UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Sabrina Suelen Amaral

Boa colocação das equações de Navier-Stokes em espaços de Morrey

São José do Rio Preto

2017

Sabrina Suelen Amaral

Boa colocação das equações de Navier-Stokes em espaços de Morrey

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, Área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira

São José do Rio Preto

2017

Amaral, Sabrina Suelen.
Boa colocação das equações de Navier-Stokes em espacos de Morrey / Sabrina Suelen Amaral. -- São José do Rio Preto, 2017
75 f. : il.

Orientador: Juliana Conceição Precioso Pereira
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Mecânica dos fluídos. 4. Navier-Stokes, Equações de. 5. Fluídos dinâmicos.
I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.944

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Sabrina Suelen Amaral

Boa colocação das equações de Navier-Stokes em espaços de Morrey

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, Área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira
Professora Assistente Doutora
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
Professor Adjunto Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima
Professora Adjunta Doutora
UFG - Goiânia

São José do Rio Preto, 22 de fevereiro de 2017.

Dedico à minha mãe

e, em memória, à minha avó.

Agradecimentos

Agradeço a DEUS por me amparar e me dar forças em meio a tantas dificuldades, me mostrando sempre o melhor caminho a seguir e por ter me feito chegar até aqui.

Agradeço a toda a minha família, a qual devo o total apoio, principalmente pelas orações. Em especial, agradeço à minha mãe Neuza, por ser a minha maior incetivadora na superação de todos os meus limites e por sempre acreditar em minha capacidade.

Agradeço a todos os meus professores que me acompanharam durante a minha vida, em especial, aos meus professores de Graduação e Mestrado que contribuiram com a minha formação acadêmica. Obrigada por todo conhecimento transmitido.

Agradeço à minha orientadora, Prof. Dra. Juliana C. P. Pereira, pelos conhecimentos divididos, pela paciência e por toda disposição em me ajudar, me recebendo sempre com muita atenção. Obrigada pelo tempo dedicado à minha orientação e pela confiança.

Agradeço ao meu namorado, Jefferson, pela amizade acima de tudo, por sempre me confortar com suas palavras, por sempre acreditar em mim me pondo para cima nos momentos mais difíceis. Obrigada pelo companheirismo, orações, alegria e amor incondicional.

Agradeço as minhas amigas de sempre, Naísa e Letícia, que sempre estiveram ao me lado, me apoiando e por quererem sempre o meu bem. Obrigada por dividir comigo minhas angústias e alegrias e por ouvirem minhas bobagens.

Agradeço à Banca Examinadora por aceitarem o meu convite, juntamente com a Prof. Dra Juliana C. P. Pereira. Obrigada pela disponibilidade.

Agradeço aos meus colegas de mestrado, pelos momentos divididos juntos e pelo auxílio em minhas dificuldades.

Agradeço, também, à CAPES pelo apoio financeiro.

"Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar.
Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota."

(Madre Tereza de Calcuta)

Resumo

Neste trabalho analisaremos as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 3)$ e mostraremos boa colocação global, quando a velocidade inicial pertence ao espaço de Morrey $M_{p,\lambda}$ e tem norma suficientemente pequena. Mostraremos também que se o dado inicial é uma função homogênea de grau -1, então as soluções textitmild são autossimilares. Além disso, apresentaremos um resultado de estabilidade assintótica das soluções *mild*.

Palavras-chave: Espaços de Morrey. Equações de Navier-Stokes. Soluções mild.

Abstract

In this work we will analyze the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 3)$ and we will show global well-posedness, when the initial velocity belongs to the Morrey space Mp, λ and with a sufficiently small norm. We will also show that if the initial data is a homogeneous function of degree -1, then the mild solutions are self-similar. Moreover, we will present an asymptotic stability result of the mild solutions.

Keywords: Morrey Space. Navier-Stokes Equations. Mild Solutions.

Sumário

Introdução

As equações de Euler e de Navier-Stokes descrevem o comportamento do movimento de um fluido em R^n. Essas equações tem como incógnitas um vetor velocidade $u(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t)) \in \mathbb{R}^n$ e a pressão $p(x,t) \in \mathbb{R}$, definidas na posição $x \in \mathbb{R}^n$ e tempo $t \geq 0$. Neste trabalho, restringiremos nossa atenção a fluidos incompressíveis preenchendo todo o espaço $\mathbb{R}^n$.

As equações de Navier-Stokes são dadas por

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla P = f, & x \in \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ \nabla\cdot u = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Aqui, $u_0 = u_0(x)$ é um campo vetorial dado com divergente nulo em $\mathbb{R}^n$, $f = f(x,t) = (f_1(x,t), \cdots, f_n(x,t))$, em que $f_i(x,t), i = 1, \cdots, n$ são as componentes de uma dada força aplicada externamente (força da gravidade, por exemplo), μ é um coeficiente positivo (de viscosidade) e $\triangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o laplaciano em variáveis espaciais. As equações de Euler são obtidas de (1) fazendo-se $\mu = 0$.

A primeira equação em (1) é a segunda lei de Newton ($F = ma$) para um fluido sujeito à força externa f e às forças que surgem da pressão e da fricção. A segunda equação diz apenas que o fluido é incompressível.

O problema de Cauchy para Navier-Stokes (1), para $n \geq 3$, embora amplamente estudado, ainda está longe de ser completamente compreendido. Existem essencialmente dois ramos para abordagem do problema. Em [19], J. Leray introduziu o conceito de solução fraca e obteve existência global de soluções fracas para dados iniciais $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. A unicidade dessas soluções (e outras propriedades desejadas para uma solução) permanecem um problema em aberto. Em [12], H. Fujita e T. Kato obtiveram existência de solução para dados iniciais $u_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ por métodos de semi-grupos. Tais soluções são conhecidas como mild ou brandas.

A teoria das soluções mild é associada principalmente a Kato e a Fujita, mas vale mencionar que alguma “versão” dessas idéias já estava contida no trabalho de Leray. Soluções mild são únicas, mas somente em tempo local, a menos que a pequenez do dado inicial seja assumida. Essa linha de resultados tem sido vastamente explorada culminando com diversos importantes trabalhos sobre as equações de Navier-Stokes, com pequenez do dado inicial, em diferentes espaços críticos (espaços cujas normas são invariantes pelo scaling) tais como [8], [11], [27] em espaços de Lebesgue $L^m(R^n)$, [2], [28] em espaços $L^m - fraco$, [4], [5] em espaços de Besov, [4] em espaços de pseudo-medidas PM^{m-1}, [11], [26] em espaços de Morrey $M_{p,m-p}$, [15], [16] em espaços de Besov-Morrey e [14] em espaços BMO^{-1}. Para uma discussão mais completa nesta direção veja, por exemplo, [18].

Vale ainda ressaltar que a teoria das soluções fracas tira proveito da estrutura específica das equações de Navier-Stokes e, em particular, da estimativa de energia. Por outro lado, a abordagem de Kato é mais genérica em sua natureza e se aplica a muitos outros problemas semilineares parabólicos (ou dispersivos).

Neste trabalho, estudamos resultados de boa colocação global e estabilidade assintótica, em espaços de Morrey, com a condição de pequenez do dado inicial. Uma vez que os espaços de Morrey contém funções homogêneas é possível obter existência de soluções autossimilares. Os resultados de boa colocação estão contidos no trabalho de Kato [11]. Já os resultados de autosimilaridade e estabilidade assintótica são obtidos como adaptação dos trabalhos [5], [6] e [8] para espaços de Morrey.

A dissertação está organizada em três capítulos com suas respectivas seções. No primeiro capítulo incluímos algumas notações básicas, apresentamos alguns resultados e definições importantes que serão utilizados no decorrer do trabalho.

No segundo capítulo, incluímos a definição e algumas propriedades dos Espaços de Morrey como completude, desigualdade de Hölder, imersões e operadores do tipo convolução e singulares com ação nos espaços de Morrey. Além disso, apresentamos algumas estimativas para o semigrupo do calor $U(t)$, que serão fundamentais para provar os principais resultados desse trabalho.

No terceiro capítulo apresentamos resultados que garantem que as equações de Navier Stokes são globalmente bem colocadas para dados iniciais em espaços de Morrey sob certas hipóteses de pequenez. Além disso, apresentamos resultados de autosimilaridade e de estabilidade assintótica.

Capítulo

1

Preliminares

O objetivo deste capítulo consiste em estruturar a presente dissertação. Nele, iremos apresentar algumas definições e resultados importantes e fixaremos notações básicas que usaremos no decorrer dos capítulos.

1.1 Conceitos básicos

Definição 1.1.1. *Um vetor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, em que cada componente α_i, $i = 1, \ldots, n$ é um inteiro não negativo é chamado um multi-índice de ordem*

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

Definição 1.1.2. *Seja $u : U \to \mathbb{R}^m$, em que $u = (u_1, \ldots, u_m)$, com $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dado um muti-índice α define-se $D^\alpha u_j(x)$ por:*

$$D^\alpha u_j(x) = \frac{\partial^\alpha u_j(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n} u_j(x)}{\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Assim, se k é um inteiro não-negativo, então o conjunto de todas as derivadas parciais de u, de ordem k, é dado por

$$D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) = (D^\alpha u_1(x), \cdots, D^\alpha u_m(x)); |\alpha| = k\}.$$

No decorrer deste trabalho usaremos as seguintes notações:

- $C^k(U) = \{u : U \to \mathbb{R};\ u$ tem derivadas parciais contínuas até ordem $k\}$;

- $C^\infty(U) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U) = \{u : U \to \mathbb{R};\ u$ é infinitamente diferenciável$\}$;
- $C_c^\infty(U) = \{u : U \to \mathbb{R};\ u \in C^\infty(U)$ e $supp(u)$ é compacto$\}$, em que $supp(u) = \overline{\{x \in U; u(x) \neq 0\}}$;

Vale lembrar que os espaços de funções a valores vetoriais $(C^k(U))^n$, $(C^\infty(U))^n$ e $(C_c^\infty(U))^n$ consistem de todas as funções $u : U \to \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \cdots, u_n)$, com $u_j \in C^k(U)$, $C^\infty(U)$ e $C_c^\infty(U)$, respectivamente $(j = 1, \ldots, n)$. No entanto, no decorrer deste trabalho, para simplificar a notação não faremos distinção entre espaços de funções vetoriais e escalares.

1.2 Os Espaços L^p

Definição 1.2.1. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. O espaço $L^p(U)$ é o conjunto das funções mensuráveis u em U tais que $\int_U |u(x)|^p dx < \infty$.*

Uma norma em $L^p(U)$ é dada por:

$$\|u\|_{L^p} = \|u\|_p = \left(\int_U |u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e para $p = \infty$

$$\|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in U} |u(x)|.$$

Vale ressaltar que $\|\cdot\|_p$ define uma norma que faz de $L^p(U)$ um espaço de Banach. Para mais detalhes veja [3].

Na sequência, enunciaremos as desigualdades de Hölder e Young para os espaços de Lebesgue $L^p = L^p(U)$, que serão muito úteis posteriormente. No entanto, omitiremos suas demonstrações que podem ser encontradas em [7].

Proposição 1.2.2. *(Desigualdade de Hölder) Sejam p, q e r tais que $1 < p, q, r < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Se u e v são funções tais que $u \in L^p$ e $v \in L^q$, então $uv \in L^r$ e vale a desigualdade*

$$\|uv\|_r \ \leq \ \|v\|_p \|v\|_q.$$

Quando $r = 1$ a igualdade vale se, e somente se, $\alpha|u|^p = \beta|v|^q$ q.t.p., em que α e β são constantes satisfazendo $\alpha\beta \neq 0$.

Proposição 1.2.3. *(Desigualdade de Young) Sejam p, q e r tais que $1 \leq p, q, r \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Se $u \in L^p$ e $v \in L^q$, então $u * v \in L^r$ e*

$$\|u * v\|_r \ \leq \ \|u\|_p \|v\|_q,$$

em que o símbolo $*$ *denota o operador convolução definido por*

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)dy.$$

A desigualdade abaixo será de suma importância para demonstrarmos um dos principais resultados para operadores de convolução em espaços de Morrey que veremos no capítulo seguinte. A demonstração desta desigualdade pode ser encontrada em [9].

Proposição 1.2.4. *(Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev) Seja* δ *um número real tal que* $0 < \delta < n$ *e sejam* $1 \leq p < q < \infty$ *satisfazendo* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\delta}{n}$*. Então, existe uma constante* $C = C(n, \delta, p) < \infty$ *tal que para toda* $u \in L^p$ *tem-se*

$$\|I_\delta(u)\|_q \leq C\|u\|_p, \text{ quando } p > 1$$

e

$$\|I_\delta(u)\|_\infty \leq C\|u\|_1, \text{ quando } p = 1,$$

em que

$$I_\delta(u) = C\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)|y|^{-n+\delta}dy.$$

Definição 1.2.5. *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* U *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$*. O espaço* $L^p_{loc}(U)$ *é o conjunto das funções* u *mensuráveis em* U *tais que* $\int_K |u(x)|^p dx < \infty$*, para qualquer compacto* $K \subset U$*.*

Vale lembrar que se $u \in L^\infty(U)$, então $u \in L^p_{loc}(U)$, para todo $1 \leq p < \infty$. Além disso, usando a desigualdade de Hölder, pode-se mostrar que se $1 \leq p \leq \infty$, então $L^p_{loc}(U) \subset L^1_{loc}(U)$.

Teorema 1.2.6. *(**Convergência Dominada de Lebesgue**) Suponha que* (u_n) *seja uma sequência de funções mensuráveis em* U*, tal que*

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

existe para todo $x \in U$*. Se existe* $g \in L^1(U)$ *tal que*

$$|u_n(x)| \leq g(x), \quad n = 1, 2, \ldots \text{ e } x \in U,$$

então $u \in L^1(U)$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_U u_n(x)dx = \int_U u(x)dx.$$

Para uma demonstração veja, por exemplo, [3].

1.3 O Espaço das Distribuições

Como vimos anteriormente, $C_c^\infty(U)$ é o espaço das funções definidas em U, com suporte compacto, possuindo em U derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $C_c^\infty(U)$ são chamados funções testes em U.

Por exemplo, considerando-se $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

com $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, mostra-se que $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que supp $\rho = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq 1\}$, ou seja, ρ é uma função teste em $\mathbb{R}^n$.

Vale destacar que para $1 \leq p < \infty$ vale que $C_c^\infty(U)$ é denso em $L^p(U)$. Para uma discussão mais detalhada sobre o assunto veja, por exemplo, [20].

Definição 1.3.1. *Diz-se que uma sequência (φ_ν) de funções de $C_c^\infty(U)$ é convergente para zero, quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

i) Os suportes de todas as funções testes φ_ν, da sequência dada, estão contidos num compacto fixo K.

ii) Para cada muti-índice α, a sequência $(D^\alpha \varphi_\nu)$ converge para zero uniformemente em K.

Se $\varphi \in C_c^\infty(U)$, diz-se que a sequência (φ_ν) de elementos de $C_c^\infty(U)$ converge para φ em $C_c^\infty(U)$, quando a sequência $(\varphi_\nu - \varphi)$ converge para zero no sentido dado acima.

O espaço vetorial $C_c^\infty(U)$ com esta noção de convergência é representado por $\mathcal{D}(U)$ e denominado espaço das funções testes em U.

Definição 1.3.2. *Define-se como distribuição sobre U a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(U)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(U)$, ou seja, para toda sequência (φ_ν) de $\mathcal{D}(U)$ que converge para zero, tem-se que a sequência $(\langle T, \varphi_\nu \rangle)$ converge para zero em $\mathbb{K}$.*

Observação 1. *Note que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $\langle T, \varphi_\nu \rangle$ é o valor de T em φ_ν.*

O conjunto de todas as distribuições sobre U é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(U)$. Se $u \in L^1_{loc}(U)$, então a forma linear T_u definida por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_U u(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(U)$$

é um exemplo de distribuição sobre U.

Definição 1.3.3. *Diz-se que uma sequência* (T_ν) *de elementos de* $\mathcal{D}'(U)$ *converge para zero em* $\mathcal{D}'(U)$*, quando para toda função teste* $\varphi \in \mathcal{D}(U)$*, a sequência* $(\langle T_\nu \rangle, \varphi)$ *converge para zero em* $\mathbb{K}$*. Neste caso, escreve-se*

$$\lim_{\nu\to\infty} T_\nu = 0 \quad em\ \mathcal{D}'(U).$$

Diz-se que

$$\lim_{\nu\to\infty} T_\nu = T \quad em\ \mathcal{D}'(U),$$

quando $\lim_{\nu\to\infty}(T_\nu - T) = 0$ *em* $\mathcal{D}'(U)$*.*

Lema 1.3.4 (de Du Bois Raymond)**.** *Seja* $u \in L^1_{loc}(U)$*. Então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *q.t.p em* U*.*

Observação 2. *Do Lema 1.3.4 segue que para para* $u \in L^1_{loc}(U)$*, tem-se* T_u *univocamente determinada por* u *sobre* U*, quase sempre, no seguinte sentido: se* $u, v \in L^1_{loc}(U)$*, então* $T_u = T_v$ *se, e somente se,* $u = v$ *q.t.p em* U*. Por esta razão, identifica-se* u *com a distribuição* T_u *por ela definida e diz-se a distribuição* u *ao invés de dizer a distribuição* T_u*.*

Vale ainda lembrar que para $1 \leq p < \infty$, tem-se a seguinte cadeia de imersões contínuas

$$\mathcal{D}(U) \hookrightarrow L^p_{loc}(U) \hookrightarrow \mathcal{D}'(U).$$

1.4 Transformada de Riesz e Projetor de Leray

Nesta seção trataremos sobre a transformada de Riez e o operador projetor de Leray (ou Leray-Hopf), mas antes precisaremos introduzir o espaço de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o espaço das funções infinitamente deriváveis em $\mathbb{R}^n$, cujas derivadas decrescem no infinito mais rapidamente que qualquer potência de $|x|$.

