

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Caracterização de Dinâmica Caótica em Oscilador Não-Linear Amortecido

André Paganotti Faber

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2021

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

Caracterização de Dinâmica Caótica em Oscilador Não-Linear Amortecido

André Paganotti Faber

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador

Prof. Dr. André Luis Prando Livorati

Rio Claro - SP

2021

F115c Faber, André Paganotti
Caracterização de dinâmica caótica em oscilador não-linear
amortecido / André Paganotti Faber. -- Rio Claro, 2021
98 p. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: André Luis Prando Livorati

1. Sistema dinâmico não linear. 2. Fenômenos não lineares. 3.
Oscilador eletrônico. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Caracterização de Dinâmica Caótica em Oscilador Não-Linear Amortecido

André Paganotti Faber

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. André Luis Prando Livorati

Prof. Tit. Edson Denis Leonel

Prof. Dr. Tiago Kroetz

Conceito: Aprovado

Rio Claro - SP, 30 de Julho de 2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, meus pais, minha noiva, meu filho, meu orientador, meus professores, meus amigos e todo o Departamento de Física da UNESP de Rio Claro. Agradeço, também, a todos que de uma forma direta ou indireta contribuíram para este trabalho.

RESUMO

Esta dissertação tem por objetivo investigar as propriedades referentes a dinâmica apresentada por um oscilador eletrônico, constituído basicamente por alguns amplificadores operacionais, uma rede RLC, um par de diodos e perturbado por uma fonte de tensão externa alternada. Tal configuração deu origem a um sistema dinâmico não-linear que possui pontos de equilíbrio, órbitas periódicas e quase-periódicas bem característicos. Através da análise analítica do circuito, definiu-se um conjunto de equações capaz de modelar a evolução do sistema no tempo. Por meio de simulações numéricas, definiu-se o estudo de dois casos específicos: modelo perturbado periodicamente e modelo não perturbado. Para o modelo não perturbado, foram encontrados pontos fixos, bacias de atração e uma curva universal que descreve a convergência para os pontos fixos. Já para o modelo perturbado periodicamente, a análise computacional nos forneceu a existência de alguns fenômenos não lineares tais como: bifurcações, coexistência de ciclos limites, atratores caóticos. Para este caso, também foram encontrados pontos fixos e bacias de atração. Com a implementação do circuito, foi possível variar dois parâmetros presentes no sistema: a amplitude e a frequência da perturbação. Através da aquisição de séries temporais em pontos específicos do circuito eletrônico, encontrou-se um conjunto de espaços de fases experimentais e de mapas estroboscópicos.

Palavras-chaves: Oscilador eletrônico, sistema dinâmico não-linear, fenômenos não lineares.

ABSTRACT

This dissertation aims to investigate the properties related to the dynamics presented by an electronic oscillator, basically constituted by some operational amplifiers, an RLC network, a pair of diodes and disturbed by an alternating external voltage source. This configuration gave rise to a dynamic non-linear system that has equilibrium points, periodic and quasi-periodic orbits that are very characteristic. Through the analytical analysis of the circuit, a set of equations was defined capable of modeling the evolution of the system over time. Through numerical simulations, the study of two specific cases was defined: periodically disturbed model and undisturbed model. For the undisturbed model, fixed points, attraction basins and a universal curve were found that describe the convergence to the fixed points. For the periodically disturbed model, computational analysis provided us with the existence of some non-linear phenomena such as: bifurcations, coexistence of limit cycles, chaotic attractors. For this case, fixed points and basins of attraction were also found. With the implementation of the circuit, it was possible to vary two parameters present in the system: the amplitude and frequency of the disturbance. Through the acquisition of time series at specific points in the electronic circuit, a set of spaces for experimental phases and stroboscopic maps was found.

Keywords: Electronic oscillator, nonlinear dynamic system, nonlinear phenomena.

Sumário

1	Introdução	8
1.1	Revisão Histórica	8
1.2	Objetivos e Organização do Trabalho	11
2	Oscilador amortecido não-linear: caso sem forçamento externo	13
2.1	Equação de Duffing	13
2.2	Determinação dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico não-linear .	15
2.3	Linearização e estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico não-linear	19
2.4	Trajetórias e espaço de fases	24
2.4.1	Bacia de atração	37
2.4.2	Convergência para o estado estacionário	37
3	Oscilador amortecido não-linear: caso com forçamento externo	51
3.1	Mapa de Poincaré	51
3.2	Bacias de convergência	56
3.3	Ressonância	58
4	Construção do circuito	63
4.1	Circuito eletrônico experimental	63
4.2	Diodo	64
4.3	Indutor	68
4.4	Osciloscópio Analógico	70
4.5	Amplificador Operacional	72
4.6	Equações do oscilador não-linear experimental	75
4.7	Experimento	76
5	Conclusões	88
6	Apêndice - Métodos Numéricos para Problemas de Valor Inicial	93
6.1	Métodos de Euler	94

6.2	Euler Explícito	94
6.3	Euler Implícito	95
6.4	Regra do Ponto Médio	95
6.5	Runge-Kutta de Segunda Ordem	96
6.6	Runge-Kutta de Quarta Ordem	97

Capítulo 1

Introdução

1.1 Revisão Histórica

A compreensão da natureza e sua diversidade de comportamentos, suas manifestações regulares ou inusitadas, sua riqueza de formas e estruturas sempre intrigou a mente humana. Descrever matematicamente e desenvolver uma teoria capaz de prever o comportamento de fenômenos naturais e humanos, cujas configurações se modificam ao longo do tempo é objeto de estudos em sistemas dinâmicos, que se tornou uma área de pesquisa muito atraente com o desenvolvimento da ciência.

A grande diversidade dos comportamentos presentes nos sistemas naturais se deve ao fato da presença de relações não-lineares entre seus elementos, em que pequenas causas podem estar associadas a grandes efeitos [1].

Galileo Galilei (1564-1642) teve uma grande contribuição para a origem da teoria de sistemas dinâmicos. Galileu foi precursor no uso do telescópio para estudos sobre corpos celestes. Desenvolveu o método científico, como conhecemos hoje, ao utilizar a matemática para o estudo de fenômenos naturais, ao invés de usar apenas a experimentação. Realizou experiências com pêndulos simples, projéteis lançados obliquamente e corpos deslizando sobre planos inclinados. Introduziu conceitos de Dinâmica, a teoria que trata das causas dos movimentos, antecipando a Lei da Inércia e notando que a distância percorrida por um corpo acelerado é proporcional ao quadrado do tempo. Lançou a noção de que corpos, no vácuo, sujeitos à ação da gravidade caem da mesma altura ao mesmo tempo, independentemente de sua massa [2].

Em trabalhos independentes, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1643-1727) desenvolveram o cálculo diferencial integral. Newton também propôs as três leis a respeito dos efeitos de uma força sobre o movimento de um corpo, deduziu a lei

de gravitação universal e assim, conseguiu fazer a conexão entre a gravitação e o comportamento dinâmico do sistema solar. Através de suas descobertas, era possível escrever as equações que descrevem o movimento de n pontos de massa (ou n esferas homogêneas) num espaço tridimensional, sujeitos apenas à atração gravitacional (problema dos n corpos) [2].

Newton resolveu o problema de dois corpos interagentes e para Pierre-Simon Laplace (1749-1827), o determinismo expresso nas equações implicava previsibilidade nas quais os fenômenos naturais seriam causados por leis imutáveis, uma compreensão de que o passado, o presente e o futuro estão completamente definidos [1].

Para Laplace, uma “inteligência” poderia prever o futuro do Universo para todo o sempre caso ela tivesse a capacidade de saber a posição e a velocidade de cada partícula existente em um dado instante, assim como a massa e a força que age sobre cada uma dessas partículas. Gerações de estudiosos tentaram fazer uso do método de Newton para solucionar o problema de três corpos (por exemplo: a Terra, a Lua e o Sol), mas não conseguiram devido a impossibilidade de encontrar uma solução analítica exata que descreva o movimento desses corpos. Na impossibilidade de uma solução exata, buscou-se uma outra abordagem que consistia na expansão em série de infinitos termos para uma aproximação da solução da equação diferencial original, que descrevia o problema. Utilizando esse conceito, em 1773, Laplace fez sua primeira grande contribuição para o estudo da estabilidade do Sistema Solar [2].

Jules Henri Poincaré (1845-1912) conquistou, em 1889, o prêmio oferecido pelo rei Oscar II, da Suécia e da Noruega, ao encontrar uma solução, mesmo que parcial, a respeito da estabilidade do Sistema Solar [3]. Seu trabalho foi o primeiro a tratar sobre teoria qualitativa de sistemas dinâmicos, utilizando técnicas geométricas e topológicas, percebendo que as propriedades qualitativas das equações diferenciais não-lineares podiam ser investigadas sem a determinação explícita de suas soluções [2].

Poincaré separou o problema original e insolúvel dos três corpos em dois problemas mais simples. Anteriormente, em 1772, J.J. Lagrange (1736-1813), assumindo uma aproximação para o mesmo problema, encontrou duas posições de equilíbrio estáveis na órbita de um dos corpos. Se, após um deslocamento perturbativo, o corpo se mantivesse no mesmo ponto ou na sua vizinhança, esse ponto de equilíbrio era estável, caso contrário era dito instável. O surgimento de pontos estáveis era válido somente para condições iniciais particulares [2].

Em 1903, Poincaré relatou que, se referindo aos seus estudos sobre o problema dos três corpos, pequenas diferenças nas condições iniciais produzem grandes diferenças no fenômeno final, tornando sua previsão impossível. Quando o comportamento de um sistema determinístico depende sensivelmente das condições iniciais, ocorre caos [2].

O trabalho combinado de A. N. Kolmogorov (1903-1987) [4], I. Arnold (1937-2010) [5] e J. Moser (1928-1999) [6], assim como as discussões de Poincaré, mostrou que, para certos valores de condições iniciais, séries temporais de problemas na Mecânica Celeste e outros sistemas divergem. Entretanto, existem condições iniciais que produzem séries convergentes.

Edward Norton Lorenz (1917-2008), após servir na Segunda Guerra Mundial como meteorologista, resolveu continuar nessa área e trabalhar com aspectos teóricos, principalmente com simulações numéricas em computadores. Ao estudar o modelo de *Rayleigh-Bernard* para convecção de fluidos, notou que uma pequena variação nas condições iniciais acarretava grandes diferenças na evolução do sistema. A dependência sensível das equações da circulação atmosférica ficou conhecida como “Efeito Borboleta”. Em 1963, Lorenz publicou o artigo *Deterministic Nonperiodic Flow* [7] que continha um sistema de baixa dimensão (tridimensional) que exibía um comportamento caótico, justamente o mesmo tipo de comportamento previsto por Poincaré no estudo do problema de três corpos [2].

Em meados do século XX, a invenção do computador demarcou um divisor de águas para o estudo de sistemas dinâmicos. Assim, foi possível calcular em um menor tempo a solução de equações a partir de diversas condições iniciais e valores de parâmetros. Os resultados numéricos obtidos ajudam a desenvolver uma percepção sobre os possíveis comportamentos do sistema dinâmico [2]. Entre Poincaré e Lorenz, é importante ressaltar o trabalho de Yoshisuke Ueda (1936-) [8] que descobriu um atrator relacionado a um oscilador eletrônico usando um computador analógico em 1961, mas somente foi publicado em 1970 [1].

Na década de 80, surgiu o interesse de se produzir um circuito que apresentasse evidência experimental de um comportamento caótico, permitindo contestar a suspeita de que esse fenômeno era apenas uma abstração matemática. Isso levou Leon Ong Chua (1936-) a investigar sobre a possibilidade de projetar um circuito que reproduzisse esse comportamento. Uma maneira de realizar essa ideia é montar um circuito regido por equações diferenciais iguais a um sistema que apresente caos. Essa linha de raciocínio está relacionada à computação analógica. Porém, o projeto de L. O. Chua era diferente, em vez de partir de sistemas caóticos conhecidos, como Lorenz ou Rössler, ele destinou-se a conceber um circuito eletrônico que, previamente, se comportasse de uma maneira caótica [10].

Deste modo, nasce o Circuito de Chua, o qual ficou conhecido como um paradigma no estudo de sistemas caóticos devido a possibilidade de se observar vários fenômenos presentes em sistemas dinâmicos não-lineares tais como atratores estranhos (configurações que não são fixas, oscilatórias ou aleatórias mas flutuações contínuas e que possuem, às vezes, um padrão complicado). Bifurcações (mudanças topológicas do sistema quando

seus parâmetros passam por um valor crítico) e as rotas para o caos que indicam como essas mudanças ocorrem, através do ajuste dos valores dos seus componentes, também estão presentes neste circuito [19].

Aplicações de comportamento de dinâmica caótica foram identificados em diversos sistemas reais nas mais abrangentes áreas de conhecimento, como: dinâmica de populações com espécies em competição [11], redes neurais [12], geração de diferentes espécies de plânctons [13], catalisação de reações químicas [15], pulsos de neurônios [17], ciclos de epidemias [18], modelos climáticos [7] e sistemas elétricos e eletrônicos [19, 20].

Uma classe de grande interesse de estudo em sistemas dinâmicos são os circuitos osciladores eletrônicos [21, 22]. Eles estão presentes em sistemas de comunicação, frequências de rádio, sistemas de telecomunicações com comunicação segura de dados, processamento de sinais, faixas de FM onde funciona tanto na transmissão como na recepção de sinais. Esses sistemas destinam-se à geração primária de sinais periódicos, produzindo um sinal alternado a partir de um sinal contínuo. Isto é conseguido pela interação de um circuito passivo (resistores, capacitores e indutores) com elementos ativos (geradores elétricos). A existência de um comportamento não-linear faz com que os osciladores estabilizem a amplitude das oscilações em regime permanente, onde podemos destacar basicamente dois tipos de osciladores eletrônicos: (i) Harmônico ou senoidal, cujos exemplos são os osciladores de Colpitts, Hartley, Wien, Armstrong, [20] e (ii) Relaxação, que são basicamente geradores de sinais retangulares.

Outro fenômeno interessante na análise de circuitos osciladores eletrônicos é a sincronização caótica, que surge devido ao fato de se colocar uma das variáveis de um sistema como função de todos os demais sistemas associados. Consiste de um “ajuste do ritmo” entre objetos que oscilam, cujas oscilação são auto-sustentáveis. Para que dois sistemas estejam sincronizados, eles devem exibir órbitas iguais a medida que o tempo evolui [24].

1.2 Objetivos e Organização do Trabalho

Para este trabalho, pretendemos investigar as propriedades dinâmicas de um sistema do tipo eletrônico, caótico e experimental. Será feito o estudo do comportamento do sistema dinâmico para diferentes valores de parâmetros através de simulações numéricas com o intuito observar alguns fenômenos não lineares, tais como: bifurcações, coexistência de ciclos limites, atratores caóticos, entre outros.. Também será incluída uma análise do ponto de vista experimental, através da construção do sistema eletrônico e da instrumentação utilizada para a coleta de dados.

Esta dissertação foi organizada da seguinte maneira: No capítulo 2, descreveremos

detalhadamente todos os passos necessários para se obter as equações do oscilador não linear amortecido sem forçamento, bem como determinar e analisar a estabilidade de seus pontos fixos. Também, encontraremos uma curva universal que demonstre a evolução do sistema para seus pontos fixos. Apresentaremos conjuntos de espaço de fases e bacias de atração variando os valores de parâmetros presentes no sistema estudado.

No capítulo 3 realizaremos um estudo fenomenológico do modelo oscilador não linear amortecido e forçado. Investigaremos a estabilidade de seus pontos fixos, bacias de atração, espaço de fases, coexistência de ciclos limites e atratores caóticos.

No capítulo 4 descreveremos, com detalhes, a construção do oscilador eletrônico e de alguns de seus componentes, os métodos utilizados e a instrumentação necessária para a aquisição de séries temporais. Mostraremos, também, mapas estroboscópicos e figuras de Lissajous, com variação dos parâmetros de controle, a fim de corroborar os resultados obtidos através das simulações numéricas.

Por fim, no capítulo 5 teremos as considerações finais e apresentaremos as perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Oscilador amortecido não-linear: caso sem forçamento externo

Resumo

Neste capítulo, apresentaremos a equação de Duffing representada uma equação diferencial ordinária não-linear de segunda ordem que descreve certos osciladores forçados e amortecidos. Serão apresentados alguns conceitos fundamentais para análise qualitativa de sistemas dinâmicos. Encontraremos os pontos fixos relacionados ao sistema de equações não-lineares, obtidos por uma equação diferencial ordinária que representa um oscilador não-linear sem forçamento externo. Discutiremos, também, a respeito da estabilidade dos pontos encontrados. Serão apresentados, também, o retrato de fases e bacias de atração do mesmo sistema, para um conjunto de condições iniciais e de parâmetros.

2.1 Equação de Duffing

A equação de Duffing pode descrever a dinâmica não-linear de sistemas elétricos e mecânicos, cujo nome é homenagem aos estudos de George Duffing na década de 1930. Ao considerar um sistema mecânico do tipo massa-mola-amortecedor como na Figura 2.1(a), admite-se um oscilador cuja força de restituição possua um comportamento linear para pequenos deslocamentos e um comportamento não-linear com o aumento do deslocamento. Assim, a força de restituição da mola é dada por uma função do tipo $K(u)$ enquanto o amortecimento é dado por $C(u, v)$ em que u é a variável de posição e v a velocidade.

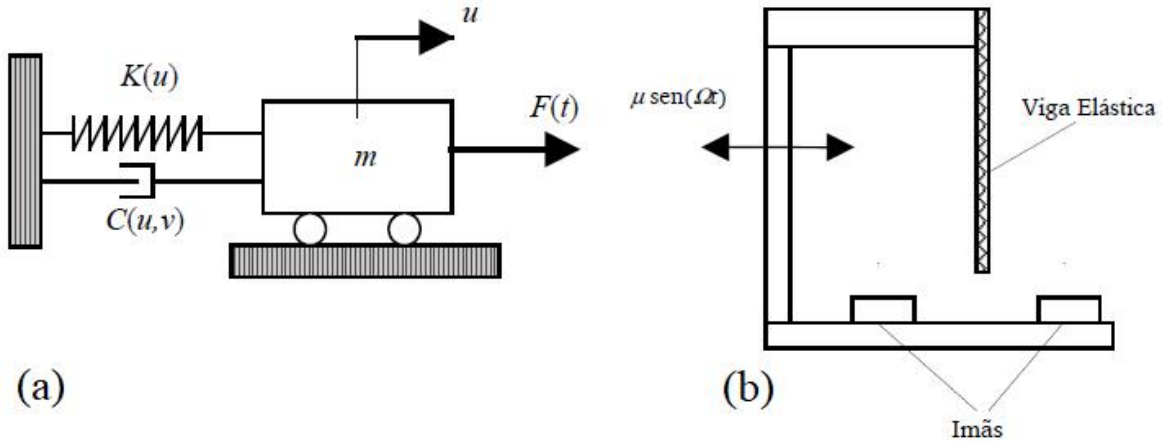


Figura 2.1: Oscilador massa-mola-amortecedor (a) e viga de Moon & Holmes (b) [25].

Assumindo que a força de restituição é não-linear e cúbica descrita por $K(u) = k_0u + k_1u^3$ e que o amortecimento viscoso e linear é descrito por $C(u, v) = c\dot{u}$, através do equilíbrio de forças, a seguinte equação de movimento é obtida,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k_0u + k_1u^3 = F(t). \quad (2.1)$$

A força de restituição é definida pelos sinais dos parâmetros k_0 e k_1 . Para pequenos deslocamentos, temos uma força linear quando $k_0 > 0$ e para deslocamentos maiores, sendo $k_1 > 0$, existe o endurecimento da mola e para $k_1 < 0$, tem-se um amolecimento. Assim, esse tipo de força está associada a uma energia potencial quadrática, para o caso linear, e de quarta ordem, quando existe a situação de amolecimento/endurecimento da mola (Figura 2.2 (a)). No caso de $k_0 < 0$ e $k_1 > 0$, um outro tipo de força de restituição está relacionado a uma energia potencial com dois pontos de mínimo e um máximo na origem do sistema, conhecida como duplo poço (Figura 2.2 (b)). Essa energia potencial pode ser descrita pela seguinte equação,

$$W(u) = - \int F(u)du = -\frac{k_0}{2}u^2 + \frac{k_1}{4}u^4. \quad (2.2)$$

Admitindo-se um forçamento periódico harmônico e com base na força de restituição, chegamos em um sistema adimensionalizado, o qual representa a Equação de Duffing,

$$\ddot{u} + \alpha\dot{u} + \gamma u + \beta u^3 = \mu \sin(\Omega t). \quad (2.3)$$

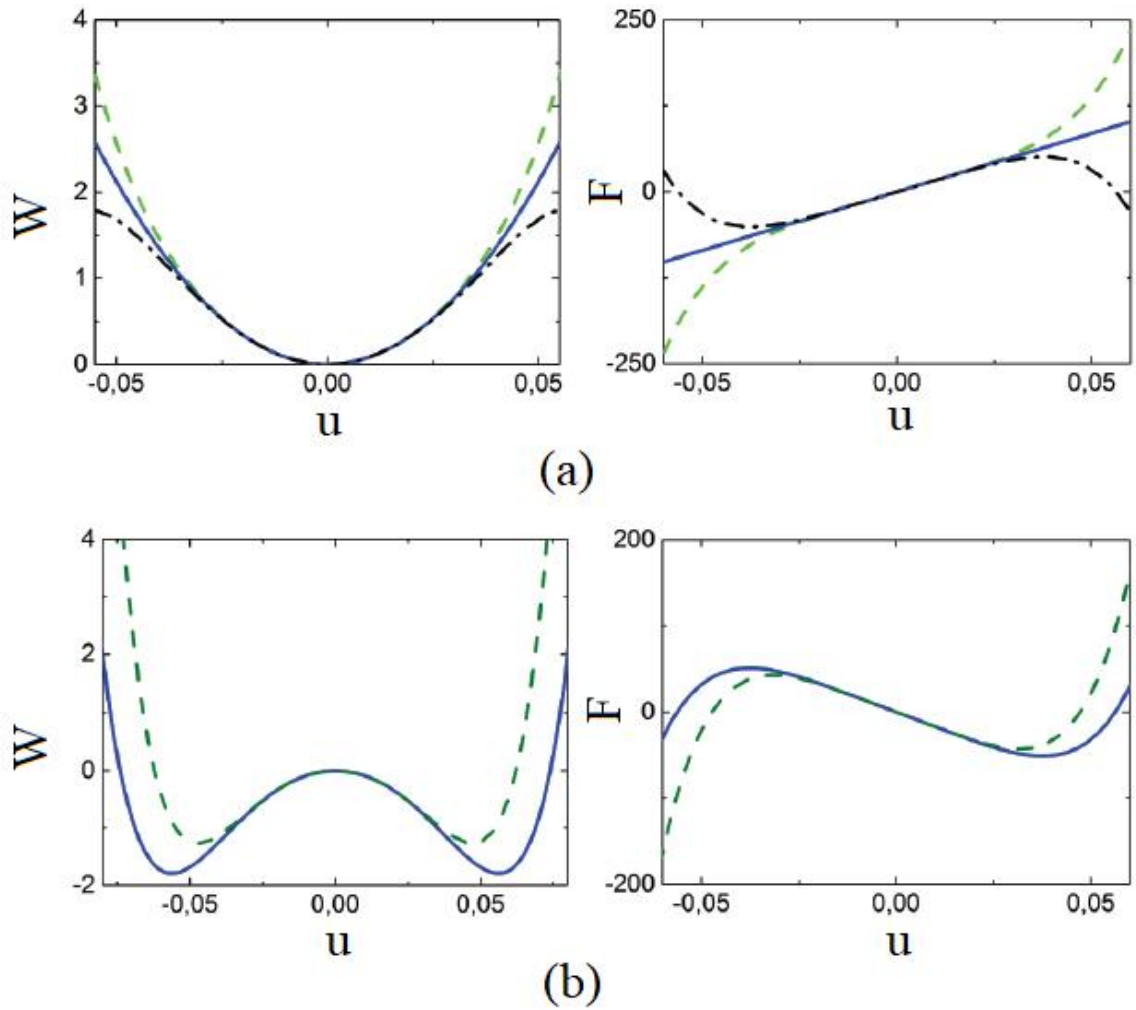


Figura 2.2: Energia potencial (W) e força de restituição (F) em valores absolutos associadas ao oscilador massa-mola-amortecedor.

A resposta de fenômenos físicos importantes podem ser descritos pela Equação 2.3, como, por exemplo, um circuito elétrico com uma indutância não-linear [8] e a viga de Moon & Holmes [25], que trata a flambagem de uma viga elástica sujeita a atuação de forças magnéticas (Figura 2.1(b)).

2.2 Determinação dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico não-linear

Um sistema dinâmico pode ser interpretado como a evolução de um campo vetorial x , transformado por uma função f , continuamente. Tal sistema pode ser representado por um sistema de equações diferenciais do tipo:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n . \quad (2.4)$$

Mapa ou *mapeamento* é uma outra forma de representação de um sistema dinâmico em que o tempo é discreto, expressando o seu estado a partir do instante anterior. Um dos seus principais usos é auxiliar na análise de sistemas contínuos.

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad X \in \mathbb{R}^n . \quad (2.5)$$

Um sistema dinâmico que não depende explicitamente do tempo é chamado de *autônomo*. Caso exista uma dependência explícita do tempo, o sistema é dito *não-autônomo*, como se segue

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n . \quad (2.6)$$

É possível transformar um sistema dinâmico não-autônomo em um sistema autônomo aumentando-se a dimensão do espaço com a introdução de uma variável a mais, relacionada ao tempo. Assim, um sistema não-autônomo de n dimensões ou *fluxo*,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x, t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

que também pode ser escrito na forma de um vetor de n dimensões,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}[\vec{x}(t)], \quad (2.8)$$

é capaz de ser transformado em um sistema autônomo com $(n + 1)$ dimensões através da introdução da variável $x_{n+1} = t$. Deste modo,

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} , \quad (2.9)$$

ou reescrevendo,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x) \\ \dot{x}_{n+1} &= 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Considere a seguinte equação de movimento de um oscilador não-linear amortecido e forçado:

$$\ddot{x} + b\dot{x} - F(x) = f(t) , \quad (2.11)$$

que também pode ser reescrita em termos de um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = F(x) - by + f(t) \end{cases} , \quad (2.12)$$

em que $f(t) = \varepsilon \sin(\omega t)$ e representa uma força externa periódica com amplitude ε e frequência angular da oscilação w . O termo $b\dot{x}$ corresponde à dissipação e $F(x)$ indica uma função linear por partes dada por:

$$F(x) = \begin{cases} -(x+1), & \text{se } x < -1/2 \\ x, & \text{se } -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -(x-1), & \text{se } x > 1/2 \end{cases} , \quad (2.13)$$

ou reescrevendo em termos de funções modulares:

$$F(x) = -x + |x + 1/2| - |x - 1/2| . \quad (2.14)$$

É possível encontrarmos a energia potencial do sistema 2.11 ao realizarmos o mesmo procedimento feito em 2.2 aplicado, agora, no sistema 2.13 e assim,

$$W(x) = \begin{cases} x^2/2 + x + 1/4, & \text{se } x < -1/2 \\ -x^2/2, & \text{se } -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ x^2/2 - x + 1/4, & \text{se } x > 1/2 \end{cases} . \quad (2.15)$$

A Figura 2.3 nos mostra os gráficos da força linear por partes $F(x)$ e poço de potencial de fundo duplo $W(x)$ associados ao oscilador não-linear amortecido.

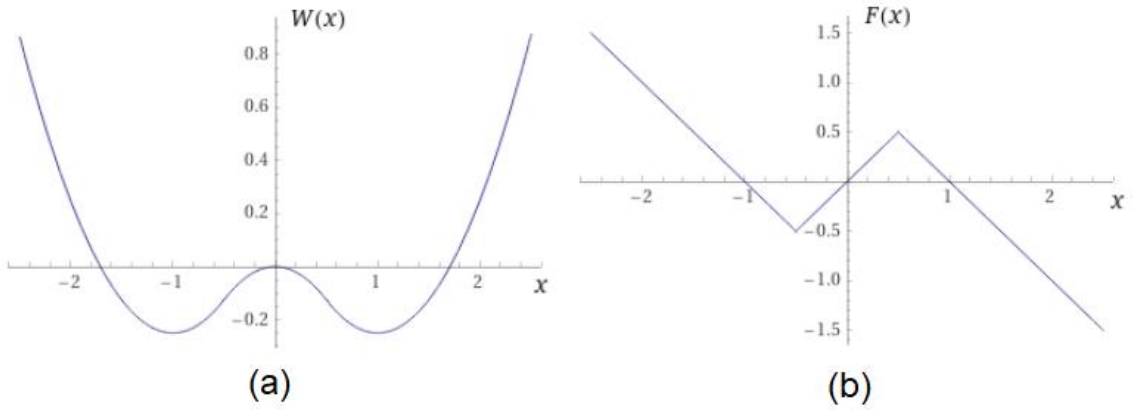


Figura 2.3: Poço de potencial duplo (a) e força linear por partes (b).

Para o estudo deste caso, iremos desconsiderar o termo correspondente à força externa periódica $f(t)$ e converter a equação (2.11) em um sistema com duas EDO's de primeira ordem acopladas. Definindo uma nova variável $y = \dot{x}$, e sua derivada em relação a t sendo $\dot{y} = \ddot{x}$, temos

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + |x + 1/2| - |x - 1/2| - by \end{cases} . \quad (2.16)$$

Um *ponto de equilíbrio* ou *ponto fixo* de um sistema dinâmico é definido como sendo o ponto em que o sistema permanece estacionário com a evolução do tempo, ou seja, a solução não varia a partir de um determinado instante. Assim, para determinar os pontos de equilíbrio do sistema de equações (2.16) devemos encontrar valores em que $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Assim, da primeira equação do sistema temos $\dot{x} = y = 0$, e portanto, $y = 0$. Sendo $\dot{y} = 0$, podemos reescrever a segunda equação como,

$$|x + 1/2| - |x - 1/2| - x = 0 . \quad (2.17)$$

Analisando os termos m_1 e m_2 , sendo estes os respectivos módulos presentes na equação (2.17), podemos obter:

$$m_1 = |x + 1/2| = \begin{cases} x + 1/2, & \text{se } x \geq -1/2 \\ -x - 1/2, & \text{se } x < -1/2 \end{cases}$$

$$m_2 = |x - 1/2| = \begin{cases} x - 1/2, & \text{se } x \geq 1/2 \\ -x + 1/2, & \text{se } x < 1/2 \end{cases} .$$

Ao realizar a intersecção dos conjuntos das soluções das equações modulares temos:

	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
m_1	$-x-1/2$	$x+1/2$	$x+1/2$
m_2	$-x+1/2$	$-x+1/2$	$x-1/2$
$m_1 - m_2$	-1	$2x$	1

(1)

(2)

(3)

Do quadro acima, para que as igualdades se mantenham na equação (2.17), temos, a partir do:

- **caso (1):** para $x \in]-\infty, -1/2]$ $\rightarrow -1 - x = 0 \rightarrow x = -1$;
- **caso (2):** para $x \in [-1/2, 1/2]$ $\rightarrow 2x - x = 0 \rightarrow x = 0$;
- **caso (3):** para $x \in]1/2, +\infty]$ $\rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$,

Portanto, o conjunto solução será $S = \{-1, 0, 1\}$, em que os pontos fixos encontrados são $P_1^* = (x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$, $P_2^* = (x_2^*, y_2^*) = (-1, 0)$ e $P_3^* = (x_3^*, y_3^*) = (1, 0)$.

2.3 Linearização e estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico não-linear

A linearização em torno de um ponto de equilíbrio é um procedimento muito utilizado para avaliar a dinâmica de um sistema. Porém, deve-se destacar que a análise observada tem estabilidade local, já que se trata de soluções aproximadas, com validade para pequenas distâncias em torno do ponto de equilíbrio. Seja um sistema de equações diferenciais não-lineares

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}, \quad (2.18)$$

para o qual existe um ponto fixo $P^* = (x^*, y^*)$. Escrevendo a expansão em série de Taylor em torno desse ponto temos

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(x, y) &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + O^2 \\ \dot{y} = g(x, y) &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + O^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Definindo-se novas variáveis $X = x - x^*$ e $Y = y - y^*$ e observando-se que $\dot{X} = \dot{x}$, $\dot{Y} = \dot{y}$ e $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$, obtém-se, após desprezar os termos de ordem superior, o sistema linear

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P^*} X + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P^*} Y = aX + bY \\ \dot{Y} &= \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{P^*} X + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{P^*} Y = cX + dY\end{aligned}\quad (2.20)$$

em que as derivadas parciais são calculadas no ponto fixo $P^* = (x^*, y^*)$, cuja matriz dos coeficientes

$$J_{P^*} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

é denominada matriz *Jacobiana*. As funções $X(t)$ e $Y(t)$ obtidas ao resolver o sistema (2.20) são aproximações de primeira ordem para as distâncias entre os pontos $(x(t), y(t))$ da órbita e o ponto de equilíbrio.

Para satisfazer o sistema (2.20), sabendo que no ponto fixo a condição $\dot{X} = \dot{Y} = 0$ é atendida, duas condições podem ocorrer: (i) $X = Y = 0$, o que caracteriza o próprio ponto de equilíbrio ou (ii) o determinante de $(J_{P^*} - \lambda I) = 0$. Desta forma, a solução deste determinante nos fornece um polinômio com duas raízes as quais correspondem ao autovalores da matriz J_{P^*} .

