \max \left\{ \frac{\dot{T}^*}{T^*}, 0 \right\} ds \\ &= \ln \frac{T^*(t_{2i+1})}{T^*(\bar{t})}. \end{aligned}$$

Novamente, a limitação de T^* implica $\bar{q}_2 < 0$, completando a demonstração. $\square$

4.5 Bifurcação de Hopf e simulações numéricas

Quando $\sigma_1 > \bar{\sigma}$, mostramos na Proposição 4 que P^* é localmente assintoticamente estável para valores pequenos ou grandes de r ; e no Teorema 23, que ele é globalmente assintoticamente estável para pequenos valores de r . No entanto para valores intermediários deste parâmetro, ainda não sabemos certamente qual é a sua estabilidade.

Simulações numéricas feitas por Wang [23] mostram que P^* também é globalmente assintoticamente estável para valores grandes de r e, para valores intermediários, P^* torna-se instável e o comportamento das soluções torna-se periódico depois de certo tempo. Porém, não é explicado como se origina e depois desaparece o comportamento periódico das soluções. O foco desta seção será abordar mais detalhadamente a perda de estabilidade que ocorre com o equilíbrio P^* , para valores intermediários de r . Mostramos que esta perda de estabilidade acontece devido a ocorrência de uma bifurcação de Hopf supercrítica, que dá origem a uma órbita periódica estável quando o parâmetro r passa por determinado valor crítico. Além disso, mostramos que o desaparecimento da órbita periódica se dá devido a ocorrência de uma segunda bifurcação de Hopf, que ocorre também ao variarmos o parâmetro r .

Retomemos a expressão do polinômio característico associado a matriz $JF(P^*)$:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (a + \beta + \gamma)\lambda^2 + \left[a(\beta + \gamma) + \frac{\sigma_1 kr}{T_{max}} \overline{VT} \right] \lambda + \frac{\sigma_1 kr \gamma}{T_{max}} \overline{VT} + k\beta\gamma\overline{V}, \quad (4.10)$$

onde $a = \frac{s}{\bar{T}} + \frac{r\bar{T}}{T_{max}}$. Como vimos anteriormente, todos os coeficientes são positivos e da condição de Routh-Hurwitz encontramos

$$\Delta = (a + \beta) \left[a(\beta + \gamma) + \frac{kr}{T_{max}} \overline{VT} \right] + b\gamma(\beta + \gamma) - k\gamma^2\overline{V}, \quad (4.11)$$

onde $b = a - k\overline{V} = \alpha - r + r(2\bar{T} + \bar{T}^*)/T_{max}$. Então, temos $\Delta > 0$ se $b \geq 0$. Neste caso, se $\Delta = 0$, $p(\lambda) = 0$ tem duas raízes complexas conjugadas com parte real nula e uma raiz real negativa, caracterizando uma das hipóteses necessárias para a ocorrência da bifurcação de Hopf.

No que segue, usaremos os mesmos valores de parâmetros que foram fixados por Wang [23], a saber: $s = 0.1$, $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 2.4$, $k = 0.0027$, $T_{max} = 1500$ e $N = 10$. Deixaremos portanto σ_1 e r variando.

Neste caso, para esses valores de parâmetros, o valor crítico $\bar{\sigma}$ definido por (4.5), é dado pela expressão

$$\bar{\sigma}(r) = \frac{0.1185185185r}{r - 0.02 + \sqrt{(r - 0.1)^2 + 0.0002666666667r}}, \quad (4.12)$$

e, a fim de facilitar nossa escrita, definimos o conjunto

$$S = \{(r, \sigma_1) \in \mathbb{R}_+ : \sigma_1 = \bar{\sigma}(r)\}.$$

Assim, se σ_1 está abaixo de S , existe somente o equilíbrio P_0 e, se estiver acima de S , existem os equilíbrios P_0 e P^* . Também, seja Δ dado em (4.11), a equação $\Delta = 0$ define uma relação entre as variáveis r e σ_1 . Com o auxílio do software Maple encontramos a curva definida pela função $\sigma_1(r)$, obtido implicitamente a partir de $\Delta = 0$. Da mesma forma definimos o conjunto

$$H = \{(r, \sigma_1) \in \mathbb{R}_+ : \Delta = 0\},$$

dos possíveis pontos de bifurcação de Hopf. Na Figura 4.2 apresentamos as respectivas curvas S e H .

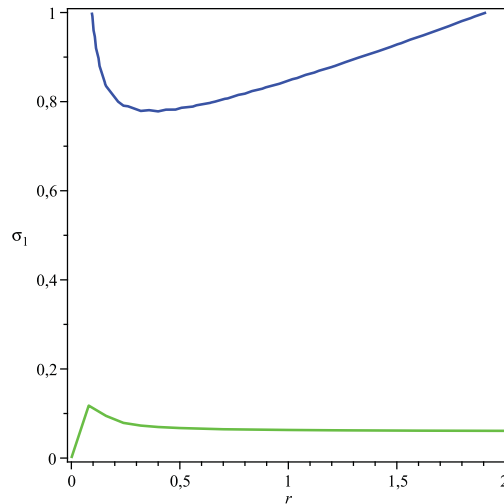


Figura 4.2: Curvas S (verde) e H (azul).

A partir de agora estudaremos o comportamento do sistema (4.2) para $\sigma_1 = 0.9$ fixo, e deixando variar r . Assim, lidamos com mudanças ocorrendo apenas com relação ao parâmetro r , o que, do ponto de vista da Figura 4.2, significa caminhar na direção horizontal. Como podemos ver, para valores de σ_1 próximos de 1, a interseção com a curva H ocorre em dois pontos, quando realizamos este percurso. É interessante perguntarmos quais regimes dinâmicos são possíveis encontrar quando, iniciando com valores pequenos de r , o aumentamos de modo a entrar na região delimitada por $H \cup \{(r, \sigma_1) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1] : \sigma_1 = 1\}$ após intersectar a curva H , atravessar essa região e, finalmente, sair dela após intersectar a curva H novamente.