Definição 1.4.1. *O espaço de Schwarz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *é o conjunto de todas as funções* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*, tais que a semi-norma*

$$\|f\|_{(k,\alpha)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^k)|D^\alpha f(x)|$$

é finita para cada $k \in \mathbb{N}$ *e todo multi-índice* α*.*

Observação 3. *No espaço* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *considera-se a seguinte noção de convergência: uma sequência* (φ_ν) *de funções de* $\mathcal{S}$ *converge para uma função* $\varphi \in \mathcal{S}$ *se a sequência* $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{(k,\alpha)}$ *converge zero para quaisquer* $k \in \mathbb{N}$ *e* α *multi-índice.*

A seguir relembramos a transformada de Fourier.

Definição 1.4.2. *Dada uma função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, define-se a sua transformada de Fourier como sendo a função $\mathcal{F}[u]$ definida por*

$$\mathcal{F}[u](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi\cdot x}u(x)\ dx.$$

Também denotamos $\mathcal{F}[u] = \widehat{u}$.

Definição 1.4.3. *Dada uma função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier inversa é a função dada por $\check{u}(x) = \widehat{u}(-x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$.*

As propriedades à seguir são básicas e muito relevantes no estudo da transformada de Fourier:

Proposição 1.4.4. *Considere $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

(i) $(u * v)^\wedge = \widehat{u}\widehat{v}$.

(ii) *Se $x^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para $|\alpha| \leq k$, então $\widehat{u} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha\widehat{u} = [(-2\pi ix)^\alpha u]^\wedge$.*

(iii) *Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$ e $D^\alpha u$ é contínua com $\lim_{|x|\to\infty} D^\alpha u(x) = 0$ para $|\alpha| \leq k-1$, então $(D^\alpha u)^\wedge(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha\widehat{u}(\xi)$.*

Uma vez que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, estão bem definidas $\mathcal{F}[u] = \widehat{u}, \overline{\mathcal{F}}[u] = \check{u}$ e mostra-se que elas são rapidamente decrescentes no infinito. Além disso,

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ \text{ e } \ \overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos contínuos e $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.

Agora estamos em condições de definir a transformada de Riesz que será muito útil para nossos propósitos.

Definição 1.4.5. *Seja $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A $k-$transformada de Riesz, $\mathcal{R}_k$, é dada por*

$$\widehat{\mathcal{R}_k u}(\xi) = \frac{i\xi_k}{|\xi|}\widehat{u}(\xi), \quad k = 1, \cdots, n \tag{1.2}$$

em que $\widehat{u}$ é a transformada de Fourier de u.

Uma vez que o operador *potencial de Riesz*, (ver [23]), é dado por

$$\left((-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}u\right)^\wedge(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\beta}\widehat{u}(\xi), \quad 0 < \beta < n,$$

tem-se

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u\right)^{\wedge}(\xi) &= 2\pi i\xi_k\left((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u\right)^{\wedge}(\xi)\\ &= 2\pi i\xi_k(2\pi|\xi|)^{-1}\widehat{u}(\xi)\\ &= \frac{i\xi_k}{|\xi|}\widehat{u}(\xi)\\ &= \widehat{(\mathcal{R}_k u)}(\xi),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{R}_k u(x) = \left[\widehat{(\mathcal{R}_k u)}\right]^{\vee}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u\right)(x), \tag{1.3}$$

em que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\Delta = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ é o operador de Laplace.

Definição 1.4.6. *O operador projetor de Leray $\mathbb{P}$ é definido por*

$$\mathbb{P} = I + \mathcal{R}\otimes\mathcal{R}, \tag{1.4}$$

em que I é a aplicação identidade e $\mathcal{R}$ é um vetor cujas componentes são dadas pelas transformadas de Riesz, isto é, $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \cdots \mathcal{R}_n)$ e $(\mathcal{R}\otimes\mathcal{R})_{ij} = \mathcal{R}_i\mathcal{R}_j$.

Segue que para cada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(u) &= u + (\mathcal{R}\otimes\mathcal{R})u\\ &= (u_1, \ldots, u_n) + (\mathcal{R}_1\mathcal{R}_1 u_1 + \cdots + \mathcal{R}_1\mathcal{R}_n u_n, \ldots, \mathcal{R}_n\mathcal{R}_1 u_1 + \ldots, +\mathcal{R}_n\mathcal{R}_n u_n)\\ &= (u_1, \ldots, u_n) + (\mathcal{R}_1\sum_{j=1}^{n}\mathcal{R}_j u_j, \ldots \mathcal{R}_n\sum_{j=1}^{n}\mathcal{R}_j u_j)\\ &= (u_1 + \mathcal{R}_1\sigma, \ldots, u_n + \mathcal{R}_n\sigma),\end{aligned} \tag{1.5}$$

em que $\sigma = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mathcal{R}_j u_j$.

Observe que de (1.3) tem-se

$$\begin{aligned}R_i\sigma &= \frac{\partial}{\partial x_i}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_j\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{div}\ \left((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}(-\Delta)\ \mathrm{div}\ u.\end{aligned}$$

Assim, pode-se reescrever o projetor $\mathbb{P}$ da seguinte forma:

$$\mathbb{P}(u) = \left(u_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\left((-\Delta)^{-1} \text{ div } u\right), \ldots, u_n + \frac{\partial}{\partial x_n}\left((-\Delta)^{-1} \text{ div } u\right)\right). \tag{1.6}$$

Vale ressaltar que o projetor de Leray tem as seguintes propriedades:

- (i) $\mathbb{P}$ comuta com derivadas;
- (ii) $\mathbb{P}(\nabla u) = 0$;
- (iii) div $(\mathbb{P}(u)) = 0$;
- (iv) div $u = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}u = u$.

Para mais detalhes sobre a transformada de Riesz e o projetor de Leray, veja [9], [18], por exemplo.

1.5 A Função Beta

Apresentaremos agora a função Beta que será uma ferramenta importante para obter certas estimativas no decorrer deste trabalho.

Definição 1.5.1. *Sejam $x, y > 0$. A função Beta é definida pela integral*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{1.7}$$

Proposição 1.5.2. *A função Beta é sempre finita.*

Demonstração. De fato, tome $0 < \delta < 1$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
\beta(x,y) &= \int_0^\delta t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int_\delta^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\
&\leq \max(1,(1-\delta)^{y-1})\int_0^\delta t^{x-1}dt + \max(1,\delta^{x-1})\int_\delta^1 (1-t)^{y-1}dt \\
&= \max(1,(1-\delta)^{y-1})\frac{\delta^x}{x} + \max(1,\delta^{x-1})\frac{(1-\delta)^y}{y} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

□

Observação 4. *Fazendo-se a mudança de variável $s = tw$, tem-se*

$$\int_0^t s^{x-1}(1-s)^{y-1}\ ds = \int_0^1 (tw)^{x-1}(t-tw)^{y-1}t\ dw$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 t^{x+y-1} w^{x-1}(1-w)^{y-1}\ dw \\
&= t^{x+y-1} \int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}\ dw \\
&= t^{x+y-1} \beta(x,y).
\end{aligned}
$$

Capítulo

2

Os Espaços de Morrey

O objetivo deste capítulo é apresentar os espaços de Morrey e abordar algumas de suas propriedades que serão de fundamental importância para os nossos propósitos.

2.1 Os Espaços de Morrey - $M_{p,\lambda}$

Definição 2.1.1. *O espaço de Morrey, denotado por $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = M_{p,\lambda}$, com $p \in [1,\infty)$ e $\lambda \in [0,n)$ é definido como subespaço normado de*

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \left(\int_K |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \forall K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ compacto} \right\},$$

com a norma dada por

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p;x_0,R} \right\}, \tag{2.1}$$

em que $\|f\|_{p;x_0,R}$ denota a norma em $L^p(B_R(x_0))$ de f, isto é

$$\|f\|_{p;x_0,R} = \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ e } B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < R\}.$$

Observação 5. *Note que se $p \in [1,\infty)$, então $M_{p,0} = L^p$. Se $p = 1$, a norma L^1 em (2.1) é entendida como a variação total da medida f na bola $B_R(x_0)$ e $M_{1,\lambda}$ como um subespaço das medidas de Radon.*

Vale ainda ressaltar que pode-se incluir L^∞ entre os espaços $M_{p,\lambda}$ tomando-se, para isso, $p = \infty$ ou $\lambda = n$.

Os espaços de Morrey são espaços vetoriais normados com a norma $\|f\|_{p,\lambda}$. A seguir, mostraremos que $M_{p,\lambda}$ é um espaço de Banach.

Proposição 2.1.2. *Sejam $p \in [1, \infty)$ e $\lambda \in [0, n)$. O espaço $M_{p,\lambda}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $M_{p,\lambda}$. Note que, em particular, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(B_R(x_0))$. Uma vez que $p \geq 1$, a completude de $L^p(B_R(x_0))$ garante que existe uma função

$$f \in L^p(B_R(x_0)) \;\; \text{tal que} \;\; \|f_k - f\|_{L^p(B_R(x_0))} \to 0. \tag{2.2}$$

Queremos mostrar que $f \in M_{p,\lambda}$ e $\|f - f_k\|_{p,\lambda} \to 0$. Para isso, escreva

$$\begin{aligned} |f(x)|^p &= |f(x) - f_k(x) + f_k(x)|^p \\ &\leq 2^p \left(|f(x) - f_k(x)|^p + |f_k(x)|^p\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^\lambda}\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^p dx &\leq 2^p \left(\frac{1}{R^\lambda}\int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_k(x)|^p dx + \frac{1}{R^\lambda}\int_{B_R(x_0)} |f_k(x)|^p dx\right) \\ &\leq 2^p \left(\frac{1}{R^\lambda}\int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_k(x)|^p dx + \|f_k\|_{p,\lambda}^p\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Como a sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $M_{p,\lambda}$, então existe uma constante $c > 0$ tal que $\|f_k\|_{p,\lambda} \leq c$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí, de (2.2) e (2.3), obtemos

$$\frac{1}{R^\lambda}\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^p dx \leq 2^p c^p,$$

de onde segue que $f \in M_{p,\lambda}$.

Resta mostrar que $\|f - f_k\|_{p,\lambda} \to 0$, quando $k \to \infty$. Para isso, escreva

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^\lambda}\int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_k(x)|^p dx &\leq 2^p \left(\frac{1}{R^\lambda}\int_{B_R(x_0)} |f_m(x) - f_k(x)|^p dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R^\lambda}\int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_m(x)|^p dx\right) \\ &\leq 2^p \left(\|f_m - f_k\|_{p,\lambda}^p + \frac{1}{R^\lambda}\int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_m(x)|^p dx\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como a sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $M_{p,\lambda}$, então dado $\varepsilon > 0$, arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_m - f_k\|_{p,\lambda} \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } k, m \geq n_0. \tag{2.5}$$

Daí, de (2.4) e (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_k(x)|^p dx &\leq 2^p \|f_m - f_k\|_{p,\lambda}^p + \frac{2^p}{R^\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f(x) - f_m(x)|^p dx \\ &< 2^p \varepsilon^p + C\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.6}$$

para todo $k, m \geq n_0$.

Como ε é arbitrário, segue de (2.6) que $f_k \to f$ em $M_{p,\lambda}$.

□

Definição 2.1.3. *O subespaço $\dot{M}_{p,\lambda}$ de $M_{p,\lambda}$ é o conjunto das funções $f \in M_{p,\lambda}$ tais que*

$$\lim_{R \to 0} \left[R^{-\frac{\lambda}{p}} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{p;x_0,R} \right] = 0. \tag{2.7}$$

Observação 6. *Note que se $f \in L^\infty$ então $f \in \dot{M}_{p,\lambda}$. De fato, se $f \in L^\infty$ então existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$. Logo, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$\begin{aligned} \|f\|_{p;x_0,R} &= \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{B_R(x_0)} C^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C \left(\int_{B_R(x_0)} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= CR^{\frac{n}{p}}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{p;x_0,R} \leq CR^{\frac{n}{p}}.$$

Logo,

$$0 \leq \lim_{R \to 0^+} \left[R^{-\frac{\lambda}{p}} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{p;x_0,R} \right] \leq \lim_{R \to 0^+} CR^{\frac{n-\lambda}{p}} = 0,$$

pois $n > \lambda$.

Portanto, $f \in \dot{M}_{p,\lambda}$.

Definição 2.1.4. *O subespaço* $\ddot{M}_{p,\lambda}$ *de* $M_{p,\lambda}$ *é o conjunto das funções* $f \in M_{p,\lambda}$*, tais que*

$$\lim_{\xi \to 0} \|\tau_\xi f - f\|_{p,\lambda} = 0, \tag{2.8}$$

em que τ_ξ *denota a translação dada por* $\tau_\xi f(x) = f(x-\xi)$*, para* $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 2.1.5. *Se* $p \in [1,\infty)$ *e* $\lambda \in [0,n)$*, então* $\dot{M}_{p,\lambda}$ *e* $\ddot{M}_{p,\lambda}$ *são subespaços fechados de* $M_{p,\lambda}$.

Demonstração. Provemos primeiramente que $\dot{M}_{p,\lambda}$ é subespaço fechado de $M_{p,\lambda}$. Se $f \in M_{p,\lambda}$ temos

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p;x_0,R} \geq \limsup_{R \to 0^+} \left[\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p;x_0,R} \right].$$

Seja $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \dot{M}_{p,\lambda}$ uma sequência que converge para f na norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$. Então, temos

$$0 \leq \limsup_{R \to 0^+} \left[\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f - f_k\|_{p;x_0,R} \right] \leq \|f - f_k\|_{p,\lambda} \to 0, \text{ quando } k \to \infty. \tag{2.9}$$

Como

$$\begin{aligned} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{p;x_0,R} &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|f - f_k + f_k\|_{p;x_0,R} \\ &\leq \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|f - f_k\|_{p;x_0,R} + \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|f_k\|_{p;x_0,R}, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \limsup_{R \to 0^+} \left[R^{-\frac{\lambda}{p}} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{p;x_0,R} \right] &\leq \limsup_{R \to 0^+} \left[R^{-\frac{\lambda}{p}} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|f - f_k\|_{p;x_0,R} \right] \\ &\quad + \limsup_{R \to 0^+} \left[R^{-\frac{\lambda}{p}} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|f_k\|_{p;x_0,R} \right] \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que $f \in \dot{M}_{p,\lambda}$ e, portanto, $\dot{M}_{p,\lambda}$ é um subespaço fechado.

Agora, seja $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \ddot{M}_{p,\lambda}$ uma sequência tal que $f_k \to f$ na norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$. Queremos mostrar que $f \in \ddot{M}_{p,\lambda}$.

Note que $\|\tau_\xi f\|_{p,\lambda} = \|f\|_{p,\lambda}$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} \|\tau_\xi f - f\|_{p,\lambda} &= \|\tau_\xi(f - f_k) + \tau_\xi f_k - f_k + f_k - f\|_{p,\lambda} \\ &\leq \|\tau_\xi(f - f_k)\|_{p,\lambda} + \|\tau_\xi f_k - f_k\|_{p,\lambda} + \|f_k - f\|_{p,\lambda} \\ &= 2\|f_k - f\|_{p,\lambda} + \|\tau_\xi f_k - f_k\|_{p,\lambda}. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\begin{aligned}\limsup_{\xi\to 0}\|\tau_\xi f - f\|_{p,\lambda} &\leq 2\|f_k - f\|_{p,\lambda} + \limsup_{\xi\to 0}\|\tau_\xi f_k - f_k\|_{p,\lambda} \\ &= 2\|f_k - f\|_{p,\lambda}.\end{aligned}$$

Uma vez que $\|f_k - f\|_{p,\lambda} \to 0$, quando $k \to \infty$, obtemos $f \in \ddot{M}_{p,\lambda}$.

Portanto $\ddot{M}_{p,\lambda}$ é um subespaço fechado de $M_{p,\lambda}$. □

2.2 Algumas propriedades dos espaços $M_{p,\lambda}$

O resultado a seguir apresenta importantes propriedades do espaço de Morrey, com destaque para a desigualdade de Hölder que será de grande importância para nossos propósitos.

Lema 2.2.1. *(i) (**Inclusão Contínua**) Sejam $p, q \in [1,\infty)$ e $\lambda, \mu \in [0, n)$. Se $\frac{n-\lambda}{p} = \frac{n-\mu}{q}$ e $p \leq q$, então a seguinte inclusão é contínua*

$$M_{q,\mu} \subseteq M_{p,\lambda}.$$

*(ii) (**Desigualdade de Hölder**) Sejam $p, q, r \in [1,\infty)$ e $\lambda, \mu, \gamma \in [0, n)$ tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ e $\frac{\gamma}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{\mu}{q}$. Se $f \in M_{p,\lambda}$ e $g \in M_{q,\mu}$, então $fg \in M_{r,\gamma}$ e vale a desigualdade*

$$\|fg\|_{r,\gamma} \leq \|f\|_{p,\lambda}\|g\|_{q,\mu}.$$

*(iii) (**Convexidade**) Sejam $p, q, r \in [1,\infty)$, $\lambda, \mu, \gamma \in [0, n)$ e $k \in [0, 1]$, tais que $\frac{1}{r} = \frac{1-k}{p} + \frac{k}{q}$ e $\frac{\gamma}{r} = (1-k)\frac{\lambda}{p} + k\frac{\mu}{q}$. Se $f \in M_{p,\lambda} \cap M_{q,\mu}$ então $f \in M_{r,\gamma}$ e vale a desigualdade*

$$\|f\|_{r,\gamma} \leq (\|f\|_{p,\lambda})^{1-k}(\|f\|_{q,\mu})^k.$$

Demonstração. Mostremos primeiramente a inclusão contínua $M_{q,\mu} \subseteq M_{p,\lambda}$. Note que devemos mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que $\|f\|_{p,\lambda} \leq C\|f\|_{q,\mu}$ e que, para isso, é suficiente mostrar que $\|f\|_{p;x_0,R} \leq CR^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}\|f\|_{q;x_0,R}$.

