

UNESP

Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá

2.000



1110000422



***"Um Estudo do Espaço de  
Fase do Problema Restrito  
de Três Corpos"***

***CLÁUDIA CELESTE CELESTINO***

***119***



CARO LEITOR NÃO  
RISQUE O LIVRO

UM ESTUDO DO ESPAÇO DE FASE  
DO PROBLEMA RESTRITO  
DE TRÊS CORPOS

CLÁUDIA CELESTE CELESTINO

Dissertação apresentada à Faculdade de  
Engenharia de Guaratinguetá da Universi-  
dade Estadual Paulista, para a obtenção  
do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof.Dr.Othon Cabo Winter

422

Guaratinguetá

1999

422

FACULDADE DE ENGENHARIA  
DE GUARATINGUETÁ  
BIBLIOTECA



Ficha catalográfica preparada na Seção de Aquisição e Tratamento da  
Informação da Biblioteca - FEG/UNESP

Celestino, Cláudia Celeste

C392e Um estudo do espaço de fase do problema restrito de três  
corpos/Cláudia Celeste Celestino. Guaratinguetá, 2000  
127 f.: il; 30cm

Bibliografia: f.124-127

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2000.

Orientador: Prof.Dr. Othon Cabo Winter

1. Mecânica Celeste – Dinâmica Orbital I. Título

CDU521.1



**“UM ESTUDO DO ESPAÇO DE FASE DO PROBLEMA RESTRITO  
DE TRÊS CORPOS”**

**CLÁUDIA CELESTE CELESTINO**

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“MESTRE EM FÍSICA”**

**ESPECIALIDADE: FÍSICA**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: DINÂMICA ORBITAL E PLANETOLOGIA**

**APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

  
**Prof. Dr. Othon Cabo Winter**  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**

  
**Prof. Dr. OTHON CABO WINTER**  
Orientador / Unesp-Feg

  
**Prof. Dr.ª SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER**  
Unesp-Feg

  
**Prof. Dr. RICARDO REIS CORDEIRO**  
UFV-MG

*Fevereiro de 2000*

## DADOS CURRICULARES

CLÁUDIA CELESTE CELESTINO

NASCIMENTO 02.06.1967 - RIO DE JANEIRO/RJ

FILIAÇÃO Próspero Savério Celestino  
Maria de Lourdes Pinto Celestino

1993/1997 Curso de Graduação  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP

1998/2000 Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado,  
na Universidade Estadual Paulista.

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Dr. Othmar C. Winter, cuja participação constante e desinteressada foi primordial no término deste trabalho.

A Prof. Dra. Sônia M. G. Winter por todo o incentivo e elogios durante todos os momentos mais difíceis no decorrer do desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas da Pós-graduação em Física por toda a ajuda e compreensão nos momentos difíceis deste período, especialmente Rita e André.

Ao colega Francisco Vieira Neto pelo auxílio na parte computacional deste trabalho.

A todos colegas de curso e funcionários pelo apoio e assistência que possibilitaram o desenvolvimento do trabalho intelectual e social.

*À memória de minha mãe, que viu em seus filhos a oportunidade de realizar seus sonhos.*

*Ao meu pai, que com seus esforços deu-me o alicerce para vencer mais esta etapa de minha vida.*

*Ao meu esposo e filha por toda compreensão e amor oferecidos nos meus momentos de omissão e alienação.*

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof.Dr. Othon C. Winter, cuja participação contínua e determinada foi primordial ao término deste trabalho,

à Profa.Dra. Silvia M. G. Winter por todo o incentivo e elogios manifestados nos momentos mais críticos no decorrer do desenvolvimento deste trabalho,

aos colegas da Pós-graduação em Física por toda a força e compreensão nos momentos difíceis deste período, especialmente Rita e Áurea,

ao colega Ernesto Vieira Neto pelo auxílio na parte computacional utilizada nesse trabalho,

a todo corpo docente e funcionários pelo apoio irrestrito que permitiram meu aprimoramento no desenvolvimento intelectual e social.

*Este trabalho contou com o apoio financeiro da PRONEX-CNPQ/CAPES*





Este trabalho contou com o apoio financeiro da PROPP-UNESP/CAPES



## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Resumo

Abstract

1 INTRODUÇÃO ..... 23

2 PROBLEMA PLANO, CIRCULAR, RESTRIÇÃO DE TRÊS CORPOS ..... 23

2.1 Espaço de configuração ..... 28

2.2 Função de energia hamiltoniana ..... 31

2.3 A conjectura de Jacobi e o teorema de conservação ..... 36

3 RESONÂNCIA: ESTUDOS ANALÍTICOS ..... 37

3.1 Introdução ..... 37

3.1.1 Expressões de ressonância ..... 37

3.2 Modelo ideal de ressonância ..... 40

3.2.1 Função de energia ..... 40

3.3 Segundo modelo ideal de ressonância ..... 46

4 REGIÕES ESTÁVEIS E INSTÁVEIS ..... 53

4.1 Estado estacionário ..... 53

4.1.1 Teorema da superfície de energia de Poincaré ..... 53

4.1.2 Propriedades principais ..... 58

4.2 O espaço de fase ..... 62

*“Não existe nenhum caminho lógico para  
a descoberta das leis elementares do Universo-  
o único caminho é a intuição.”*

*Albert Einstein*

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Resumo

*Abstract*

|                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------|----|
| 1 INTRODUÇÃO .....                                                   | 25 |
| 2 PROBLEMA PLANO, CIRCULAR, RESTRITO DE TRÊS CORPOS... ..            | 28 |
| 2.1 Equações de movimento.....                                       | 28 |
| 2.2 Pontos de equilíbrio lagrangianos.....                           | 30 |
| 2.3 A constante de Jacobi e as curvas de velocidade zero.....        | 30 |
| 3 RESSONÂNCIA: ESTUDOS ANALÍTICOS.....                               | 37 |
| 3.1 Introdução.....                                                  | 37 |
| 3.1.1 Equações de Lagrange .....                                     | 37 |
| 3.2 Modelo ideal de ressonância - modelo aprimorado do pêndulo ..... | 41 |
| 3.2.1 Largura de libração.....                                       | 44 |
| 3.3 Segundo modelo ideal de ressonância .....                        | 56 |
| 4 REGIÕES ESTÁVEIS E INSTÁVEIS.....                                  | 62 |
| 4.1 Estudo numérico.....                                             | 62 |
| 4.1.1 Técnica de superfície de seção de Poincaré .....               | 63 |
| 4.1.2 Programa principal .....                                       | 65 |
| 4.2 O espaço de fase .....                                           | 89 |



|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2.1 Amplitudes de libração .....                                          | 93  |
| 4.2.2 Resultado numérico versus modelo analítico .....                      | 97  |
| 4.2.2.1 Modelo aprimorado do pêndulo versus resultados numéri-<br>cos ..... | 97  |
| 4.3 Complexidade e evolução do espaço de fase .....                         | 98  |
| 4.4 Evolução dos centros de libração .....                                  | 103 |
| 5 REGIÕES REGULARES E LINHA DE COLISÃO .....                                | 107 |
| 5.1 Resultados numéricos .....                                              | 108 |
| 5.2 Critério de sobreposição de ressonâncias .....                          | 110 |
| 6 VISÃO GLOBAL DO ESPAÇO DE FASE .....                                      | 119 |
| 7 SUMÁRIO E COMENTÁRIOS FINAIS .....                                        | 123 |
| 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....                                          | 124 |



## LISTA DE FIGURAS

- Figura 2.1 - Relação entre as coordenadas siderais  $(\xi, \eta)$  e as sinódicas  $(x, y)$ . A origem  $O$  está localizada no centro de massa do sistema e  $n$  é o movimento médio do sistema. .... 29
- Figura 2.2 - Esquema mostrando a localização dos pontos de equilíbrio lagrangianos triangulares ( $L_4$  e  $L_5$ ) e os colineares ( $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ ) em relação as duas massas  $\mu_1$  e  $\mu_2$  e o círculo de raio unitário centrado na massa  $\mu_1$ . ... 30
- Figura 2.3 - Curva de velocidade zero para o valor de constante de Jacobi igual a 3,010 e diferentes razões das massas. (a)  $\mu_2 = 10^{-3}$  ( Júpiter - Sol ). (b)  $\mu_2$  da ordem de  $10^{-5}$  ( Netuno - Sol ). A região proibida do movimento é denotada pela área interior à curva, sendo que para  $\mu_2 = 10^{-3}$  é menor do que no caso de  $\mu_2$  da ordem de  $10^{-5}$ . .... 32
- Figura 2.4 - Curvas de velocidade zero para razão das massas  $10^{-3}$  com diferentes valores de constante de Jacobi reproduzido de Winter & Murray (1994a). A região proibida para o movimento da partícula é a área hachurada. Observe que para o valor de constante de Jacobi 3,040 a massa  $\mu_2$  está totalmente confinada na área proibida, impossibilitando que uma partícula que venha do infinito tenha uma aproximação com  $\mu_1$  e, se a partícula estiver orbitando  $\mu_1$  na região permitida interior à curva, não poderá se aproximar ou colidir com  $\mu_2$ , podendo, desta maneira, ter um espaço de fase mais regular ao comparado com uma partícula sem restrições para o seu movimento. .... 34
- Figura 2.5 - Curva de velocidade zero para razões das massas: (a)  $\mu_2 = 10^{-3}$  e valor de constante de Jacobi,  $C_J = 3,040$ . (b)  $\mu_2$  da ordem de  $10^{-5}$  e valor de constante de Jacobi,  $C_J = 3,007$ . Em ambas situações a massa  $\mu_2$  está confinada na área proibida para o movimento da partícula. .... 35
- Figura 3.1 - (a) A energia potencial  $U$ , como uma função  $\varphi$ , comparada com três possíveis valores de energia total:  $E = E_1$ ,  $E = E_2$  e  $E = E_3$ . (b) Diagrama do espaço de fase correspondendo aos três casos de energia. .... 44

Figura 3.2 - Máximas amplitudes de libração associadas com cada ressonância via modelo aprimorado do pêndulo para razão das massas  $10^{-3}$ . As ressonâncias estão indicadas na figura e correspondem a localização do semi-eixo nominal obtido utilizando a terceira lei de Kepler..... 50

Figura 3.3 - Máximas amplitudes de libração associadas com cada ressonância via modelo aprimorado do pêndulo para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ . As ressonâncias estão indicadas na figura todas de primeira ordem e correspondem a localização do semi-eixo nominal obtido utilizando a terceira lei de Kepler.51

Figura 3.4 - Máximas amplitudes de libração associadas com cada ressonância via modelo aprimorado do pêndulo para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ . As ressonâncias estão indicadas na figura são todas de ordem superior às de primeira ordem e correspondem a localização do semi-eixo nominal obtido utilizando a terceira lei de Kepler..... 52

Figura 3.5 - Visão global das máximas amplitudes de libração via modelo aprimorado do pêndulo para razão das massas  $10^{-3}$ . O contorno em linhas pontilhadas corresponde a ressonância 2:3 e o contorno em linhas tracejadas corresponde a ressonância 3:8. As ressonâncias estão indicadas na figura. Observe que, no caso das ressonâncias de primeira ordem,  $p:p+1$ , quanto maior o valor de  $p$  maior a amplitude de libração da ressonância. .... 53

Figura 3.6 - Visão global das máximas amplitudes de libração via modelo aprimorado do pêndulo para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ . As ressonâncias estão indicadas na figura. Observe que, no caso das ressonâncias de primeira ordem,  $p : p+1$ , quanto maior o valor de  $p$  maior a amplitude de libração da ressonância. .... 54

Figura 3.7 - Continuação da visão global das máximas amplitudes de libração via modelo aprimorado do pêndulo para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ . As ressonâncias estão indicadas na figura. Observe que, no caso das ressonâncias de primeira ordem,  $p : p+1$ , quanto maior o valor de  $p$  maior a amplitude de



libração da ressonância. .... 55

Figura 3.8 - Neste gráfico tem-se a localização dos pontos de equilíbrio em termos de  $x$  e  $\nu$ , para  $y = 0$ . Para o valor de  $\nu > 0$  existem três pontos de equilíbrio, considerando  $\nu = 0$  existem dois pontos de equilíbrio e finalmente para o valor de  $\nu < 0$  existe somente um ponto de equilíbrio..... 60

Figura 3.9 - Topologia da evolução do espaço de fase via segundo modelo ideal de ressonância. As curvas em linhas tracejadas representam o movimento de circulação interna ou externa enquanto as demais curvas representam o movimento de libração. Observe que  $\nu$  é um parâmetro livre e os valores que foram considerados estão devidamente identificados na figura. .... 61

Figura 4.1 - (a) quadridimensional  $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$  - considerando um sistema com dois graus de liberdade. (b) tridimensional  $(x, \dot{x}, y)$  - utilizando a constante de integração  $C_j$ . (c) bidimensional  $(x, \dot{x})$  - considerando o movimento num plano, por exemplo,  $y = 0$ . Reproduzidos de Winter & Murray (1994a)..... 64

Figura 4.2 - Exemplo de superfície de seção de Poincaré para um movimento (a) regular. (b) caótico. Observe que para um movimento considerado regular tem-se uma ilha bem definida e para o movimento considerado caótico tem-se um espalhamento de pontos registrados aleatoriamente. Reproduzidos de Winter & Murray (1994a)..... 64

Figura 4.3 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da  $C_j = 2,900$  e razão das massas  $10^{-3}$ . Observe que para este valor de constante de Jacobi existe uma grande parte da região considerada caótica..... 67

Figura 4.4 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,000 e razão das massas  $10^{-3}$ ..... 68

Figura 4.5 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,020 e razão das massas  $10^{-3}$ ..... 69

Figura 4.6 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,030 e razão das massas  $10^{-3}$ ..... 70

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 4.7 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,050 e razão das massas $10^{-3}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 71 |
| Figura 4.8 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,080 e razão das massas $10^{-3}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 72 |
| Figura 4.9 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,090 e razão das massas $10^{-3}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 73 |
| Figura 4.10 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,100 e razão das massas $10^{-3}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 74 |
| Figura 4.11 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,120 e razão das massas $10^{-3}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 75 |
| Figura 4.12 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,150 e razão das massas $10^{-3}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 76 |
| Figura 4.13 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,300 e razão das massas $10^{-3}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 77 |
| Figura 4.14 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da $C_J = 2,900$ e razão das massas da ordem de $10^{-5}$ . Observe que para este valor de constante de Jacobi existe uma grande parte da região considerada caótica. Observe, ainda, que para esta razão das massas as ilhas são em maiores quantidades e menores larguras do que quando considerada a razão das massas $10^{-3}$ (figura 4.3)... 78 | 78 |
| Figura 4.15 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,000 e razão das massas da ordem de $10^{-5}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                           | 79 |
| Figura 4.16 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,020 e razão das massas da ordem de $10^{-5}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                           | 80 |
| Figura 4.17 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,030 e razão das massas da ordem de $10^{-5}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                           | 81 |
| Figura 4.18 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,050 e razão das massas da ordem de $10^{-5}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                           | 82 |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 4.19 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,080 e razão das massas da ordem de $10^{-5}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 83 |
| Figura 4.20 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,090 e razão das massas da ordem de $10^{-5}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 84 |
| Figura 4.21 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,100 e razão das massas da ordem de $10^{-5}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 85 |
| Figura 4.22 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,120 e razão das massas da ordem de $10^{-5}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 86 |
| Figura 4.23 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,150 e razão das massas da ordem de $10^{-5}$ . Observe que a dependência da razão das massas envolvidas apresenta-se sensivelmente ao se comparar a figura 4.12 com esta superfície de seção de Poincaré. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 87 |
| Figura 4.24 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,300 e razão das massas da ordem de $10^{-5}$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 88 |
| Figura 4.25 - Esquema onde é mostrado como se obtém a máxima amplitude de libração associada com a ressonância 1:2, utilizando-se a técnica de superfície de seção de Poincaré. As máximas amplitudes de libração são obtidas convertendo os dois valores de $x$ que medem a largura da ilha para $\dot{x}$ igual a zero em excentricidade e semi-eixo maior. (a) $C_j = 3,070$ . (b) Os pontos em preto representam os dois valores obtidos para $x$ via superfície de seção de Poincaré após convertê-los em semi-eixo maior e excentricidade, delimitando, após várias medições de $a$ e $e$ para diferentes valores de $C_j$ , desta forma, a máxima amplitude de libração para a ressonância 1:2. .... | 90 |
| Figura 4.26 - Região do espaço de fase para razão das massas $10^{-3}$ obtido numericamente via superfície de seção de Poincaré. A área considerada estável relacionada com as máximas amplitudes de libração associadas com cada ressonância é a área interior ao par de linhas. Estas amplitudes são obtidas medindo-se a largura das ilhas que se encontram na superfície de seção de                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |    |



Poincaré e que representam as ressonâncias, convertendo os valores de  $x$  em  $a$  e  $e$ . As ressonâncias estão indicadas na própria figura. As curvas que são dadas pelas linhas tracejadas representam os contornos das constantes de Jacobi. .... 91

Figura 4.27 - Região do espaço de fase para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  obtido numericamente via superfície de seção de Poincaré. A área considerada estável relacionada com as máximas amplitudes de libração associadas com cada ressonância é a área interior ao par de linhas. Estas amplitudes são obtidas medindo-se a largura das ilhas que se encontram na superfície de seção de Poincaré e que representam as ressonâncias, convertendo os valores de  $x$  em  $a$  e  $e$ . As ressonâncias estão indicadas na própria figura. As curvas que são dadas pelas linhas tracejadas representam os contornos das constantes de Jacobi. . 92

Figura 4.28 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 2,600 e razão de massa da ordem de  $10^{-5}$  ..... 101

Figura 4.29 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 2,600 e razão de massa da ordem de  $10^{-5}$  ... 102

Figura 4.30 - (a) Evolução dos centros de libração para ressonâncias de primeira ordem e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  considerando uma perturbação interna. (b) Apresentação da evolução em uma escala maior. Algumas ressonâncias estão identificadas na figura. Note que o centro de libração para a ressonâncias 6:7 não existe para o valor de excentricidade próximo de zero. A ressonância 1:2 apresenta a evolução do centro de libração para  $e \approx 0$  bem extensa ao ser comparada com as demais. Observe que o centro das ressonâncias apocêntricas 2:3, 3:4 e 4:5 evoluem naturalmente com o aumento do valor da constante de Jacobi para as ressonâncias pericêntricas 1:2, 2:3 e 3:4, respectivamente. De uma mesma maneira, a ressonância apocêntrica 5:6 tem uma tendência de evoluir para a ressonância pericêntrica 4:5. .... 105

Figura 4.31 - (a) Evolução dos centros de libração para ressonâncias de primeira ordem e razão das massas da ordem de  $10^{-3}$  considerando uma perturbação



externa. (b) Apresentação da evolução em uma escala maior. Algumas ressonâncias estão identificadas na figura. A ressonância 2:1 apresenta a evolução do centro de libração para  $e \approx 0$  bem extensa ao ser comparada com as demais. Observe que o centro da ressonância pericêntrica 3:2 evolui naturalmente com o aumento do valor da constante de Jacobi para a ressonância apocêntrica 1:2 e a ressonância pericêntrica 4:3 tende a evoluir para a ressonância apocêntrica 2:3. Figura reproduzida de Winter & Murray (1997a). . . . . 106

Figura 5.1 - Visão global das regiões consideradas estáveis, via superfície de seção de Poincaré, desprezando o caos que ocorre somente nas separatrizes, para diferentes razões das massas. A região considerada estável é a área abaixo de cada curva tracejada. Note que a área acima de cada curva deve ser caótica com exceção das regiões associadas com órbitas em libração ressonante. Também é apresentada na figura a curva de colisão. . . . . 109

Figura 5.2 - As localizações das ressonâncias de movimento médio exteriores em função do semi-eixo ressonante. Note que o espaço entre as localizações das ressonâncias vai diminuindo, portanto ao se considerar a região de libração existe uma tendência de sobreposição das ressonâncias. . . . . 111

Figura 5.3 - Localização do semi-eixo ressonante em função da razão das massas devido a sobreposição de ressonâncias (Wisdom, 1980) para o valor de excentricidade próximo de zero. Os pontos em cruz representam as localizações das primeiras ressonâncias que foram sobrepostas para cada razão das massas considerada. . . . . 112

Figura 5.4 - Regiões regulares e caóticas próximas à linha de colisão em função do semi-eixo maior e excentricidade. A região regular, obtida via superfície de seção de Poincaré desprezando o caos que ocorre somente nas separatrizes, é a área localizada abaixo da linha tracejada rosa. A primeira ressonância que se sobrepõe para  $e = 0$  segundo Wisdom (1980) é a ressonância 1:2, cujo semi-eixo é indicado na figura. A razão das massas considerada foi  $10^{-1}$ . Os pontos em preto representam os valores de  $a$  e  $e$  correspondentes a cada valor



obtido pela superfície de seção de Poincaré para diferentes valores de constante de Jacobi. A linha de colisão é indicada pela linha preta e a pontilhada preta representa a curva da esfera de Hill que foi obtida utilizando a relação  $1 + 2,4 \times \mu_2^{1/3} = a(1 - e)$ .

..... 114

Figura 5.5 - Regiões regulares e caóticas próximas à linha de colisão em função do semi-eixo maior e excentricidade. A região regular, obtida via superfície de seção de Poincaré desprezando o caos que ocorre somente nas separatrizes, é a área localizada abaixo da linha tracejada azul. A primeira ressonância que se sobrepõe para  $e = 0$  segundo Wisdom (1980) esta entre as ressonâncias 3:4 e 4:5, cujo semi-eixo é indicado na figura. A razão das massas considerada foi  $10^{-3}$ . Os pontos em preto representam os valores de  $a$  e  $e$  correspondentes a cada valor obtido pela superfície de seção de Poincaré para diferentes valores de constante de Jacobi. A linha de colisão é indicada pela linha preta e a pontilhada preta representa a curva da esfera de Hill que foi obtida utilizando a relação  $1 + 2,4 \times \mu_2^{1/3} = a(1 - e)$ . .... 115

Figura 5.6 - Regiões regulares e caóticas próximas à linha de colisão em função do semi-eixo maior e excentricidade. A região regular, obtida via superfície de seção de Poincaré desprezando o caos que ocorre somente nas separatrizes, é a área localizada abaixo da linha tracejada verde. A primeira ressonância que se sobrepõe para  $e = 0$  segundo Wisdom (1980) é a ressonâncias 9:10, cujo semi-eixo é indicado na figura. A razão das massas considerada foi  $5,1 \times 10^{-5}$ . Os pontos em preto representam os valores de  $a$  e  $e$  correspondentes a cada valor obtido pela superfície de seção de Poincaré para diferentes valores de constante de Jacobi. A linha de colisão é indicada pela linha preta e a pontilhada preta representa a curva da esfera de Hill que foi obtida utilizando a relação  $1 + 2,4 \times \mu_2^{1/3} = a(1 - e)$ . .... 116

Figura 5.7 - Região caótica em função das razões das massas. Comparação do resultado numérico, pontos em preto, com o método analítico (Chirikov, 1979; Wisdom,1980), em cruz, para  $e = 0$ . É possível observar que existe um limite



onde o modelo analítico se aproxima dos resultados obtidos numericamente.  
..... 117

Figura 5.8 - Apresentação da curva de ajuste da região caótica em função das razões das massas utilizando o método numérico, pontos em preto, para  $e = 0$ . A equação que satisfaz tal curva é dada por:  $0,07152x^3 + 0,71228x^2 + 2,42952x + 3,02218$ . ..... 118

Figura 6.1 - Visão global da estrutura do espaço de fase para razão de massa  $10^{-3}$  obtido numericamente via superfície de seção de Poincaré. A área hachurada representa a área estável. A área entre o par de linhas representa a máxima amplitude de libração associada com cada ressonância. As linhas tracejadas representam os contornos da constante de Jacobi. Para o valor da constante de Jacobi 2,900 pode-se observar que o valor de excentricidade associado a esta curva não poderá ser menor que 0,4. .... 121

Figura 6.2 - Visão global da estrutura do espaço de fase para razão de massa da ordem de  $10^{-5}$  obtido numericamente via superfície de seção de Poincaré. A área hachurada representa a área estável. A área entre o par de linhas representa a máxima amplitude de libração associada com cada ressonância. As linhas tracejadas representam os contornos da constante de Jacobi. Para o valor da constante de Jacobi 2,600 pode-se observar que o valor de excentricidade associado a esta curva não poderá ser menor que 0,6. .... 124

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Valores dos coeficientes  $f_d + f_i$  em função dos coeficientes de Laplace. Note que quanto maior a ordem da ressonância, o valor do coeficiente aumenta sensivelmente. As ressonâncias utilizadas estão indicadas na tabela. Estes valores foram utilizados para calcular as máximas amplitudes de libração associadas com cada ressonância isoladamente via modelo aprimorado do pêndulo.

..... 49

Tabela 3.2 - Valores dos coeficientes  $f_1$ ,  $f_d$  e  $f_i$  em função dos coeficientes de Laplace em que  $f_1$  é termo secular,  $f_d$  é termo ressonante direto e  $f_i$  é o termo ressonante indireto. Estes valores foram utilizados para o cálculo da máxima amplitude de libração associada com cada ressonância isoladamente via segundo modelo ideal de ressonância.....58

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SSP      superfície de seção de Poincaré  
 esf      esfera





## LISTA DE SÍMBOLOS

|            |                                                       |
|------------|-------------------------------------------------------|
| $m$        | massa                                                 |
| $a$        | semi-eixo maior                                       |
| $e$        | excentricidade                                        |
| $C_j$      | constante de Jacobi                                   |
| $G$        | constante universal de gravitação                     |
| $\mu$      | razão das massas                                      |
| $\xi$      | coordenada da partícula no sistema inercial           |
| $\eta$     | coordenada da partícula no sistema inercial           |
| $x$        | coordenada da partícula no sistema girante            |
| $y$        | coordenada da partícula no sistema girante            |
| $I$        | inclinação                                            |
| $\varpi$   | longitude do pericentro                               |
| $\Omega$   | longitude do nodo ascendente                          |
| $n$        | movimento médio                                       |
| $\lambda$  | longitude média                                       |
| $R$        | função perturbadora                                   |
| $t$        | tempo                                                 |
| $R_d$      | contribuição secular da função perturbadora           |
| $f_d$      | coeficiente do termo direto da função perturbadora    |
| $f_i$      | coeficiente do termo indireto da função perturbadora  |
| $\varphi$  | argumento do ângulo ressonante da função perturbadora |
| $f_1$      | coeficiente do termo secular da função perturbadora   |
| $a_n$      | ressonância nominal                                   |
| $\omega_0$ | amplitude de libração do pêndulo                      |
| $T$        | energia cinética                                      |
| $U$        | energia potencial                                     |
| $E$        | energia total                                         |
| $V$        | potencial perturbador                                 |

$\bar{K}, J$  variáveis canônicas de Delaunay  
 $H$  hamiltoniana

## RESUMO

Neste trabalho, a primeira abordagem adotada foi o Problema Plano, Circular, Restrito de Três Corpos que é um sistema útil e aparentemente simples, mas que pode fornecer subsídios para o estudo limitado de nosso Sistema Solar. Utilizando-se de alguns recursos numéricos e analíticos, as equações de Hamilton, de um objeto, como uma partícula artificial, as regras de conservação de energia, bem como as condições de existência do espaço de fase da região externa para uma perturbação interna de um objeto, em função das condições de movimento orbital. Regras regulares de movimento de objetos de fase da região externa são obtidas de modo que a máxima amplitude de oscilação orbital com cada movimento (as razões das médias quadráticas desses estados foram  $10^{-4}$  Júpiter/Sol e  $10^{-3}$  a  $10^{-2}$  (Neutro/Sol)). Na abordagem seguinte, foi utilizada a técnica de variação de ação de Poincaré e os métodos analíticos aplicados foram a primeira ordem de aproximação de movimento orbital e a segunda ordem de aproximação. Uma outra abordagem das regras regulares foi obtida quando foram analisados os efeitos da variação de ação de Poincaré e pode-se notar que a soma das perturbações dispersíveis nas separações para alguns valores de constantes de Jacobi. O que implica na obtenção de regras de aproximação de movimento orbital de uma órbita de uma órbita para diferentes valores de energia (no intervalo de  $10^{-4}$  a  $10^{-2}$ ). O método analítico utilizado para comparar os resultados, para os valores de energia de aproximação de movimento orbital de uma órbita de uma órbita para diferentes valores de energia (no intervalo de  $10^{-4}$  a  $10^{-2}$ ).

**PALAVRAS-CHAVE:** regras regulares e orbitais; problema plano, circular, restrito de três corpos; movimento orbital; aproximação de movimento orbital de uma órbita de uma órbita.

**CELESTINO, C.C.** *Um Estudo do Espaço de Fase do Problema Restrito de Três Corpos*. Guaratinguetá, 1999, p. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

## RESUMO

Neste trabalho o sistema dinâmico adotado foi o Problema Plano, Circular, Restrito de Três Corpos que é um sistema útil e aparentemente simples, mas que pode fornecer subsídios para o entendimento de nosso Sistema Solar. Utilizando-se alguns recursos numéricos e analíticos, já existentes na literatura, foram obtidas, como uma primeira aproximação, as regiões consideradas estáveis, bem como, as caóticas. A estrutura do espaço de fase da região externa para uma perturbação interna é determinada em função das ressonâncias de movimento médio. Regiões regulares da estrutura do espaço de fase da região externa são obtidas de acordo com a máxima amplitude de libração associada com cada ressonância (as razões das massas envolvidas nesses estudos foram  $10^{-3}$  (Júpiter/Sol) e da ordem de  $10^{-5}$  (Netuno/Sol)). Na abordagem numérica, foi utilizada a técnica de superfície de seção de Poincaré e os métodos analíticos aplicados foram o primeiro modelo ideal de ressonância e o segundo modelo de ressonância. Uma outra abordagem das regiões regulares foi obtida quando feita uma análise da superfície de seção de Poincaré e pode-se notar que o caos era praticamente desprezível nas separatrizes para alguns valores de constante de Jacobi. O que implica na obtenção da largura da região considerada caótica ao redor da linha de colisão para diferentes valores de razão das massas (no intervalo da ordem de  $10^{-1}$  a  $10^{-5}$ ). O método analítico utilizado para comparar estes resultados, para os valores de excentricidade próximos de zero, foi o método de sobreposição de ressonâncias de Chirikov.

**PALAVRAS-CHAVE:** regiões estáveis e caóticas; problema plano, circular, restrito de três corpos; ressonâncias; superfície de seção de Poincaré; espaço de fase.



**CELESTINO, C.C.** *A study of the phase space of the planar, circular, restricted three-body problem.* Guaratinguetá, 1999, p. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

## **ABSTRACT**

In the present work the dynamical system adopted was the planar, circular, restricted three body problem, which is useful and apparently simple, but it can provide relevant information for the understanding of our solar system. Using some numerical and analytical procedures found in the literature, it was obtained, as a first approximation, the stable and the chaotic regions of the phase space. The structure of the phase space for the region exterior to the perturber was determined in terms of the mean motion resonances. Regular regions are obtained as the maximum amplitude of libration associated with the resonances (the mass ratio adopted in these studies were  $10^{-3}$  (Jupiter/Sun) and of the order  $10^{-5}$  (Neptune/Sun)). In the numerical approach was used the Poincaré surface of section technique, while in the analytical approach were applied the ideal resonance model of the pendulum and the second fundamental model of resonance. Another approach for the regular regions was made using the surfaces of section for different values of Jacobi constant when neglecting small chaotic regions due to separatrices. Following this way it was obtained the width of the chaotic region around the collision line for different values of mass ratio (in the range of the orders  $10^{-1}$  to  $10^{-5}$ ). The analytical method of overlap of resonances by Chirikov was adopted in order to compare with the width of the chaotic region generated in our results for the case of small eccentricities.

**KEYWORDS:** stable and chaotics regions, planar, circular, restricted three-body problem, resonances, Poincaré surface of section, phase space.

## 1 - INTRODUÇÃO

A grande procura do Homem em responder algumas perguntas de como a formação do nosso sistema planetário ocorreu é responsável por um significativo número de pesquisas nesta área.

Sendo esta uma questão em aberto, alguns modelos da literatura devem ser aplicados, revistos e analisados considerando diferentes condições iniciais para validá-los ou justificá-los, comparando-os com os resultados obtidos em diferentes abordagens, como por exemplo, numericamente. Por esta razão, a corrida para melhores resultados ainda prossegue. Como Ciência é algo que se experimenta, tem-se um caminho a pequenos passos, tentando seguir o rumo da correnteza.

Os modelos existentes são obtidos utilizando-se de aproximações, pois, para obter-se aquele em que é levado em conta tudo e todo o real, ainda não se têm resultados. Dessa maneira, está sendo considerado aqui o *problema plano, circular, restrito de três corpos*.

O problema plano, circular, restrito de três corpos é um item abordado pela Mecânica Celeste. Este problema possui, apesar de não ser integrável, um conjunto de soluções especiais, em geral, órbitas periódicas associadas às ressonâncias de movimento médio. Estas definem a estrutura do espaço de fase deste sistema dinâmico com órbitas periódicas (centro da ressonância), quase periódicas (librações e circulações) e caóticas. Os tópicos básicos relacionados com este problema, isto é, as equações do movimento, os pontos de equilíbrio lagrangianos e as curvas de velocidade zero, são abordados no capítulo 2.

Seguindo a curiosidade do Homem muitos pesquisadores utilizaram-se de inúmeros dados dinâmicos e físico-químicos para explicar algumas características do Sistema Solar (Gladman, 1993; Lissauer, 1998; Chambers et al, 1996). Nesse trabalho é analisado o efeito ressonante existente no sistema dinâmico adotado, utilizando-se da abordagem numérica e dos métodos analíticos para obter-se os resultados. Esses efeitos ressonantes em termos de res-





sonâncias de movimento médio podem fornecer a evolução do centro de libração, bem como, das máximas amplitudes de libração.

Dentre alguns estudos existentes na literatura pode-se citar o caso de razão das massas  $10^{-3}$  (Júpiter/Sol) que foi abordado por alguns pesquisadores como Hadjidemetriou & Ichtiaroglou (1993), Milani & Nobili (1985) e Winter & Murray (1994 a-b, 1997a-b) e para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  (Netuno/Sol), por Malhotra (1996, 1998), Malhotra et al (1999), Thomas (1998) e Gallardo (1996). Porém seus resultados foram obtidos analítica e/ou numericamente, considerando somente algumas regiões do espaço de fase ou ressonâncias de primeira ordem, deixando, desta maneira, em seus estudos, a necessidade de uma continuidade. Para explorar e apresentar de maneira mais completa o espaço de fase da região externa tem-se que para a razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  são consideradas todas as ressonâncias de primeira ordem e terceira ordem, as principais de quinta, sétima e nona ordens. Considerando-se a razão das massas de  $10^{-3}$  são apresentadas todas as ressonâncias de primeira e terceira ordens contidas no espaço de fase.

Os resultados obtidos analiticamente derivam do modelo aprimorado do pêndulo (Dermott & Murray, 1983) e o segundo modelo ideal de ressonância (Henrard & Lemaître, 1983) e são apresentados no capítulo 3, bem como, uma descrição resumida de tais modelos para o sistema dinâmico em questão.

Os resultados das máximas amplitudes de libração associadas às ressonâncias de movimento médio para razão das massas  $10^{-3}$ , que correspondem à região externa à órbita de Júpiter (Winter & Murray, 1994b), e da ordem de  $10^{-5}$ , que correspondem aos corpos transnetunianos (Edgeworth, 1943/1949, Kuiper, 1951), são expostos no capítulo 4, bem como, a evolução dos centros de libração.

No capítulo 5 são apresentadas regiões consideradas estáveis e caóticas ao redor da linha de colisão, a partir de resultados numéricos, para várias razões das massas da ordem de  $10^{-1}$  a  $10^{-5}$ . A fim de comparar tais resultados para





o valor de excentricidade próximos de zero foi utilizado o método analítico de sobreposição de ressonâncias desenvolvido por Chirikov (1979), aplicado por Wisdom (1980) e confirmado por Duncan et al (1989) no caso em questão.

Uma visão global da região externa do espaço de fase para razões das massas da ordem de  $10^{-5}$  e  $10^{-3}$  é apresentada no capítulo 6.

Para finalizar tem-se um sumário e algumas conclusões de todo o trabalho apresentadas no capítulo 7.



## 2 - PROBLEMA PLANO, CIRCULAR, RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Ao considerar três corpos de massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  movendo-se sob a interação gravitacional mútua, tem-se o problema de três corpos. Mas ao considerar que o terceiro corpo,  $m_3$ , tem massa negligenciável comparado com os corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  de tal forma que seu movimento não afeta o movimento dos outros dois corpos, apesar de seu movimento ser afetado por eles, nesse caso, tem-se o problema restrito de três corpos.

Posteriormente, impondo-se a condição de que as duas massas tenham energia tal que elas se movam em órbitas circulares ao redor de seu centro de massa comum, que a distância entre elas, bem como a velocidade angular sejam consideradas fixas e, além disso, que o movimento dos três corpos esteja num plano comum, isto é, num mesmo plano, tem-se o **problema plano, circular, restrito de três corpos**.

De acordo com a escolha de unidades, o sistema pode ser considerado normalizado, sendo que, desta forma, a unidade de massa é tal que  $G(m_1 + m_2) = 1$ . A unidade de tempo é tal que o período orbital de  $m_1$  e  $m_2$  em torno do centro de massa do sistema vale  $2\pi$ , a unidade de distância é a constante de separação das massas. Como consequência, o movimento médio do sistema,  $m_1$  e  $m_2$ , é unitário.

Neste trabalho as razões das massas envolvidas são:  $\mu_2 = 10^{-3}$  (Júpiter-Sol) e  $\mu_2 = 5,168 \times 10^{-5} \approx 5 \times 10^{-5}$  (Netuno-Sol), sendo  $\mu_2 = m_2/(m_1 + m_2)$ , considerando  $m_1$  como sendo o corpo central ou principal,  $m_2$  como corpo perturbador ou secundário e  $m_3$  como corpo perturbado ou partícula.

### 2.1 - Equações de movimento

Consideramos o movimento das duas massas  $m_1$  e  $m_2$  em órbita circular em torno do centro de massa do sistema  $O$  e o movimento da partícula teste  $m_3$  que se move sob o efeito gravitacional das duas massas sem afetar o movimento destas. Desta forma tem-se um conjunto de eixos  $\xi$ ,  $\eta$  no sistema



inercial referente ao centro de massa do sistema, figura 2.1. Considere o eixo  $\xi$  ao longo da linha de  $m_1$  com  $m_2$  para o tempo  $t = 0$  no qual o eixo  $\eta$  é perpendicular a ele. Considere as coordenadas das duas massas neste sistema de referência sendo  $(\xi_1, \eta_1)$  e  $(\xi_2, \eta_2)$ .

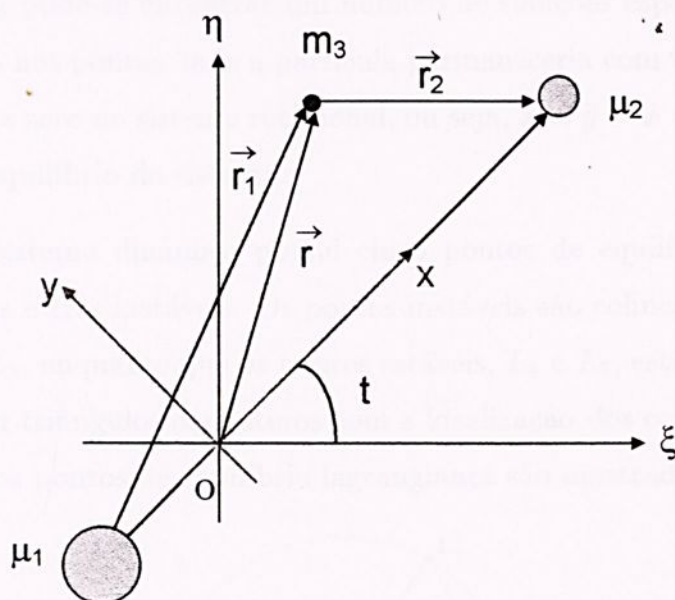


Figura 2.1 - Relação entre as coordenadas siderais  $(\xi, \eta)$  e as sinódicas  $(x, y)$ . A origem  $O$  está localizada no centro de massa do sistema e  $n$  é o movimento médio do sistema.