A fim de determinar a matriz Jacobiana do sistema (2.16), encontraremos as derivadas parciais em relação a x e y e deste modo,

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = -b, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = -1 + \frac{(x + 1/2)}{|x + 1/2|} - \frac{(x - 1/2)}{|x - 1/2|},$$

e, finalmente,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \frac{(x + 1/2)}{|x + 1/2|} - \frac{(x - 1/2)}{|x - 1/2|} & -b \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

Como mencionado anteriormente, para encontrar os autovalores da matriz Jacobiana em cada ponto fixo temos que fazer $\text{Det}(J - \lambda I) = 0$, para os 3 pontos fixos encontrados. Assim, para determinar os autovalores, utilizando o ponto $P_1^* = (0, 0)$, fazemos

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \frac{(1/2)}{|1/2|} - \frac{(-1/2)}{|-1/2|} & -b \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b \end{pmatrix}.$$

Fazendo $(J_{(0,0)} - \lambda I)$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -(b+\lambda) \end{pmatrix},$$

e encontrando o determinante,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -(b+\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda(-b-\lambda) - 1 = \lambda b + \lambda^2 - 1.$$

Após anular o determinante, encontraremos os autovalores associados,

$$\lambda^2 + \lambda b - 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2}^{(0,0)} = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 + 4}}{2}. \quad (2.24)$$

Já para o ponto fixo $P_2^* = (1, 0)$, a matriz Jacobiana fica

$$J_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \frac{(3/2)}{|3/2|} - \frac{(1/2)}{|1/2|} & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Fazendo $(J_{(1,0)} - \lambda I)$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -(b+\lambda) \end{pmatrix},$$

e encontrando o determinante,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -(b+\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda(-b-\lambda) + 1 = \lambda b + \lambda^2 + 1.$$

Para encontrar os autovalores, anulamos o determinante,

$$\lambda^2 + \lambda b + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2}^{(1,0)} = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4}}{2}. \quad (2.26)$$

E para o ponto fixo $P_3^* = (-1, 0)$, a matriz Jacobiana fica

$$J_{(-1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \frac{(-1/2)}{|-1/2|} - \frac{(-3/2)}{|-3/2|} & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Como a atual matriz Jacobiana é idêntica a anterior, podemos deduzir que

$$\lambda_{1,2}^{(-1,0)} = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4}}{2} . \quad (2.28)$$

Com o intuito de discutir a respeito dos tipos de pontos de equilíbrio de um determinado sistema dinâmico, considera-se, como exemplo, um sistema bidimensional. Tal análise pode ser extrapolada para sistemas de dimensão qualquer e não esgota os tipos de pontos de equilíbrio existentes, apenas apresentando os mais usuais. Considere então um sistema dinâmico 2D com um ponto fixo $x \in \mathbb{R}^2$. Para isso, considere as partes reais e imaginárias dos autovalores,

$$\lambda_k = Re(\lambda_k) + iIm(\lambda_k), \quad (k = 1, 2). \quad (2.29)$$

As características da estabilidade do ponto de equilíbrio são divididas em três grupos definidos a partir da parte real do conjunto de autovalores da matriz Jacobiana, os quais são [23]:

Estável: $\sigma^s = \lambda$ tal que $Re(\lambda) < 0$

Instável: $\sigma^u = \lambda$ tal que $Re(\lambda) > 0$.

Centro: $\sigma^s = \lambda$ tal que $Re(\lambda) = 0$

A seguir, consideramos os casos para os dois autovalores λ_1 e λ_2 :

- **Caso (1):** λ_1 e λ_2 são reais e distintos, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$:

Para este caso, tanto λ_1 quanto λ_2 possuem o mesmo sinal e o ponto fixo P^* é chamado de *nó*. Se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, P^* é instável e se $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, P^* é estável. Os autovetores da matriz Jacobiana definem a direção pela qual as trajetórias se aproximam ou se afastam do ponto fixo que podem ser do tipo radial ou não-radial.

- **Caso (2):** λ_1 e λ_2 reais, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$:

Para $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ e reais o ponto fixo é chamado de *nó impróprio*, cujas trajetórias são tangentes e paralelas em uma única direção.

- **Caso (3):** λ_1 e λ_2 reais, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$:

Quando λ_1 e λ_2 possuem sinais diferentes o ponto de equilíbrio é denominado *ponto de sela hiperbólico*. As trajetórias se aproximam da origem por uma direção e se afastam por outra e, por isso, um ponto de sela é sempre instável.

- **Caso (4):** $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ são complexos conjugados, $Re \lambda_i \neq 0$:

Para $\alpha \neq 0$ as trajetórias descrevem uma espiral convergindo para um ponto fixo

denominado *foco* em que a estabilidade é dada pelo sinal de α . Se $\alpha > 0$ as trajetórias se afastam do ponto de equilíbrio e o foco é *instável*. Mas, se $\alpha < 0$ as trajetórias se aproximam do ponto fixo e o foco é *estável*. Para $\alpha = 0$ os autovalores são imaginários puros ou complexos conjugados, apresentando soluções periódicas e o ponto fixo é chamado de *centro*. Trata-se de um *equilíbrio elíptico* ou *degenerado*, sendo um ponto de equilíbrio estável mas não assintoticamente estável.

Ao analisar a estabilidade linear para o ponto fixo $P_1^* = (0, 0)$, podemos dizer que para qualquer valor de $b \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda_{1,2}^{(0,0)} \in \mathbb{R}$, pois $b^2 + 4 \geq 0$. Como $\sqrt{b^2 + 4} > |b|$, sempre existirá um autovalor positivo e outro negativo, e portanto, o ponto fixo é instável do tipo *sela* (Figura 2.1 (b)).

Já a estabilidade linear para os pontos fixos $P_2^* = (1, 0)$ e $P_3^* = (-1, 0)$, apresentamos as seguintes possibilidades:

- **caso (1):** para $b = 0$, temos que $\text{Re}[\lambda_{1,2}^{(\pm 1, 0)}] = 0$ e, portanto, um ponto estável denominado *centro* (Figura 2.1 (e));
- **caso (2):** para $0 < b < 2$, como $\text{Re}[\lambda_{1,2}^{(\pm 1, 0)}] < 0$, o ponto fixo assintoticamente estável que surge é uma *espiral estável* (Figura 2.1 (d));
- **caso (3):** para $b \geq 2$, e com $\text{Im}[\lambda_{1,2}^{(\pm 1, 0)}] = 0$ e $\text{Re}[\lambda_{1,2}^{(\pm 1, 0)}] < 0$ e, portanto, aparece um ponto assintoticamente estável do tipo *poço* (Figura 2.1 (c));
- **caso (4):** para $-2 < b < 0$, já que $\text{Im}[\lambda_{1,2}^{(\pm 1, 0)}] \neq 0$ e $\text{Re}[\lambda_{1,2}^{(\pm 1, 0)}] > 0$ encontramos um ponto fixo instável (*espiral instável*) representado na Figura 2.1 (e);
- **caso (5):** para $b \leq -2$, com as condições de que $\text{Im}[\lambda_{1,2}^{(\pm 1, 0)}] = 0$ e $\text{Re}[\lambda_{1,2}^{(\pm 1, 0)}] > 0$, encontramos um ponto fixo instável do tipo *fonte* (Figura 2.1 (a)).

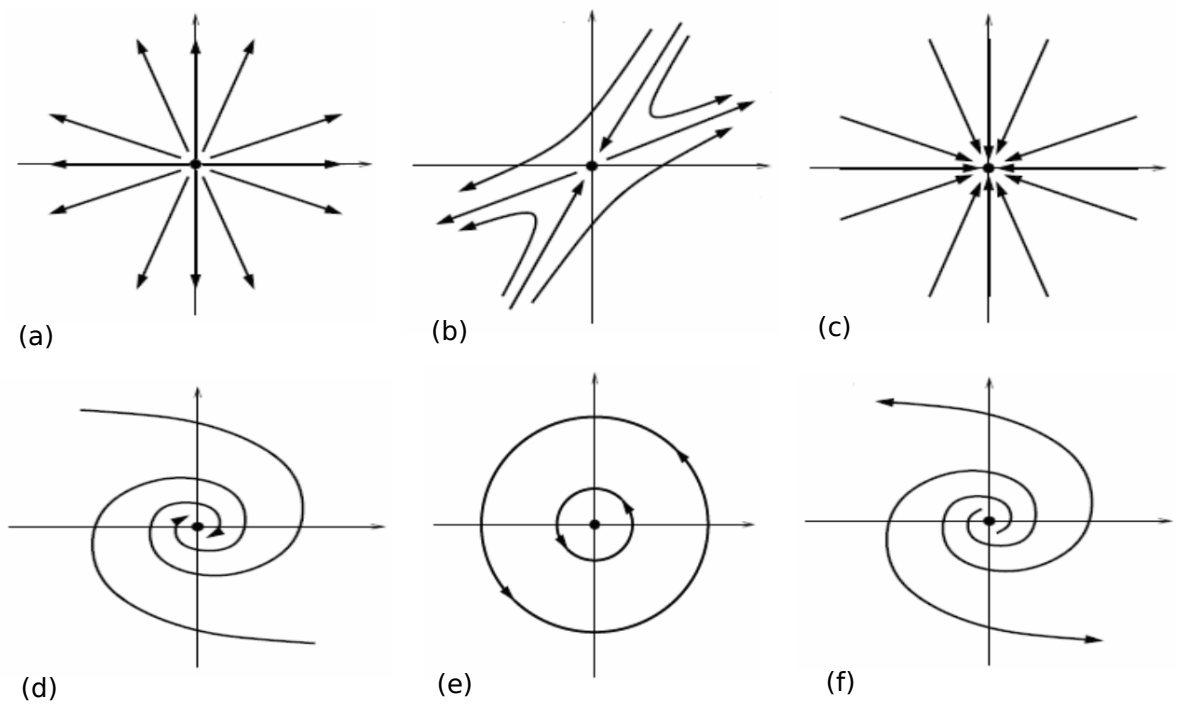


Figura 2.4: Nó instável (a), ponto de sela (b), nó assintoticamente estável (c), foco assintoticamente estável (d), centro (e) e foco instável (f).

2.4 Trajetórias e espaço de fases

Apenas um pequeno número de sistemas dinâmicos são possíveis de serem resolvidos analiticamente, porém a solução do conjunto de equações é em geral custosa e, às vezes, de difícil interpretação, principalmente se houver a existência de termos não-lineares. Com a evolução computacional, podem-se encontrar soluções numericamente, entretanto, as informações qualitativas são mais fáceis de se intuir que soluções particulares.

Assim, uma interpretação geométrica é simples e admite considerar suas características mais interessantes. Ao saber que o valor inicial das variáveis envolvidas, por exemplo, $(u(0), v(0))$, retratam completamente o estado inicial de um sistema dinâmico determinístico, a evolução dinâmica nos fornece um conjunto de estados seguintes, construindo a solução $(u(t), v(t))$, para $t > 0$.

A partir de uma configuração inicial, a sequência cronológica obtida através da evolução dinâmica de um estado para o seguinte recebe o nome de órbita, retratada por uma curva no espaço de coordenadas (u, v) . Um outra representação faz o uso de vetores associados às derivadas das variáveis de estado através de um *campo vetorial*. Ao se alterar os valores iniciais das variáveis, outros estados seguintes surgem e, por consequência, outras órbitas. De acordo com o teorema da unicidade existe somente uma solução para

uma determinada condição inicial, ou seja, uma órbita jamais poderá se cruzar consigo mesma ou com outras distintas, já que o ponto de cruzamento definiria a existência de duas soluções possíveis [1].

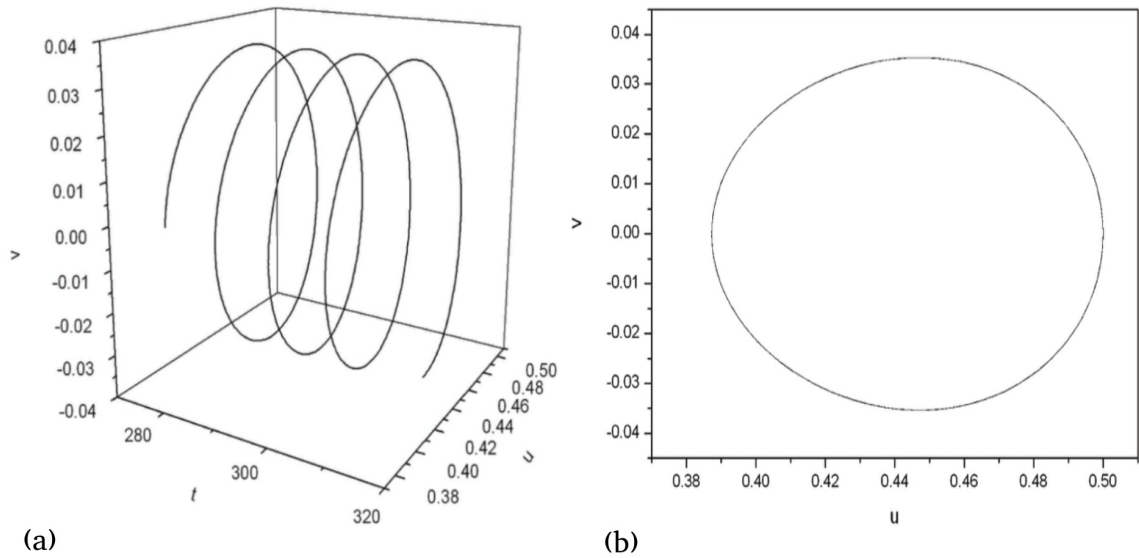


Figura 2.5: (a) Evolução da solução ao longo do tempo; (b) Órbita no espaço de fase [1].

O espaço gerado pelas variáveis do sistema é chamado de *espaço de fase*. O conjunto de todas as órbitas recebe o nome de *retrato de fases* e fornece informações a respeito de todos os estados permitidos do sistema dinâmico.

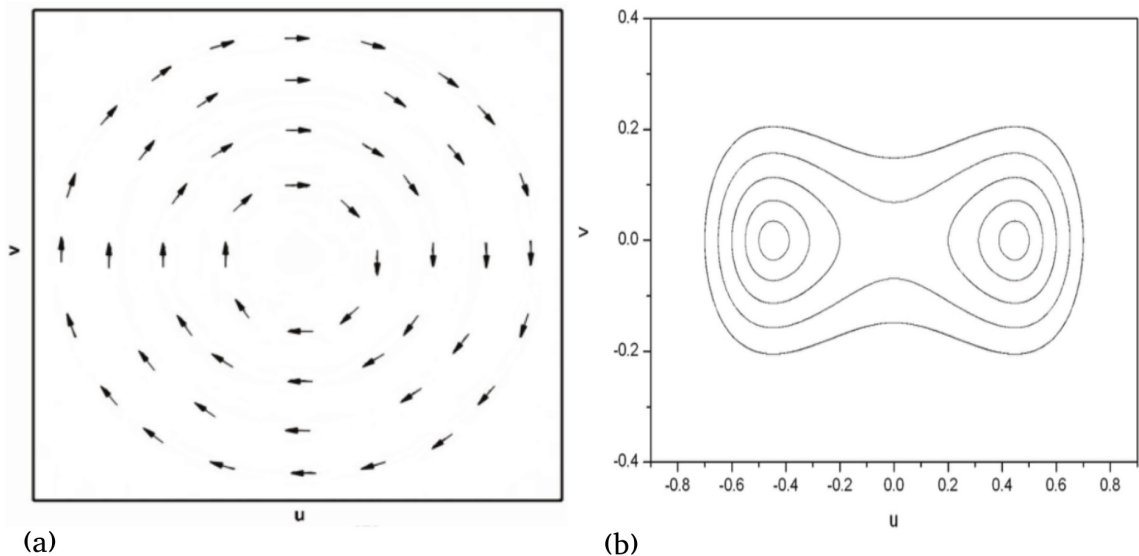


Figura 2.6: (a) Campo vetorial; (b) Retrato de fase [1].

Em sistemas experimentais, é impossível eliminar completamente as forças dissipativas originadas pela resistência do ar, atrito, calor, colisões inelásticas ou outras formas de

perda de energia e, deste modo, o sistema é denominado *dissipativo* ou *não-conservativo*. A perda de energia faz com que o sistema adquira um comportamento estacionário e que, uma vez atingido, não é capaz de revelar a evolução dinâmica até seu estado final.

De outro lado, existem sistemas cujas forças dissipativas são nulas e, por isso, recebem o nome de *conservativos* ou *hamiltonianos*. Estes são capazes de preservar o volume no espaço de fases, ou seja, em um espaço de fases de dimensão n ao considerar um volume $V(0)$ de dimensão n e uma superfície $S(0)$ de dimensão $(n-1)$ a qual contém um conjunto de pontos que representam a configuração inicial do sistema. Tal conjunto evolui sob uma dinâmica determinística até a superfície $S(t)$ com volume $V(0) = V(t)$.

Os sistemas dissipativos perdem energia e o volume V de dimensão n contido numa superfície S de dimensão $(n-1)$ do espaço de fases se contrai para um espaço de dimensão menor que n . Portanto, seu volume tende a zero e as órbitas tendem para os *atratores*.

Para um fluxo $\vec{f}$ qualquer, a variação do volume no espaço de fase é dada por [24]:

$$\frac{dV}{dt} = \int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV. \quad (2.30)$$

O sistema é conservativo quando $dV/dt = 0$, isto é, quando o divergente do campo vetorial $\vec{f}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \quad (2.31)$$

é nulo. Assim, a integral na Equação (2.30), se anula com qualquer volume V escolhido. O sistema é dissipativo quando $dV/dt < 0$, ou seja, $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} < 0$ e caso $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} > 0$, o sistema é *expansivo*.

Como exemplo de sistema dissipativo, temos o pêndulo amortecido, descrito pela equação $\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$. Ao reescrever como um sistema de equações de primeira ordem autônomas, temos

$$\begin{cases} \dot{\omega} = -k\omega - \frac{g}{L} \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}. \quad (2.32)$$

Usando a equação (2.30), a evolução de $V(t)$ é dada por

$$\frac{dV}{dt} = \int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV = -k \int_v dV, \quad (2.33)$$

cuja solução é $V(t) = V(0)e^{-kt}$. O volume V de dimensão n contido numa superfície S de dimensão $(n-1)$ do espaço de fases sofre contração e colapsa num espaço de dimensão

menor que n . Assim, seu volume tende a zero e as órbitas tendem para os *atratores*, que neste caso, é a origem (Figura 2.7.)

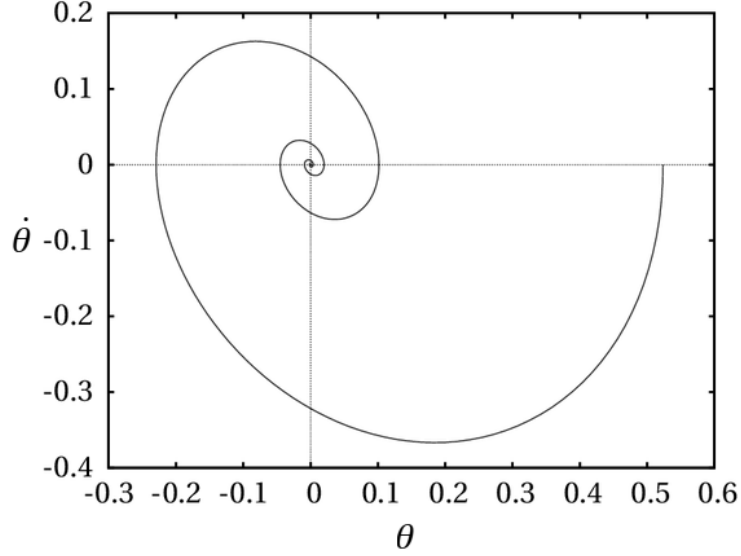


Figura 2.7: Órbita no espaço de fase do pêndulo amortecido convergindo para seu atrator [1].

Em espaços de estado com duas ou mais dimensões pode existir um comportamento periódico que conduz a dinâmica para uma curva fechada que é chamada de *ciclo limite*, que por sua vez, é um atrator unidimensional. Um sistema que possui um ciclo limite como atrator é a equação de Van der Pool, representada por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \mu(1 - x^2)y \end{cases} , \quad (2.34)$$

em que μ é um parâmetro positivo. Esse sistema possui um ponto fixo instável $(x^*, y^*) = (0, 0)$, e com o decorrer do tempo, uma órbita que se inicia em α (Figura 2.8), se afasta até convergir para o ciclo limite, que é assintoticamente estável. Do mesmo modo, a órbita originada em β externa ao ciclo limite dele se aproxima com a evolução dinâmica.

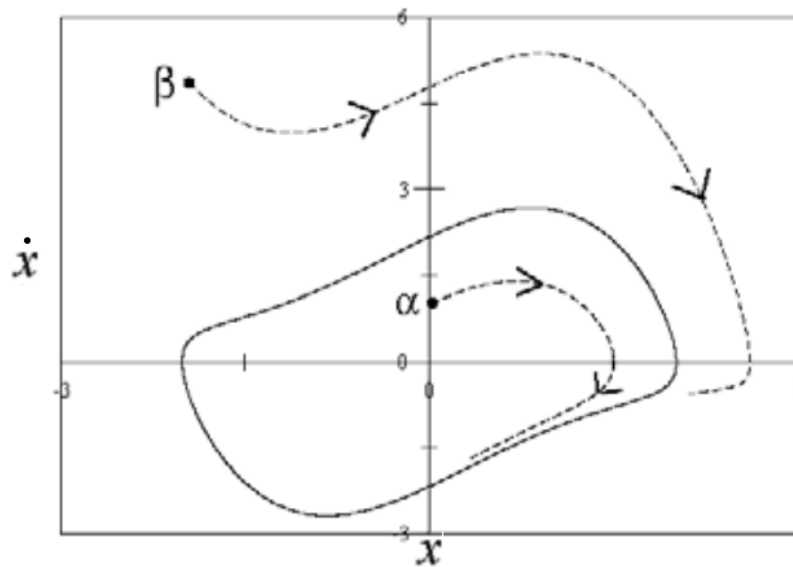


Figura 2.8: Atrator da equação de Van der Pool: órbita com condição inicial dentro (α) e fora (β) do ciclo limite (linha preenchida) são atraídas para este [1].

Os pontos fixos e os ciclos limites esgotam as alternativas dos atratores em espaços de fase bidimensionais. Com rigor, segundo o *Teorema de Poincaré-Bendixson*, qualquer órbita que se inicia em uma região fechada R , limitada e invariante do plano de fase tende a um ponto fixo ou a um ciclo limites quando $t \rightarrow \infty$. Cabe lembrar que o espaço de fases não existe somente em coordenadas retangulares.

Por definição, um atrator consiste de um ponto ou um conjunto de pontos para os quais um conjunto de órbitas converge para tempos suficientemente longos. Ao se atingir o atrator, perde-se a descrição da evolução e este torna-se atemporal no que diz respeito a efeitos transitórios.

A rigor, define-se um atrator como um conjunto de pontos no espaço de fase que atendam às seguintes condições [28]:

1. Qualquer condição inicial que comece no atrator deve permanecer nele durante todo o tempo. Essa condição estabelece que o atrator é invariante.
2. O atrator atrairá para si, para tempos suficientemente longos (aproximação assintótica), um conjunto de condições iniciais diferentes do próprio atrator. O conjunto total de condições iniciais que evolui para um determinado atrator é chamado de bacia de atração.
3. O atrator está em sua forma mínima, ou seja, não existem subconjuntos dele que satisfaçam, simultaneamente, as duas condições anteriores mencionadas.

Para o nosso caso, utilizando o sistema descrito por (4.9), a mudança de valores para o termo b não é capaz de mudar a estabilidade para o ponto fixo $P_1^* = (0,0)$, porém, é possível uma alteração na estabilidade dos pontos fixos $P_2^* = (1,0)$ e $P_3^* = (-1,0)$, levando a um conjunto de possíveis cenários. Para a confecção dos espaços de fases a seguir, foi utilizado o método de integração Runge-Kutta de 4ª com passo fixo $h = 0,001$, para alguns valores de b e condições iniciais.

Utilizando o parâmetro $b = 0$, na Figura 2.9 foram escolhidos valores iniciais na vizinhança dos pontos fixos estáveis $P_2^* = (1,0)$ e $P_3^* = (-1,0)$ e na Figura 2.10, adotou-se condições próximas a $P_1^* = (0,0)$, um ponto de equilíbrio instável. Nota-se, através do espaço de fases das figuras, que as curvas de evolução nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio estáveis são fechadas, implicando em um movimento oscilatório à volta do atrator. Já para a Figura 2.11, escolheram-se valores que não fossem muito próximos a nenhum dos pontos fixos, e neste caso, também houve o aparecimento de curvas fechadas, só que, desta vez, em volta de todos os pontos de equilíbrio presentes no espaço de fases.

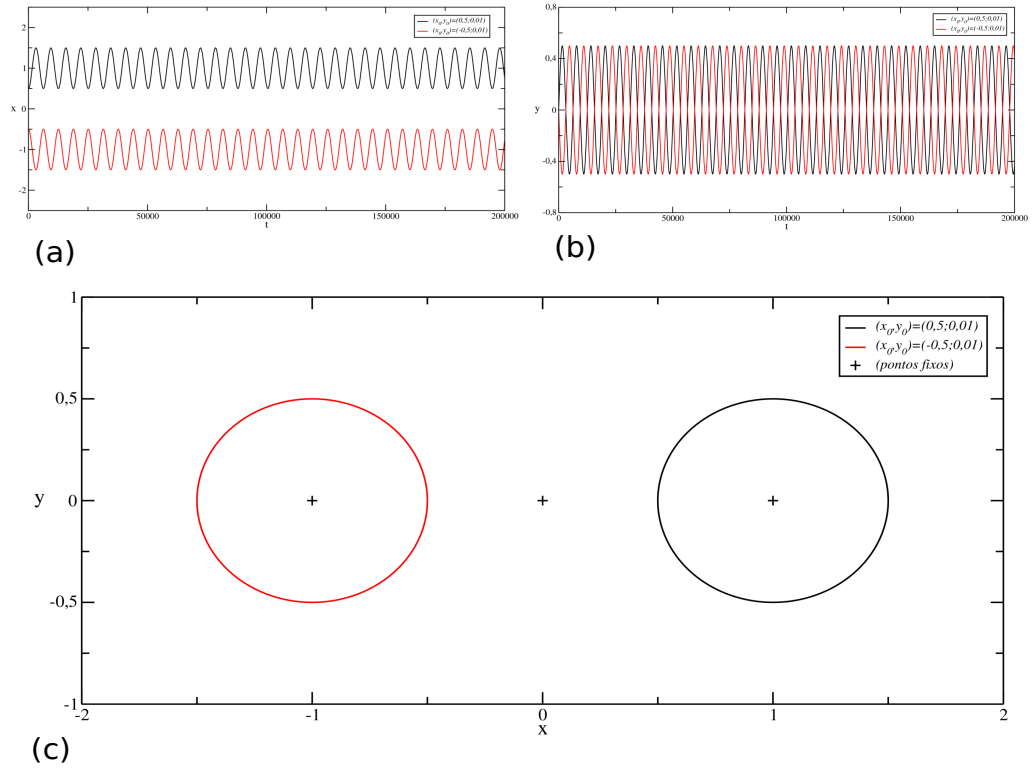


Figura 2.9: Evolução dinâmica de x vs. t em (a), y vs. t em (b) e espaço de fase em (c) para $b = 0$.

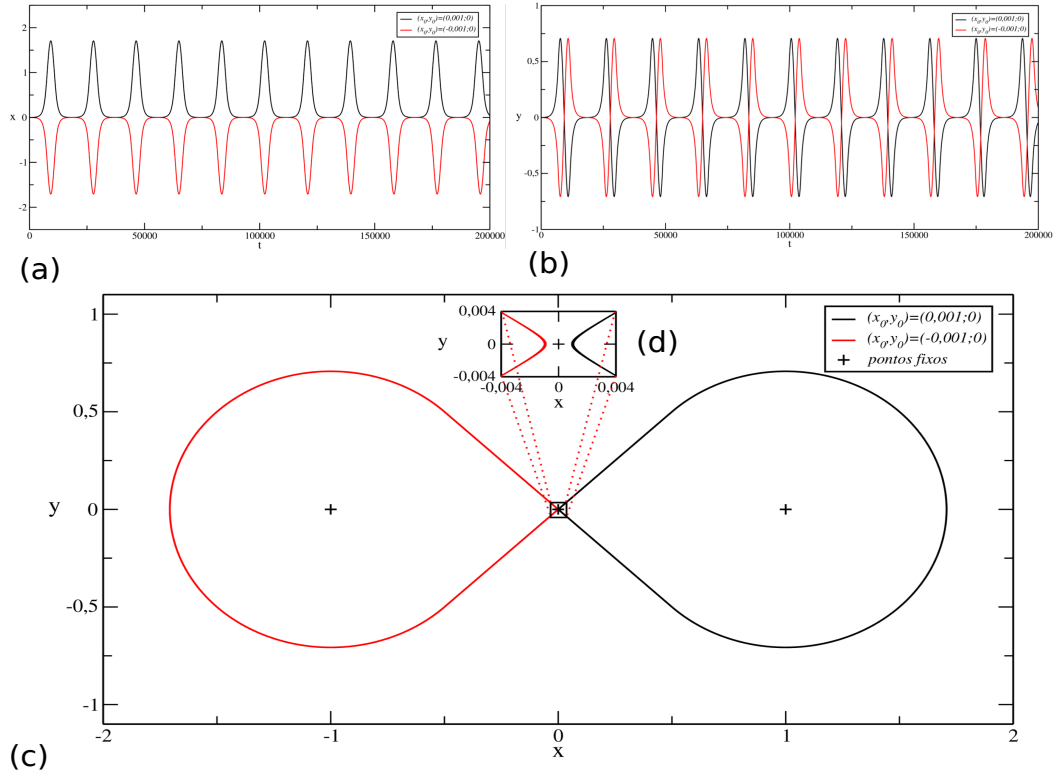


Figura 2.10: Evolução dinâmica de x vs. t em (a), y vs. t em (b), espaço de fase em (c) e detalhe dos valores iniciais em (d) para $b = 0$.

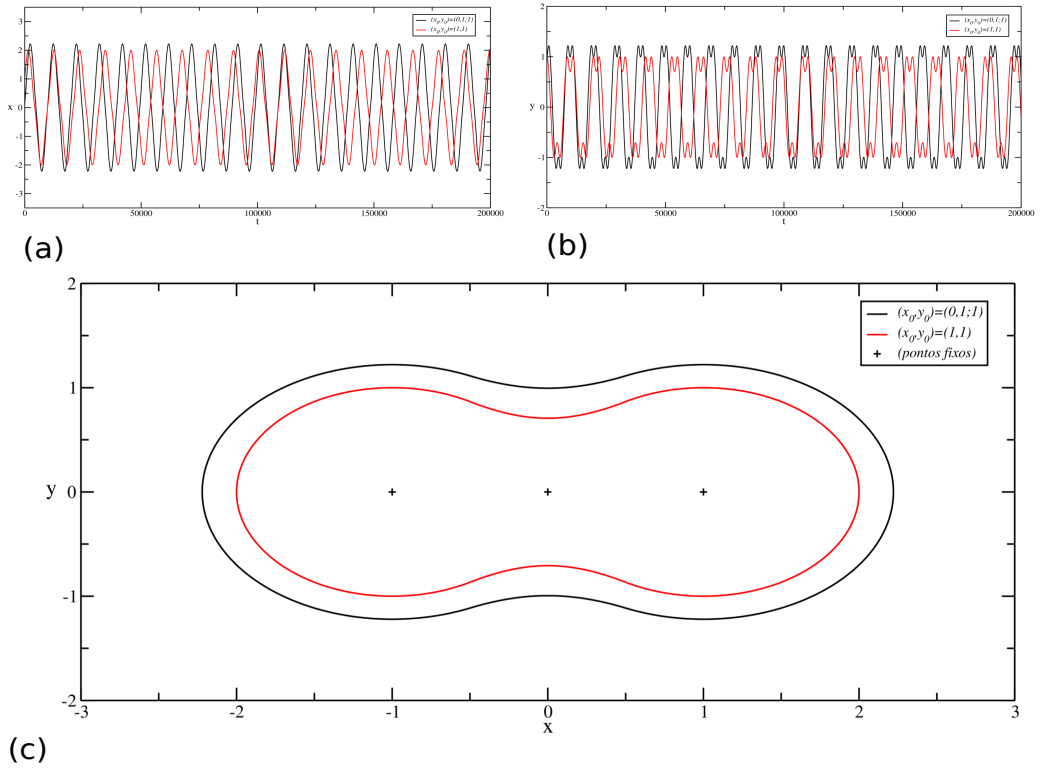


Figura 2.11: Evolução dinâmica de x vs. n em (a), y vs. n em (b) e espaço de fase em (c) para $b = 0$.

É possível encontrar órbitas especiais no espaço de fases de um sistema dinâmico, como as órbitas homoclínicas (ou separatrizes), as quais são comuns em sistemas conservativos. Elas dividem o espaço de fase em regiões que possuem movimentos qualitativamente diferentes, sendo constituídas pela intersecção de variedades estáveis e instáveis conectando um ponto fixo instável a si mesmo, demarcando uma fronteira das zonas de estabilidade. Assim, no retrato de fases da Figura 2.12, o qual inclui órbitas cujas condições iniciais são diversas, há duas curvas de evolução, uma de cada lado, que se aproximam assintoticamente do ponto de equilíbrio instável no limites de $t \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow -\infty$. Porém, nenhuma delas é realmente fechada, pois o próprio ponto de equilíbrio não pertence a nenhuma das curvas e, desse modo, existe uma oscilação não periódica, em que cada variável de estado aumenta (ou diminui) afastando-se do ponto de equilíbrio, porém volta a diminuir (ou aumentar) aproximando-se novamente do ponto de equilíbrio com a evolução do tempo.

Variedades (*manifold*) de um sistema dinâmico são superfícies no espaço de fase que possuem a propriedade de que órbitas que nela se iniciam, aí permanecem com a evolução do sistema [2]. Assim, uma variedade invariante é um conjunto de órbitas que formam tal superfície. Existem três tipos básicos de variedades, dependendo da maneira como as órbitas se aproximam (variedade estável) ou se afastam (variedade instável) de uma variedade invariante conforme o tempo tende para o infinito. Caso as órbitas permaneçam neutras, temos uma variedade central.

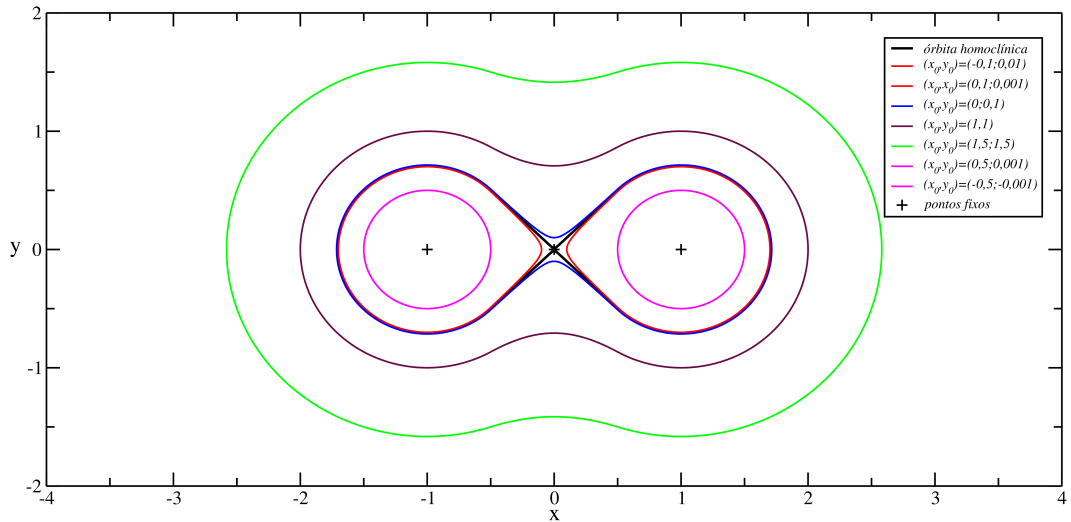


Figura 2.12: Retrato de fase com pontos fixos, várias condições iniciais e órbitas homoclínicas.