Usando a Desigualdade de Hölder 1.2.2, para espaços L^p, e tomando r de modo que $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ obtemos

$$\begin{aligned}\|f\|_{p;x_0,R} &\leq \|1\|_{r;x_0,R}\|f\|_{q;x_0,R} \\ &= \left(\int_{B_R(x_0)} |1|^r \, dx\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{q;x_0,R}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{C}^{\frac{1}{r}} R^{\frac{n}{r}} \|f\|_{q;x_0,R} \\
&= C R^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \|f\|_{q;x_0,R},
\end{aligned}
$$

em que $\overline{C}R^n$ é o volume da bola $B_R(x_0)$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p;x_0,R} &\leq C R^{\frac{n-\lambda}{p}-\frac{n}{q}} \|f\|_{q;x_0,R} \\
&= C R^{-\frac{\mu}{q}} \|f\|_{q;x_0,R}.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Daí, de (2.10), obtemos

$$
\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p;x_0,R} \leq C \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} R^{-\frac{\mu}{q}} \|f\|_{q;x_0,R}
$$

ou seja,

$$
\|f\|_{p,\lambda} \leq C \|f\|_{q,\mu},
$$

o que prova o item (i).

Para (ii), se $p \leq q$, usando a Desigualdade de Hölder 1.2.2, em L^p, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|fg\|_{r,\gamma} &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} R^{-\frac{\gamma}{r}} \|fg\|_{r;x_0,R} \\
&\leq \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}+\frac{\mu}{q}} \|f\|_{p;x_0,R} \|g\|_{q;x_0,R} \right\} \\
&\leq \left(\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p;x_0,R} \right\} \right) \left(\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} \left\{ R^{-\frac{\mu}{q}} \|g\|_{q;x_0,R} \right\} \right) \\
&= \|f\|_{p,\lambda} \|g\|_{q,\mu}.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\|fg\|_{r,\gamma} \leq \|f\|_{p,\lambda} \|g\|_{q,\mu} < \infty,
$$

segue que $fg \in M_{r,\gamma}$.

Para (iii), como no item (ii), é suficiente mostrar a desigualdade

$$
\|f\|_{r,\gamma} \leq (\|f\|_{p,\lambda})^{1-k} (\|f\|_{q,\mu})^k.
$$

Observemos, primeiramente, que

$$
\|f^k\|_{\frac{p}{k},\lambda} = (\|f\|_{p,\lambda})^k, \quad \text{para } k > 0. \tag{2.11}
$$

De fato, notemos que

$$\begin{aligned}
\|f^k\|_{\frac{p}{k},\lambda} &= \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n,R>0} R^{-\frac{k\lambda}{p}}\|f^k\|_{\frac{p}{k};x_0,R}\\
&= \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n,R>0}\left\{\left(\frac{\int_{B_R(x_0)}|f^k(x)|^{\frac{p}{k}}dx}{R^\lambda}\right)^{\frac{k}{p}}\right\}\\
&= \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n,R>0}\left\{\left(\frac{\int_{B_R(x_0)}|f(x)|^{p}dx}{R^\lambda}\right)^{\frac{k}{p}}\right\}\\
&= \left(\sup_{x_0\in\mathbb{R}^n,R>0}\left\{\left(\frac{\int_{B_R(x_0)}|f(x)|^{p}dx}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\right)^k\\
&= (\|f\|_{p,\lambda})^k.
\end{aligned}$$

Agora tomemos $f = (f^{1-k})(f^k)$ e observemos que $f^{1-k}\in M_{\frac{p}{1-k},\lambda}$, pois pelo que provamos anteriormente $\|f^{1-k}\|_{\frac{p}{1-k},\lambda} = (\|f\|_{p,\lambda})^{1-k} < \infty$, já que $f\in M_{p,\lambda}$. Analogamente, temos $f^k\in M_{\frac{q}{k},\mu}$.

Assim, pela Desigualdade de Hölder e por (2.11) concluímos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{r,\gamma} &= \|(f^{1-k})(f^k)\|_{r,\gamma}\\
&\leq \|f^{1-k}\|_{\frac{p}{1-k},\lambda}\|f^k\|_{\frac{q}{k},\mu}\\
&= (\|f\|_{p,\lambda})^{1-k}(\|f\|_{q,\mu})^k,
\end{aligned}$$

de onde segue que $f\in M_{r,\gamma}$. □

Em [12], Kato introduz uma outra notação para os espaços de Morrey $M_{p,\lambda}$ dada da seguinte forma:

$$M_{p,\lambda} = M(A),\ \text{em que } A = (p^{-1},\alpha)\in\Delta \ \text{ e } \ \alpha = \frac{n-\lambda}{p} > 0, \ \text{ com } \ p\in[1,\infty) \ \text{ e } \ \lambda\in[0,n). \tag{2.12}$$

Aqui Δ denota o triângulo retângulo com vértices $O=(0,0),(1,0)$ e $(1,n)$, com o lado inferior excluído (como pode ser visto na Figura), exceto a origem O. Além disso, convencionamos que $M(O) = L^\infty$.

Para $A=(p^{-1},\alpha)$, escrevemos $p^{-1}=x(A)$ e $\alpha = y(A)$ que será chamado de altura de A. Vale ressaltar que $y(A)=0$ se, e somente se $A=O$. De fato, é claro que se $A=O$, então $y(A)=0$. Agora se $y(A)=0$, temos

$$y(A)=0\Rightarrow\alpha=0$$

e como $\lambda < n$ segue que $p = \infty$ e, portanto, $x(A) = 0$, ou seja, $A = O$.

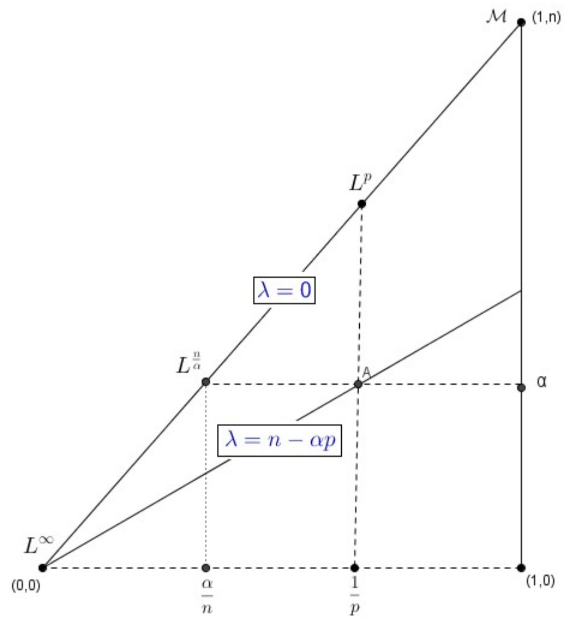

Figura 2.1: Espaços de Morrey com a notação de Tosio Kato.

Escrevemos $[A, B]$ para denotar o segmento fechado que liga A e B, (A, B) para denotar o segmento aberto conectando A e B e $[AB]$ o comprimento desse segmento.

Em correspondência com a notação dada em 2.12, a norma $\|f\|_{p,\lambda}$ será denotada por $\|f; M(A)\|$ ou, simplesmente, $\|f; A\|$, (com $\|f; O\| = \|f\|_\infty$, em que $O = (0, 0)$). Assim,

$$\|f; A\| = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} \left\{ R^{\left(-\frac{n}{p}+\alpha\right)} \|f\|_{p;x_0,R} \right\}, \quad A = (p^{-1}, \alpha) \in \Delta.$$

Cada ponto $A = (p^{-1}, \alpha) \in \Delta$ correspondente a $\lambda = n - \alpha p =$ constante, pertence a um raio emanando de O e representa os espaços de Morrey $M_{p,\lambda} = M(A)$. A hipotenusa de Δ, dada pela reta $y = nx$, correspondente a $\lambda = 0$, representa os espaços L^p, se $p > 1$ ou $\mathcal{M}$, se $p = 1$. Por exemplo, ao ponto $B = \left(\frac{\alpha}{n}, \alpha\right)$ na hipotenusa de Δ, (ver Figura 2.2), corresponde o espaço $M(B) = M_{\frac{n}{\alpha},0} = L^{\frac{n}{\alpha}}$.

Além disso, usamos também as notações $\dot{M}(A)$ e $\ddot{M}(A)$ para $\dot{M}_{p,\lambda}$ e $\ddot{M}_{p,\lambda}$, respectivamente.

Para $A = O$ definimos o conjunto $\dot{M}(0) \subseteq M(O) = L^\infty$ como o conjunto das funções contínuas e limitadas e $\ddot{M}(O) \subseteq M(O)$ como o conjunto das funções uniformemente contínuas e limitadas.

Observação 7. *Note que se $p \in [1, \infty)$ e $\lambda \in [0, n)$, então $M_{p,\lambda} \cap L^\infty \subseteq \dot{M}_{p,\lambda}$ ou $M(A) \cap M(O) \subseteq \dot{M}(A)$, na notação de Kato.*

De fato, se $f \in M_{p,\lambda} \cap L^\infty$, então $f \in L^\infty$ e, portanto, pela Observação 6, segue que $f \in \dot{M}_{p,\lambda}$.

Por fim, escrevemos $A \subseteq B$ se $y(A) = y(B)$ e B está a direita de A ou $B = A$. Com esta notação, a inclusão contínua pode ser reescrita. Mais geralmente, o próximo resultado é o Lema 2.2.1 expresso na notação de Kato:

Lema 2.2.2. *(i) (**Inclusão contínua**) Se $A \subseteq B$, então $M(A) \subseteq M(B)$.*

*(ii) (**Desigualdade de Hölder**) Se $f \in M(A)$, $g \in M(B)$, então $fg \in M(A+B)$ com*

$$\|fg; A+B\| \;\leq\; \|f;A\|\|g;B\|,$$

em que A e B são tais que $A+B \in \Delta$.

*(iii) (**Convexidade**) Se $f \in M(A) \cap M(B)$ então $f \in M(C)$, $\forall C \in [A,B]$ e vale*

$$\|f;C\| \leq \|f;A\|^{1-k}\|f;B\|^{k},$$

com $k = \frac{[AC]}{[AB]}$.

Observação 8. *Note que se $f \in M(A) = M_{p,\lambda}$ então $A = \left(\frac{1}{p}, \frac{m-\lambda}{p}\right)$ e se $f \in M(B) = M_{q,\mu}$ então $B = \left(\frac{1}{q}, \frac{m-\mu}{q}\right)$.*

Sabemos, da hipótese da desigualdade de Hölder na notação usual, que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ e $\frac{\gamma}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{\mu}{q}$, então temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{r}, \frac{n-\gamma}{r}\right) &= \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \frac{n}{r} - \frac{\gamma}{r}\right) \\
&= \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - \frac{\lambda}{p} - \frac{\mu}{q}\right) \\
&= \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \frac{n-\lambda}{p} + \frac{n-\mu}{q}\right) \\
&= \left(\frac{1}{p}, \frac{n-\lambda}{p}\right) + \left(\frac{1}{q}, \frac{n-\mu}{q}\right) \\
&= A+B,
\end{aligned}$$

o que justifica (ii) na notação de Kato.

Agora, se $A = \left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$, $B = \left(\frac{1}{q},\ \beta\right)$ e $C = \left(\frac{1}{r}, \tau\right)$, em que $\alpha = \frac{n-\lambda}{p}$, $\beta = \frac{n-\mu}{q}$ e $\tau = \frac{n-\gamma}{r}$, visto que $\frac{1}{r} = \frac{1-k}{p} + \frac{k}{q}$ e $\frac{\gamma}{r} = (1-k)\frac{\lambda}{p} + k\frac{\mu}{q}$, temos

$$\begin{aligned}
(1-k)A + Bk &= (1-k)\left(\frac{1}{p}, \alpha\right) + k\left(\frac{1}{q},\ \beta\right) \\
&= \left(\frac{1-k}{p} + \frac{k}{q}, (1-k)\alpha + k\beta\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}, (1-k)\frac{n-\lambda}{p} + k\frac{n-\mu}{q}\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{r}, (1-k)\frac{n}{p} + k\frac{n}{q} - \frac{\gamma}{r}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{r}, \frac{n-\gamma}{r}\right) = C.$$

Logo, $(1-k)A + Bk = C$ *e, por isso,* $k = \frac{[AC]}{[AB]}$, *o que justifica (iii).*

Observação 9. *Além da inclusão apresentada no item (i) do Lema 2.2.2 também vale que* $\dot{M}(A) \subseteq \dot{M}(B)$ *e* $\ddot{M}(A) \subseteq \ddot{M}(B)$, *se* $A \subseteq B$.

No entanto, uma relação do tipo $M(A) \subseteq \dot{M}(B)$ *não é verdadeira. De fato, sabemos que se* $0 < k < n$ *então* $f(x) = |x|^{-k} \in M_{p,n-pk}$, *com* $1 \leq p < \frac{n}{k}$, *mas* $f \notin \dot{M}_{p,\lambda}$, *para todo* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $0 \leq \lambda < n$, *ver [12].*

Assim, se $A = (p^{-1}, k)$ *e* $B = (q^{-1}, k)$, *com* $1 \leq p < q < \frac{n}{k}$, *então* $A \subset B$. *Pela afirmação acima, segue que* $f \in M_{p,n-pk} = M(p^{-1}, k)$, *mas* $f \notin \dot{M}_{q,n-pk} = \dot{M}(q^{-1}, k)$.

Finalmente, na definição abaixo, apresentamos os espaços de Morrey de funções à valores vetoriais.

Definição 2.2.3. *Dada uma função vetorial* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *dizemos que* $f \in (M_{p,\lambda})^m$ *(ou* $(\dot{M}_{p,\lambda})^m$ *ou* $(\ddot{M}_{p,\lambda})^m$*) se* $f_i \in M_{p,\lambda}$ *(ou* $\dot{M}_{p,\lambda}$ *ou* $\ddot{M}_{p,\lambda}$*),* $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$. *Mais ainda, definimos* $\|f\|_{p,\lambda} := \||f|\|_{p,\lambda}$, *em que* $|f|$ *é a norma de* f *em* $\mathbb{R}^n$.

2.3 Semigrupo do Calor

Note que o problema linear associado ao sistema (1) nada mais é do que o problema de Cauchy para a equação linear do calor em $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad \text{em } x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \text{em } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.13}$$

que trata-se de um problema clássico da literatura de EDP's.

É bem conhecido que uma aplicação da transformada de Fourier em (2.13) fornece, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixado, o PVI

$$\begin{cases} (\partial_t + 4\pi^2|\xi|^2)\hat{u}(t,\xi) = 0, \\ \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u_0}(\xi) \end{cases} \tag{2.14}$$

que possui uma única solução, dada por

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u_0}(\xi)\hat{h}(t,\xi), \tag{2.15}$$

em que $\hat{h}(t,\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$.

Sabe-se também, que a solução de (2.13), é obtida através da aplicação da transformada inversa a (2.15), ou seja, tem-se

$$u(t,x) = h(t,x) * u_0(x), \tag{2.16}$$

em que

$$h(t,x) = \left(e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\right)^{\vee}(x) = (4t\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \tag{2.17}$$

o qual é chamado de núcleo de Gauss-Weierstrass.

A solução (2.16) do problema linear (2.13) gera um semi-grupo $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ via convolução com o núcleo de Gauss-Weierstrass (2.17), isto é,

$$U(t)u_0 := e^{t\triangle}u_0 = \begin{cases} h_t * u_0 = h(\cdot,t) * u_0 \text{ se } t > 0. \\ u_0, \text{ se } t = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

Para mais detalhes sobre a discussão acima veja, por exemplo, [17]. No que segue, nos referimos a $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ e h_t como semigrupo do calor e núcleo do calor, respectivamente.

O objetivo desta seção é estudar o operador de convolução $U(t) = e^{t\triangle}$, com núcleo

$$h_t(x) = \bar{h}_t(|x|) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \ t > 0, \tag{2.19}$$

em espaços de Morrey.

Note que se $t > 0$,

$$U(t)f = h_t * f = \int_{\mathbb{R}^m} h_t(y) f(x-y)dy = C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{t^{\frac{n}{2}} e^{\frac{|y|^2}{4t}}} dy$$

está bem definido para $f \in M_{p,\lambda}$, com $p \in [1,\infty)$ e $\lambda \in [0,n)$ e $U(t)f \in C^\infty$, com todas as derivadas limitadas (ver [12]).

O próximo lema nos dá estimativas para $U(t)$ e suas derivadas em espaços de Morrey.

Lema 2.3.1. *Sejam $1 \leq p,q \leq \infty$ e $0 \leq \lambda,\mu < n$. Se $\frac{n-\lambda}{p} \geq \frac{n-\mu}{q}$ e $\mu = \lambda$ quando $p \leq q$, então $U(t)$, $DU(t)$ e $\partial_t U(t)$, com $t > 0$, são operadores limitados de $M_{p,\lambda}$ em $\ddot{M}_{q,\mu} \subseteq M_{q,\mu}$ e dependem continuamente de t. Além disso, para toda $f \in M_{p,\lambda}$, temos* *(i)* $t^{\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p}-\frac{n-\mu}{q}\right)}\|U(t)f\|_{q,\mu} \ \leq C\|f\|_{p,\lambda},$

(ii) $t^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{n-\lambda}{p}-\frac{n-\mu}{q}\right)}\|DU(t)f\|_{q,\mu} \ \leq C\|f\|_{p,\lambda},$

(iii) $t^{1+\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p}-\frac{n-\mu}{q}\right)}\|\partial_t U(t)f\|_{q,\mu} \ \leq C\|f\|_{p,\lambda},$

em que a constante $C = C(p, q, \lambda, \mu, n)$.