Seja o sistema de coordenadas girantes  $(x, y)$  com a mesma origem do sistema inercial de coordenadas  $(\xi, \eta)$ , rotacionando no sentido anti-horário. A direção do eixo  $x$  é tal que as massas  $m_1$  e  $m_2$  tenham sempre coordenadas  $(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$  e  $(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$ , respectivamente.

As equações do movimento no sistema sinódico são dadas por (Murray & Dermott, 1996):

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\mu_1 \left( \frac{x + \mu_2}{r_1^3} \right) - \mu_2 \left( \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right) \quad (2.1)$$

e

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -y \left( \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right). \quad (2.2)$$



## 2.2 - Pontos de equilíbrio lagrangianos

Apesar do problema restrito de três corpos não ser um problema integrável, isto é, não se pode encontrar uma solução analítica para estas equações do movimento, pode-se encontrar um número de soluções especiais. Isto pode ser encontrado nos pontos onde a partícula permaneceria com velocidade e aceleração iguais a zero no sistema rotacional, ou seja,  $\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$ , que são os pontos de equilíbrio do sistema.

Este sistema dinâmico possui cinco pontos de equilíbrio, sendo dois pontos estáveis e três instáveis. Os pontos instáveis são colineares e denotados por  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , enquanto que os pontos estáveis,  $L_4$  e  $L_5$ , estão localizados de modo a formar triângulos equiláteros com a localização dos corpos  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . As localizações dos pontos de equilíbrio lagrangianos são mostradas na figura 2.2.

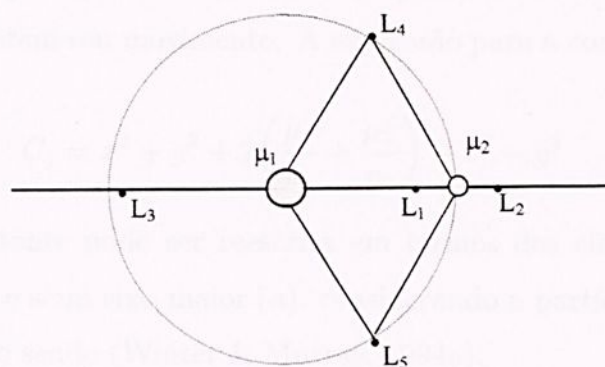


Figura 2.2 - Esquema mostrando a localização dos pontos de equilíbrio lagrangianos triangulares ( $L_4$  e  $L_5$ ) e os colineares ( $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ ) em relação as duas massas  $\mu_1$  e  $\mu_2$  e o círculo de raio unitário centrado na massa  $\mu_1$ .

## 2.3 - A constante de Jacobi e as curvas de velocidade zero

Dadas as equações de movimento (2.1) e (2.2) podemos reescrevê-las como (Murray & Dermott, 1996):

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.4)$$

sendo  $U = U(x, y)$  dado por :

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (2.5)$$

Multiplicando (2.3) por  $\dot{x}$ , (2.4) por  $\dot{y}$  e somando as duas equações obtém-se :

$$\dot{y}\ddot{y} + \dot{x}\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} = \frac{dU}{dt} \quad (2.6)$$

Integrando tem-se :

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2U - C_j \quad (2.7)$$

onde  $C_j$  é a constante de integração chamada de constante de Jacobi, ou *integral de energia relativa*. Pode-se notar que a constante de Jacobi não é simplesmente uma integral de energia, pois o problema circular, restrito de três corpos não tem conservação de energia ou de momentum angular. Sendo isto uma consequência natural do fato de que a partícula não afeta o movimento dos outros dois corpos, ainda que estes afetem seu movimento. A expressão para a constante de Jacobi é

$$C_j = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \quad (2.8)$$

Esta constante pode ser reescrita em termos dos elementos orbitais, excentricidade ( $e$ ) e semi-eixo maior ( $a$ ), considerando a partícula em oposição no apocentro como sendo (Winter & Murray, 1994a):

$$C_j = 2\sqrt{\mu_1 a(1 - e^2)} - \frac{\mu_1(1 - e)}{a(1 + e)} + 2\left(\frac{1 - \mu_2}{a(1 + e) + \mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1 - a(1 + e)}\right) \quad (2.9)$$

Lembrando que  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$ , sendo  $v$  a velocidade da partícula no sistema rotacional, tem-se da equação (2.7) que:  $v^2 = 2U - C_j$ . Com isto sempre  $2U \geq C_j$ , caso contrário a velocidade será imaginária.

A importância da constante de Jacobi pode ser apreciada pela consideração quando a velocidade da partícula é nula, gerando as denominadas *curvas de velocidade zero*. Utilizando a equação (2.8) e admitindo a velocidade da partícula nula obtém-se:

$$C_j = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) \quad (2.10)$$



Através da equação (2.10) é possível definir um conjunto de curvas no plano  $xy$  para valores de constante de Jacobi. Note que esta equação apresenta uma dependência direta com as razões das massas envolvidas. Essas curvas fornecem informações sobre as regiões de movimento possível da partícula, não representando a órbita desta. Veja, por exemplo, na figura 2.3, em que tem-se para um mesmo valor de constante de Jacobi, utilizando-se diferentes razões das massas, diferentes regiões proibidas. Estas regiões proibidas são denotadas como sendo a área interior à curva, a qual, para a partícula se encontrar nesta região, deverá ter velocidade imaginária. O ponto localizado no centro da área interior representa o corpo de massa  $\mu_1$  e o outro ponto representa o corpo de massa  $\mu_2$ , sabendo que  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ . A localização dos pontos lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$  são os pontos de contato da parte interior e exterior, respectivamente, ao redor de  $\mu_2$ . As demais regiões não possuem nenhuma restrição quanto ao movimento da partícula.

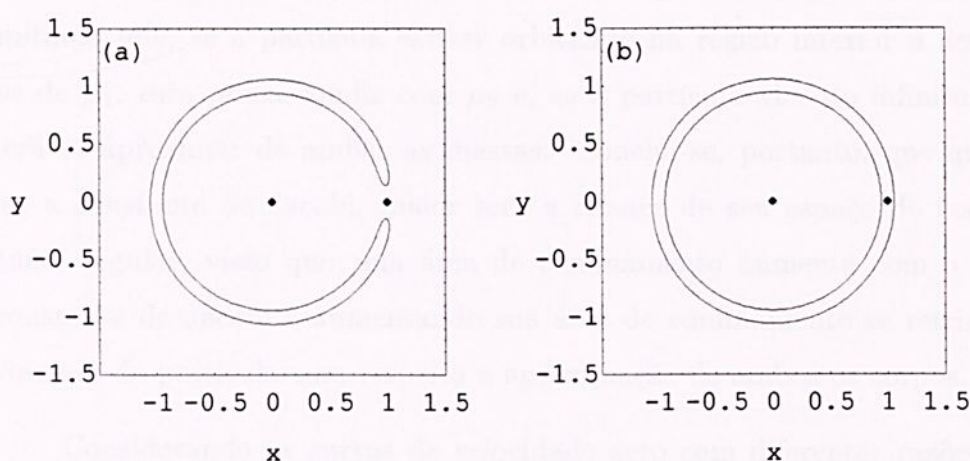


Figura 2.3 - Curva de velocidade zero para o valor de constante de Jacobi igual a 3,010 e diferentes razões das massas. (a)  $\mu_2 = 10^{-3}$  (Júpiter - Sol). (b)  $\mu_2$  da ordem de  $10^{-5}$  (Netuno - Sol). A região proibida do movimento é denotada pela área interior à curva, sendo que para  $\mu_2 = 10^{-3}$  é menor do que no caso de  $\mu_2$  da ordem de  $10^{-5}$ .

Na figura 2.4 são apresentadas algumas curvas de velocidade zero para o caso da razão das massas  $10^{-3}$  reproduzido de Winter & Murray (1994a).



Nesta figura tem-se que para o valor de constante de Jacobi igual a 3,000, uma partícula orbitando  $\mu_1$  poderá se aproximar ou até mesmo colidir com o corpo perturbador  $\mu_2$ , visto que sua região proibida delimitada pela área interior à curva é pequena, se restringindo às regiões em torno dos pontos de equilíbrio lagrangianos  $L_4$  e  $L_5$  e, de uma mesma forma, uma partícula vinda do infinito também poderá se aproximar ou colidir com o corpo  $\mu_1$  ou  $\mu_2$ . Desta forma, para este valor de constante de Jacobi o espaço de fase poderá ser bastante caótico, pois, a partícula poderá sofrer perturbações, sem restrições, tanto do corpo  $\mu_2$  quanto do corpo  $\mu_1$ . Note-se que, conforme o valor de constante de Jacobi aumenta, a correspondente área proibida também aumenta. O ponto de equilíbrio lagrangiano  $L_1$  é envolvido a partir do valor de constante de Jacobi de 3,002, começando, desta maneira, a fornecer os primeiros indícios de como ficará esta área proibida para o movimento da partícula. Para o valor de constante de Jacobi de 3,040 a região proibida envolve o ponto de equilíbrio lagrangiano  $L_2$ , isto é, envolve a massa  $\mu_2$ , fechando uma região de confinamento e não permitindo que, se a partícula estiver orbitando na região interior à área ao redor de  $\mu_1$ , esta possa colidir com  $\mu_2$  e, se a partícula vier do infinito, não poderá se aproximar de ambas as massas. Conclui-se, portanto, que quanto maior a constante de Jacobi, maior será a chance de seu espaço de fase ser bastante regular, visto que, sua área de confinamento aumenta com o valor de constante de Jacobi e aumentando sua área de confinamento se retringe o movimento da partícula com respeito a aproximação de ambos os corpos.

Considerando as curvas de velocidade zero com diferentes razões das massas, é possível notar que quanto maiores as razões das massas, é necessário que existam maiores valores de constante de Jacobi para que a área de confinamento encubra  $\mu_2$  e, desta forma, possamos garantir um espaço de fase mais regular do que quando a partícula possa se aproximar tanto de  $\mu_2$  quanto de  $\mu_1$ . Como exemplo, tem-se que para razão das massas  $10^{-3}$ , isto ocorre com o valor de constante de Jacobi de 3,040 e, para obter-se esta mesma situação para a razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ , tem-se que o valor de constante de

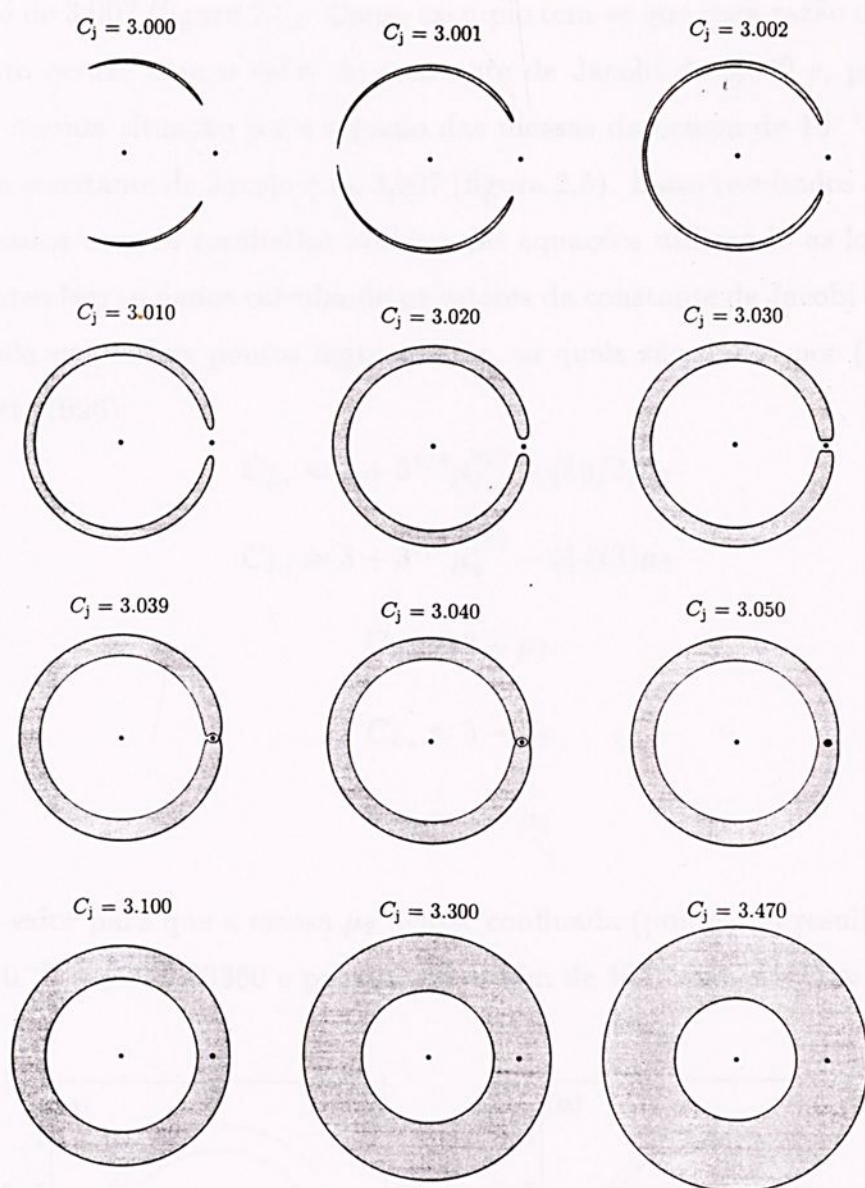


Figura 2.4 - Curvas de velocidade zero para razão das massas  $10^{-3}$  com diferentes valores de constante de Jacobi reproduzido de Winter & Murray (1994a). A região proibida para o movimento da partícula é a área hachurada. Observe que para o valor de constante de Jacobi 3,040 a massa  $\mu_2$  está totalmente confinada na área proibida, impossibilitando que uma partícula que venha do infinito tenha uma aproximação com  $\mu_1$  e, se a partícula estiver orbitando  $\mu_1$  na região permitida interior à curva, não poderá se aproximar ou colidir com  $\mu_2$ , podendo, desta maneira, ter um espaço de fase mais regular ao comparado com uma partícula sem restrições para o seu movimento.



Jacobi é de 3,007 (figura 2.5). Como exemplo tem-se que para razão das massas  $10^{-3}$  isto ocorre com o valor de constante de Jacobi de 3,040 e, para obter-se esta mesma situação para a razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ , tem-se o valor de constante de Jacobi é de 3,007 (figura 2.5). Estes resultados podem ser comparados com os resultados obtidos das equações utilizando as localizações dos pontos lagrangianos calculando os valores da constante de Jacobi associados com cada um desses pontos lagrangianos, os quais são dados por (Murray & Dermott, 1996):

$$C_{L_1} \approx 3 + 3^{4/3} \mu_2^{2/3} - (10/3) \mu_2 \quad (2.11)$$

$$C_{L_2} \approx 3 + 3^{4/3} \mu_2^{2/3} - (14/3) \mu_2 \quad (2.12)$$

$$C_{L_3} \approx 3 + \mu_2 \quad (2.13)$$

$$C_{L_4} \approx 3 - \mu_2 \quad (2.14)$$

$$C_{L_5} \approx 3 - \mu_2 \quad (2.15)$$

onde o valor para que a massa  $\mu_2$  ficasse confinada (ponto  $L_2$ ) resulta no valor  $\mu_2 = 10^{-3}$ ,  $C_J \approx 3,03860$  e para  $\mu_2$  da ordem de  $10^{-5}$  tem-se  $C_J \approx 3,00576$ .

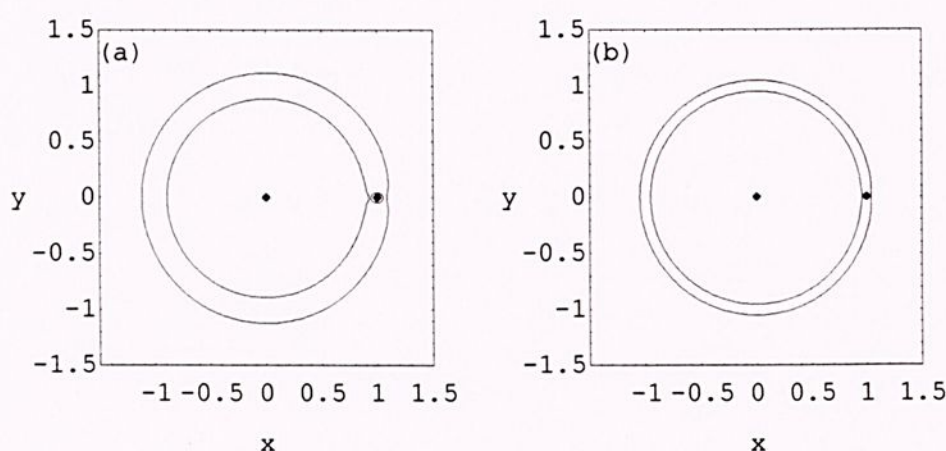


Figura 2.5 - Curva de velocidade zero para razões das massas: (a)  $\mu_2 = 10^{-3}$  e valor de constante de Jacobi,  $C_J = 3,040$ . (b)  $\mu_2$  da ordem de  $10^{-5}$  e valor de constante de Jacobi,  $C_J = 3,007$ . Em ambas situações a massa  $\mu_2$  está confinada na área proibida para o movimento da partícula.



Utilizando as informações obtidas sobre as regiões tidas para o movimento da partícula, pode-se analisar a faixa de valores de constante de Jacobi que deverão ser considerados para a obtenção do espaço de fase em termos das máximas amplitudes de libração para cada caso aqui abordado.



### 3 - RESSONÂNCIA: ESTUDOS ANALÍTICOS

#### 3.1 - Introdução

Ao considerar-se um corpo de massa  $m_2$  orbitando um corpo de massa central  $m_1$  tem-se o problema de dois corpos que é integrável e os elementos orbitais, semi-eixo maior ( $a$ ), excentricidade ( $e$ ), inclinação ( $I$ ), longitude do pericentro ( $\varpi$ ) e longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ) são constantes desde que  $m_1$  e  $m_2$  sejam tratados como pontos de massa. Agora, ao considerar-se o movimento de  $m_3$  ao sistema, tem-se o problema de três corpos onde este terceiro também se move sobre os efeitos gravitacionais dos outros dois corpos. Este problema é não integrável, mas pode-se obter algumas informações das perturbações adicionais experimentadas pelo corpo  $m_3$ , fazendo uso de modelos analíticos. Utilizando estes modelos pode-se buscar uma aproximação e/ou comparação com os resultados obtidos com o uso de modelos numéricos. Os modelos analíticos aqui escolhidos foram: modelo ideal de ressonância ou modelo aprimorado do pêndulo (Dermott & Murray, 1983) e segundo modelo ideal de ressonância (Henrard & Lemaitre, 1983).

#### 3.1.1 - Equações de Lagrange

Os estudos envolvidos nesse item foram totalmente baseados em Murray & Dermott (1996).

As equações planetárias de Lagrange são dadas por:

$$\dot{a} = \frac{2}{an} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \quad (3.1)$$

$$\dot{e} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial R}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} \quad (3.2)$$

$$\dot{\varpi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (3.3)$$

$$\dot{\epsilon} = -\frac{2}{an} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial R}{\partial e} \quad (3.4)$$

sendo  $R$  a função perturbadora e a longitude média,  $\lambda$ , dada por  $\lambda = nt + \epsilon$ .

Estas equações são dadas em termos dos elementos orbitais  $n$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $\varpi$  e  $\lambda$ , como sendo movimento médio, semi-eixo maior, excentricidade, longitude do pericentro e longitude média, respectivamente. Lembrando-se que é possível obter a equação da variação do movimento médio utilizando a terceira lei de Kepler.

As equações de Lagrange para a variação dos elementos orbitais somente com os termos de mais baixa ordem na excentricidade, para um dado potencial perturbador, são expressas por

$$\dot{n} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \quad (3.5)$$

$$\dot{e} = -\frac{1}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} \quad (3.6)$$

$$\dot{\varpi} = \frac{1}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (3.7)$$

$$\dot{e} = \frac{1}{2na^2} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (3.8)$$

onde a função perturbadora do terceiro corpo, considerando uma perturbação interna, foi obtida após se fazer uma média eliminando os termos de curto período como sendo

$$\langle R \rangle = \frac{\mu_2}{a} \left[ \alpha R_D^{(sec)} + e^{|j_3|} [\alpha f_d(\alpha) + \alpha f_i(\alpha)] \cos \varphi \right] \quad (3.9)$$

sendo  $\alpha = a/a'$  e a contribuição secular dada por

$$R_D^{(sec)} = (e^2) f_1(\alpha) \quad (3.10)$$

sendo  $f_1$  o coeficiente do termo secular,  $f_d$  o coeficiente do termo direto e  $f_i$  o coeficiente do termo indireto na expansão da função perturbadora, os quais são funções dos coeficientes de Laplace. Estes são expressos por (Murray & Dermott, 1996)

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \frac{1}{8} \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha) \\ f_d(\alpha) &= \frac{1}{2} [2(p+1) + \alpha \frac{d}{d\alpha}] b_{\frac{1}{2}}^{(p+1)}(\alpha) \\ f_i(\alpha) &= \frac{1}{2\alpha} \end{aligned} \quad (3.11)$$



A forma do argumento do ângulo ressonante na expressão da função perturbadora, considerando uma perturbação interior de um corpo em órbita circular, é dada por :

$$\varphi = j_1 \lambda + j_2 \lambda' + j_3 \varpi. \quad (3.12)$$

sendo que os termos sem linha são referentes ao corpo secundário exterior e os com linha são do corpo secundário interior (neste caso, corpo perturbado, isto é, partícula e perturbador, respectivamente). Os coeficientes são tais que  $j_1 > |j_2|$ ,  $j_1 > 0$ ,  $j_2 < 0$  e  $j_3 < 0$ , pois estamos considerando  $r' < r$  sempre.

Utilizando a relação  $\lambda = nt + \epsilon$  e  $\lambda' = n't + \epsilon'$ , pode-se reescrever a equação (3.12) da forma

$$\varphi = j_1(nt + \epsilon) + j_2(n't + \epsilon') + j_3\varpi \quad (3.13)$$

A variação temporal do ângulo ressonante  $\varphi$  é :

$$\dot{\varphi} = j_1(n + \dot{\epsilon}) + j_2n' + j_3\dot{\varpi} \quad (3.14)$$

Quando iguala-se a variação do ângulo ressonante a zero está sendo considerado o caso de uma ressonância exata. Ao considerar-se somente as contribuições do movimento médio tem-se a ressonância nominal que ocorre quando :

$$j_1 n + j_2 n' = 0 \quad (3.15)$$

A localização da ressonância nominal externa,  $a_n$ , é definida como sendo o semi-eixo maior do corpo exterior que satisfaz a relação :

$$a_n = \left( \frac{j_1}{|j_2|} \right)^{2/3} \quad (3.16)$$

Utilizando a função perturbadora anteriormente descrita pode-se obter as equações de Lagrange relativas ao corpo perturbado como sendo ( Murray &

Dermott, 1996 )

$$\dot{n} = 3j_1 C_r n e^{|j_3|} \sin \varphi \quad (3.17)$$

$$\dot{e} = j_3 C_r e^{|j_3|-1} \sin \varphi \quad (3.18)$$

$$\dot{\varpi} = 2C_s + |j_3| C_r e^{|j_3|-2} \cos \varphi \quad (3.19)$$

$$\dot{\epsilon} = C_s e^2 + \frac{1}{2} |j_3| C_r e^{|j_3|} \cos \varphi \quad (3.20)$$

onde as constantes das partes secular,  $C_s$ , e ressonante,  $C_r$ , da função perturbadora são dadas por:

$$C_s = \frac{m_2}{m_1} n \alpha f_1(\alpha). \quad (3.21)$$

$$C_r = \frac{m_2}{m_1} n \alpha \left( f_d(\alpha) + f_i(\alpha) \right) \quad (3.22)$$

sendo  $m_1$  e  $m_2$  as massas do corpo central e corpo perturbador, respectivamente.

Para  $|j_3| \geq 1$  os elementos orbitais, semi-eixo maior e movimento médio são praticamente constantes como pode ser visto na equação (3.17) ao se considerar pequenas excentricidades, pois suas variações dependem em potência de excentricidade. A variação de  $e$  é proporcional a  $e$ , equação (3.18); desta forma, quando considera-se  $|j_3| = 1$ , isto é, ressonâncias de primeira ordem, tem-se que a variação da excentricidade não irá depender da mesma. Utilizando-se ainda da mesma consideração,  $|j_3| = 1$ , tem-se que  $\varpi$  em uma órbita próxima de circular sofrerá mudanças rápidas como pode ser visto na equação (3.19). Pode-se ainda observar que do lado direito desta equação o segundo termo é um termo ressonante e irá dominar o primeiro termo que é secular ao considerarmos  $|j_3| = 1$ . Similarmente a variação de  $\epsilon$  será dominada pela contribuição ressonante para ressonâncias de primeira ordem, porém, é bom lembrar que as análises feitas para a variação de  $\varpi$  e  $\epsilon$  só são válidas considerando ressonâncias de primeira ordem, quando tivermos por exemplo ressonâncias de segunda ordem o termo secular será comparável ao termo ressonante.

A variação de  $a$  por  $e$  é dada

$$\frac{da}{de} = 2 \left( \frac{j_1}{j_3} \right) a e. \quad (3.23)$$



implicando numa variação sempre correlata, isto é, quando uma é crescente a outra também o é e vice-versa.

Quando o problema a ser considerado for de uma perturbação exterior as equações anteriores obtidas para uma perturbação interior serão similares apenas com algumas modificações, sendo elas :

- o ângulo ressonante é do tipo :

$$\varphi = j_1 \lambda + j_2 \lambda' + j_4 \varpi' \quad (3.24)$$

- a localização da ressonância nominal satisfaz a relação por :

$$a'_n = \left( \frac{|j_2|}{j_1} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.25)$$

- a variação por  $a'$  e  $e'$  é dada por :

$$\frac{da'}{de'} = 2 \left( \frac{j_2}{j_4} \right) a' e' \quad (3.26)$$

- os coeficientes  $j_1$  e  $j_3$  que estão presentes nas equações do movimento deverão ser substituídos pelos coeficientes  $j_2$  e  $j_4$ , respectivamente.

### 3.2 - Modelo ideal de ressonância - modelo aprimorado do pêndulo (Dermott & Murray, 1983)

Os estudos envolvidos neste item foram baseados em Murray & Dermott (1996).

Este modelo analítico simples de ressonância é uma aproximação ao do movimento de um pêndulo. Considerando a segunda derivada temporal do ângulo ressonante  $\varphi$  e lembrando que o movimento médio do corpo perturbador  $\dot{n}' = 0$ , pois seu movimento é constante, ficamos com :

$$\ddot{\varphi} = j_1 \dot{n} + j_1 \ddot{e} + j_3 \ddot{\varpi} \quad (3.27)$$



Escrevendo :

$$\dot{\epsilon} = C_s e^2 + |j_3| C_r F(e) \cos \varphi \quad (3.28)$$

$$\dot{\varpi} = 2C_s + |j_3| C_r G(e) \cos \varphi \quad (3.29)$$

onde :

$$F(e) = \frac{1}{2} e^{|j_3|} \quad e \quad G(e) = e^{|j_3|-2} \quad (3.30)$$

Desta forma tem-se que a segunda derivada temporal de  $\epsilon$  e  $\varpi$  são dadas por :

$$\ddot{\epsilon} = 2C_s e \dot{e} + |j_3| C_r \left( \frac{dF(e)}{de} \dot{e} \cos \varphi - F(e) \dot{\varphi} \sin \varphi \right) \quad (3.31)$$

$$\ddot{\varpi} = |j_3| C_r \left( \frac{dG(e)}{de} \dot{e} \cos \varphi - G(e) \dot{\varphi} \sin \varphi \right) \quad (3.32)$$

As constantes  $C_s$  e  $C_r$  contém um fator de razão das massas, desta forma, tem-se que esta razão apresenta um valor pequeno. Considerando que as equações acima apresentam  $\dot{e}$  e  $\dot{\varphi}$  e estas também têm a mesma quantidade de razão de massas, deste modo, pode-se negligenciar as contribuições de  $\ddot{\epsilon}$  e  $\ddot{\varpi}$  em  $\ddot{\varphi}$ . Agora, quando considera-se as ressonâncias de primeira ordem,  $|j_3| = 1$ , a contribuição de  $\ddot{\varpi}$  para  $\ddot{\varphi}$  não pode ser negligenciada como pode ser visto analisando a equação (3.32). As contribuições da parte secular, em ambos os casos, são menos importantes que a da parte ressonante.

Negligenciando as contribuições de  $\ddot{\epsilon}$  e  $\ddot{\varpi}$  e utilizando a equação de Lagrange para a variação do movimento médio,  $\dot{n}$ , a equação para  $\ddot{\varphi}$ , se reduz a :

$$\ddot{\varphi} = 3j_1^2 C_r n e^{|j_3|} \sin \varphi \quad (3.33)$$

Considerando-se somente as ressonâncias de ordem ímpar, pois neste trabalho foi abordado o caso em que o ângulo ressonante é  $\pi$  para que seja possível obter o espaço de fase em duas dimensões, tem-se que a equação para  $\ddot{\varphi}$  é:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \sin (\varphi + \pi) \quad (3.34)$$

com :

$$\omega_0^2 = 3j_1^2 C_r n e^{|j_3|}. \quad (3.35)$$

assumindo que  $n$ ,  $e$ , e como consequência  $\omega_0$  são aproximadamente constantes. Lembrando que  $\omega_0^2$  é uma quantidade sempre positiva e, portanto, para o caso considerado (ressonância de ordem ímpar) a equação para  $\ddot{\varphi}$  é idêntica a do modelo de um pêndulo simples com o ponto estável em  $\varphi = \pi$ . Note que quando  $\varphi$  é pequeno a equação diferencial pode ser escrita como  $\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi$  sendo esta a solução para o movimento de um pêndulo simples com um período independente da amplitude.

Algumas propriedades da equação diferencial (3.35) são: a solução pode descrever tanto uma circulação como uma libração de  $\varphi$ , na qual o tipo de movimento depende da energia do sistema e das condições iniciais; a energia total do sistema,  $E$ , é a soma da energia cinética,  $T = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$ , e da energia potencial,  $U = 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi + \pi$  por unidade de massa, portanto

$$E = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi + \pi). \quad (3.36)$$

Na figura (3.1 a) tem-se três possíveis valores para a energia total, para que desta forma possa-se fazer uma classificação dos possíveis tipos de movimento. Para cada valor de energia total tem-se diferentes comportamentos para o ângulo  $\varphi$ .

$E > E_3$  - o movimento de  $\varphi$  é ilimitado e corresponde a circulação do ângulo  $\varphi$ .

$E < E_3$  - o movimento para  $\varphi$  é confinado e corresponde a libração do ângulo  $\varphi$ .

$E = E_3$  - o movimento ocorre na separatriz.

As diferentes trajetórias possíveis são vistas na Figura (3.1 b). Para  $E > E_3$  tem-se a variação de  $\dot{\varphi}$  com respeito a  $\varphi$ , mas  $\dot{\varphi}$  nunca é zero. Para  $E < E_3$  tem-se o valor de  $\dot{\varphi} = 0$ , que corresponde, para cada valor, um extremo do movimento do ângulo  $\varphi$ . Para  $E = E_3$  tem-se um tipo peculiar de movimento



onde o período é infinito. Existem ainda dois pontos singulares para  $\dot{\varphi} = 0$ . O primeiro é com respeito a origem,  $\pi$ , correspondendo ao ponto fixo elíptico sendo estável para pequenos deslocamentos. O segundo é para  $\varphi = 0$  e  $2\pi$  que corresponde ao ponto fixo hiperbólico sendo um ponto instável para pequenos deslocamentos.

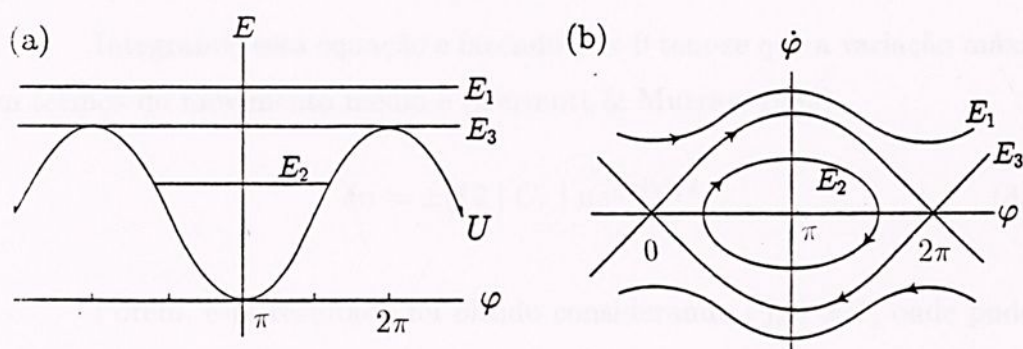


Figura 3.1 - (a) A energia potencial  $U$ , como uma função  $\varphi$ , comparada com três possíveis valores de energia total:  $E = E_1$ ,  $E = E_2$  e  $E = E_3$ . (b) Diagrama do espaço de fase correspondendo aos três casos de energia.

### 3.2.1 - Largura da Libração

Esta subseção foi baseada em Murray & Dermott (1996) e Dermott & Murray (1983).

A vantagem deste modelo analítico é que pode-se obter a extensão da libração em termos do semi-eixo maior para um corpo em ressonância isoladamente. Em primeiro lugar, deve-se considerar a relação entre a energia cinética e potencial (3.36) que é, neste modelo, a energia provinda por um pêndulo simples. A energia associada com a máxima libração ocorre quando  $\dot{\varphi} = 0$  para  $\varphi = 2\pi$  e  $0$ , implicando

$$E_{max} = 6j_1^2 C_r n e^{|j_3|}. \quad (3.37)$$



Considerando a variação de  $\varphi$ , tem-se que o valor da  $E_{max}$  é dado por:

$$\dot{\varphi} = \pm j_1 (12 |C_r| n e^{|j_3|})^{1/2} \cos \frac{1}{2} \varphi. \quad (3.38)$$

Relacionando a variação de  $\varphi$  com a variação de  $n$  utilizando a equação (3.17), chega-se a

$$dn = \pm (3 |C_r| n e^{|j_3|})^{1/2} \sin \frac{1}{2} \varphi d\varphi. \quad (3.39)$$

Integrando esta equação e fazendo  $\varphi = 0$  tem-se que a variação máxima em termos do movimento médio é (Dermott & Murray, 1983):

$$\delta n = \pm (12 |C_r| n e^{|j_3|})^{1/2}. \quad (3.40)$$

Porém, este resultado foi obtido considerando  $|j_3| \neq 1$ , onde pode-se negligenciar a contribuição de  $\ddot{\omega}'$  para  $\ddot{\varphi}$ . Fazendo agora outras considerações, isto é,  $|j_3| = 1$ , tem-se que a variação da máxima largura de libração será modificada. Para obtenção desta modificação tem-se que proceder da seguinte maneira. Em primeiro lugar usa-se como exemplo  $j_3 = -1$ , desta forma, o argumento do ângulo ressonante será do tipo

$$\varphi = j_1 \lambda + j_2 \lambda' - \omega. \quad (3.41)$$

com

$$\dot{\varphi} = j_1 n + j_2 n' - \dot{\omega}. \quad (3.42)$$

$$\ddot{\varphi} = j_1 \dot{n} - \ddot{\omega}. \quad (3.43)$$

lembrando que esta sendo considerado o caso do problema plano, circular, restrito de três corpos com uma perturbação interior.

Utilizando as equações de  $\ddot{\omega}$  (3.32) e  $\dot{e}$  (3.18), chega-se a:

$$\ddot{\omega} = \frac{C_r^2}{e^2} \sin 2\varphi - \frac{C_r}{e} (j_1 n + j_2 n') \sin \varphi. \quad (3.44)$$

Com isto a equação para  $\ddot{\varphi}$  é :

$$\ddot{\varphi} = \left[ 3j_1^2 C_r n e + \frac{C_r}{e} (j_1 n + j_2 n') \right] \sin \varphi - \frac{C_r^2}{e^2} \sin 2\varphi \quad (3.45)$$

Agora pode-se construir uma solução modificada para a equação do pêndulo, utilizando a solução que foi obtida anteriormente fazendo :

$$n = n_0 + K \cos \frac{1}{2}\varphi \quad (3.46)$$

sendo que  $n_0$  é o movimento médio associado com o valor nominal da ressonância e  $K$  é uma constante a ser determinada. Negligenciando os termos seculares na equação (3.19), pois seu valor é muito menor comparado com o termo ressonante, a equação pode ser reescrita como  $\dot{\varphi}$  (equação 3.42) como sendo:

$$j_1 n_0 + j_2 n' = \frac{C_r}{e} - j_1 K \cos \frac{1}{2}\varphi + \dot{\varphi}. \quad (3.47)$$

fazendo  $\dot{\varphi} = 0$  e  $\varphi = \pi$ , fica-se com :

$$j_1 n_0 + j_2 n' = -\frac{C_r}{e}. \quad (3.48)$$

Desta forma

$$j_1 n + j_2 n' = j_1 K \cos \frac{1}{2}\varphi - \frac{C_r}{e}. \quad (3.49)$$

Com isso, obtem-se a equação para  $\ddot{\varphi}$  como sendo:

$$\ddot{\varphi} = \left[ 3j_1^2 C_r n e + \frac{C_r}{e} \left( -\frac{C_r}{e} + j_1 K \cos \frac{1}{2}\varphi \right) \right] \sin \varphi - \frac{C_r^2}{e^2} \sin 2\varphi. \quad (3.50)$$

Integrando esta equação obtem-se:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = 2 \left[ 3j_1^2 C_r n e - \frac{C_r^2}{e^2} \right] \sin^2 \frac{1}{2}\varphi - \frac{4}{3} j_1 K \frac{C_r}{e} \cos^3 \frac{1}{2}\varphi - \frac{C_r^2}{e^2} \sin^2 \varphi + E \quad (3.51)$$

sendo  $E$  a energia do sistema.

Lembrando que para obter  $E_{max}$  tem-se que fazer  $\dot{\varphi} = 0$  e  $\varphi = \pi$ . Desta forma, utilizando o valor de  $E = E_{max}$  e fazendo  $\varphi = 0$  na equação (3.51) pode-se obter uma equação para  $\varphi$ , da forma :

$$\dot{\varphi}^2 |_{\varphi=0} = -12j_1^2 C_r n e + 4 \frac{C_r}{e^2} - \frac{8}{3} j_1 K \frac{C_r}{e} \quad (3.52)$$

Fazendo  $\varphi = 0$  na equação (3.47), utilizando a relação da equação (3.48) e elevando ao quadrado o resultado, obtém-se a relação :

$$\dot{\varphi}^2 |_{\varphi=0} = j_1^2 K^2 + 4 \frac{C_r}{e^2} - 4 j_1 K \frac{C_r}{e} \quad (3.53)$$

Igualando as equações (3.52) e (3.53), pode-se obter a solução de  $K$  para esta nova situação :

$$K = \frac{2}{3} \frac{1}{j_1} \frac{C_r}{e} \pm (12 |C_r| n e)^{1/2} \left( 1 + \frac{1}{27 j_1^2 e^3} \frac{|C_r|}{n} \right)^{1/2} \quad (3.54)$$

A constante  $C_r$  pode assumir valores positivos e negativos dependendo se a ressonância considerada for de ordem ímpar ou par. Se a ressonância for ímpar  $C_r > 0$  senão  $C_r < 0$ , por esta razão, tem-se  $|C_r|$  na equação (3.54) para se evitar valores imaginários.