No Teorema a seguir mostramos que ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica quando a curva H é intersectada, e portanto uma órbita periódica atratora existe para valores intermediários de r .

Teorema 24. *Considere o sistema (4.2) com os valores de parâmetros: $s = 0.1$, $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 2.4$, $k = 0.0027$, $T_{max} = 1500$, $N = 10$ e $\sigma_1 = 0.9$. Então o ponto de equilíbrio P^* é um foco atrator para $r < 0.1194141205$ e $r > 1.337185031$. Se $r \cong 0.1194141205$ ou $r \cong 1.337185031$, P^* é um foco atrator fraco; e se $0.1194141205 < r < 1.337185031$, P^* é um foco instável e surge um ciclo limite estável. Em suma, ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica no ponto de equilíbrio P^* para os valores críticos $r = 0.1194141205$ e $r = 1.337185031$.*

Demonstração. Considerando (4.10) escrito da forma $p(\lambda) = \lambda^3 + \mu_1\lambda^2 + \mu_2\lambda + \mu_3$ temos $\mu_{1,2,3} > 0$, e

$$\Delta = \frac{0.00001608426900(r + 22.13442696)(r - 0.1194141207)(r - 1.337185028)}{0.0027 + 0.0005333333333r}.$$

Se $r < 0.1194141205$ ou $r > 1.337185031$, Δ é positivo, logo, de acordo com o item (a) do Teorema 17, P^* será estável.

Por outro lado, se $0.1194141205 < r < 1.337185031$, Δ é negativo, e assim, segue do item (b) do Teorema 17, que $p(\lambda) = 0$ possui duas raízes com parte real positiva e uma raiz real negativa. E consequentemente P^* é instável.

Finalmente se $r = 0.1194141205$ ou $r = 1.337185031$, então $\Delta = 0$, e neste caso, segue do item (c) do Teorema 17, que $p(\lambda) = 0$ possui duas raízes complexas conjugadas com parte real nula e uma raiz real negativa, satisfazendo uma das hipóteses necessárias para a ocorrência da bifurcação de Hopf. Utilizando o algoritmo computacional de Kuznetsov [12], encontramos que o primeiro coeficiente de Lyapunov do sistema (4.2) para o valor crítico $r = 0.1194141205$ é

$$l_1 = -0.2056055264 \cdot 10^{-5}.$$

E a condição de transversalidade é satisfeita

$$\frac{d\gamma}{dr}(0.1194141205) = 0.4237240066 \neq 0,$$

em que, γ é a parte real dos autovalores complexos. Para o outro valor crítico ($r = 1.337185031$), o valor que encontramos para o primeiro coeficiente de Lyapunov é

$$l_1 = -0.2105972564 \cdot 10^{-5},$$

e neste caso, calculando a condição de transversalidade encontramos

$$\frac{d\gamma}{dr}(1.337185031) = 0.3262896777 \neq 0.$$

No Apêndice G deste trabalho encontram-se todos os cálculos realizados com o software Maple para a obtenção do coeficiente de Lyapunov e da verificação da condição de transversalidade, em ambos os valores críticos de r . Como encontramos $l_1 < 0$, a bifurcação de Hopf é supercrítica, e portanto surge uma órbita periódica atratora para o sistema (4.2). $\square$

A Figura 4.3 mostra o desenvolvimento da órbita periódica atratora que surge a partir da bifurcação de Hopf. Pode-se notar que ela atinge uma amplitude máxima para valores intermediários de r , e diminui seu tamanho tanto para valores menores quanto para valores maiores deste parâmetro. Na Figura 4.6 também mostramos este fato a partir das simulações numéricas que realizamos. Uma questão interessante a tratar neste caso é a continuação da órbita periódica que nasce da bifurcação de Hopf, mediante a variação de r . Numericamente, verificamos que existe apenas uma órbita periódica que nasce em uma primeira bifurcação de Hopf, cresce até uma amplitude máxima, ao variarmos o parâmetro r , depois passa a decrescer e enfim desaparece (morre) em uma segunda bifurcação de Hopf. A prova teórica dessa mudança qualitativa na dinâmica do sistema é bastante difícil. Na Figura 4.4 apresentamos o retrato de fase do sistema (4.2), com

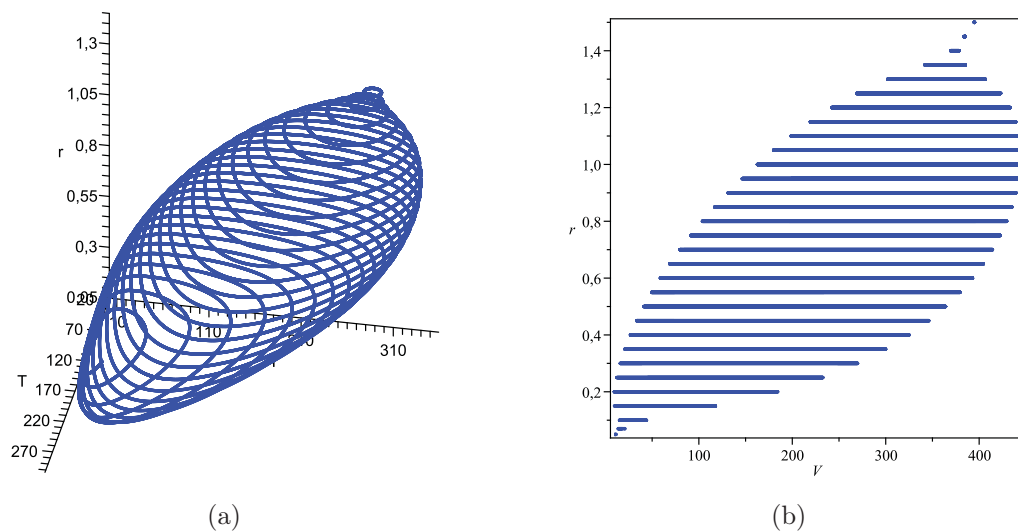


Figura 4.3: Órbita periódica atratora para os valores de parâmetros do Teorema 24. (a) No espaço (T, T^*, r) . (b) No plano (V, r) .

valores de parâmetros abaixo da curva H , onde P^* é um foco atrator. E na Figura 4.5, escolhemos valores de parâmetros que se encontram acima da curva H , e mostramos a órbita periódica atratora existente.