Demonstração. A prova de cada item será separada em três casos, a saber, $(p, \lambda) = (q, \mu)$, $(q, \mu) = (\infty, \mu)$ e o caso geral, isto é, $p < q$ e $\lambda = \mu$.

Prova do item (i): Defina $f_t := U(t)f = h_t * f$. Observe primeiramente que o caso em que $\lambda = 0$ admite apenas $\mu = 0$ e sua prova é trivial, pois sabendo que $h_t \in L^1 \cap L^\infty$, $f \in M_{p,0} = L^p$ e $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + 1$, segue da desigualdade de Young 1.2.3 que

$$\|f_t\|_q \ = \ \|h_t * f\|_q \ \leq \ \|h_t\|_1\|f\|_p \ = \ \|f\|_p,$$

em que $\|h_t\|_1 = 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|h_t\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |h_t(x)|\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\ dx \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \left[\int_0^\infty \left(\int_{|x|=r} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dS\right)\ dr\right] \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \left[\int_0^\infty \left(\int_{|x|=r} e^{-\frac{r^2}{4t}} dS\right)\ dr\right] \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \left[\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} \left(\int_{|x|=r} dS\right)\ dr\right] \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} \left(\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}\right)\ dr \\
&= \frac{4\pi^{-\frac{n}{2}} t^{-\frac{n}{2}} 2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left[\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{(n-1)+1}{2})}{(\frac{1}{4t})^{\frac{(n-1)+1}{2}}}\right] \\
&= \frac{4^{-\frac{n}{2}} t^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left[\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(\frac{1}{4t})^{\frac{n}{2}}}\right] = 1,
\end{aligned}$$

onde usamos

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{a^{\frac{n+1}{2}}}, \text{ com } n > -1 \text{ e } a > 0, \tag{2.20}$$

em que Γ denota a função gama.

Seja agora $d\mu = h_t(y)dy$ e p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Como $\|h_t\|_1 = 1$ e usando a Desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
|f_t(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} h_t(y) f(x-y)\ dy \right|^p \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\ d\mu \right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\ d\mu \right)^p \\
&\leq \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p\ d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^p \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p h_t(y)\ dy (\|h_t\|_1)^{\frac{p}{p'}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p h_t(y)\ dy \qquad (2.21) \\
&= (h_t * |f|^p)(x).
\end{aligned}$$

Como $f \in M_{p,\lambda}$, então $\|f\|_{p,\lambda} \geq R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p;x_0,R}$, ou seja,

$$\int_{B_R(x_0)} |f(x-y)|^p dx = (\|f\|_{p;x_0,R})^p \leq (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda.$$

Usando novamente que $\|h_t\|_1 = 1$ e a desigualdade (2.21), temos

$$\begin{aligned}
(\|f_t\|_{p;x_0,R})^p &= \int_{B_R(x_0)} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h_t(y) f(x-y)\ dy \right|^p dx \\
&\leq \int_{B_R(x_0)} \int_{\mathbb{R}^n} h_t(y) |f(x-y)|^p\ dy\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x-y)|^p\ dx \right) h_t(y)\ dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda h_t(y)\ dy \\
&= (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda \int_{\mathbb{R}^n} h_t(y)\ dy \\
&= (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda,
\end{aligned}$$

ou seja, $\|f_t\|_{p,\lambda} \leq \|f\|_{p,\lambda}$, o que prova o item (i) para o caso em que $(p, \lambda) = (q, \mu)$.

Considere agora o caso em que $q = \infty$. Para $x = 0$, por (2.21), temos

$$|f_t(0)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \bar{h}_t(|x|) |f(x)|^p dx. \qquad (2.22)$$

Agora, note que se $\rho(r) := \int_{|x|<r} |f(x)|^p$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{h}_t(|x|)|f(x)|^p dx = \int_0^\infty \bar{h}_t(r) d\rho(r).$$

De fato, $\dfrac{d}{dr}\left(\int_{|x|=r} |f(x)|^p dx\right) = \int_{|x|=r} |f(x)|^p dS$, ou seja, $d\rho(r) = \left(\int_{|x|=r} |f(x)|^p dS\right) dr$ e , portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{h}_t(|x|)|f(x)|^p dx = \int_0^\infty \left(\int_{|x|=r} \bar{h}_t(r)|f(x)|^p dS\right) dr = \int_0^\infty \bar{h}_t(r) d\rho(r).$$

Logo, integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \bar{h}_t(|x|)|f(x)|^p dx &= \int_0^\infty \bar{h}_t(r) d\rho(r) \\
&= \bar{h}_t(r)\rho(r)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \bar{h}_t'(r)\rho(r) dr \\
&= \lim_{r\to\infty} \bar{h}_t(r)\rho(r) - \bar{h}_t(0)\rho(0) + |\bar{h}_t'(r)|\rho(r) dr \\
&\leq \lim_{r\to\infty} \frac{\bar{h}_t(r)}{r^{-\lambda}} r^{-\lambda}\rho(r) + \int_0^\infty |\bar{h}_t'(r)|(\|f\|_{p,\lambda})^p r^\lambda dr \\
&\leq \lim_{r\to\infty} \frac{\bar{h}_t(r)}{r^{-\lambda}} (\|f\|_{p,\lambda})^p + \int_0^\infty |\bar{h}_t'(r)|(\|f\|_{p,\lambda})^p r^\lambda dr \\
&= 0 + (\|f\|_{p,\lambda})^p \int_0^\infty |\bar{h}_t'(r)| r^\lambda dr \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Assim, uma vez que $\phi(r) = \bar{h}_t(r) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}}$, de (2.22) e (2.23), segue que

$$\begin{aligned}
|f_t(0)|^p &\leq \int_0^\infty |\bar{h}'_t(r)|(\|f\|_{p,\lambda})^p r^\lambda \, dr \qquad (2.24) \\
&\leq Ct^{-1-\frac{n}{2}} \int_0^\infty (\|f\|_{p,\lambda})^p e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{\lambda+1} \, dr \\
&= Ct^{-1-\frac{n}{2}} (\|f\|_{p,\lambda})^p \; 2\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right) t^{\frac{\lambda}{2}+1} \qquad (2.25) \\
&\leq Ct^{-\frac{n-\lambda}{2}} (\|f\|_{p,\lambda})^p, \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

sendo que em (2.25) utilizamos novamente a expressão (2.20).

Observemos que não há nada em especial no ponto $x = 0$, e a desigualdade 2.26 vale para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim,

$$|f_t(x)| \leq Ct^{-\frac{n-\lambda}{2p}} (\|f\|_{p,\lambda}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \qquad (2.27)$$

Tomando o supremo para $x \in \mathbb{R}^n$, fica provado o item (i) para o caso em que $(q, \mu) = (\infty, \mu)$.

Considere o caso geral, isto é, $p < q$ e $\mu = \lambda$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\|f_t\|_{q;x_0,R} &= \left(\int_{B_R(x_0)} |f_t(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{B_R(x_0)} |f_t(x)|^{q-p}|f_t(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq (\|f_t\|_\infty)^{\frac{q-p}{q}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f_t(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|f_t\|_\infty)^{1-\frac{p}{q}} (\|f_t\|_{p;x_0,R})^{\frac{p}{q}} \\
&\leq (\|f_t\|_\infty)^{1-\frac{p}{q}} (\|f_t\|_{p,\lambda} R^{\frac{\lambda}{p}})^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\|f_t\|_{p,\lambda} \leq C\|f\|_{p,\lambda}$ e $\lambda = \mu$, segue que

$$\begin{aligned}
\|f_t\|_{q,\mu} &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R>0} \left\{ R^{-\frac{\mu}{q}} \|f_t\|_{q;x_0,R} \right\} \\
&\leq (\|f_t\|_\infty)^{1-\frac{p}{q}} (\|f_t\|_{p,\lambda})^{\frac{p}{q}} \qquad (2.28) \\
&\leq \left(Ct^{-\frac{n-\lambda}{2p}} \|f\|_{p,\lambda}\right)^{1-\frac{1}{p}} (\|f\|_{p,\lambda})^{\frac{p}{q}} \\
&= Ct^{(-\frac{n-\lambda}{2p} - \frac{n-\mu}{2q})} \|f\|_{p,\lambda}, \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

provando assim a estimativa (i) no caso geral.

Prova de (ii): Para o caso $(p, \lambda) = (q, \mu)$, observemos que

$$\frac{\partial h_t}{\partial x_j}(x) = -\frac{2x_j}{4t}(4\pi)^{-\frac{n}{2}} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = -\frac{x_j}{2t} h_t(x)$$

e

$$h_{2t}(x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}}(2t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(2t)}} = (4\pi)^{-\frac{n}{2}}(2t)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{|x|^2 - 2|x|^2}{8t}} = 2^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{|x|^2}{8t}} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{e^{\frac{|x|^2}{8t}}}{2^{\frac{n}{2}}} h_t(x).$$

Então,

$$t^{\frac{1}{2}} \frac{|\frac{\partial h_t}{\partial x_j}(x)|}{h_{2t}(x)} = 2^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{8t}} \frac{|x_j|}{t^{\frac{1}{2}}}. \qquad (2.30)$$

Uma vez que a expressão do lado direito de (2.30) é limitada superiormente, segue que

$$t^{\frac{1}{2}} Dh_t(x) \leq t^{\frac{1}{2}} |Dh_t(x)| \leq Ch_{2t}(x). \qquad (2.31)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
(\|t^{\frac{1}{2}}(Dh_t * f)\|_{p;x_0,R})^p &= \int_{B_R(x_0)} \left| \int_{\mathbb{R}^n} t^{\frac{1}{2}} Dh_t(y) f(x-y)\, dy \right|^p dx \\
&\leq C \int_{B_R(x_0)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_{2t}(y) |f(x-y)|\, dy \right) dx \\
&= C \int_{B_R(x_0)} \int_{\mathbb{R}^n} h_{2t}(y) |f(x-y)|^p\, dy\, dx \\
&= C \int_{B_R(x_0)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p\, dx \right) h_{2t}(y)\, dy \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda h_{2t}(y)\, dy \\
&\leq C (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda \int_{\mathbb{R}^n} h_{2t}(y)\, dy \\
&= C (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda,
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\|t^{\frac{1}{2}}(Dh_t * f)\|_{p,\lambda} \leq C \|f\|_{p,\lambda},$$

provando o primeiro caso.

Consideremos agora o caso em que $(q, \mu) = (\infty, \mu)$. De (2.21) e (2.31) temos que

$$\begin{aligned}
|t^{\frac{1}{2}}(Dh_t * f)(0))|^p &\leq (t^{\frac{1}{2}} |Dh_t| * |f|)^p(0) \\
&\leq (C h_{2t} * |f|)^p(0) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \bar{h}_{2t}(|x|) |f(x)|^p\, dx \\
&\leq C t^{-\frac{n-\lambda}{2}} (\|f\|_{p,\lambda})^p.
\end{aligned}$$

Como $x = 0$ não é um ponto especial, segue que

$$|t^{\frac{1}{2}}(Dh_t * f)(x)| \leq C t^{-\frac{n-\lambda}{2p}} \|f\|_{p,\lambda}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

e , portanto,

$$t^{\frac{1}{2}} \|Dh_t * f\|_\infty \leq C t^{-\frac{n-\lambda}{2p}} \|f\|_{p,\lambda}.$$

Agora, para o caso geral temos

$$\begin{aligned}
\|t^{\frac{1}{2}}(Dh_t * f)\|_{q;x_0,R} &\leq C(\|f_{2t}\|_\infty)^{1-\frac{p}{q}} (\|f_{2t}\|_{p,\lambda} R^{\frac{\lambda}{p}})^{\frac{p}{q}} \\
&\leq C(t^{-\frac{n-\lambda}{2p}} \|f\|_{p,\lambda})^{1-\frac{p}{q}} (\|f\|_{p,\lambda} R^{\frac{\lambda}{q}})^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$t^{\frac{1}{2}}\|(Dh_t * f)(x)\|_{q,\mu} \leq Ct^{-(\frac{n-\lambda}{2p}-\frac{n-\mu}{2q})}\|f\|_{p,\lambda},$$

provando a estimativa (ii).

Prova de (iii): Note que

$$\frac{\partial h_t}{\partial t}(x) = \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right) h_t(x) \text{ e } h_{2t}(x) = \frac{e^{\frac{|x|^2}{8t}}}{2^{\frac{n}{2}}} h_t(x),$$

então

$$\frac{t|\partial_t h_t(x)|}{h_{2t}(x)} = 2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{|x|^2}{4t} - \frac{n}{2}\right) e^{-\frac{|x|^2}{8t}}. \tag{2.32}$$

Como o lado direito de (2.32) é limitado superiormente, segue que

$$|t\partial_t h_t(x)| \leq t|\partial_t h_t(x)| \leq Ch_{2t}(x). \tag{2.33}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(\|t(\partial_t h_t * f)\|_{p;x_0,R})^p &= \int_{B_R(x_0)} \left|\int_{\mathbb{R}^m} t\partial_t h_t(y) f(x-y)\ dy\right|^p\ dx \\
&\leq C\int_{B_R(x_0)} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |t\partial_t h_t(y)||f(x-y)|\ dy\right)^p\ dx \\
&= C\int_{B_R(x_0)} \int_{\mathbb{R}^m} |h_{2t}(y)||f(x-y)|^p\ dy\ dx \\
&= C\int_{B_R(x_0)} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)|^p\ dx\right) h_{2t}(y)\ dy \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda h_{2t}(y)\ dy \\
&\leq C(\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda \int_{\mathbb{R}^n} h_{2t}(y)\ dy \\
&= C(\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda.
\end{aligned}$$

Elevando a última desigualdade a $\frac{1}{p}$, multiplicando por $R^{-\frac{\lambda}{p}}$ e tomando o supremo para x_0 em $\mathbb{R}^n$ e $R > 0$, segue o resultado para $(p, \lambda) = (q, \mu)$.

Para o caso $(q, \mu) = (\infty, \mu)$, tendo em vista (2.33), (2.21) e (2.23) temos

$$\begin{aligned}
t|(\partial_t h_t * f)(0))|^p &\leq (t|\partial_t h_t| * |f|)^p(0) \\
&\leq (Ch_{2t} * |f|)^p(0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \bar{h}_{2t}(|x|)|f(x)|^p\, dx \\
&\leq Ct^{-\frac{n-\lambda}{2}} (\|f\|_{p,\lambda})^p \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

e como na prova de (ii), a desigualdade (2.34) vale para todo $x \in \mathbb{R}^n$, mostrando o caso $(q, \mu) = (\infty, \mu)$.

No caso geral , usamos (2.34) e obtemos

$$
\begin{aligned}
\|t(\partial_t h_t * f)\|_{q;x_0,R} &\leq C\|f_{2t}\|_{q;x_0,R} \\
&\leq C(\|f_{2t}\|_\infty)^{1-\frac{p}{q}} (\|f_{2t}\|_{p,\lambda} R^{\frac{\lambda}{p}})^{\frac{p}{q}} \\
&\leq (Ct^{-\frac{n-\lambda}{2}} \|f\|_{p,\lambda})^{1-\frac{p}{q}} (\|f\|_{p,\lambda} R^{\frac{\lambda}{p}})^{\frac{p}{q}},
\end{aligned}
$$

donde segue que

$$
t\|(\partial h_t * f)(x)\|_{q,\mu} \leq Ct^{-(\frac{m-\lambda}{2p} - \frac{m-\mu}{2q})} \|f\|_{p,\lambda},
$$

o que prova o item (iii).

Finalmente, resta mostrarmos que $f_t = h_t * f \in \ddot{M}_{q,\mu}$. De fato, usando a estimativa (i) e (2.19) segue que

$$
\|\tau_\xi f_t - f_t\|_{q,\mu} \to 0, \text{ quando } \xi \to 0. \qquad (2.35)
$$

□

Vale ressaltar, que o semigrupo do calor $\{U(t)\}_{t>0}$ não é fortemente contínuo nos espaços $M_{p,\lambda}$, quando $t \to 0^+$. Isto se deve ao fato de não existirem resultados de aproximação da identidade em $M_{p,\lambda}$, com $1 \leq p < \infty$ e $0 < \lambda < n$.

Uma vez que a função $U(t)f$ é contínua para $t > 0$ e $f \in M_{p,\lambda}$, a não continuidade forte do semigrupo para $t = 0$ é consequência de que existem funções $f \in M_{p,\lambda}$ que não podem ser aproximadas por funções contínuas em $M_{p,\lambda}$. Veja o exemplo dado por [1], páginas 18-19 ou [29]. No entanto, para contornar a falta de continuidade forte consideramos o espaço $\ddot{M}_{p,\lambda}$, no qual a translação é contínua. Em vista disso, o semigrupo $U(t)$ é fortemente contínuo em $\ddot{M}_{p,\lambda}$.

Lema 2.3.2. *Seja $f \in M_{p,\lambda}$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $f \in \ddot{M}_{p,\lambda}$;

(ii) $\|\tau_\xi f - f\|_{p,\lambda} \to 0$, *quando* $\xi \to 0$;

(iii) $\|U(t)f - f\|_{p,\lambda} \to 0$, *quando* $\xi \to 0^+$.

Demonstração. Para cada $f \in M_{p,\lambda}$ escrevamos $f_\xi = \tau_\xi f$ e $f_t = U(t)f$. Observe que a equivalência de (i) e (ii) segue da definição de $\ddot{M}_{p,\lambda}$.