Substituindo  $\varphi = 0$  na equação (3.46) e utilizando a equação (3.47), chega-se a:

$$\delta n_{max} = K + \frac{|C_r|}{j_1 e} \quad (3.55)$$

Utilizando a solução de  $K$

$$\delta n_{max} = \pm (12 |C_r| n e)^{1/2} \left( 1 + \frac{1}{27 j_1^2 e^3} \frac{|C_r|}{n} \right)^{1/2} + \frac{|C_r|}{3 j_1 e} \quad (3.56)$$

Esta expressão está de acordo com a relação obtida anteriormente quando se considera  $|j_3| \neq 1$ . Escrevendo-a em termos de semi-eixo maior, tem-se:

$$\frac{\delta a_{max}}{a} = \pm \left( \frac{16}{3} \frac{|C_r|}{n} e \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{1}{27 j_1^2 e^3} \frac{|C_r|}{n} \right)^{1/2} - \frac{2}{9} \frac{|C_r|}{j_1 e n}. \quad (3.57)$$



Utilizando esta equação foi possível obter as máximas amplitudes de libração, considerando apenas ressonâncias ímpares onde o ângulo ressonante é  $\pi$ . As razões das massas envolvidas nesta etapa foram  $10^{-3}$  (figura (3.2)) e da ordem de  $10^{-5}$  (figuras (3.3) e (3.4)). A visão global, isto é, a união de todas as amplitudes de libração associadas com as ressonâncias ímpares isoladamente contidas no espaço de fase da região externa, está apresentada na figura (3.5) para razão das massas  $10^{-3}$  e nas figuras (3.6) e (3.7) para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ . Pode-se observar que as máximas amplitudes de libração aumenta conforme o valor de excentricidade aumenta. Nota-se ainda que as amplitudes de libração ao considerar-se ressonâncias de ordens superiores às de primeira ordem aumentam sensivelmente. Um outro fator que deve ser apreciado é que as ressonâncias de primeira ordem apresentam suas amplitudes de libração, para valores de excentricidades bem próximas de zero, tendendo ao infinito. O motivo para este acontecimento é que a equação para se obter as máximas amplitudes de libração para as ressonâncias de primeira ordem contém um fator de  $1/e$ .

A comparação entre os resultados obtidos numericamente e por este método analítico estão presentes no capítulo 5.

Os valores dos coeficientes  $f_d + f_i$  em função dos coeficientes de Laplace, contidos no termo  $C_r$ , estão relacionados com as ressonâncias estudadas, sendo apresentados na tabela 3.1 a seguir.

Tabela 3.1 - Valores dos coeficientes  $f_d + f_i$  em função dos coeficientes de Laplace. Nota-se que quando  $e=0$  o termo da ressonância, o valor do coeficiente torna-se infinito. As ressonâncias estudadas estão listadas na tabela. Estes valores foram obtidos para calcular as máximas amplitudes de libração para cada ressonância estudada.



| Ordem da ressonância | Ressonância | $f_d + f_i$ |
|----------------------|-------------|-------------|
| 1 <sup>a</sup>       | 1 : 2       | 0,428394    |
| 1 <sup>a</sup>       | 2 : 3       | 2,48401     |
| 1 <sup>a</sup>       | 3 : 4       | 3,28326     |
| 1 <sup>a</sup>       | 4 : 5       | 4,08371     |
| 1 <sup>a</sup>       | 5 : 6       | 4,88472     |
| 1 <sup>a</sup>       | 6 : 7       | 5,686       |
| 3 <sup>a</sup>       | 2 : 5       | 5,17991     |
| 3 <sup>a</sup>       | 4 : 7       | 15,2986     |
| 3 <sup>a</sup>       | 5 : 8       | 23,3485     |
| 3 <sup>a</sup>       | 7 : 10      | 47,0022     |
| 3 <sup>a</sup>       | 8 : 11      | 63,2351     |
| 5 <sup>a</sup>       | 3 : 8       | 22,7075     |
| 5 <sup>a</sup>       | 4 : 9       | 44,3211     |
| 5 <sup>a</sup>       | 6 : 11      | 134,844     |
| 7 <sup>a</sup>       | 5 : 12      | 229,777     |
| 7 <sup>a</sup>       | 6 : 13      | 437,001     |
| 9 <sup>a</sup>       | 7 : 16      | 2469,27     |

Tabela 3.1 - Valores dos coeficientes  $f_d + f_i$  em função dos coeficientes de Laplace. Note que quanto maior a ordem da ressonância, o valor do coeficiente aumenta sensivelmente. As ressonâncias utilizadas estão indicadas na tabela. Estes valores foram utilizados para calcular as máximas amplitudes de libração associadas com cada ressonância isoladamente via modelo aprimorado do pêndulo.

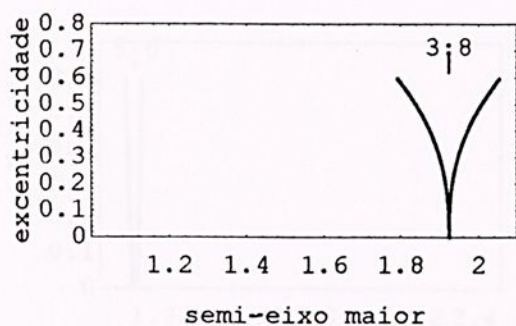
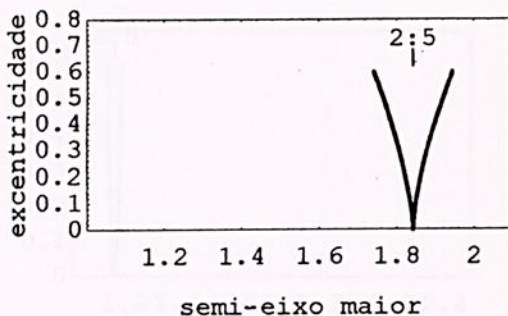
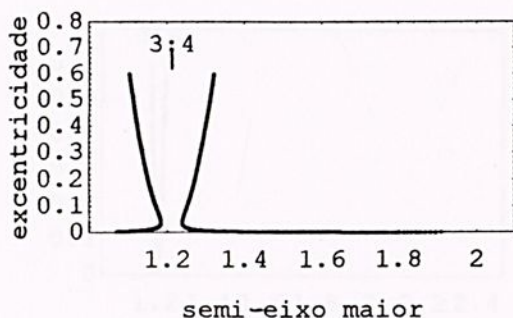
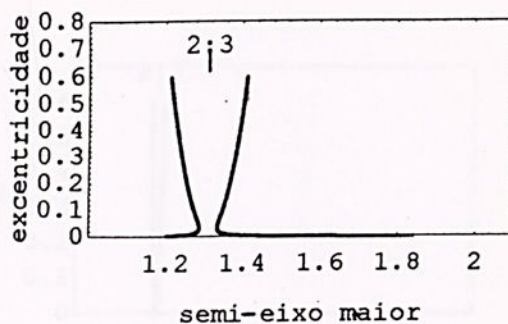
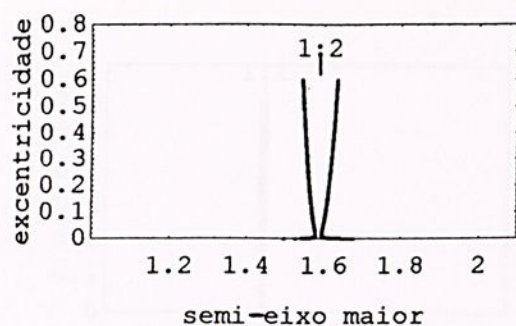


Figura 3.2 - Máximas amplitudes de libração associadas com cada ressonância via modelo aprimorado do pêndulo para razão das massas  $10^{-3}$ . As ressonâncias estão indicadas na figura e correspondem a localização do semi-eixo nominal obtido utilizando a terceira lei de Kepler.



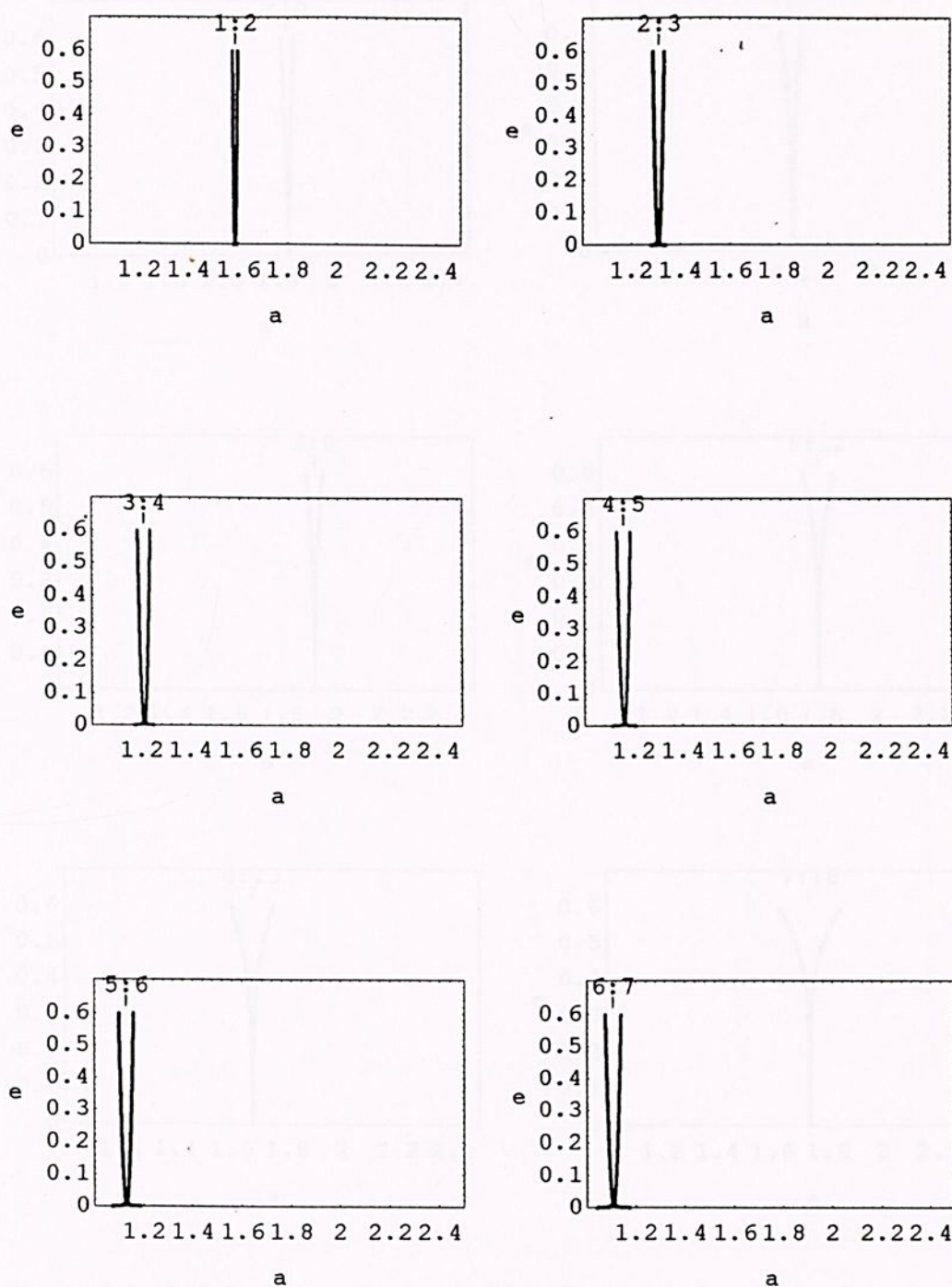


Figura 3.3 - Máximas amplitudes de libração associadas com cada ressonância via modelo aprimorado do pêndulo para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ . As ressonâncias estão indicadas na figura todas de primeira ordem e correspondem a localização do semi-eixo nominal obtido utilizando a terceira lei de Kepler.

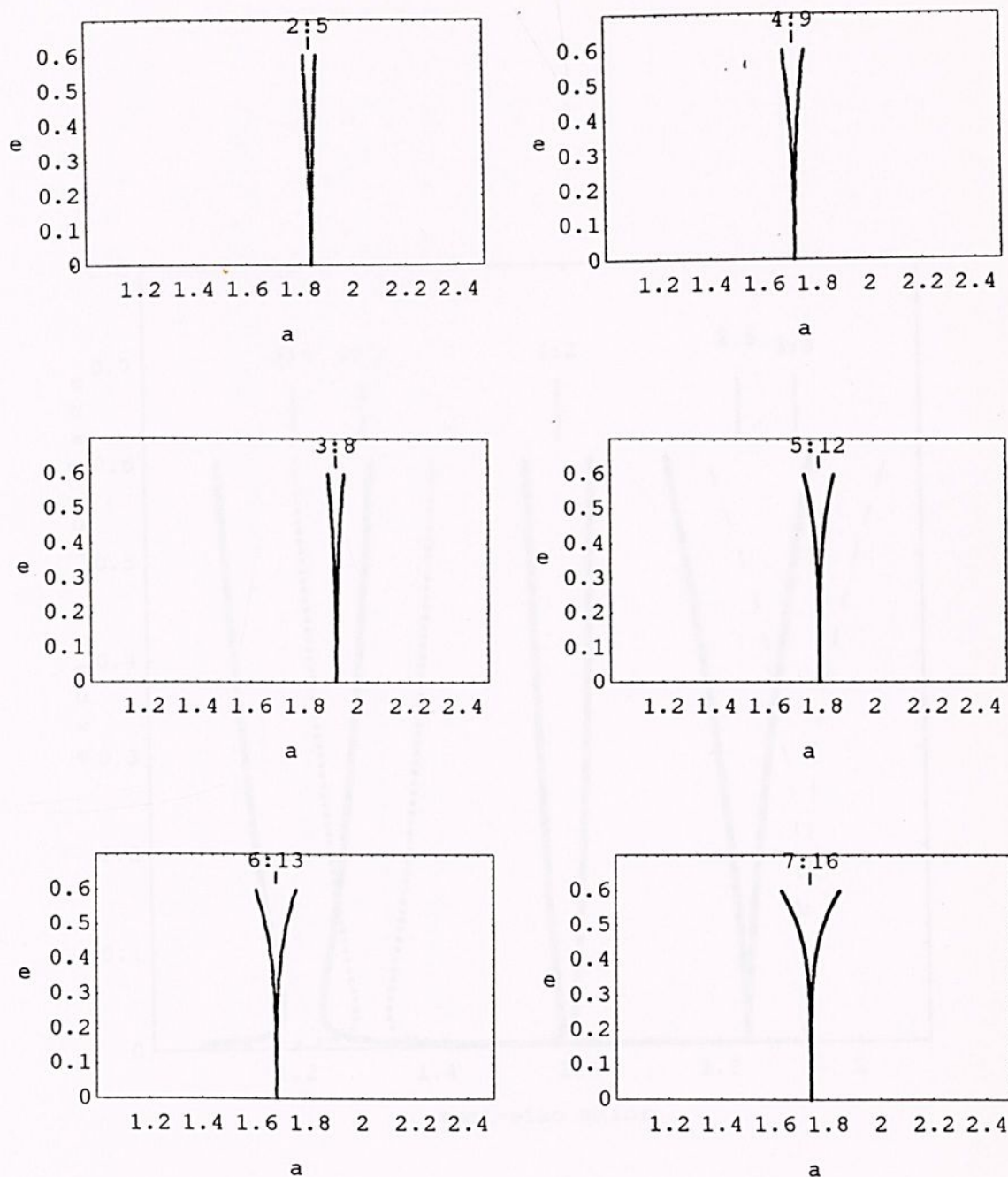


Figura 3.4 - Máximas amplitudes de libração associadas com cada ressonância via modelo aprimorado do pêndulo para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ . As ressonâncias estão indicadas na figura são todas de ordem superior às de primeira ordem e correspondem a localização do semi-eixo nominal obtido utilizando a terceira lei de Kepler.

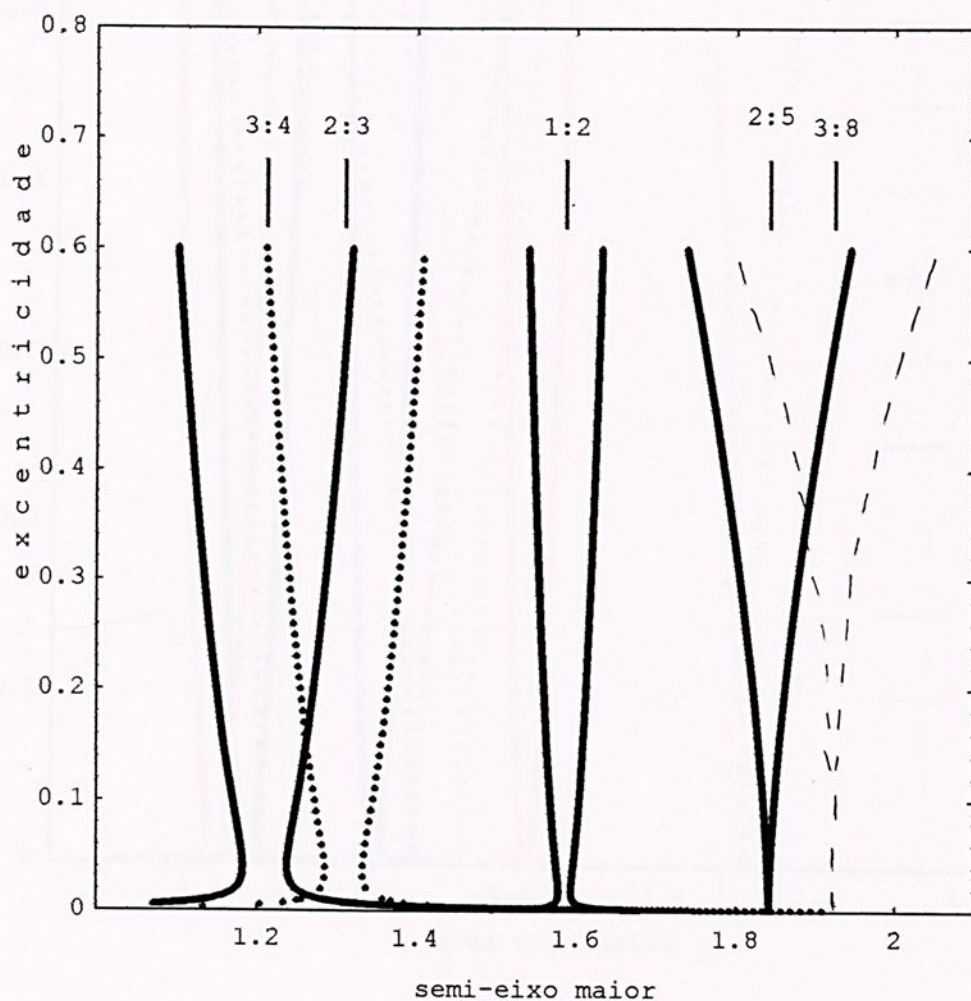


Figura 3.5 - Visão global das máximas amplitudes de libração via modelo aprimorado do pêndulo para razão das massas  $10^{-3}$ . O contorno em linhas pontilhadas corresponde a ressonância 2:3 e o contorno em linhas tracejadas corresponde a ressonância 3:8. A localização das ressonâncias nominais estão indicadas na figura. Observe que, no caso das ressonâncias de primeira ordem,  $p : p+1$ , quanto maior o valor de  $p$  maior a amplitude de libração da ressonância.



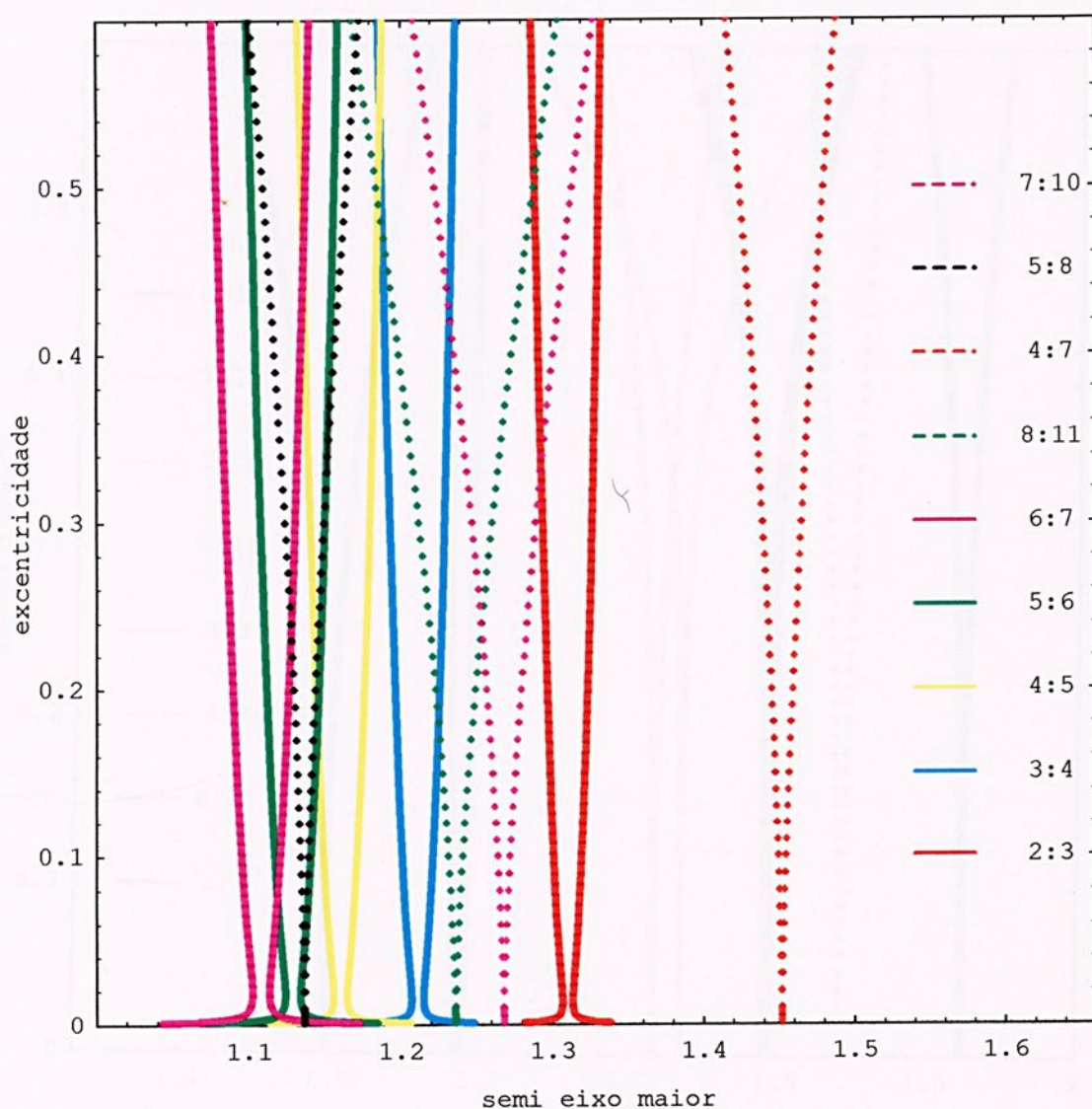


Figura 3.6 - Visão global das máximas amplitudes de libração via modelo aprimorado do pêndulo para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ . As ressonâncias estão indicadas na figura. Observe que, no caso das ressonâncias de primeira ordem,  $p : p + 1$ , quanto maior o valor de  $p$  maior a amplitude de libração da ressonância.

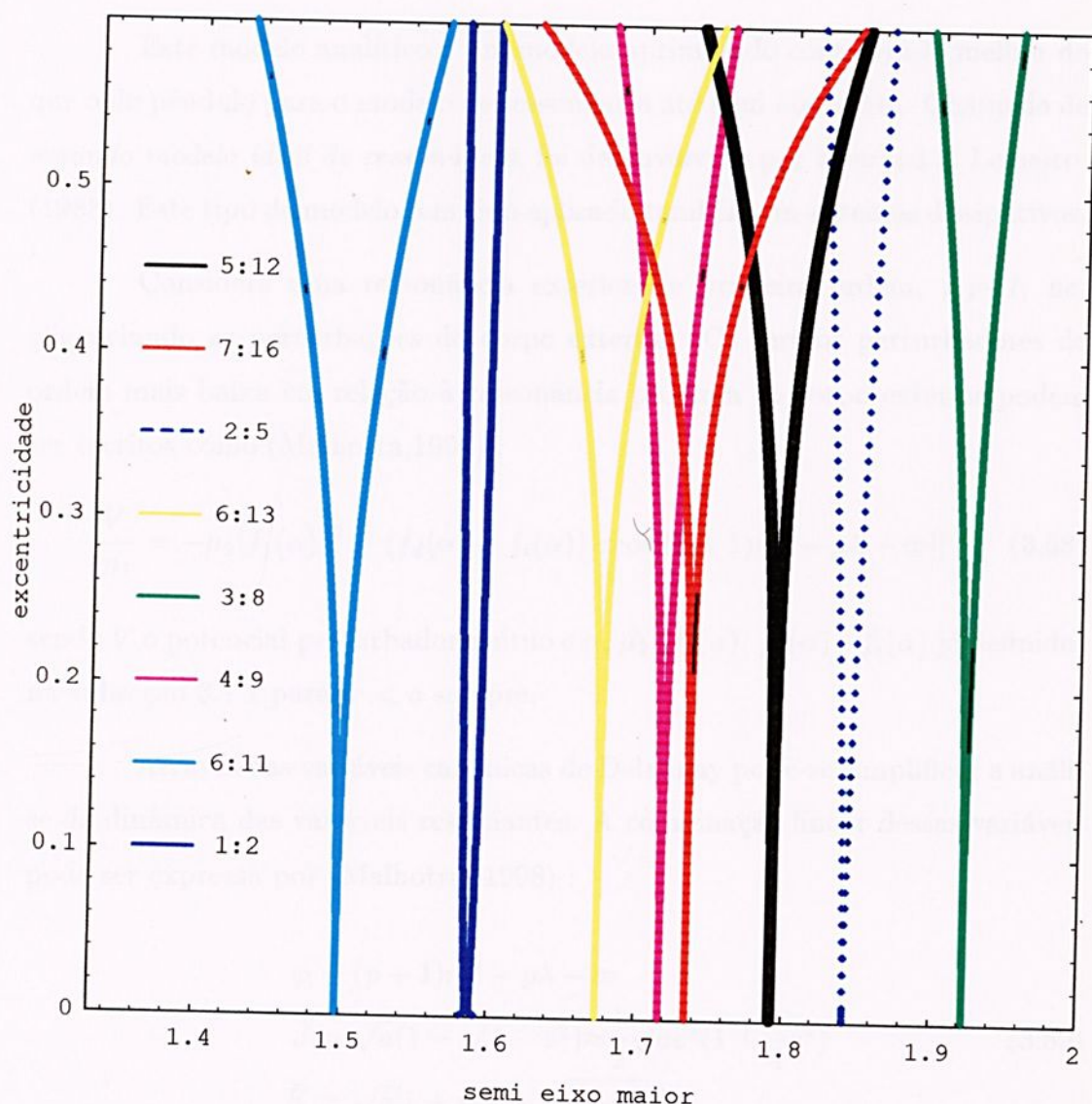


Figura 3.7 - Continuação da visão global das máximas amplitudes de libração via modelo aprimorado do pêndulo para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ . As ressonâncias estão indicadas na figura. Observe que, no caso das ressonâncias de primeira ordem,  $p : p + 1$ , quanto maior o valor de  $p$  maior a amplitude de libração da ressonância.



### 3.3 - Segundo modelo ideal de ressonância (Henrard & Lemaitre, 1983)

Os estudos considerados neste item foram baseados em Malhotra (1998).

Este modelo analítico é um modelo aprimorado considerado melhor do que o do pêndulo para o modelo de ressonância até aqui abordado. Chamado de *segundo modelo ideal de ressonância*, foi desenvolvido por Henrard & Lemaitre (1983). Este tipo de modelo tem sido aplicado também em sistemas dissipativos.

Considere uma ressonância exterior de primeira ordem,  $p:p+1$ , negligenciando as perturbações do corpo exterior. Os termos perturbadores de ordem mais baixa em relação à ressonância próxima ao corpo exterior podem ser escritos como (Malhotra, 1998) :

$$\frac{V}{m_1} = -\mu_2[f_1(\alpha)e^2 - (f_d(\alpha) + f_i(\alpha))e \cos[(p+1)n't - p\lambda - \varpi]] \quad (3.58)$$

sendo  $V$  o potencial perturbador mútuo e  $\alpha$ ,  $\mu_2$ ,  $f_1(\alpha)$ ,  $f_d(\alpha)$  e  $f_i(\alpha)$  já definidos na subseção 3.1.1 para  $a' < a$  sempre.

Através das variáveis canônicas de Delaunay pode-se simplificar a análise da dinâmica das variáveis ressonantes. A combinação linear dessas variáveis pode ser expressa por (Malhotra, 1998) :

$$\begin{aligned} \varphi &= (p+1)n't - p\lambda - \varpi \\ J &= \sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \approx \frac{1}{2}\sqrt{a}e^2(1 + \frac{1}{4}e^4) \\ \bar{K} &= \sqrt{a}[1 + p(1 - \sqrt{1 - e^2})] \\ \lambda &= \text{longitude verdadeira,} \end{aligned} \quad (3.59)$$

em que  $(\varphi, J)$  são as variáveis ressonantes canonicamente conjugadas,  $p$  é um número inteiro menor que zero e  $n' = 1$ .

Utilizando a expansão de Taylor, até a segunda ordem de excentricidade, consegue-se obter a relação entre essas variáveis e a excentricidade:

$$\frac{2J}{\bar{K}} \approx e^2 \quad (3.60)$$



Para o corpo de massa  $m_2$ , utilizando as variáveis descritas acima, tem-se que a sua hamiltoniana para o problema restrito de três corpos é dada por (Malhotra, 1998)

$$H = -\frac{1}{2}a + (p+1)n'J + \frac{V}{m_2} \quad (3.61)$$

Expandindo em série de potências em  $J$ , obtém-se uma hamiltoniana ressonante:

$$H = \omega J + \beta J^2 + \epsilon \sqrt{2J} \cos \varphi \quad (3.62)$$

em que

$$\begin{aligned} \omega &= (p+1)n' - pn^* - g_0 \\ n^* &= \bar{K}^{-3} \\ g_0 &= \frac{2f_1(\alpha)\mu_2}{\bar{K}} \approx 2\alpha f_1(\alpha)\mu_2 n \\ \beta &= -\left[\frac{3}{2}p^2 + \mu_2[(2p-1)f_1 + ]\right]\bar{K}^{-4} \approx -\frac{3p^2 n^*}{2\bar{K}} \\ \epsilon &= \frac{\mu_2(f_d(\alpha) + f_i(\alpha))}{\bar{K}^{1/2}} \approx \alpha(f_d(\alpha) + f_i(\alpha))\mu_2 n \bar{K}^{1/2} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Define-se como *pequeno divisor clássico*, em termos de elementos orbitais médios, à quantidade :

$$(p+1)n' - pn - g_0 = \omega + 2\beta J. \quad (3.64)$$

É importante frisar que, na prática, os movimentos médios, que normalmente são definidos por  $n = a^{-3/2}$ , devem ter correções devido aos harmônicos gravitacionais de ordem superior e a parte constante do potencial perturbador. Além disso, a expressão de  $g_0$  mostra a taxa de precessão induzida pelas perturbações seculares médias do corpo perturbador sozinho.

Neste modelo de análise de ressonâncias, admite-se que  $\lambda$  é uma variável cíclica, o que torna seu momento conjugado  $\bar{K}$  uma constante do movimento. Dessa forma, pode-se relacionar a variação do semi-eixo maior e a da excentricidade por :

$$\frac{\delta a}{a} \approx -p\delta e^2 \quad (3.65)$$

Esta relação permite inferir que as perturbações ressonantes em  $a$  são muito menores que as em  $e$ . Esse fato assegura a aproximação adotada para os coeficientes  $f_1$ ,  $f_d$  e  $f_i$ , que dependem de  $\alpha$ ; portanto, os termos considerados foram obtidos para  $\alpha$  dado em uma ressonância exata. Os valores adotados para estes coeficientes seguem na Tabela 3.2 (Dermott & Murray, 1996).

| $p : p + 1$ | $\alpha$ | $\alpha f_1(\alpha)$ | $[f_d(\alpha) + f_i(\alpha)]$ |
|-------------|----------|----------------------|-------------------------------|
| 1 : 2       | 0,629961 | 0,244190             | 0,428394                      |
| 2 : 3       | 0,763143 | 0,879751             | 2,48401                       |
| 3 : 4       | 0,825482 | 1,88147              | 3,28326                       |

Tabela 3.2 - Valores dos coeficientes  $f_1$ ,  $f_d$  e  $f_i$  em função dos coeficientes de Laplace em que  $f_1$  é termo secular,  $f_d$  é termo ressonante direto e  $f_i$  é o termo ressonante indireto. Estes valores foram utilizados para o cálculo da máxima amplitude de libração associada com cada ressonância isoladamente via segundo modelo ideal de ressonância.

Utilizando as relações

$$\begin{aligned}
 J &= I \left| \frac{\epsilon}{2\beta} \right|^{2/3} \\
 \omega &= -\nu 3\beta \left| \frac{\epsilon}{2\beta} \right|^{2/3} \\
 \theta &= \begin{cases} \sin(\beta)\varphi, & \text{se } \beta\epsilon < 0; \\ \sin(\beta)\varphi + \pi, & \text{se } \beta\epsilon > 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

obtem-se a hamiltoniana ressonante modificada

$$\begin{aligned}
 H &= -3\nu I + I^2 - 2\sqrt{2I}\cos\theta \\
 &= -\frac{3}{2}\nu(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2x
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

em que

$$(x, y) = \sqrt{2I}(\cos\theta, \sin\theta) \tag{3.68}$$

são as variáveis de Poincaré.

Com as expressões (3.66) e (3.63), verifica-se que o termo de mais baixa ordem da excentricidade é proporcional à distância à origem no plano  $(x, y)$ , ou seja, (Malhotra, 1998)

$$e \approx \left| \frac{\alpha f_{d(\alpha)} + f_{1(\alpha)}}{3p^2} \mu_2 \right|^{1/3} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.69)$$

Na equação (3.67), a hamiltoniana tem um parâmetro livre ( $\nu$ ), que modifica a topologia do espaço de fase. Esta modificação pode ser observada nas figuras 3.8 e 3.9, onde são apresentadas as diferentes topologias em termos de  $\nu$ ,  $x$  e  $y$ . Note que na figura 3.8 para o valor de  $\nu = 0$  existem dois pontos de equilíbrio, em se tratando de  $\nu$  maior que zero existem três pontos de equilíbrio, agora, considerando valor de  $\nu$  menor que zero existe somente um ponto de equilíbrio. Na figura 3.9 é possível observar que as trajetórias são periódicas e a separatriz surge para valores de  $\nu$  maiores ou iguais a 2. Esta separatriz divide o espaço de fase em três áreas: uma circulação externa, uma circulação interna e uma de libração.

Figura 3.8 - Nesta figura vemos a localização dos pontos de equilíbrio em termos de  $x$  e  $y$ , para  $p = 0$ . Para o valor de  $\nu > 0$  existem três pontos de equilíbrio, considerando  $\nu = 0$  existem dois pontos de equilíbrio e finalmente para o valor de  $\nu < 0$  existe somente um ponto de equilíbrio.



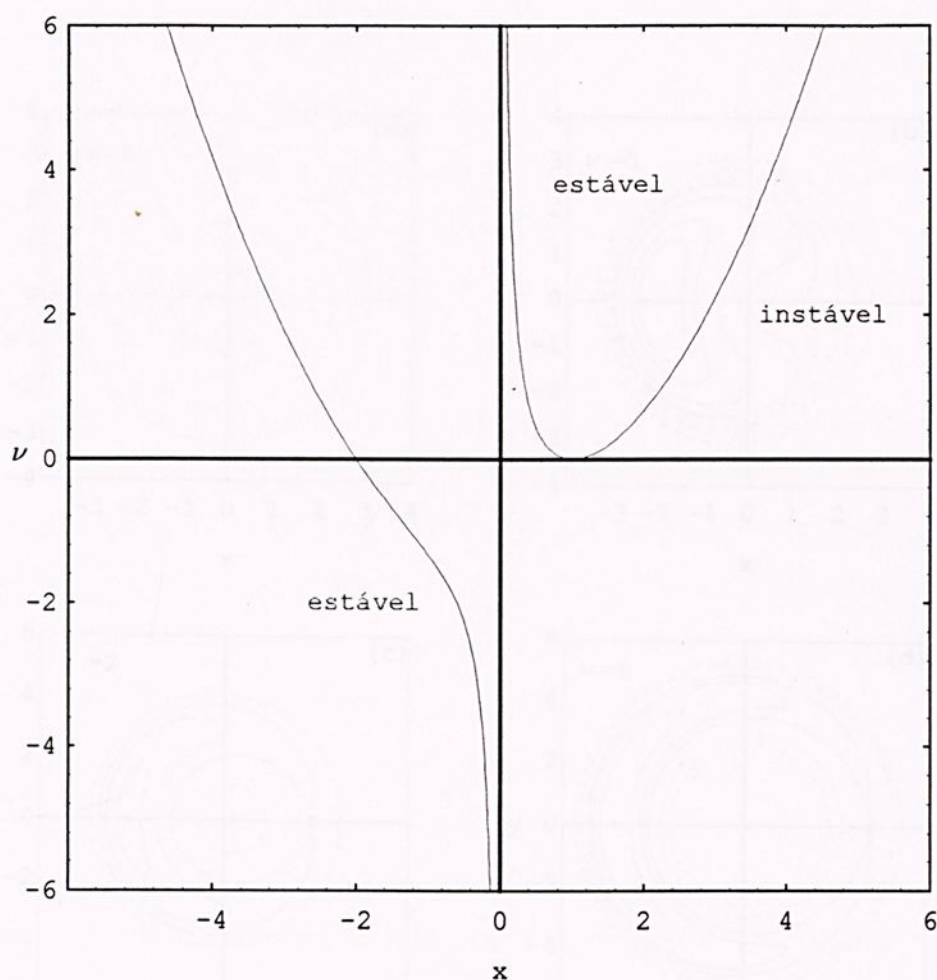


Figura 3.8 - Neste gráfico tem-se a localização dos pontos de equilíbrio em termos de  $x$  e  $\nu$ , para  $y = 0$ . Para o valor de  $\nu > 0$  existem três pontos de equilíbrio, considerando  $\nu = 0$  existem dois pontos de equilíbrio e finalmente para o valor de  $\nu < 0$  existe somente um ponto de equilíbrio.