Ao admitir valores de parâmetro $b < 0$, o sistema se torna expansivo, fazendo com que os pontos de equilíbrio $P_2^* = (1, 0)$ e $P_3^* = (-1, 0)$ se tornem instáveis. Na Figura 2.13 empregamos condições iniciais próximas a $P_1^* = (0, 0)$ e na Figura 2.14, valores na vizinhança de P_2^* e P_3^* , porém, todos com o mesmo valor de $b = -0, 1$. Nota-se que existe um crescimento acelerado das oscilações presentes na evolução dinâmica, revelando um

espaço de fase cujos focos instáveis apresentam espirais crescentes. Para a Figura 2.15 ($b = -1$), esse crescimento é ainda mais intenso, atingindo várias ordens de grandeza para as variáveis de estado, fazendo com que as espirais possuam poucas voltas. Já para a Figura 2.16, com $b = -2$, temos uma situação limite, pois surge um ponto fixo do tipo fonte.

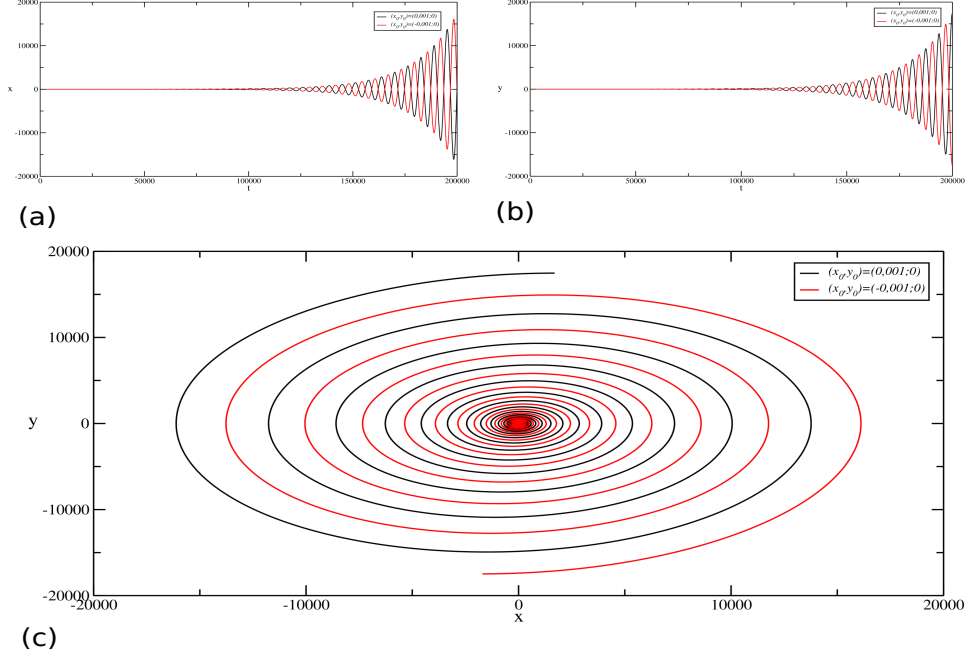


Figura 2.13: Evolução dinâmica de x vs. t em (a), y vs. t em (b) e espaço de fase em (c) para $b = -0,1$.

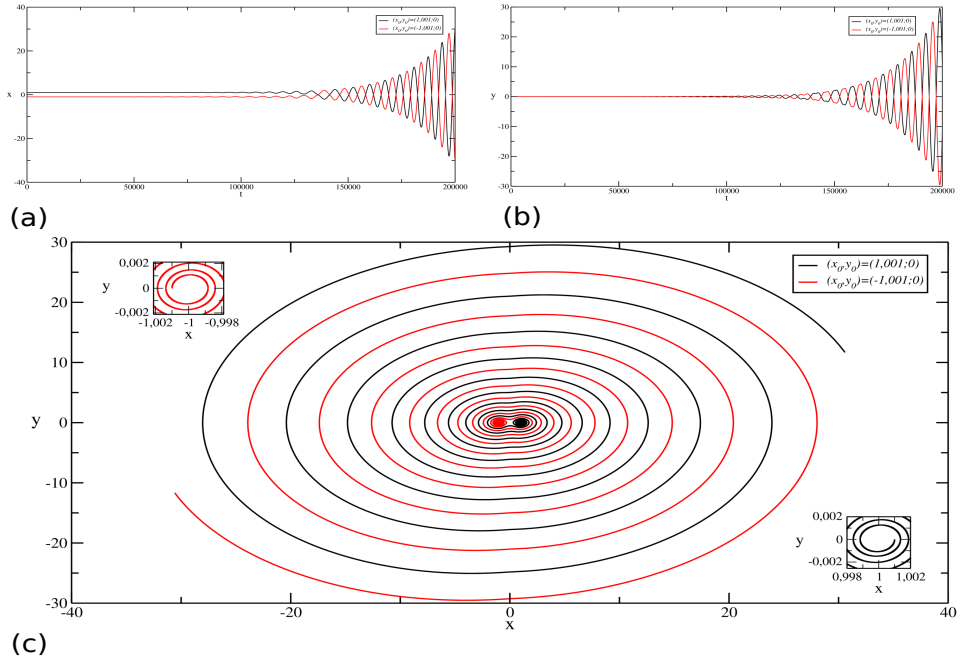


Figura 2.14: Evolução dinâmica de x vs. t em (a), y vs. t em (b) e espaço de fase em (c) para $b = -0,1$.

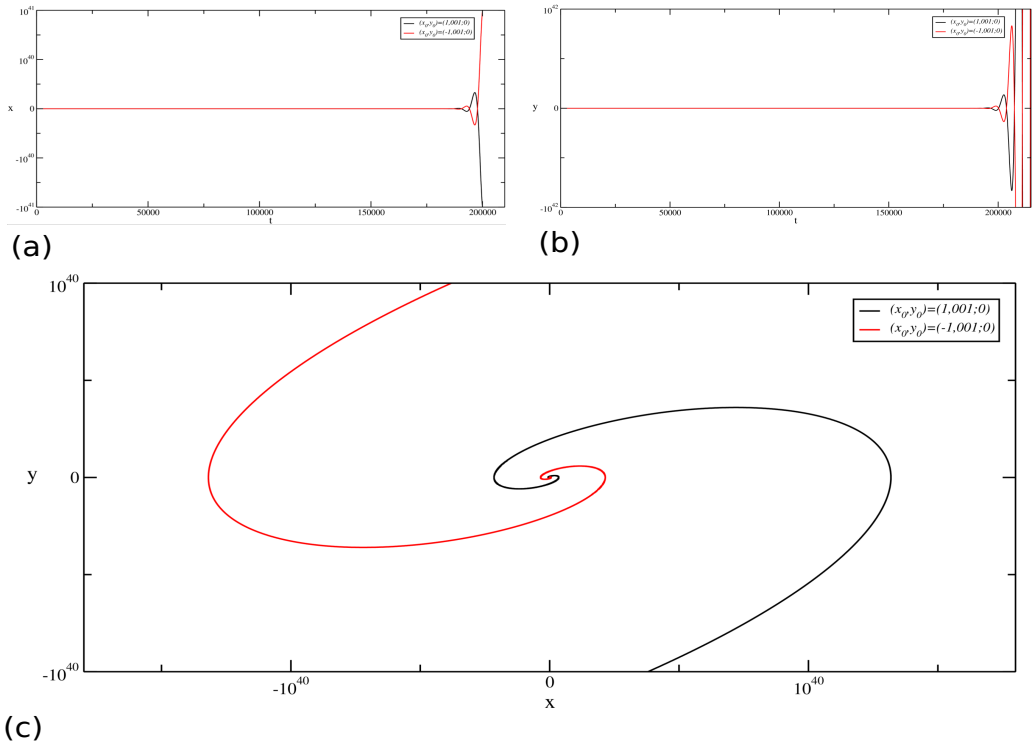


Figura 2.15: Evolução dinâmica de x vs. t em (a), y vs. t em (b) e espaço de fase em (c) para $b = -1$.

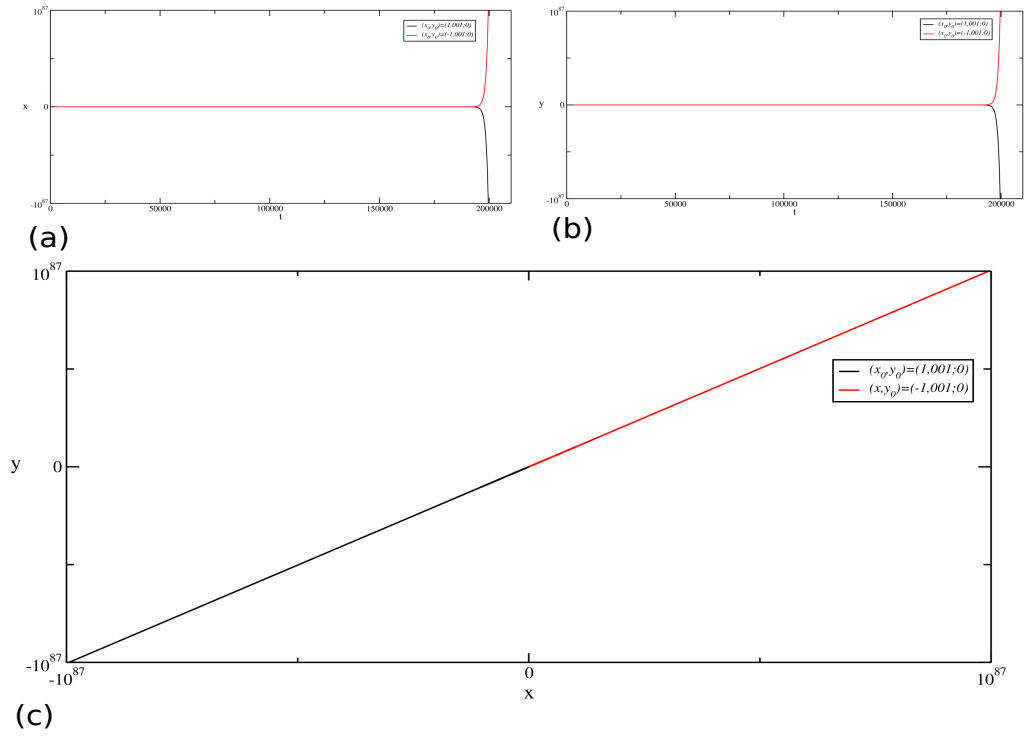


Figura 2.16: Evolução dinâmica de x vs. t em (a), y vs. t em (b) e espaço de fase em (c) para $b = -2$.

Finalmente, para um conjunto de parâmetro $b > 0$, o sistema se torna dissipativo, e assim, os pontos de equilíbrio $P_2^* = (1, 0)$ e $P_3^* = (-1, 0)$ se convertem em assintoticamente estáveis e deste modo, a evolução do sistema ao longo do tempo sempre convergirá para algum atrator. Na Figura 2.17, com o valor de $b = 0,1$ é possível verificar a existência de oscilações amortecidas durante a evolução dinâmica, representadas por espirais no retrato de fase. Com o aumento gradativo de b (Figuras 2.18 para $b = 0,5$ e 2.19 com $b = 1$), há uma diminuição na amplitude das oscilações e de sua quantidade, resultando em focos assintoticamente estáveis com poucas voltas e para o caso limite (Figura 2.20) com $b = 2$, não existe nenhuma evidência de uma oscilação completa até atingir seu estado estacionário. Para todas as figuras anteriores, foram empregadas condições iniciais próximas ao ponto instável $P_1^* = (0, 0)$.

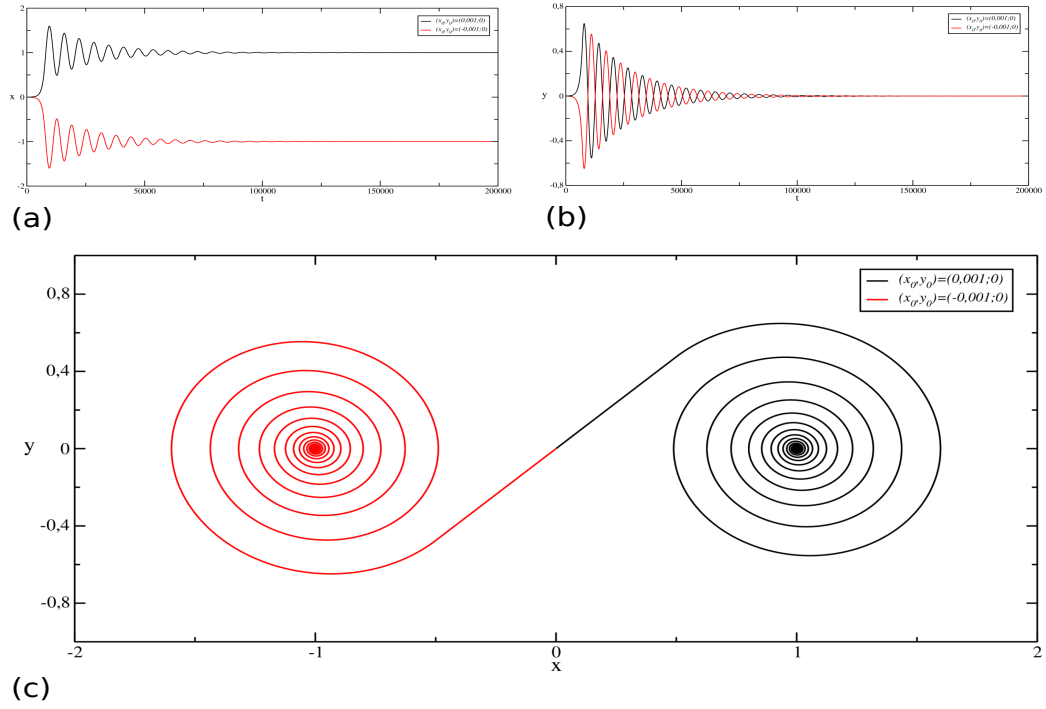


Figura 2.17: Evolução dinâmica de x vs. t em (a), y vs. t em (b) e retrato de fase em (c) para $b = 0, 1$.

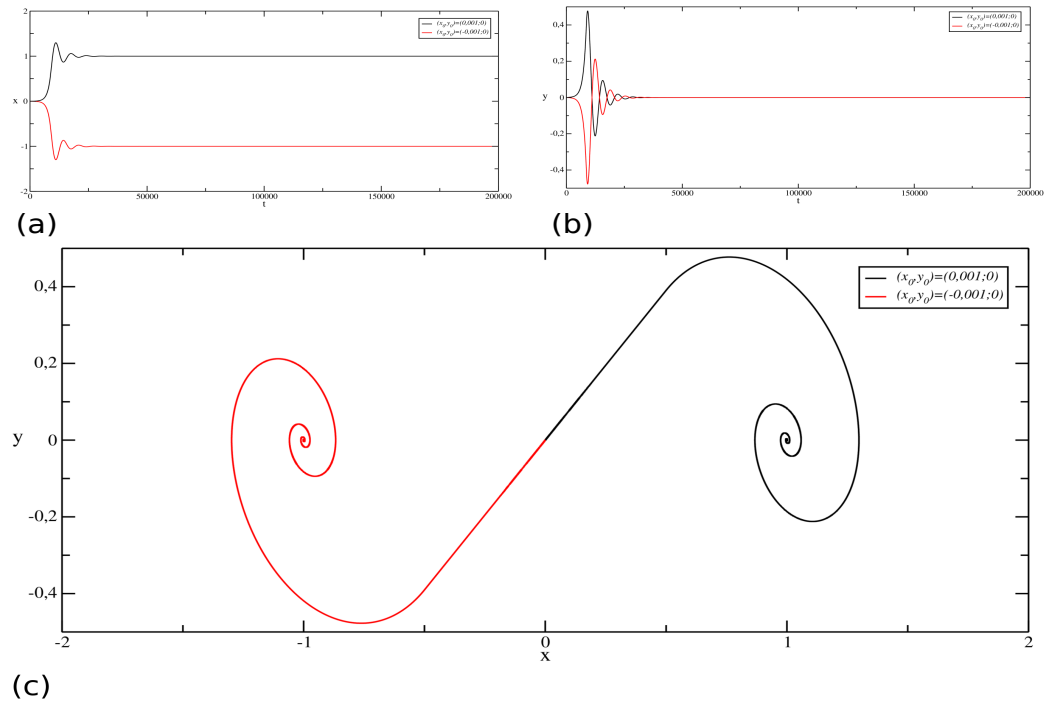


Figura 2.18: Evolução dinâmica de x vs. t em (a), y vs. t em (b) e espaço de fase em (c) para $b = 0, 5$.

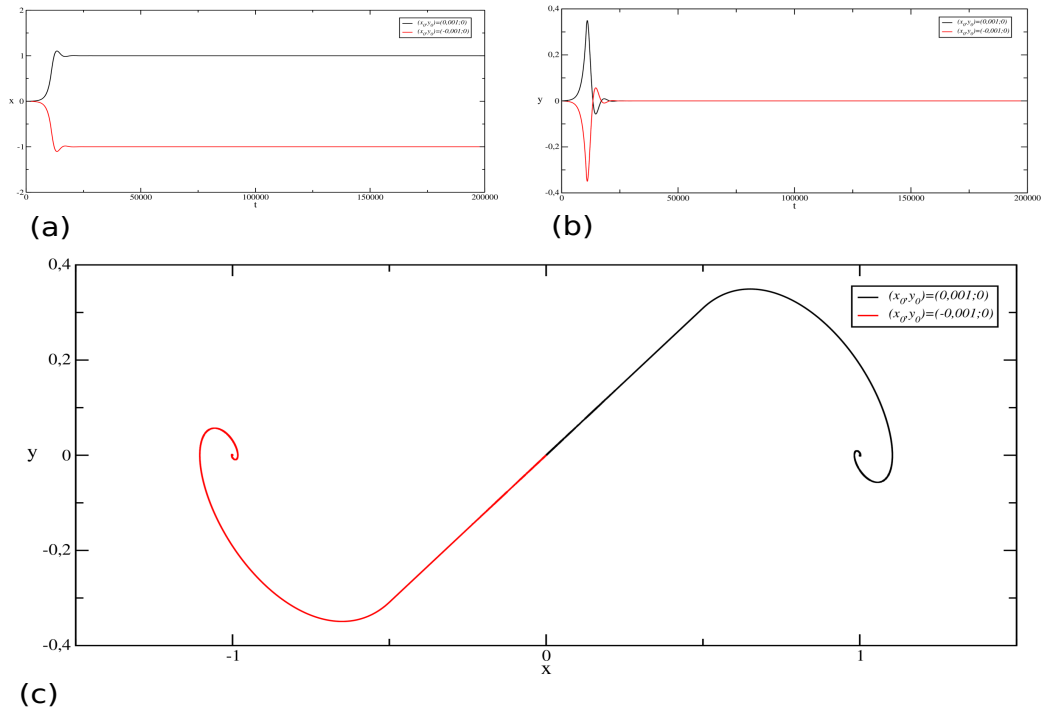


Figura 2.19: Evolução dinâmica de x vs. t em (a), y vs. t em (b) e espaço de fase em (c) para $b = 1$.

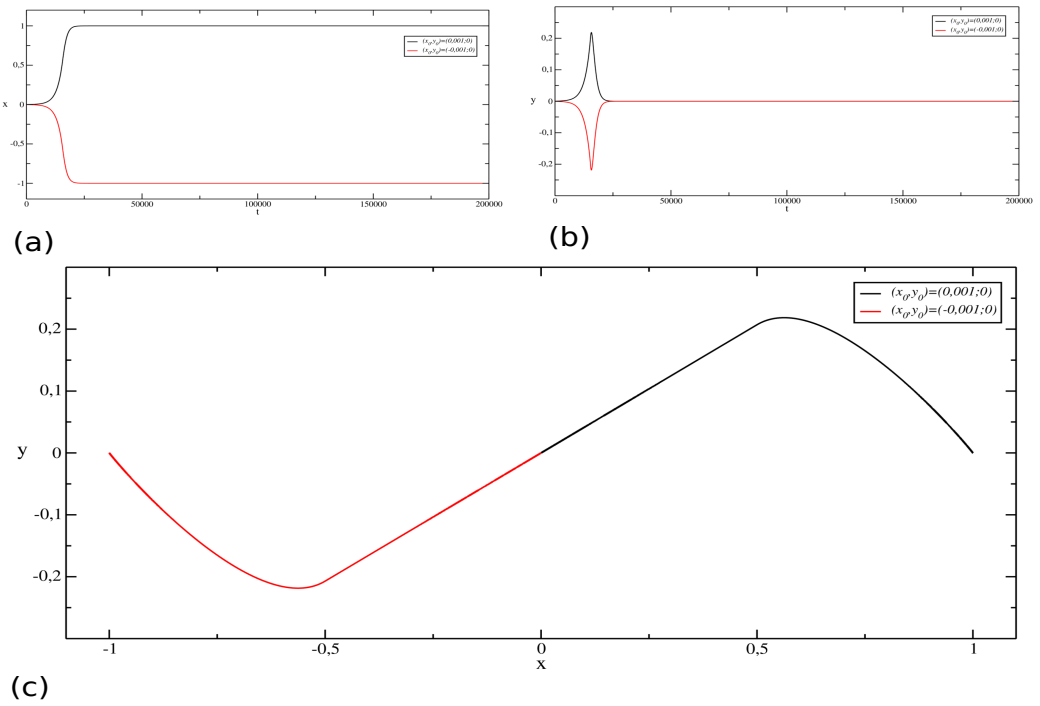


Figura 2.20: Evolução dinâmica de x vs. t em (a), y vs. t em (b) e espaço de fase em (c) para $b = 2$.

2.4.1 Bacia de atração

Uma bacia de atração é definida como um conjunto fechado de condições iniciais que se aproximam de um atrator. Geralmente, é concebida por uma figura que contém n vs. m valores iniciais, representando uma região do espaço de fase. Cada valor inicial é evoluído no tempo, produzindo uma órbita que tende a algum atrator. A relação entre a área ocupada por uma bacia em relação a área total define sua estabilidade [30]. Para nosso estudo, foi utilizado um conjunto de 2000 vs. 2000 valores iniciais, integração numérica pelo método de Runge Kutta de ordem 4 com passo fixo $h = 0,01$ e $b > 0$. Na Figura 2.21 (a) e (b), as bacias de atração são suaves e regulares, cujas fronteiras são definidas por uma linha. Já em (c) e (d), quanto menor o valor do parâmetro b , a bacia de atração se apresenta com regiões mais delgadas e surge um padrão mais complexo.

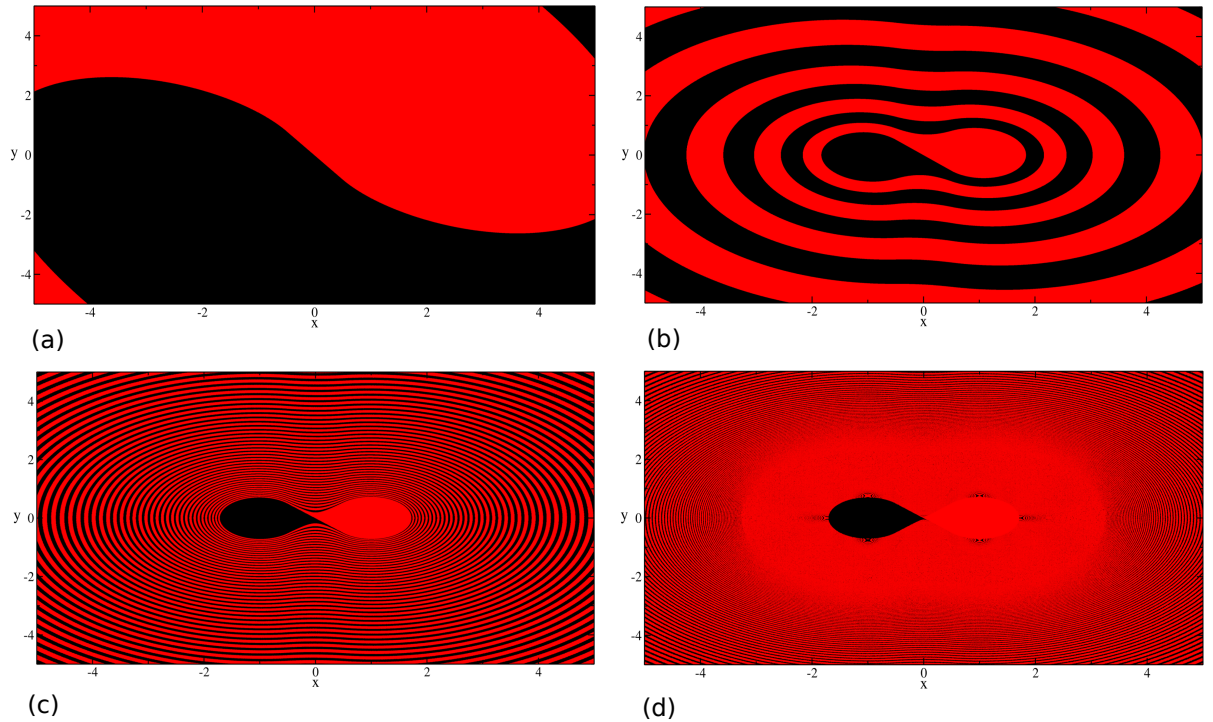


Figura 2.21: Bacia de atração para $b = 1$ (a), $b = 0,1$ (b), $b = 0,01$ (c) e $b = 0,001$ (d).

2.4.2 Convergência para o estado estacionário

Oscilador harmônico

O oscilador harmônico simples, um sistema amplamente estudado em Física, especialmente em Mecânica Clássica, cujo protótipo mais comum é um sistema massa-mola, em que uma partícula de massa m , apoiada em uma superfície sem atrito, está presa a uma mola ideal, perfeitamente elástica, com constante elástica k , podendo se deslocar livremente. A força que a mola faz sobre a partícula é dada pela Lei de Hooke ($F = -kx$),

em que x representa o deslocamento da partícula em relação ao seu ponto de equilíbrio. Como a única força que age sobre a partícula é a força restauradora da mola, o equilíbrio, segundo a 2ª Lei de Newton, se dá por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (2.35)$$

Definindo $\omega^2 = k/m$, podemos reescrever a equação como

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (2.36)$$

cuja solução geral em relação ao deslocamento é

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad (2.37)$$

e para a velocidade,

$$\dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi), \quad (2.38)$$

em que a amplitude da oscilação A e a fase inicial ϕ são determinadas pelas condições iniciais. É possível, também, encontrar a frequência das oscilações do movimento da partícula $\left(f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ e seu período $\left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$. Tanto a frequência como o período são determinados pela massa m e pela constante elástica k . Este sistema não amortecido possui uma solução periódica a qual não converge para nenhum ponto para $t \rightarrow \infty$, sendo apresentada na Figura 2.22 (a) o esboço da solução geral para o deslocamento e em (b) para a velocidade deste tipo de oscilador.

Outro problema de interesse é aquele no qual uma partícula capaz de executar um movimento harmônico simples está apoiada em uma superfície em que o atrito não é desprezado. Nesse meio surge uma força que tende a amortecer as oscilações. Imaginando uma força no meio proporcional à velocidade ($F_{at} = -\gamma v$), escreve-se, agora, a equação que rege o movimento de um oscilador harmônico amortecido

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} - kx, \quad (2.39)$$

que pode ser reescrita

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.40)$$

em que $\frac{\gamma}{m} = 2b$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Supondo uma solução do tipo $x = e^{at}$ e substituindo na Equação (2.40), obtemos a equação característica

$$a^2 + 2ba + \omega_0^2 = 0, \quad (2.41)$$

cujas raízes são dadas por

$$a_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}. \quad (2.42)$$

As raízes acima podem ser complexas, reais e distintas ou reais e iguais, a depender do argumento dentro da raiz quadrada. Deste modo, é possível ter 3 casos:

- **Raízes complexas:** $b^2 - \omega_0^2 < 0$ (oscilador harmônico com amortecimento subcrítico):
Fazendo $\omega^2 = b^2 - \omega_0^2$, tornarmos as raízes $a_{1,2} = -b \pm i\omega$, em que a solução da equação diferencial pode ser formada pelas funções $x = e^{(-b \pm i\omega)t}$ e deste modo podemos escrever a solução geral como

$$x(t) = C_1 e^{(-b+i\omega)t} + C_2 e^{(-b-i\omega)t}. \quad (2.43)$$

Utilizando as relações de Euler, para escrever a solução na forma de senos e cossenos

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-bt} (\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2 e^{-bt} (\cos \omega t - i \sin \omega t) \\ x(t) &= e^{-bt} [(C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Definindo $(C_1 + C_2) = A \cos \delta$ e $i(C_1 - C_2) = A \sin \delta$ e rearranjando os termos, conseguimos encontrar a solução geral para o deslocamento

$$x(t) = A e^{-bt} \cos(\omega t - \delta). \quad (2.45)$$

Este oscilador harmônico é dito subamortecido ou subcrítico em que a velocidade é descrita por

$$\dot{x}(t) = -A e^{-bt} [b \cos(\omega t - \delta) + \omega \sin(\omega t - \delta)]. \quad (2.46)$$

Na Equação 2.45, surge um termo oscilante dado por $\cos(\omega t - \delta)$, porém a amplitude $A e^{-bt}$ diminui com o tempo, fazendo o sistema oscilar, com uma frequência levemente diferente que o do caso não amortecido, cada vez menos até convergir para o ponto de equilíbrio que está na origem do sistema. Sabemos que o ponto fixo para o oscilador harmônico amortecido é a origem pois fazendo $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0$, ou seja, $(x^*, \dot{x}^*) = (0, 0)$.

- **Raízes reais e distintas:** $b^2 - \omega_0^2 > 0$ (oscilador harmônico com amortecimento supercrítico):

Sendo $\sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ um número real, cujas raízes são $a_{1,2} = -b \pm \omega$ em que $\omega^2 = b^2 - \omega_0^2$ e supondo as funções que formam a solução como $x = e^{(-b \pm \omega)t}$, temos a seguinte solução geral

$$x(t) = C_1 e^{(-b+\omega)t} + C_2 e^{(-b-\omega)t}, \quad (2.47)$$

a qual pode ser reescrita

$$x(t) = e^{-bt} [C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}]. \quad (2.48)$$

Com as seguintes definições $C_1 = \frac{A}{2} e^{-\delta}$ e $C_2 = \frac{A}{2} e^{\delta}$ podemos escrever a Equação 2.48 como

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-bt} \left[\frac{A}{2} e^{-\delta} e^{\omega t} + \frac{A}{2} e^{\delta} e^{-\omega t} \right] \\ x(t) &= \frac{A}{2} e^{-bt} [e^{\omega t - \delta} + e^{-(\omega t - \delta)}]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Utilizando a definição de cosseno hiperbólico $\cosh \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$, encontramos a solução para o deslocamento

$$x(t) = A e^{-bt} \cosh(\omega t - \delta). \quad (2.50)$$

Por depender de um cosseno hiperbólico, que não é uma função periódica, o sistema não apresenta oscilação, como acontece no oscilador harmônico amortecido subcrítico. O decaimento à posição de equilíbrio é rápido, já que o amortecimento é forte. A velocidade para o oscilador com amortecimento supercrítico é descrita por

$$\dot{x}(t) = -A e^{-bt} [b \cosh(\omega t - \delta) - \omega \sinh(\omega t - \delta)]. \quad (2.51)$$

- **Raízes reais e iguais:** $b^2 - \omega_0^2 = 0$ (oscilador harmônico com amortecimento crítico): Neste caso, $b^2 = \omega_0^2$ e assim, possuímos duas raízes reais e iguais, ou seja, $C_1 = C_2 = -b$ em que uma das funções da solução é $x = e^{-bt}$. Para o caso de raízes repetidas, a fim de encontrar uma outra função, basta multiplicar por t a função anterior de tal modo que encontraremos $t e^{-bt}$. Agora, podemos enunciar a solução geral, que é

$$x(t) = C_1 e^{-bt} + C_2 t e^{-bt}, \quad (2.52)$$

ou,

$$x(t) = e^{-bt}(A + Bt), \quad (2.53)$$

e lembrando que $b^2 = \omega_0^2$ ou $b = \omega_0$,

$$x(t) = e^{-\omega_0 t}(A + Bt), \quad (2.54)$$

e para a velocidade,

$$\dot{x}(t) = -e^{-\omega_0 t}(\omega_0 A + \omega_0 Bt - B). \quad (2.55)$$

O caso criticamente amortecido é aquele que atinge o equilíbrio mais rapidamente possível sem a existência de oscilações. O nome deste oscilador vem do fato de ser um caso limite entre as duas situações anteriores.

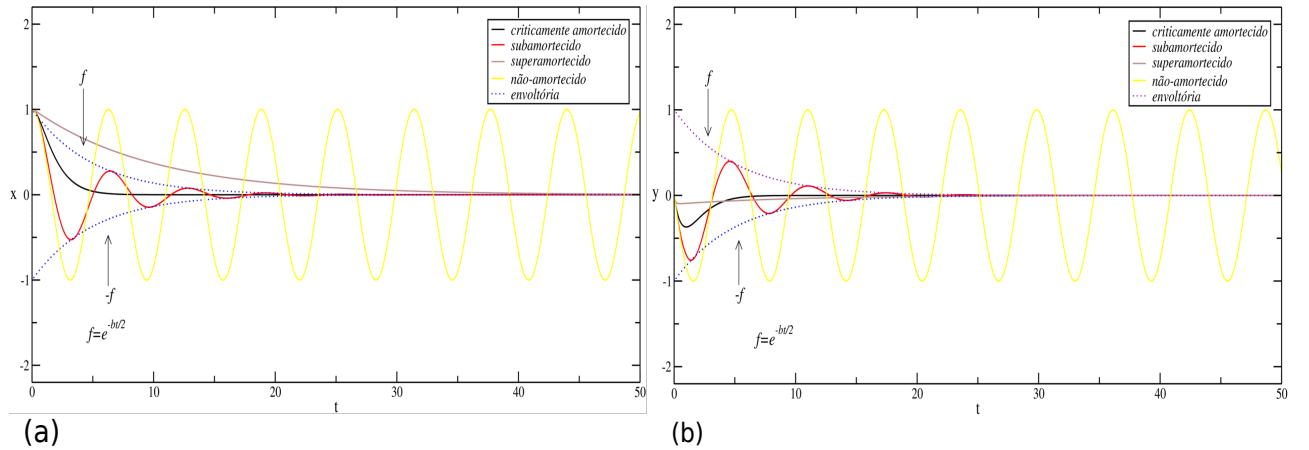


Figura 2.22: Esboço do deslocamento (a) e velocidade (b) dos osciladores harmônicos com as mesmas condições iniciais.