O Teorema 24 e as simulações numéricas que realizamos estão de acordo com os resultados obtidos por Wang [23]. E mostram que a mudança de estabilidade que ocorre em P^* , ocasionada especificamente pelo surgimento da órbita atratora, é consequência da ocorrência de uma bifurcação de Hopf supercrítica. Traduzindo estes resultados para o contexto biológico, podemos afirmar que a infecção pelo vírus HIV pode persistir de

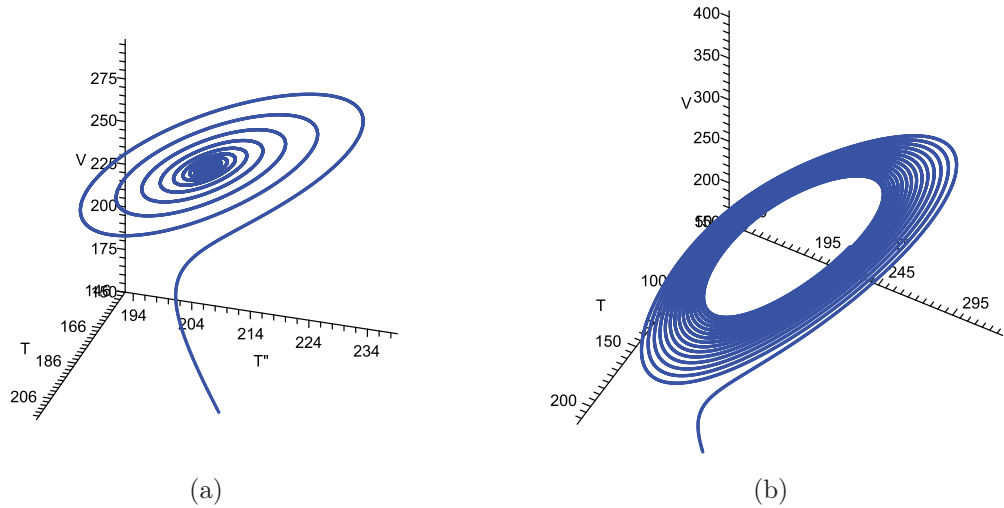


Figura 4.4: Retrato de fase do sistema (4.2) próximo ao equilíbrio P^* , com a condição inicial $(200, 220, 150)$, tempo de integração $[0, 200]$. (a) P^* é um foco atrator para $r = 1$ e $\sigma_1 = 0.5$. (b) P^* é um foco atrator fraco para $r = 1$ e $\sigma_1 = 0.8$.

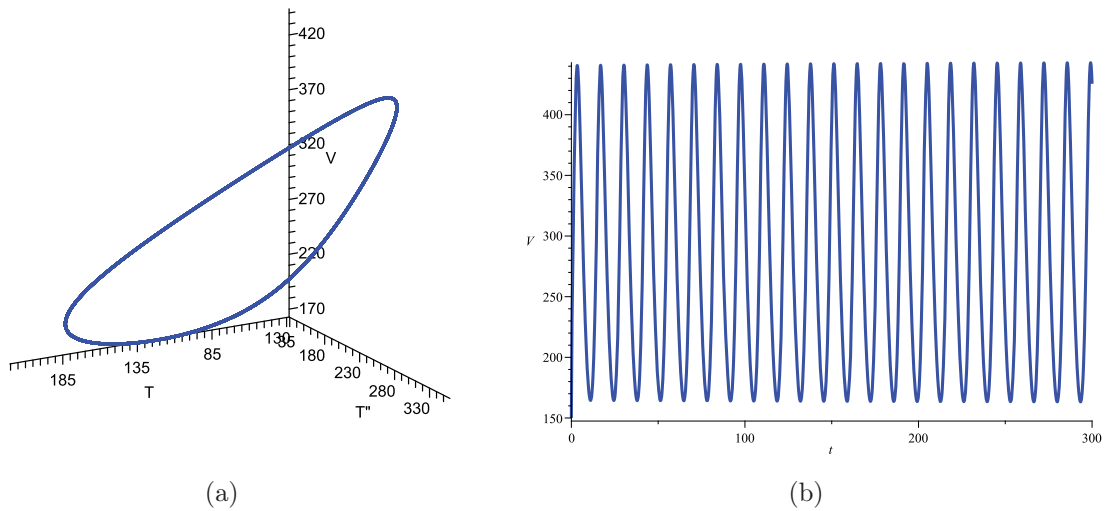


Figura 4.5: (a) Órbita periódica atratora criada no sistema (4.2) a partir da bifurcação de Hopf. Condição inicial $(200, 220, 150)$ e os parâmetros $r = 1$ e $\sigma_1 = 0.9$. Tempo de integração $[2000, 2100]$. (b) Comportamento da coordenada $V(t)$. Tempo de integração $[0, 300]$.

duas formas: estacionária ou oscilatória periódica. É interessante notar que o comportamento periódico surge apenas enquanto mantemos valores relativamente altos de σ_1 - representando a situação de baixa eficiência no tratamento RT - em conjunto com valores medianos de r . De modo que, o fator determinante para a ocorrência de tais comportamentos é governado pelos valores atribuídos a esses parâmetros.