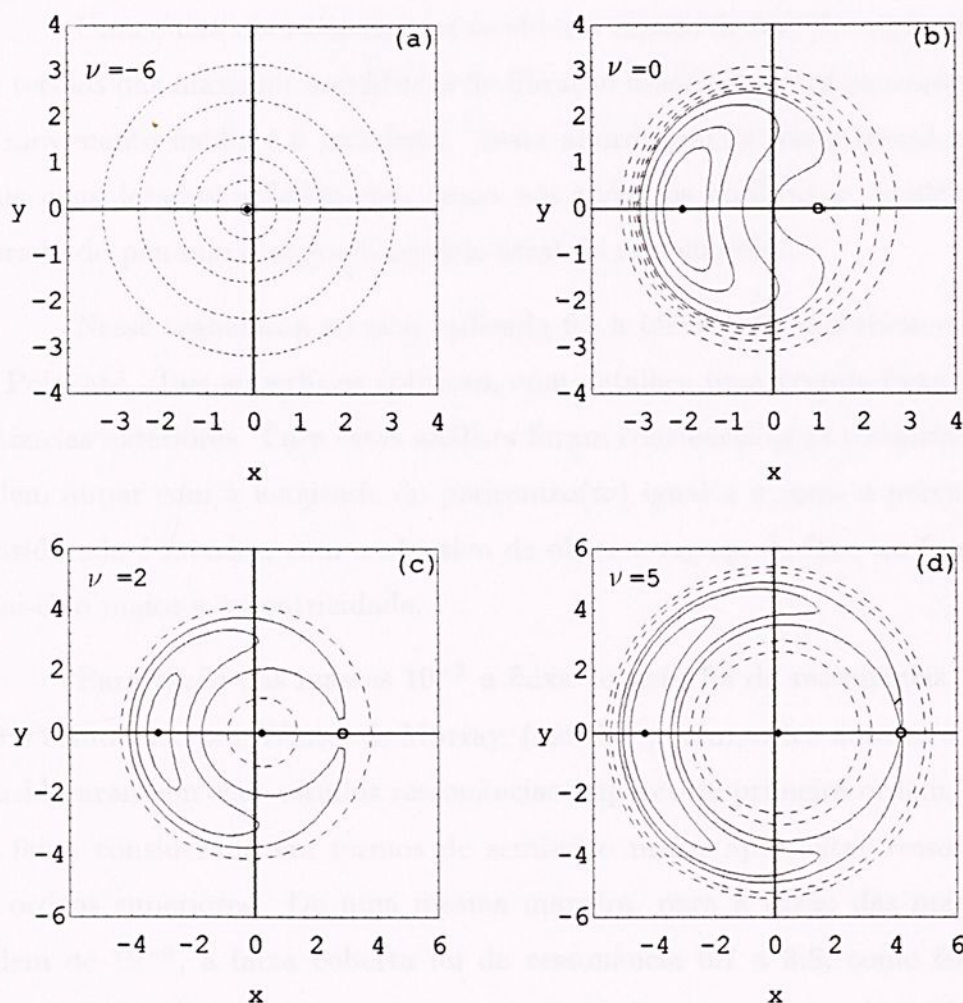


Figura 3.9 - Topologia da evolução do espaço de fase via segundo modelo ideal de ressonância. As curvas em linhas tracejadas representam o movimento de circulação interna ou externa enquanto as demais curvas representam o movimento de libração. Observe que  $\nu$  é um parâmetro livre e os valores que foram considerados estão devidamente identificados na figura.



## 4 - REGIÕES ESTÁVEIS E INSTÁVEIS

### 4.1 - Estudo numérico

Uma outra abordagem para se obter o espaço de fase da região externa em termos das máximas amplitudes de libração associadas com as ressonâncias de movimento médio é a numérica. Nesta abordagem as ressonâncias não são mais consideradas isoladamente como nos métodos analíticos: modelo aprimorado do pêndulo e segundo modelo ideal de ressonância.

Nesse trabalho a técnica utilizada foi a técnica de superfície de seção de Poincaré. Tais superfícies cobriram com detalhes uma grande faixa de ressonâncias exteriores. Para estas análises foram consideradas as ressonâncias de ordem ímpar com a longitude do pericentro( $\varpi$ ) igual a  $\pi$ , pois a perturbação considerada é interior, com o objetivo de obter o espaço de fase em função de semi-eixo maior e excentricidade.

Para razão das massas  $10^{-3}$  a faixa coberta foi da ressonância 3:4 até a 3:8 como feito por Winter & Murray, (1994b); porém, estes autores somente consideraram em seus estudos ressonâncias ímpares de primeira ordem, apesar da faixa considerada em termos de semi-eixo maior apresentar ressonâncias de ordens superiores. De uma mesma maneira, para a razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ , a faixa coberta foi da ressonância 6:7 a 3:8, como feito por Malhotra (1998); porém a autora somente deu ênfase em seus estudos a obtenção de algumas ressonâncias ímpares de primeira e ressonâncias pares de segunda ordem. Portanto, o objetivo é obter todas as principais ressonâncias ímpares encontradas neste espaço de fase tanto para razão das massas  $10^{-3}$  quanto para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ .

Considerando o sistema dinâmico do problema plano, circular, restrito de três corpos obteve-se a estrutura do espaço de fase em detalhes para tais razões das massas e , desta forma, localizando as regiões regulares em termos das regiões associadas a trajetórias que libram em uma dada ressonância de movimento médio.





Os dados para a obtenção destes resultados para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  foram derivados de extensas integrações numéricas das equações completas do movimento. Para cada valor de  $C_j$  foram produzidas superfícies de seção de Poincaré que contém centenas de condições iniciais. Ao considerar-se a razão das massas  $10^{-3}$  os resultados foram obtidos utilizando-se o trabalho numérico já existente de Winter & Murray (1994b).

#### 4.1.1 - Técnica de superfície de seção de Poincaré

Para determinar os elementos orbitais da partícula teste, em qualquer instante, é necessário conhecer sua posição  $(x, y)$  e sua velocidade  $(\dot{x}, \dot{y})$ ; estas correspondem a um ponto no espaço de fase quadridimensional. A existência da constante de Jacobi no problema plano, circular, restrito de três corpos implica na existência de uma superfície tridimensional neste espaço de fase. Para um valor fixo da constante de Jacobi somente três das quatro quantidades são necessárias, ou seja, por exemplo  $x$ ,  $y$  e  $\dot{x}$  sendo  $\dot{y}$  determinado, utilizando a equação (2.10). Definindo um plano, por exemplo,  $y = 0$ , no espaço tridimensional resultante, os valores de  $x$  e  $\dot{x}$  podem ser colocados em gráfico toda vez que a partícula tiver  $y = 0$  (figura 4.1). A ambiguidade no sinal de  $\dot{y}$  é removida por considerar somente aqueles cruzamentos com um sinal fixo de  $\dot{y}$ . Este é o método da superfície de seção de Poincaré. A seção é obtida fixando-se um plano no espaço de fase e colocando-se em gráfico os pontos onde a trajetória intercepta este plano em uma direção particular.

Existe sempre uma escolha de superfícies de seção. Neste trabalho, os valores de  $x$  e  $\dot{x}$  foram computados sempre que a trajetória atravessou o plano  $y = 0$  com  $\dot{y} < 0$ . A técnica da superfície de seção é adequada para a determinação da natureza regular ou caótica da trajetória. Se existirem curvas fechadas (ilhas) bem definidas, então a trajetória é regular; caso contrário, se houver um espalhamento de pontos, a trajetória é caótica. Na figura 4.2 tem-se exemplos de uma trajetória regular e uma caótica. Na trajetória regular a partícula intercepta o plano  $y = 0$  descrevendo uma região bem definida. Es-

sas ilhas irão delimitar o espaço de fase em termos da amplitude de libração associada com cada ressonância.

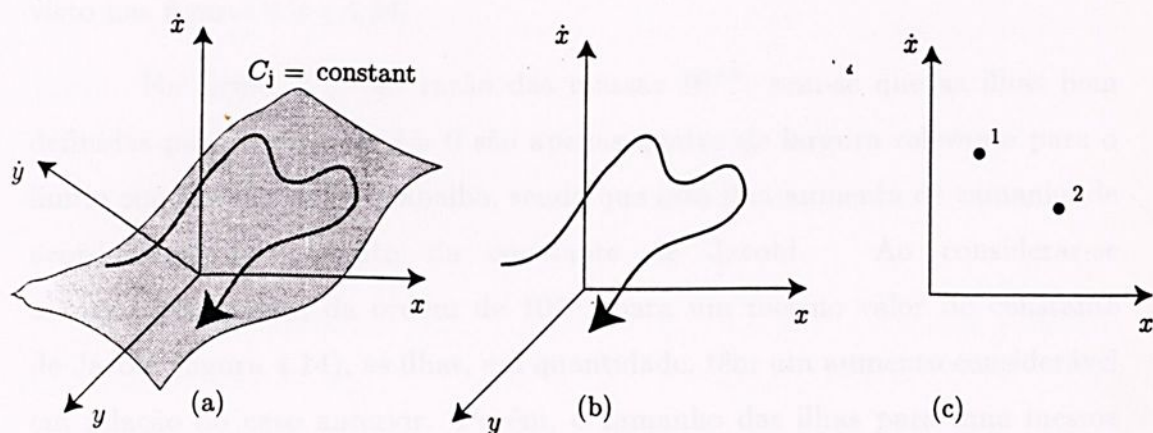


Figura 4.1 - (a) quadridimensional  $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$  - considerando um sistema com dois graus de liberdade. (b) tridimensional  $(x, \dot{x}, y)$  - utilizando a constante de integração  $C_j$ . (c) bidimensional  $(x, \dot{x})$  - considerando o movimento num plano, por exemplo,  $y = 0$ . Reproduzidos de Winter & Murray (1994a).

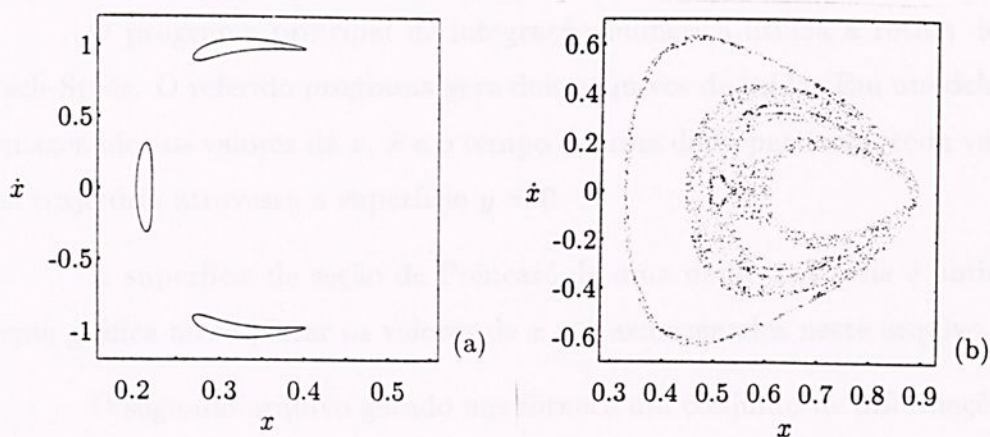


Figura 4.2 - Exemplo de superfície de seção de Poincaré para um movimento (a) regular. (b) caótico. Observe que para um movimento considerado regular tem-se uma ilha bem definida e para o movimento considerado caótico tem-se um espalhamento de pontos registrados aleatoriamente. Reproduzidos de Winter & Murray (1994a).



A dependência com razão das massas para a estrutura do espaço de fase é claramente percebida ao considerar-se superfícies de seção de Poincaré com mesmos valores de constante de Jacobi e diferente razão das massas como visto nas figuras 4.3 a 4.24.

Na figura 4.3 com razão das massas  $10^{-3}$ , tem-se que as ilhas bem definidas para o valor de  $\dot{x} = 0$  são apenas quatro de largura relevante para o limite considerado nesse trabalho, sendo que esta ilha aumenta de tamanho de acordo com o aumento da constante de Jacobi. Ao considerar-se a razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ , para um mesmo valor de constante de Jacobi (figura 4.14), as ilhas, em quantidade, têm um aumento considerável em relação ao caso anterior. Porém, o tamanho das ilhas para uma mesma ressonância torna-se menor do que para a razão das massas  $10^{-3}$ .

Portanto, o espaço de fase evoluirá diferentemente dependendo da razão das massas e do valor de constante de Jacobi envolvidos.

#### 4.1.2 - Programa principal

O programa principal de integração numérica utiliza a rotina de Bulirsch-Stoer. O referido programa gera dois arquivos de saída. Em um deles são armazenados os valores de  $x$ ,  $\dot{x}$  e o tempo de uma dada partícula, toda vez que sua trajetória atravessa a superfície  $y = 0$ .

A superfície de seção de Poincaré de uma dada trajetória é obtida na forma gráfica ao se plotar os valores de  $x$  e  $\dot{x}$  armazenados neste arquivo.

O segundo arquivo gerado nos fornece um conjunto de informações relativas a cada uma das condições iniciais integradas. Dentre as informações geradas tem-se que para uma dada condição inicial é fornecida a menor distância que a partícula se aproximou do corpo perturbador, durante todo o período de integração, bem como o instante em que isso ocorreu. Trajetórias de corpos que tem uma grande aproximação do corpo perturbador são, em geral, caóticas. Fixou-se que se a distância ao corpo perturbador for menor que  $10^{-2}$





a integração é interrompida, pois a órbita é caótica. O que verificou-se, pelas superfícies de seção de Poincaré, ser um valor adequado para a proposta deste trabalho.

Uma outra informação relevante que é gerada é a variação máxima da constante de Jacobi durante todo o período de integração. Esta informação é de suma importância, pois é ela quem dá noção da precisão da rotina de integração numérica. Para toda a integração numérica realizada a variação máxima da constante de Jacobi foi da ordem de  $10^{-10}$ .

Em se tratando da razão das massas  $10^{-3}$ , em que os resultados numéricos foram os do trabalho de Winter & Murray (1994b), tem-se que os valores de constante de Jacobi foram de 2,900 a 3,400.

As condições iniciais para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  foram escolhidas através de informações via estudo das curvas de velocidade. Os valores de constante de Jacobi foram de 2,600 a 3,400. Onde a região permitida para o movimento da partícula é bastante caótica, a priori, foram consideradas, em média, 80 condições iniciais, com a posição da partícula,  $x$ , variando entre 1,1 e 4,5 unidades e velocidade,  $\dot{x}$ , igual a zero.

Onde a região permitida é bastante regular, foram consideradas, em média, 60 condições iniciais com a posição da partícula,  $x$ , variando entre 1,3 e 4,5 unidades e velocidade,  $\dot{x}$ , ainda mantendo-se igual a zero. Além disso, posteriormente, foram consideradas mais de 50 condições iniciais para valores diferentes de  $\dot{x} = 0$  a fim de obter as ressonâncias completas com as ilhas muito bem definidas delimitando, desta forma, com precisão a máxima amplitude de libração.

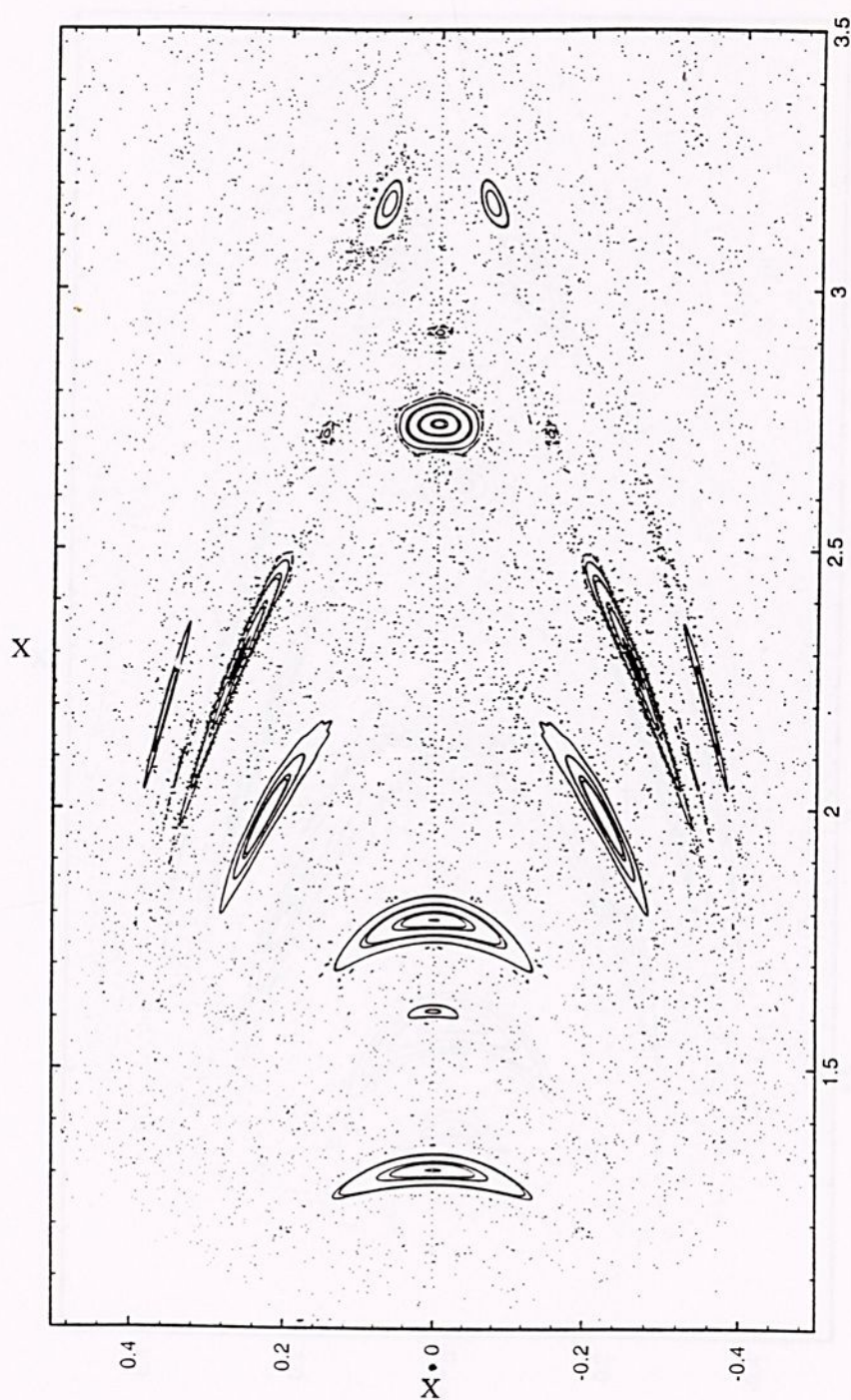


Figura 4.3 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da  $C_j = 2,900$  e razão das massas  $10^{-3}$ . Observe que para este valor de constante de Jacobi existe uma grande parte da região considerada caótica.



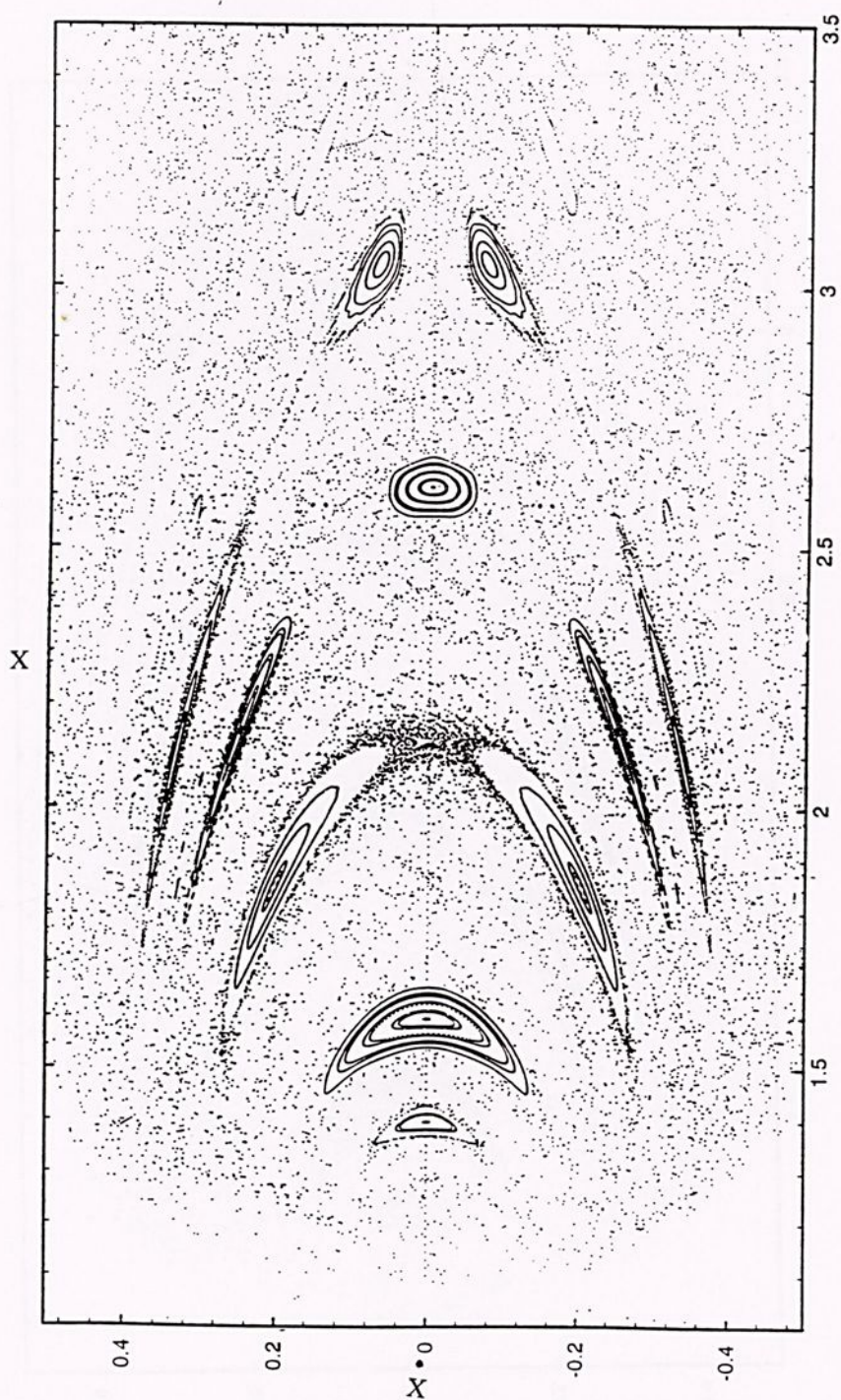


Figura 4.4 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,000 e razão das massas  $10^{-3}$ .



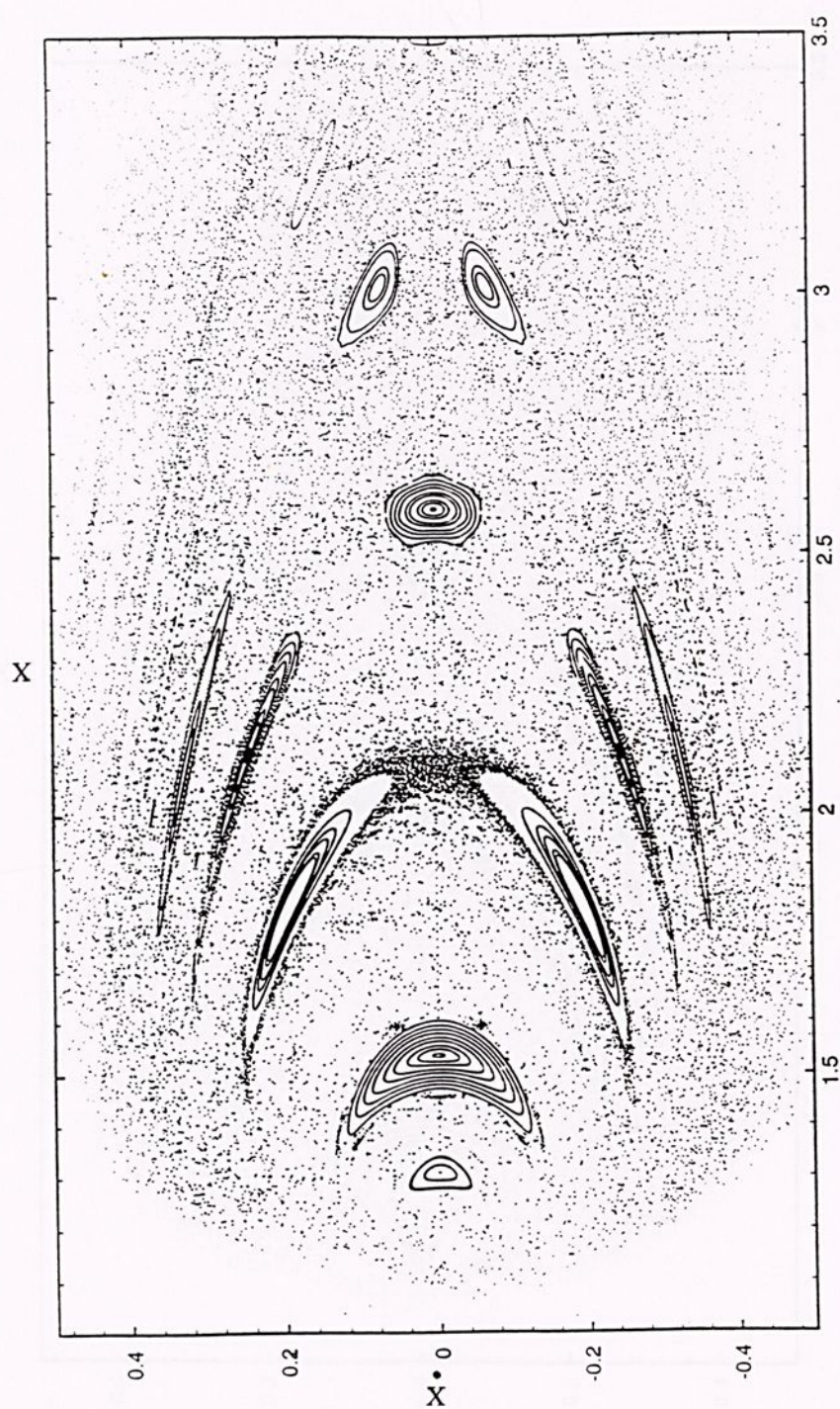


Figura 4.5 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,020 e razão das massas  $10^{-3}$ .



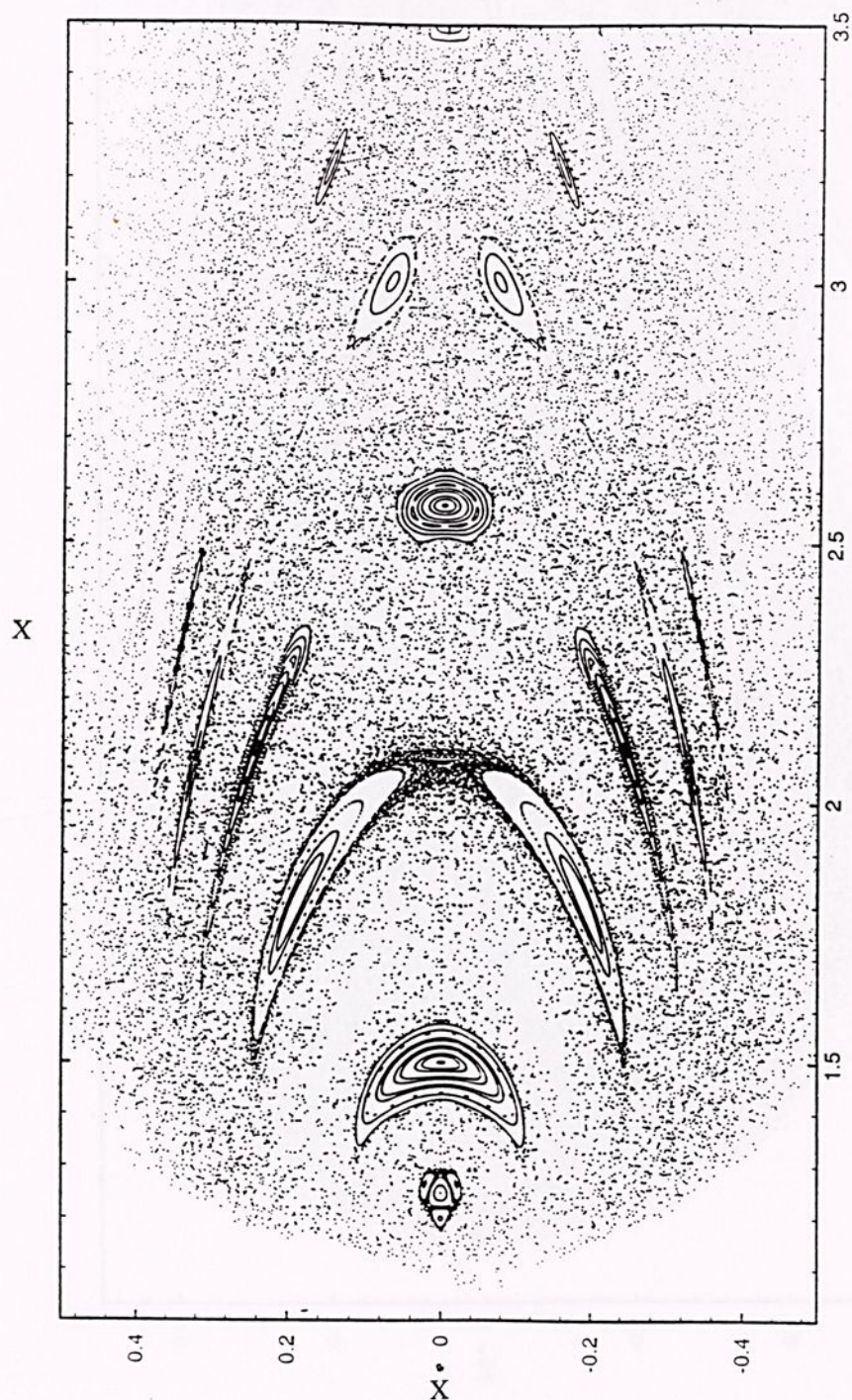


Figura 4.6 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,030 e razão das massas  $10^{-3}$ .



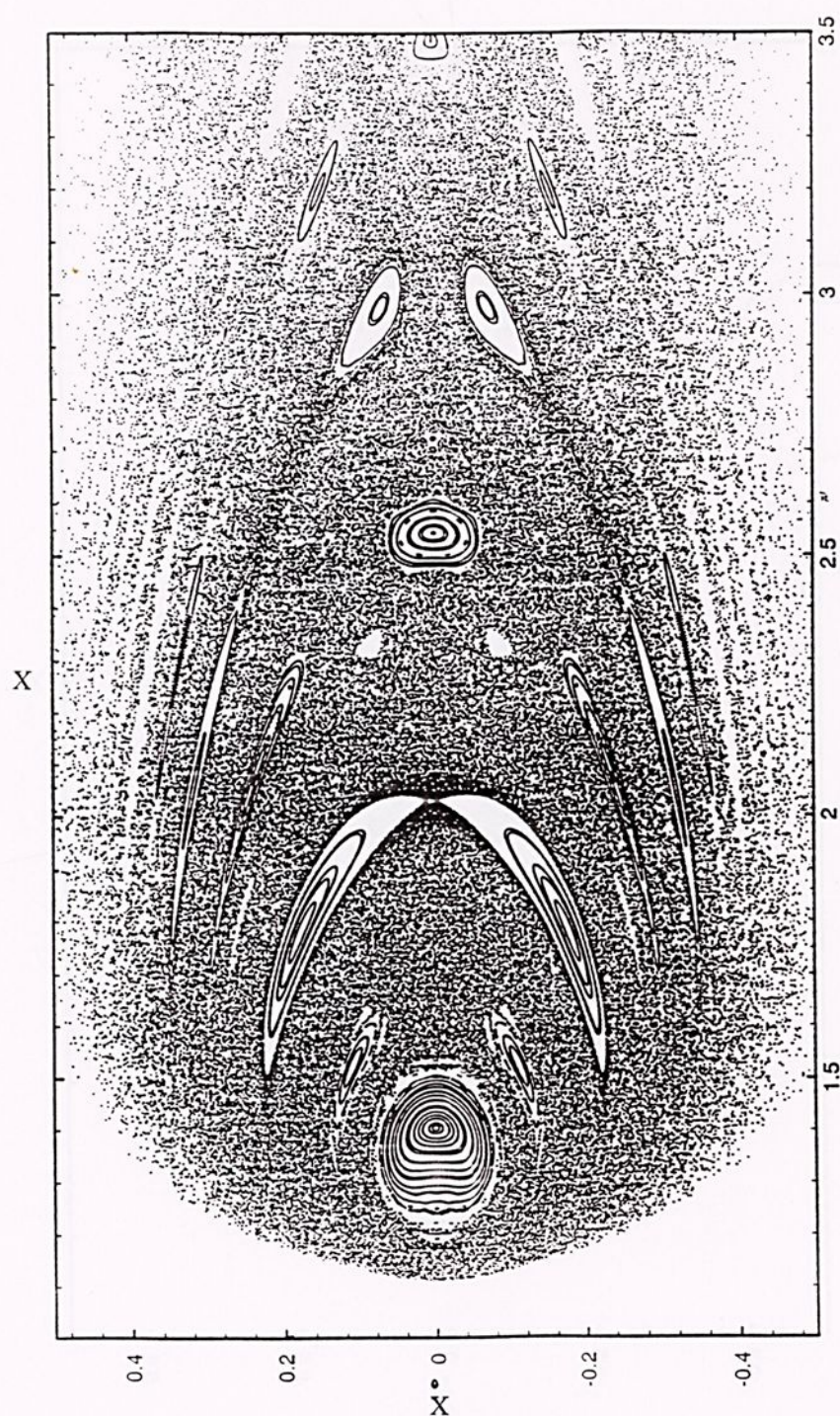


Figura 4.7 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,050 e razão das massas  $10^{-3}$ .



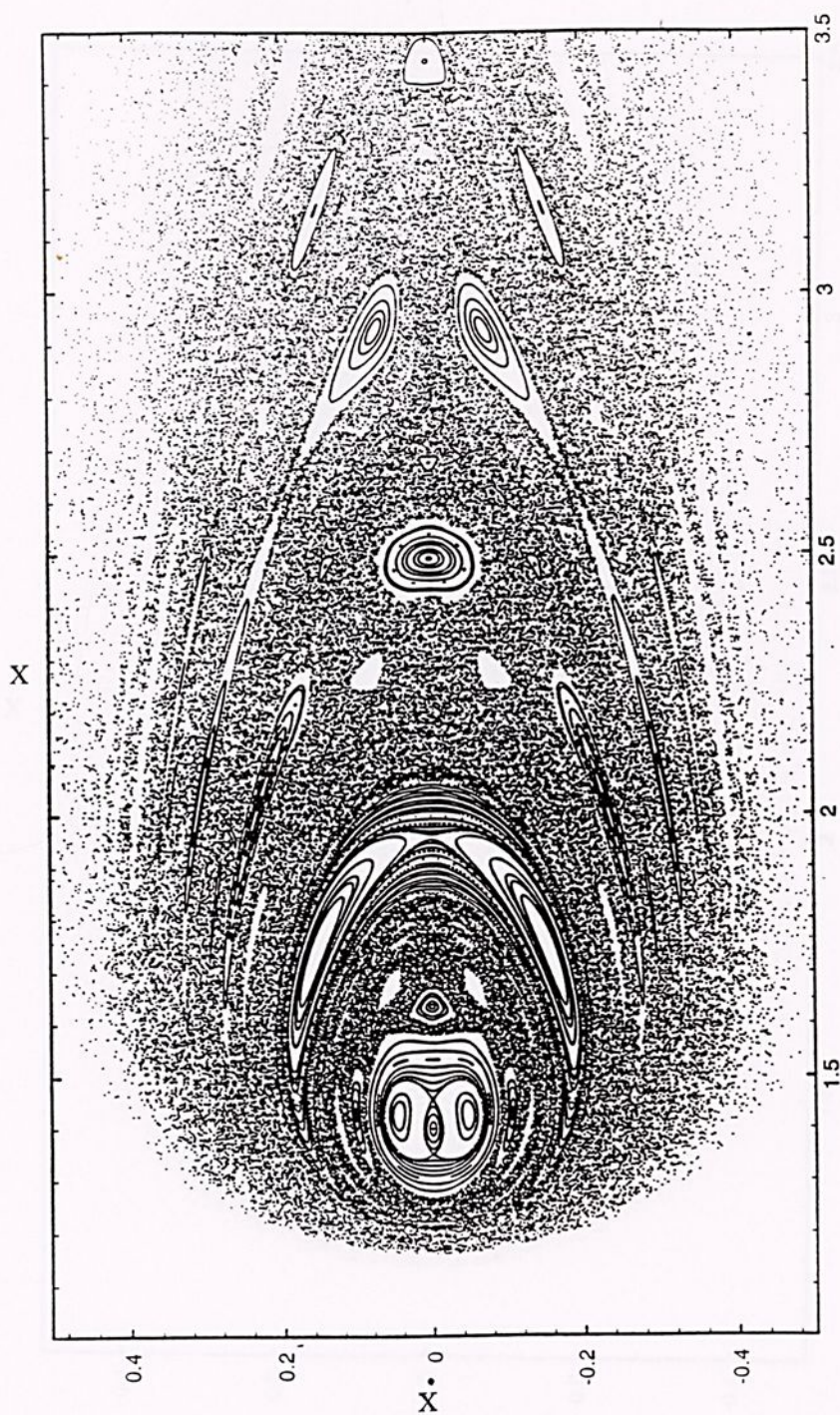


Figura 4.8 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,080 e razão das massas  $10^{-3}$ .



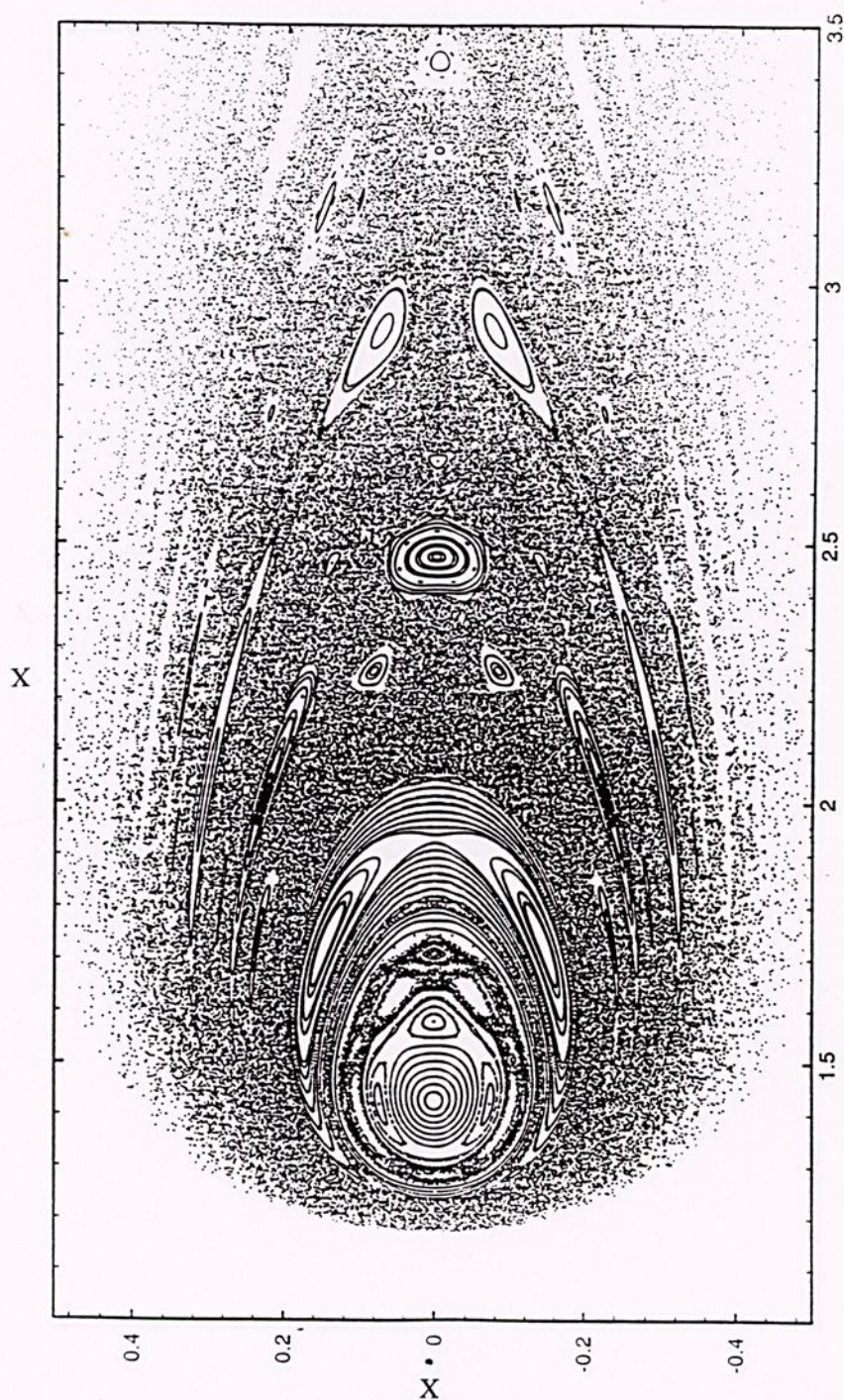


Figura 4.9 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,090 e razão das massas  $10^{-3}$ .