Oscilador amortecido não-linear

A partir de agora, com o comportamento dos osciladores harmônicos amortecidos apresentados previamente, passaremos a investigar a convergência para o estado estacionário do oscilador amortecido não-linear definido por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + |x + 1/2| - |x - 1/2| - by \end{cases}, \quad (2.56)$$

através da variação do parâmetro b e das condições iniciais para um conjunto de valores. Anteriormente, através da discussão dos tipos de pontos fixos que as Equações 4.9

podem apresentar e de suas bacias de atração, foi escolhido o intervalo $0 < b < 1$ para que o oscilador esteja no regime de amortecimento subcrítico, cujas oscilações decrescem gradualmente até um ou outro pontos fixo, a depender de b e das condições iniciais.

O oscilador sempre vai possuir um ponto fixo instável $P_1^* = (0, 0)$ e, para este regime adotado, dois pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis $P_2^* = (1, 0)$ e $P_3^* = (-1, 0)$. Assim, uma maneira de se avaliar a convergência para o estado estacionário sem que haja a dependência da configuração inicial e sem levar em consideração para qual dos dois pontos de equilíbrios a evolução dinâmica caminha é realizar uma mudança nas variáveis de estado passando de coordenadas retangulares para polares, ou seja, de $(x, y) \rightarrow (r, \phi)$, em que

$$\begin{cases} r = \sqrt{(x^2 + y^2)} \\ \phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \end{cases} . \quad (2.57)$$

Com essa mudança nas variáveis de estado, o novo ponto fixo passa a ser $P^*(r^*, \phi^*) = (1, 0)$, e deste modo, podemos construir um gráfico (r vs. t) que mostre a evolução das órbitas do oscilador para o novo ponto fixo. Dessa maneira, a convergência será analisada de duas maneiras:

- **caso 1:** Para esta situação foram escolhidas 19 configurações iniciais, construindo um gráfico em escalas logarítmicas para cada valor de parâmetro b dentre os 3 escolhidos, em que a evolução dinâmica do sistema foi feita com a integração numérica pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem, passo de integração $h = 0,001$, com 10^7 ou 10^8 iterações.

Baseado no decaimento exponencial do oscilador harmônico com amortecimento subcrítico e das órbitas apresentadas no gráfico da Figura 2.23, é apropriado ajustar uma função do tipo $r(t) = r_0 e^{zt}$. Isolando t temos

$$t = \frac{1}{z} \ln \left[\frac{r(t)}{r_0} \right] , \quad (2.58)$$

e o tempo característico t^* para o oscilador convergir até o estado estacionário (r^*, ϕ^*) , com $r^* = 0,37r_0$, é dado por

$$t^* = \frac{1}{z} \ln \left[\frac{r^*}{r_0} \right] . \quad (2.59)$$

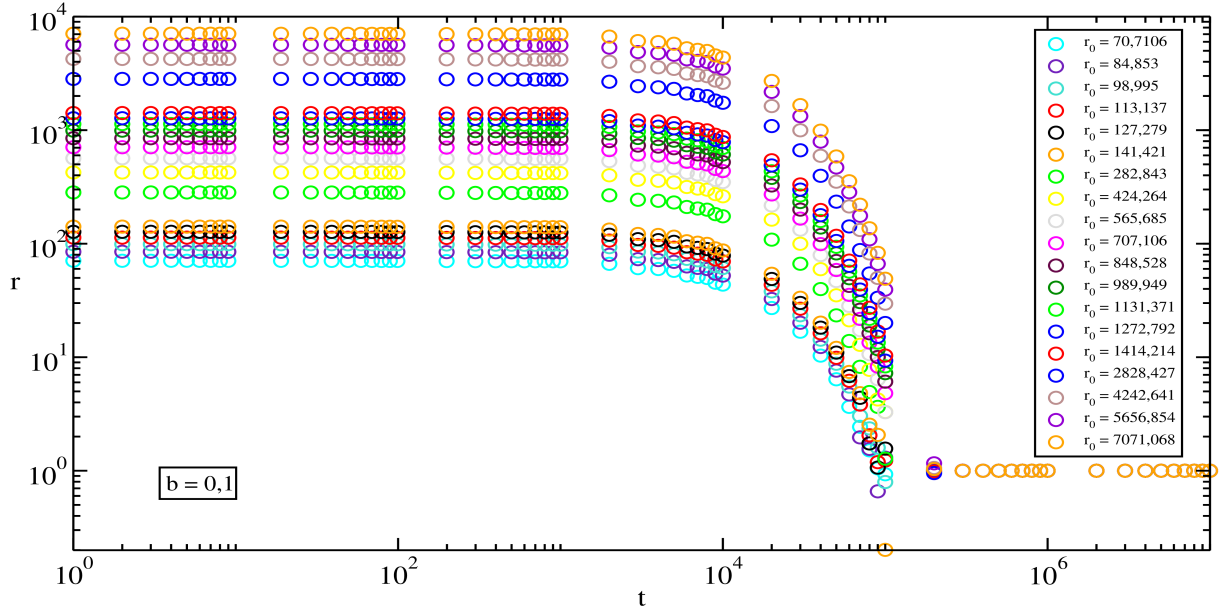


Figura 2.23: Evolução dinâmica considerando 19 configurações iniciais e $b = 0,1$.

Ao realizar um ajuste exponencial para as curvas encontradas, com $b = 0,1$, juntamente, com a Equação 2.59 os valores dos parâmetros são apresentados na tabela abaixo.

Tabela 2.1: Valores obtidos com ajuste exponencial.

r_0	z	t^*
71,32	$-4,84 \times 10^{-5}$	88090,187
86,134	$-5,03 \times 10^{-5}$	88539,039
99,723	$-4,82 \times 10^{-5}$	95390,406
114,37	$-4,91 \times 10^{-5}$	96441,788
129,25	$-5,04 \times 10^{-5}$	96543,717
142,97	$-4,93 \times 10^{-5}$	100596,667
286,62	$-5,03 \times 10^{-5}$	112407,765
429,34	$-5,0 \times 10^{-5}$	121334,770
572,06	$-4,98 \times 10^{-5}$	127540,956
714,87	$-4,97 \times 10^{-5}$	132200,847
857,73	$-4,97 \times 10^{-5}$	135961,378
1000,6	$-4,97 \times 10^{-5}$	139118,673
1143,5	$-4,96 \times 10^{-5}$	141844,073
1286,4	$-4,96 \times 10^{-5}$	144242,140
1429,3	$-4,96 \times 10^{-5}$	146384,978
2858,2	$-4,96 \times 10^{-5}$	160419,846
4287,2	$-4,96 \times 10^{-5}$	168613,316
5716,2	$-4,96 \times 10^{-5}$	174423,555
7145,2	$-4,96 \times 10^{-5}$	178926,065

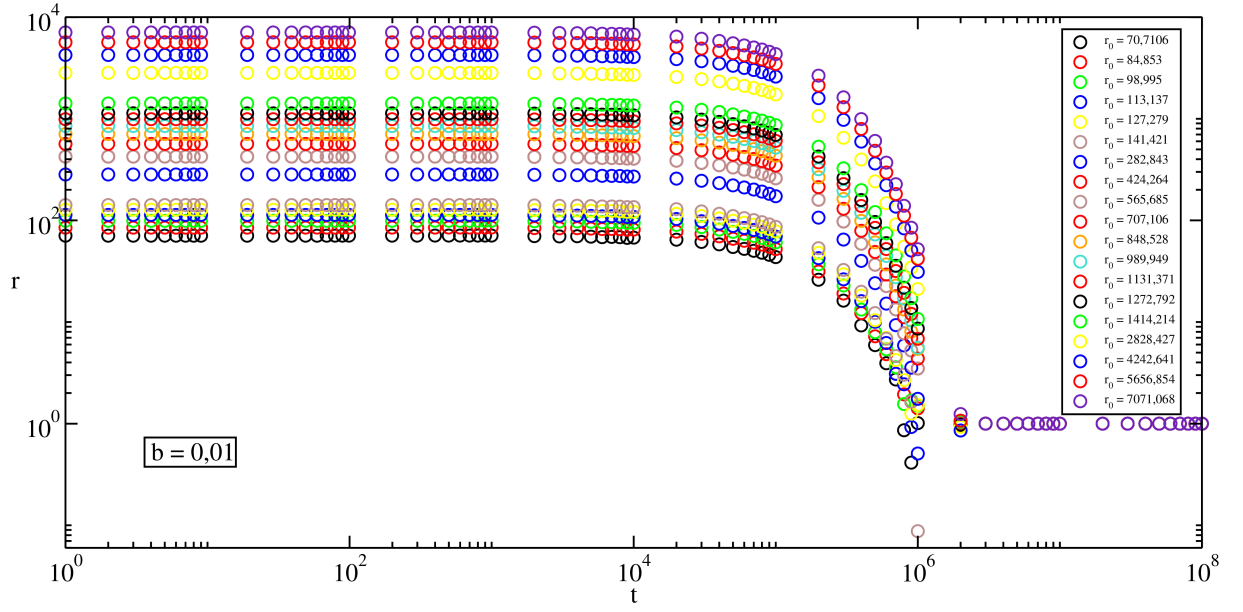


Figura 2.24: Evolução dinâmica considerando 19 configurações iniciais e $b = 0,01$.

Tabela 2.2: Valores obtidos com ajuste exponencial.

r_0	z	t^*
70,618	$-4,82 \times 10^{-6}$	882430,318
84,781	$-4,81 \times 10^{-6}$	922516,405
98,987	$-4,87 \times 10^{-6}$	943297,037
113,55	$-4,96 \times 10^{-6}$	954196,731
127,43	$-4,89 \times 10^{-6}$	991626,714
141,72	$-4,94 \times 10^{-6}$	1003718,626
283,11	$-4,89 \times 10^{-6}$	1154378,734
424,94	$-4,92 \times 10^{-6}$	1230345,805
566,64	$-4,92 \times 10^{-6}$	1287515,065
708,1	$-4,91 \times 10^{-6}$	1335650,532
849,57	$-4,91 \times 10^{-6}$	1374596,029
991,33	$-4,91 \times 10^{-6}$	1404214,747
1133,2	$-4,92 \times 10^{-6}$	1429198,660
1274,8	$-4,92 \times 10^{-6}$	1453746,840
1416,3	$-4,92 \times 10^{-6}$	1476076,799
2832,3	$-4,91 \times 10^{-6}$	1617920,696
4248,6	$-4,91 \times 10^{-6}$	1700145,464
5664,8	$-4,91 \times 10^{-6}$	1758511,083
7081,1	$-4,91 \times 10^{-6}$	1803809,905

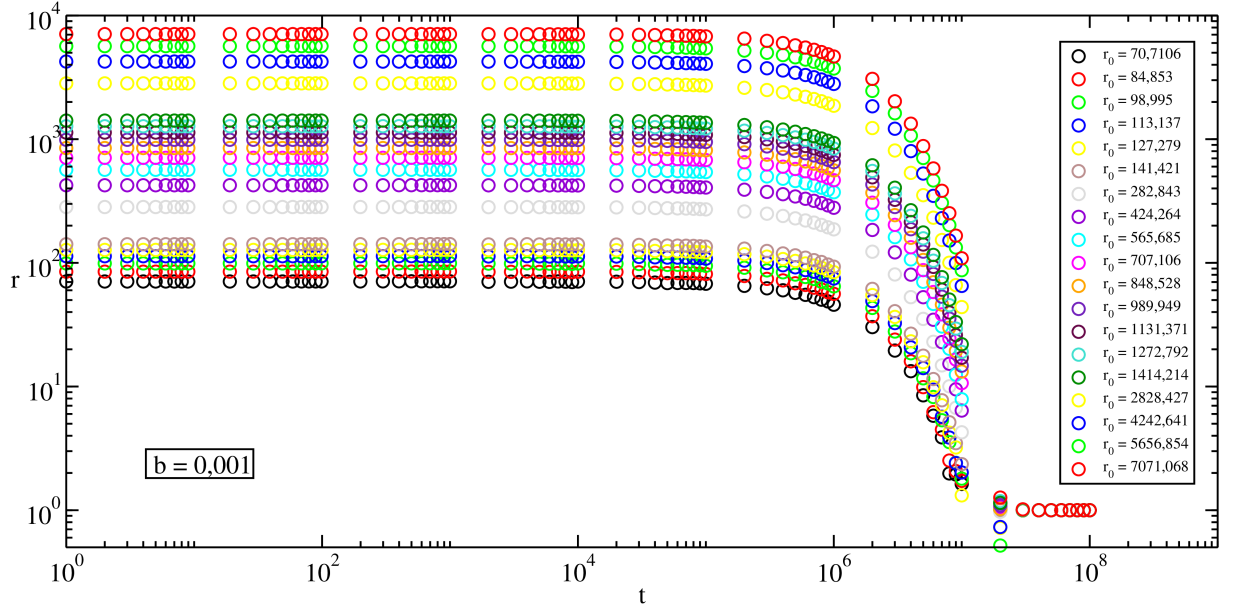


Figura 2.25: Evolução dinâmica considerando 19 configurações iniciais e $b = 0,001$.

Tabela 2.3: PValores obtidos com ajuste exponencial.

r_0	z	t^*
70,703	$-4,18 \times 10^{-7}$	10179003,740
84,988	$-4,26 \times 10^{-7}$	10435286,268
99,019	$-4,19 \times 10^{-7}$	10969425,548
113,25	$-4,21 \times 10^{-7}$	11245150,299
127,32	$-4,19 \times 10^{-7}$	11558208,576
141,45	$-4,16 \times 10^{-7}$	11900284,287
283	$-4,19 \times 10^{-7}$	13467834,576
424,37	$-4,17 \times 10^{-7}$	14504976,066
565,75	$-4,17 \times 10^{-7}$	15207793,949
707,22	$-4,17 \times 10^{-7}$	15740672,179
848,65	$-4,17 \times 10^{-7}$	16178410,506
990,16	$-4,17 \times 10^{-7}$	16543233,274
1131,7	$-4,17 \times 10^{-7}$	16853161,895
1273,1	$-4,17 \times 10^{-7}$	17141922,385
1414,4	$-4,17 \times 10^{-7}$	17407224,215
2828,9	$-4,17 \times 10^{-7}$	19074191,140
4243,4	$-4,17 \times 10^{-7}$	20042998,641
5658	$-4,17 \times 10^{-7}$	20729358,391
7072,3	$-4,17 \times 10^{-7}$	21270225,383

As Tabelas 2.2 e 2.3 foram obtidas pelo mesmo procedimento adotado na Tabela 2.1,

2.2 e, desta maneira, pode-se construir um gráfico para expressar as relações entre os parâmetros t^* e r_0 , mostrado a seguir.

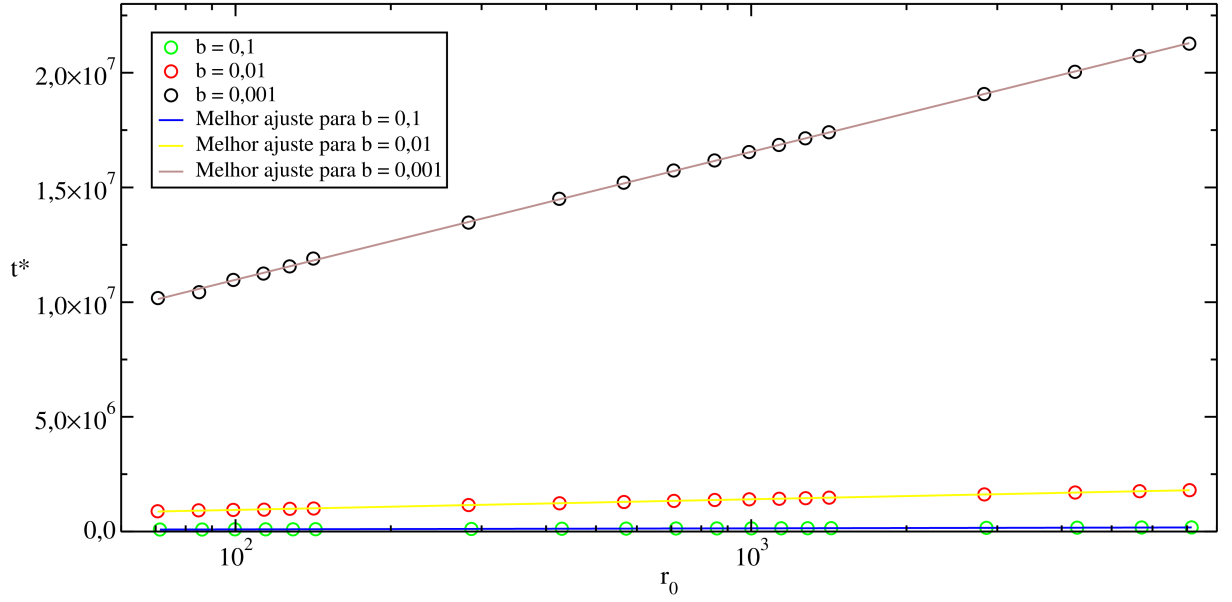


Figura 2.26: Gráficos de t^* vs r_0 para diferentes valores de b e seus melhores ajustes.

Através de ajuste por uma função logarítmica encontraram-se as equações que relacionam t^* e r_0 , revelando a dependência no tempo para se atingir o estado estacionário em função do valor inicial escolhido. E, assim, obtemos para $b = 0,001$: $t^* = 849,94 + 20023 \ln r_0$, para $b = 0,01$: $t^* = 14704 + 2,01 \times 10^5 \ln r_0$ e, sendo $b = 0,1$: $t^* = -1,81 \times 10^5 + 2,42 \times 10^6 \ln r_0$.

- **caso 2:** Para esta investigação foram escolhidos 27 valores para o parâmetro b e apenas uma condição inicial $r_0 = 707,167$, construindo, também, um gráfico em escalas logarítmicas em que a evolução dinâmica do sistema foi feita com a integração numérica pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem, passo de integração $h = 0,001$, com 10^8 iterações.

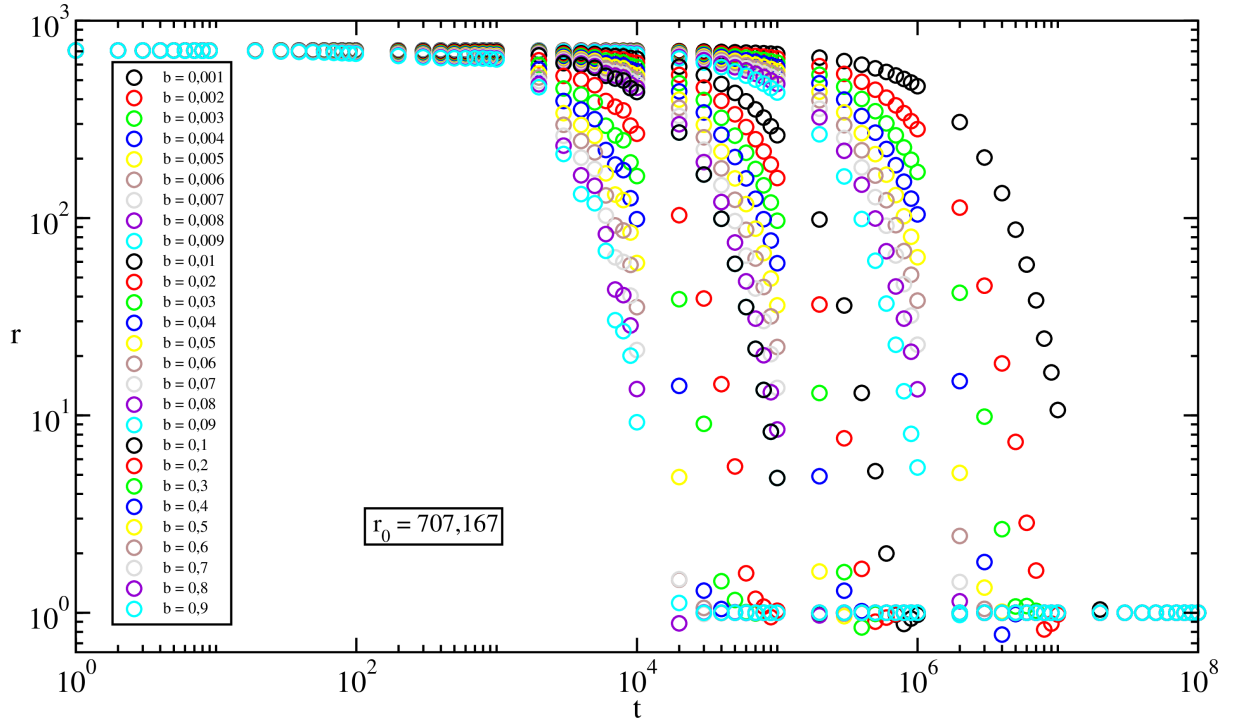


Figura 2.27: Evolução dinâmica considerando 27 valores de b e apenas uma condição inicial $r_0 = 707,167$.

De modo equivalente, ao fixar uma configuração inicial e variar outro parâmetro, efetuamos um ajuste exponencial para as curvas encontradas, com $r_0 = 707,167$, juntamente, com a Equação 2.59 cujos valores dos parâmetros são apresentados na tabela a seguir.

Tabela 2.4: Valores obtidos com ajuste exponencial.

b	r_0	z	t^*
0,001	707,53	$-4,18 \times 10^{-7}$	16094900,994
0,002	704,49	$-8,98 \times 10^{-7}$	8120965,344
0,003	706,62	$-1,41 \times 10^{-6}$	5123052,266
0,004	710,71	$-1,96 \times 10^{-6}$	4677526,5333
0,005	694,64	$-2,24 \times 10^{-6}$	3592862,428
0,006	705,16	$-2,87 \times 10^{-6}$	2857980,559
0,007	698,12	$-3,25 \times 10^{-6}$	2211306,966
0,008	708,24	$-3,93 \times 10^{-6}$	1867693,972
0,009	707,87	$-4,41 \times 10^{-6}$	1800055,187
0,01	708,87	$-4,944 \times 10^{-6}$	1327361,959
0,02	709,5	$-9,952 \times 10^{-6}$	659569,216
0,03	710,72	$-1,498 \times 10^{-5}$	438073,156
0,04	710,92	$-1,992 \times 10^{-5}$	329613,487
0,05	710,91	$-2,477 \times 10^{-5}$	265004,473
0,06	711,59	$-2,973 \times 10^{-5}$	220897,443
0,07	712,19	$-3,466 \times 10^{-5}$	189496,991
0,08	712,72	$-3,957 \times 10^{-5}$	165995,063
0,09	713,36	$-4,452 \times 10^{-5}$	147570,499
0,1	652,37	$-4,03 \times 10^{-5}$	160949,009
0,2	662,46	$-8,00 \times 10^{-5}$	81209,653
0,3	688,81	$-1,276 \times 10^{-4}$	51230,522
0,4	714,41	$-1,405 \times 10^{-4}$	46775,265
0,5	712,28	$-1,828 \times 10^{-4}$	35928,624
0,6	722,55	$-2,303 \times 10^{-4}$	28579,805
0,7	751,93	$-2,995 \times 10^{-4}$	22113,0698
0,8	728,44	$-3,529 \times 10^{-4}$	18676,939
0,9	704,96	$-3,643 \times 10^{-4}$	18000,5511

Parece ser razoável supor, fundamentado no comportamento das curvas na Figura 2.27 e pelos dados contidos na Tabela 2.4, a existência de uma relação $t^* = b^\alpha$, em que α é uma constante qualquer. A Figura 2.28 mostra um gráfico t^* vs. b em escalas logarítmicas, em que, ao se fazer o ajuste dos dados vindos de simulação numérica, o expoente $\alpha = -1$.

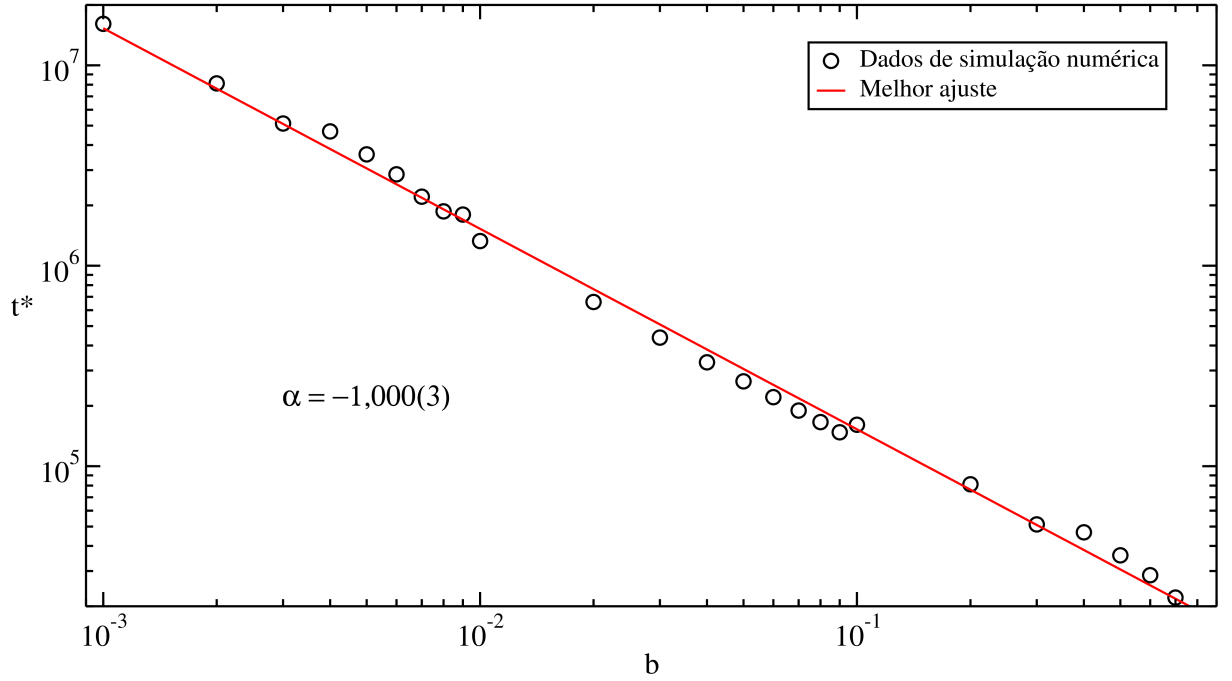


Figura 2.28: Comportamento de t^* vs. b . Um ajuste em lei de potência nos fornece $\alpha = -1,000(3)$

Muito embora as órbitas apresentadas, construídas com diversas configurações iniciais e valores de parâmetro b , sejam diferentes, todas elas exibem uma universalidade, convergindo para o ponto fixo (r^*, ϕ^*) quando $t \rightarrow \infty$. Abaixo, temos um exemplo, em que o eixo das ordenadas passa de $r \rightarrow |r - r^*|$, levando em consideração a distância entre o valor inicial r_0 até r^* durante toda a evolução dinâmica.

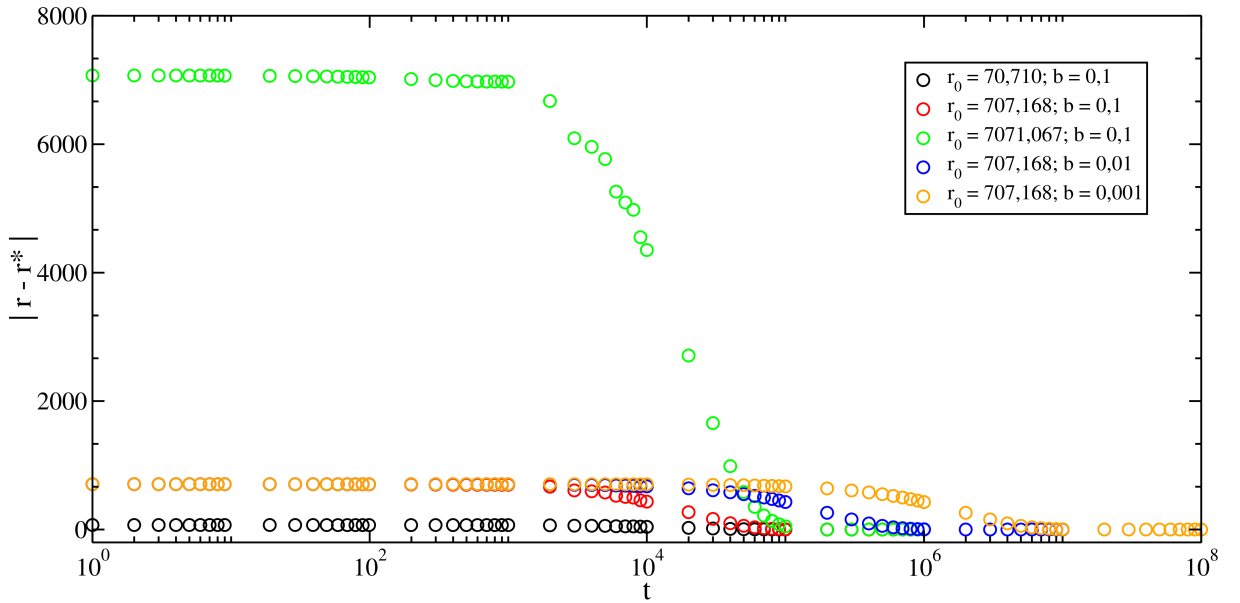


Figura 2.29: Comportamento do decaimento para valores (conforme legenda) para estado estacionário.

Portanto, uma alternativa é fazermos uma reescala dos eixos coordenados para cada

curva da Figura 2.29 fazendo as transformações $|r - r^*| \rightarrow |r - r^*|/|r_0 - r^*|$ e $t \rightarrow t/b^\alpha$, cuja sobreposição de todas as curvas é mostrada na Figura 2.30

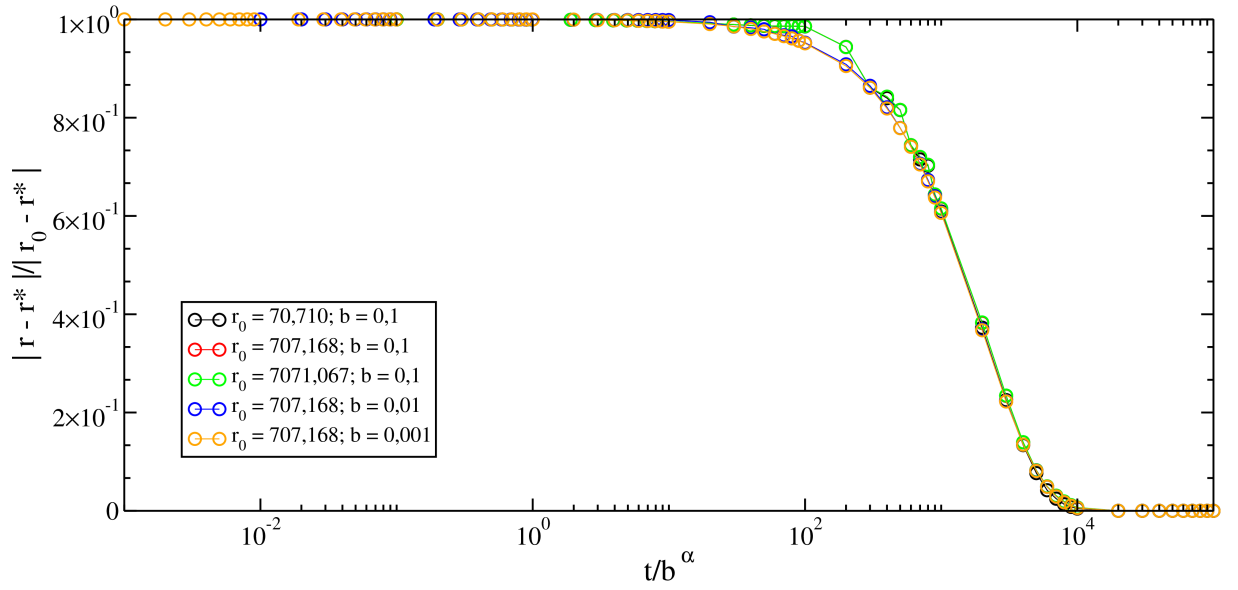


Figura 2.30: Sobreposição de todas as curvas para uma única curva universal.

Deste modo, é possível construir uma única curva universal através da reorganização dos eixos do gráfico. Tal curva mostra a universalidade do sistema estudado em relação ao modo como ocorre o decaimento para os pontos fixos.

Capítulo 3

Oscilador amortecido não-linear: caso com forçamento externo

Resumo

Considerando o oscilador amortecido não-linear com forçamento externo, analisamos o espaço de fases para diversas combinações de parâmetros de controle e fizemos um estudo de bacias de convergência para diferentes grades de condições iniciais. Além disso, foi feito uma revisão sobre o fenômeno de ressonância e como ele se aplica ao nosso oscilador perturbado.

3.1 Mapa de Poincaré

O mapa de Poincaré, em homenagem a Henri Poincaré, é a interseção de uma órbita periódica no espaço de estado de um sistema dinâmico contínuo com um certo subespaço de dimensão inferior, chamado de seção de Poincaré, transversal ao fluxo do sistema. A transversalidade da seção de Poincaré significa que as órbitas periódicas começando no subespaço fluem através dele e não paralelas a ele.

Por preservar muitas propriedades de órbitas periódicas e quase-periódicas do sistema original e ter um espaço de estado de dimensão inferior, é frequentemente usado para analisar o sistema original de uma forma mais simples.

Não existe um método geral para a construção de um mapa de Poincaré, mas existem algumas situações usuais. Podemos ter uma visão estroboscópica do sistema. Em sistemas com um período de excitação, uma possível seção de Poincaré é coletar a variável dinâmica de interesse a cada período, sendo essa seção também chamada de mapa estroboscópico.

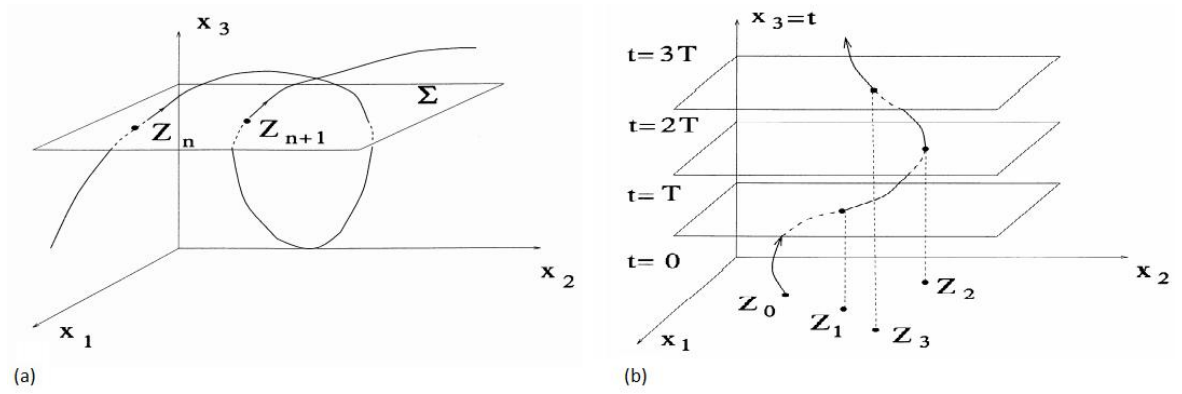


Figura 3.1: Mapa de Poincaré para um espaço de fase 3-dimensional (a) e mapa estroboscópico para um sistema bidimensional não-autônomo onde $T = \text{constante}$ (b).