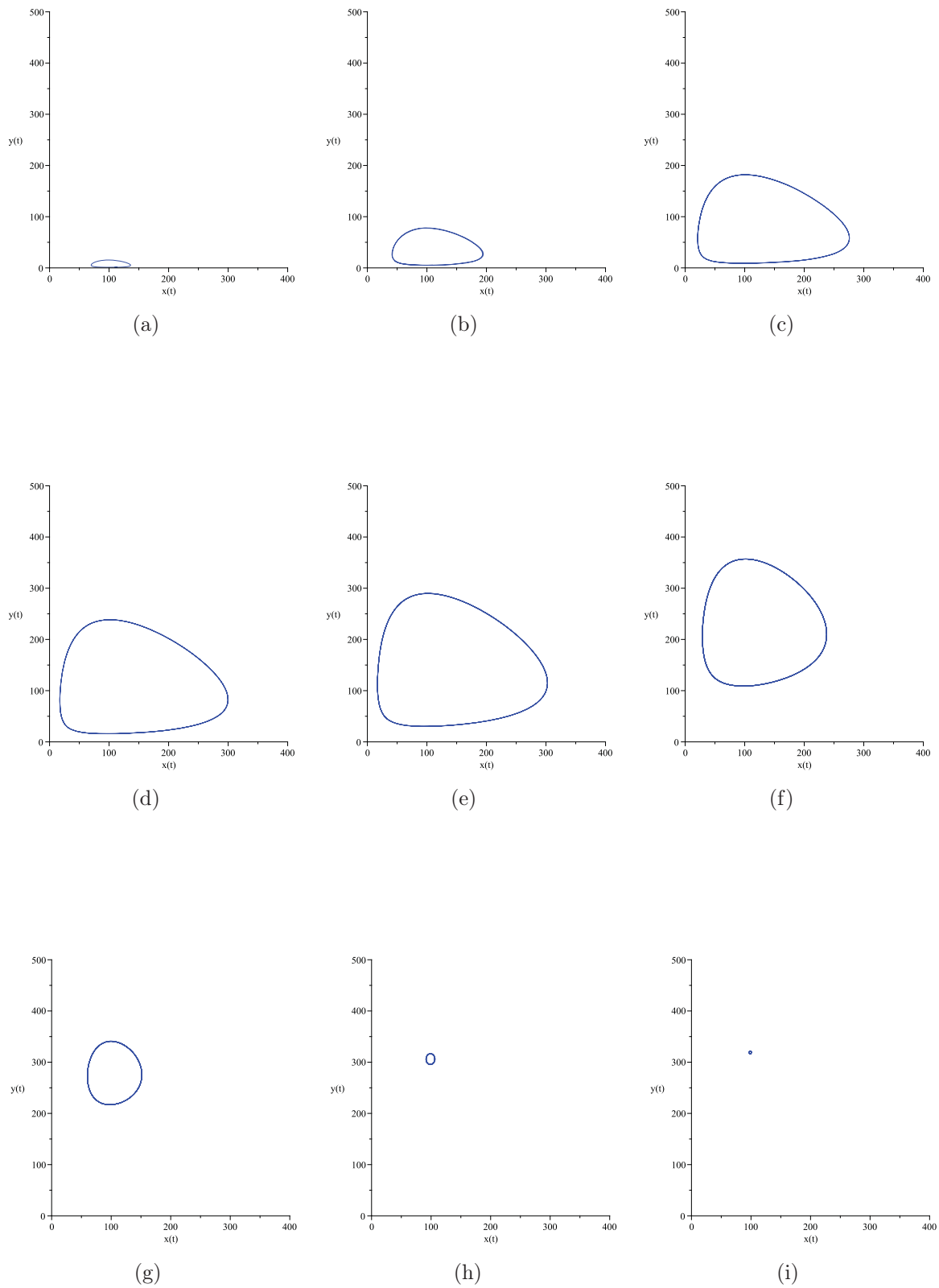


Figura 4.6: Projeção da órbita periódica no plano xy em vários estágios (a) – (i), da variação crescente de r para $\sigma_1 = 0.9$ fixo; iniciando (a) com $r \approx 0.1194141205$ e terminando (i) com $r \approx 1.337185031$.

Considerações Finais

Neste trabalho fizemos um estudo de modelos biológicos via sistemas de equações diferenciais ordinárias, utilizando resultados da teoria qualitativa das EDO's.

No estudo dos modelos do tipo predador-presa, que são extensões do modelo clássico de Lotka-Volterra, demos ênfase no que diz respeito à estabilidade global dos equilíbrios e no estudo das bifurcações, em especial, à bifurcação de Hopf, a qual tem importância especial no âmbito biológico, por estar relacionada à existência de órbitas periódicas e, assim, possibilitar a coexistência oscilatória periódica das populações.

Mais precisamente, no Capítulo 3, estudamos a ocorrência de bifurcações de Hopf para sistemas do tipo Lotka-Volterra no plano e também no $\mathbb{R}^3$, utilizando o método da projeção apresentado em [12]. Fizemos os cálculos do primeiro coeficiente de Lyapunov com o auxílio do software Maple, que também foi utilizado para desenvolver simulações numéricas, que dão a descrição dos retratos de fase e que possibilitam comprovar a existência dos ciclos limites originados das bifurcações de Hopf.

No Capítulo 4, utilizando basicamente as técnicas apresentadas nos capítulos precedentes, fizemos a análise de um modelo de HIV tridimensional proposto por Wang [23]. Para este modelo, estudamos a estabilidade global do equilíbrio P^* , utilizando o critério de estabilidade desenvolvido em [16] que é uma generalização para dimensão $n > 2$ do critério de Bendixson clássico. Complementando o estudo desenvolvido em [23], provamos que o surgimento das soluções periódicas, observados no referido artigo, são consequência de uma bifurcação de Hopf que ocorre no equilíbrio P^* , com a perda de sua estabilidade global. De fato, observamos que, para cada valor fixo do parâmetro σ_1 , maior que um certo valor mínimo, ao variarmos o parâmetro r ocorrem duas bifurcações de Hopf, ocasionando primeiro o surgimento e, depois, o desaparecimento de um ciclo limite.