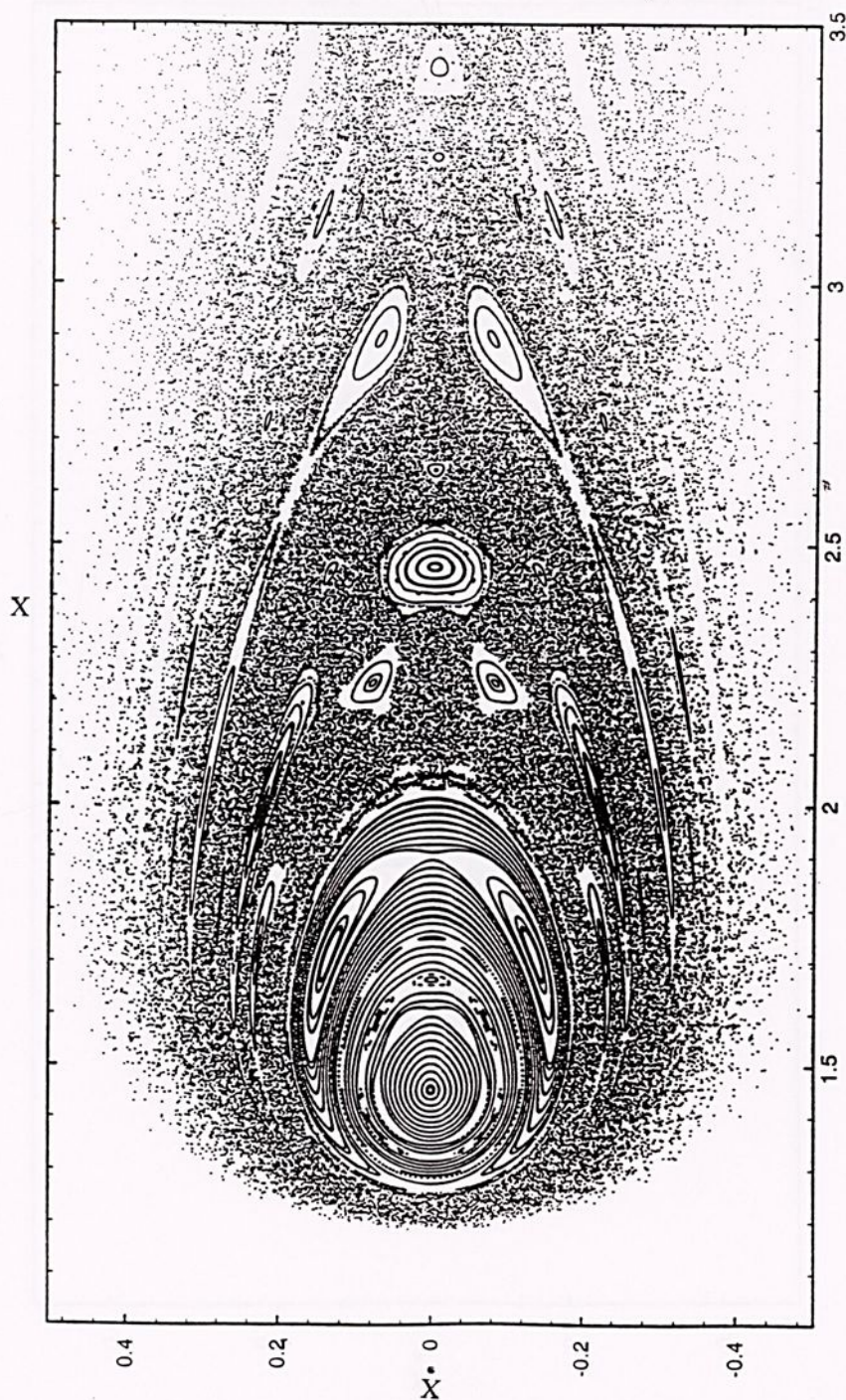


Figura 4.10 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,100 e razão das massas  $10^{-3}$ .



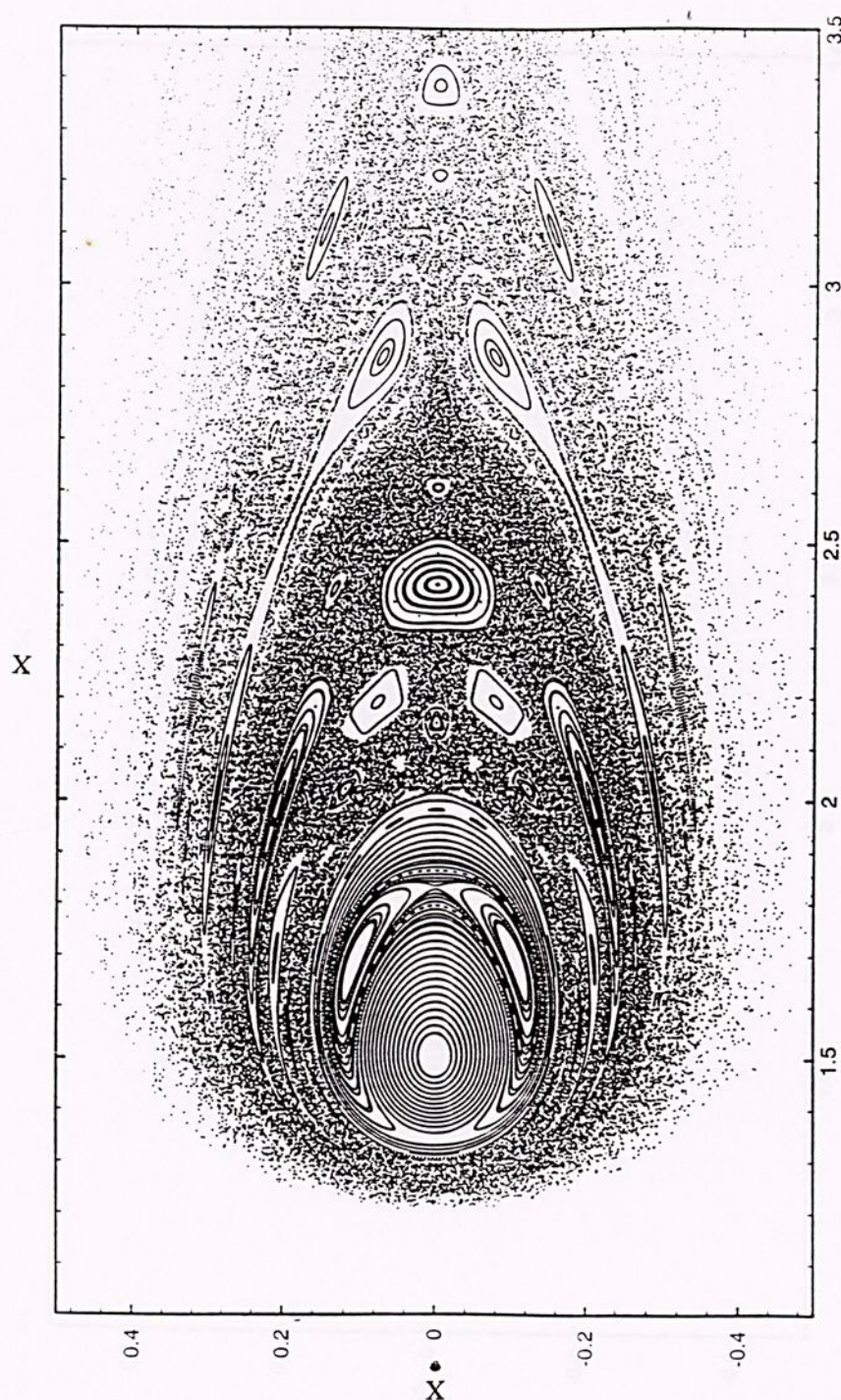


Figura 4.11 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,120 e razão das massas  $10^{-3}$ .



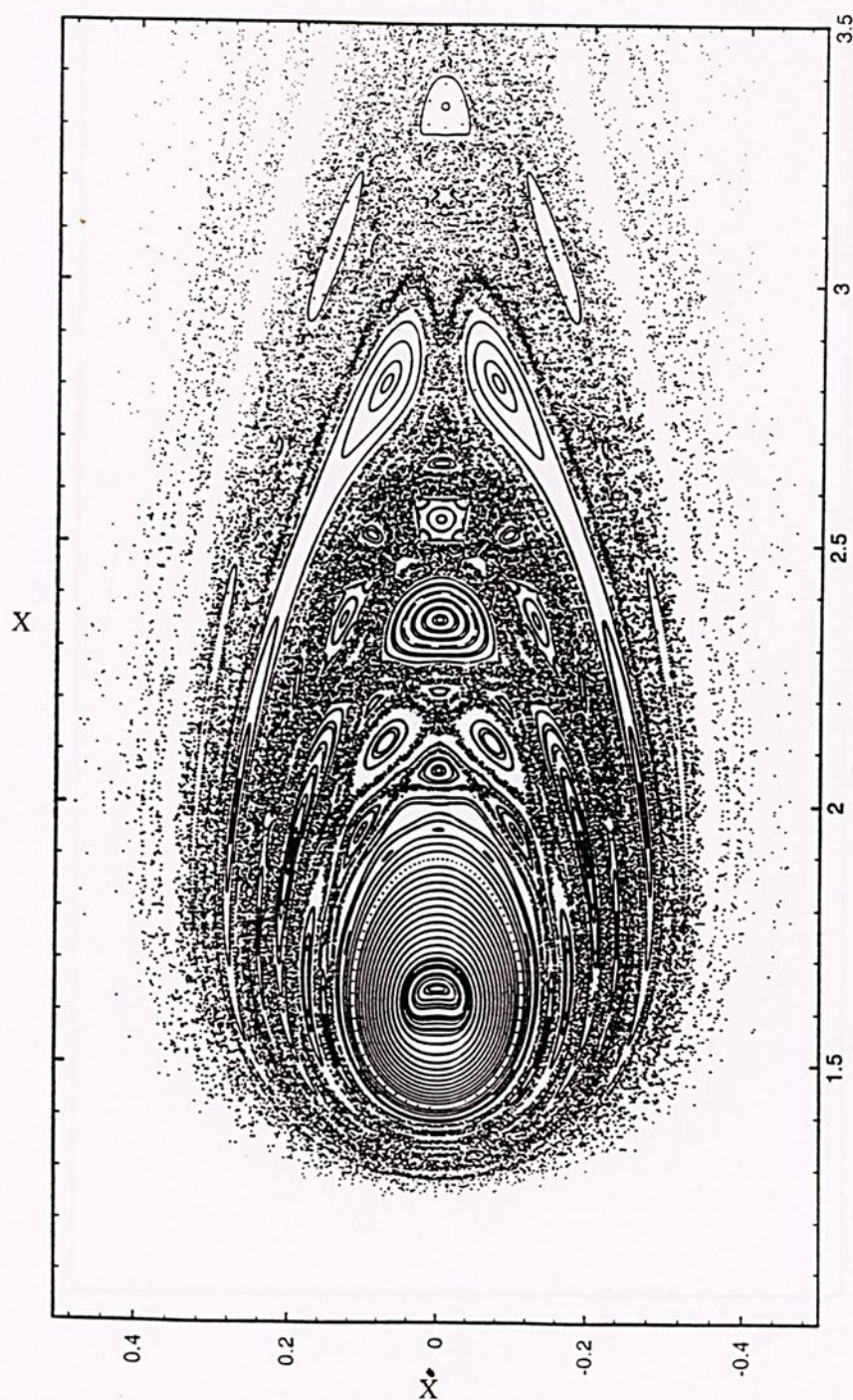


Figura 4.12 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,150 e razão das massas  $10^{-3}$ .

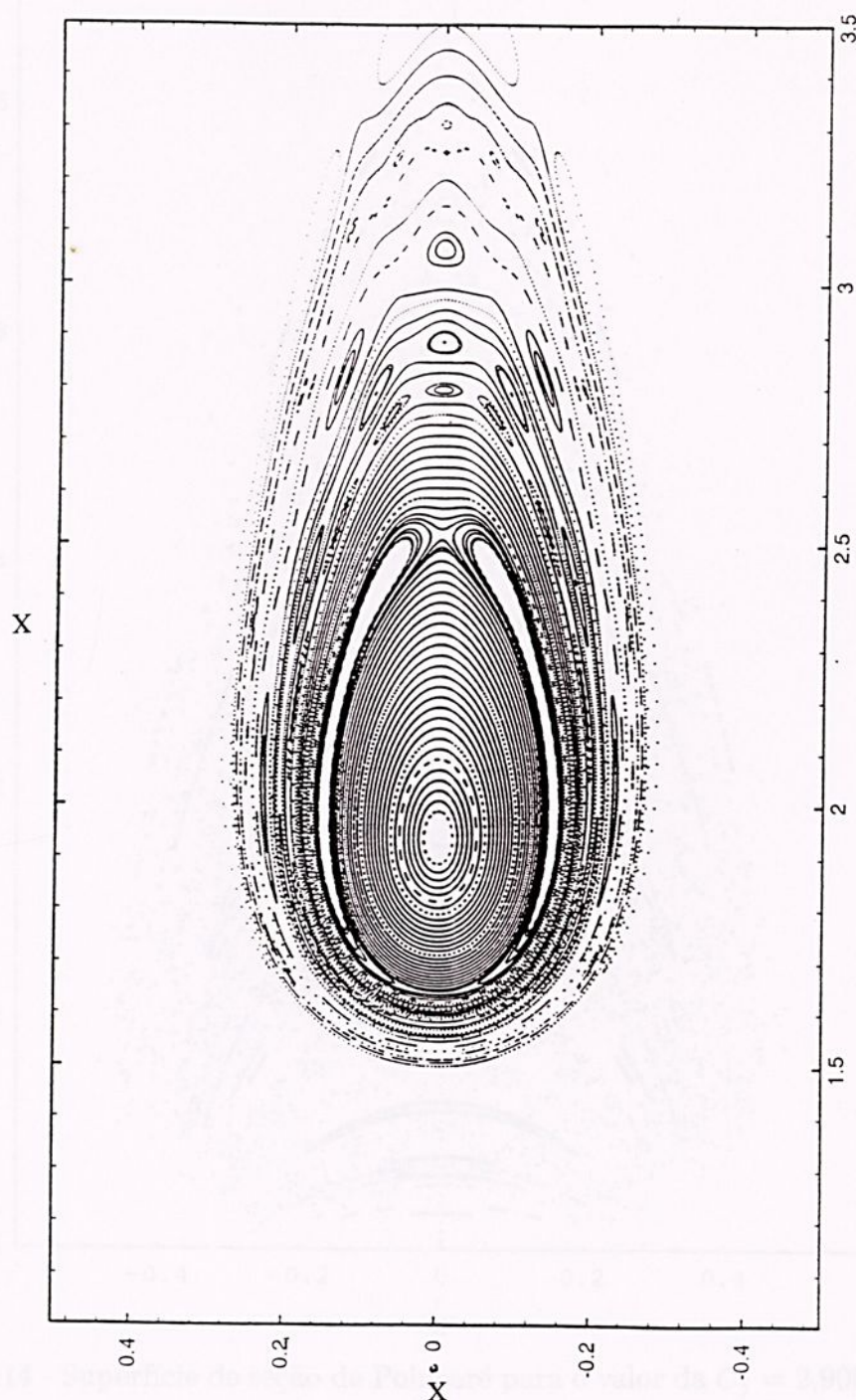


Figura 4.13 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,300 e razão das massas  $10^{-3}$ .



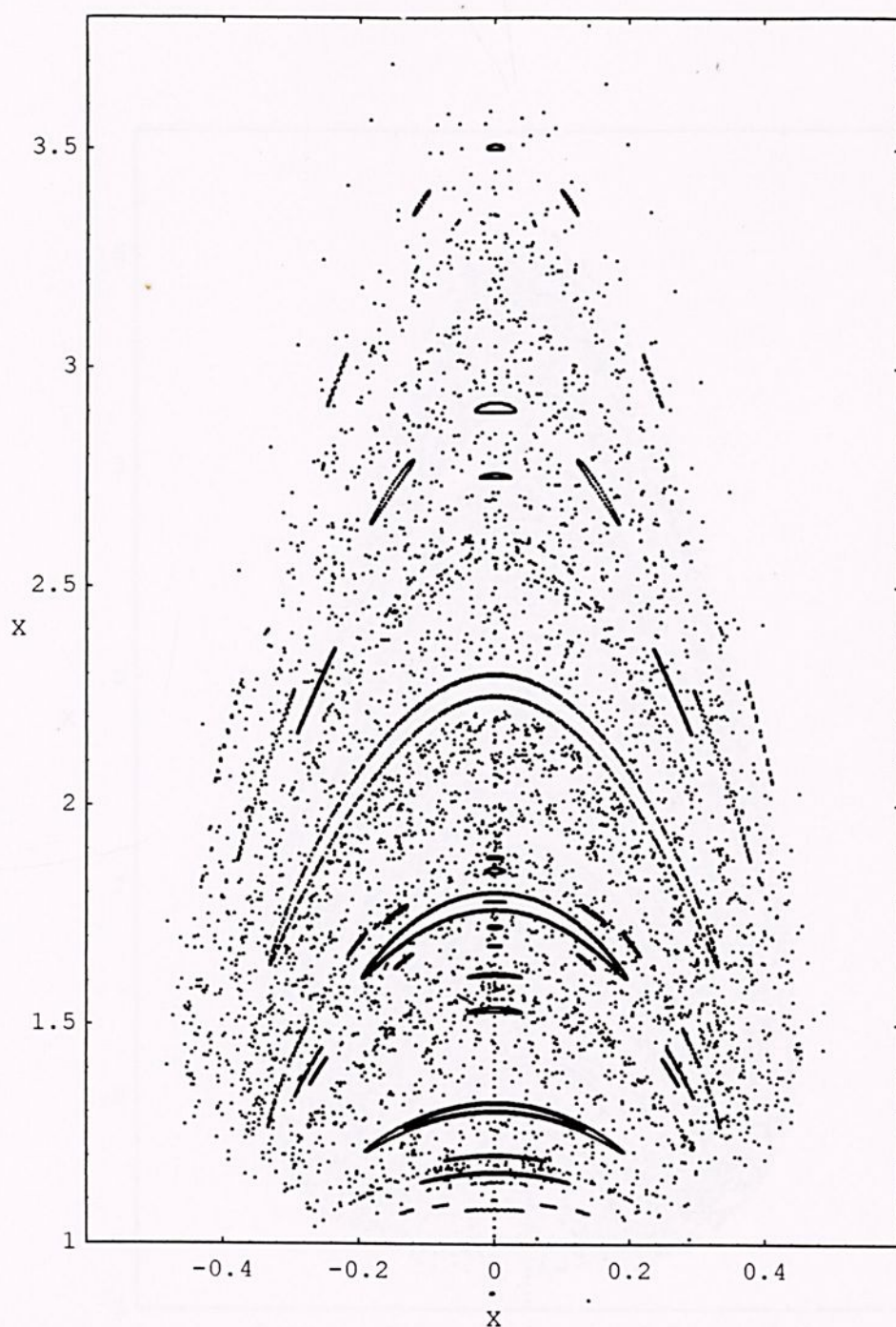


Figura 4.14 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da  $C_j = 2,900$  e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ . Observe que para este valor de constante de Jacobi existe uma grande parte da região considerada caótica. Observe, ainda, que para esta razão das massas as ilhas são em maiores quantidades e menores larguras do que quando considerada a razão das massas  $10^{-3}$  (figura 4.3).

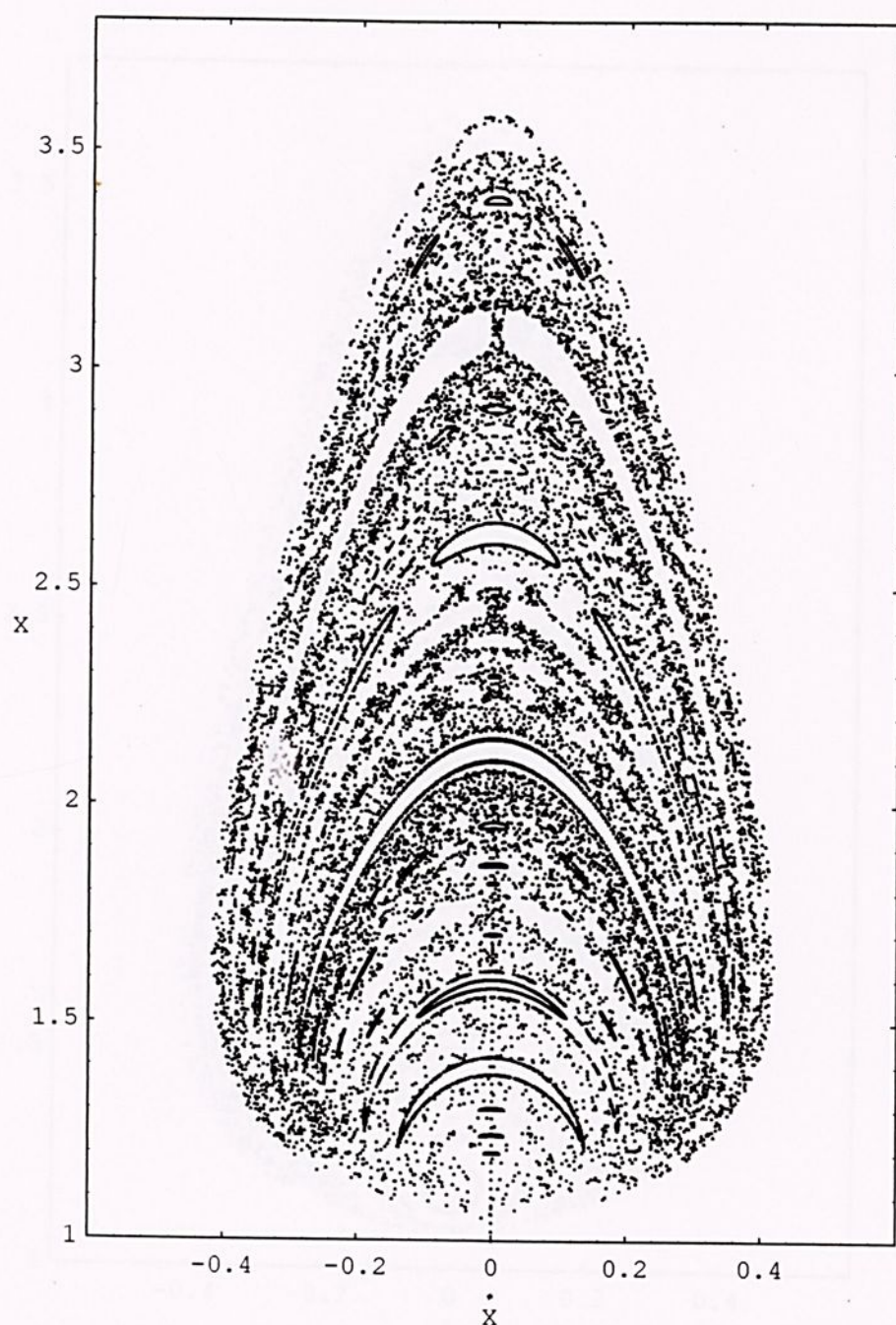


Figura 4.15 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,000 e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ .



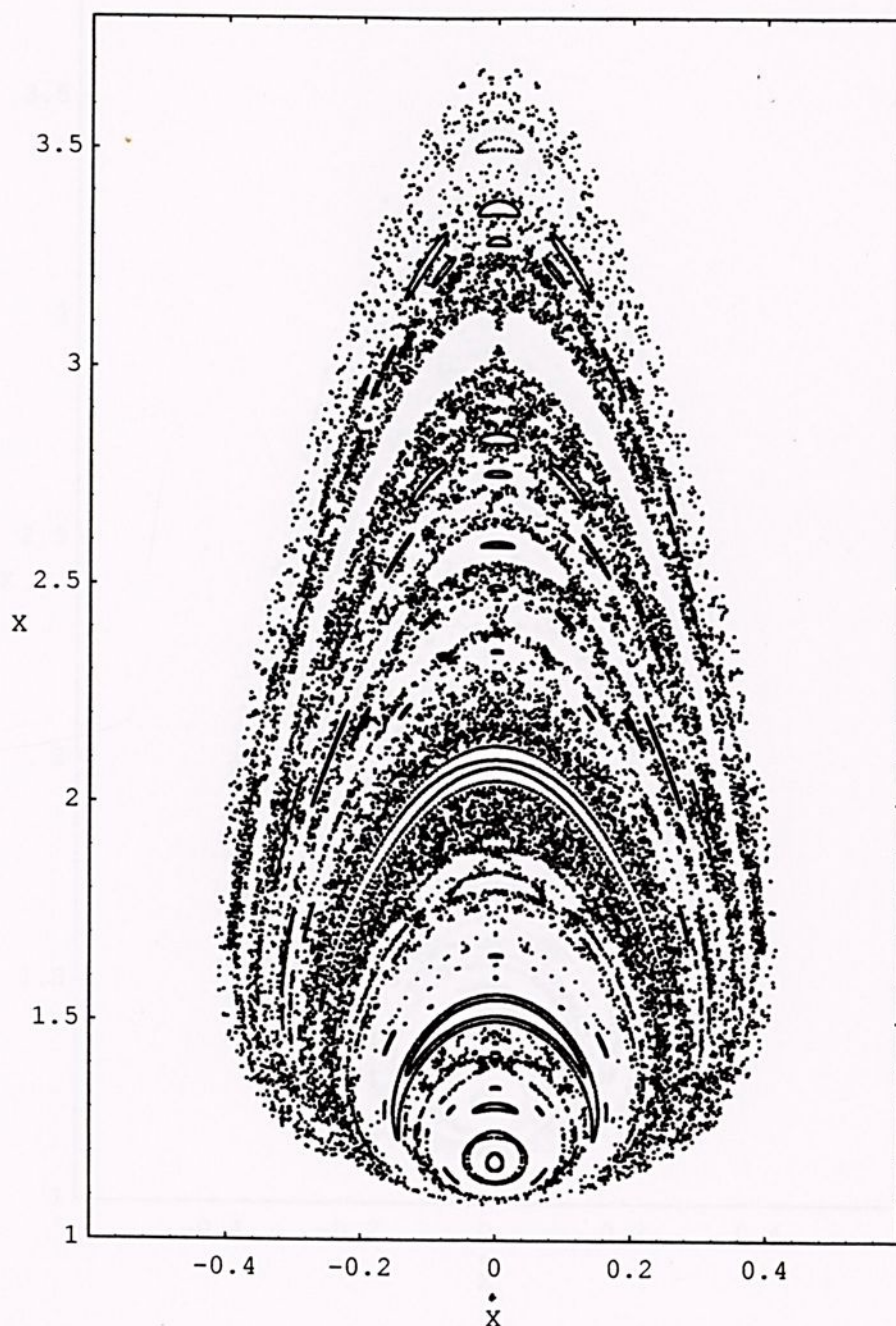


Figura 4.16 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,020 e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ .

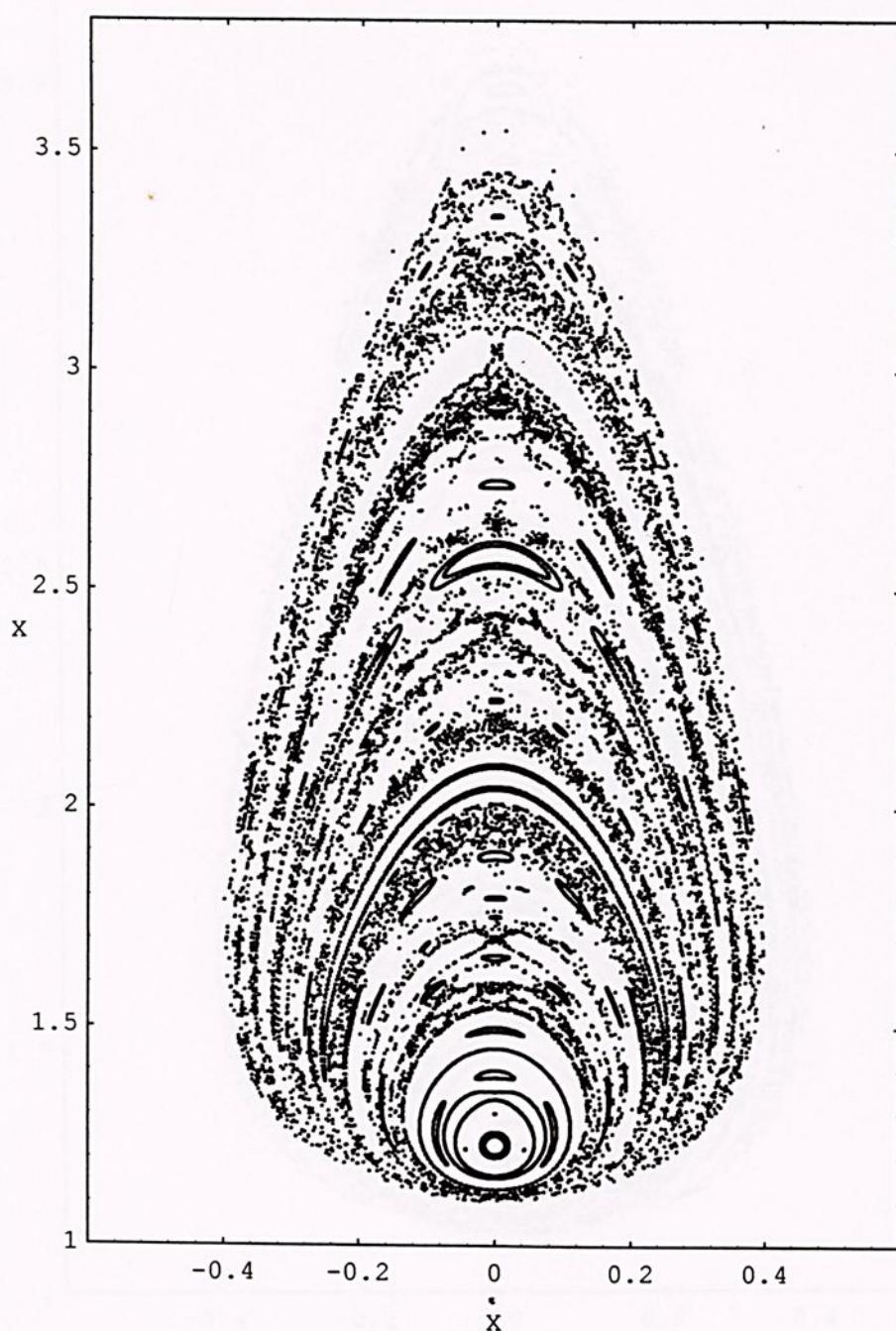


Figura 4.17 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,030 e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ .



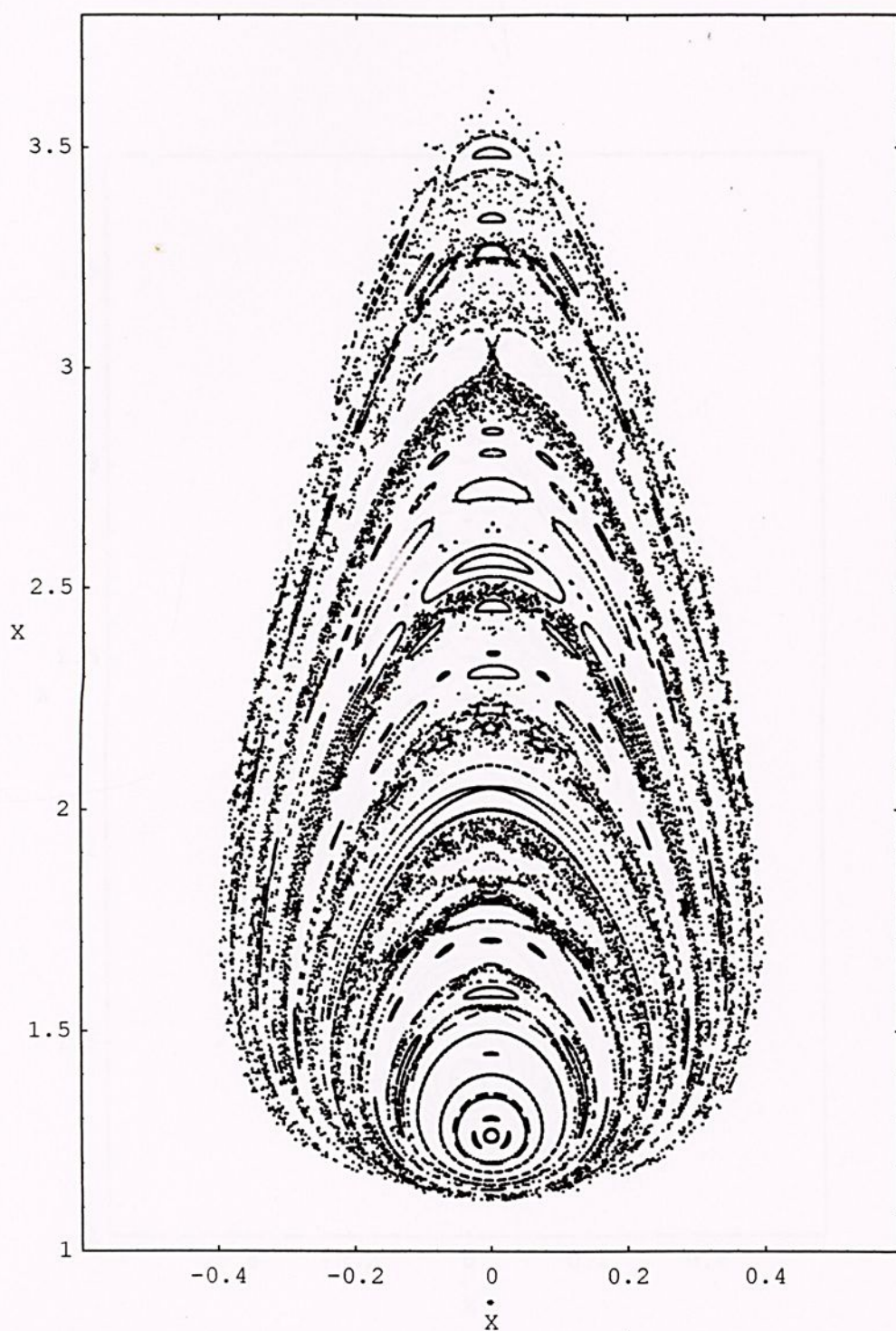


Figura 4.18 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,050 e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ .



Figura 4.19 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,080 e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ .



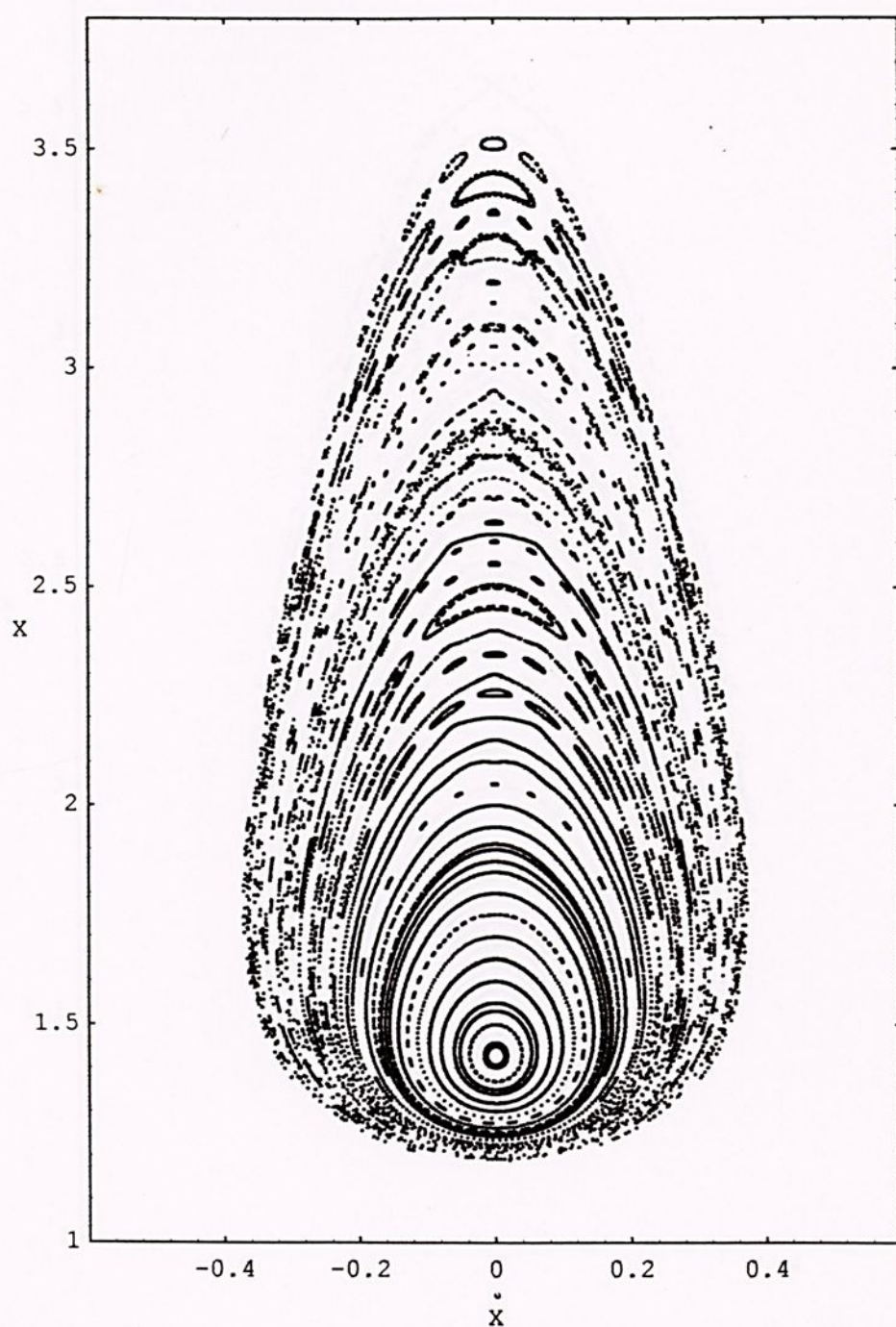


Figura 4.20 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,090 e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ .

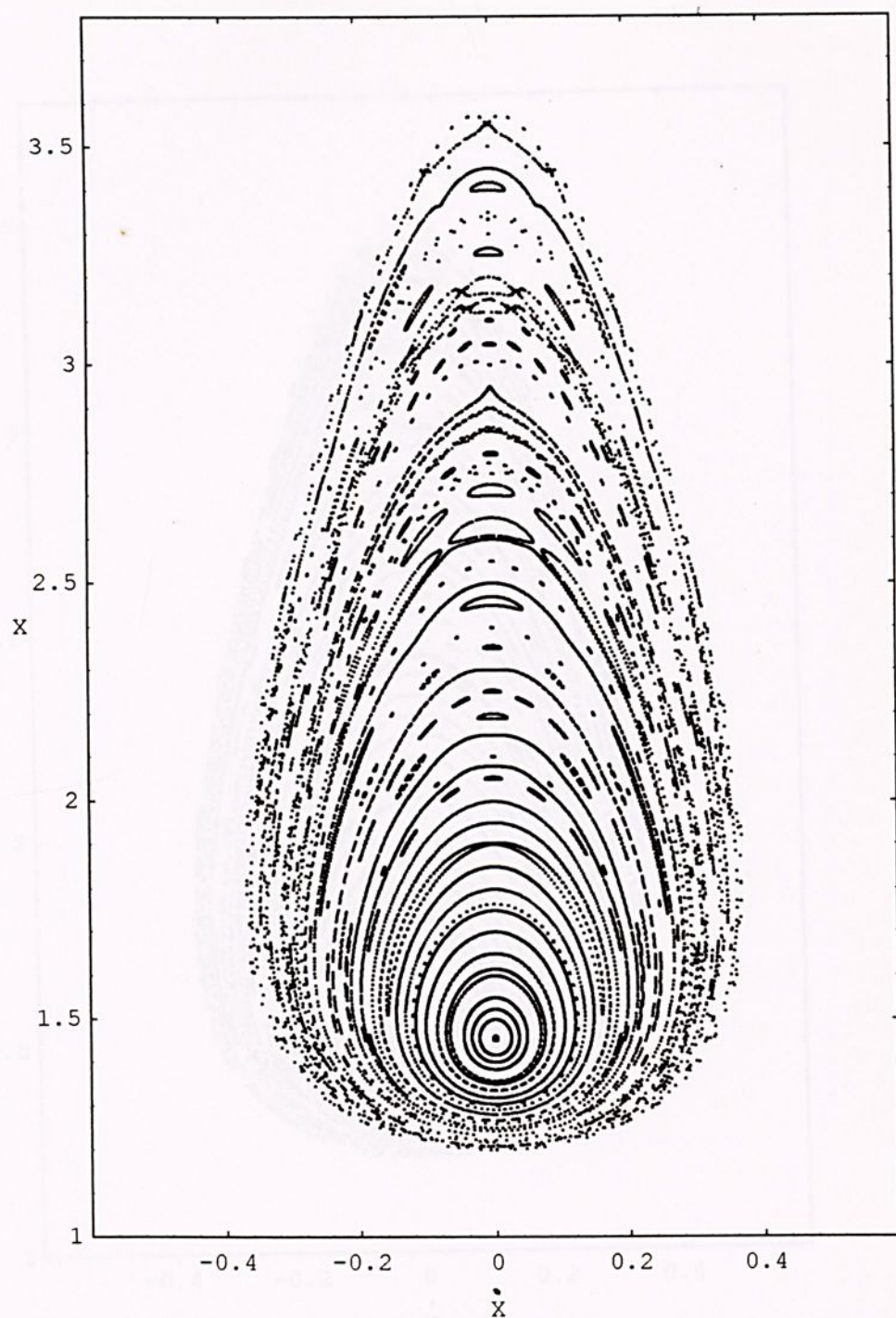


Figura 4.21 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,100 e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ .



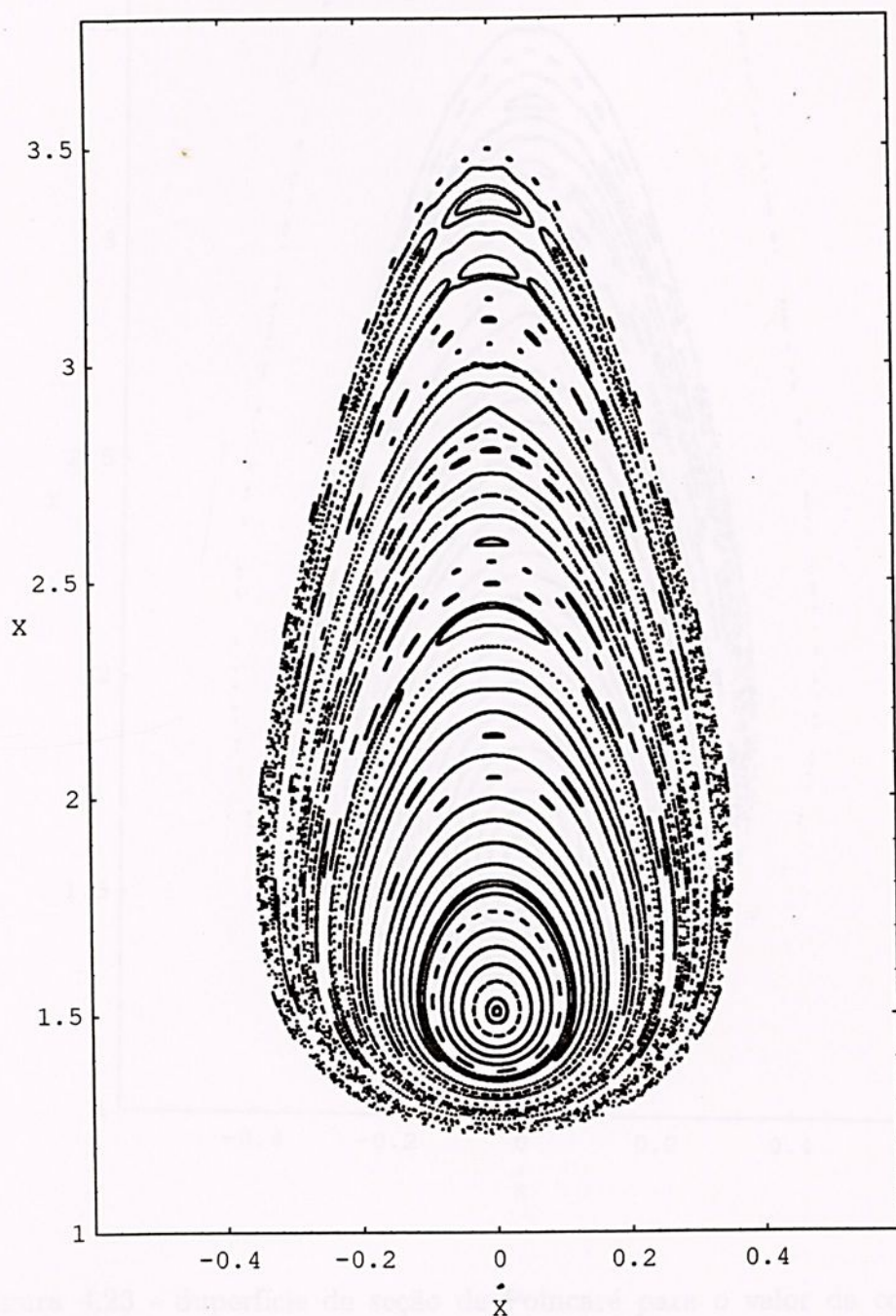


Figura 4.22 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,120 e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ .

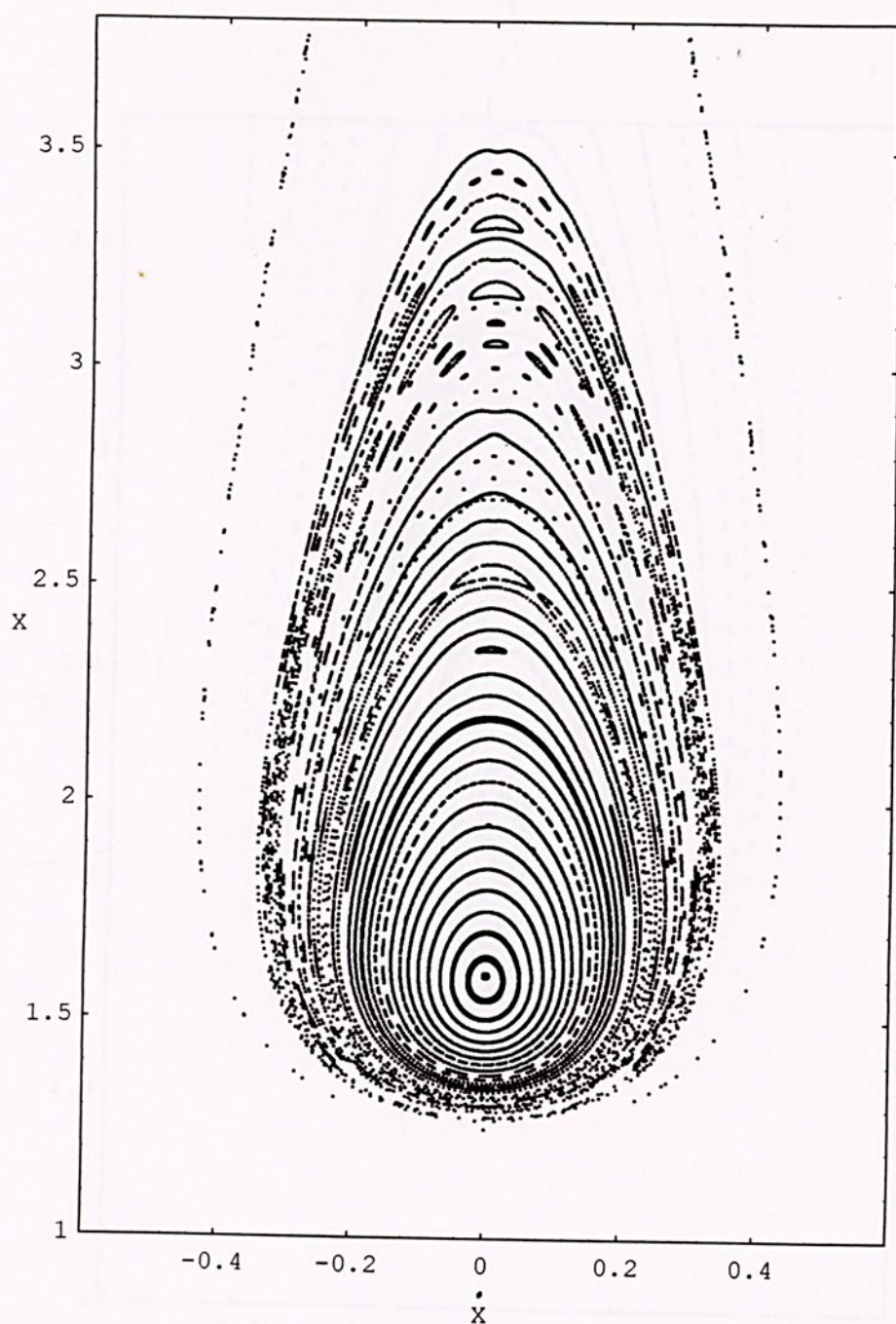


Figura 4.23 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,150 e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ . Observe que a dependência da razão das massas envolvidas apresenta-se sensivelmente ao se comparar a figura 4.12 com esta superfície de seção de Poincaré.



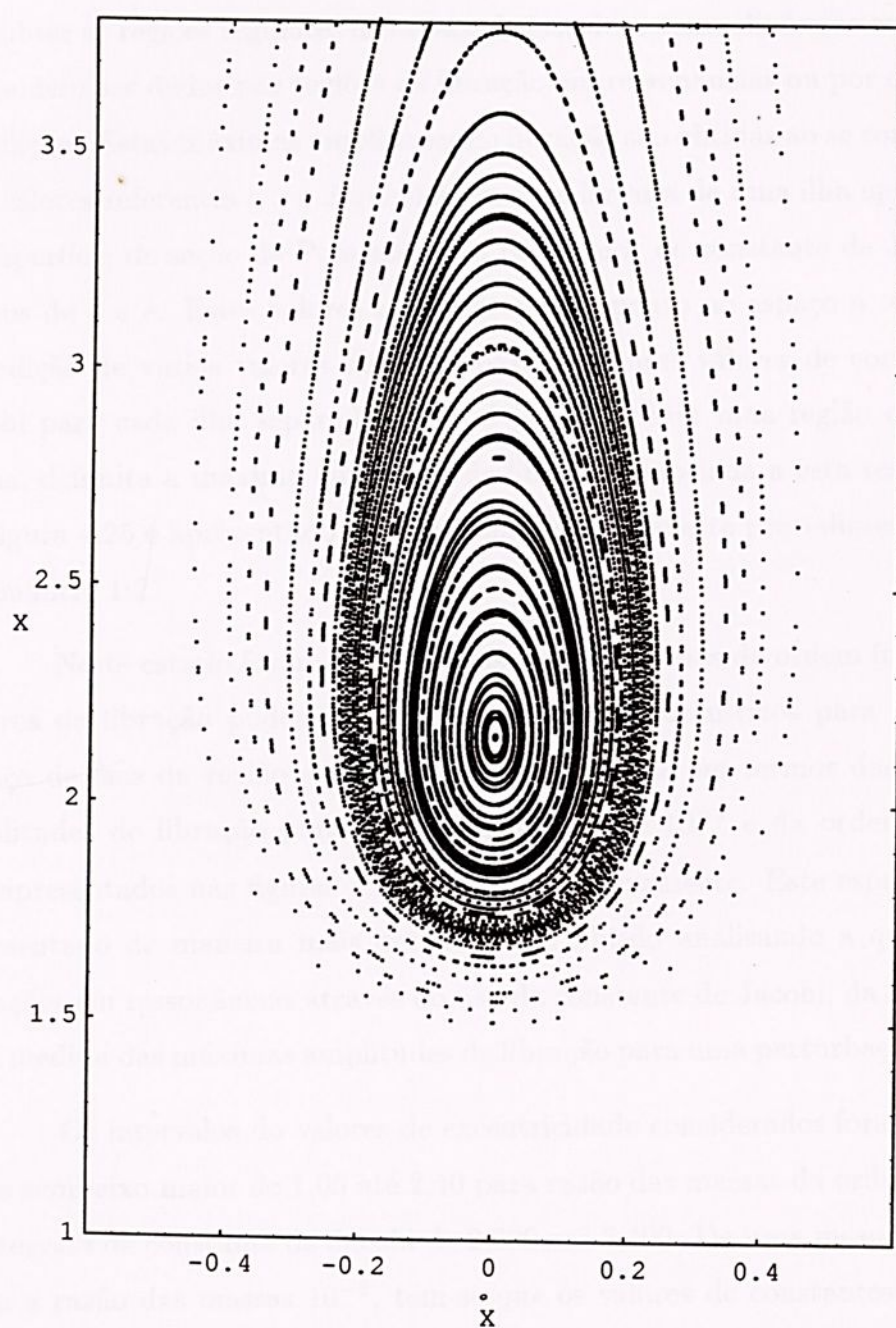


Figura 4.24 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 3,300 e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ .

## 4.2 - O espaço de fase

Utilizando as superfícies de seção de Poincaré (subseção 4.1.1) foi possível obter as regiões regulares do espaço de fase do sistema dinâmico em questão que podem ser dadas por regiões de libração em ressonâncias ou por órbitas de circulação. Estas máximas amplitudes de libração são obtidas ao se converter os dois valores referentes a  $x$  e  $\dot{x}$  que delimitam a largura de uma ilha apresentada na superfície de seção de Poincaré para cada valor de constante de Jacobi em termos de  $a$  e  $e$ . Estes valores representam um ponto no espaço  $a \times e$ . Após a medição de vários valores de  $a$  e  $e$  para diferentes valores de constante de Jacobi para cada ilha separadamente, é possível obter uma região que, desta forma, delimita a máxima amplitude de libração associada a esta ressonância. Na figura 4.25 é apresentado um esquema mostrando este procedimento para a ressonância 1:2.

Neste estudo foram consideradas as ressonâncias de ordem ímpar cujos centros de libração podem ser pericêntricos ou apocêntricos para obter-se o espaço de fase da região externa. O espaço de fase em termos das máximas amplitudes de libração para razão das massas de  $10^{-3}$  e da ordem de  $10^{-5}$  são apresentados nas figuras 4.26 e 4.27, respectivamente. Este espaço de fase apresentado de maneira mais detalhada foi obtido analisando a questão das librações em ressonâncias através do uso da constante de Jacobi, da localização e da medida das máximas amplitudes de libração para uma perturbação interna.

Os intervalos dos valores de excentricidade considerados foram de 0 até 0,7 e semi-eixo maior de 1,05 até 2,40 para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  e intervalo de constante de Jacobi de 2,600 até 3,400. De uma mesma maneira, para a razão das massas  $10^{-3}$ , tem-se que os valores de constantes de Jacobi foram de 2,800 à 3,400, os intervalos dos valores de excentricidade de 0 até 0,5 e semi-eixo maior de 1,05 até 2,40. Considerou-se o caso em que a longitude do pericentro( $\varpi$ ) é igual a  $\pi$  pois a perturbação considerada é interior, e lembrando-se que  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são as massas relativas dadas na equação (2.9).





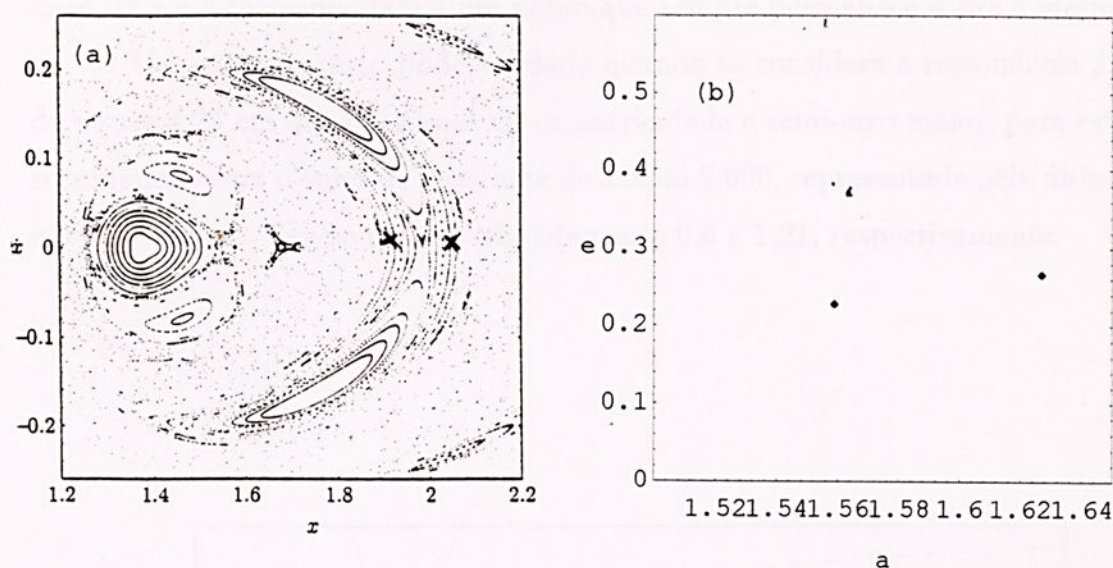


Figura 4.25 - Esquema onde é mostrado como se obtém a máxima amplitude de libração associada com a ressonância 1:2, utilizando-se a técnica de superfície de seção de Poincaré. As máximas amplitudes de libração são obtidas convertendo os dois valores de  $x$  que medem a largura da ilha para  $\dot{x}$  igual a zero em excentricidade e semi-eixo maior. (a)  $C_J = 3,070$ . (b) Os pontos em preto representam os dois valores obtidos para  $x$  via superfície de seção de Poincaré após convertê-los em semi-eixo maior e excentricidade, delimitando, após várias medições de  $a$  e  $e$  para diferentes valores de  $C_J$ , desta forma, a máxima amplitude de libração para a ressonância 1:2.

Nas figuras 4.26 e 4.27 tem-se os contornos de algumas constantes de Jacobi (linhas tracejadas) que foram utilizadas neste trabalho. Observe que para o valor de constante de Jacobi 2,600, última curva tracejada da figura 4.27, os valores das excentricidades não apresentam-se menores que 0,6. De uma mesma maneira na figura 4.26 tem-se que para o valor de constante de Jacobi igual a 2,900 os valores das excentricidades não podem ser menores que 0,4.

Uma questão importante apresentada nestas figuras em relação às curvas de contorno das constantes de Jacobi é que para uma dada constante de

Jacobi as variações de  $a$  e  $e$  para  $\varpi$  constante devem ser de maneira que os valores de  $a$  e  $e$  correspondam a um ponto que sempre permanece sobre a mesma curva. Um exemplo disto pode ser dado quando se considera a ressonância 3:4 da figura 4.27 em que os valores de excentricidade e semi-eixo maior, para esta ressonância, com o valor de constante de Jacobi 2,600, representada pela última curva tracejada, devem ser aproximadamente 0,6 e 1,21, respectivamente.

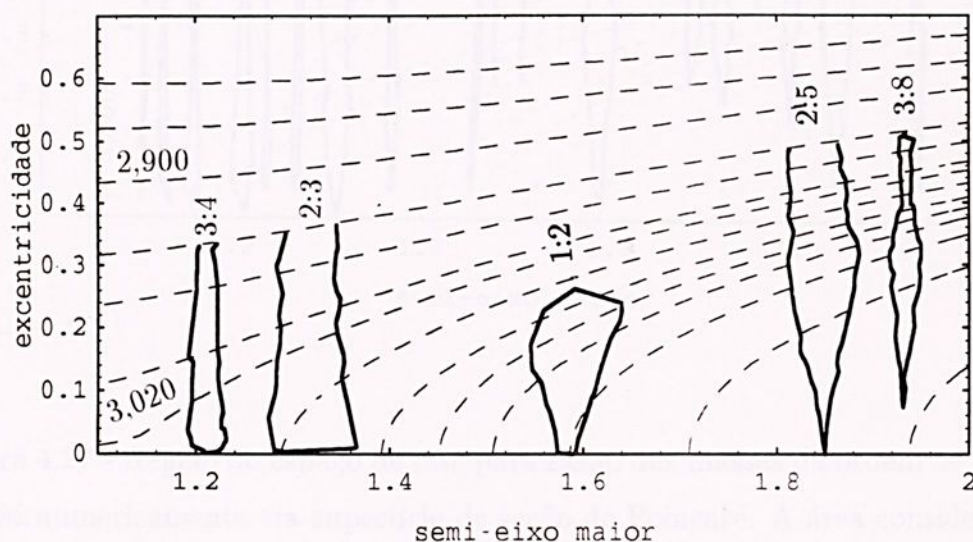


Figura 4.26 - Região do espaço de fase para razão das massas  $10^{-3}$  obtido numericamente via superfície de seção de Poincaré. A área considerada estável relacionada com as máximas amplitudes de libração associadas com cada ressonância é a área interior ao par de linhas. Estas amplitudes são obtidas medindo-se a largura das ilhas que se encontram na superfície de seção de Poincaré e que representam as ressonâncias, convertendo os valores de  $x$  em  $a$  e  $e$ . As ressonâncias estão indicadas na própria figura. As curvas que são dadas pelas linhas tracejadas representam os contornos das constantes de Jacobi.



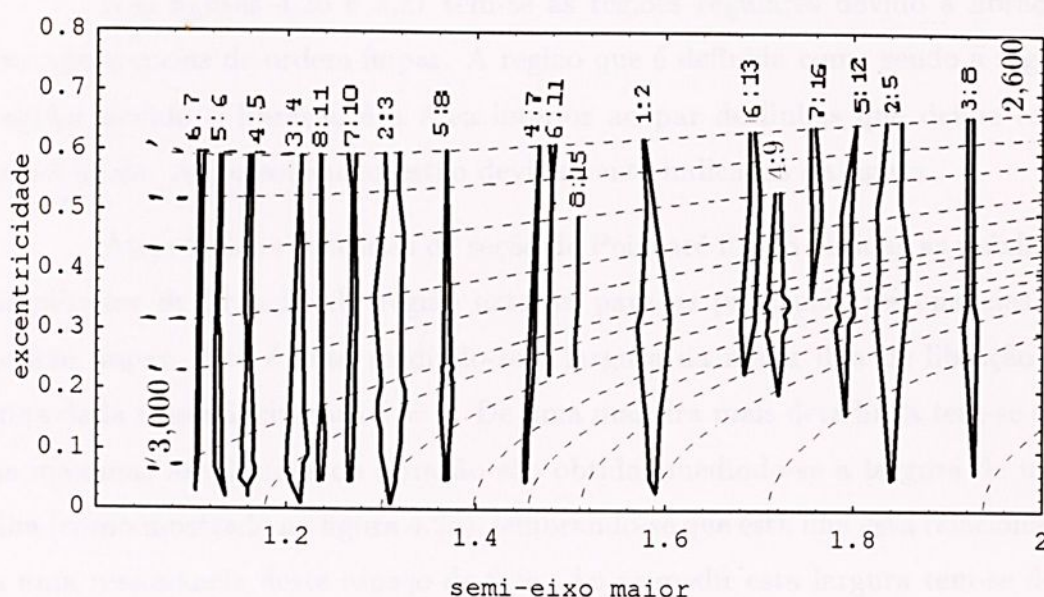


Figura 4.27 - Região do espaço de fase para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  obtido numericamente via superfície de seção de Poincaré. A área considerada estável relacionada com as máximas amplitudes de libração associadas com cada ressonância é a área interior ao par de linhas. Estas amplitudes são obtidas medindo-se a largura das ilhas que se encontram na superfície de seção de Poincaré e que representam as ressonâncias, convertendo os valores de  $x$  em  $a$  e  $e$ . As ressonâncias estão indicadas na própria figura. As curvas que são dadas pelas linhas tracejadas representam os contornos das constantes de Jacobi.

As amplitudes de libração associadas com cada ressonância devem ser tratadas de maneira mais detalhada, isto é, devem ser discutidas uma a uma. Portanto, na subseção seguinte tem-se esta discussão.

#### 4.2.1 - Amplitudes de libração

As discussões que se seguem foram feitas com referência às figuras 4.26 e 4.27 de maneira comparativa e narrativa, isto é, diante da estrutura dos dois espaços de fase para razão das massas  $10^{-3}$  e da ordem de  $10^{-5}$ .

Nas figuras 4.26 e 4.27 tem-se as regiões regulares devido à libração em ressonâncias de ordem ímpar. A região que é definida como sendo a região regular devido à libração é a área interior ao par de linhas que define cada ressonância. As ressonâncias estão devidamente indicadas na figura.

Através das superfícies de seção de Poincaré foram obtidas as máximas amplitudes de libração da região externa para as principais ressonâncias de ordem ímpar. Isto é feito medindo-se a largura da maior ilha de libração de uma dada ressonância para  $\dot{x} = 0$ . De uma maneira mais detalhada tem-se que as máximas amplitudes de libração são obtidas medindo-se a largura de uma ilha (como mostrado na figura 4.25), lembrando-se que esta ilha está relacionada a uma ressonância deste espaço de fase. Ao se medir esta largura tem-se dois valores de  $x$  com  $\dot{x} = 0$ . Estes valores são convertidos em excentricidade e semi-eixo maior e representam um ponto na linha em preto que define uma região nas figuras 4.26 e 4.27, visão do espaço de fase para razões das massas  $10^{-3}$  e da ordem de  $10^{-5}$ , respectivamente.

Para a razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  as ressonâncias consideradas vão desde a ressonância 6:7, com o valor nominal de seu semi-eixo maior igual 1,1082, até a ressonância 3:8 com o valor nominal de seu semi-eixo maior igual a 1,920 (veja figura 4.27). Neste trabalho considerou-se os limites em  $e$  de 0,03 até 0,6 ao valor máximo definido pelo contorno da constante de Jacobi 2,600 e os limites em  $a$  entre 1,1 e 2,4, porém para valores de  $x$  na faixa de 1,920 até 2,400 o espaço de fase para região externa não apresenta nenhuma ressonância ímpar de largura considerável ou que viesse a comprometer os resultados. Portanto, para estes limites todas as ressonâncias de primeira ordem, todas de terceira ordem, com excessão da 1:4, e as principais de quinta ordem encon-





tram-se no espaço de fase apresentado na figura 4.27. Utilizando-se este dado, é válido observar que algumas ressonâncias de ordem superior às ressonâncias de primeira ordem contidas no espaço de fase apresentam uma amplitude de libração bem próximas a estas. Um exemplo disto é a ressonância 4:9, que mesmo sendo uma ressonância de quinta ordem, sua amplitude de libração é superior a da ressonância de primeira ordem 3:4 e só vindo a desaparecer, isto é, na superfície de seção de Poincaré ela não é mais localizada, para o valor correspondente de excentricidade em torno de 0,19 com o valor de constante de Jacobi de aproximadamente 3,150.

Para a ressonância 3:8, uma ressonância também de quinta ordem, tem-se que sua amplitude de libração é grande em relação a uma ressonância de primeira ordem, como por exemplo a ressonância 4:5, mesmo ela encontrando-se próxima a uma ressonância bem maior que a sua como é o caso da ressonância 2:3, ainda assim, ela ainda mantém sua existência até a excentricidade de aproximadamente 0,05, só desaparecendo para o valor de constante de Jacobi 3,300.

Para a ressonância 2:5, uma ressonância de terceira ordem, sua amplitude de libração é grande em relação, por exemplo, à ressonância 1:2. Sendo esta uma ressonância de primeira ordem esperava-se que sua amplitude de libração fosse maior que qualquer outra ressonância, pois ela é considerada uma ressonância forte. Além disso, um outro fator que observa-se em relação à ressonância 2:5 é que sua existência persiste para toda a faixa considerada. Um fator que pode ter contribuído para tal situação é que a sua localização é bem distante de uma ressonância de primeira ordem só existindo em sua proximidade ressonâncias de ordens superiores.

Entre as ressonâncias 2:5 e 4:9 apresentam-se duas ressonâncias de ordem elevada que curiosamente conseguiram persistir por um bom intervalo de constante de Jacobi. Estas são as ressonâncias 5:12 e 7:16, de sétima e nona ordem, respectivamente. Para a ressonância 5:12 tem-se sua existência até o valor de excentricidade de aproximadamente 0,16 com uma amplitude de libração comparável a da ressonância 3:4. Agora, em se tratando da ressonância





7:16, esta desaparece bem antes que as ressonâncias vizinhas, possuindo um valor de excentricidade aproximado de 0,36 e amplitude de libração superior à da ressonância de primeira ordem 4:5.

Entre as ressonâncias 4:9 e 1:2 tem-se a ressonância 6:13 que é uma ressonância de sétima ordem, mas que apesar de sua localização ser bem próxima a da ressonância 4:9, esta, considerada mais forte, tem sua amplitude de libração comparável com a da própria ressonância 4:9.

Para a ressonância de primeira ordem 1:2 tem-se sua excentricidade na faixa de 0,6 até aproximadamente 0,03, com uma grande amplitude de libração para valores em excentricidade entre 0,5 e 0,2. Apesar desta ressonância, em geral, ser considerada a mais forte, surpreendentemente, constata-se que sua amplitude de libração não é tão maior que as outras, existindo outra ressonância de ordem superior bem próxima a sua amplitude de libração. Pode-se ainda observar que próximo a sua localização não se encontra nenhuma outra ressonância com amplitude de libração relevante ao ponto de ser possível medi-la.

Após a ressonância 1:2 apresentam-se as ressonâncias 8:15 e 6:11, de sétima e quinta ordens, respectivamente, com amplitudes de libração bem pequenas, em relação às demais que se encontram nesta figura, sendo definidas por uma linha. Apesar disto elas conseguem ter uma faixa de existência bem extensa, indo de 0,5 até 0,24 de excentricidade para a ressonância 8:15 e excentricidade de 0,6 até 0,22 para a ressonância 6:11.

Logo em seguida tem-se a ressonância 4:7 que é uma ressonância de terceira ordem e sua amplitude de libração bem estreita em comparação com ressonâncias de ordem superior, mas mesmo assim é possível observar sua permanência indo desde a excentricidade 0,6 até 0,03.

Depois da ressonância 4:7 tem-se um espaço considerado onde não apareceu nenhuma ressonância que pudesse ter um espaço de permanência relevante. Após esta região apresenta-se a ressonância 5:8 que também é uma ressonância de terceira ordem, com uma amplitude de libração comparável à





da 4:7, porém, esta tem uma ressonância de primeira ordem, 2:3, bem perto e, desta forma, podendo sofrer perturbações alterando seu espaço de fase.

Para a ressonância 2:3 nota-se que sua amplitude de libração consegue ser aproximadamente do tamanho da ressonância 1:2, o que não deveria acontecer quando toma-se as ressonâncias isoladamente, pois a ressonância 1:2 no jogo da estabilidade é considerada mais forte. Outro fator que é válido atentar é que para esta situação é possível observar que a área mais concentrada se encontra nos limites da ressonância 2:3 indo até a ressonância 6:7 e desta forma deveria ser esta região mais caótica. Mesmo assim as demais ressonâncias que aparecem continuam a ter uma estrutura de libração e desta maneira tornando estas regiões, que são delimitadas entre as linhas, regulares e, portanto, sobrando um espaço relativamente pequeno para as regiões caóticas entre as regiões de libração.

As ressonâncias seguintes são: 7:10 e 8:11 ambas de terceira ordem, 3:4, 4:5, 5:6 e 6:7 todas de primeira ordem, com excentricidades de aproximadamente 0,6 a 0,02 e amplitudes de libração bem definidas mesmo sendo bastante estreitas em relação às demais.

Visto que a amplitude de libração fornece a região estável vinculada a respectiva ressonância e que a região exterior a esta região delimitada pela máxima amplitude de libração podem fornecer duas possibilidades : caos ou região estável devido a circulação, tem-se que ao considerar-se a visão do espaço de fase para razão das massas  $10^{-3}$  (figura 4.26) a ressonância 1:2 não existe simetricamente para valores maiores de excentricidade de aproximadamente 0,26 só existindo a assimétrica ( Winter & Murray, 1997b; Beaugé, 1994; Bruno, 1976-1994; Frangakis, 1968-1973a,b; Message, 1970-1978 ). Este fato não ocorreu ao se considerar a razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ , onde mesmo com o caos grande na separatriz ela continuava a existir, porém, com uma largura menor. Isto pode ocorrer pelo fato de que a largura da amplitude de libração tem uma dependência direta com a razão das massas envolvidas e, desta forma, quanto maior a razão das massas, maior sua amplitude de libração e, também, a



sua largura de sua separatriz. Portanto, pode ser que o caos na separatriz para razão das massas  $10^{-3}$  tenha impedido a existência da ressonância 1:2 simétrica para a faixa de semi-eixo maior considerada.

Um outro fator que foi observado é que a ressonância 2:3 tem uma amplitude de libração grande ao ser comparada, por exemplo, com a ressonância 1:2. Este resultado se mostra contrário ao esperado. Uma possível explicação para tal fato pode ser devido ao espaço de fase entre as ressonâncias envolvidas ser bastante caótico dificultando o aparecimento de ressonâncias de ordem superior e desta forma tornando-se possível tal amplitude.

Com estes resultados numéricos pode-se compará-los a outros obtidos no capítulo 3, a subseção 4.2.2 trata desta comparação.

#### *4.2.2 - Resultados numéricos versus modelo analítico*

Diante da apresentação do espaço de fase associado com a máxima amplitude de libração da região externa para razão das massas  $10^{-3}$  e da ordem de  $10^{-5}$  obtido numericamente, pode-se comparar estes resultados com os obtidos analiticamente pela aplicação dos modelos existentes na literatura. Existem, na literatura, modelos semi-numéricos em que seus resultados também possam ser comparados aos numéricos futuramente (Ferraz Mello, 1987b-1989a; Thomaz, 1998; Morbidelli et al, 1995; Moons, 1993). O modelo analítico aplicado neste trabalho para obter as máximas amplitudes de libração foi o modelo aprimorado do pêndulo. O resultado desta aplicação foi exposto no capítulo 3. As discussões provenientes desta aplicação são dadas a seguir.

##### *4.2.2.1 - Modelo aprimorado do pêndulo versus resultados numéricos*

O modelo aprimorado do pêndulo foi aplicado para razão das massas  $10^{-3}$  e da ordem de  $10^{-5}$ .

Os resultados analíticos via modelo aprimorado do pêndulo confirma-





ram a dependência já esperada com a razão das massas. Porém, esses resultados somente satisfazem aos obtidos via superfície de seção de Poincaré quando consideram-se ressonâncias de ordens maiores que as de primeira ordem para valores de excentricidade pequenos ( $\leq 0,05$ ). Um outro fator que foi observado é que as amplitudes de libração aumentam quando comparada às das ressonâncias de mesma ordem,  $p : p + 1$ , mostrando-se contrárias as obtidas numericamente. É possível que este fato ocorra devido a dependência deste modelo analítico em termos da excentricidade e do coeficiente (função dos coeficientes de Laplace). Portanto, ao se considerar ressonâncias de mesma ordem a dependência com a excentricidade torna-se a mesma visto que a excentricidade tem sua dependência com a ordem da ressonância do tipo  $e^{j3}$ ; agora, em se tratando do coeficiente que apresenta-se multiplicando cada ressonância, este muda seu valor de maneira crescente de acordo com o valor da ressonância considerada, veja exemplo deste comportamento na tabela 3.1.

#### 4.3 - Complexidade e evolução do espaço de fase

Para dar prosseguimento a este capítulo apresentam-se alguns detalhes que mostram a complexidade da estrutura do espaço de fase e a evolução para algumas ressonâncias e suas regiões de libração para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  e que podem ser vistos na figura 4.28. Nesta tem-se uma superfície de seção de Poincaré para constante de Jacobi 2,600, aonde estão identificadas as ilhas de libração das ressonâncias 6:7, 5:6, 4:5 e 3:4.

Nas ressonâncias 6:7, 5:6 e 4:5 tem-se que as amplitudes de libração, dadas pela largura da maior ilha para  $\dot{x} = 0$ , são aproximadamente iguais. Porém, em relação ao tamanho do contorno das ilhas é possível observar que as ilhas 6:7 e 5:6 são maiores que a ilha da ressonância 4:5.

Para o valor aproximado de  $x = 1,9$  é possível observar que a ressonância 3:4 não aparece. Um fator que contribuiu para tal situação é a localização de uma ressonância par de segunda ordem, 5:7, muito próxima à localização da



ressonância 3:4 e desta maneira tornando-a bem caótica sem se fazer possível uma região regular visível onde ocorreria a libração.

Nota-se também que o contorno da ressonância 4:5 é bem menor que o da ressonância 5:6. O que pode ter contribuído para este fato é a existência de uma ressonância de quinta ordem 22:27 sendo, praticamente, do tamanho da ressonância de primeira ordem 4:5 e que pode ter atrapalhado sua regularidade. É possível observar que na faixa dos valores de  $x$  entre 1,88 e 1,96 não existe nenhuma ressonância ímpar, isto é, destacando-se apenas uma ressonância par de segunda ordem, 6:8, e o restante da região sendo totalmente caótica.

Esta situação caótica se repete nos intervalos de  $x$  entre 1,77 e 1,79, entre as ressonâncias 6:7 e 5:6, e entre 1,80 e 1,810, que se localiza entre as ressonâncias 5:6 e 22:27, bem como entre as ressonâncias 22:27 e 4:5.

Na superfície de seção de Poincaré para constante de Jacobi 2,700 já é possível observar a existência da ressonância 3:4 que evolui de acordo com o aumento da constante de Jacobi. E esta ressonância só vem a desaparecer para o valor de constante de Jacobi de aproximadamente 3,030. Sua amplitude de libração para  $\varpi=0$  fica maior que as ressonâncias 6:7, 5:6 e 4:5 para o valor de constante de Jacobi 2,900.

A ressonância de quinta ordem, 22:27, logo desaparece. No valor de constante de Jacobi 2,900 esta ressonância não existe mais, aparecendo uma outra de terceira ordem, 13:16, mas que também logo desaparece não apresentando uma amplitude de libração significativa.

Um fenômeno que merece uma atenção especial foi o que aconteceu para o valor de constante de Jacobi 2,900, pois a ressonância 4:5 aumenta em sua largura ficando maior que a ressonância 5:6, o que até então era uma situação exatamente inversa. E a ressonância 6:7 não aparece, só tornando a reaparecer no valor de constante de Jacobi 2,940 e caminha com uma amplitude de libração menor que as demais de primeira ordem só vindo a desaparecer definitivamente com o valor de constante de Jacobi de aproximadamente 3,007.





Um outro ponto curioso para a constante de Jacobi 2,900 é o aparecimento de outras duas ressonâncias de terceira ordem, 11:14 e 13:16, mas desaparecendo logo em seguida para constante de Jacobi 3,000.

Na figura 4.29 tem-se uma superfície de seção de Poincaré para constante de Jacobi 2,600 onde as ressonâncias 2:3 e 1:2, ambas de primeira ordem, são indicadas, de acordo com a sua localização.

Observando esta figura é possível notar que a ressonância 1:2 tem sua máxima amplitude de libração, largura da ilha, menor que a da ressonância 2:3. Esta situação se iguala com o valor de constante de Jacobi de 3,005. Mas, o contorno da ressonância 1:2 é maior que o da ressonância 2:3.