Na Figura 3.2, para uma órbita de período 1, notamos 1 ponto na seção de Poincaré, pois a trajetória após executar o período passa pela seção no mesmo ponto que havia passado anteriormente. Para uma órbita de período 2, a informação deixada pela trajetória na seção de Poincaré são 2 pontos, um para cada revolução executada e assim sucessivamente para períodos superiores. Portanto, para uma seção de Poincaré cuja órbita é periódica, encontramos a periodicidade da órbita. Para uma órbita caótica, a imagem deixada na seção de Poincaré é bastante peculiar, já que a trajetória nunca cruza essa superfície em pontos iguais.

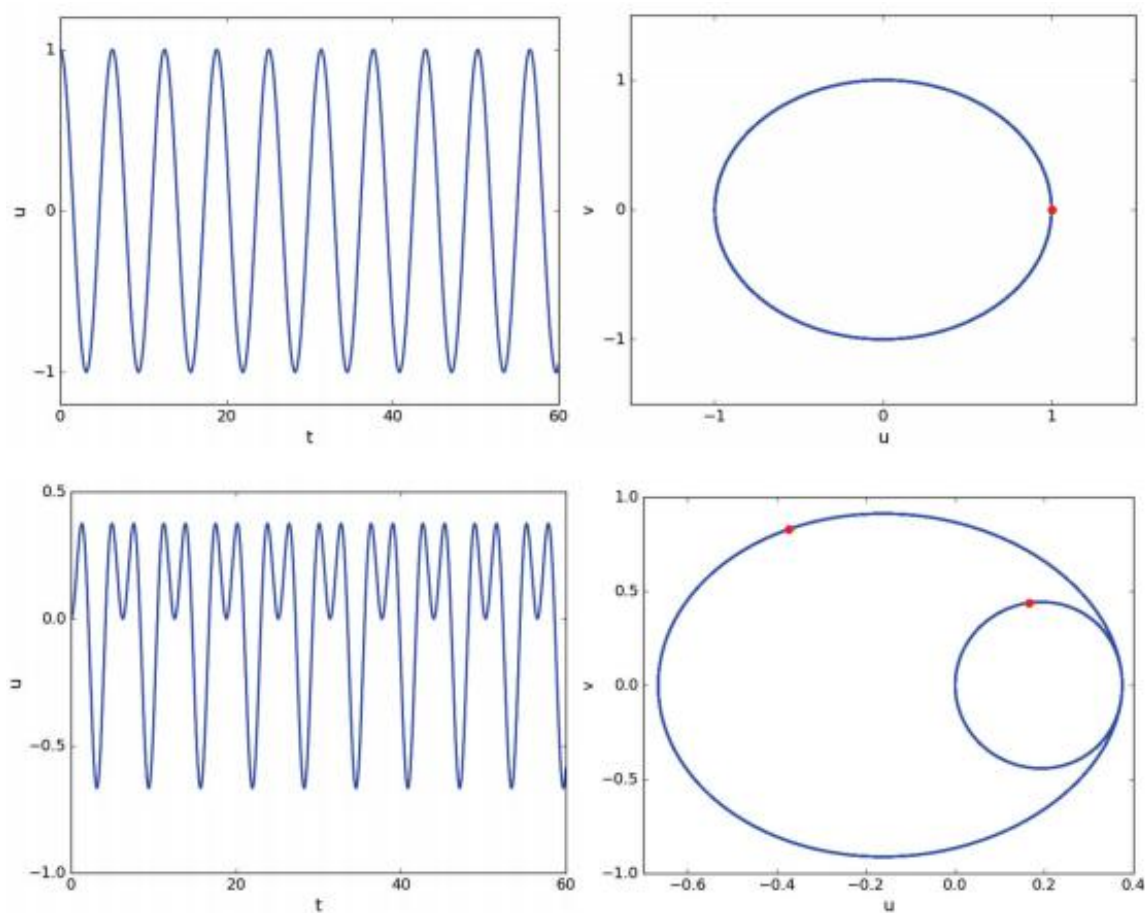


Figura 3.2: Órbitas periódicas e suas seções de Poincaré [1].

Um método simples e que satisfaz as condições de máximo de informação é selecionarmos os pontos de máximo ou de mínimo da série temporal e os gravarmos então em uma nova série. As novas séries temporais ou são definidas a partir dessa escolha. Na figura acima, apresentamos a seção de Poincaré de uma série periódica, porém, esse método também pode ser aplicado para séries temporais caóticas.

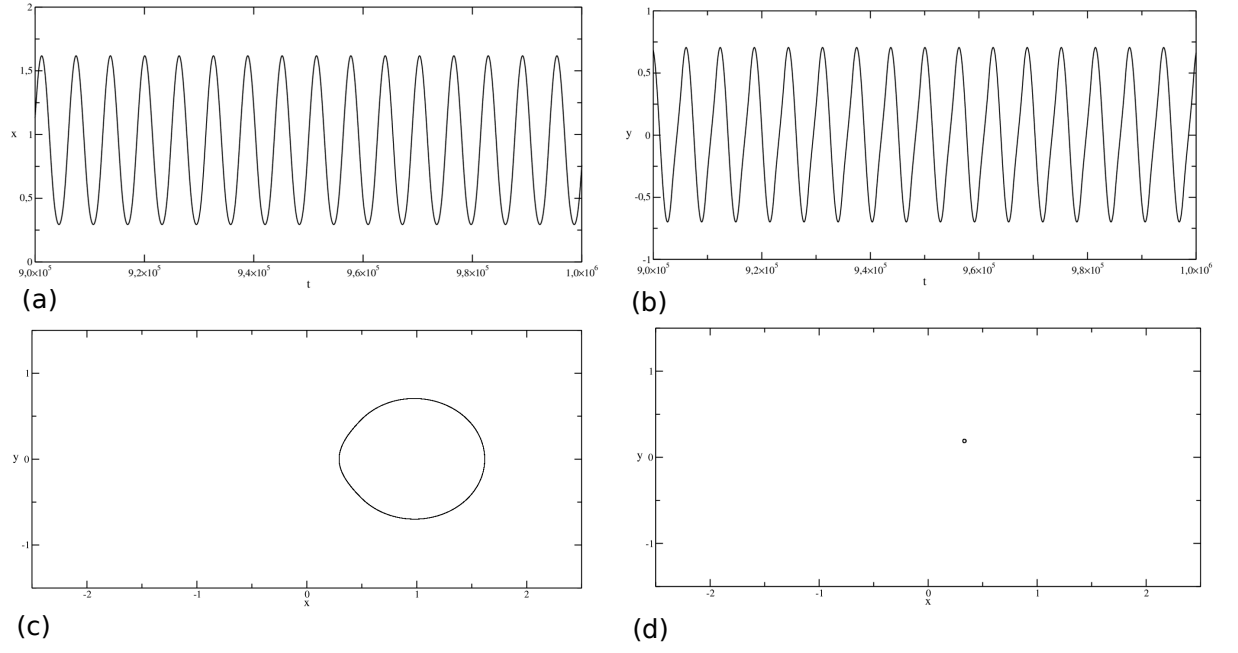


Figura 3.3: Evolução temporal de x em (a), de y em (b), retrato de fase (c) e mapa de poincaré (d) para os seguintes valores: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\omega = 1$, $b = 0,1$ e $e = 0,166$.

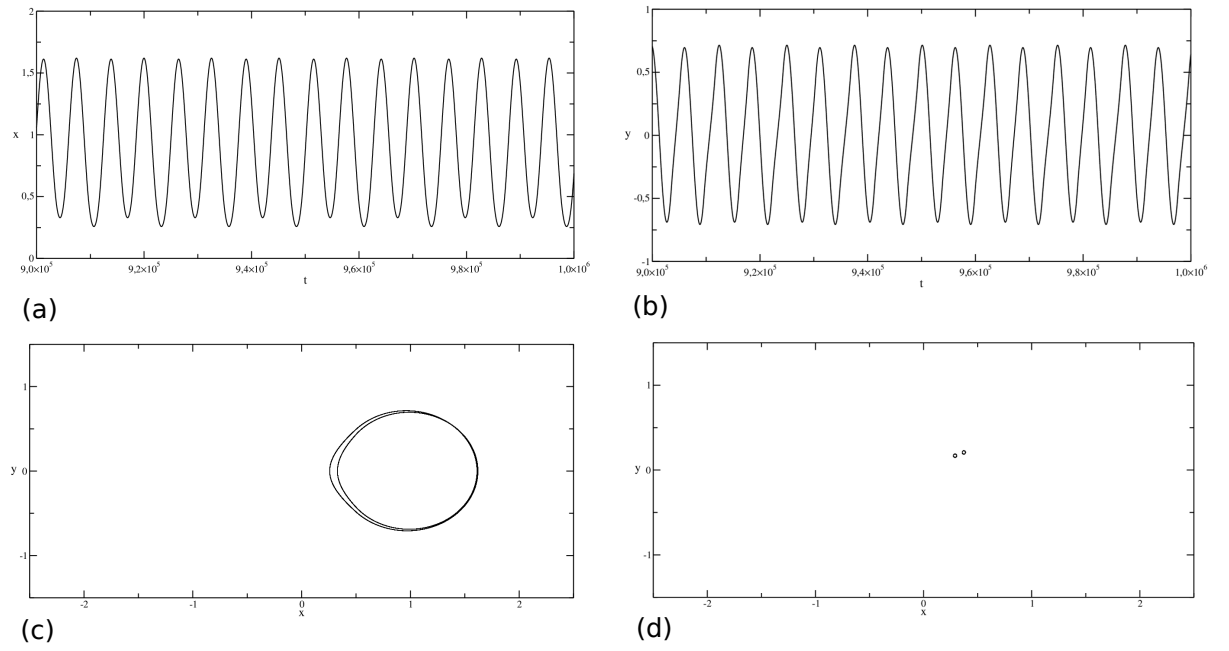


Figura 3.4: Evolução temporal de x em (a), de y em (b), retrato de fase (c) e mapa de poincaré (d) para os seguintes valores: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\omega = 1$, $b = 0,1$ e $e = 0,168$.

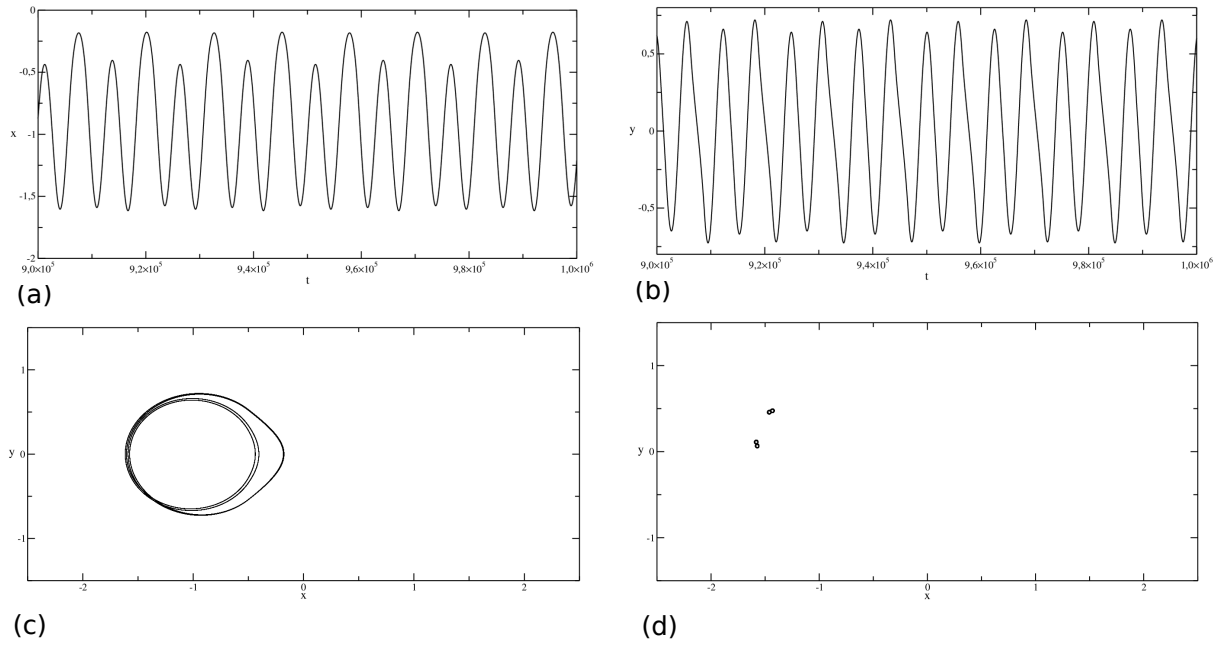


Figura 3.5: Evolução temporal de x em (a), de y em (b), retrato de fase (c) e mapa de poincaré (d) para os seguintes valores: $x_0 = -1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\omega = 1$, $b = 0,1$ e $e = 0,1808$.

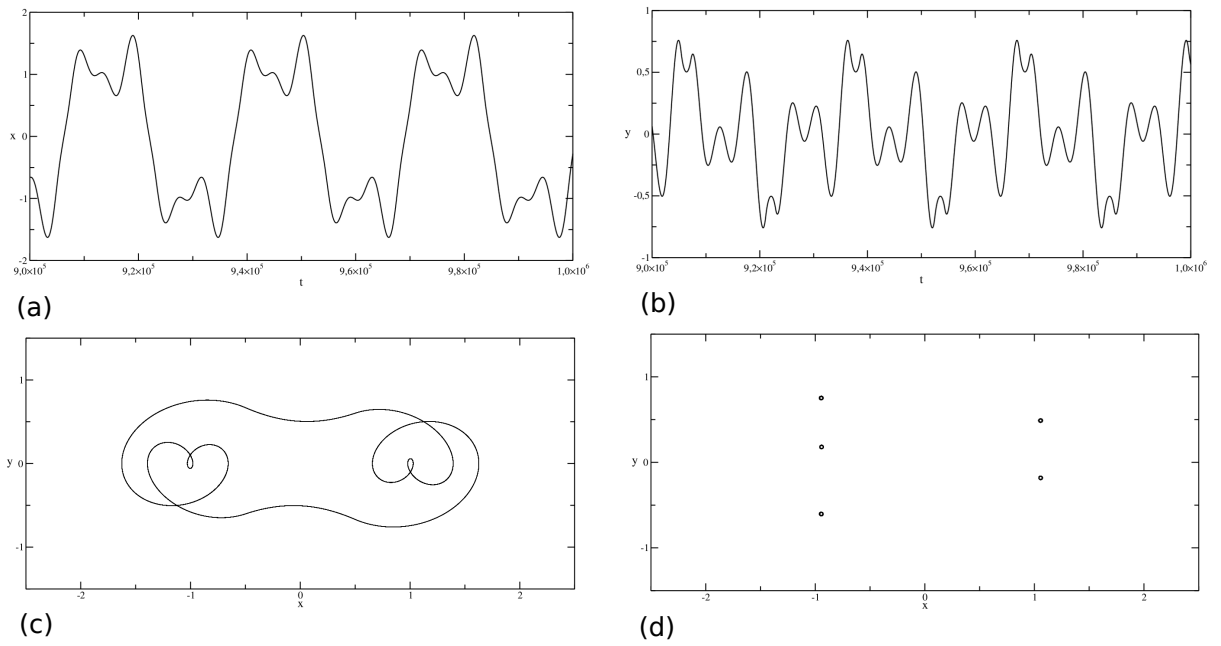


Figura 3.6: Evolução temporal de x em (a), de y em (b), retrato de fase (c) e mapa de poincaré (d) para os seguintes valores: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\omega = 1$, $b = 0,1$ e $e = 0,2305$.

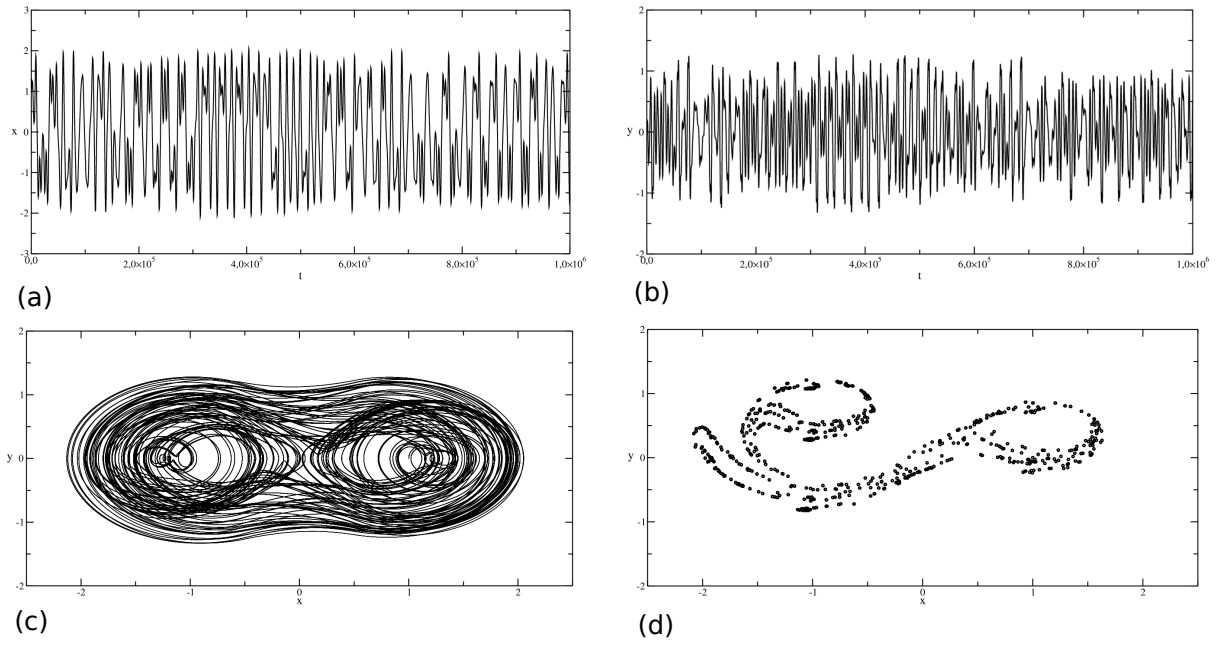


Figura 3.7: Evolução temporal de x em (a), de y em (b), retrato de fase (c) e mapa de poincaré (d) para os seguintes valores: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\omega = 1$, $b = 0,1$ e $e = 0,3253$.

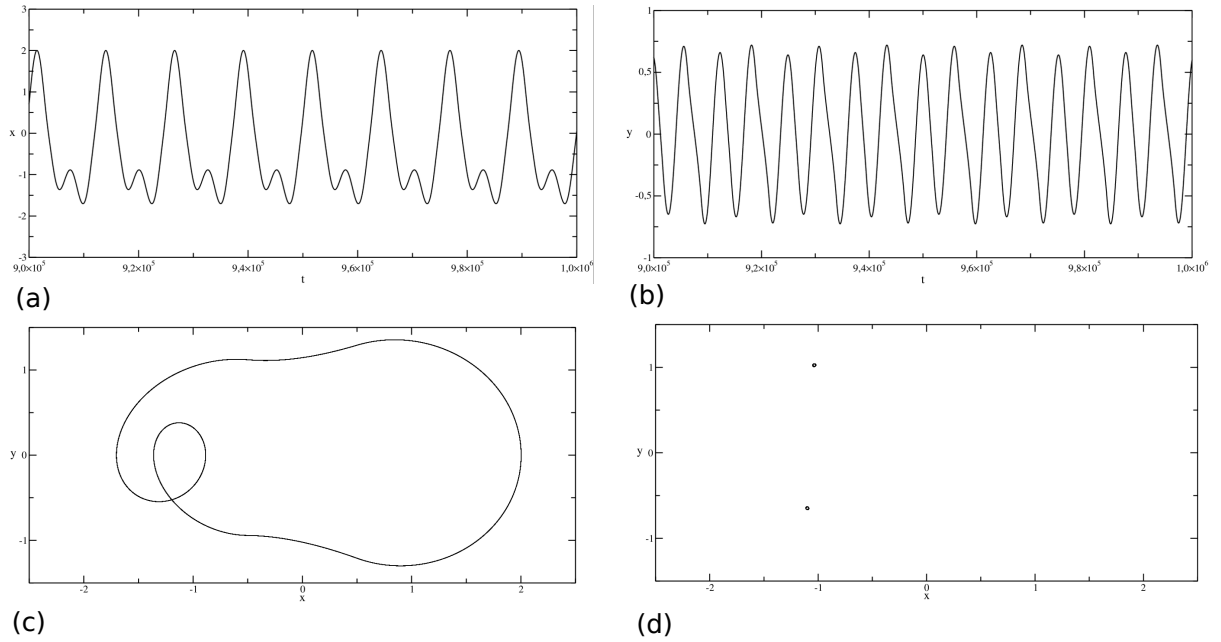


Figura 3.8: Evolução temporal de x em (a), de y em (b), retrato de fase (c) e mapa de poincaré (d) para os seguintes valores: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\omega = 1$, $b = 0,1$ e $e = 0,5565$.

3.2 Bacias de convergência

Como visto na seção anterior, com a variação dos parâmetros de controle e também as condições iniciais, encontramos um rico cenário de dinâmica para o sistema.

Com isso em mente, tomamos uma grade de condições iniciais $x_0 \in [-6, +6]$ e $y_0 \in [-6, +6]$, onde cada eixo foi dividido em 1000 partes. Desta maneira temos uma grade de condições iniciais 1000×1000 . Cada uma dessas condições iniciais foi evoluída no tempo até 10^6 iterações. Após esse período, marcamos a posição final da coordenada x , onde a escala de cor representa esse valor.

Através de vários testes numéricos com os parâmetros de controle, decidimos variar o coeficiente b e manter fixos os parâmetros $e = 0,7$ e $\omega = 1$.

A Figura 3.9 mostra o resultado dessa evolução de grade de condições iniciais. É possível perceber que a dinâmica passa por vários aspectos diferentes ao longo da variação do parâmetro b . Desde de dinâmica totalmente caótica, como mostra as Figuras 3.9 (a,c,e), desde possíveis atratores múltiplos, como mostra as Figuras 3.9 (b,d,f,g), chegando até em um atrator duplo, como mostra a Figura 3.9 (h).

Ao analisar essa evolução das bacias de convergência, acreditamos que o sistema esteja passando por alguma transição de fase nos pontos fixos, pois há uma grande diferença de cenários dinâmicos ao longo da variação do parâmetro de controle b . É possível que os pontos fixos possam estar sofrendo bifurcações, e passando por janelas de periodicidade e também de caos, assim como acontece no mapa logístico [31, 32], mapa quadrático [33, 34], etc.

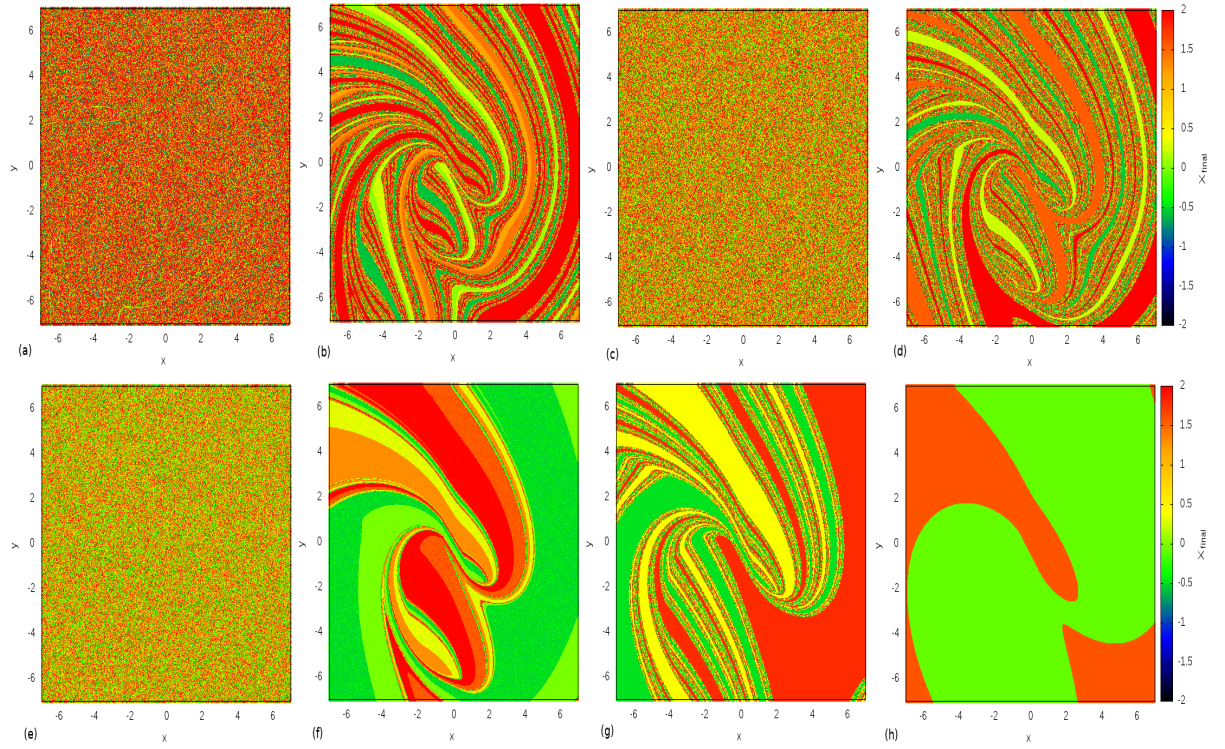


Figura 3.9: Evolução das bacias de convergência para grades de condições iniciais. Foram mantidos fixos $\omega = 1$, $e = 0,7$. O parâmetro b variou da seguinte maneira: (a) $b = 0,01$, (b) $b = 0,17$, (c) $b = 0,22$, (d) $b = 0,31$, (e) $b = 0,42$, (f) $b = 0,45$, (g) $b = 0,72$ e (h) $b = 0,82$. É possível ver uma grande variação da dinâmica do sistema, desde cenários totalmente caóticos, até atratores múltiplos.

3.3 Ressonância

A ressonância é usualmente caracterizada por um fenômeno em que um sistema submetido a uma excitação harmônica possui picos de oscilação. A avaliação de sistemas lineares correlaciona diretamente esse fenômeno com a frequência de excitação, fazendo com que seja possível estimar uma maneira de avaliar o efeito da variação desse parâmetro na resposta do sistema. A ressonância de um sistema não-linear possui diferenças em várias perspectivas, mas é possível aceitá-la como a influência de um certo parâmetro na resposta do sistema.

Tomando como exemplo um oscilador harmônico constituído por um sistema massa-mola amortecido sujeito a uma força externa periódica possui a seguinte equação geral

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega t), \quad (3.1)$$

em que m é a massa, x é o deslocamento da massa a partir do ponto de equilíbrio, F_0 e ω são, respectivamente, a amplitude máxima e a frequência angular de oscilação da força

externa, k é a constante da mola e γ é o coeficiente de amortecimento. Reescrevendo,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t), \quad (3.2)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é a frequência natural e $2b = \gamma/m$. A solução geral da Equação 3.2 é a soma de uma solução transiente que depende das condições iniciais e de uma solução estacionária que depende somente dos valores de F_0 , ω , ω_0 e b . Já que a solução transiente decai exponencialmente com o tempo, basta estudarmos a ressonância considerando somente a solução estacionária do sistema. Deste modo, podemos escrever a solução estacionária para $x(t)$ da massa como uma função proporcional a força externa com um ângulo de fase deslocado de ϕ como,

$$x(t) = \frac{F_0}{mG} \cos(\omega t - \phi), \quad (3.3)$$

em que

$$G = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2}, \quad \cos\phi = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{G}, \quad \sin\phi = \frac{2b\omega}{G}.$$

A equação 3.3 nos mostra que o oscilador oscila com a frequência da força aplicada ω e não com a sua frequência natural ω_0 . Para uma força de amplitude F_0 dada, a amplitude de oscilação é controlada pelo fator $1/G$. O deslocamento do oscilador é defasado de um ângulo de fase ϕ em relação à força, ou seja, quando ela é máxima ou mínima, o deslocamento do oscilador não é máximo e nem mínimo.

A amplitude da solução de $x(t)$, considerando que ω_0 , b e F_0 são fixos, a amplitude é função da frequência angular ω da força externa, ou seja

$$A = f(\omega) = \frac{F_0}{mG}, \quad (3.4)$$

e quando $\omega = 0$, temos simplesmente uma força constante, e a amplitude é

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{m} \frac{m}{k} = \frac{F_0}{k}. \quad (3.5)$$

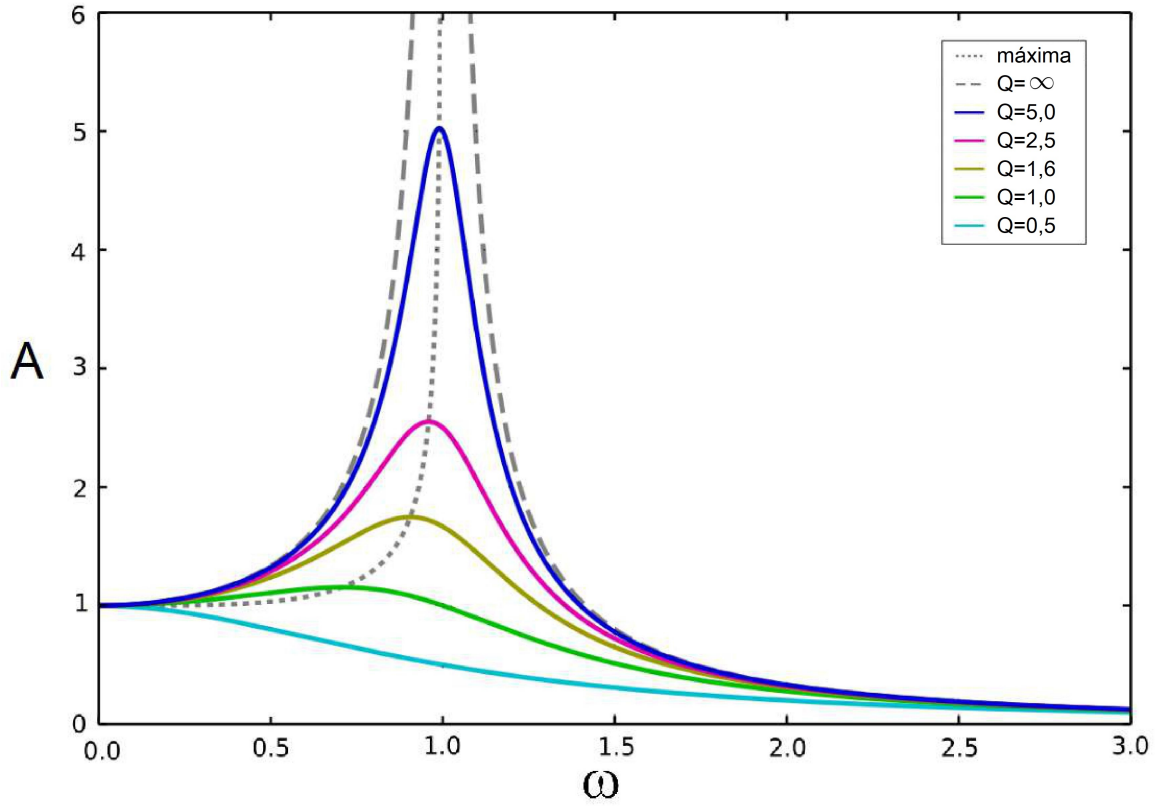


Figura 3.10: Gráfico A vs. ω para diferentes valores de Q adaptado de [1].

Afim de encontrar os pontos críticos, calculamos a derivada da amplitude com relação a ω e a igualamos a zero, fornecendo duas soluções: $\omega = 0$ e $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$ que é um ponto de máximo, ou seja, a amplitude assume um valor máximo quando a frequência angular tem esse valor. Considerando que $\omega_0^2 > 2b^2$, e chamando de ω_R esta frequência, temos

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} \quad (3.6)$$

que depende do amortecimento b do sistema e para termos uma ideia a respeito do amortecimento do sistema, definimos um fator de qualidade Q definido por

$$Q = \frac{\omega_R}{2b} \quad (3.7)$$

Como o fator Q é inversamente proporcional ao amortecimento, quando uma força externa oscila com uma frequência angular ω igual ou muito próxima a ω_R que é a frequência de ressonância do sistema, a amplitude do movimento pode se tornar muito grande, dependendo do valor de b . Caso o sistema não possua amortecimento, ou seja, não atue sobre ele forças dissipativas, então $Q \rightarrow \infty$.

Em sistemas mecânicos, o efeito ressonante indesejável, procura-se diminuir o fator Q , através do aumento de dissipação por atrito entre os elementos presentes no sistema. Já em sistemas eletrônicos como, por exemplo, receptores de rádio, a ressonância é desejada, pois deseja-se que o receptor sintonize determinada estação, sem que outras sejam captadas, o que causaria interferências e prejudicaria a qualidade do som.

Considerando o sistema de equações que representa o oscilador amortecido não-linear com forçamento externo, dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + |x + 1/2| - |x - 1/2| - by + \varepsilon \sin(z) \\ \dot{z} = \omega \end{cases} \quad , \quad (3.8)$$

é possível perceber que as não-linearidades tendem a deformar a curva de ressonância, podendo promover mudanças dramáticas na resposta. Para avaliar a ressonância desse sistema, apresenta-se uma análise no domínio da frequência. Em essência, a curva de ressonância é a partir da variação quasi-estática da frequência ω , verificando o que ocorre com a resposta do sistema, monitorando-se a amplitude máxima $\bar{x}$ da resposta para cada frequência. Assim, para uma determinada frequência, avalia-se a resposta e encontra-se o valor máximo após descartar um transiente. No próximo passo, incrementa-se a frequência.

O gráfico da Figura 3.11 mostra várias curvas para diferentes valores do parâmetro b . Nesse caso, as não-linearidades presentes no sistema tendem a deformar as curvas de ressonância. Os picos da amplitude $\bar{x}$ se deslocam para a esquerda com o aumento do valor de b . Em algumas curvas, a medida em que se aumenta a amplitude, o sistema passa por uma descontinuidade quando $\bar{x}$ é máximo, apresentando um salto para um valor bem inferior. Afim de avaliar melhor os picos existentes, optou-se, dessa vez, decrementar o valor da frequência para a construção de uma curva. Na Figura 3.12 nota-se que os picos da curva de ressonância para uma sequência crescente e decrescente de valores de frequência não coincidem. Os saltos observados estão deslocados evidenciando a presença de histerese dependendo do sentido de varredura de ω .