A expressão da curva H , que determina os possíveis pontos de bifurcação de Hopf no espaço de parâmetros (r, σ_1) (ver Figura 4.2), foi obtida computacionalmente e é bastante complicada, de maneira que não foi possível calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov

ao longo de toda a curva, o que tornaria o nosso principal resultado (Teorema 24) mais abrangente. Desse modo, fica em aberto a questão referente a existência de pontos de bifurcação mais degenerados ao longo da curva H , o que pretendemos abordar em trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] ALBERTO, L. F. C. *O Princípio de Invariância de LaSalle Estendido Aplicado ao Estudo de Coerência de Geradores e à Análise de Estabilidade Transitória Multi-Swing*. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.
- [2] BAZYKIN, A. D. *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*. World Scientific Publishing, 1998.
- [3] BONOMINI, I. A. M. Estudo Qualitativo de Dinâmica de Populações. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2012.
- [4] COPPEL, W. A. *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*. Heath, Boston, 1995.
- [5] DOERING, C. I., AND LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*, 4º ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [6] FARIA, N. G. Análise da Estabilidade e das Bifurcações de Hopf num Sistema Tipo van der Pol. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2010.
- [7] GALINDO, M. C. Comportamento Caótico em Sistemas Dinâmicos e Aplicação no Estudo da Evolução de Tumores de Câncer. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2012.
- [8] GEORGESCU, R. M., AND GEORGESCU, A. Some results on the dynamics generated by the Bazykin model. *AAPP Physical, Mathematical, and Natural Sciences* 84, 1 (2006).
- [9] GLENDINNING, P. *Stability, Instability and Chaos: An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations*. Cambridge University Press, 1994.
- [10] HIRSCH, M. W., SMALE, S., AND DEVANEY, R. L. *Differential Equations Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, 2º ed. Elsevier Academic Press, San Diego, 2004.

-
- [11] HOFBAUER, J., AND SO, J. W. H. Uniform persistence and repellers for maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 107 (1989).
 - [12] KUZNETSOV, Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 1995.
 - [13] LEENHEER, P. D., AND SMITH, H. L. Virus dynamics: a global analysis. *Siam J. Math. Anal.*, 63 (2003).
 - [14] LI, M. Y., AND MULDOWNNEY, J. S. On Bendixson's criterion. *Journal of Differential Equations*, 106 (1994).
 - [15] LI, M. Y., AND MULDOWNNEY, J. S. On R. A. Smith's autonomous convergence theorem. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 25 (1995).
 - [16] LI, M. Y., AND MULDOWNNEY, J. S. A geometric approach to global-stability problems. *Siam J. Math. Anal.*, 27 (1996).
 - [17] LIMA, E. L. *Análise Real Vol. 2. Funções de n Variáveis*, 5^o ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
 - [18] MARTIN, R. H. J. Logarithmic norms and projections applied to linear differential systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 45 (1974).
 - [19] PERELSON, A. S., KIRSCHNER, D. E., AND BOER, R. D. Dynamics of HIV infection of CD4 + T cells. *Mathematical Biosciences*, 114 (1993).
 - [20] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3^o ed. Springer-Verlag, New York, 2000.
 - [21] SILVA, A. R. B. Análise das Bifurcações de um Sistema de Dinâmica de Populações. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.
 - [22] SOTOMAYOR, J. M. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
 - [23] WANG, L. Global dynamical analysis of HIV models with treatments. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22 (2011).
 - [24] YU, P., AND ZOU, X. Bifurcation analysis on an HIV-1 model with constant injection of recombinant. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22 (2011).
 - [25] ZHANG JUAN, L. J., AND ZHIEN, M. Global dynamics of an seir epidemic model with immigration of different compartments. *Acta Mathematica Scientia*, 26 (2006).

Cálculo do Primeiro Coeficiente de Lyapunov (sistema (3.6))

Considere o sistema planar

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (\text{F.1})$$

Segundo Kuznetsov [12], o algoritmo para calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov do sistema (F.1) pode ser resumido nos seguintes passos.

Passo 1: Encontre o valor crítico do parâmetro α_0 para o qual o sistema (F.1) possui um equilíbrio x_0 com autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. Isto pode ser feito, por exemplo, resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} F(x, \alpha) &= 0, \\ \text{Tr} F_x(x, \alpha) &= 0, \end{aligned}$$

para (x_0, α_0) e verificando que $\det F_x(x, \alpha) = \omega_0^2 > 0$.

Passo 2: Calcule os autovetores complexos $q, p \in \mathbb{C}^2$, tais que

$$Aq = i\omega_0 q, \quad A^T p = -i\omega_0 p, \quad \langle p, q \rangle = 1,$$

em que, $A = F_x(x_0, \alpha_0)$ e $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$.

Passo 3: Componha a expressão

$$H(z, \bar{z}) = \langle p, F(x_0 + zq + \bar{z}\bar{q}, \alpha_0) \rangle$$

e encontre os coeficientes g_{20} , g_{11} e g_{21} na série de Taylor

$$H(z, \bar{z}) = i\omega_0 z + \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} g_{jk} z^j \bar{z}^k.$$

Passo 4: Calcule o primeiro coeficiente de Lyapunov

$$l_1 = \frac{1}{2\omega_0^2} \text{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}).$$

Se $l_1 < 0$ ($l_1 > 0$), então o equilíbrio x_0 é estável (instável) em α_0 e um único ciclo limite estável (instável) bifurca a partir de x_0 em (F.1) conforme α passa por α_0 , desde que

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \text{Tr} F_x(x_0(\alpha), \alpha) \right|_{\alpha=0} \neq 0.$$