Mostremos agora que (ii) implica (iii). Observemos que

$$\begin{aligned}(f_t - f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} h_t(\xi) f(x-\xi) d\xi - f(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h_1(\xi)\left[f(x-\xi\sqrt{t}) - f(x)\right] d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h_1(\xi)\left[f_{\xi\sqrt{t}}(x) - f(x)\right] d\xi.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\|f_t - f\|_{p,\lambda} &= \left\|\int_{\mathbb{R}^n} h_1(\xi)\left[f_{\xi\sqrt{t}} - f\right] d\xi\right\|_{p,\lambda}\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left\|h_1(\xi)\left[f_{\xi\sqrt{t}} - f\right]\right\|_{p,\lambda} d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h_1(\xi)\left\|f_{\xi\sqrt{t}} - f\right\|_{p,\lambda} d\xi.\end{aligned}$$

Uma vez que $\left\|f_{\xi\sqrt{t}} - f\right\|_{p,\lambda}$ é limitado por $2\|f\|_{p,\lambda}$ e $\left\|f_{\xi\sqrt{t}} - f\right\|_{p,\lambda} \to 0$, quando $\xi\sqrt{t} \to 0$ aplicando o Teorema da convergência dominada, obtemos (iii).

Por fim, concluímos que (iii) implica (i), já que pelo Lema 2.3.1 $f_t \in \ddot{M}_{p,\lambda}$ e pela Proposição 2.1.5 $\ddot{M}_{p,\lambda}$ é fechado. $\square$

Como consequência do Lema 2.3.2 temos o seguinte resultado.

Corolário 2.3.3. *Nas condições do Lema 2.3.2, o subespaço $\ddot{M}_{p,\lambda}$ é o subespaço maximal de $M_{p,\lambda}$ no qual a família τ_ξ forma um grupo fortemente contínuo e, além disso, é também o subespaço maximal no qual $U(t)$ é um C_0-semigrupo.*

2.4 Operadores de Convolução

O objetivo desta seção é apresentar alguns resultados para operadores de convolução em espaços de Morrey.

Lema 2.4.1. *Seja $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que*

$$|S(x)| \leq c|x|^{\delta-n}, \text{ em que } 0 < \delta < n.$$

Sejam p, q, λ e μ tais que $p, q \in [1,\infty)$, $\lambda, \mu \in [0,n)$, com $0 < \frac{n-\mu}{q} < \frac{n-\lambda}{p} < n$ e

$$\frac{n-\lambda}{p} - \frac{n-\mu}{q} = \delta \quad e \quad \frac{n}{p} - \frac{n}{q} \leq \delta \; (< \delta \text{ se } p = 1). \tag{2.36}$$

Então, $S*$ (operador convolução com S) é um operador limitado de $M_{p,\lambda}$ em $M_{q,\mu}$.

Demonstração. Tendo em vista a propriedade de inclusão (Lema 2.2.1, item (i)), podemos assumir que

$$\frac{n}{p} - \frac{n}{q} = \delta \text{ se } p > 1 \text{ e } \frac{n}{p} - \frac{n}{q} < \delta \text{ se } p = 1. \tag{2.37}$$

Para cada $\rho > 0$, seja S_ρ dada por

$$S_\rho(x) = \begin{cases} S(x) \text{ se } |x| < \rho. \\ 0, \text{ se } |x| \geq \rho \end{cases}$$

Seja $f \in M_{p,\lambda}$. Queremos mostrar que $\|S * f\|_{q,\mu} \leq C\|f\|_{p,\lambda}$. Para isso, escrevemos $S * f = g' + g''$, em que $g' = S_\rho * f$ e $g'' = (S - S_\rho) * f$ e estimaremos g' e g'' separadamente.

De início, provemos que $g'' \in L^\infty$. Seja p' tal que $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ e escolha $r, s > 0$ tais que

$$\frac{r}{p} + \frac{s}{p'} = n - \delta, \text{ com } r > 0 \text{ e } s > n. \tag{2.38}$$

Note que tal escolha é possível, pois

$$\frac{\lambda}{p} + \frac{n}{p'} = \frac{\lambda}{p} + n\left(1 - \frac{1}{p}\right) = n - \frac{n-\lambda}{p} < n - \delta,$$

já que $\frac{n-\lambda}{p} > \delta$ por (2.36).

Assim, pela desigualdade de Hölder para espaços L^p, isto é, pela Proposição 1.2.2 temos

$$\begin{aligned}
|g''(x)| &= |(S - S_\rho) * f(x)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (S - S_\rho)(y) f(x-y)\, dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(S(y) - S_\rho(y)) f(x-y)|\, dy \\
&\leq C \int_{|y|\geq\rho} (|y|^{\delta-n} - 0)|f(x-y)|\, dy \\
&= C \int_{|y|\geq\rho} |y|^{-\left(\frac{s}{p'} + \frac{r}{p}\right)} |f(x-y)|\, dy \\
&= C \int_{|y|\geq\rho} |y|^{-\frac{s}{p'}} |y|^{-\frac{r}{p}} |f(x-y)|\, dy \\
&\leq C \left(\int_{|y|\geq\rho} |y|^{-s}\, dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{|y|\geq\rho} |y|^{-r} |f(x-y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Mostremos que o primeiro fator da desigualdade acima pode ser majorado por $C\rho^{\frac{n-s}{p'}}$. Para isso, observe que se $\phi(r) = r^{-s}$, com $r = |y|$, então

$$\int_{|y|\geq\rho} |y|^{-s}\ dy = \int_\rho^\infty \phi(r)\ d\theta(r),$$

em que

$$\theta(r) = \int_{\rho\leq|y|\leq r} dy.$$

Logo, integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\rho^\infty \phi(r)\ d\theta(r) &= \phi(r)\theta(r)\Big|_\rho^\infty - \int_\rho^\infty \phi'(r)\theta(r)\ dr \\
&= \lim_{r\to\infty}\left[\phi(r)\theta(r) - \phi(\rho)\theta(\rho)\right] - \int_\rho^\infty -sr^{-s-1}\theta(r)\ dr \\
&\leq \lim_{r\to\infty}\left[Cr^{n-s}\right] + Cs\int_\rho^\infty r^{-s+n-1}\ dr \qquad (2.40)\\
&= Cs\int_\rho^\infty r^{-s+n-1}\ dr \\
&= \frac{Cs}{n-s}\lim_{r\to\infty}\left[r^{n-s} - \rho^{m-s}\right] \\
&= C\rho^{n-s},
\end{aligned}$$

sendo que em (2.40) usamos que

$$\theta(r) = \int_{\rho\leq|y|\leq r} dy \leq \int_{|y|\leq r} dy = Cr^n.$$

Assim,

$$C\left(\int_{|y|\geq\rho} |y|^{-s}\ dy\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\rho^{\frac{n-s}{p'}}.$$

Com um raciocínio análogo, mostramos que o segundo fator de (2.39) pode ser majorá-lo por $C\rho^{\frac{\lambda-r}{p}}\|f\|_{p,\lambda}$. De fato, se $\phi(s) = s^{-r}$, com $s = |y|$, então

$$\int_{|y|\geq\rho} |y|^{-r}|f(x-y)|\ dy = \int_\rho^\infty \phi(s)\ d\theta(s),$$

em que

$$\theta(s) = \int_{\rho\leq|y|\leq s} |f(x-y)|^p\ dy \leq \int_{|y|\leq s} |f(x-y)|^p\ dy \leq s^\lambda(\|f\|_{p,\lambda})^p.$$

Assim, integrando por partes, temos

$$\int_\rho^\infty \phi(s)\ d\theta(s) \quad = \quad \phi(s)\theta(s)\Big|_\rho^\infty - \int_\rho^\infty \phi'(s)\theta(s)\ dr$$

$$
\begin{aligned}
&\leq -\int_\rho^\infty -rs^{-r-1}\theta(s)\ ds \\
&\leq r\int_\rho^\infty s^{-r-1}s^{\lambda}(\|f\|_{p,\lambda})^p\ ds \\
&= r(\|f\|_{p,\lambda})^p\int_\rho^\infty s^{-r-1+\lambda}\ ds \\
&= \frac{r(\|f\|_{p,\lambda})^p}{\lambda-r}\left[\lim_{s\to\infty} s^{-r+\lambda}-\rho^{-r+\lambda}\right] \\
&= -\frac{r}{\lambda-r}(\|f\|_{p,\lambda})^p\rho^{\lambda-r},
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\left(\int_{|y|\geq\rho}|y|^{-r}|f(x-y)|^p\ dy\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\rho^{\frac{\lambda-r}{p}}\|f\|_{p,\lambda}.
$$

Logo, usando (2.36) e (2.38) segue que

$$
\begin{aligned}
|g''(x)| &\leq C\rho^{\left(\frac{n-s}{p'}+\frac{\lambda-r}{p}\right)}\|f\|_{p,\lambda} \\
&= C\rho^{\left(n-\frac{n-\lambda}{p}-n+\delta\right)}\|f\|_{p,\lambda} \\
&= C\rho^{-\frac{n-\mu}{q}}\|f\|_{p,\lambda}.
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

Tomando o supremo para x em $\mathbb{R}^n$ na última desigualdade e sabendo que $\frac{n-\mu}{q}>0$ e que $f\in M_{p,\lambda}$, isto é $\|f\|_{p,\lambda}<\infty$, temos $g''\in L^\infty$. Além disso,

$$
\|g''\|_{q;x_0,R}=\left(\int_{B_R(x_0)}|g''(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\|g''\|_\infty\left(\int_{B_R(x_0)}dx\right)^{\frac{1}{q}}=CR^{\frac{n}{q}}\|g''\|_\infty. \tag{2.42}
$$

Agora, provemos a seguinte desigualdade

$$
\|g'\|_{q;x_0,R}\leq C(R+\rho)^{\frac{\mu}{q}}\|f\|_{p,\lambda}. \tag{2.43}
$$

Note que os valores f no exterior da bola $B_{R+\rho}(x_0)$ não contribuem com o lado esquerdo de (2.43). De fato, fazendo a mudança de variável $z=x-y$, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}S_\rho(y)f(x-y)\ dy \\
&= \int_{|y|<\rho}S(y)f(x-y)\ dy \\
&= \int_{B_\rho(x)}S(x-z)f(z)\ dz.
\end{aligned}
$$

Seja $\bar{f}$ dada pela seguinte condição

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } x \in B_{R+\rho}(x_0) \\ 0, \text{ se } x \notin B_{R+\rho}(x_0) \end{cases}.$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}
\|g'\|_{q;x_0,R} &= \left(\int_{B_R(x_0)} |g'(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{B_R(x_0)} \left| \int_{B_\rho(x)} S(x-z) f(z) dz \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{B_R(x_0)} \left| \int_{B_\rho(x)} S(x-z) \overline{f}(z) dz \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (2.44) \\
&= \|S_\rho * \bar{f}\|_{q;x_0,R} \\
&\leq \|S_\rho * \bar{f}\|_q, \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

sendo que (2.44) é justificada, pois uma vez que x está sendo tomado em $B_R(x_0)$ se $z \in B_\rho(x)$, então $y \in B_{R+\rho}(x_0)$, como pode ser visto na Figura 2.2.

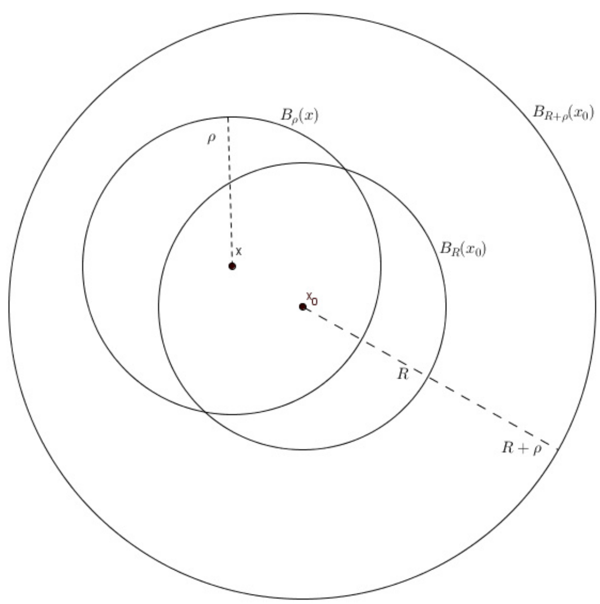

Figura 2.2: Figura 2

Uma vez que por (2.37) temos $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\delta}{n}$, para $p > 1$, pela Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev 1.2.4, temos

$$\|S_\rho * \bar{f}\|_q \leq C\|\bar{f}\|_p$$

$$\begin{aligned} &\leq C\|\bar{f}\|_{p,x_0,R+\rho} \\ &\leq C(R+\rho)^{\frac{\lambda}{p}}\|f\|_{p,\lambda}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Assim, de (2.45) e (2.46) segue (2.43), para o caso em que $p > 1$.

Suponha agora $p = 1$. Então, pela desigualdade de Young 1.2.3 temos que

$$\|S_\rho * \bar{f}\|_q \;\leq\; \|S_\rho\|_q\|\bar{f}\|_1,$$

já que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{1} = 1 + \frac{1}{q}.$$

Além disso, vale que $\|S_\rho\|_q \;\leq C\rho^{\left(\delta-n+\frac{n}{q}\right)}$, sendo que $\delta - n + \frac{n}{q} > 0$, por (2.37).

Por outro lado, temos que $\|\bar{f}\|_1 \leq (R+\rho)^{\left(n-\frac{n-\lambda}{p}\right)}\|f\|_{p,\lambda}$. De fato,

$$\begin{aligned} \|\bar{f}\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{f}(x)|\; dx \\ &= \int_{B_{R+\rho}(x_0)} |f(x)|\; dx \\ &= (R+\rho)^{\lambda}(R+\rho)^{-\lambda}\int_{B_{R+\rho}(x_0)} |f(x)|\; dx \\ &\leq (R+\rho)^{\lambda}\sup_{x_0\in\mathbb{R}^n, R+\rho>0}\left\{(R+\rho)^{-\lambda}\int_{B_{R+\rho}(x_0)} |f(x)|\; dx\right\} \\ &= (R+\rho)^{\lambda-n+n}\|f\|_{1,\lambda} \\ &= (R+\rho)^{\left(n-\frac{n-\lambda}{p}\right)}\|f\|_{p,\lambda}, \end{aligned}$$

pois $p = 1$.

Agora, uma vez que, por (2.36), obtemos $\delta - m + \frac{m}{q} + m - \frac{m-\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ segue que

$$\begin{aligned} \|g'\|_{q;x_0,R} &\leq \|S_\rho\|_q\|\bar{f}\|_1 \\ &\leq C(R+\rho)^{\delta-m+\frac{m}{q}+m-\frac{m-\lambda}{p}}\|f\|_{p,\lambda} \\ &= C(R+\rho)^{\frac{\mu}{q}}\|f\|_{p,\lambda}, \end{aligned}$$

o que prova (2.43), para o caso em que $p = 1$. Sendo assim, (2.43) fica provada para $p \geq 1$.

Como $S * f = g' + g''$, a partir das estimativas (2.41), (2.42) e (2.43) obtemos

$$\|S * f\|_{q;x_0,R} \leq \left[CR^{\frac{m}{q}}\rho^{-\frac{m-\mu}{q}} + C(R+\rho)^{\frac{\mu}{q}}\right]\|f\|_{p,\lambda}. \tag{2.47}$$

Dado $R > 0$, escolhemos $\rho = R$ em (2.47) para obter

$$\|S * f\|_{q;x_0,R} \leq CR^{\frac{\mu}{q}}\|f\|_{p,\lambda}.$$

Logo, multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $R^{-\frac{\mu}{q}}$ e tomando o supremo para x_0 em $\mathbb{R}^n$ e $R > 0$, segue que

$$\|S * f\|_{q,\mu} \leq C\|f\|_{p,\lambda},$$

ou seja, $S * f \in M_{p,\lambda}$, como queríamos. □

Lema 2.4.2. *Seja $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to R$ um núcleo singular do tipo Calderón- Zygmund, isto é, uma função homogênea e contínua de grau $-m$ com integral nula em qualquer esfera em torno da origem. Se $p > 1$ e $0 \leq \lambda < n$, o operador $K*$ é limitado de $M_{p,\lambda}$ em $M_{p,\lambda}$.*

Demonstração. É suficiente adaptarmos a prova do Lema 2.4.1 para o caso em que $(p, \lambda) = (q, \mu)$. Para cada $\rho > 0$, seja K_ρ dada por

$$K_\rho(x) = \begin{cases} K(x) \text{ se } |x| < \rho \\ 0, \text{ se } |x| \geq \rho \end{cases}.$$

Seja $f \in M_{p,\lambda}$ e escreva $K * f = g' + g''$, em que $g' = K_\rho * f$ e $g'' = (K - K_\rho) * f$. Como no Lema 2.4.1 estimaremos g' e g'' separadamente.

Provemos que $g'' \in L^\infty$. Seja p' tal que $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ e escolha $r, s > 0$ tais que

$$\frac{r}{p} + \frac{s}{p'} = n, \text{ com } r > 0 \text{ e } s > n. \tag{2.48}$$

Tal escolha é possível pois,

$$\frac{\lambda}{p} + \frac{n}{p'} = \frac{\lambda}{p} + n - \frac{n}{p} = n - \frac{n - \lambda}{p} < n,$$

pois $\frac{n-\lambda}{p} > 0$.