Ainda na figura 4.29, tem-se que a ressonância 1:2 em sua região de máxima libração tende a caminhar para um único ponto.

Uma região que é totalmente caótica está no intervalo dos valores de  $x$  entre 2,46 e 2,56, região esta que está bem próxima da ressonância 1:2 podendo ser esta a razão para tal situação, pois a ressonância 1:2 pode ter perturbado o movimento de outra qualquer ressonância que pudesse ser encontrada nesta região, pois nesta região somente ocorrem ressonâncias de baixa ordem.

Na figura 4.29, na região que vai desde a ressonância 2:3 até a ressonância 1:2 tem-se a existência de várias outras ressonâncias tanto ímpares quanto pares. As que foram acompanhadas seguindo sua amplitude de libração foram as de terceira ordem 4:7 e 5:8 e de quinta e sétima ordem, 6:11 e 8:15. A ressonância 4:7 tem sua amplitude de libração menor que a ressonância 5:8 e permanece assim até que a constante de Jacobi seja 3,096 quando fica totalmente regular desaparecendo na região de circulação. Para a ressonância 5:8, este desaparecimento acontece para o valor de constante de Jacobi 3,070, mas após o desaparecimento da ressonância 4:7 é possível notar um pequeno aumento na região da amplitude de libração.



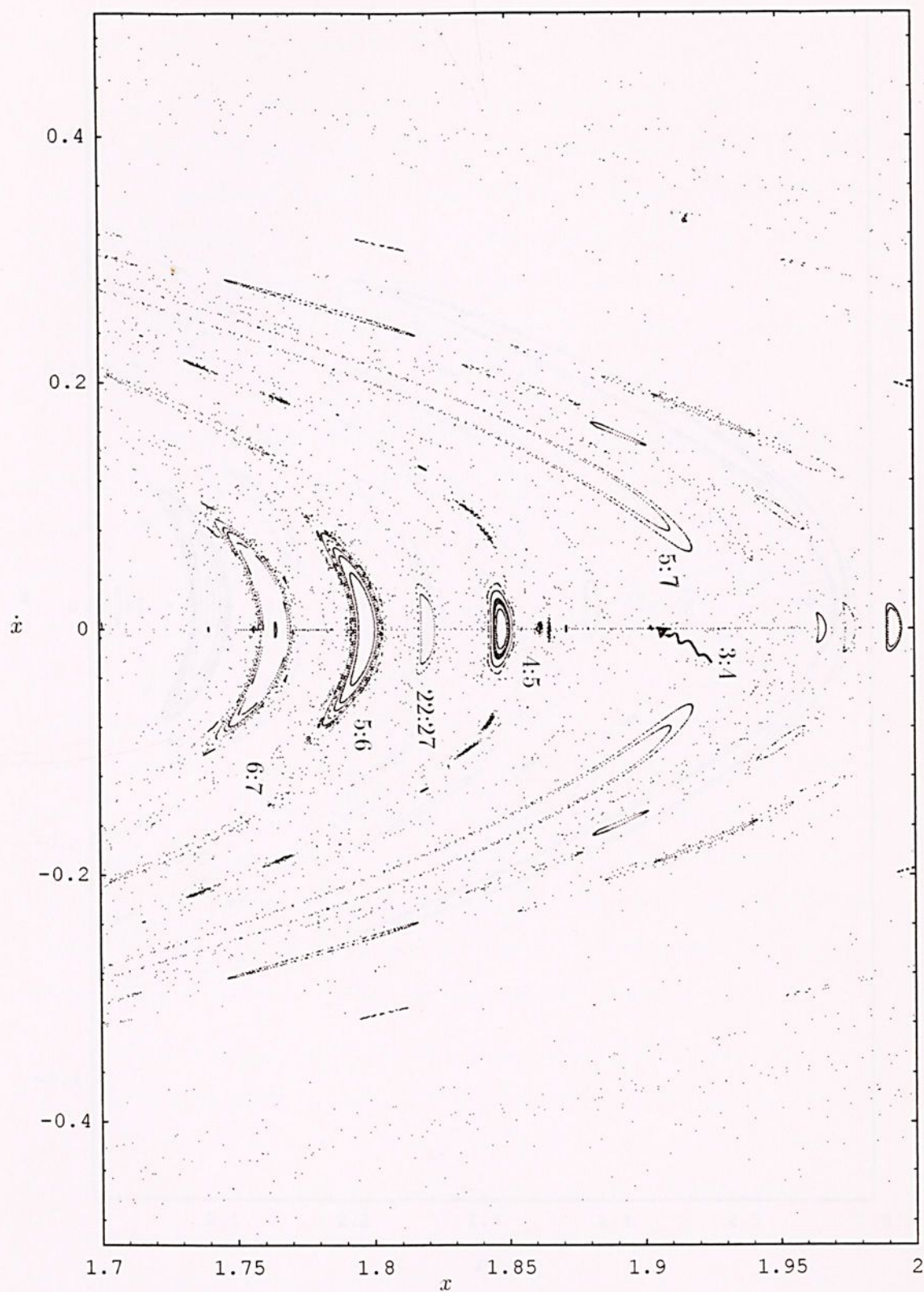


Figura 4.28 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 2,600 e razão de massa da ordem de  $10^{-5}$ .



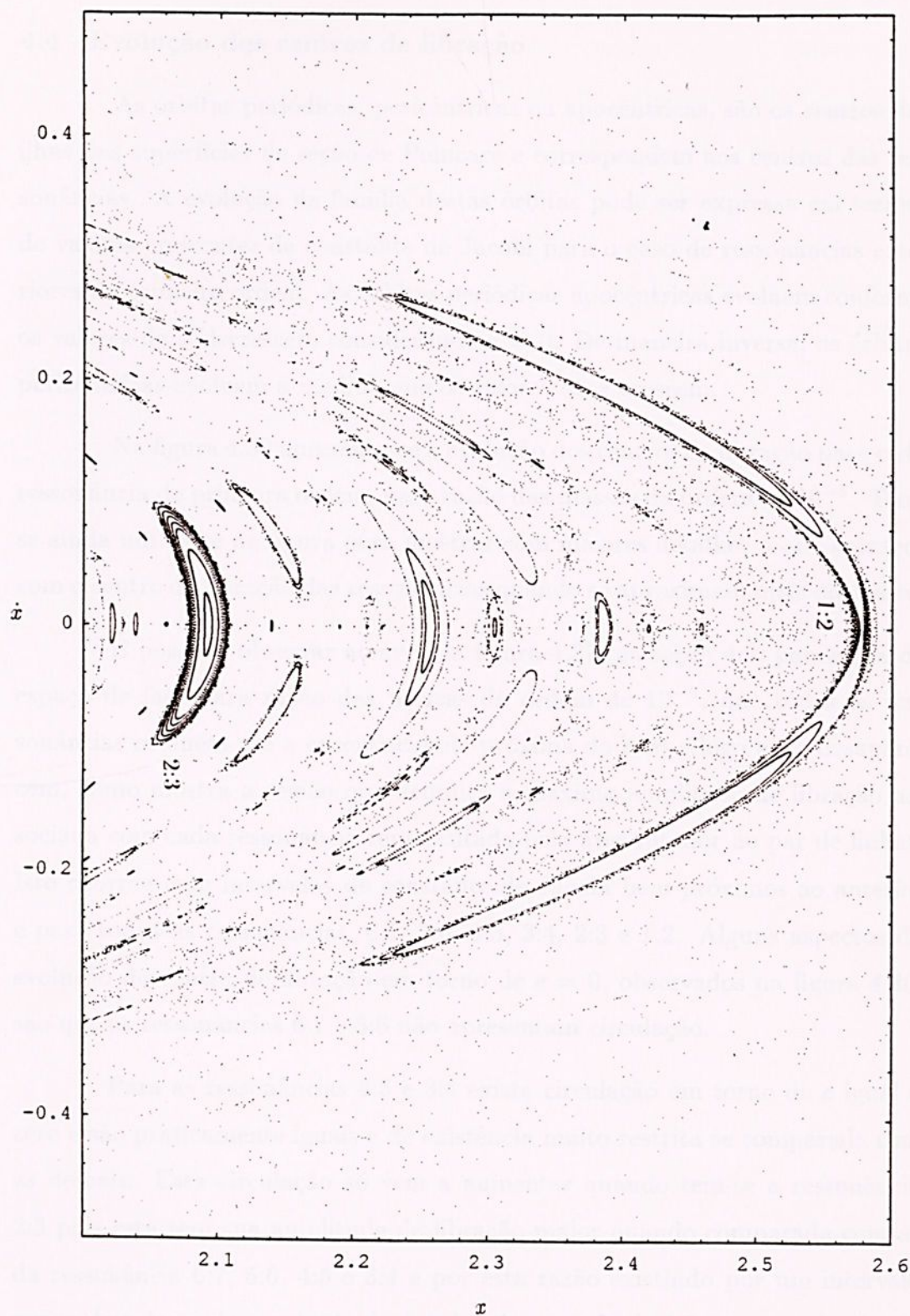


Figura 4.29 - Superfície de seção de Poincaré para o valor da constante de Jacobi 2,600 e razão de massa da ordem de  $10^{-5}$ .

#### 4.4 - Evolução dos centros de libração

As órbitas periódicas, pericêntricas ou apocêntricas, são os centros das ilhas das superfícies de seção de Poincaré e correspondem aos centros das ressonâncias. A evolução da família destas órbitas pode ser expressa em termos de valores crescentes de constante de Jacobi para o caso de ressonâncias exteriores de primeira ordem. As órbitas periódicas apocêntricas evoluem conforme os valores de  $x$  decrescem considerando  $e = 0$ . De maneira inversa, as órbitas pericêntricas evoluem a medida que os valores de  $x$  crescem.

Na figura 4.30 apresenta-se a evolução dos centros de libração para cada ressonância de primeira ordem, para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ . Tem-se ainda um corte na figura para mostrar com maiores detalhes o que acontece com o centro de libração das ressonâncias quando se aproximam mais do centro.

É possível observar através da figura 4.27, na seção 4.2, panorama do espaço de fase para razão das massas da ordem de  $10^{-5}$ , que todas as ressonâncias evoluem até a excentricidade próxima do zero e logo após desaparecem, como mostra a região que delimita a máxima amplitude de libração associada com cada ressonância representada pela área interior ao par de linhas. Isto ocorreu com intervalos de constante de Jacobi bem próximos ao anterior e para todas as ressonâncias, 6:7, 5:6, 4:5, 3:4, 2:3 e 1:2. Alguns aspectos da evolução do centro de libração em torno de  $e = 0$ , observados na figura 4.30, são que as ressonâncias 6:7 e 5:6 não apresentam circulação.

Para as ressonâncias 4:5 e 3:4 existe circulação em torno de  $e$  igual a zero e são praticamente iguais e de existência muito restrita se comparada com as demais. Esta circulação só vem a aumentar quando tem-se a ressonância 2:3 pois esta tem sua amplitude de libração maior quando comparada com as da ressonância 6:7, 5:6, 4:5 e 3:4 e por esta razão existindo por um intervalo maior de valores de constante de Jacobi. A ressonância 1:2 tem sua circulação em torno de  $e = 0$  bem maior que a 2:3 e de mesmo modo sua existência num intervalo de constante de Jacobi bem maior do que as demais.



Ao considerar-se a razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  tem-se que a evolução dos centros de libração apresenta-se em ressonâncias que ao considerar-se a razão das massas  $10^{-3}$  não existiam (Winter & Murray, 1997b). Um exemplo, é a ressonância 4:5 que apresenta sua evolução em torno de  $e = 0$  bem próxima à ressonância 3:4. Observe que o centro da ressonância apocêntrica 2:3 evolui naturalmente com o aumento do valor da constante de Jacobi para a ressonância pericêntrica 1:2. De uma mesma maneira as ressonâncias apocêntricas 3:4 e 4:5 evoluem para as ressonâncias pericêntricas 2:3 e 3:4, respectivamente. A ressonância apocêntrica 5:6 apresenta uma tendência a evoluir para a ressonância pericêntrica 4:5. Tais fatos vem confirmar o que já havia sido previsto em Winter & Murray (1997b) para razão das massas  $10^{-3}$  (veja a figura 4.31).



Figura 4.31 - (a) Evolução dos centros de libração para razões das massas da ordem de  $10^{-5}$  até  $10^{-3}$ . (b) Apresentação da evolução da ressonância 4:5. Algumas ressonâncias não são identificadas na figura. Observe que o centro da libração para a ressonância 5:6 não existe para o valor de excentricidade próximo de zero. A ressonância 1:2 apresenta a evolução do centro de libração para  $e \approx 0$  bem próxima ao ser comparada com as demais. Observe que o centro da ressonância apocêntrica 2:3, 3:4 e 4:5 evoluem naturalmente com o aumento do valor da constante de Jacobi para as ressonâncias pericêntricas 1:2, 2:3 e 3:4, respectivamente. De uma mesma maneira, a ressonância apocêntrica 5:6 tem uma tendência a evoluir para a ressonância pericêntrica 4:5.

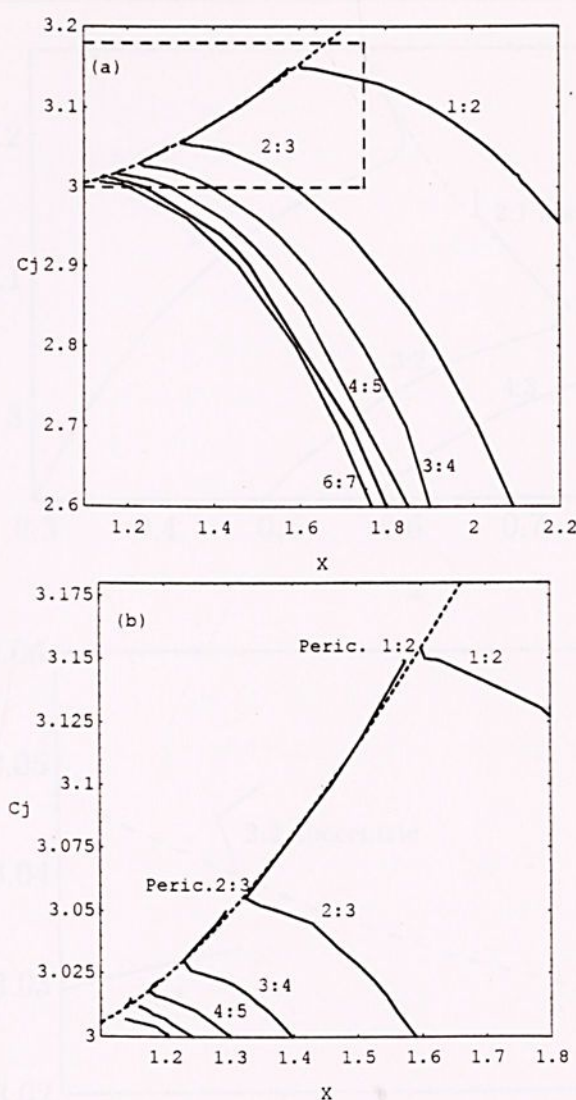


Figura 4.30 - (a) Evolução dos centros de libração para ressonâncias de primeira ordem e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  considerando uma perturbação interna. (b) Apresentação da evolução em uma escala maior. Algumas ressonâncias estão identificadas na figura. Note que o centro de libração para a ressonâncias 6:7 não existe para o valor de excentricidade próximo de zero. A ressonância 1:2 apresenta a evolução do centro de libração para  $e \approx 0$  bem extensa ao ser comparada com as demais. Observe que o centro das ressonâncias apocêntricas 2:3, 3:4 e 4:5 evoluem naturalmente com o aumento do valor da constante de Jacobi para as ressonâncias pericêntricas 1:2, 2:3 e 3:4, respectivamente. De uma mesma maneira, a ressonância apocêntrica 5:6 tem uma tendência de evoluir para a ressonância pericêntrica 4:5.



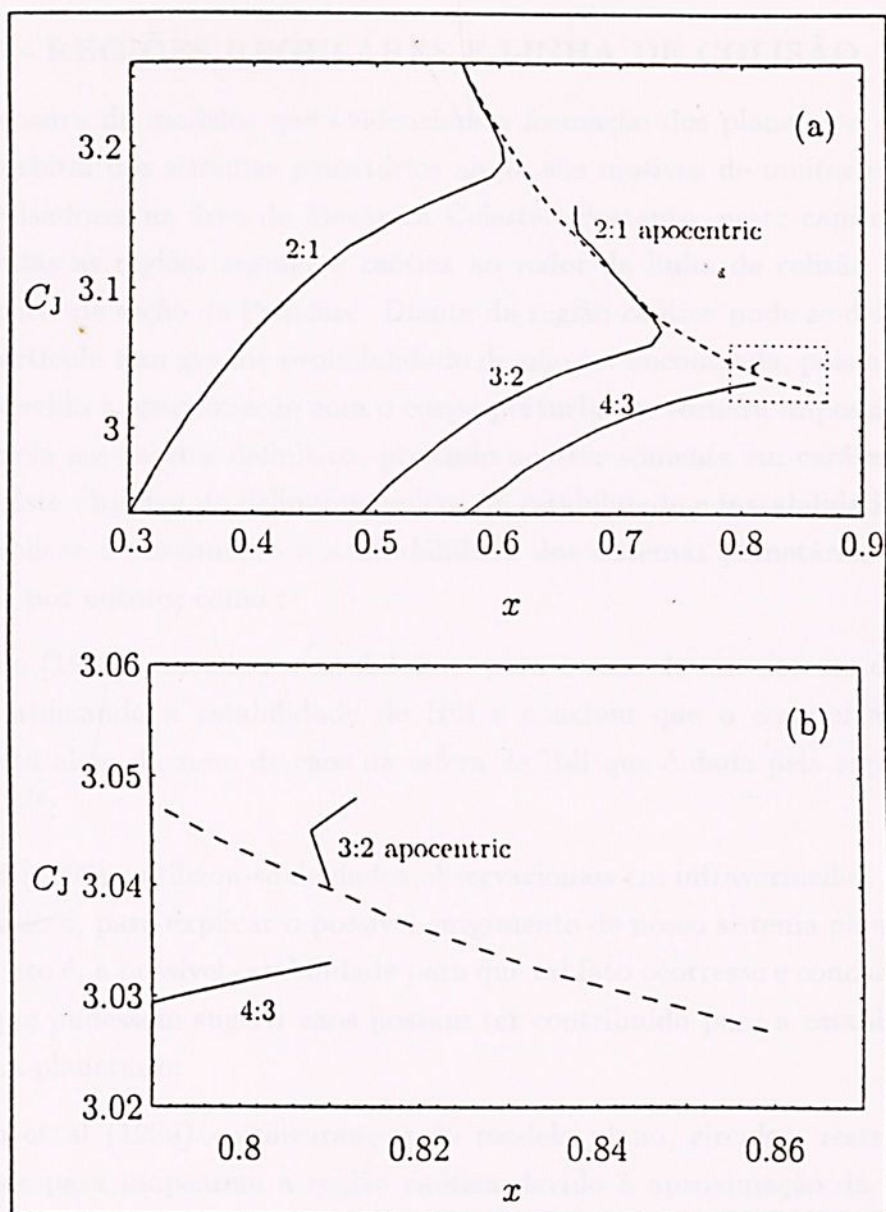


Figura 4.31 - (a) Evolução dos centros de libração para ressonâncias de primeira ordem e razão das massas da ordem de  $10^{-3}$  considerando uma perturbação externa. (b) Apresentação da evolução em uma escala maior. Algumas ressonâncias estão identificadas na figura. A ressonância 2:1 apresenta a evolução do centro de libração para  $e \approx 0$  bem extensa ao ser comparada com as demais. Observe que o centro da ressonância pericêntrica 3:2 evolui naturalmente com o aumento do valor da constante de Jacobi para a ressonância apocêntrica 1:2 e a ressonância pericêntrica 4:3 tende a evoluir para a ressonância apocêntrica 2:3. Figura reproduzida de Winter & Murray (1997a).

## 5 - REGIÕES REGULARES E LINHA DE COLISÃO

A procura de modelos que evidenciem a formação dos planetas e a estabilidade orbital dos sistemas planetários ainda são motivos de muitos estudos por pesquisadores na área de Mecânica Celeste. Portanto, neste capítulo são apresentadas as regiões regular e caótica ao redor da linha de colisão obtida via superfície de seção de Poincaré. Diante da região caótica pode-se delimitar onde a partícula tem grande probabilidade de não ser encontrada, pois a instabilidade devido a aproximação com o corpo perturbador tornará impossível tal permanência em caráter definitivo, podendo ocorrer somente em caráter temporário. Este objetivo de delimitar regiões de estabilidade e instabilidade para tentar explicar o surgimento e a estabilidade dos sistemas planetários foram estudadas por autores como :

- Gladman (1993) - estudou a estabilidade para o caso de um sistema de dois planetas utilizando a estabilidade de Hill e concluiu que o comportamento caótico está além da zona de caos da esfera de Hill que é dada pela expressão  $2,4 \times \mu_2^{1/3}$ ;
- Lissauer (1998) - utilizou-se de dados observacionais em infravermelho, modelos astrofísicos, para explicar o possível surgimento de nosso sistema planetário e outros, isto é, a possível estabilidade para que tal fato ocorresse e concluiu que objetos que pudessem sugerir caos possam ter contribuído para a estabilidade do sistema planetário;
- Duncan et al (1989) - utilizaram-se do modelo plano, circular, restrito de três corpos para mapearem a região caótica devido à aproximação da órbita da partícula teste à órbita do planeta e sugeriu que poderiam existir faixas de estabilidade além de Saturno e que Plutão poderia ter começado com uma órbita quase circular evoluindo para as condições atuais devido ao movimento caótico causado pela perturbações gravitacionais de Urano e Netuno.

O modelo analítico existente na literatura que fez-se uso neste capítulo em caráter de comparação aos resultados obtidos foi o critério de sobreposição de ressonâncias (Wisdom, 1980). A seção a seguir trata dos resultados numéricos obtidos via superfície de seção de Poincaré.





## 5.1 - Resultados numéricos

Nesta seção, são apresentadas as regiões onde são definidas como sendo praticamente regulares. Estas regiões consideradas estáveis foram obtidas ao se desprezar o possível caos que somente ocorre nas separatrizes das ressonâncias via superfície de seção de Poincaré. Para melhor exemplificar, veja na figura 4.18 onde para o valor de constante de Jacobi de 3,050 e razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  tem-se que o limite desta região ocorre para o valor de  $x$  de aproximadamente 1,50, isto é, abaixo deste valor o caos existente pode ser desprezível ocorrendo somente nas separatrizes. Convertendo este valor de  $x$  em termos de  $a$  e  $e$  obtem-se um ponto no espaço de fase. Repetindo este procedimento para outros valores de constante de Jacobi é possível ajustar uma curva a esses pontos, e, desta forma, obter uma curva empírica desta região considerada estável. Portanto, foi possível delimitar uma região do espaço de fase considerada estável onde praticamente inexistem regiões caóticas. Assim, de maneira análoga, a região acima da curva, sem preenchimento, é praticamente caótica com excessão das regiões em libração ressonante. Como exemplo destas regiões de libração ressonante, veja no capítulo 4, seção 4.11, figura 4.27 .

Para a razão das massas da ordem de  $10^{-5}$  tem-se que esta área considerada regular começa a existir com o valor aproximado de constante de Jacobi 3,020, mas ainda bem pequena evoluindo de acordo com o valor da constante de Jacobi tendo seu ponto máximo para o valor de constante de Jacobi 3,300. Pode-se dizer que para valores da constante de Jacobi superiores à 3,300 que o espaço de fase é praticamente regular sendo as regiões caóticas, nas separatrizes, tão pequenas que podem ser de certo modo desprezadas. Para o valor de constante de Jacobi de 3,300 tem-se que seu contorno está totalmente contida dentro desta região regular. Este resultado pode ser comparado quando visto as superfícies de seção de Poincaré, por exemplo, figura 4.21 com o valor de constante de Jacobi 3,100, onde as regiões caóticas apresentam-se muito menores em comparação com a figura 4.18 com o valor de constante de Jacobi 3,050. Isto sugere que para valores de constante de Jacobi maiores o espaço de fase deve ser praticamente regular considerando esta mesma faixa abordada.

Utilizando-se este procedimento foi possível obter também uma área supostamente estável a partir de resultados numéricos para outras razões das massas ( figura 5.1 ). Nesta figura, tem-se que a área considerada estável ao redor da linha de colisão é a área abaixo de cada linha tracejada, representada





por cores distintas para diferenciar as razões das massas envolvidas. A região em branco acima de cada curva, considerando isoladamente as diferentes razões das massas, são praticamente caóticas, só implicando em uma estabilidade para órbitas em libração ressonante.

A seção a seguir busca uma comparação entre os resultados obtidos numericamente com os obtidos aplicando um modelo analítico já existente na literatura.

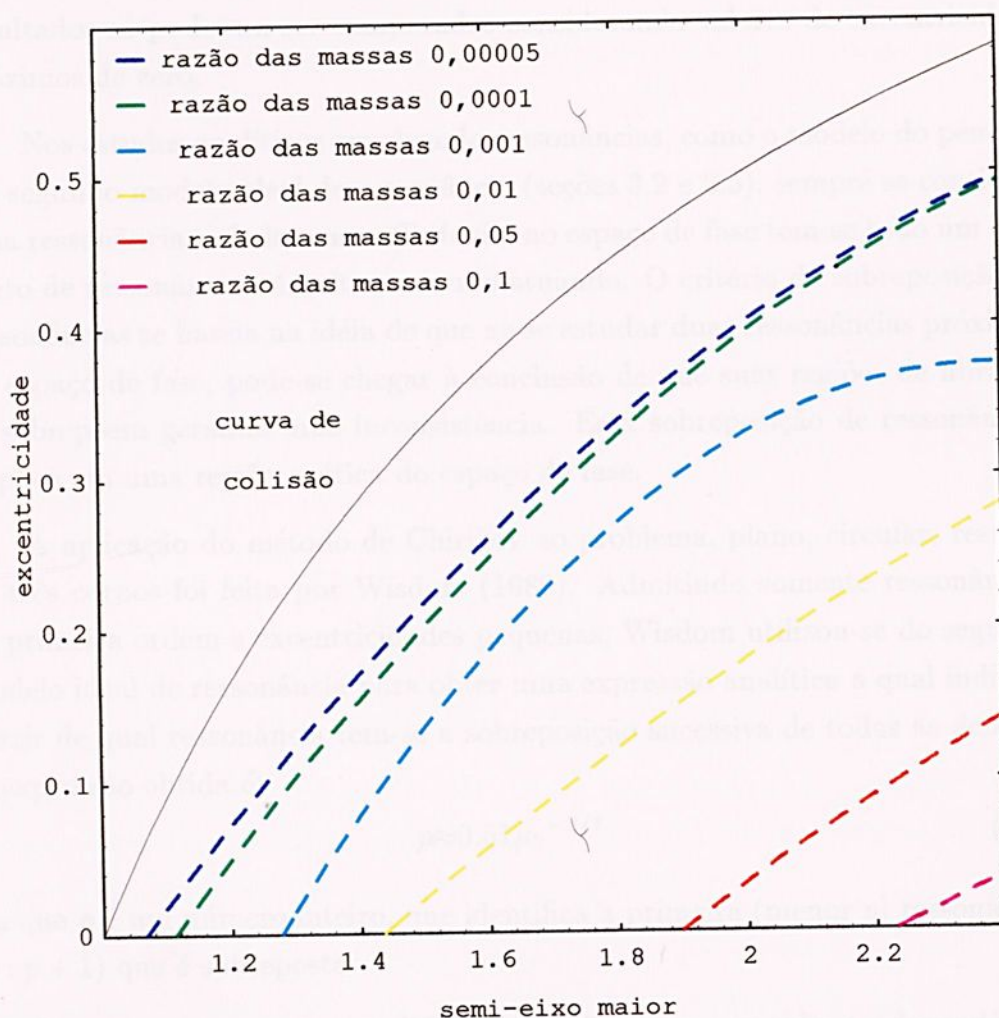


Figura 5.1 - Visão global das regiões consideradas estáveis, via superfície de seção de Poincaré, desprezando o caos que ocorre somente nas separatrizes, para diferentes razões das massas. A região considerada estável é a área abaixo de cada curva tracejada. Note que a área acima de cada curva deve ser caótica com excessão das regiões associadas com órbitas em libração ressonante. Também é apresentada na figura a curva de colisão.



## 5.2 - Critério de sobreposição de ressonâncias

Após a obtenção das regiões consideradas estáveis e instáveis do espaço de fase ao redor da curva de colisão via método numérico onde estas regiões apresentam uma dependência nas razões das massas envolvidas, foi aplicado um método analítico já existente na literatura com o objetivo de comparar os resultados. O método encontrado foi desenvolvido por Chirikov (1979) e aplicado por Wisdom (1980) para o problema restrito de três corpos. Nesse método os resultados só puderam ser comparados considerando valores de excentricidade próximos de zero.

Nos estudos analíticos envolvendo ressonâncias, como o modelo do pêndulo e o segundo modelo ideal de ressonância (seções 3.2 e 3.3), sempre se considera uma ressonância isoladamente. Todavia, no espaço de fase tem-se todo um conjunto de ressonâncias simultaneamente atuando. O critério de sobreposição de ressonâncias se baseia na idéia de que ao se estudar duas ressonâncias próximas no espaço de fase, pode-se chegar à conclusão de que suas regiões de libração se sobrepõem gerando uma inconsistência. Esta sobreposição de ressonâncias implica em uma região caótica do espaço de fase.

A aplicação do método de Chirikov ao problema, plano, circular, restrito de três corpos foi feita por Wisdom (1980). Admitindo somente ressonâncias de primeira ordem e excentricidades pequenas, Wisdom utilizou-se do segundo modelo ideal de ressonância para obter uma expressão analítica a qual indica a partir de qual ressonância tem-se a sobreposição sucessiva de todas as demais. A expressão obtida é:

$$p \approx 0.51 \mu_2^{-2/7} \quad (5.1)$$

em que  $p$  é um número inteiro, que identifica a primeira (menor  $p$ ) ressonância ( $p : p + 1$ ) que é sobreposta.

Note que a expressão que Wisdom (1980) obteve considera a dependência direta com a razão das massas envolvidas, portanto, a localização da primeira ressonância (menor  $p$ ) que é sobreposta para o valor de  $e$  aproximadamente igual a zero irá modificar-se com a razão das massas envolvidas. Por exemplo, para o valor da razão das massas  $10^{-1}$ , a primeira ressonância de primeira ordem que é sobreposta é a 1:2. Desta forma, todas as outras ressonâncias de primeira ordem 2:3, 3:4, 4:5, 5:6, etc., que apresentariam-se neste espaço de fase se sobrepõe uma com a outra, causando o caos global a partir deste limite de

ressonância. Isto ocorre devido ao fato que o espaço existente entre a localização de uma ressonância e outra vai diminuindo e a região de libração associada com cada ressonância intercepta a da sua ressonância vizinha( veja figura 5.2 ).

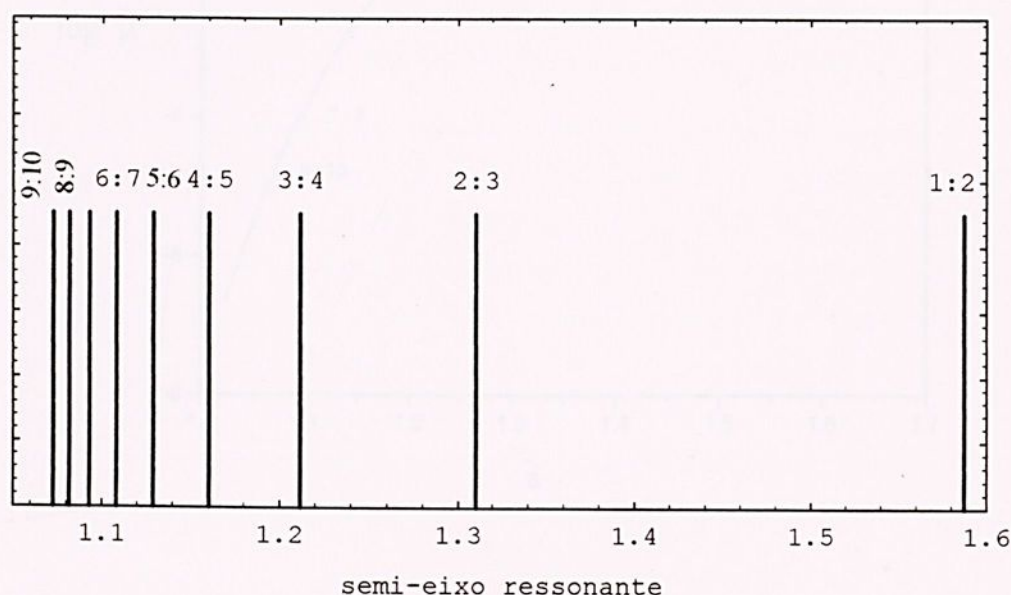


Figura 5.2 - As localizações das ressonâncias de movimento médio exteriores em função do semi-eixo ressonante. Note que o espaço entre as localizações das ressonâncias vai diminuindo, portanto ao se considerar a região de libração existe uma tendência de sobreposição das ressonâncias.

Na figura (5.3) encontra-se a localização do caos global devido a sobreposição de ressonâncias (Wisdom, 1980) utilizando a equação (5.1) para diferentes valores de  $\mu_2$ . Estes resultados serão comparados com os numéricos obtidos anteriormente na figura 5.1 na seção 5.1.



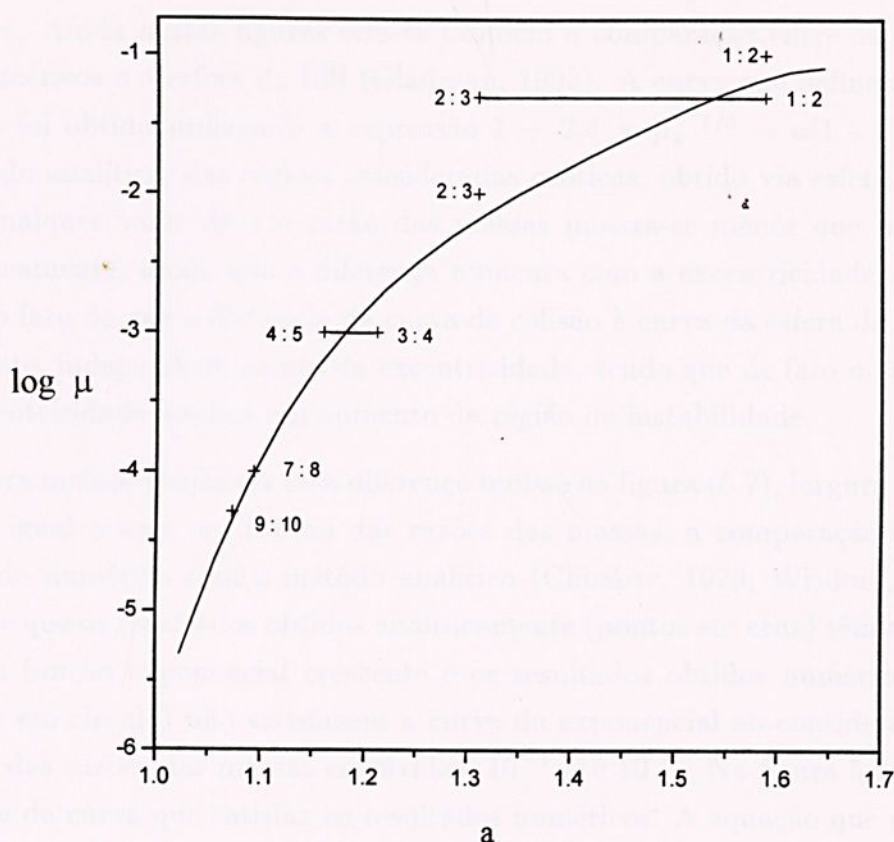


Figura 5.3 - Localização do semi-eixo ressonante em função da razão das massas devido a sobreposição de ressonâncias (Wisdom, 1980) para o valor de excentricidade próximo de zero. Os pontos em cruz representam as localizações das primeiras ressonâncias que foram sobrepostas para cada razão das massas considerada.

Os resultados analíticos e os numéricos para algumas razões das massas estão apresentados nas figuras (5.4), (5.5) e (5.6). Para os resultados numéricos tem-se que a largura caótica é a diferença entre o valor de semi-eixo maior da curva de colisão e da curva de estabilidade obtida via superfície de seção de Poincaré. Os modelos analíticos utilizados nestas figuras para obtenção das regiões regulares, e por consequência, as caóticas foram o modelo de sobreposição de ressonâncias (Wisdom, 1980) e a esfera de Hill (Gladman, 1993). Nestas figuras tem-se a comparação entre as regiões consideradas caóticas via modelo analítico de sobreposição de ressonâncias e numérico. É possível observar que a região considerada caótica via modelo analítico de sobreposição de

ressonâncias é bem menor que a obtida numericamente para razão das massas maiores. Ainda nestas figuras tem-se também a comparação entre os resultados numéricos e a esfera de Hill (Gladman, 1993). A curva que define a esfera de Hill foi obtida utilizando a expressão  $1 + 2,4 \times \mu_2^{1/3} = a(1 - e)$ . Este resultado analítico, das regiões consideradas caóticas, obtido via esfera de Hill para qualquer valor de  $e$  e razão das massas mostra-se menor que o obtido numericamente, sendo que a diferença aumenta com a excentricidade. Isto se deve ao fato de que a distância da curva de colisão à curva da esfera de Hill ser constante, independentemente da excentricidade, sendo que de fato o aumento da excentricidade implica em aumento da região de instabilidade.

Para melhor visualizar esta diferença tem-se na figura (5.7), largura caótica para  $e$  igual a zero em função das razões das massas, a comparação entre o resultado numérico com o método analítico (Chirikov, 1979; Wisdom, 1980). Observe que os resultados obtidos analiticamente (pontos em cruz) têm a forma de uma função exponencial crescente e os resultados obtidos numericamente (pontos em círculo) não satisfazem a curva da exponencial ao considerar toda a faixa das razões das massas envolvidas,  $10^{-1}$  até  $10^{-5}$ . Na figura 5.8 tem-se o ajuste da curva que satisfaz os resultados numéricos. A equação que satisfaz tal curva é dada por  $0,07155x^3 + 0,71228x^2 + 2,42952x + 3,02218$ .

Ao comparar-se as regiões caóticas utilizando o método analítico (Wisdom, 1980) e o numérico percebe-se que existe um limite onde o modelo analítico de sobreposição de ressonâncias explica por comparação os resultados numéricos obtidos, sendo este para razões das massas  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$  (veja figuras 5.4 e 5.5). Tais resultados se aproximam pelo fato de que para essas razões das massas as ressonâncias existentes nesta faixa do espaço de fase são as de primeira ordem (não sendo somente estas) e o modelo foi desenvolvido levando em conta somente estas ressonâncias. Para razões de massa maiores (veja figura 5.4),  $1 \times 10^{-2}$ ,  $5 \times 10^{-2}$  e  $1 \times 10^{-1}$ , o modelo analítico e o numérico não concordam. Isto ocorre devido o modelo analítico (Wisdom, 1980) não levar em conta ressonâncias de ordem superior e nesta faixa do espaço de fase para estas condições não apresentam ressonâncias de primeira ordem. Utilizando o método numérico é possível notar que a área caótica aumenta significativamente em comparação com a mesma obtida pelo modelo analítico de sobreposição de ressonâncias de Wisdom.