Assim, para o caso do sistema (3.6) temos a seguinte sequência de comandos:

```
restart; with(linalg)

# SISTEMA
F[1] := X[1]*(1-epsilon*X[1])*(1+alpha*X[1])-X[1]*X[2]

F[2] := -gamma*X[2]+gamma*(1-alpha)*X[1]*X[2]

J := jacobian([F[1], F[2]], [X[1], X[2]])

K := transpose(J)

#ACHANDO OS EQUILÍBRIOS E O VALOR CRÍTICO DO PARÂMETRO PARA
O QUAL OCORRE A BIFURCAÇÃO DE HOPF
sol := solve({F[1] = 0, F[2] = 0, trace(J) = 0}, {epsilon, X[1], X[2]})

sol := sol[1]

assign(sol)

assume(alpha > 0)

J := map(simplify, map(eval, J))
```

```

DD := simplify(det(J))

A := matrix(2, 2, [0, J[1, 2], omega^2*J[2, 1]/DD, 0])

assume(omega > 0)

# AUTOVETORES
ev := eigenvects(map(eval, A))

q := ev[1][3][1]

et := eigenvects(map(eval, transpose(A)))

P := et[2][3][1]

s := simplify(evalc(conjugate(P[1])*q[1]+conjugate(P[2])*q[2]))

p := evalm(P/conjugate(s))

evalc(conjugate(p[1])*q[1]+conjugate(p[2])*q[2])

F[1] := x[1]*(1-epsilon*x[1])*(1+alpha*x[1])-x[1]*x[2]

F[2] := -gamma*x[2]+gamma*(1-alpha)*x[1]*x[2]

x[1] := evalc(X[1]+z*q[1]+z1*conjugate(q[1]))

x[2] := evalc(X[2]+z*q[2]+z1*conjugate(q[2]))

# COMPONDO A EXPRESSÃO H
H := simplify(evalc(conjugate(p[1])*F[1]+conjugate(p[2])*F[2]))

g[2, 0] := simplify(2*evalc(coeftayl(H, [z, z1] = [0, 0], [2, 0])))

g[1, 1] := simplify(evalc(coeftayl(H, [z, z1] = [0, 0], [1, 1])))

```

```
g[2, 1] := simplify(2*evalc(coeftayl(H, [z, z1] = [0, 0], [2, 1])))
```

```
# CALCULANDO L[1]
```

```
l[1] := factor(Re(I*g[2, 0]*g[1, 1]+omega*g[2, 1])/(2*omega^2))
```

A expressão de l_1 encontrada, com $\gamma = 1$, é

$$l_1 = \frac{\alpha^2(\alpha - 1)}{\omega(\alpha + 1)},$$

a qual, por meio da substituição $\omega = (\det A)^{\frac{1}{2}}$ fica

$$l_1 = -\frac{\alpha^2(1 - \alpha)^{\frac{3}{2}}}{(\alpha + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cálculo do Primeiro Coeficiente de Lyapunov (sistema (4.2))

Considere o sistema n -dimensional

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\text{G.1})$$

com $(n > 2)$. O algoritmo para o cálculo do coeficiente de Lyapunov pode ser resumido nos seguintes passos (Kuznetsov [12]):

Passo 1: Encontre o valor crítico do parâmetro μ_0 para o qual o sistema (G.1) possui um equilíbrio x_0 com autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, não havendo outros autovalores imaginários puros. Para $n = 3$, este valor crítico pode ser encontrado, resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} F(x, \mu) &= 0, \\ \det M(x, \mu) &= 0, \end{aligned}$$

sendo que a matriz M é dada por

$$M = \begin{pmatrix} a_{22} + a_{11} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{33} + a_{11} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{33} + a_{22} \end{pmatrix},$$

em que a_{jk} são os elementos de $F_x(x, \mu)$. Logo, temos que os autovalores $\lambda_{1,2}$ de $A = F_x(x, \mu_0)$, com $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, são puramente imaginários, e $\lambda_3 \neq 0$.

Passo 2: Calcule os autovetores complexos $q, p \in \mathbb{C}^n$, tais que

$$Aq = i\omega_0 q, \quad A^T p = -i\omega_0 p, \quad \langle p, q \rangle = 1,$$

em que, $A = F_x(x, \mu_0)$ e $\langle p, q \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{p}_k p_k$.

Passo 3: Encontre $s \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{C}^n$, tais que

$$As = B(q, \bar{q}), \quad (2i\omega_0 I_n - A)r = B(q, q),$$

em que I_n é a matriz identidade $n \times n$ e $B(q, q)$ é definida por

$$B_i(q, p) = \sum_{j,k=1,\dots,n} \left. \frac{\partial^2 F_i(x, \mu_0)}{\partial x_j \partial x_k} \right|_{x=x_0} q_j p_k,$$

para $i = 1, \dots, n$.

Passo 4: Calcule

$$l_1 = \frac{1}{2\omega_0} \text{Re}[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, s) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, r) \rangle],$$

em que $B(q, q)$ é definida como acima e

$$C_i(q, p, r) = \sum_{j,k,\ell=1,\dots,n} \left. \frac{\partial^3 F_i(x, \mu_0)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_\ell} \right|_{x=x_0} q_j p_k r_\ell,$$

para $i = 1, \dots, n$

Assim, para o sistema (4.2) temos a seguinte sequência de comandos:

###

Vamos calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov no primeiro ponto de intersecção com a curva de bif de Hopf, variando r da esquerda para a direita.

```
restart; with(linalg)
readlib(mttaylor)
readlib(coeftayl)
```

```
s := 0.1; alpha := 0.2e-1; beta := 0.3; g := 2.4; k := 0.27e-2;
T[m] := 1500; N := 10; sigma[1] := 0.9
```

```

# SISTEMA
F[1] := s-alpha*X[1]+r*X[1]*(1-(X[1]+X[2])/T[m])-k*X[3]*X[1]

F[2] := sigma[1]*k*X[3]*X[1]-beta*X[2]

F[3] := N*beta*X[2]-g*X[3]

A := jacobian([F[1], F[2], F[3]], [X[1], X[2], X[3]])

B := transpose(A)

# MATRIZES HESSIANAS
H[1] := hessian(F[1], [X[1], X[2], X[3]]); H[2] := hessian(F[2],
[X[1], X[2], X[3]]); H[3] := hessian(F[3], [X[1], X[2], X[3]])

# MONTANDO A MATRIZ M
M := matrix(3, 3, [A[2, 2]+A[1, 1], A[2, 3], -A[1, 3], A[3, 2],
A[3, 3]+A[1, 1], A[1, 2], -A[3, 1], A[2, 1], A[3, 3]+A[2, 2]])

#ACHANDO OS EQUILÍBRIOS E O VALOR CRÍTICO DO PARÂMETRO PARA O
QUAL OCORRE A BIFURCAÇÃO DE HOPF
sol := solve({F[1] = 0, F[2] = 0, F[3] = 0, det(M) = 0}, {r,
X[1], X[2], X[3]})

assign(sol[1])

# AUTOVETORES
ev := eigenvects(map(eval, A), 'radical')

q := ev[1][3][1]

q1 := map(conjugate, q)