Desta forma, pela Desigualdade de Hölder em L^p, (Proposição 1.2.2), temos

$$\begin{aligned} |g''(x)| &= |(K - K_\rho) * f(x)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (K - K_\rho)(y) f(x - y)\, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(K(y) - K_\rho(y)) f(x - y)|\, dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C \int_{|y|\geq\rho} |y|^{-\left(\frac{s}{p'}+\frac{r}{p}\right)} |f(x-y)|\, dy \\
&\leq C \left(\int_{|y|\geq\rho} |y|^{-s}\, dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{|y|\geq\rho} |y|^{-r} |f(x-y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Como em (2.39), o primeiro e o segundo fator da desigualdade acima podem ser majorados por $C\rho^{\frac{n-s}{p'}}$ e $C\rho^{\frac{\lambda-r}{p}}\|f\|_{p,\lambda}$, respectivamente. Logo, por (2.48), temos

$$
\begin{aligned}
|g''(x)| &\leq C\rho^{\left(\frac{n-s}{p'}+\frac{\lambda-r}{p}\right)}\|f\|_{p,\lambda} \\
&= C\rho^{\left(n-\frac{n-\lambda}{p}-n\right)}\|f\|_{p,\lambda} \\
&= C\rho^{-\frac{n-\lambda}{p}}\|f\|_{p,\lambda}. \qquad (2.49)
\end{aligned}
$$

Tomando o supremo para $x \in \mathbb{R}^n$ na última desigualdade temos que $g'' \in L^\infty$ e, mais ainda,

$$
\|g''\|_{p;x_0,R} \leq C\|g''\|_\infty R^{\frac{n}{p}} \leq CR^{\frac{n}{p}}\rho^{-\frac{n-\lambda}{p}}\|f\|_{p,\lambda}. \qquad (2.50)
$$

Com relação ao termo g', temos

$$
\|g'\|_{p;x_0,R} = \|K_\rho * \bar{f}\|_{p;x_0,R} \leq \|K_\rho * \bar{f}\|_p,
$$

em que

$$
\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \in B_{R+\rho}(x_0) \\ 0, \text{ se } x \notin B_{R+\rho}(x_0) \end{cases}.
$$

Como pode ser visto em [23], [24] e [25], o operador $K_\rho*$ é contínuo em L^p, $1 < p < \infty$. Mais ainda, a constante de continuidade independe de ρ. Assim,

$$
\begin{aligned}
\|g'\|_{p;x_0,R} &= \|K_\rho * \bar{f}\|_{p;x_0,R} \\
&\leq \|K_\rho * \bar{f}\|_p \\
&\leq C\|\bar{f}\|_p \\
&= C\|f\|_{p;x_0,R+\rho} \\
&\leq C(R+\rho)^{\frac{\lambda}{p}}\|f\|_{p,\lambda}.
\end{aligned}
$$

Uma vez que $K * f = g'' + g''$, segue que

$$
\|K_\rho * \bar{f}\|_{p;x_0,R} \leq \left[CR^{\frac{n}{p}}\rho^{-\frac{n-\lambda}{p}} + C(R+\rho)^{\frac{\lambda}{p}} \right]\|f\|_{p,\lambda}.
$$

Assim, dado $\rho > 0$, escolhemos $\rho = R$ a fim de obter

$$\|K * f\|_{p;x_0,R} \leq CR^{\frac{\lambda}{p}}\|f\|_{p,\lambda}.$$

Portanto, $K * f \in M_{p,\lambda}$, com $\|K * f\|_{p,\lambda} \leq C\|f\|_{p,\lambda}$. $\square$

Capítulo

3

Boa colocação em $M_{p,\lambda}$

Neste capítulo apresentaremos resultados de existência, unicidade e continuidade em relação ao dado inicial, de soluções das equações de Navier-Stokes nos espaços $M_{p,\lambda}$.

3.1 O Problema de Cauchy para as equações de Navier-Stokes

Consideraremos o Problema de Valor Inicial (PVI) para as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^n$, com dimensão $n \geq 3$. Tal problema, descreve o movimento de um fluido incompressível e com viscosidade $\mu > 0$. Vamos considerar, por simplicidade, que não existem forças externas atuando sobre o fluido. O conjunto de equações que descrevem o PVI é dado por:

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, & x \in \mathbb{R}^m,\ t > 0 \\ \nabla \cdot u = 0, & x \in \mathbb{R}^m,\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^m \end{cases}, \tag{3.1}$$

em que $u = u(x,t)$ e $p = p(x,t)$ representam, respectivamente, o campo de velocidades e a pressão do fluido no instante $t > 0$ e na posição $x \in \mathbb{R}^n$. A constante μ representa a viscosidade do fluido e, por simplicidade, atribuiremos a ela o valor $\mu = 1$.

Observemos que $\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial p}{\partial x_n}\right)$ denota o vetor gradiente de p e $\nabla \cdot u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$ o divergente de $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$. Além disso, $(u \cdot \nabla)u$ é o campo cuja j-ésima componente é dada por

$$(u \cdot \nabla)u_j = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Vale ressaltar que se u é um campo satisfazendo $\nabla \cdot u = 0$, então é possível escrever

$$(u \cdot \nabla)u = \nabla \cdot (u \otimes u) = \left(\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j}, \cdots, \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right),$$

em que $u \otimes u$ é o produto tensorial dado pela matriz

$$u \otimes u = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \cdots & u_1 u_n \\ u_2 u_1 & u_2^2 & \cdots & u_2 u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n u_1 & u_n u_2 & \cdots & u_n^2 \end{bmatrix}$$

e $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$.

Neste trabalho, estaremos interessados em obter soluções mild (ou brandas) do Problema de Cauchy 3.1. Tais soluções satisfazem a equação integral proveniente do princípio de Duhamel. No entanto, antes de tornar precisa a noção de solução mild para o Problema 3.1, observamos que um argumento clássico utilizado para encontrar soluções do problema em questão é eliminar a incógnita p. Assim, obteremos um sistema de equações envolvendo apenas uma incógnita, a saber u. Posteriormente, podemos recuperar p utilizando a segunda equação de 3.1. Para isso, usamos o projetor de Leray $\mathbb{P}$, (veja Definição 1.4.6 e (1.5)), dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(u) &= u + (\mathcal{R}_1\sigma, \mathcal{R}_2\sigma, \cdots, \mathcal{R}_m\sigma) \\ &= (u_1 + \mathcal{R}_1\sigma, u_2 + \mathcal{R}_2\sigma, \cdots, u_m + \mathcal{R}_m\sigma), \end{aligned}$$

em que $\sigma = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{R}_j u_j$ e $\mathcal{R}_j$ é a $j-$ésima transformada de Riesz. Na Seção 1.4, vimos que o projetor de Leray pode ser reescrito na forma (veja (1.6))

$$\mathbb{P}(u) = \left(u_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left((-\Delta)^{-1} \text{ div } u \right), \ldots, u_n + \frac{\partial}{\partial x_n} \left((-\Delta)^{-1} \text{ div } u \right) \right) \tag{3.2}$$

e que o projetor tem as seguintes propriedades: $\mathbb{P}$ comuta com derivadas, $\mathbb{P}(\nabla u) = 0$, div $(\mathbb{P}(u)) = 0$ e div $u = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(u) = u$.

Sendo assim, aplicando o projetor de Leray na primeira equação do Problema 3.1 obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p\right) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \partial_t \left[\mathbb{P}(u)\right] - \Delta \left[\mathbb{P}(u)\right] + \mathbb{P}\left[(u \cdot \nabla)u\right] = 0 \\ &\Rightarrow \quad \partial_t u - \Delta u + \mathbb{P}\left[(u \cdot \nabla)u\right] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t u - \Delta u + \mathbb{P}\left[\nabla(u \otimes u)\right] = 0,$$

donde segue o seguinte sistema equivalente ao Problema 3.1 envolvendo apenas a incógnita u:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \mathbb{P}\left[\nabla(u \otimes u)\right] = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ \nabla \cdot u = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.3}$$

3.2 Formulação Integral

Nesta seção apresentaremos a formulação integral associada ao sistema de Navier-Stokes (3.3).

Considere u uma solução clássica de (3.3), isto é, u satisfaz todas as equações do sistema (3.3) e defina

$$\psi(s) = U(t-s)u(s,x),$$

em que $U(t)$ é o semigrupo do calor, $s > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Uma vez que

$$U(t-s)u(s,x) = h(t-s,x) * u(s,x),$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\psi(s) &= \frac{\partial}{\partial s}(h(t-s,x) * u(s,x)) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\left[\int_{\mathbb{R}^n} h(t-s,x-y)u(s,y)dy\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\partial}{\partial s}(h(t-s,x-y))u(s,y) + h(t-s,x-y)\frac{\partial}{\partial s}u(s,y)dy\right]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

A seguinte igualdade é verdadeira

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(h(t-s,x-y)\right) = -\Delta\left(h(t-s,x-y)\right). \tag{3.5}$$

De fato, observemos primeiramente que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left(h(t-s,x-y)\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\right) \\ &= \frac{2\pi n}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}+1}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} + \frac{(-4)|x-y|^2}{(4(t-s))^2}\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\left[\frac{n}{2(t-s)} - \frac{|x-y|^2}{4(t-s)^2}\right]. \tag{3.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}(h(t-s,x-y)) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\right)\\ &= \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \frac{(-(x_i-y_i))}{2(t-s)}\end{aligned}$$

e, derivando mais uma vez, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(h(t-s,x-y)) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{-(x_i-y_i)}{2(t-s)}\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\right)\\ &= \left[\frac{-1}{2(t-s)} + \frac{(x_i-y_i)^2}{4(t-s)^2}\right]\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Logo, de (3.6) e (3.7), segue que

$$\begin{aligned}-\Delta(h(t-s,x-y)) &= \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\left[\frac{n}{2(t-s)} - \frac{|x-y|^2}{4(t-s)^2}\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial s}(h(t-s,x-y).\end{aligned}$$

Uma vez que ψ é diferenciável, aplicando (3.5) em (3.4) e utilizando propriedades de convolução, segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\psi(s) &= \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta(h(t-s,x-y))u(s,y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} h(t-s,x-y)\frac{\partial}{\partial s}u(s,y)dy\\ &= U(t-s)\frac{\partial}{\partial s}u(s,x) - \Delta U(t-s)u(s,x)\\ &= U(t-s)(\Delta u(s,x) - \mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes u)(s,x)) - \Delta U(t-s)u(s,x)\\ &= U(t-s)\Delta u(s,x) - U(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes u)(s,x) - U(t-s)\Delta u(s,x)\\ &= -U(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes u)(s,x).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Agora, integrando (3.8) de 0 até t e lembrando que

$$\psi(0) \;=\; U(t-0)u(0,x) = U(t)u_0(x) \text{ e}$$

$$\psi(t) \quad = \quad U(0)u(t,x) = u(t,x),$$

temos

$$\psi(t) - \psi(0) = -\int_0^t U(t-s)\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u)(s,x)ds,$$

isto é,

$$u(t,x) - U(t)u_0(x) = -\int_0^t U(t-s)\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u)(s,x)ds.$$

Como o projetor de Leray $\mathbb{P}$ comuta com derivadas e como o semigrupo $U(t)$ aplicado a uma função é expresso por uma convolução, obtemos que

$$u(t,x) = U(t)u_0(x) - \int_0^t \nabla U(t-s)\mathbb{P}(u \otimes u)(s,x)ds. \tag{3.9}$$

Sendo assim, podemos concluir que toda solução clássica do sistema (3.3) satisfaz a equação integral (3.9), no entanto, se u satisfaz a formulação integral, não necessariamente u é solução clássica de (3.3).

Como veremos adiante, soluções que satisfazem a equação integral (3.9) são chamadas de soluções mild (ou brandas) do problema de Cauchy (3.3).

Com o objetivo de simplificar a expressão (3.9) sua parte não linear será denotada por

$$\mathcal{B}(u,v)(t,x) = -\int_0^t \nabla U(t-s)\mathbb{P}(u \otimes u)(s,x)ds. \tag{3.10}$$

Assim, podemos reescrever (3.9) como

$$u(t,x) = U(t)u_0 + \mathcal{B}(u,u)(t,x). \tag{3.11}$$

3.3 Espaços Funcionais e Relação de Escala

Nesta seção apresentaremos os espaços funcionais, do tipo Kato-Fujita, nos quais estudaremos a equação integral (3.11). Uma vez que também buscaremos por soluções autossimilares, para o problema (3.3), precisaremos escolher índices adequados a fim de que as normas desses espaços sejam invariantes pela relação de escala de (3.3). Vale ainda ressaltar que, por simplicidade, não faremos distinção na notação de espaços de funções vetoriais e espaços de funções escalares.

Definição 3.3.1. *Seja $u = u(t,x)$ uma solução clássica de* (3.3). *Definimos u_α por*

$$u_\alpha(t,x) := \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x), \ \forall \alpha > 0. \tag{3.12}$$

A aplicação

$$u \mapsto u_\alpha \tag{3.13}$$

é chamada de relação de escala (ou scaling) de (3.3).

Notemos que se u é solução clássica das equações de Navier-Stokes (3.3), então u_α também o é. De fato, pela regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}(\alpha u(\alpha^2 t, \alpha x)) \\
&= \alpha \frac{\partial}{\partial t}(u(\alpha^2 t, \alpha x)) \\
&= \alpha^3 \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha^2 t, \alpha x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(u_\alpha \cdot \nabla u_\alpha)(t,x) &= \mathbb{P}[\alpha u(\alpha^2 t, \alpha x) \cdot \alpha \nabla u(\alpha^2 t, \alpha x)] \\
&= \mathbb{P}(\alpha^3 u \cdot \nabla u)(\alpha^2 t, \alpha x) \\
&= \alpha^3 \mathbb{P}(u \cdot \nabla u)(\alpha^2 t, \alpha x)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(-\Delta u_\alpha)(t,x) &= -\Delta[\alpha u(\alpha^2 t, \alpha x)] \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[\alpha u(\alpha^2 t, \alpha x)\right] \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha u(\alpha^2 t, \alpha x)) \right) \\
&= -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i}(\alpha^2 t, \alpha x) \right) \\
&= \alpha^3 \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\alpha^2 t, \alpha x) \right) \\
&= \alpha^3 (-\Delta u)(\alpha^2 t, \alpha x).
\end{aligned}$$

Logo, adicionando as igualdades acima e, lembrando que por hipótese $u = u(t,x)$ é solução clássica de (3.3), obtemos

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \Delta u_\alpha + \mathbb{P}[\nabla \cdot (u_\alpha \otimes u_\alpha)] = \alpha^3 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mathbb{P}[\nabla \cdot (u \otimes u)] \right) = 0.$$

Portanto, para todo $\alpha > 0$, u_α é solução do problema (3.3) quando u o é. Além disso, a relação de escala (3.12) é a única entre todas da forma $\alpha u^k(\alpha^2 t, \alpha x)$ com tal propriedade. Sendo assim, é natural nos perguntarmos sobre a existência de soluções invariantes pela relação de escala.

Definição 3.3.2. *Uma solução $u = u(t,x)$ do sistema (3.3) é dita autossimilar se satisfaz*

$$u(t,x) = u_\alpha(t,x) = \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x),$$

$\forall t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha > 0$.

Fazendo, formalmente, $t \mapsto 0^+$ em (3.13), temos

$$\begin{array}{ccc} u(t,x) & \mapsto & \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x) \\ \mathcal{D}' \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}' \\ u_0(x) & \mapsto & \alpha u_0(\alpha x). \end{array}$$

Por consequência, para que u seja autossimilar, o dado inicial u_0 deve ser uma função homogênea de grau -1, isto é,

$$u_0(x) = \alpha u_0(\alpha x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Em outras palavras, se u é uma solução *mild* autossimilar com $u = u(t,x) \to u_0(x)$, quando $t \to 0^+$, então para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha(t,x)\phi(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x)\phi(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{1-n} u(\alpha^2 t, x)\phi(\alpha^{-1}x)\, dx \\ &\to \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{1-n} u_0(x)\phi(\alpha^{-1}x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha u_0(\alpha x)\phi(x)\, dx, \end{aligned} \tag{3.14}$$

ou seja, $u_\alpha(t,x) \mapsto \alpha u_0(\alpha x)$.

Como $u(t,x) = u_\alpha(t,x)$, pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, temos $\alpha u_0(\alpha x) = u_0(x)$, isto é, o dado inicial é homogêneo de grau -1.

Deste modo, percebe-se que os espaços adequados para se encontrar as soluções autosimilares são os que contém as funções homogêneas de grau -1. Além disso, a norma de nossos espaços funcionais devem ser invariantes pela relação de escala (3.13). Na sequência apresentaremos os espaços que iremos trabalhar daqui em diante.

Sejam $\lambda \in [0, n)$, $p = n - \lambda$ e $1 < p < q < \infty$. Definimos X_q como o espaço das funções vetoriais

$u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tais que $\nabla \cdot u = 0$ e cuja norma é dada por

$$\|u\|_{X_q} = \sup_{t>0} t^k \|u(t, \cdot)\|_{q,\lambda} < \infty,$$

em que o índice k é escolhido de modo que $\|\cdot\|_{X_q}$ seja invariante pela relação de escala (3.13), ou seja,

$$\|u\|_{X_q} = \|u_\alpha\|_{X_q}, \ \forall \alpha > 0.$$

Calculemos agora o valor do índice k. Observemos que

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha\|_{X_q} &= \sup_{t>0} t^k \|u_\alpha(t, \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&= \sup_{t>0} t^k \|\alpha u(\alpha^2 t, \alpha \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&= \sup_{t>0} \alpha t^k \|u(\alpha^2 t, \alpha \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&= \sup_{t>0} \alpha \left(\frac{s}{\alpha^2} \right)^k \|u(s, \alpha \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&= \sup_{t>0} \alpha^{1-2k} s^k \|u(s, \alpha \cdot)\|_{q,\lambda},
\end{aligned}$$

em que $s = \alpha^2 t$.