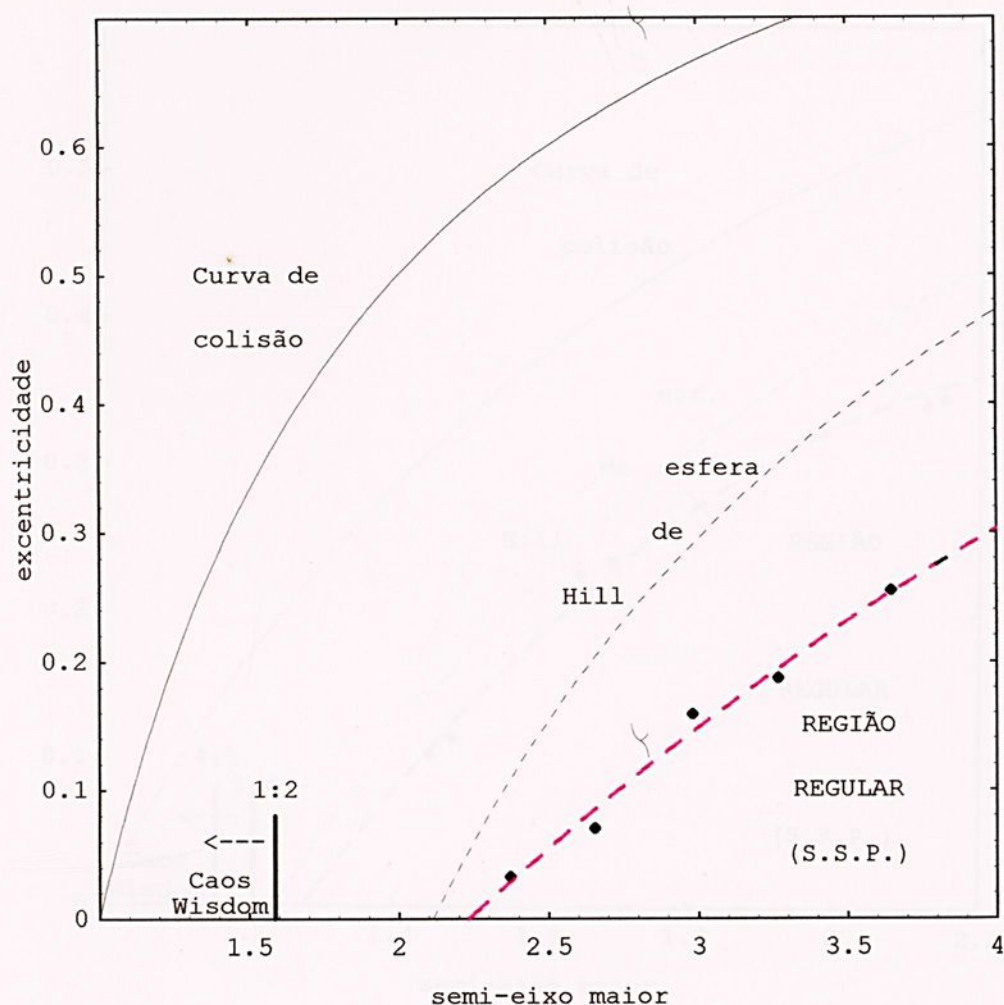


Figura 5.4 - Regiões regulares e caóticas próximas à linha de colisão em função do semi-eixo maior e excentricidade. A região regular obtida via superfície de seção de Poincaré desprezando o caos que ocorre somente nas separatrizes é a área localizada abaixo da linha tracejada rosa. A primeira ressonância que se sobrepõe para  $e = 0$  segundo Wisdom (1980) é a ressonância 1:2, cujo semi-eixo é indicado na figura. A razão das massas considerada foi  $10^{-1}$ . Os pontos em preto representam os valores de  $a$  e  $e$  correspondentes a cada valor obtido pela superfície de seção de Poincaré para diferentes valores de constante de Jacobi. A linha de colisão é indicada pela linha preta e a pontilhada preta representa a curva da esfera de Hill que foi obtida utilizando a relação  $1 + 2,4 \times \mu_2^{1/3} = a(1 - e)$ .

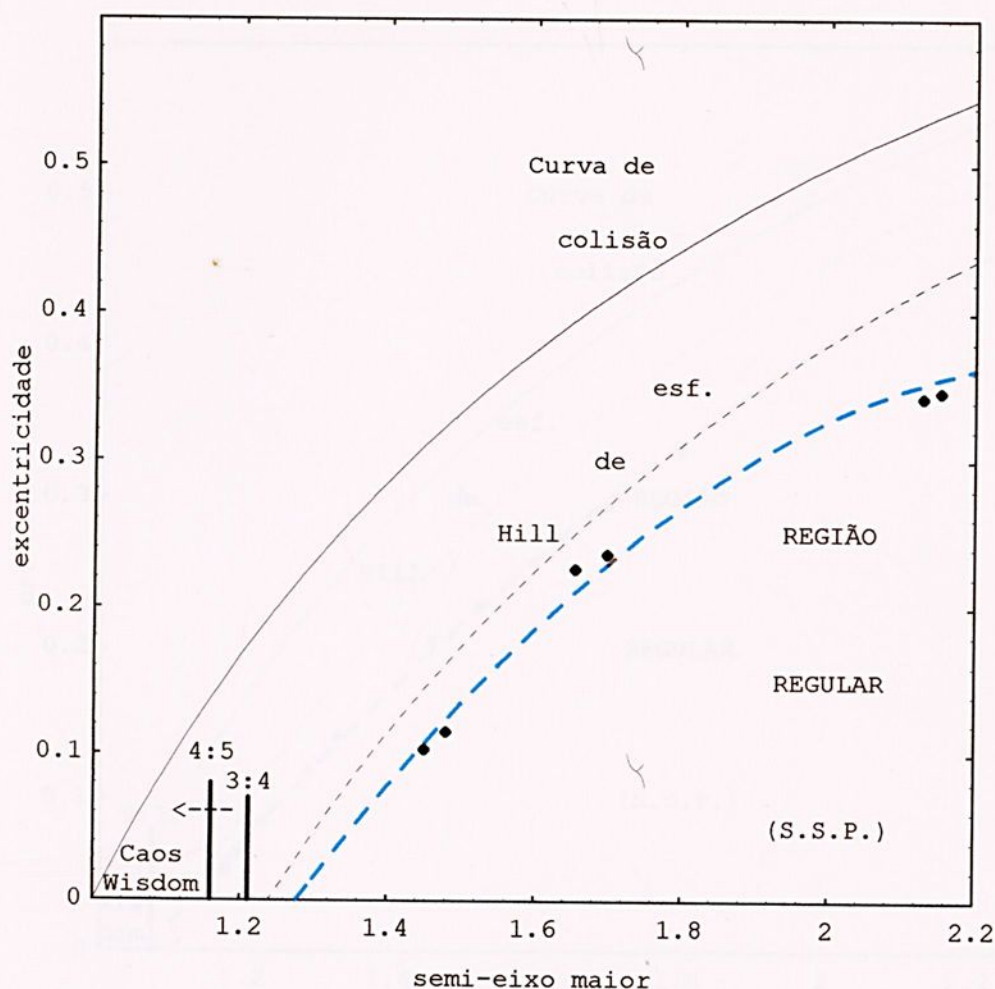


Figura 5.5 - Regiões regulares e caóticas próximas à linha de colisão em função do semi-eixo maior e excentricidade. A região regular obtida via superfície de seção de Poincaré desprezando o caos que ocorre somente nas separatrizes é a área localizada abaixo da linha tracejada azul. A primeira ressonância que se sobrepõe para  $e = 0$  segundo Wisdom (1980) esta entre as ressonâncias 3:4 e 4:5, cujo semi-eixo é indicado na figura. A razão das massas considerada foi  $10^{-3}$ . Os pontos em preto representam os valores de  $a$  e  $e$  correspondentes a cada valor obtido pela superfície de seção de Poincaré para diferentes valores de constante de Jacobi. A linha de colisão é indicada pela linha preta e a pontilhada preta representa a curva da esfera de Hill que foi obtida utilizando a relação  $1 + 2,4 \times \mu_2^{1/3} = a(1 - e)$ .



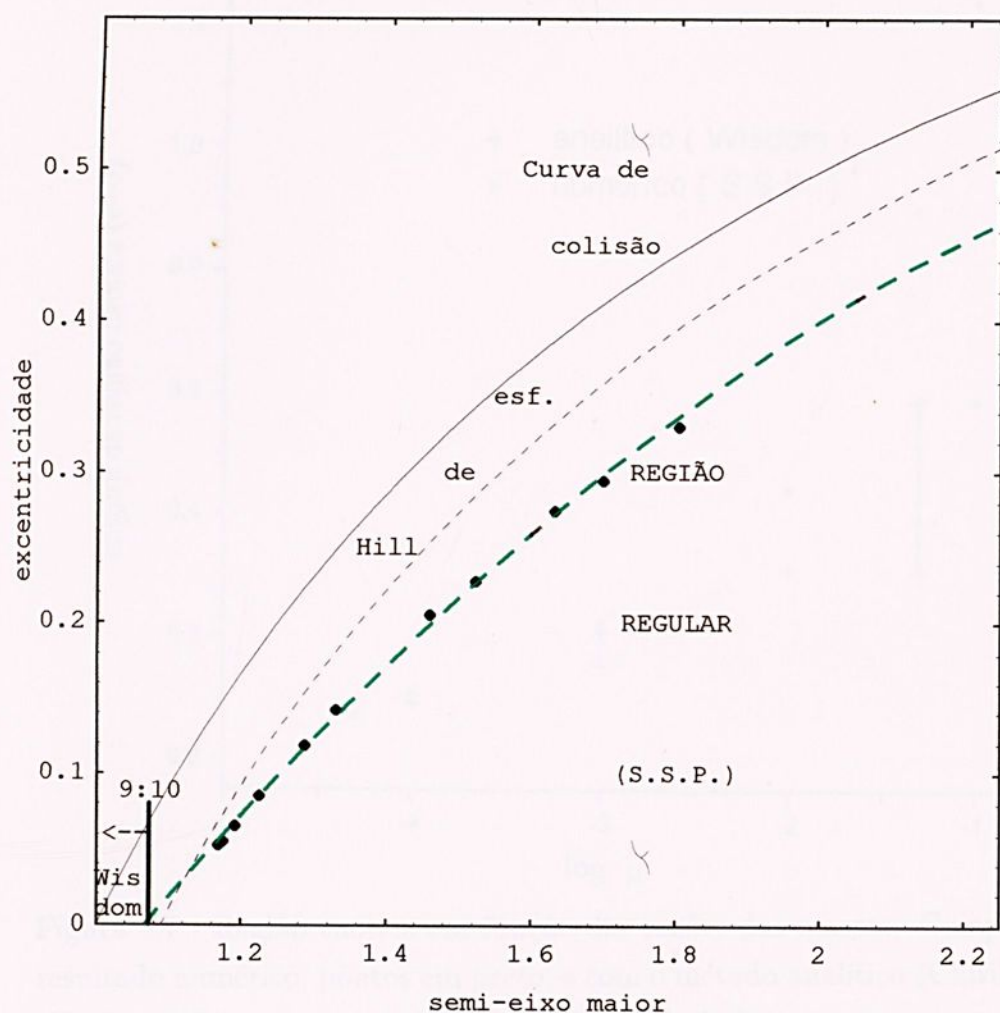


Figura 5.6 - Regiões regulares e caóticas próximas à linha de colisão em função do semi-eixo maior e excentricidade. A região regular obtida via superfície de seção de Poincaré desprezando o caos que ocorre somente nas separatrizes é a área localizada abaixo da linha tracejada verde. A primeira ressonância que se sobrepõe para  $e = 0$  segundo Wisdom (1980) é a ressonância 9:10, cujo semi-eixo é indicado na figura. A razão das massas considerada foi  $5,1 \times 10^{-5}$ . Os pontos em preto representam os valores de  $a$  e  $e$  correspondentes a cada valor obtido pela superfície de seção de Poincaré para diferentes valores de constante de Jacobi. A linha de colisão é indicada pela linha preta e a pontilhada preta representa a curva da esfera de Hill que foi obtida utilizando a relação  $1 + 2,4 \times \mu_2^{1/3} = a(1 - e)$ .

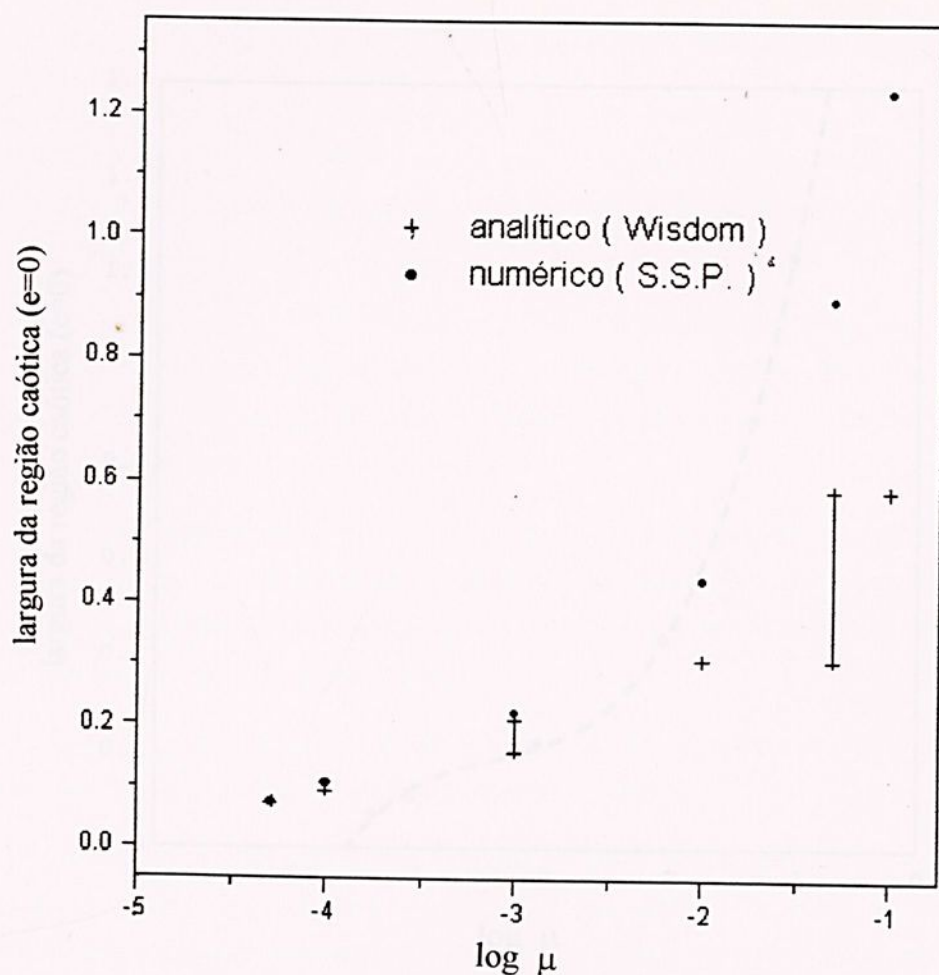


Figura 5.7 - Região caótica em função das razões das massas. Comparação do resultado numérico, pontos em preto, e com o método analítico (Chirikov, 1979; Wisdom, 1980), em cruz, para  $e = 0$ . É possível observar que existe um limite onde o modelo analítico se aproxima dos resultados obtidos numericamente.



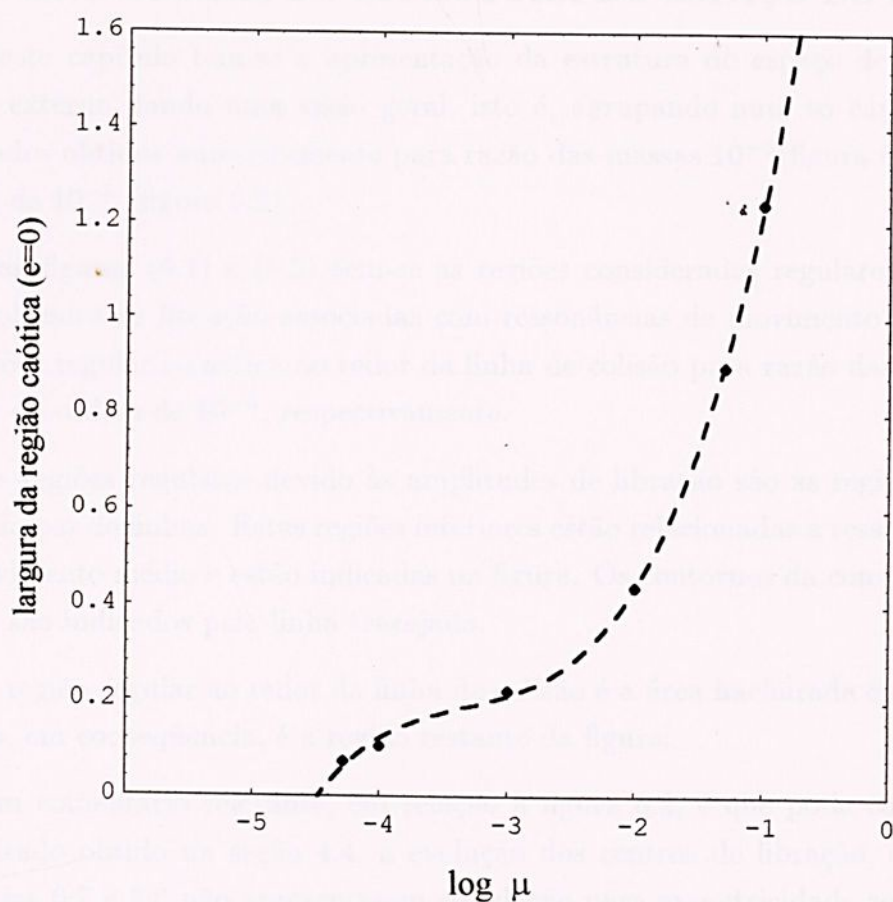


Figura 5.8 - Apresentação da curva de ajuste da região caótica em função das razões das massas utilizando o método numérico, pontos em preto, para  $e = 0$ . A equação que satisfaz tal curva é dada por:  $0,07152x^3 + 0,71228x^2 + 2,42952x + 3,02218$ .

## 6 - VISÃO GLOBAL DA ESTRUTURA DO ESPAÇO DE FASE

Neste capítulo tem-se a apresentação da estrutura do espaço de fase da região externa dando uma visão geral, isto é, agrupando num só capítulo os resultados obtidos numericamente para razão das massas  $10^{-3}$  (figura 6.1) e da ordem de  $10^{-5}$  (figura 6.2).

Nas figuras (6.1) e (6.2) tem-se as regiões consideradas regulares devido às amplitudes de libração associadas com ressonâncias de movimento médio e às regiões regular e caótica ao redor da linha de colisão para razão das massas  $10^{-3}$  e da ordem de  $10^{-5}$ , respectivamente.

As regiões regulares devido às amplitudes de libração são as regiões interiores ao par de linhas. Estas regiões interiores estão relacionadas a ressonâncias de movimento médio e estão indicadas na figura. Os contornos da constante de Jacobi são indicados pela linha tracejada.

A região regular ao redor da linha de colisão é a área hachurada e a região caótica, em consequência, é a região restante da figura.

Um comentário relevante, em relação à figura 6.2, é que pode confirmar o resultado obtido na seção 4.4, a evolução dos centros de libração, das ressonâncias 6:7 e 5:6 não apresentarem circulação para excentricidade zero. Um outro fator apresentado nesta figura é que apenas para as ressonâncias maiores que 6:7 e 5:6 existe uma região onde pode-se adotar como sendo praticamente regular além da região regular de libração. Observe que para os valores de constante de Jacobi menores ou igual a 3,000 as curvas não atingem valores de excentricidade igual a zero.

De maneira análoga, na figura 6.1, tem-se que apenas para as ressonâncias maiores que 3:4 existe uma região onde pode-se adotar como sendo praticamente regular além da região regular de libração. Similarmente, para os valores de constante de Jacobi menores ou igual a 3,020 as curvas não atingem valores de excentricidade igual a zero.

Uma consideração a ser ressaltada ao comparar-se a estrutura dos dois espaços de fase, figuras 6.1 e 6.2, é o fato que a estrutura do espaço de fase para uma razão das massas menor apresentar uma quantidade maior de ressonâncias. Entretanto, estas ressonâncias associadas com as amplitudes de libração mostram-se com largura consideravelmente maiores e em quantidade



menor em se tratando de razões das massas maiores, implicando, desta forma, numa dependência das razões das massas envolvidas no problema. Diante desta consideração é possível que esta variação na largura das amplitudes tenha resultado numa quantidade menor de ressonâncias para razão das massas  $10^{-3}$ , pois como a amplitude de libração aumentou consideravelmente impossibilitou a existência de outras ressonâncias.

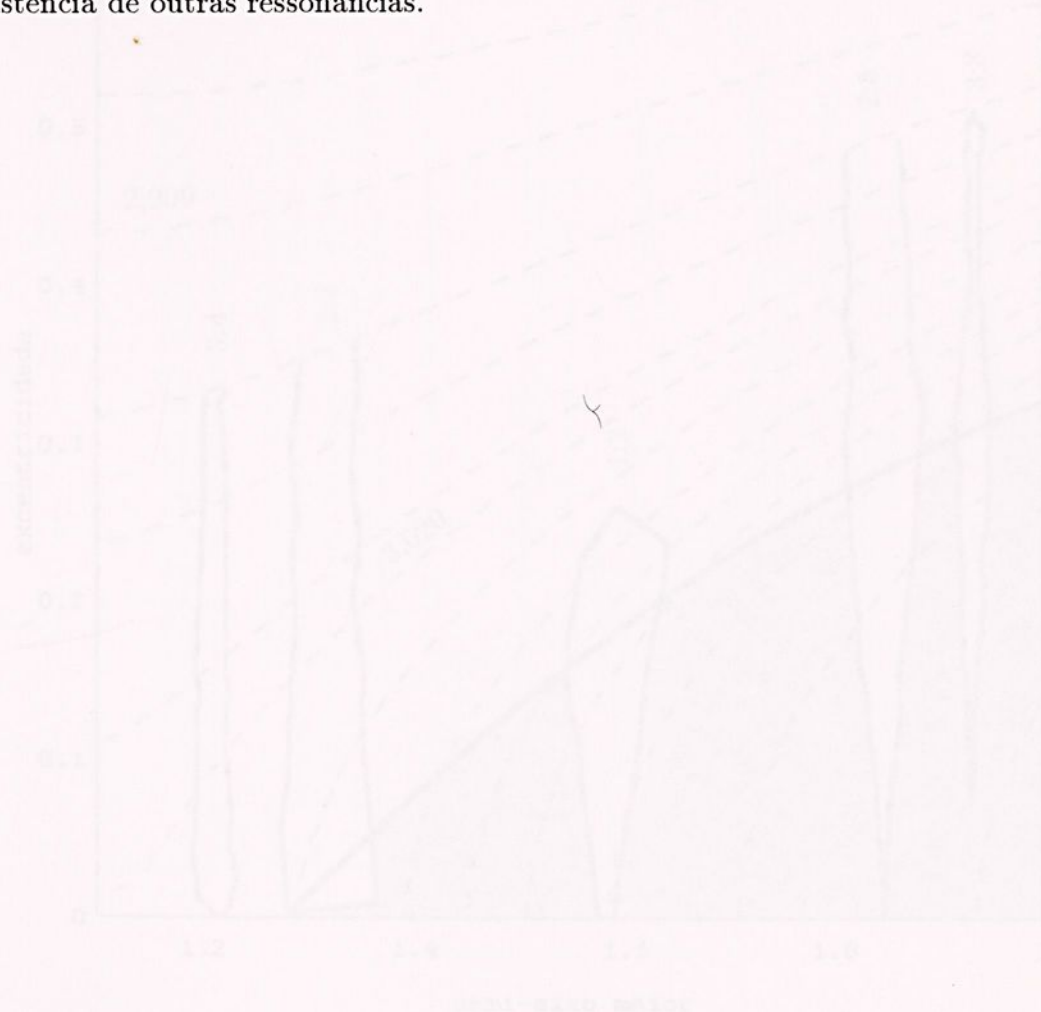


Figura 5.1 - Visão global da estrutura do espaço de fase para razão de massas  $10^{-3}$  obtida numericamente via superfície de seção de Poincaré. A área hachurada representa a área estável. A área entre o par de libração representa a região de libração. As linhas tracejadas representam os contornos de constantes de Jacobi. Para o valor da constante de Jacobi 2.002 pode-se observar que o valor de amplitude necessário para esta curva não poderia ser maior que 0.4.

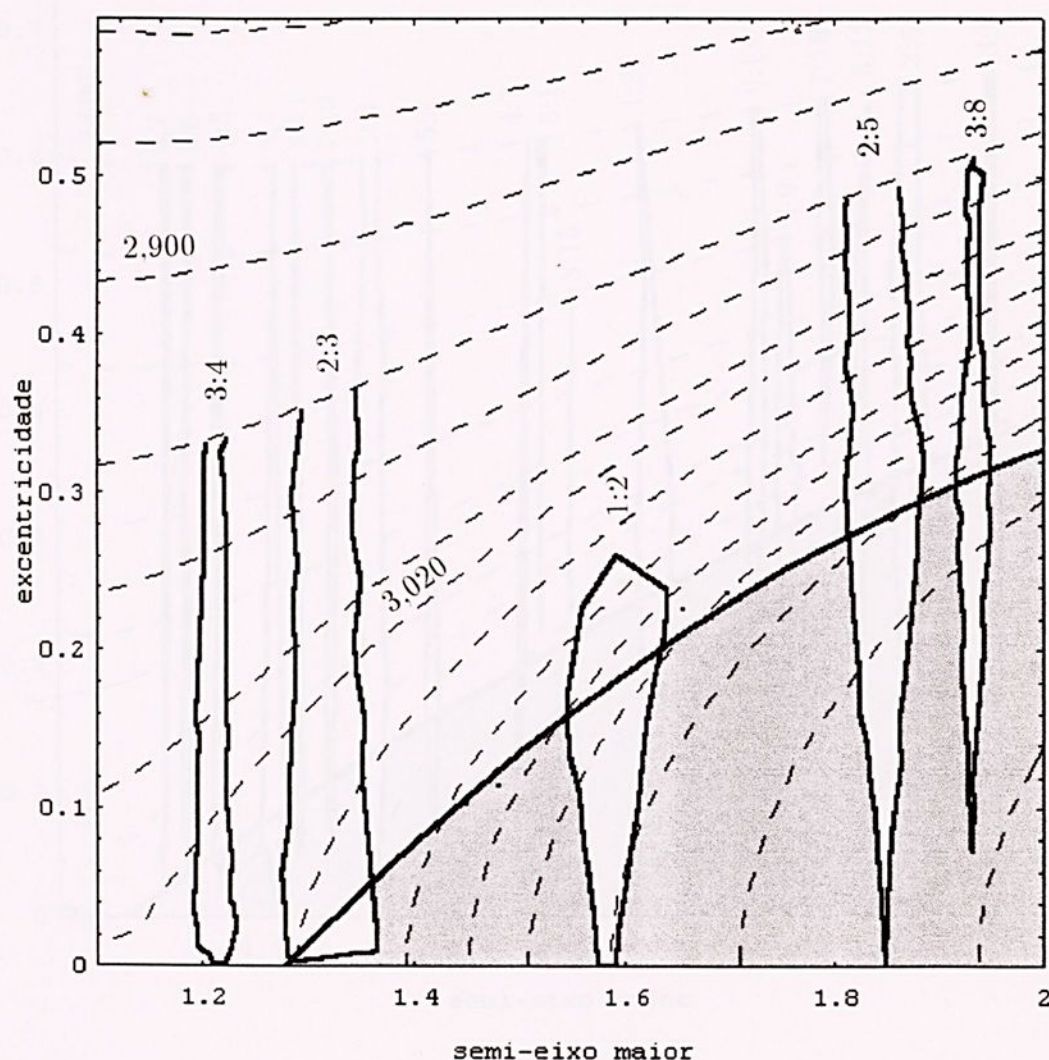


Figura 6.1 - Visão global da estrutura do espaço de fase para razão de massa  $10^{-3}$  obtido numericamente via superfície de seção de Poincaré. A área hachurada representa a área estável. A área entre o par de linhas representa a máxima amplitude de libração associada com cada ressonância. As linhas tracejadas representam os contornos da constante de Jacobi. Para o valor da constante de Jacobi 2,900 pode-se observar que o valor de excentricidade associado a esta curva não poderá ser menor que 0,4.



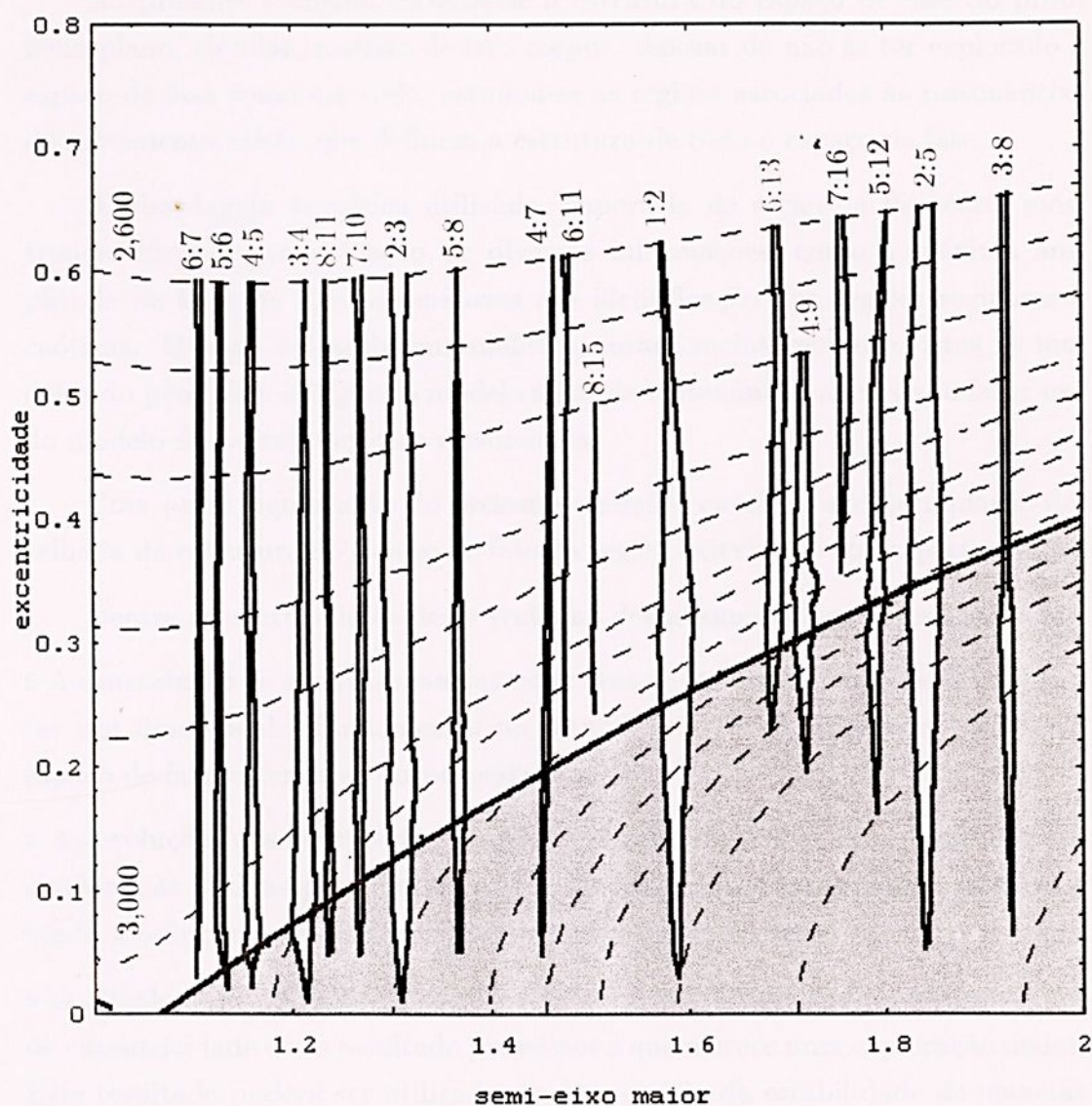


Figura 6.2 - Visão global da estrutura do espaço de fase para razão de massa da ordem de  $10^{-5}$  obtido numericamente via superfície de seção de Poincaré. A área hachurada representa a área estável. A área entre o par de linhas representa a máxima amplitude de libração associada com cada ressonância. As linhas tracejadas representam os contornos da constante de Jacobi. Para o valor da constante de Jacobi 2,600 pode-se observar que o valor de excentricidade associado a esta curva não poderá ser menor que 0,6.

## 7 - SUMÁRIO E COMENTÁRIOS FINAIS

No presente trabalho estudou-se a estrutura do espaço de fase do problema plano, circular, restrito de três corpos. Apesar de não se ter explorado o espaço de fase como um todo, estudou-se as regiões associadas às ressonâncias de movimento médio que definem a estrutura de todo o espaço de fase.

A abordagem numérica utilizada, superfície de seção de Poincaré, mostrou-se eficiente na obtenção de diversas informações, como a máxima amplitude de libração das ressonâncias e a identificação das regiões regulares e caóticas. Quanto à abordagem analítica, foram sucintamente revistos os modelos do pêndulo e o segundo modelo ideal de ressonância, além de se fazer uso do modelo de sobreposição de ressonâncias.

Uma parte significativa do presente trabalho envolveu a determinação detalhada da estrutura do espaço de fase da região exterior ao corpo perturbador.

Dentre as contribuições deste trabalho destacamos os seguintes resultados:

- ▷ A constatação de que ressonâncias exteriores de terceira e quinta ordem podem ter um desempenho fundamental na estabilidade de significativas regiões do espaço de fase exterior ao corpo perturbador.
- ▷ As evoluções dos centros de libração para ressonâncias exteriores obtidas são similares às obtidas por Winter & Murray (1997a) para ressonâncias interiores, vindo a reforçar uma tendência de evoluções destes centros.
- ▷ O cálculo da região caótica ao redor da linha de colisão para quaisquer valores de excentricidade é um resultado promissor e que merece uma exploração maior. Este resultado poderá ser utilizado desde o estudo da estabilidade de planetas em sistemas de estrelas binárias até estabilidade de partículas de um anel ao redor de uma pequena lua.



## 8 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BEAUGÉ, C. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **60**, p.225, 1994.
- [2] BRUNO, A.D. Preprint of Inst. Appl. Mat., No.95, URSS, 1976.
- [3] BRUNO, A.D. The restricted three-body problem: plane periodic orbits. Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
- [4] CHAMBERS, J.E., WETHERILL, G.W., BOSS, A.P. The stability of multi-planet systems. *Icarus*, **119**, p.261-268, 1996.
- [5] CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, **52**, No.5, p.263-379, 1979.
- [6] DERMOTT, S.F., MURRAY, C.D. Nature of the Kirkwood gaps in the asteroid belt. *Nature*, Vol.**301**, No. 5897, p.201-205, 1983.
- [7] DUNCAN, M., QUINN, T., TREMAINE, S. The Long Term Evolution of Orbits in the Solar System: A Mapping Approach. *Icarus*, Vol.**82**, p.402-418, 1989.
- [8] EDGEWORTH, K.E. The evolution of the solar system. *J. British Astronomical Association*, **XX**, p.181-188, 1943.
- [9] EDGEWORTH, K.E. The origin and evolution of the solar system. *J. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **109**, p.600-609, 1949.
- [10] FERRAZ-MELLO, S. Expansion of the disturbing force-function for the study of high-eccentric librations. *Astronomy and Astrophysics*, **183**, p.397-402, 1987.
- [11] FERRAZ-MELLO, S. A semi-numerical expansion of the averaged disturbing function for some very-high-eccentric orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **45**, p.65-68, 1989.
- [12] FRANGAKIS, C.N. Tese de doutorado, Universidade de Liverpool, 1968.



- [13] FRANGAKIS, C.N. Phase plane analysis of the commensurable restricted three-body problem. *Astrophysics and Space Science*, **22**, p.421-440, 1973a.
- [14] FRANGAKIS, C.N. Numerical exploration of commensurable periodic solutions of the restricted problem of three bodies and their stability. *Astrophysics and Space Science*, **23**, p.17-42, 1973b.
- [15] GALLARDO, T. Dinâmica da Região Transnetuniana. Tese de doutoramento, Instituto Astronômico e Geofísico da Universidade de São Paulo, 1996.
- [16] GALLARDO, T. O Cinturão de Kuiper. *Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira*, **15**, No. 2, p.28-39, 1996.
- [17] GLADMAN, B. Dynamics of Systems of Two Close Planets. *Icarus*, **106** p.247-263, 1993.
- [18] HADJIDEMETRIOU, J.D. Resonant motion in the restricted three body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **56**, p.201-219, 1993.
- [19] HENRARD, J. , LEMAITRE, A. A second fundamental model for resonance. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **30**, p.197-218, 1983.
- [20] KUIPER, G.P. On the origin of the solar system. In *Astrophysics: A Topical Symposium*, ed. J.A. Hynek/MacGraw-Hill, New York, p.357-424, 1951.
- [21] LISSAUER, J.J. Formation of planetary systems. *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, **49**, p.01-11, 1998.
- [22] MALHOTRA, R., DUNCAN, M., LEVISON, H. Dynamics of the Kuiper belt. In *Protostars and Planets IV*, preprint, 1999.
- [23] MALHOTRA, R. Orbital resonances and chaos in the solar system: Solar System Formation and Evolution. *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, **49**, p.37-63, 1998.
- [24] MALHOTRA, R. The phase space structure near neptune resonances in the Kuiper belt. *The Astronomical Journal*, **111**, No.1, p.504-516, 1996.
- [25] MESSAGE, P.J. On asymmetric solutions of the plane restricted problem





of three bodies. In *Periodic Orbits, Stability and Resonances*. Ed. G.E.O. Giacaglia, p.19-32, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holanda, 1970.

[26] MESSAGE, P.J., TAYLOR, D.B. On asymmetric solutions of the plane restricted problem of three bodies, and bifurcations of families. In *Dynamics of Planets and Satellites and Theories of Their Motion*. Ed. V. Szebehely, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holanda, 1978.

[27] MILANI, A., NOBILI, A.M. The depletion of the outer asteroid belt. *Astronomy and Astrophysics*, **144**, p.261-274, 1985.

[28] MORBIDELLI, A., THOMAS, F., MOONS, M. The resonant structure of the Kuiper belt and the dynamics of the first five trans-Neptunian objects. *Icarus*, **118**, p.322-340, 1995.

[29] MOONS, M. On the resonant hamiltonian in the restricted three-body problem. Technical report, Facultés Universitaires de Namur, Bélgica, 1993.

[30] MURRAY, C.D., DERMOTT, S.F. Notas de aula do curso Solar System Dynamics. QMW - Londres, 1996.

[31] PRUSSING, J.E., CONWAY, B.A. Orbital Mechanics. *Oxford University Press*, 1993.

[32] ROY, A.E. Orbital motion. *IOP Publishing Ltd*, 3a. ed., Bristol, 1988.

[33] THOMAS, F. La dynamique resonnante dans le systeme solaire application au mouvement des objets transneptuniens. Tese de doutoramento, Observatório de Paris, França, 1998.

[34] WINTER, O.C., MURRAY, C.D. Resonance and Chaos: I. First-order interior resonances. *Astronomy and Astrophysics*, **319**, p.290-304, 1997a.

[35] WINTER, O.C., MURRAY, C.D. Resonance and Chaos: II. Exterior resonances and asymmetric libration. *Astronomy and Astrophysics*, **328**, p.304-316, 1997b.

[36] WINTER, O.C., MURRAY, C.D. Atlas of planar, circular, restricted three-body problem: I. Internal orbits. *QMW Maths Notes* No.16, Queen Mary and Westfield College, Mile End Road, London E1 4NS, U.K., 1994a.



[37] WINTER, O.C., MURRAY, C.D. Atlas of planar, circular, restricted three-body problem: II. External orbits. *QMW Maths Notes* No.17, Queen Mary and Westfield College, Mile End Road, London E1 4NS, U.K., 1994b.

[38] WISDOM J. The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem. *Astronomical Journal*, **85**, p.1122-1133, 1980.