```

```

ev := eigenvects(map(eval, B), 'radical')

P := ev[2][3][1]

P1 := map(conjugate, P)

# NORMALIZANDO OS AUTOVETORES
sp := simplify(conjugate(evalm('&*(transpose(P1), q))))

p := map(simplify, map(evalc, evalm(P/sp)))

p1 := map(conjugate, p)

simplify(evalm('&*(transpose(p1), q)))

# VETORES B(q,q) e B(q,\overline{q})
b := vector(3, [evalm('&*(transpose(q), '&*(H[1], q))),
evalm('&*(transpose(q), '&*(H[2], q))), evalm('&*(transpose(q),
'&*(H[3], q)))]])

c := vector(3, [evalm('&*(transpose(q), '&*(H[1], q1))),
evalm('&*(transpose(q), '&*(H[2], q1))), evalm('&*(transpose(q),
'&*(H[3], q1)))]])

# ENCONTRANDO OS VALORES DE S E R
S := evalm('&*(inverse(A), c))

R := evalm('&*(inverse(.156852960*(2*I)-A), b))

# CALCULANDO f = B(q,S)
f := vector(3, [evalm('&*(transpose(q), '&*(H[1], S))),
evalm('&*(transpose(q), '&*(H[2], S))), evalm('&*(transpose(q),
'&*(H[3], S)))]])

```

```
# CALCULANDO g = B(q1,R)
g := vector(3, [evalm('&*(transpose(q1), '&*(H[1], R))),
evalm('&*(transpose(q1), '&*(H[2], R))), evalm('&*(transpose(q1),
'&*(H[3], R))]])
```

```
# CALCULANDO O VALOR DE L[0]
l[0] := simplify(evalc(Re(-2*evalm('&*(transpose(p1), f))+
evalm('&*(transpose(p1), g)))/(2*.156852960))
```

-0.2056055264e-5

Obs: Para este sistema o vetor C é nulo.

###

CONDIÇÃO DE TRANSVERSALIDADE

```
restart; with(linalg)
```

```
s := 0.1; alpha := 0.2e-1; beta := 0.3; g := 2.4; k := 0.27e-2;
T[m] := 1500; N := 10; sigma[1] := 0.9
```

SISTEMA

```
F[1] := s-alpha*X[1]+r*X[1]*(1-(X[1]+X[2])/T[m])-k*X[3]*X[1]
```

```
F[2] := sigma[1]*k*X[3]*X[1]-beta*X[2]
```

```
F[3] := N*beta*X[2]-g*X[3]
```

```
A := jacobian([F[1], F[2], F[3]], [X[1], X[2], X[3]])
```

```
B := transpose(A)
```

DERIVANDO OS ELEMENTOS DA MATRIZ A

```
d11 := diff(A[1, 1], r); d12 := diff(A[1, 2], r);
d13 := diff(A[1, 3], r); d21 := diff(A[2, 1], r);
d22 := diff(A[2, 2], r); d23 := diff(A[2, 3], r);
```

```

d31 := diff(A[3, 1], r); d32 := diff(A[3, 2], r);
d33 := diff(A[3, 3], r)

D1 := Matrix([[d11, d12, d13], [d21, d22, d23], [d31, d32, d33]])

# MONTANDO A MATRIZ M
M := matrix(3, 3, [A[2, 2]+A[1, 1], A[2, 3], -A[1, 3], A[3, 2],
  A[3, 3]+A[1, 1], A[1, 2], -A[3, 1], A[2, 1], A[3, 3]+A[2, 2]])

#ACHANDO OS EQUILÍBRIOS E O VALOR CRÍTICO DO PARÂMETRO PARA
O QUAL OCORRE A BIFURCAÇÃO DE HOPF
sol := solve({F[1] = 0, F[2] = 0, F[3] = 0, det(M) = 0},
  {r, X[1], X[2], X[3]})

assign(sol[1])

D1

#AUTOVETORES
ev := eigenvects(map(eval, A), 'radical')

q := ev[3][3][1]

q1 := map(conjugate, q)

ev := eigenvects(map(eval, B), 'radical')

P := ev[1][3][1]

P1 := map(conjugate, P)

# NORMALIZANDO OS AUTOVETORES
sp := simplify(conjugate(evalm('&*(transpose(P1), q))))

p := map(simplify, map(evalc, evalm(P/sp)))

```

```

p1 := map(conjugate, p)

simplify(evalm('&*(transpose(p1), q)))

# CALCULANDO A CONDIÇÃO DE TRANSVERSALIDADE
S := evalm('&*(D1, q))

'd&gamma;' := Re(simplify(evalm('&*(transpose(p1), S))))

0.4237240066

###
Vamos calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov no segundo ponto de
intersecção com a curva de bif de Hopf, variando r da esquerda para
a direita.

restart; with(linalg)
readlib(mtaylor)
readlib(coeftayl)

s := 0.1; alpha := 0.2e-1; beta := 0.3; g := 2.4; k := 0.27e-2;
T[m] := 1500; N := 10; sigma[1] := 0.9

# SISTEMA
F[1] := s-alpha*X[1]+r*X[1]*(1-(X[1]+X[2])/T[m])-k*X[3]*X[1]

F[2] := sigma[1]*k*X[3]*X[1]-beta*X[2]

F[3] := N*beta*X[2]-g*X[3]

A := jacobian([F[1], F[2], F[3]], [X[1], X[2], X[3]])

B := transpose(A)