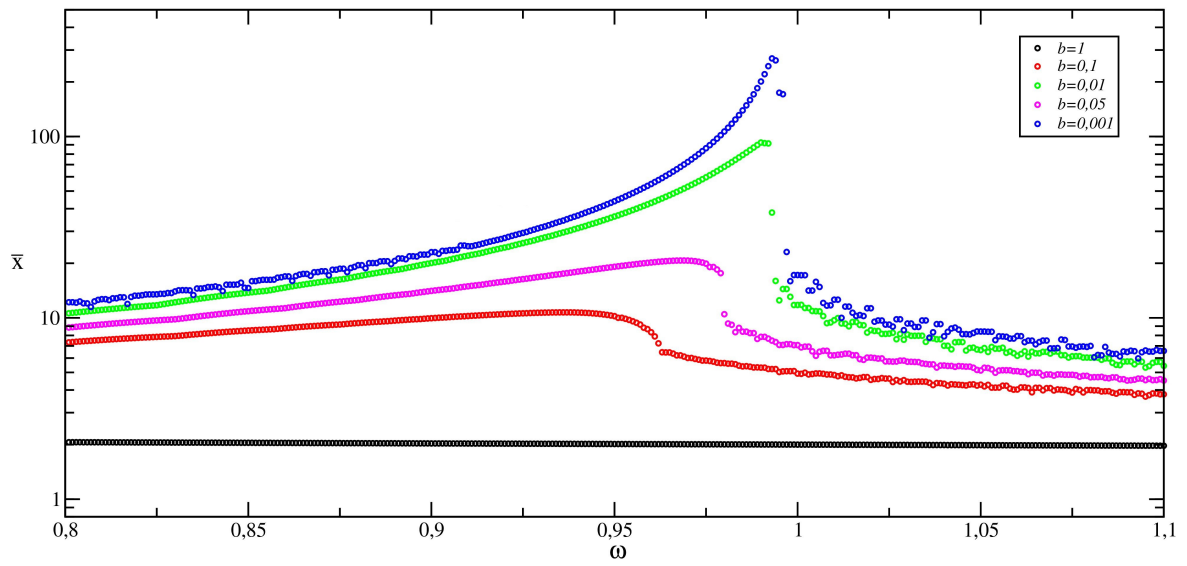


Figura 3.11: Gráfico $\bar{x}$ vs. ω para os seguintes valores: $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$ e $e = 1$.

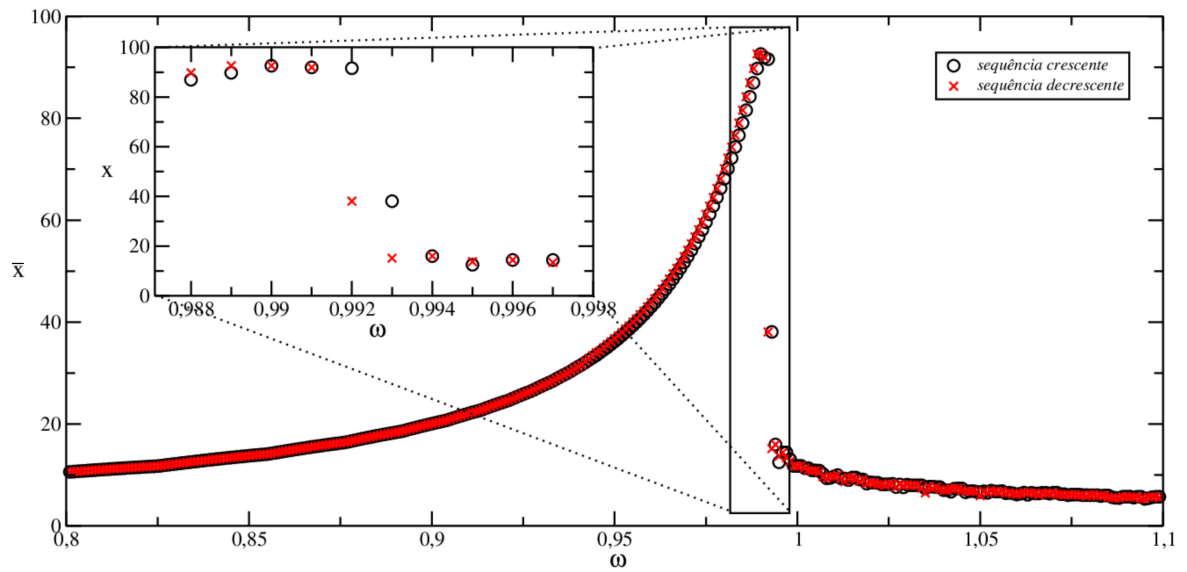


Figura 3.12: Gráfico $\bar{x}$ vs. ω para os seguintes valores: $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$, $e = 1$ e $b = 0,01$.

Capítulo 4

Construção do circuito

Resumo

Neste capítulo descrevemos a construção do circuito proposto, assim como os materiais, métodos e procedimentos experimentais para a aquisição de séries temporais, figuras de Lissajous e mapas estroboscópicos.

4.1 Circuito eletrônico experimental

Circuitos elétricos podem gerar formas de ondas complexas e podem ser ferramentas úteis para o estudo de evoluções temporais de sistemas dinâmicos, já que a aquisição de dados é mais simples do que em sistemas mecânicos. Um exemplo disso, é um circuito que consiste de um resistor, um indutor e um diodo, perturbados externamente por uma fonte de tensão. Conhecido como circuito RLD [35, 36, 37], através da captura de séries temporais deste sistema, pode-se construir diagramas de bifurcação, janelas periódicas e de transição intermitente.

Para nosso estudo, temos um circuito que consiste, basicamente, de resistores, um capacitor, um indutor, um par de amplificadores operacionais duplos e um par de diodos de silício. Para a montagem, foi utilizada uma placa perfurada universal. Na sequência, temos a imagem da placa de circuito que contém o oscilador eletrônico e seu respectivo diagrama esquemático.

Abaixo, temos todos os componentes utilizados para a construção do circuito eletrônico experimental.

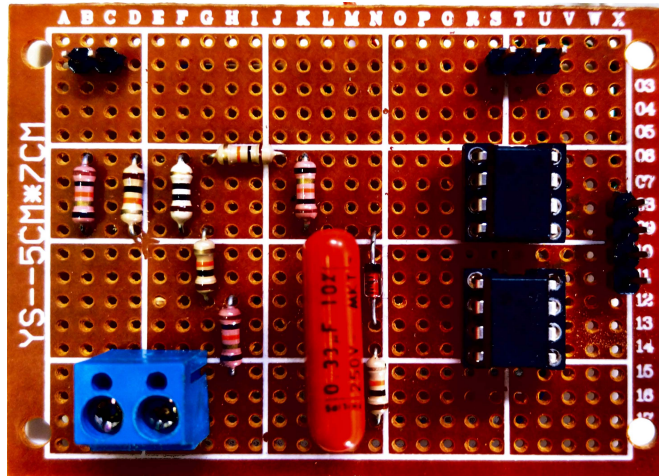


Figura 4.1: Placa com circuito eletrônico.

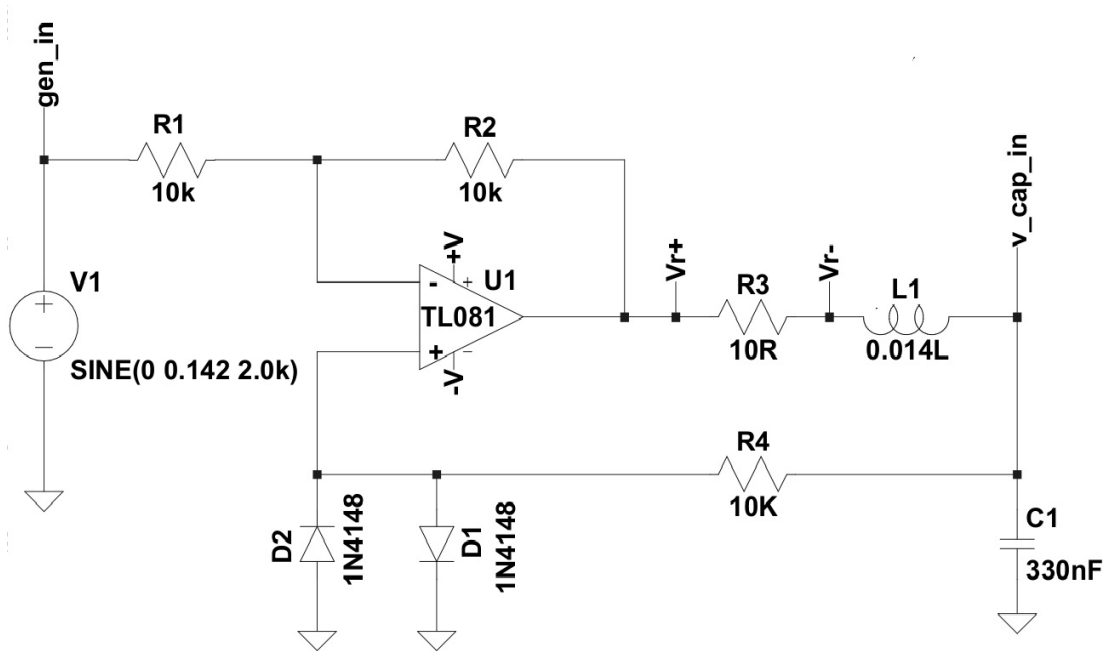


Figura 4.2: Diagrama simplificado adaptado de [1].

4.2 Diodo

A construção de dispositivos eletrônicos discretos de estado sólido (estrutura de cristal rígido) ou circuito integrado começa com o uso de uma material condutor de alta qualidade cuja condutividade está entre a de um bom condutor e a de um isolante. Dentre os materiais mais comumente usados temos o germânio (*Ge*) e o silício (*Si*). Esses materiais possuem em sua estrutura quatro elétrons na camadas mais externa, chamados de elétrons de valência. Essa ligação, reforçada pelo compartilhamento de elétrons, forma uma ligação

Código	Descrição
R1	resistor de filme de carbono de $10k\Omega$, $1/8W$ e tolerância de 5%
R2	resistor de filme de carbono de $10k\Omega$, $1/8W$ e tolerância de 5%
R3	resistor de filme de carbono de 10Ω , $1/8W$ e tolerância de 5%
R4	resistor de filme de carbono de $10k\Omega$, $1/8W$ e tolerância de 5%
R5	resistor de filme de carbono de $10k\Omega$, $1/8W$ e tolerância de 5%
R6	resistor de filme de carbono de $10k\Omega$, $1/8W$ e tolerância de 5%
R7	resistor de filme de carbono de $10k\Omega$, $1/8W$ e tolerância de 5%
C1	capacitor poliéster de $330nF$, tensão de isolamento de $250V$ e tolerância de 10%
D1	diodo de silício de uso geral 1N4148
D2	diodo de silício de uso geral 1N4148
U1	amplificador operacional duplo com entrada <i>JFET</i> TL082
U2	amplificador operacional duplo com entrada <i>JFET</i> TL082
L1	bobina de fio de cobre esmaltado 22 <i>AWG</i> , indutância de $14\mu H$ e resistência de 6Ω

Tabela 4.1: Componentes utilizados para montagem do circuito principal.

covalente que ao absorver energia cinética suficiente de causas naturais externas (energia da luz sob a forma de fótons ou calor, por exemplo) é quebrada deixando elétrons livres, os quais se tornam sensíveis a campos elétricos. Os elétrons livres, também denominados portadores intrínsecos. Além da quantidade de portadores, uma característica de grande importância é a mobilidade relativa μ_n desses portadores no material.

Um dos avanços tecnológicos das últimas décadas é a capacidade de produzir materiais semicondutores de alta pureza e se ponderarmos a adição de uma parte de impureza (do tipo adequado) por milhão em um *wafer* de material de silício podemos alterá-lo de um condutor relativamente pobre de eletricidade para outro mais eficiente. A capacidade de alterar as características do material por esse procedimento é chamado de dopagem. Dentro da estrutura atômica de todo e qualquer átomo isolado, há níveis específicos de energia associados a cada camada e elétron em órbita. O resultado é uma série de intervalos (*gaps*) entre os níveis de energia permitidos, nos quais não se admitem portadores. À medida que os átomos de um material são aproximados uns dos outros para formar a estrutura cristalina, ocorre uma interação entre átomos, que resultará nos elétrons de determinada camada de um átomo com níveis de energia ligeiramente diferentes dos elétrons na mesma órbita de um átomo adjacente. O resultado disso é uma expansão dos níveis de energia fixos e discretos dos elétrons de valência para bandas. Essa diferença nos requisitos do *gap* de energia revela a sensibilidade de cada tipo de semicondutor às variações de temperatura e quais elementos são úteis na construção de dispositivos emissores de luz.

Um material semiconductor que tenha sido submetido ao processo de dopagem é chamado de material extrínseco que podem ser do tipo n ou p . Visto que o Si é o material mais utilizado como material de base (substrato) na construção de dispositivos eletrônicos de estado sólido, um material do tipo n é criado pela introdução de elementos de impureza que têm cinco elétrons de valência (pentavalentes). Um quinto elétron adicional devido ao átomo de impureza, fracamente ligado ao seu átomo de origem, é relativamente livre para se mover dentro do recém-formado material do tipo n , uma vez que o átomo de impureza inserido doou um elétron relativamente “livre” para a estrutura. Já o material do tipo p é formado pela dopagem de um cristal puro de germânio ou silício com átomos de impureza que possuem três elétrons de valência (trivalentes). Agora o número de elétrons é insuficiente para completar as ligações covalentes e o espaço vazio resultante é chamado de lacuna que aceitará prontamente um elétron livre.

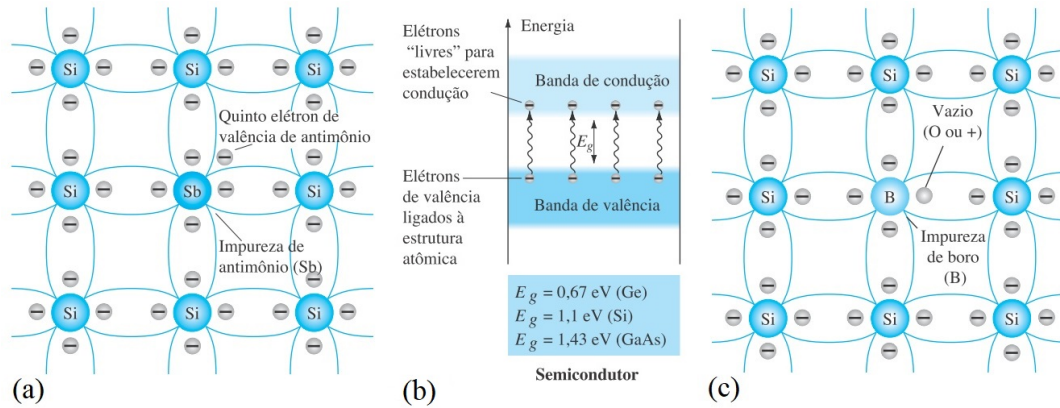


Figura 4.3: Impureza de antimônio em material do tipo n (a), bandas de condução e valência de um semiconductor (b) e impureza de boro em material do tipo p (c) [39].

No estado intrínseco, o número de elétrons livres no Ge e no Si é resultante apenas dos poucos elétrons na banda de valência que adquiriram energia suficiente de fontes térmicas ou de luz para quebrar a ligação covalente ou das poucas impurezas que não puderam ser removidas. Em um material do tipo n o elétron é chamado de portador majoritário e a lacuna de portador minoritário. Já no tipo p , a lacuna é o portador majoritário e o elétron é o portador minoritário.

O diodo semiconductor, cujas aplicações são numerosas, é criado pela simples junção de um material do tipo n com outro do tipo p , nada mais, apenas a união de um material com a maioria dos portadores elétrons a outro com a maioria dos portadores lacunas.

No instante em que os dois materiais são “unidos”, os elétrons e as lacunas na região da junção se combinam, resultando em uma falta de portadores livres na região próxima à junção (região de depleção). Se terminais forem ligados às extremidades de cada material, isso resultará em um dispositivo de dois terminais com três opções possíveis: sem polariza-

ção, polarização direta e polarização reversa. O termo polarização refere-se à aplicação de uma tensão externa através dos dois terminais do dispositivo para extrair uma resposta.

Na ausência de uma polarização aplicada a um diodo semiconductor, o fluxo líquido de carga em um sentido é igual a zero ou, Em outras palavras, a corrente sob a condição sem polarização é igual a zero.

Se um potencial externo for aplicado à junção $p - n$ de modo que o terminal positivo seja ligado ao material do tipo n e o terminal negativo ao material do tipo p , o número de íons positivos descoberto na região de depleção do material do tipo n aumentará devido ao grande número de elétrons livres atraídos para o potencial positivo da tensão aplicada. Por razões semelhantes, o número de íons negativos descobertos aumentará no material do tipo p . O efeito líquido, portanto, será um alargamento da região de depleção. Esse alargamento estabelecerá uma barreira grande demais para ser superada pelos portadores majoritários, efetivamente reduzindo o fluxo deles a zero. A corrente existente sob condição de polarização reversa é chamada de corrente de saturação reversa e representada por I_s .

A condição de polarização direta é estabelecida mediante a aplicação do potencial positivo ao material do tipo p e do potencial negativo ao material do tipo n . Essa situação “forçará” os elétrons no material do tipo n e as lacunas no material do tipo p a se recombinarem com os íons próximos à fronteira e a reduzirem a largura da região de depleção. À medida que a tensão aplicada aumentar em magnitude, a região de depleção continuará a diminuir em largura até que uma torrente de elétrons possa passar através da junção, resultando em um aumento exponencial na corrente.

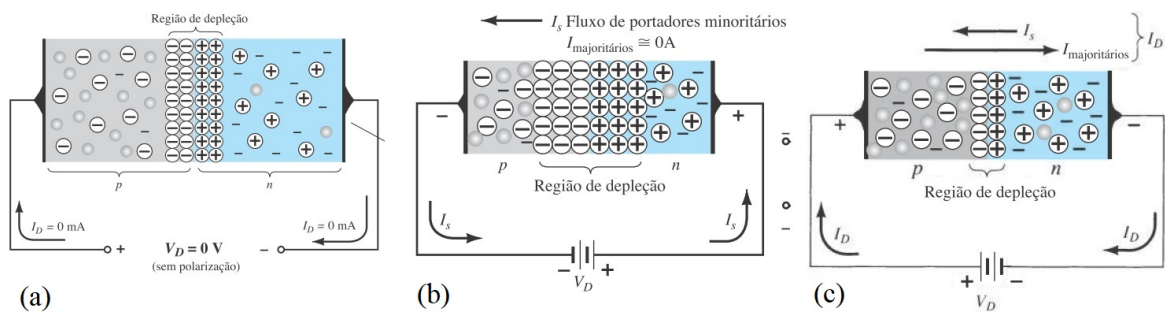


Figura 4.4: Junção $p - n$ sem polarização externa (a), junção $p - n$ reversamente polarizada (b) e junção $p - n$ diretamente polarizada (c) [39].

É possível demonstrar que as características gerais de um diodo semiconductor podem ser definidas pela seguinte equação, conhecida como equação de *Shockley*, para as regiões de polarização direta e reversa através de

$$I_D = I_S(e^{V_D/nV_T} - 1), \quad (4.1)$$

em que I_S é a corrente de saturação reversa, V_D é a tensão de polarização direta aplicada ao diodo e n é um fator de idealidade, que é função das condições de operação e construção física; tem intervalo entre 1 e 2. A tensão V_T é chamada de tensão térmica e é descrita por

$$V_T = \frac{kT_k}{q}, \quad (4.2)$$

em que k é a constante de Boltzman, T_K é a temperatura absoluta em Kelvin e q é a magnitude da carga eletrônica.

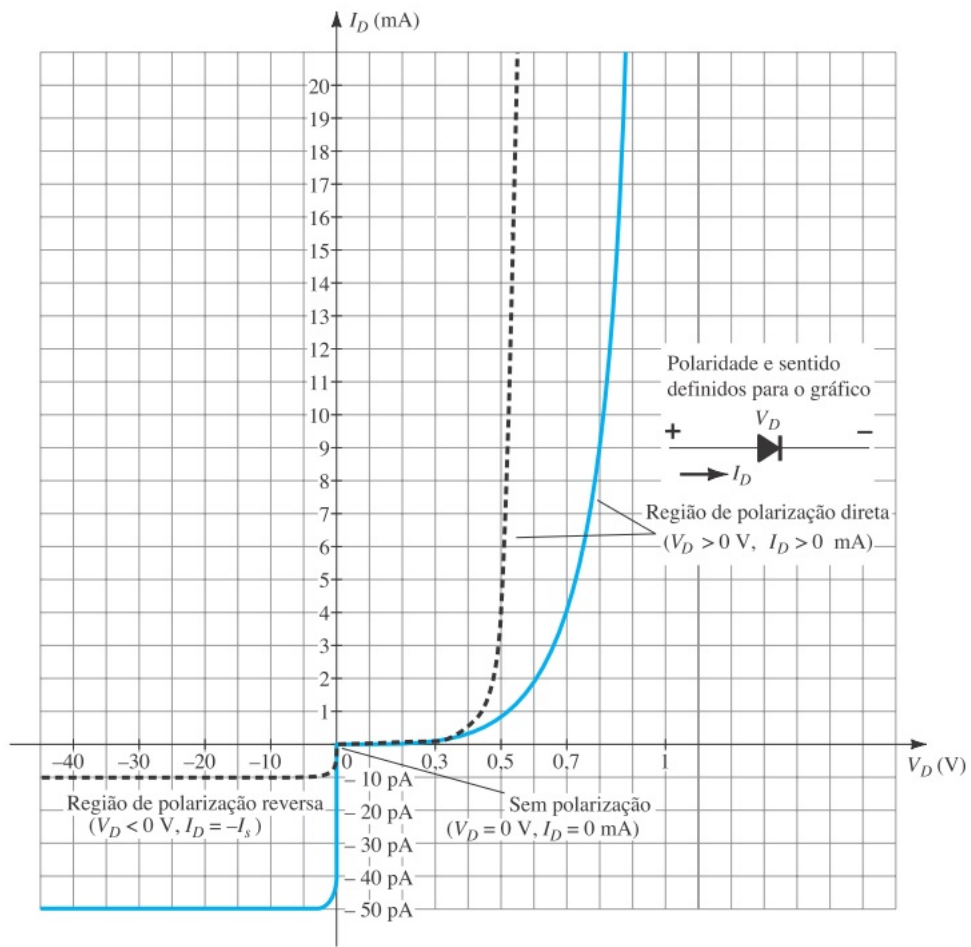


Figura 4.5: Curva característica do diodo semicondutor de silício [39].

4.3 Indutor

Um indutor, também conhecido como bobina ou solenoide, é um dispositivo elétrico passivo com pelo menos terminais que armazena energia na forma de campo magnético através da passagem de uma corrente elétrica. Já a capacidade de armazenar energia em

forma de campo magnético é medida pela grandeza *Henry* (H). Como resultado do campo magnético associado ao fluxo de corrente, indutores geram uma tensão oposta proporcional a taxa de variação da corrente que o atravessam. Normalmente, é construído a partir de um fio de cobre ou outro material condutor enrolado em espiras em torno de um núcleo. Tal núcleo pode ser, dependendo do uso, de material ferromagnético para atingir valores de indutância maiores ou, simplesmente, não usar nenhum material quando a indutância necessária for pequena.

Devido a dificuldade em se encontrar um indutor com valores adequados para a montagem, optou-se pela construção do mesmo. Foi usinado um tarugo de *PVC* para a construção do carretel para acondicionar o enrolamento. A seguir, temos um esboço com os respectivos parâmetros utilizados para o cálculo da indutância da bobina.

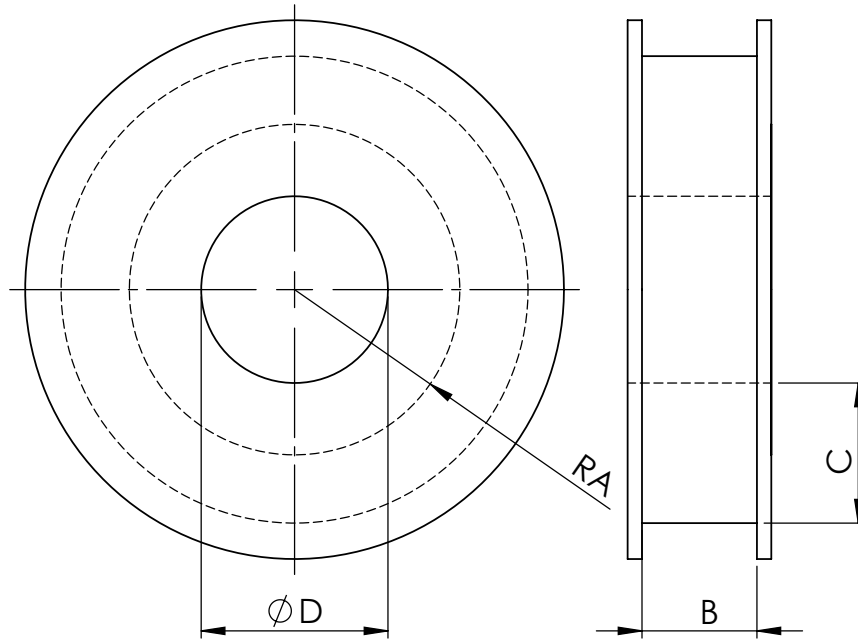


Figura 4.6: Desenho com parâmetros do carretel de PVC.

e a partir da confecção do carretel, obtivemos as seguintes medidas

Em [26], é possível encontrar uma equação empírica para a determinação da indutância de um solenoide com núcleo de ar cujo enrolamento possui várias voltas sobrepostas dada por

$$L = \frac{0,8(RA)^2 N^2}{25,4(6RA + 9B + 10C)} , \quad (4.3)$$

em que L é o valor da indutância, em microhenrys (μH), N e o número de espiras, B define a largura do enrolamento em milímetros (mm), C mostra a espessura do enrolamento em milímetros (mm) e RA é o raio médio do enrolamento definido por

Código	Valor
RA	$23,75mm$
B	$15,5mm$
C	$17,5mm$
$\emptyset D$	$30mm$
N	600 voltas

Tabela 4.2: Medidas dos parâmetros do carretel.

$$RA = \frac{\emptyset D}{2} + \frac{C}{2} . \quad (4.4)$$

Utilizando as equações 4.3 e 4.4 e a tabela 4.2 obtivemos um valor de indutância de aproximadamente $14mH$. Ao realizar a medida experimental, utilizando o multímetro digital *Minipa ET – 2082B* para um fundo de escala de $20mH$ obtivemos um valor de $(14.0 \pm 0.1)mH$.

4.4 Osciloscópio Analógico

O osciloscópio é um instrumento de medição em que, na maioria das aplicações, é possível visualizar graficamente sinais elétricos variando ao longo do tempo. Neste caso, o eixo vertical ‘YY’ representa a amplitude do sinal (tensão) e o eixo horizontal ‘XX’ representa o tempo. A intensidade (ou brilho) da tela é por vezes chamada de eixo dos ‘ZZ’ (Figura 4.7)

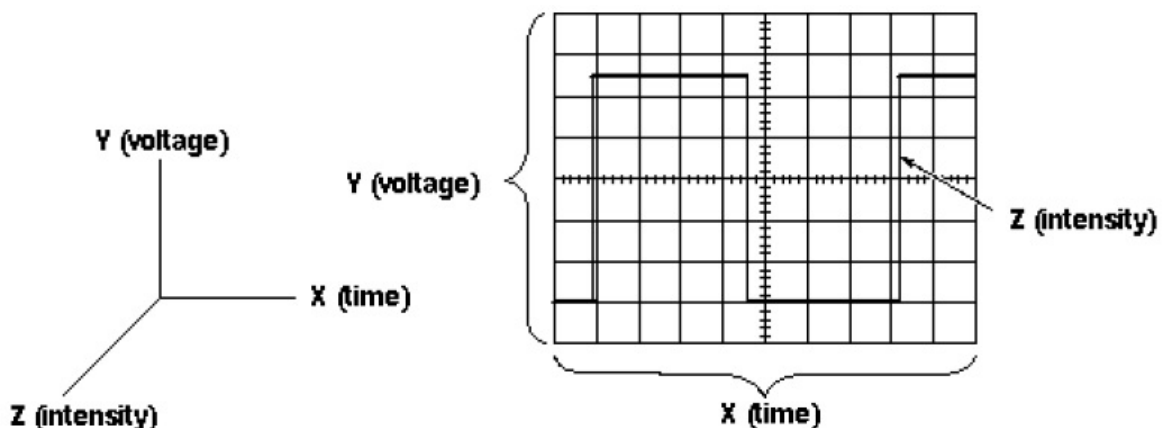


Figura 4.7: Eixos X-Y-Z de um osciloscópio e a aparência de um sinal elétrico em seu ecrã [40].

Uma representação gráfica deste tipo permite a análise de algumas características de um sinal tais como: amplitude (de tensão), período ou frequência, defasagem entre dois

sinais e existência de interferências (ruído) continuadas ou perturbações transitórias. A utilização do modo 'XY' facilita alguns tipos de análises. Neste modo de funcionamento, o eixo dos 'XX' deixa de representar o tempo, passando a ser estimulado por um sinal de entrada. Desta forma, a forma de onda visualizada no ecrã será a representação de um sinal de entrada em função de outro sinal de entrada. O painel frontal do osciloscópio tem os comandos divididos em grupos, organizados segundo a sua funcionalidade. Existe um grupo de comandos para o controle do eixo vertical (amplitude do sinal), outro para o controle do eixo horizontal (tempo) e outro ainda para controlar os parâmetros do ecrã (intensidade, focagem, etc).

Os osciloscópios podem ser divididos em analógicos ou digitais. No caso do osciloscópio analógico, ao se conectar a ponta de prova a um circuito, o sinal de tensão adquirido é introduzido ao chamado "sistema vertical" do osciloscópio. Dependendo do ajuste vertical, é possível atenuar ou amplificar esse sinal. A seguir, o sinal é aplicado às placas horizontais de um tubo de raios catódicos. Esse tubo contém um cátodo que emite elétrons a alta velocidade em direção ao ecrã que possui elementos de fósforo os quais, ao serem atingidos pelos elétrons, se iluminam e mantêm essa luminosidade por um certo tempo. O campo elétrico criado pelas placas horizontais provoca a deflexão do feixe conforme a tensão aplicada. Para se deslocar o feixe de elétrons da esquerda para a direita afim de simular o tempo, é necessário aplicar uma tensão em forma de rampa através do uso de um conjunto de placas defletoras verticais. A inclinação dessa tensão em forma de rampa influencia no tempo de varredura do sinal no ecrã. Esse sistema é designado por base de tempo e a varredura acontece repetidamente e para que se possa obter uma imagem estabilizada no ecrã existe um sistema de sincronismo responsável por fornecer um sinal em forma de rampa com um período múltiplo do período do sinal a ser analisado.

Um recurso que é possível ser encontrados nos osciloscópios analógicos e até mesmo nos digitais é uma entrada para se modular o feixe de elétrons ou ainda modular o sinal a ser apresentado na tela. Esses osciloscópios possuem um terminal de entrada conhecido como Z INPUT. Com a utilização desse recurso é possível transformar o traço contínuo na tela em um tracejado, ou ainda é possível, com técnicas auxiliares, obter algo próximo a um conjunto de pontos.

As medidas de defasagem de sinais de mesmo período, quando feitas em osciloscópios cujo sistema vertical tem dois canais, resume-se à medição de um intervalo de tempo usando como referência dois pontos determinados, um para cada sinal. Para sinais senoidais, é possível medir a defasagem pelo método elíptico, que se pode aplicar recorrendo ao modo 'XY', que pode ser escolhido com uma chave seletora ou botão no painel frontal do osciloscópio. Nesse modo, o osciloscópio deixa de aplicar o sinal em forma de dente de serra às placas verticais, deixando de usar o sistema de sincronismo. Em vez disso, é

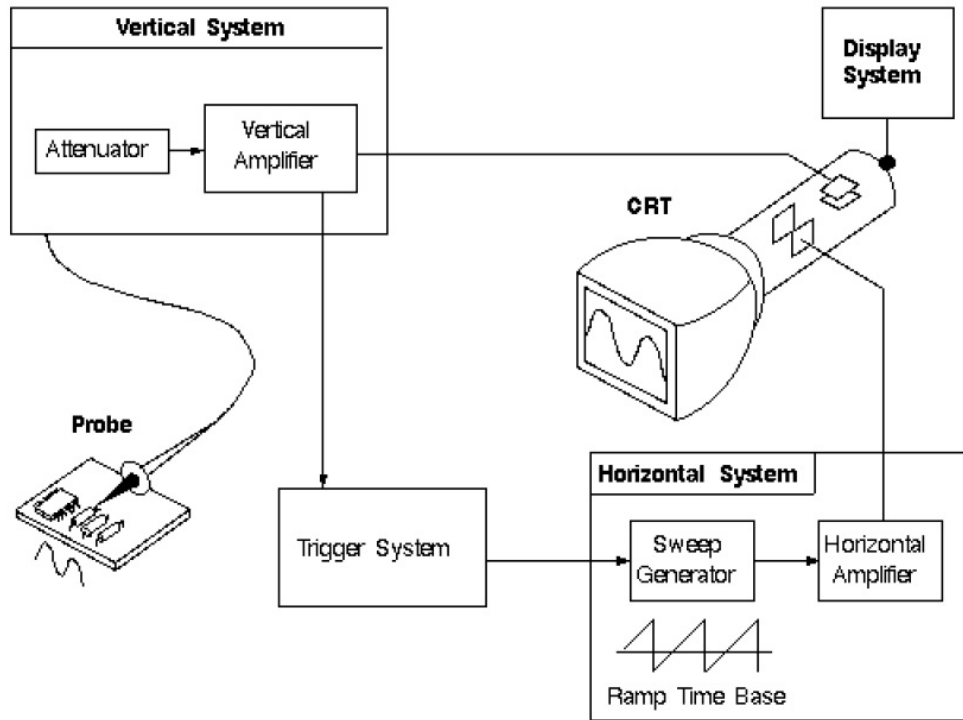


Figura 4.8: Diagrama de blocos de um osciloscópio analógico [40].

aplicado às placas verticais o sinal que está no canal número 2. Chama-se método elíptico porque o desenho visualizado no ecrã tem a forma de uma elipse, que varia dependendo do valor da defasagem. Caso os sinais analisados possuam frequências múltiplas, aparecem as chamadas Figuras de *Lissajous* (Figura 4.9) que a depender de seu formato, revela a razão da frequência dos sinais aplicados. O modo ‘XY’ de funcionamento pode ainda ser utilizado em outras aplicações onde seja importante visualizar o gráfico de uma grandeza em função de outra.