Em contrapartida, temos que

$$\begin{aligned}
\|f(\alpha \cdot)\|_{q,\lambda} &= \sup_{x_0 \in R^n, R>0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(\alpha x)|^q \ dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= \sup_{x_0 \in R^n, R>0} \left\{ \left(\frac{\alpha R}{\alpha} \right)^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\alpha^{-n} \int_{B_{\alpha R}(\alpha x_0)} |f(x)|^q \ dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= \alpha^{-\frac{n-\lambda}{q}} \sup_{x_0 \in R^n, R>0} \left\{ (\alpha R)^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int_{B_{\alpha R}(\alpha x_0)} |f(x)|^q \ dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= \alpha^{-\frac{n-\lambda}{q}} \|f\|_{q,\lambda}.
\end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha\|_{X_q} &= \alpha^{1-2k-\frac{n-\lambda}{q}} \sup_{t>0} t^k \|u(t, \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&= \alpha^{1-2k-\frac{n-\lambda}{q}} \|u\|_{X_q}
\end{aligned}$$

e para que $\|u_\alpha\|_{X_q} = \|u\|_{X_q}$, devemos ter

$$1 - 2k - \frac{n-\lambda}{q} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}.$$

Se $q = p = n - \lambda$, a norma no espaço X_p é dada por

$$\|f\|_{X_p} = \sup_{t>0} \|f(t,\cdot)\|_{p,\lambda}.$$

Definição 3.3.3. *Sejam $n \geq 3$, $\lambda \in [0,n)$, $p = n - \lambda$ e $1 < p < q < \infty$. Definimos os espaços*

$$\begin{aligned}
X_p &= \{u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\ u \in BC((0,\infty), M_{p,\lambda}) \ e\ \nabla \cdot u = 0\} \\
X_q &= \{u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\ t^{\frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}} u \in BC((0,\infty), M_{q,\lambda}) \ e\ \nabla \cdot u = 0\} \\
X &= X_p \cap X_q,
\end{aligned}$$

em que $B((0,\infty), E)$ representa o espaço de todas as funções contínuas e limitadas definidas em $(0,\infty)$ com valores em E. Cada espaço é munido, respectivamente, com as seguintes normas

$$\|u\|_{X_p} = \sup_{t>0} \|u(t,\cdot)\|_{p,\lambda} \tag{3.15}$$

$$\|u\|_{X_q} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}} \|u(t,\cdot)\|_{p,\lambda} \tag{3.16}$$

$$\|u\|_X = \|u\|_{X_p} + \|u\|_{X_q}. \tag{3.17}$$

Observação 10. *Como vimos na Proposição 2.1.2 os espaços de Morrey $M_{p,\lambda}$ são espaços de Banach. Logo, os espaços X_p, X_q e X munidos de suas respectivas normas também são espaços de Banach.*

3.4 Resultados de Boa Colocação

No que se segue apresentaremos um dos principais resultados do trabalho que garante a existência e unicidade das soluções mild no espaço X bem como a dependência contínua dos dados iniciais em espaços de Morrey. Além disso, trataremos da autosimilaridade e da estabilidade assintótica das soluções *mild* globais.

Começaremos tornando precisa a noção de solução mild (ou branda) em $M_{p,\lambda}$, associada as equações de Navier Stokes (3.3).

Definição 3.4.1. *Sejam $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < n < q$, $n \geq 3$ e $\lambda = n - p$. Assuma que $u_0 \in M_{p,\lambda}$, com $\nabla \cdot u_0 = 0$. Diz-se que $u = u(t,x)$ é uma solução mild (ou branda) global em X, se a função u satisfaz* *a equação integral* (3.11), *ou seja*

$$u(t,x) = U(t)u_0(x) + B(u,u)(t,x)$$

e $u(t,x) \to u_0(x)$ *em* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, *quando* $t \to 0^+$.

No que segue, apresentaremos nossos resultados de boa colocação, autosimilaridade e estabilidade assintótica.

Teorema 3.4.2. *Sejam* $1 < p < q < \infty$, $0 \leq \lambda < n$, $n \geq 3$ *com* $\lambda = n - p$ *e* $p\left(1 - \frac{1}{q}\right) > 1$. *Considere* $u_0 \in M_{p,\lambda}$, *com* $\nabla \cdot u_0 = 0$.

(*i*) ***(Existência e Unicidade)*** *Existem* $\varepsilon > 0$ *e* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *tal que se* $\|u_0\|_{p,\lambda} \leq \delta$ *então, o problema* (3.3) *tem uma solução mild global em* X, *a qual é única na bola fechada* $B_{2\varepsilon} = \{u \in X;\ \|u\|_X \leq 2\varepsilon\}$.

(*ii*) ***(Dependência contínua no dado inicial)*** *A aplicação dado-solução* $u_0 \to u$, *da bola* $B_\delta = \{f \in M_{p,\lambda};\ \|f\|_{p,\lambda} \leq \delta\}$ *em* X *é Lipschitz contínua.*

Teorema 3.4.3. ***(Solução autosimilar)*** *Se* u_0 *é uma função homogênea de grau* -1, *isto é, se para todo* α

$$u_0(x) = \alpha^{-1} u_0(\alpha x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

a solução $u = u(t,x)$ *obtida em* (*i*) *do Teorema 3.4.2 é uma solução mild global autosimilar para o problema de valor inicial* (3.3).

Teorema 3.4.4. ***(Estabilidade assintótica)*** *Sejam* u *e* v *duas soluções mild globais obtidas no Teorema 3.4.2, com dados iniciais* $u_0, v_0 \in M_{p,\lambda}$, *respectivamente. Então, vale que*

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{p,\lambda} = 0 \ \Leftrightarrow \ \lim_{t \to +\infty} \|U(t)u_0 - U(t)v_0\|_{p,\lambda} = 0. \tag{3.18}$$

Além disso,

$$\lim_{t \to +\infty} t^k \|U(t)u_0 - U(t)v_0\|_{q,\lambda} = 0 \ \Leftrightarrow \ \lim_{t \to +\infty} t^k \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{q,\lambda} = 0, \tag{3.19}$$

em que $k = \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}$.

Para a demonstração dos resultados acima, precisaremos de um lema geral, cuja demonstração é uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Lema 3.4.5. ***(Lema Geral)*** *Seja X um espaço de Banach, com norma $\|\cdot\|_X$, e $\mathcal{B} : X \times X \to X$ um operador bilinear e contínuo, isto é, existe $K > 0$ tal que*

$$\|\mathcal{B}(x,y)\|_X \;\leq\; K\|x\|_X\|y\|_X, \text{ para todo } x,y \in X.$$

(i) ***(Existência e Unicidade)*** *Sejam $0 < \varepsilon < \frac{1}{4K}$ e $y \in X$ tais que $\|y\|_X \leq \varepsilon$. Se $4K\varepsilon < 1$, então existe uma única solução $x \in B_{2\varepsilon} = \{z \in X;\ \|z\|_X \leq 2\varepsilon\}$ para a equação*

$$x = y + \mathcal{B}(x,x).$$

(ii) ***(Dependência contínua no dado inicial)*** *A solução x depende continuamente de y, ou seja, se $\|\bar{y}\|_X \leq \varepsilon$, $\bar{x} = \bar{y} + \mathcal{B}(\bar{x},\bar{x})$ e $\bar{x} \in B_{2\varepsilon}$, então*

$$\|x - \bar{x}\|_X \leq \frac{1}{1-4K\varepsilon}\|y - \bar{y}\|_X. \tag{3.20}$$

Demonstração. ***(i)*** Considere $F : X \to X$ uma aplicação dada por $F(x) = y + \mathcal{B}(x,x)$, em que X é Banach, e seja $B_{2\varepsilon} = \{z \in X;\ \|z\|_X \leq 2\varepsilon\}$ munido da métrica

$$d(a,b) = \|a - b\|_X.$$

Note que, como X é Banach e $B_{2\varepsilon}$ é subconjunto fechado de X, o par $(B_{2\varepsilon}, d)$ forma um espaço métrico completo.

Queremos mostrar que a aplicação F restrita a $B_{2\varepsilon}$ é uma contração que satisfaz $F(B_{2\varepsilon}) \subset B_{2\varepsilon}$. Notemos que $F(B_{2\varepsilon}) \subset B_{2\varepsilon}$, pois se $x \in B_{2\varepsilon}$, então

$$\begin{aligned}
\|F(x)\|_X &= \|y + \mathcal{B}(x,x)\|_X \\
&\leq \|y\|_X + K\|x\|_X^2 \\
&\leq \varepsilon + 4K\varepsilon^2 \\
&= (1 + 4K\varepsilon)\varepsilon \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mostremos agora que F é uma contração. Se $x, \bar{x} \in B_{2\varepsilon}$, então temos

$$\|F(x) - F(\bar{x})\|_X \;=\; \|y + \mathcal{B}(x,x) - y - \mathcal{B}(\bar{x},\bar{x})\|_X$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\mathcal{B}(x-\bar{x},x)+\mathcal{B}(\bar{x},x-\bar{x})\|_X \\
&\leq \|\mathcal{B}(x-\bar{x},x)\|_X+\|\mathcal{B}(\bar{x},x-\bar{x})\|_X \\
&\leq K\|x-\bar{x}\|_X\|x\|_X+K\|\bar{x}\|_X\|x-\bar{x}\|_X \\
&\leq 4K\varepsilon\|x-\bar{x}\|_X.
\end{aligned}
$$

Como assumimos que $4k\varepsilon < 1$, segue que F é uma contração satisfazendo $F(B_{2\varepsilon}) \subset B_{2\varepsilon}$.

Uma vez que $(B_{2\varepsilon}, d)$ é completo e F é contração, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, segue que F possui apenas um ponto fixo em $B_{2\varepsilon}$, isto é, existe um único ponto $x \in B_{2\varepsilon}$ tal que x é solução da equação $x = y + \mathcal{B}(x,x)$.

(ii) Mostremos agora a continuidade em relação ao dado inicial y. Para isso, considere x, y e $\bar{x}, \bar{y}$ satisfazendo as hipóteses do enunciado. Temos

$$
\begin{aligned}
\|x-\bar{x}\|_X &= \|y+\mathcal{B}(x,x)-\bar{y}-\mathcal{B}(\bar{x},\bar{x})\|_X \\
&= \|y-\bar{y}+\mathcal{B}(x,x)-\mathcal{B}(\bar{x},x)+\mathcal{B}(\bar{x},x)-\mathcal{B}(\bar{x},\bar{x})\|_X \\
&= \|y-\bar{y}+\mathcal{B}(x-\bar{x},x)+\mathcal{B}(\bar{x},x-\bar{x})\|_X \\
&\leq \|y-\bar{y}\|_X+\|\mathcal{B}(x-\bar{x},x)\|_X+\|\mathcal{B}(\bar{x},x-\bar{x})\|_X \\
&\leq \|y-\bar{y}\|_X+4K\varepsilon\|x-\bar{x}\|_X.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\|x-\bar{x}\|_X \leq \frac{1}{1-4K\varepsilon}\|y-\bar{y}\|_X,
$$

como queríamos. □

Para provarmos o Teorema 3.4.2, iremos aplicar o Lema Geral 3.4.5, que acabamos de demonstrar, para X como na Definição 3.3.3 que, pela Observação 10 é um espaço de Banach. Precisamos mostrar, ainda, que a parte não linear da equação

$$
u(t,x) = U(t)u_0 + \mathcal{B}(u,u)(t,x)
$$

é contínua de $X \times X$ em X e que a norma da parte linear em X pode ser controlada pela norma do dado inicial $u_0 \in M_{p,\lambda}$. Esses serão os objetivos das duas próximas seções.

3.4.1 Estimativas da Parte Não Linear

Antes de iniciarmos o estudo das estimativas da parte bilinear do problema em questão, precisaremos de um lema sobre a continuidade do Projetor de Leray $\mathbb{P}$, em espaços $M_{p,\lambda}$.

Lema 3.4.6. *Sejam $1 < r < \infty$ e $0 \leq \lambda < n$. Então, $\mathbb{P} : M_{r,\lambda} \to M_{r,\lambda}$ é linear e contínuo.*

Demonstração. Lembremos que o projetor de Leray é dado por

$$\mathbb{P}(u) = (u_1 + \mathcal{R}_1\sigma, u_2 + \mathcal{R}_2\sigma, \cdots, u_n + \mathcal{R}_n\sigma),$$

em que $\sigma = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}_j u_j$. Assim, sabendo que a j-ésima transformada de Riesz $\mathcal{R}_j$ é um operador do tipo Calderón-Zygmund (veja [23] para mais detalhes), a prova segue diretamente do Lema 2.4.2. □

A seguir, mostraremos a continuidade em X do termo bilinear da equação integral (3.11).

Lema 3.4.7. *Sejam $n \geq 3$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < n < q$, $p = n - \lambda$ e $p\left(1 - \frac{1}{q}\right) > 1$. Existe $C > 0$ tal que*

$$\|\mathcal{B}(u,v)\|_{X_q} \leq C\|u\|_{X_q}\|v\|_{X_q}, \tag{3.21}$$

para todo $u, v \in X_q$.

Demonstração. Relembremos que

$$\mathcal{B}(u,v) = -\int_0^t \nabla U(t-s)\mathbb{P}(u \otimes u)(t,x)\, ds.$$

Assim, utilizando a igualdade acima e o Lema 2.3.1, item (ii), segue que

$$\|\mathcal{B}(u,v)(t,\cdot)\|_{q,\lambda} \leq C\int_0^t \|\mathbb{P}(u \otimes v)(s,\cdot)\|_{r,\lambda}(t-s)^{-\frac{1}{2}-\left(\frac{n-\lambda}{2r}-\frac{n-\lambda}{2q}\right)}\, ds,$$

em que $r = \frac{q}{2}$. Como $q > n \geq 3$, então $r = \frac{q}{2} > 1$ e o operador $\mathbb{P}$ é contínuo em $M_{r,\lambda}$, e então

$$\|\mathcal{B}(u,v)(t,\cdot)\|_{q,\lambda} \leq C\int_0^t \|(u \otimes v)(s,\cdot)\|_{r,\lambda}(t-s)^{-\frac{1}{2}-\left(\frac{n-\lambda}{2r}-\frac{n-\lambda}{2q}\right)}\, ds.$$

Logo, pela desigualdade de Hölder em espaços Morrey (Lema 2.2.1, item (ii)) e, lembrando que $k = \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}$, temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}(u,v)(t,\cdot)\|_{q,\lambda} &\leq C\int_0^t \|u(s,\cdot)\|_{q,\lambda}\|v(s,\cdot)\|_{q,\lambda}(t-s)^{-\frac{1}{2}-\left(\frac{n-\lambda}{q}-\frac{n-\lambda}{2q}\right)}\, ds \\
&\leq C\int_0^t s^k\|u(s,\cdot)\|_{q,\lambda}s^k\|v(s,\cdot)\|_{q,\lambda}s^{-2k}(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}}\, ds \\
&\leq C\int_0^t \sup_{s>0} s^k\|u(s,\cdot)\|_{q,\lambda}\sup_{s>0} s^k\|v(s,\cdot)\|_{q,\lambda}s^{-2k}(t-s)^{k-1}\, ds \\
&= C\|u\|_{X_q}\|v\|_{X_q}\int_0^t s^{-2k}(t-s)^{k-1}\, ds
\end{aligned}$$

$$= \quad I(t)\|u\|_{X_q}\|v\|_{X_q},$$

em que

$$I(t) = C\int_0^t s^{-2k}(t-s)^{k-1}\ ds.$$

Notemos que fazendo a mudança de variáveis $w = \frac{s}{t}$, obtemos

$$I(t) = Ct^{-k}\int_0^1 w^{-2k}(1-w)^{k-1}\ dw = Ct^{-k}\beta(-2k+1,k) = Ct^{-k},$$

em que β é a Função Beta (veja Definição 1.5.1) e $\beta(-2k+1,k) < \infty$, pois $-2k+1 = -2\left(\frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}\right) + 1 = \frac{n-\lambda}{q} > 0$ e $k = \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q} = \frac{1}{2} - \frac{p}{2q} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{q}\right) > 0$, já que $p < q$.

Desta forma,

$$t^k\|\mathcal{B}(u,v)(t,\cdot)\|_{q,\lambda} \ \leq C\|u\|_{X_q}\|v\|_{X_q}. \tag{3.22}$$

Logo, tomando o supremo para $t > 0$ em 3.22, segue que

$$\|\mathcal{B}(u,v)\|_{X_q} \leq C\|u\|_{X_q}\|v\|_{X_q}.$$

□

Lema 3.4.8. *Sejam $n \geq 3$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < n < q$, $p = n - \lambda$ e $p\left(1 - \frac{1}{q}\right) > 1$. Existe $C > 0$ tal que*

$$\|\mathcal{B}(u,v)\|_{X_p} \ \leq C\|u\|_{X_q}\|v\|_{X_p}, \tag{3.23}$$

para todo $u, v \in X = X_p \cap X_q$.

Demonstração. Pelo Lema 2.3.1, item (ii), e pela continuidade do operador projetor de Leray $\mathbb{P}$ em $M_{r,\lambda}$, temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}(u,v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda} &= \left\|\int_0^t \nabla U(t-s)\mathbb{P}(u\otimes v)(s,\cdot)\ ds\right\|_{p,\lambda}\\
&\leq \int_0^t \|\nabla U(t-s)\mathbb{P}(u\otimes v)(s,\cdot)\|_{p,\lambda}\ ds\\
&\leq C\int_0^t \|(u\otimes v)(s,\cdot)\|_{r,\lambda}(t-s)^{-\frac{1}{2}-\left(\frac{n-\lambda}{2r}-\frac{n-\lambda}{2q}\right)}\ ds,
\end{aligned}$$

em que r é tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, ou seja, $r = \frac{pq}{q+p} = \frac{p}{\frac{p}{q}+1} > 1$, pois por hipótese $p\left(1 - \frac{1}{q}\right) > 1$.