```

```

# MATRIZES HESSIANAS
H[1] := hessian(F[1], [X[1], X[2], X[3]]); H[2] := hessian(F[2],
[X[1], X[2], X[3]]); H[3] := hessian(F[3], [X[1], X[2], X[3]])

# MONTANDO A MATRIZ M
M := matrix(3, 3, [A[2, 2]+A[1, 1], A[2, 3], -A[1, 3], A[3, 2],
A[3, 3]+A[1, 1], A[1, 2], -A[3, 1], A[2, 1], A[3, 3]+A[2, 2]])

#ACHANDO OS EQUILÍBRIOS E O VALOR CRÍTICO DO PARÂMETRO PARA O
QUAL OCORRE A BIFURCAÇÃO DE HOPF
sol := solve({F[1] = 0, F[2] = 0, F[3] = 0, det(M) = 0}, {r,
X[1], X[2], X[3]})

assign(sol[2])

# AUTOVETORES
ev := eigenvects(map(eval, A), 'radical')

q := ev[1][3][1]

q1 := map(conjugate, q)

ev := eigenvects(map(eval, B), 'radical')

P := ev[1][3][1]

P1 := map(conjugate, P)

# NORMALIZANDO OS AUTOVETORES
sp := simplify(conjugate(evalm('&*(transpose(P1), q))))

p := map(simplify, map(evalc, evalm(P/sp)))

p1 := map(conjugate, p)

```

```

simplify(evalm('&*(transpose(p1), q)))

# VETORES B(q,q) e B(q,\overline{q})
b := vector(3, [evalm('&*(transpose(q), '&*(H[1], q))),
evalm('&*(transpose(q), '&*(H[2], q))), evalm('&*(transpose(q),
'&*(H[3], q)))]])

c := vector(3, [evalm('&*(transpose(q), '&*(H[1], q1))),
evalm('&*(transpose(q), '&*(H[2], q1))), evalm('&*(transpose(q),
'&*(H[3], q1)))]])

# ENCONTRANDO OS VALORES DE S E R
S := evalm('&*(inverse(A), c))

R := evalm('&*(inverse(.5635299087*(2*I)-A), b))

# CALCULANDO f = B(q,S)
f := vector(3, [evalm('&*(transpose(q), '&*(H[1], S))),
evalm('&*(transpose(q), '&*(H[2], S))), evalm('&*(transpose(q),
'&*(H[3], S)))]])

# CALCULANDO g = B(q1,R)
g := vector(3, [evalm('&*(transpose(q1), '&*(H[1], R))),
evalm('&*(transpose(q1), '&*(H[2], R))), evalm('&*(transpose(q1),
'&*(H[3], R)))]])

# CALCULANDO O VALOR DE L[0]
l[0] := simplify(evalc(Re(-2*evalm('&*(transpose(p1), f))+
evalm('&*(transpose(p1), g)))/(2*.5635299087))

-0.2105972564e-5

###

```

 CONDIÇÃO DE TRANSVERSALIDADE

```

restart; with(linalg)

s := 0.1; alpha := 0.2e-1; beta := 0.3; g := 2.4; k := 0.27e-2;
T[m] := 1500; N := 10; sigma[1] := 0.9

# SISTEMA
F[1] := s-alpha*X[1]+r*X[1]*(1-(X[1]+X[2])/T[m])-k*X[3]*X[1]

F[2] := sigma[1]*k*X[3]*X[1]-beta*X[2]

F[3] := N*beta*X[2]-g*X[3]

A := jacobian([F[1], F[2], F[3]], [X[1], X[2], X[3]])

B := transpose(A)

# DERIVANDO OS ELEMENTOS DA MATRIZ A
d11 := diff(A[1, 1], r); d12 := diff(A[1, 2], r);
d13 := diff(A[1, 3], r); d21 := diff(A[2, 1], r);
d22 := diff(A[2, 2], r); d23 := diff(A[2, 3], r);
d31 := diff(A[3, 1], r); d32 := diff(A[3, 2], r);
d33 := diff(A[3, 3], r)

D1 := Matrix([[d11, d12, d13], [d21, d22, d23], [d31, d32, d33]])

# MONTANDO A MATRIZ M
M := matrix(3, 3, [A[2, 2]+A[1, 1], A[2, 3], -A[1, 3], A[3, 2],
  A[3, 3]+A[1, 1], A[1, 2], -A[3, 1], A[2, 1], A[3, 3]+A[2, 2]])

#ACHANDO OS EQUILÍBRIOS E O VALOR CRÍTICO DO PARÂMETRO PARA
O QUAL OCORRE A BIFURCAÇÃO DE HOPF
sol := solve({F[1] = 0, F[2] = 0, F[3] = 0, det(M) = 0},

```

```
{r, X[1], X[2], X[3]})
```

```
assign(sol[2])
```

```
D1
```

```
#AUTOVETORES
```

```
ev := eigenvects(map(eval, A), 'radical')
```

```
q := ev[1][3][1]
```

```
q1 := map(conjugate, q)
```

```
ev := eigenvects(map(eval, B), 'radical')
```

```
P := ev[3][3][1]
```

```
P1 := map(conjugate, P)
```

```
# NORMALIZANDO OS AUTOVETORES
```

```
sp := simplify(conjugate(evalm('&*(transpose(P1), q))))
```

```
p := map(simplify, map(evalc, evalm(P/sp)))
```

```
p1 := map(conjugate, p)
```

```
simplify(evalm('&*(transpose(p1), q)))
```

```
# CALCULANDO A CONDIÇÃO DE TRANSVERSALIDADE
```

```
S := evalm('&*(D1, q))
```

```
'd&gamma;' := Re(simplify(evalm('&*(transpose(p1), S))))
```

```
0.3262896777
```