4.5 Amplificador Operacional

O Amplificador Operacional (OpAmp) é um amplificador multiestágio com entrada diferencial cujas características se aproximam da de um amplificador ideal. Dentre as principais características de um OpAmp temos a impedância de entrada infinita, a impedância de saída nula, ganho de tensão infinito, resposta de frequência infinita e insensibilidade à temperatura. O Amplificador Operacional possui duas entradas (uma inversora e uma outra não-inversora) e uma saída (Figura 4.10 (a)). O fator A é o ganho de tensão, ou seja, a relação entre a tensão de saída do dispositivo (V_O) e a entrada diferencial $[(V_+) - (V_-)]$ ou, reescrevendo os termos

$$V_O = A[(V_+) - (V_-)] . \quad (4.5)$$

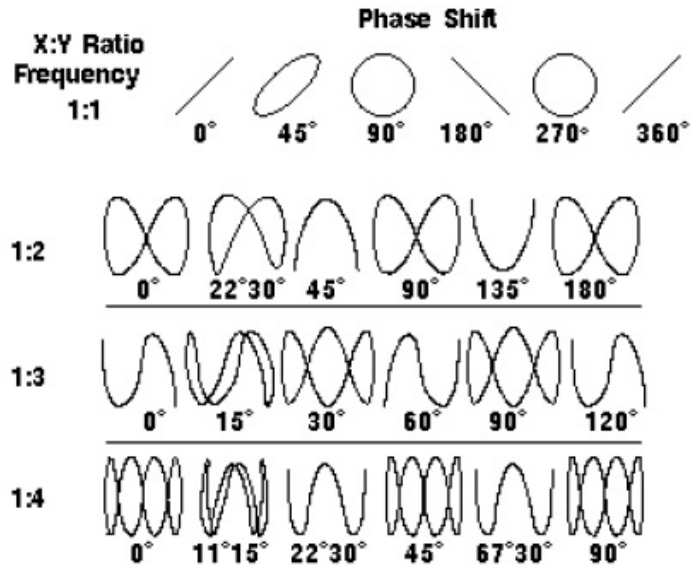


Figura 4.9: Figuras de Lissajous mostrando a relação entre formato da elipse e defasagem [40].

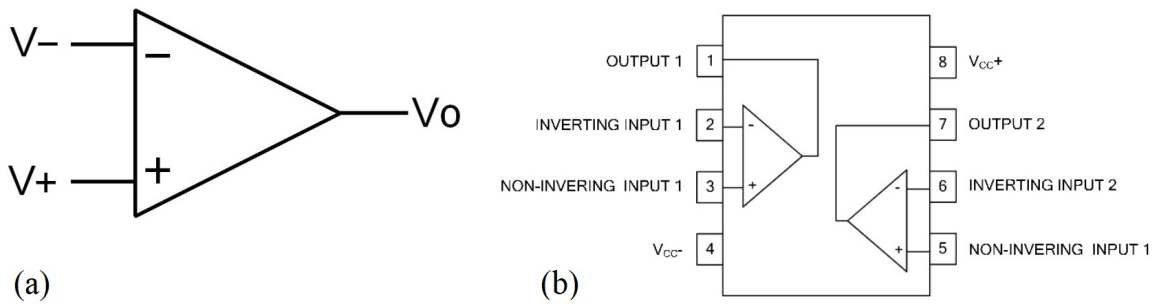


Figura 4.10: Simbologia de um Amplificador Operacional e configuração dos pinos do circuito integrado TL082 [41].

A amplificação só se torna viável, inclusive para sinais de baixa amplitude, quando o amplificador possuir um alto ganho de tensão que, idealmente, seria infinito. Porém, o valor típico de A é por volta de 10^5 V/V chegando até a ordem de 10^7 ou mais. Baseando na configuração em que os amplificadores operacionais se encontram, temos os seguintes modos de operação:

- sem realimentação: também denominado malha aberta em que o ganho do OpAmp é estipulado pelo fabricante, sendo que não há controle sobre o mesmo. Essa configuração é utilizada em circuitos comparadores (Figura 4.11 (a));
- realimentação positiva: aqui temos o amplificador operando em malha fechada, apresentando como inconveniente o fato de conduzir o circuito à instabilidade, sendo utilizado em circuitos osciladores (Figura 4.11 (b));

- realimentação negativa: também operando em malha fechada, esse tipo de configuração é o mais importante em OpAmp pois seu ganho é controlado e possui uma resposta linear (Figura 4.11 (c)). Como exemplo, os principais circuitos com realimentação negativa são: seguidor de tensão (*buffer*), amplificador não-inversor, amplificador inversor, somador, amplificador diferencial ou subtrator, diferenciador, integrado, filtros ativos, etc.

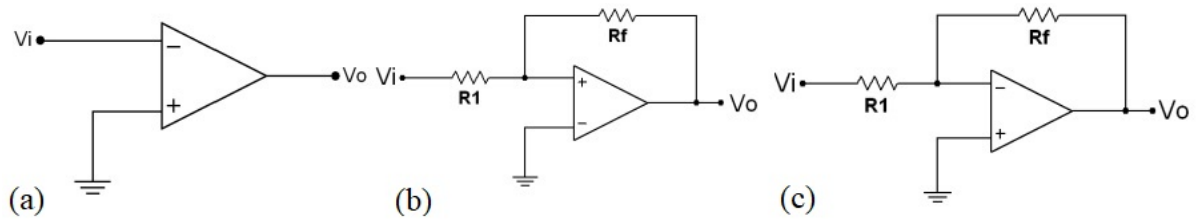


Figura 4.11: Modos de operação: sem realimentação (a), realimentação positiva (b) e realimentação negativa (c).

A figura 4.12 (a) nos mostra a configuração denominada seguidor de tensão (*buffer*). Este circuito apresenta uma altíssima impedância de entrada e uma baixíssima impedância de saída. Uma aplicação prática do que foi dito é a utilização do *buffer* no casamento de impedância de saída de um gerador de sinal com um amplificador de baixa impedância de entrada. Assim é possível fornecer um ganho unitário (ou seja, $V_o = V_i$ com $R_s = R_f$) sem inversão de fase ou polaridade. Em alguns casos, um seguidor de tensão pode receber um sinal através de uma resistência em série, colocada no terminal não-inversor. Nesse caso, para que se tenha um balanceamento do ganho, é usual a colocação de um outro resistor de mesmo valor na malha de realimentação.

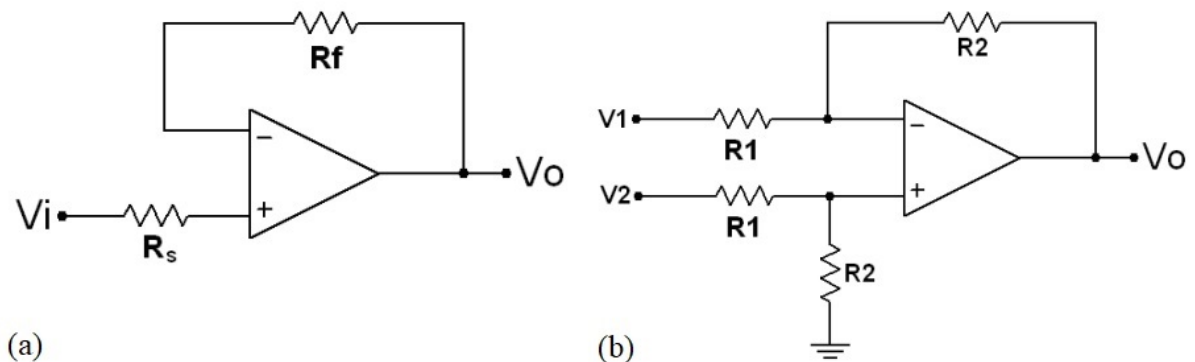


Figura 4.12: Seguidor de tensão (*buffer*) (a) e amplificador diferencial ou subtrator(b).

O amplificador diferencial ou subtrator (Figura 4.12 (b)) permite que se obtenha na saída uma tensão igual à diferença entre os sinais aplicados, multiplicada por um ganho.

Trata-se de um amplificador de inúmeras aplicações na área de instrumentação. A equação que relaciona os valores das tensões dos sinais de entrada com a respectiva resposta na saída é dada por

$$V_O = \frac{R_2}{R_1}(V_2 - V_1) . \quad (4.6)$$

4.6 Equações do oscilador não-linear experimental

O circuito estudado consiste de um oscilador RLC série formado pelos componentes R_3 , L_1 e C_1 apresentados na Figura 4.2. Cabe ressaltar que se tratam de elementos lineares excitados externamente. Na mesma figura é possível notar a presença dos diodos D_1 e D_2 (diodos de silício) configurados com uma ligação em antiparalelo. Esse arranjo, em particular, adicionado ao comportamento dos diodos devido a mudança de polarização (polarização reversa ou polarização direta) ocasionada pela excitação externa pode ser representado pelo seguinte conjunto de situações:

- D_1 polarizado diretamente e D_2 polarizado reversamente;
- D_1 e D_2 polarizados reversamente;
- D_2 polarizado diretamente e D_1 polarizado reversamente.

Em nossa construção, adotamos um valor de resistência para R_4 muito superior à impedância dada pelo resistor R_3 e pelo indutor L_1 , considerando a faixa de valores para a frequência da excitação externa. Assim, a corrente elétrica que passa pelo resistor R_4 é muito menor do que a que circula por R_3 e L_1 e, desse modo, a diferença de potencial do conjunto de diodos (V_D) possui um valor bem próximo da tensão do capacitor C_1 (V_C), ou seja, $V_C \approx V_D$. Definido o comportamento dos diodos e o motivo da adoção de determinados valores para os componentes, encontramos a expressão $F_E(V_C)$ dada por três equações lineares

$$F_E(V_C) = \begin{cases} -(V_C + kV^*), & \text{se } V_C < -V^* \\ (k-1)V_C, & \text{se } -V^* \leq V_C \leq V^* \\ -(V_C - kV^*), & \text{se } V_C > V^* \end{cases} , \quad (4.7)$$

em que $k = R_2/R_1 + 1$ é o ganho para o estágio de amplificação da realimentação negativa do OpAmp e V^* é a tensão através de um diodo aberto (para diodos de silício $V^* \approx 0,5V$ para $0,1mA$). Também é conveniente escolher $k = 2$ ao ajustar $R_1 = R_2$.

Como visto anteriormente, uma realimentação positiva em um OpAmp é capaz de gerar uma instabilidade no circuito. Para essa finalidade, construímos uma malha formada pelo

amplificador operacional U_1 , pelos diodos (D_1 e D_2) e pelo resistor R_4 . Além de prover um efeito não linear no circuito, o componente U_1 é responsável por atuar como um amplificador inversor da excitação externa.

O núcleo do circuito é um circuito RLC externamente perturbado por um sinal periódico do tipo senoidal ($f(t) = E \sen \omega t$). Utilizando as Leis de *Kirchoff* podemos obter um conjunto de equações diferenciais que regem o comportamento do oscilador

$$\begin{cases} C \frac{dV_C}{dt} = I_L \\ L \frac{dI_L}{dt} = F_E(V_C) - I_L R + E \sen(\omega t - \pi) \end{cases}, \quad (4.8)$$

em que V_C é a diferença de potencial através do capacitor C_1 e I_L é a corrente que atravessa o indutor L_1 . Devido a presença de uma realimentação negativa no OpAmp, o sinal original de entrada $f(t)$ sofre um deslocamento de π radianos. Através da introdução do conjunto de variáveis adimensionais e de novos parâmetros,

$$x = \frac{V_C}{2V^*}, \quad y = \frac{\rho I_L}{2V^*}, \quad \frac{t}{\sqrt{LC}} \rightarrow t, \quad \omega \sqrt{LC} \rightarrow \omega, \quad e = \frac{E}{2V^*}, \quad b = \frac{R}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

são obtidas novas equações, em que a constante π foi omitida sem prejudicar a dinâmica do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = F(x) - by + e \sen(\omega t) \end{cases}, \quad (4.9)$$

com

$$F(x) = \begin{cases} -(x+1), & \text{se } x < -0,5 \\ x, & \text{se } -0,5 \leq x \leq 0,5 \\ -(x-1), & \text{se } x > 0,5 \end{cases}, \quad (4.10)$$

e desse modo, conseguimos fazer uma conexão entre as equações vindas do circuito experimental com o modelo teórico proposto anteriormente (2.12 e 2.13).

4.7 Experimento

Para a realização do experimento, além do circuito do oscilador não-linear (Figura 4.13 (a)), utilizou-se um gerador de funções Rigol modelo DG1011 com impedância de saída de 50Ω e um osciloscópio analógico Kikusui modelo COR5500U com 2 canais (Figura 4.13

(b)) Para a obtenção das formas de onda e das figuras de Lissajous, foi conectado o canal 1 do osciloscópio em paralelo com o capacitor C_1 , sendo a tensão sobre esse elemento uma das variáveis dinâmicas do sistema a ser avaliada. A outra variável dinâmica seria a corrente que atravessa o indutor L_1 porém, o osciloscópio não é capaz de apresentar a forma de onda para a corrente.

Assim, lançou-se mão de um artifício utilizando o resistor R_3 como “sonda” medindo a diferença de potencial sobre esse elemento já que ele se encontra no mesmo ramo do indutor. O resistor é um elemento linear cuja diferença de potencial é proporcional à corrente que o atravessa, a menos de uma constante de proporcionalidade (no caso, o valor de sua resistência que é de 10Ω). Como o resistor R_3 não possui nenhum de seus terminais em comum com o capacitor C_1 utilizamos um outro OpAmp na configuração subtrator e a ele foi conectado o canal 2 do osciloscópio. Desse modo é possível inferir a corrente que passa pelo indutor L_1 através da tensão sobre R_3 , obtendo a segunda variável dinâmica de nosso sistema.

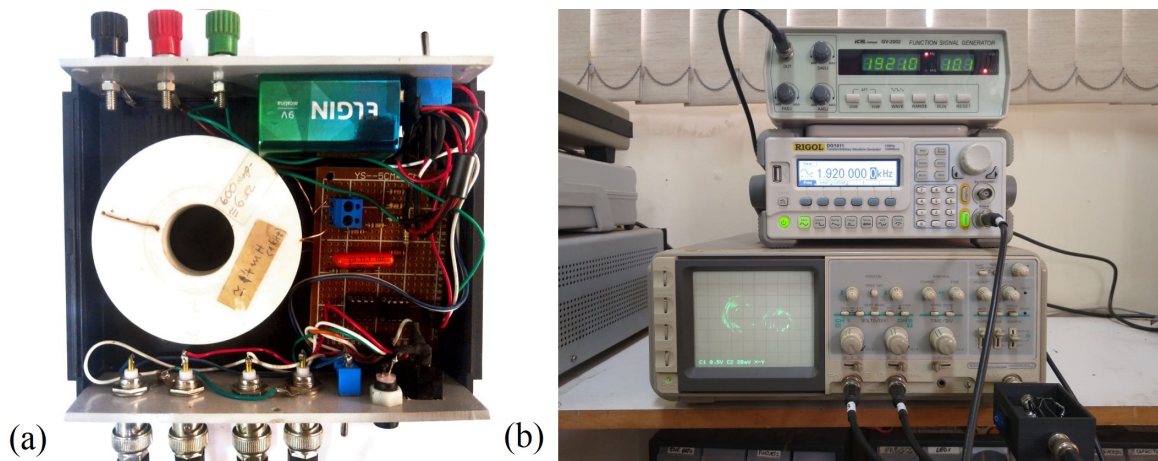


Figura 4.13: Caixa plástica contendo oscilador não-linear (a) e instrumentação utilizada (b).

Com a finalidade de apresentar um mapa estroboscópico do oscilador não-linear, foi utilizado um gerador de sinal Icel modelo GV-2002 (Figura 4.13 (b)) e um circuito auxiliar composto de diodos retificadores de silício 1F3 e uma chave para acionamento (Figura 4.14 (a)). Como mencionado anteriormente, o osciloscópio possui um terminal em que é possível modificar o traço contínuo na tela em um tracejado. O intuito é obter um sinal de controle com um pico de amplitude suficiente para poder gerar apenas um ponto na tela do osciloscópio. Portanto, ao utilizar um gerador de sinal auxiliar com frequência igual ao que é utilizado na entrada para perturbar o nosso sistema e um sinal de controle adequado, é possível coletar o estado das variáveis dinâmicas a cada período determinado.

O gerador de sinal Icel foi encarregado de fornecer um sinal quadrado de tensão com amplitude de $20V_{pp}$ (Figura 4.14 (b)). A partir dele, conseguimos alterar a forma de

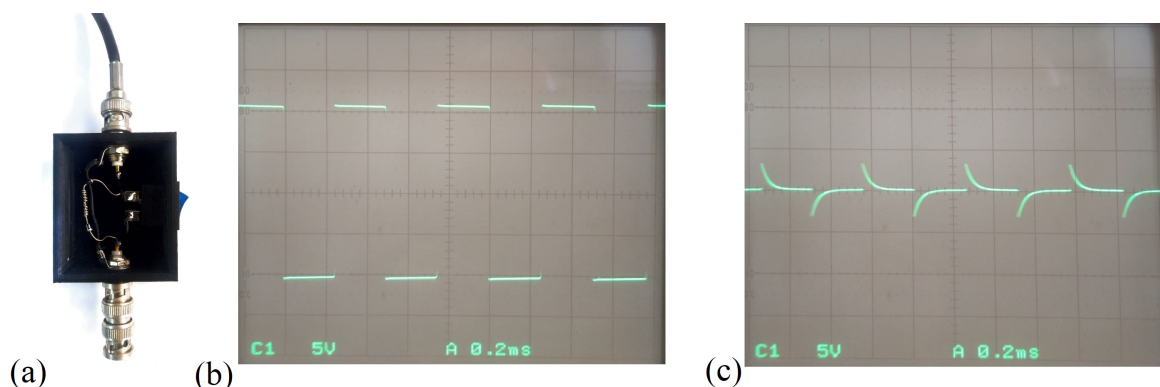


Figura 4.14: Circuito auxiliar com diodos 1F3 (a), sinal de onda quadrada obtida pelo gerador auxiliar (b) e sinal obtido após o acionamento do circuito auxiliar (c).

onda utilizando 2 diodos 1F3, demonstrado na Figura 4.14 (c) com uma tensão inferior a 5Vpp, valor limite para controle da intensidade do feixe no osciloscópio analógico Kikusui.

Na Figura 4.15 (a), deixamos desconectado o circuito auxiliar e na Fig. 4.15 (c), temos os diodos conectados e em funcionamento, demonstrando vários pontos na tela do osciloscópio. Na Figura 4.15 (b), a chave não está selecionada e o sinal que chega à entrada é um sinal quadrado superior ao limite de controle, fazendo com que o feixe do tubo CRT apresente um brilho tracejado parcialmente e intenso.

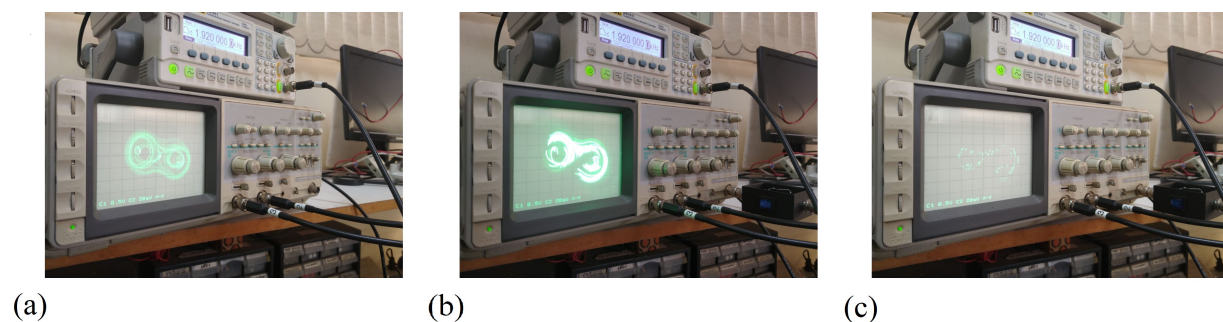
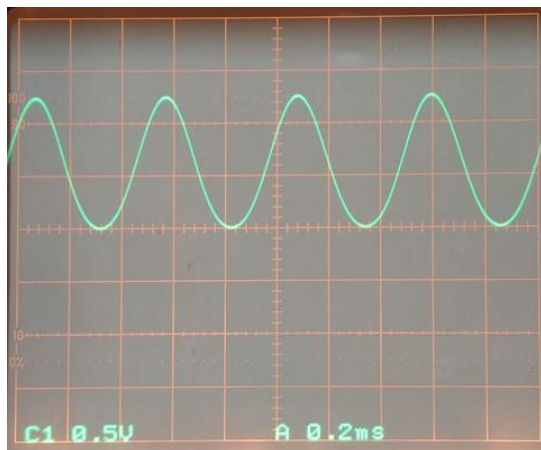
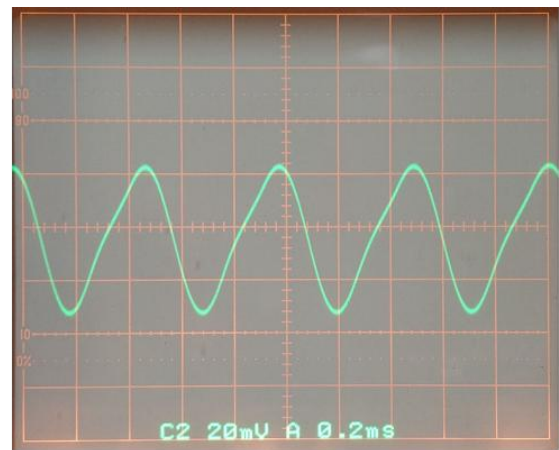


Figura 4.15: Circuito auxiliar desconectado (a), circuito auxiliar conectado e desligado (b) e circuito auxiliar conectado e ligado (c).

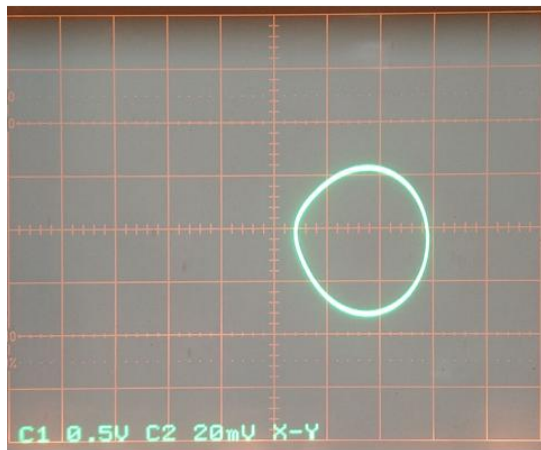
A seguir, apresentaremos uma sequência de fotos demonstrando a evolução das formas de onda presentes no canal 1 (tensão no capacitor C_1) e no canal 2 (tensão no resistor R_3), atenuando ou amplificando o sinal para uma melhor visualização. Nessa situação, usaremos através da seleção no painel frontal do osciloscópio os modos 'XX' e 'YY' e para as figuras de Lissajous e para os mapas estroboscópicos, o modo 'XY'. Foi fixado o valor da frequência para o sinal de entrada em $1920Hz$, sendo o mesmo valor utilizado no gerador auxiliar para a demonstração do mapa estroboscópico.



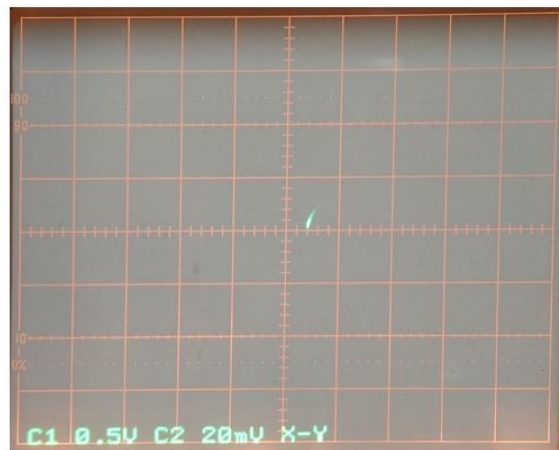
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.16: Evolução temporal da tensão em C_1 (a), em R_3 (b), figura de lissajous (c) e mapa estroboscópico (d) para $f = 1920Hz$ e $e = 104mV_{pp}$.

Na figura 4.16, usando um sinal senoidal de 104 mVpp vemos formas de ondas regulares, tanto nas evoluções temporais, bem como na figura de Lissajous. O mapa estroboscópico tem um ponto apenas, indicando uma oscilação de apenas um período.

Já na Fig.4.17, com o valor de 109 mVpp de amplitude, é possível notar uma duplicação no período evidenciado no mapa estroboscópico e a presença de vales com duas profundidades diferentes na Fíg. 4.17 (a).

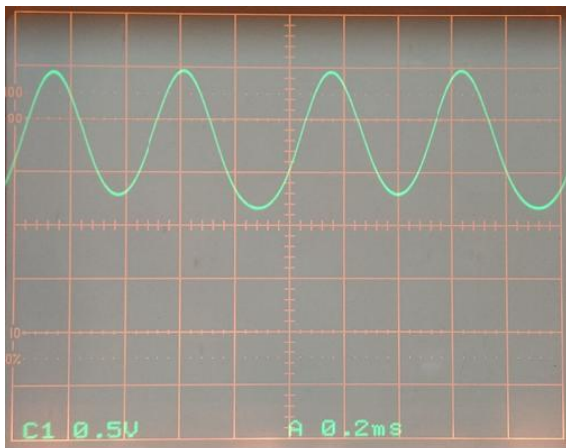
Com um pequeno incremento na amplitude de perturbação (109,1mVpp) há uma nova duplicação de período, evidenciado por 4 pontos na tela do osciloscópio como mostrado na Fig.4.18 (d).

Aumentando-se a amplitude da perturbação, as formas de onda deixam de ser periódicas, e não podemos encontrar um número exato de períodos de oscilação. Na Figura 4.19, com amplitude de 127,7 mVpp, pode-se encontrar uma grande quantidade de pontos no

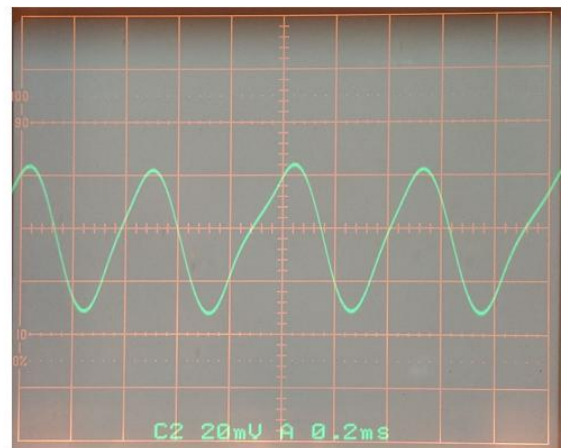
mapa estroboscópico.

Já na Fig. 4.20, retomamos oscilações periódicas, em que a figura de Lissajous se apresenta de forma peculiar com 5 pontos marcados no mapa estroboscópico. Na sequência, com o incremento da perturbação, temos um regime periódico em que podemos contar 3 pontos na tela do osciloscópio (Figura 4.21) e 2 pontos (Figura 4.22).

Passamos novamente por um regime em que não é possível definir uma periodicidade com uma amplitude de perturbação de 435,4mVpp (Figura 4.23). Finalmente, na Fig.4.24, com $e = 478,1$ mVpp retomamos uma oscilação com apenas um período.



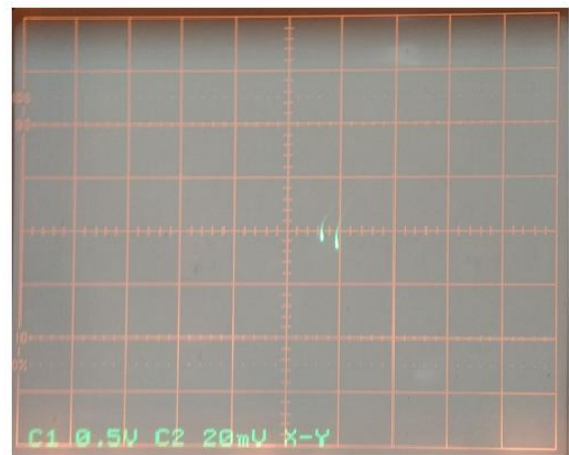
(a)



(b)

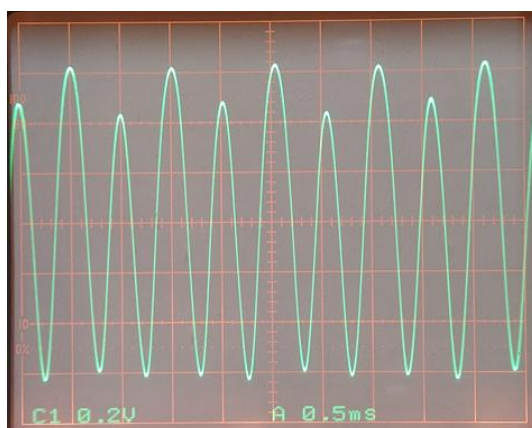


(c)

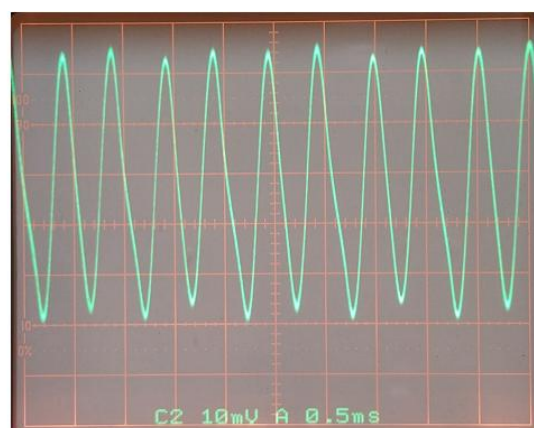


(d)

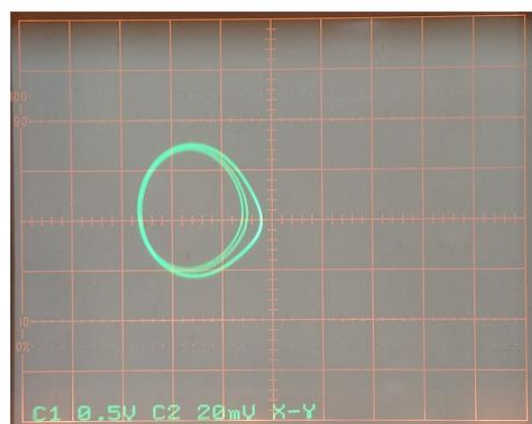
Figura 4.17: Evolução temporal da tensão em C_1 (a), em R_3 (b), figura de lissajous (c) e mapa estroboscópico (d) para $f = 1920\text{Hz}$ e $e = 109\text{mVpp}$.



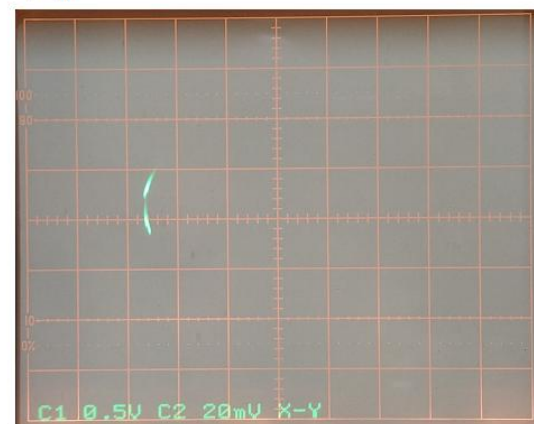
(a)



(b)

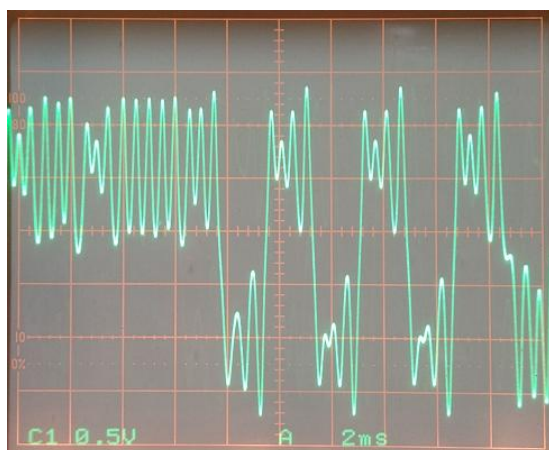


(c)

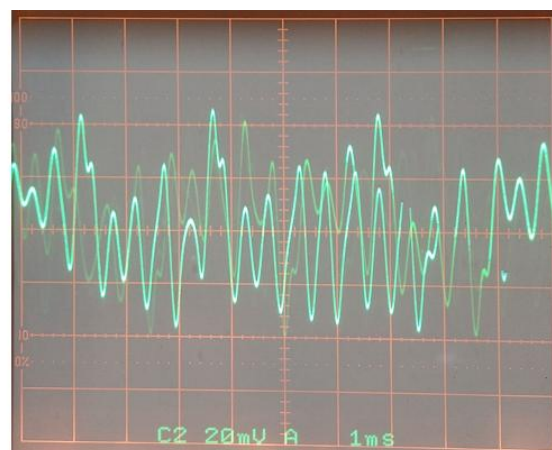


(d)

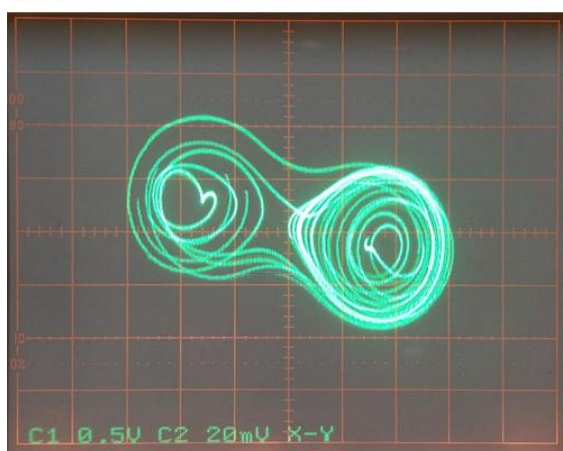
Figura 4.18: Evolução temporal da tensão em C_1 (a), em R_3 (b), figura de lissajous (c) e mapa estroboscópico (d) para $f = 1920Hz$ e $e = 109,1mV_{pp}$.



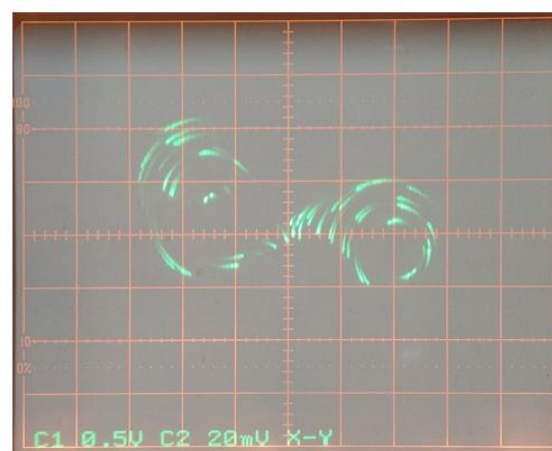
(a)



(b)



(c)

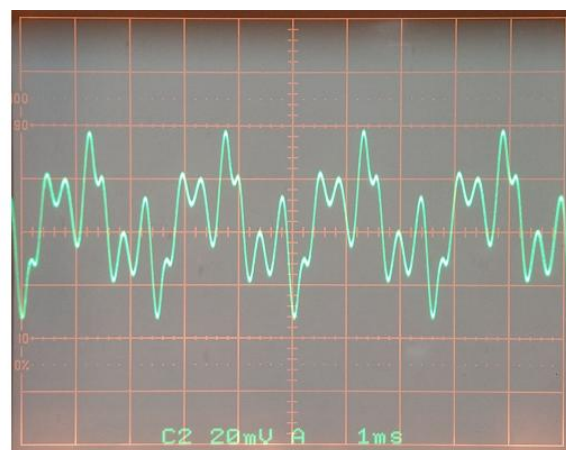


(d)

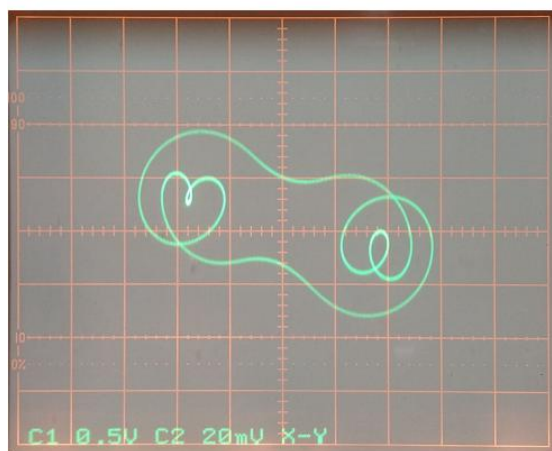
Figura 4.19: Evolução temporal da tensão em C_1 (a), em R_3 (b), figura de lissajous (c) e mapa estroboscópico (d) para $f = 1920Hz$ e $e = 127,7mV_{pp}$.



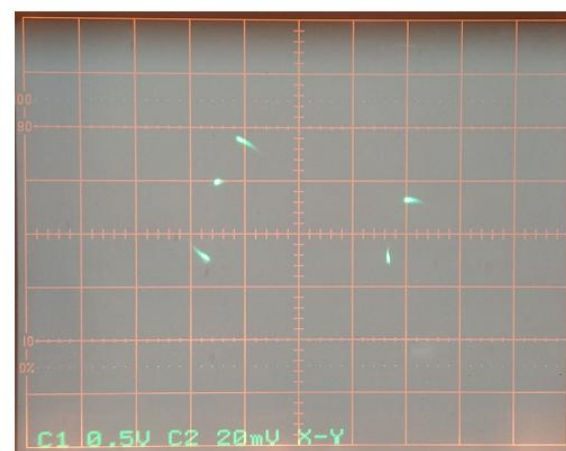
(a)



(b)

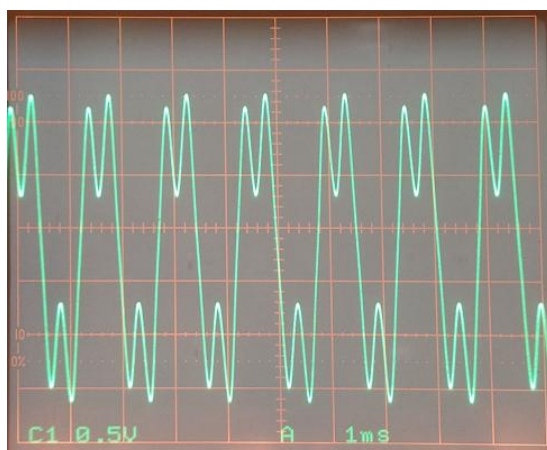


(c)

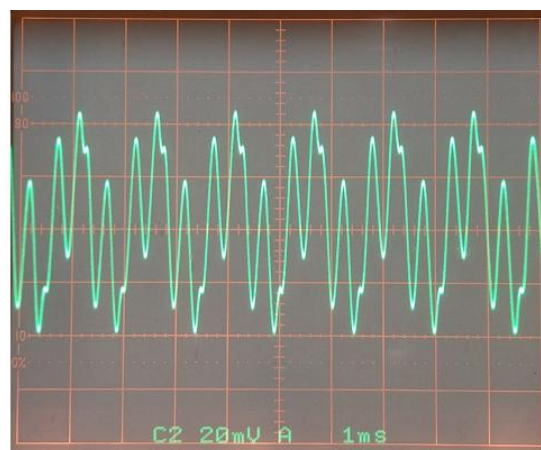


(d)

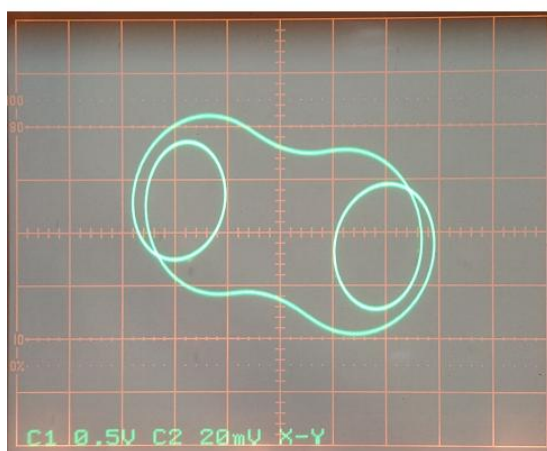
Figura 4.20: Evolução temporal da tensão em C_1 (a), em R_3 (b), figura de lissajous (c) e mapa estroboscópico (d) para $f = 1920Hz$ e $e = 151,2mV_{pp}$.



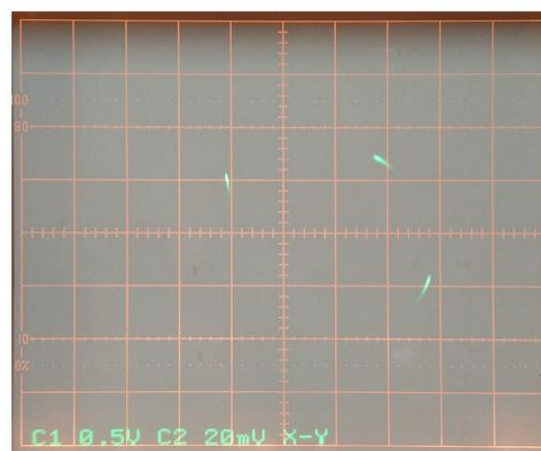
(a)



(b)



(c)

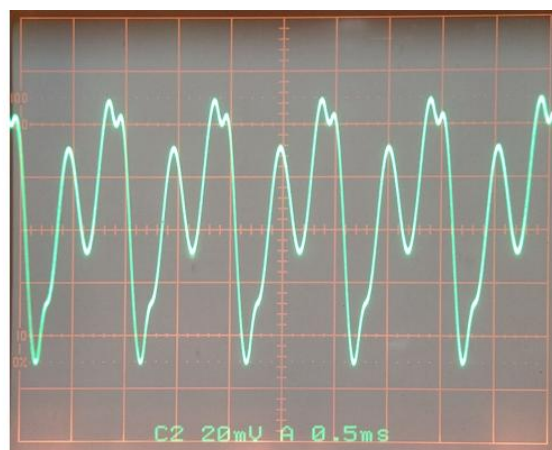


(d)

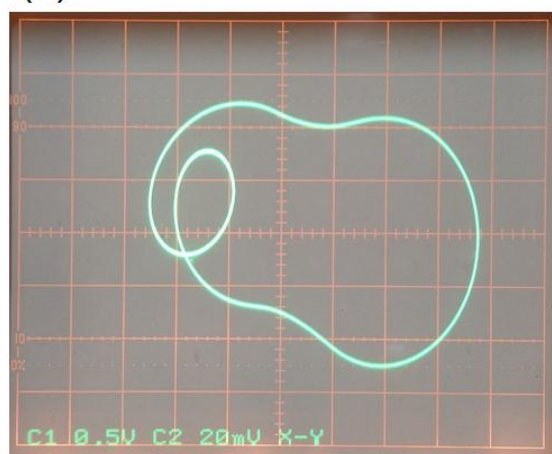
Figura 4.21: Evolução temporal da tensão em C_1 (a), em R_3 (b), figura de lissajous (c) e mapa estroboscópico (d) para $f = 1920Hz$ e $e = 280mV_{pp}$.



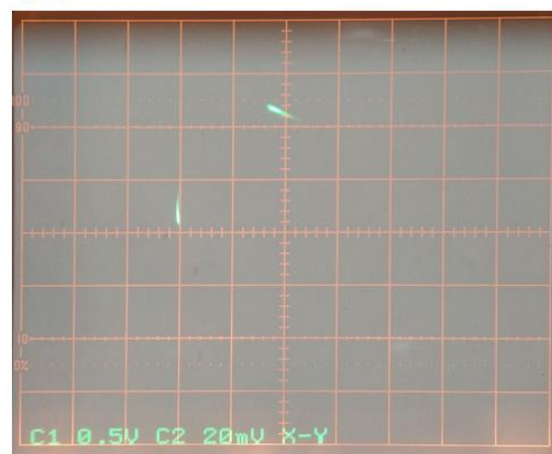
(a)



(b)

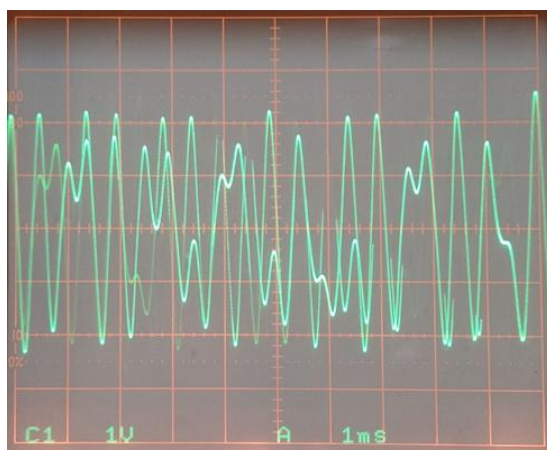


(c)

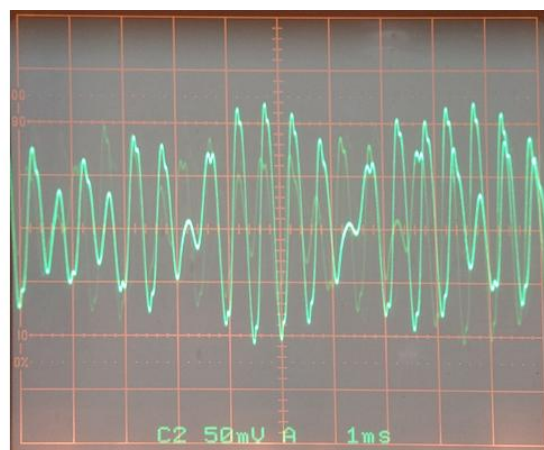


(d)

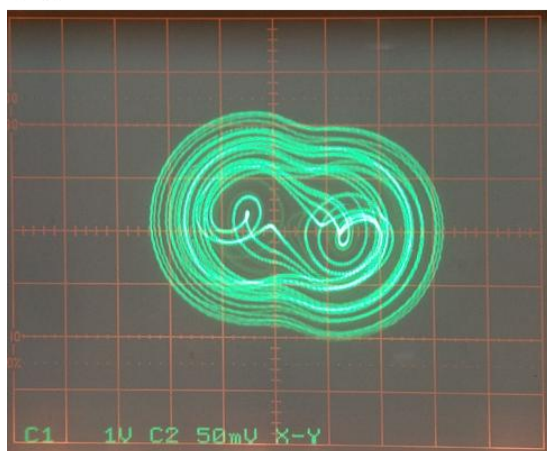
Figura 4.22: Evolução temporal da tensão em C_1 (a), em R_3 (b), figura de lissajous (c) e mapa estroboscópico (d) para $f = 1920Hz$ e $e = 340mV_{pp}$.



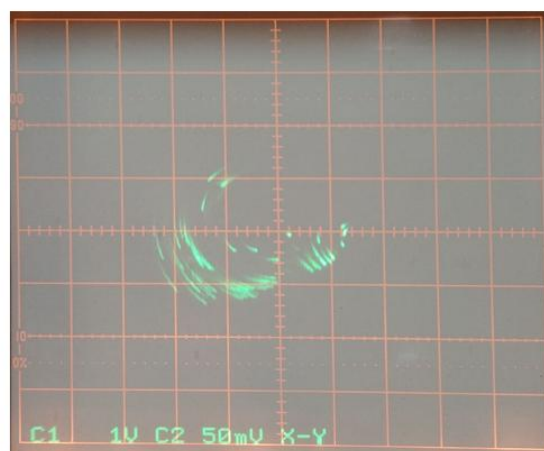
(a)



(b)



(c)

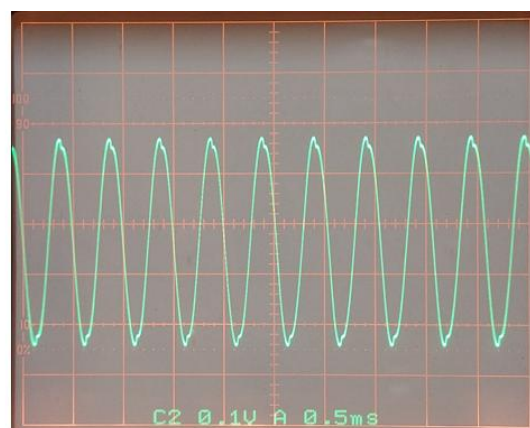


(d)

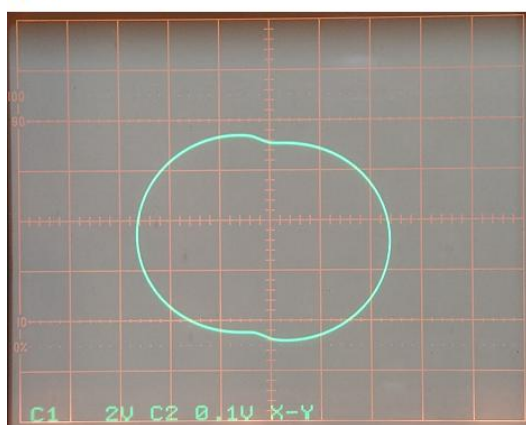
Figura 4.23: Evolução temporal da tensão em C_1 (a), em R_3 (b), figura de lissajous (c) e mapa estroboscópico (d) para $f = 1920Hz$ e $e = 435,4mV_{pp}$.



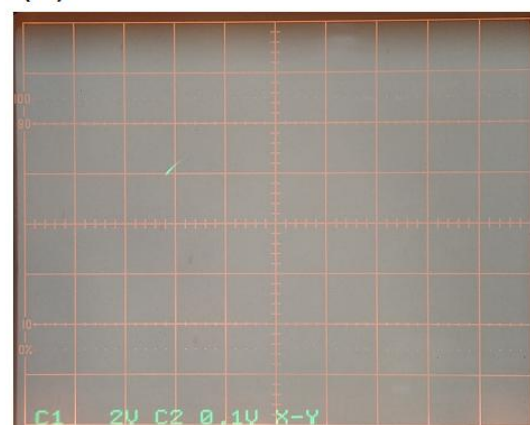
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.24: Evolução temporal da tensão em C_1 (a), em R_3 (b), figura de lissajous (c) e mapa estroboscópico (d) para $f = 1920\text{Hz}$ e $e = 478,1\text{mV}_{pp}$.

Capítulo 5

Conclusões

Baseado na equação de Duffing, foi proposto um modelo teórico representado por uma equação ordinária de segunda ordem não-linear e estudado em 2 casos específicos: (i) não perturbado e (ii) perturbado. Além disso, foi montado um circuito eletrônico afim de corroborar a validade do modelo teórico.

Para o caso em que o sistema considerado não sofre a ação de uma perturbação externa, foram encontrados os pontos fixos do sistema e também foi realizada a discussão da estabilidade desses mesmos pontos. Através de integração numérica, apresentaram-se retratos de fase e bacias de atração para um determinado conjunto de condições iniciais e de parâmetros. Ainda, através de uma mudança de variáveis, foi analisada a convergência para o ponto fixo do sistema não-linear sob um regime de amortecimento subcrítico. O resultado foi a construção de uma única curva universal, demonstrando a universalidade do sistema no decaimento das órbitas para o ponto fixo.

Para o caso em que há a presença de perturbação externa apresentou-se um método qualitativo para estudo dos períodos ocorridos em mapas de Poincaré, foram encontradas o fenômeno de duplicação de período e janelas em que não possível encontrar uma periodicidade definida. Bacias de atração foram encontradas para uma grade de condições iniciais e com parâmetros fixos. Ainda nesse cenário, foi investigado o fenômeno de ressonância para o oscilador não-linear e o surgimento de histerese a depender do incremento ou decremento dos valores de frequência da perturbação externa.

Por fim, foi realizada a construção de um circuito eletrônico para o oscilador não-linear. Através de algumas aproximações e das relações dos componentes no circuito, encontramos um conjunto de equações que confirmam a similaridade com o modelo teórico. Através de alguns equipamentos de medidas elétricas, tais como osciloscópios e geradores de sinal, obtivemos registros fotográficos de séries temporais, figuras de Lissajous e de mapas estroboscópicos semelhantes aos simulados numericamente para o sistema perturbado.

Esperamos que o trabalho realizado até aqui seja uma motivação para que continuemos a investigação. Como perspectiva, existe a possibilidade de desenvolvimento de rotinas numéricas para o cálculo de expoente de Lyapunov e também para a obtenção de estruturas *shrimps*. A elaboração de automação para a obtenção de séries temporais experimentais contribuiria para o estudo de bifurcações e a presença de estruturas *shrimps*. Também, seria concebível a discussão sobre bifurcações, já que modelos similares encontrados na literatura apresentam fenômenos tais como intermitência, dobra cíclica e duplicação de período tipo “*flip*”.

Referências Bibliográficas

- [1] Savi, M. A. Dinâmica Não-linear e Caos. E-papers, 2006.
- [2] Monteiro, L. Sistemas Dinâmicos. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [3] Poincaré, H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, vol. 1 (Gauthier Villars, Paris, 1892).
- [4] Kolmogorov, A. N., Dokl. Akad. Nauk. SSSR, v. 98, p. 527, (1954).
- [5] Arnold, V. I., Uspekhi Math. Nauk., v. 18, p. 13, (1963).
- [6] Moser, J., Nach. Akad. Wiss. Gottingen II Math. Phys., v. 1, p. 1, (1962).
- [7] Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic Flow. Journal of the atmospheric sciences, v. 20, n. 2, p. 130-141, 1963.
- [8] Ueda, Y., Akamatsu, N., Hayashi, C. Computer Simulations and Non-periodic Oscillations (1973), Trans IEICE Japan, v.56A, n.4, pp.218-225.
- [9] Chua, L. O. The genesis of chua's circuit. Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik, 1992.
- [10] Fortuna, L., Frasca, M., Xibilia, M. Chua's Circuit Implementations: Yesterday, Today and Tomorrow [S.I.] World Scientific Pub, 2009 (World Scientific series on nonlinear science. Series A).
- [11] A. Arneodo; P. Coulet; C. Tresser, Physics Letters A, 79, 259, (1980).
- [12] J. J. Hopfield, Proceedings of National Academy of Science, E.U.A., 79, 2554, (1982).
- [13] E. R. Abraham, Nature, 391, 577, (1998).
- [14] D. J. Watts, Princeton Studies in Complexity, v. 108, Princeton University Press, New Jersey, (1999).
- [15] G. Károlyi, A. Penték, Z. Toroczkai, T. Tél ; C. Grebogi, Physical Review E, 59, 5468, (1999).

- [16] A. L. Barabási, The new science of networks. Perseus Publishing, (2002).
- [17] E. M. Izhikevich, International Journal Bifurcation and Chaos, 10, 1171, (2000).
- [18] R. M. May, Theoretical Ecology: principles and applications, Blackwell Scientific Publications, Oxford, (1976).
- [19] L. O. Chua. G. N. Lin, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 37, 885, (1990).
- [20] M. P. Kennedy, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 41, 771, (1994).
- [21] F. Battelli e K. J. Palmer, J.of Diferential Equations 101, 276, (1993).
- [22] J. C. Sprott, Phys. Lett. A, 266, 19, (2000).
- [23] Fieldler, F. N. Fieldler; Prado, C. P. C. Caos: Uma introdução. 1 ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA, (1995).
- [24] S. H. Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry and engineering. Perseus Books Publishing, New York, (1999).
- [25] MOON, F.C., HOLMES, P.J. A Magnetoelastic Strange Attractor, Journal of Sound and Vibration, v. 65, pp. 275–296, 1979.
- [26] Harold A. Wheeler, Simple Inductance Formulas for Radio Coils, Proceedings of the I.R.E., October 1928, pp. 1398-1400.
- [27] Boyce W. E., DiPrima R. C., Meade D. B., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Wiley, 11 ed., New York.
- [28] Leonel, E.D. Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares. Editora Blucher, São Paulo, 2019.
- [29] Ott E., Chaos in dynamical systems. Cambridge University Press, Maryland, 1993.
- [30] Menck, P. J., Heitzig, J., Marwan, N. & Kurths, J. How basin stability complements the linear-stability paradigm. Nat. Phys. 9, 89–92 2013.
- [31] R. M. May, Ann. N. Y. Acad. Sci, 357, 267, (1980).
- [32] E D. Leonel, J. K. L. da Silva, S. Kamphorst, Physica A, 295, 280, (2001).
- [33] M. Joglekar, E. Ott e J. A. Yorke, Physical Review Letters, 113, 084101, (2014).
- [34] R. E. de Carvalho e E. D. Leonel, Physica A, 463, 37, (2016).

- [35] S. Tanaka, T. Matsumoto, and L. Chua. Bifurcation scenario in a driven r-l-diodecircuit, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 28(3):317 – 344, (1987).
- [36] S. M. Potirakis, Y. Contoyiannis, F. K. Diakonos, and M. P. Hantias. Intermittency-induced criticality in a resistor-inductor-diode circuit. *Phys. Rev. E*, 95:042206,(2017).
- [37] M. Hantias, Z. Avgerinos, and G. Tombras. Period doubling, feigenbaum constant and time series prediction in an experimental chaotic RLD circuit. *Chaos, Solitons and Fractals*, 40(3):1050 – 1059, (2009).
- [38] Tamaševičiūtė E., Tamaševičius A., Mykolaitis G., Bumelienė S., Lindberg E. Analogue Electrical Circuit for Simulation of the Duffing-Holmes Equation, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2008, Vol. 13, No. 2, 241–252.
- [39] Boylestad, R. L., Nashelsky, L. *Dispositivos Eletrônicos e Teoria de Circuitos* . 11. ed. São Paulo: Pearson, 2013.
- [40] Tektronix, XYZs of Oscilloscopes, versão de 1995, atualmente numa nova edição disponível em [http : //www.tek.com](http://www.tek.com)
- [41] Electronic Components Datasheet, 2021. Disponível em: <https://pdf1.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/424989/UTC/TL082.html>. Acesso em: 14 de jul. de 2021.

Capítulo 6

Apêndice - Métodos Numéricos para Problemas de Valor Inicial

A fim de se determinar, de um modo qualitativo, a dinâmica de sistemas lineares, utilizam-se métodos numéricos, fazendo uma discretização para simplificar um problema real e contínuo, convertendo as equações diferenciais em um sistema algébrico passível de solução. Geralmente, os sistemas a serem resolvidos são divididos em problemas de valor inicial (em que as variáveis de estado inicial são conhecidas) e problemas de valor de contorno (em que as variáveis do problema são conhecidas no seu contorno). Os sistemas dinâmicos discretos, governados por um sistema de equações diferenciais ordinárias são casos característicos de problemas de valor inicial. A seguir, apresentaremos uma breve revisão sobre alguns métodos aplicados em problemas de valor inicial, adequados para o tratamento dos problemas discutidos nesta dissertação.

Os problemas de valor inicial que se aplicam a sistemas dinâmicos são tratados do seguinte modo,

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 . \quad (6.1)$$

Devemos discretizar o problema, fragmentando o tempo em um conjunto de pontos (t_n) , os quais são separados por intervalos regulares de tempo Δt a fim de se encontrar uma solução numérica. Desta maneira, o instante de tempo t_{n+1} é estabelecido do seguinte modo,

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t . \quad (6.2)$$

O valor exato de $x(t_{n+1})$ pode ser conseguido através da série de Taylor,

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \dot{x}(t_n)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_n)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot{x}(t_n)\Delta t^3 + \dots \quad (6.3)$$

Porém, como $\dot{x} = f(x, t) \equiv f$, podemos usar a regra da cadeia para determinar as derivadas de x em função de f e suas derivadas. Assim,

$$\ddot{x} = \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} = f' f + \dot{f} , \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = \ddot{f} &= \frac{\partial}{\partial x} (f' f + \dot{f}) + \frac{\partial}{\partial t} (f' f + \dot{f}) = \\ &= \ddot{f} + f' \dot{f} + 2 \dot{f}' f + f'^2 f + f'' f^2 , \end{aligned} \quad (6.5)$$

em que f e suas derivadas são obtidas em (x, t) . O mesmo procedimento é válido para se encontrar as derivadas de ordem superior. Fica evidente que, quanto maior a quantidade de termos considerados na série de Taylor, maior será o esforço demandado na obtenção destas derivadas.

6.1 Métodos de Euler

Por considerar apenas os termos lineares da expansão em série de Taylor, os métodos de Euler são as técnicas de integração mais acessíveis e descomplicadas de serem obtidas. Assim,

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \dot{x}(t_n) \Delta t + O(\Delta t^2) , \quad (6.6)$$

que nos irá fornecer aproximações para os valores $x(t_{n+1})$ a partir dos valores $x(t_n)$. Como os valores $x(t_n)$ são também aproximações, os erros vão acumular em cada iteração. O termo $O(\Delta t^2)$ indica o erro relativo ao truncamento da série de Taylor. Nesta situação, este erro é da ordem de Δt^2 determinando que os métodos de Euler são de segunda ordem. Através desta ponderação, a derivada é aproximada por,

$$\dot{x} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\Delta t} . \quad (6.7)$$

Segundo a forma empregada para estabelecer a aproximação desta derivada, distinguem-se as posteriores classificações para estes métodos.

6.2 Euler Explícito

Neste método, podemos fazer a próxima aproximação, supondo

$$x_{n+1} = x_n + f_n \Delta t , \quad (6.8)$$

em que x_{n+1} e x_n representam os valores aproximados de $x(t_{n+1})$ e $x(t_n)$, respectivamente, enquanto $f_n \equiv f(x_n, t_n)$. Equiparando a aproximação definida com a expansão em série de Taylor, encontra-se uma aproximação que retrata a derivada temporal no instante $n + 1$ com início no estado determinado no instante n . Deste modo, verifica-se de forma explícita a derivada, da seguinte maneira,

$$\dot{x} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = f_n . \quad (6.9)$$

Esta é a aproximação mais elementar possível para se descrever uma derivada. Seu aspecto fundamental é o de que o modelo análogo discreto, relacionado ao sistema original, propaga erros de arredondamento na medida em que o tempo avança. Pode assim ocorrer um problema de estabilidade, para valores Δt grandes, ocorrendo mesmo com simples erros de arredondamento. Esta fato evidencia a instabilidade do método o que, normalmente, impossibilita o seu uso, principalmente quando é necessário examinar longos períodos de evolução.

6.3 Euler Implícito

Este segundo método de Euler tem a aproximação,

$$x_{n+1} = x_n + f_{n+1} \Delta t . \quad (6.10)$$

Ao se comparar a aproximação observada com a expansão em série de Taylor, obtemos uma aproximação que apresenta a derivada temporal no instante $n+1$ com início no estado determinado no instante $n + 1$. Dessa forma, a derivada não está apresentada de forma explícita, segundo pode ser visualizado a seguir,

$$\dot{x} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = f_{n+1} . \quad (6.11)$$

O aspecto fundamental deste método é que o modelo análogo discreto, relacionado ao sistema original, é que, ao contrário do método anterior basta considerar um Δt suficiente pequeno para que não se verifique o problema de instabilidade.

6.4 Regra do Ponto Médio

A regra do ponto médio supõe a subsequente aproximação,

$$x_{n+1} = x_n + f_{n+1/2} \Delta t , \quad (6.12)$$

em que

$$f_{n+1/2} = f(x_{n+1/2}, t_{n+1/2}) , \quad (6.13)$$

sendo

$$x_{n+1/2} = \frac{x_{n+1/2} + x_n}{2} \quad e \quad t_{n+1/2} = \frac{t_{n+1/2} + t_n}{2} . \quad (6.14)$$

Ao se comparar a aproximação apresentada com a expansão em série de Taylor, encontra-se uma aproximação que descreve a derivada temporal no instante $n + 1$ a partir de um estado intermediário entre os instantes n e $n + 1$. Deste modo,

$$\dot{x} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = f_{n+1/2} . \quad (6.15)$$

Um dos problemas do método de Euler é que ele considera constante a derivada de x ao ir do ponto x_n para x_{n+1} . Isso, por exemplo, implica que o método irá sempre apresentar um valor inferior ao que deveria ser quando a derivada for crescente ou superior caso a derivada seja decrescente. Assim, a ideia do método do ponto médio é usar o método de Euler para aproximar $f_{n+1/2}$ depois calcular a derivada $\dot{x}$ nesse ponto usando a definição da equação diferencial. Por fim usamos essa derivada "média aproximada" para dar um passo parecido com Euler de n para $n + 1$.

Os métodos de Runge-Kutta são, normalmente, os métodos de integração mais utilizados por serem simples e precisos. São usualmente divididos conforme a ordem de precisão associadas aos métodos. Na sequência, são apresentados alguns destes métodos.

6.5 Runge-Kutta de Segunda Ordem

Considere a seguinte aproximação,

$$x_{n+1} = x_n + ak_1\Delta t + bk_2\Delta t , \quad (6.16)$$

em que

$$k_1 = f(x_n, t_n) \quad e \quad k_2 = f(x_n + \beta k_1, t_n + \alpha \Delta t) . \quad (6.17)$$

Agora, vamos considerar a expansão em série de Taylor de $x(t_{n+1})$, em que os termos de ordem superior a Δt^3 são desprezados.

$$\begin{aligned} \ddot{x} = \ddot{f} &= \frac{\partial}{\partial x}(f'f + \dot{f}) + \frac{\partial}{\partial t}(f'f + \dot{f}) = \\ &= \ddot{f} + f'\dot{f} + 2\dot{f}'f + f'^2f + f''f^2 \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned}
x(t_{n+1}) &= x(t_n) + \dot{x}(t_n)\Delta t + \ddot{x}(t_n)\frac{\Delta t^2}{2!} + \ddot{\ddot{x}}(t_n)\frac{\Delta t^3}{3!} + O(\Delta t^4) \\
&= x(t_n) + f_n\Delta t + (\dot{f}_n + f_n f'_n)\frac{\Delta t^2}{2!} + (\ddot{f}_n + 2f_n \dot{f}'_n + f''_n f_n^2 + f'_n \dot{f}_n + f_n'^2 f_n)\frac{\Delta t^3}{3!} + O(\Delta t^4) .
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Usando a série de Taylor para expandir k_2 , vem:

$$k_2 = f_n + \dot{f}_n \alpha \Delta t + f'_n \beta k_1 + \ddot{f}_n \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{2} + \dot{f}'_n \alpha \Delta t \beta k_1 + f''_n \frac{\beta^2 k_1^2}{2} + O(\Delta t^3) . \tag{6.20}$$

Retomando a aproximação proposta,

$$x_{n+1} = x_n + (a + b)f_n\Delta t + b(\alpha \dot{f}_n + \beta f_n f'_n)\Delta t^2 + b\left(\frac{\alpha^2}{2}\ddot{f}_n + \alpha\beta f_n \dot{f}'_n + \frac{\beta^2}{2}f''_n f_n^2\right)\Delta t^3 + O(\Delta t^4) . \tag{6.21}$$

Ao se comparar com a expansão em série de $x(t_{n+1})$, é possível observar as seguintes condições: do termo em Δt : $a + b = 1$ e do termo em Δt^2 : $b\alpha = b\beta = 1/2$.

Nota-se que existem 4 incógnitas (a, b, α, β) e apenas 3 equações. Além do mais, existem termos relacionados a Δt^3 . Por comodidade, é interessante tomar a solução mais compreensível possível a qual é dada por,

$$a = b = 1/2 \quad ; \quad \alpha = \beta = 1 . \tag{6.22}$$

A seguir, expõe-se a seguinte aproximação para a derivada,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}\Delta t(k_1 + k_2) , \tag{6.23}$$

em que

$$k_1 = f(x_n, t_n) \quad e \quad k_2 = f(x_n + k_1, t_n + \Delta t) . \tag{6.24}$$

6.6 Runge-Kutta de Quarta Ordem

Neste método, utilizando o mesmo desenvolvimento aplicado para o método de segunda ordem, é possível formular que os erros estão relacionados a quarta potência do passo de integração. A derivada é aproximada segundo esta equação que se segue,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}\Delta t(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) , \tag{6.25}$$

onde

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, t_n) \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \\
k_4 &= f(x_n + k_3, t_n + \Delta t) .
\end{aligned} \tag{6.26}$$

A soma $(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$ pode ser interpretada como um coeficiente angular médio.

Os métodos de Euler e Euler aprimorados têm erros de truncamento locais proporcionais a h^2 e h^3 , respectivamente, e pertencem à classe de métodos de Runge-Kutta. O método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem tem um erro de truncamento local proporcional a h^5 , ou seja, é duas ordens de grandeza mais preciso do que o método de Euler aprimorado.

O comportamento de sistemas caóticos é influenciado pela sensibilidade das condições iniciais escolhidas. Esse fato é bastante relevante no que diz respeito a simulações numéricas, pois existe uma relação direta entre o passo de integração adotado e a solução das equações diferenciais utilizadas neste trabalho, mesmo mantendo todos os outros parâmetros iguais. Também temos que levar em consideração a discretização temporal, arredondamento e truncamento dos números reais a cada passo de integração, inclusive na escolha das condições iniciais. A garantia para que exista um modelo de acordo com a realidade física é dada pelo Teorema do Sombreamento [29]. Esse teorema diz que, dadas certas condições, embora exista uma divergência exponencial entre uma trajetória calculada e uma verdadeira para uma mesma condição inicial (x_0 , por exemplo), deve existir uma trajetória verdadeira para uma condição levemente diferente ($x_0 + \delta$) próxima a trajetória calculada numericamente, validando as simulações numéricas em sistemas dinâmicos.