Note que $1 < r < p$ e $\frac{\lambda}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{\lambda}{q}$. Logo, pela desigualdade de Hölder em espaços Morrey (Lema

2.2.1, item (ii)), segue que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}(u,v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda} &\leq C\int_0^t \|u(s,\cdot)\|_{q,\lambda}\|v(s,\cdot)\|_{p,\lambda}(t-s)^{-\frac{1}{2}-\left(\frac{n-\lambda}{2r}-\frac{n-\lambda}{2q}\right)}\ ds \\
&= C\int_0^t s^{\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}}\|u(s,\cdot)\|_{q,\lambda}\|v(s,\cdot)\|_{p,\lambda}s^{-\frac{1}{2}+\frac{n-\lambda}{2q}}(t-s)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{p}\right)-\frac{1}{2}} \\
&\leq C\int_0^t \left(s^{\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}}\sup_{s>0}\|u(s,\cdot)\|_{q,\lambda}\right)\sup_{s>0}\left(\|v(s,\cdot)\|_{p,\lambda}\right)s^{-\frac{1}{2}+\frac{n-\lambda}{2q}}(t-s)^{-\frac{n-\lambda}{2q}-\frac{1}{2}}\ ds \\
&= C\|u\|_{X_q}\|v\|_{X_p}\int_0^t s^{-k}(t-s)^{k-1}\ ds \\
&= I(t)\|u\|_{X_q}\|v\|_{X_p},
\end{aligned}$$

em que

$$I(t) = C\int_0^1 w^{-k}(1-w)^{k-1}\ dw = C\beta(1-k,k) = C,$$

pois $1-K = 1-\frac{1}{2}+\frac{n-\lambda}{2q} = \frac{1}{2}+\frac{n-\lambda}{q} > 0$ e $k = \frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q} = \frac{1}{2}-\frac{p}{2q} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{p}{q}\right) > 0$, já que $p<q$.

Assim, tomando o supremo em $t>0$, na desigualdade

$$\|\mathcal{B}(u,v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda}\ \leq C\|u\|_{X_q}\|v\|_{X_p},$$

obtemos

$$\|\mathcal{B}(u,v)\|_{X_p}\ \leq C\|u\|_{X_q}\|v\|_{X_p}.$$

□

Precisaremos do próximo resultado para mostrar que a solução u converge para o dado inicial u_0, quando $t\to 0^+$, no espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.4.9. *Nas mesmas hipóteses do Lema 3.4.8, sejam $u_0\in M_{p,\lambda}$ e $u\in X$ satisfazendo 3.9. Então*

$$\mathcal{B}(u(t,\cdot),(u(t,\cdot))\to 0,\ \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ \text{quando } t\to 0^+.$$

Demonstração. Seja $\phi\in C_c^\infty$. Devemos mostrar que

$$\langle\mathcal{B}(u(t,\cdot),u(t,\cdot)),\phi\rangle\to 0,\ \text{quando } t\to 0^+.$$

Como o $supp(\phi)$ é compacto tomemos $r>0$ de modo que $supp(\phi)\subset B_r(x_0)$, em que $B_r(x_0)$ denota a bola de raio r e centro $x_0\in\mathbb{R}^n$.

Pelo Teorema de Fubini, temos

$$r^{-\lambda}|\langle \mathcal{B}(u(t,x),u(t,x)),\phi\rangle| = \left|\int_0^t r^{-\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} \nabla U(t-s)\mathbb{P}(u\otimes u)(s,x)\phi(x)\ dx\ ds\right|.$$

Considere $l=\frac{p}{\eta+1}>1$, com $0<\eta<\frac{p}{q}$ e $1=\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}$. Uma vez que $supp(\phi)\subset B_r(x_0)$, pela Desigualdade de Hölder em espaços L^p, (veja Proposição 1.2.2), temos

$$\begin{aligned}
r^{-\lambda}|\langle \mathcal{B}(u(t,x),u(t,x)),\phi\rangle| &= \left|\int_0^t r^{-\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} \nabla U(t-s)\mathbb{P}(u\otimes u)(s,x)\phi(x))\ dx\ ds\right| \\
&\leq \int_0^t r^{-\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U(t-s)\mathbb{P}(u\otimes u)(s,x)\phi(x)|\ dx\ ds \\
&= \int_0^t r^{-\lambda}\int_{B_r(0)} |\nabla U(t-s)\mathbb{P}(u\otimes u)(s,x)\phi(x)|\ dx\ ds \qquad (3.24)\\
&\leq \int_0^t r^{-\frac{\lambda}{l}}\left(\int_{B_r(0)} |\nabla U(t-s)\mathbb{P}(u\otimes u)(s,x)|^l dx\right)^{\frac{1}{l}} \\
&\cdot \left(\int_{B_r(0)} |\phi(x)|^{l'}\ dx\right)^{\frac{1}{l'}} r^{-\frac{\lambda}{l'}}\ ds \qquad (3.25)\\
&= \int_0^t r^{-\frac{\lambda}{l}}\|\nabla U(t-s)\mathbb{P}(u\otimes u)(s,\cdot)\|_{L^l(B_r(0))} r^{-\frac{\lambda}{l'}}\|\phi\|_{L^{l'}(B_r(0))}\ ds \\
&\leq C\int_0^t \|\nabla U(t-s)\mathbb{P}(u\otimes u)(s,\cdot)\|_{l,\lambda}\|\phi\|_{l',\lambda}\ ds. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Seja $\frac{1}{d}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Como $\eta<\frac{p}{q}$, segue que

$$\frac{1}{d}>\frac{1}{p}+\frac{\eta}{p}=\frac{\eta+1}{p}=\frac{1}{l},$$

isto é, $1<d<l$. Usando o Lema 2.3.1 e a desigualdade de Hölder em espaços de Morrey (Lema 2.2.1, item (ii)), temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla U(t-s)\mathbb{P}(u\otimes u)(s,\cdot)\|_{l,\lambda} &\leq C(t-s)^{\left(\frac{n-\lambda}{2l}-\frac{n-\lambda}{2d}-\frac{1}{2}\right)}\|u(s,\cdot)\|_{p,\lambda}\|u(s,\cdot)\|_{q,\lambda} \\
&\leq C(t-s)^{\left(\frac{n-\lambda}{2l}-\frac{n-\lambda}{2d}-\frac{1}{2}\right)}s^{-k}\sup_{s>0}\|u(s,\cdot)\|_{p,\lambda}\sup_{s>0}s^k\|u(s,\cdot)\|_{q,\lambda} \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

em que $k=\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}$.

Assim, substituindo (3.27) em (3.26), obtemos

$$r^{-\lambda}|\langle \mathcal{B}(u(t,\cdot),u(t,\cdot)),\phi\rangle| \leq I(t)\|u\|_{X_p}\|u\|_{X_q}\|\phi\|_{l',\lambda},$$

em que

$$
\begin{aligned}
I(t) &= C\int_0^t (t-s)^{\left(\frac{n-\lambda}{2l}-\frac{n-\lambda}{2d}-\frac{1}{2}\right)} s^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{n-\lambda}{2q}\right)}\, ds \\
&= Ct^{\left(\frac{n-\lambda}{2l}-\frac{n-\lambda}{2d}+\frac{n-\lambda}{2q}\right)}\beta\left(\frac{n-\lambda}{2l}-\frac{n-\lambda}{2d}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{n-\lambda}{2q}\right) \\
&= Ct^{\left(\frac{n-\lambda}{2l}-\frac{n-\lambda}{2p}\right)},
\end{aligned}
$$

pois $\frac{n-\lambda}{2l}-\frac{n-\lambda}{2d}+\frac{1}{2}=\frac{(n-\lambda)\eta}{2p}+\frac{1}{2}=\frac{\eta}{2}+\frac{1}{2}>0$ e $\frac{1}{2}+\frac{n-\lambda}{2q}>0$.

Portanto,

$$
r^{-\lambda}|\langle\mathcal{B}(u(t,\cdot),u(t,\cdot)),\phi\rangle| \le Ct^{\frac{n-\lambda}{2l}-\frac{n-\lambda}{2p}}\|u\|_{X_p}\|u\|_{X_q}\|\phi\|_{l',\lambda}. \tag{3.28}
$$

Uma vez que $p=n-\lambda$, temos $\frac{n-\lambda}{2l}-\frac{n-\lambda}{2p}=\frac{(n-\lambda)\eta}{2p}=\frac{\eta}{2}>0$. Além disso, como $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)\subset M_{l',\lambda}$ segue que $\|\phi\|_{l',\lambda}<\infty$.

Assim, de (3.28), concluímos que $\langle\mathcal{B}(u(t,\cdot),u(t,\cdot)),\phi\rangle\to 0$, quando $t\to 0^+$, uma vez que $r>0$ está fixado. □

3.4.2 Estimativas da Parte Linear

Nesta subseção, obtemos estimativas para parte linear do problema, $U(t)u_0$, e mostramos que quando $t\to 0^+$, ela converge para u_0 em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.4.10. *Sejam $n\ge 3$, $1<p<\infty$, $0\le\lambda<n<q$, $p=n-\lambda$ e $p\left(1-\frac{1}{q}\right)>1$ e considere $u_0\in M_{p,\lambda}$ de modo que $\nabla\cdot u_0=0$. Então, existe $C>0$ tal que*

$$
\|U(t)u_0\|_X \le C\|u_0\|_{p,\lambda}, \tag{3.29}
$$

para todo $u_0\in M_{p,\lambda}$.

Demonstração. Da primeira estimativa do Lema 2.3.1, para o caso $(p,\lambda)=(q,\mu)$, temos

$$
\|U(t)u_0\|_{p,\lambda} \le C\|u_0\|_{p,\lambda} \tag{3.30}
$$

e, do caso geral, em que $p\le q$ e $\mu=\lambda$ temos

$$
\begin{aligned}
t^{\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p}-\frac{n-\lambda}{q}\right)}\|U(t)u_0\|_{q,\lambda} &= t^{\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}}\|U(t)u_0\|_{q,\lambda} \\
&= t^k\|U(t)u_0\|_{q,\lambda} \\
&\le C\|u_0\|_{p,\lambda}.
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

Logo, tomando o supremo para $t > 0$ em (3.30) e (3.31) e adicionando as desigualdades, obtemos

$$\begin{aligned} \|U(t)u_0\|_X &= \|U(t)u_0\|_{X_p} + \|U(t)u_0\|_{X_q} \\ &= \sup_{t>0} \|U(t)u_0\|_{p,\lambda} + \sup_{t>0} t^k \|U(t)u_0\|_{q,\lambda} \\ &\leq C\|u_0\|_{p,\lambda} + C\|u_0\|_{p,\lambda} \\ &= C\|u_0\|_{p,\lambda}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.4.11. *Nas mesmas hipóteses do Lema 3.4.10, temos $U(t)u_0 \to u_0$, quando $t \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Segundo Kato, (veja [11]), o operador $U(t)$ é contínuo na topologia de $S(\mathbb{R}^n)$ e $U(t)f \to f$ em $S(\mathbb{R}^n)$, quando $t \to 0^+$ com $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Agora observemos que se $u_0 \in M_{p,\lambda} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned} \langle U(t)u_0, \phi\rangle - \langle u_0, \phi\rangle &= \langle u_0, U(t)\phi\rangle - \langle u_0, \phi\rangle \\ &= \langle u_0, U(t)\phi - \phi\rangle. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Como pode ser visto em [12], página 132, o espaço $M_{p,\lambda}$ está imerso continuamente no espaço L^p com peso $L^p_{-k/p} = \langle x\rangle^{\frac{k}{p}} L^p \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para $k > \lambda$, em que $\langle x\rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$ e $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço das distribuições temperadas, isto é, o espaço dos funcionais lineares contínuos em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Uma vez que $(U(t)\phi - \phi) \to 0$ quando $t \to 0^+$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, segue de (3.32) que

$$\lim_{t\to 0^+} \langle u_0, U(t)\phi - \phi\rangle = 0, \tag{3.33}$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Em particular, (3.33) é valida para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o que prova o resultado.

□

3.4.3 Prova do Teorema 3.4.2

Uma vez que já verificamos todas as hipóteses do Lema Geral 3.4.5 estamos agora em condições de mostrar o Teorema 3.4.2.

Mostremos, primeiramente, que o operador bilinear $\mathcal{B} : X \times X \to X$ dado por

$$\mathcal{B}(u, v)(t, x) = -\int_0^t \nabla U(t - s)\mathbb{P}(u \otimes v)(s, x)\, ds$$

é contínuo.

Note que $\nabla \cdot \mathcal{B}(u,v)(t,\cdot) = 0$ e, também, $\nabla \cdot (U(t)u_0) = 0$. De fato, usando as propriedades do projetor de Leray, temos

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathcal{B}(u,v)(t,x) &= \nabla \cdot \left[-\int_0^t \nabla U(t-s)\mathbb{P}(u\otimes v)(s,x)\ ds \right] \\
&= -\int_0^t \nabla \cdot [\nabla U(t-s)]\mathbb{P}(u\otimes v)(s,x)\ ds \\
&= -\int_0^t \nabla u(t-s) \cdot (\nabla \cdot [\mathbb{P}(u\otimes v)](s,x))\ ds \\
&= -\int_0^t \nabla u(t-s) \cdot 0\ ds \\
&= -\int_0^t 0\ ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

e

$$\nabla \cdot (U(t)u_0) = U(t)\nabla \cdot u_0 = 0,$$

já que, por hipótese, $\nabla \cdot u_0$.

Em seguida, aplicando as estimativas (3.21) e (3.23) dos Lemas 3.4.7 e 3.4.8, respectivamente, segue que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}(u,v)\|_X &= \|\mathcal{B}(u,v)\|_{X_p} + \|\mathcal{B}(u,v)\|_{X_q} \\
&\leq C\|u\|_{X_q}\|v\|_{X_p} + C\|u\|_{X_q}\|v\|_{X_q} \\
&= C\|u\|_{X_q}\left(\|v\|_{X_p} + \|v\|_{X_q}\right) \\
&\leq C\left(\|u\|_{X_q} + \|u\|_{X_p}\right)\|v\|_X \\
&= C\|u\|_X\|v\|_X,
\end{aligned}$$

em que $C > 0$.

Portanto, $\mathcal{B}(u,v)$ é um operador bilinear contínuo de $X \times X$ para X.

Como o espaço X é um espaço de Banach, usaremos o Lema Geral 3.4.5 para mostrar que a equação integral (3.9) tem uma solução mild neste espaço.

Por hipótese, sabemos que u_0 tem norma suficientemente pequena, isto é, $\|u_0\|_{p,\lambda} < \delta$, com $\delta > 0$. Logo, pelo Lema 3.4.10, temos

$$\|U(t)u_0\|_X \ \leq C\|u_0\|_{p,\lambda} \ \leq C\delta = \varepsilon. \tag{3.34}$$

Desta forma, escolhendo $\varepsilon > 0$ de modo que $0 < \varepsilon < \frac{1}{4K}$, segue que

$$\|U(t)u_0\|_X \ \leq \varepsilon.$$

Assim, se $y = U(t)u_0$, então $\nabla \cdot (U(t)u_0) = 0$. Isso juntamente com (3.34) implica que $y = U(t)u_0 \in X$.

Portanto, o Lema Geral 3.4.5 assegura que existe uma solução em X para a equação integral (3.9). Mais ainda, esta solução é única na bola fechada $B_{2\varepsilon} = \{u \in X; \|u\|_{p,\lambda} < 2\epsilon\}$.

Os Lemas 3.4.9 e 3.4.11 garantem, respectivamente, que

$$\mathcal{B}(u(t,\cdot), u(t,\cdot)) \to 0 \text{ quando } t \to 0^+$$

e

$$U(t)u_0 \to u_0 \text{ quando } t \to 0^+,$$

em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Portanto, disto segue a convergência da solução u para o dado inicial u_0 em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, o que demonstra o item (i).

Agora, sejam u e v, duas soluções com dados iniciais u_0 e v_0, respectivamente, satisfazendo as hipóteses da parte (i) do Teorema 3.4.2. Pelo item (ii) do Lema Geral 3.4.5, temos

$$\begin{aligned}
\|u - v\|_X &\leq \frac{1}{1 - 4K\varepsilon}\|U(t)u_0 - U(t)v_0\|_X \\
&= \|U(t)(u_0 - v_0)\|_X \\
&\leq \frac{C}{1 - 4K\varepsilon}\|u_0 - v_0\|_X,
\end{aligned}$$

o que demonstra o item (ii). □

3.4.4 Prova do Teorema 3.4.3

A solução do Teorema 3.4.2 foi obtida por meio de um argumento de ponto fixo. Com isso, podemos notar que a solução u pode ser obtida como limite em X da sequência de Picard dada por

$$\begin{cases} u_1(t,\cdot) = U(t)u_0(\cdot) \\ u_{m+1}(t,\cdot) = u_1(t,\cdot) + \mathcal{B}(u_m, u_m)(t,\cdot), \end{cases}$$

ou seja, o limite de u_m, em X, é o ponto fixo da aplicação $F(u) = y + \mathcal{B}(u,u)$.

Mostremos, primeiramente, que u_1 é invariante pela relação de escala (3.13). De fato,

$$\begin{aligned} u_1(\alpha^2 t, \alpha x) &= U(\alpha^2 t)u_0(\alpha x) \\ &= (h_{\alpha^2 t} * u_0)(\alpha x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h_{\alpha^2 t}(\alpha x - y)u_0(y)\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h_{\alpha^2 t}(\alpha(x - \alpha^{-1}y))u_0(y)\ dy. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} h_{\alpha^2 t}(\alpha x - y) &= (4\pi\alpha^2 t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\alpha x - y|^2}{4\alpha^2 t}} \\ &= \alpha^{-n}(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\alpha(x-\alpha^{-1}y)|^2}{4\alpha^2 t}} \\ &= \alpha^{-n}(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-\alpha^{-1}y|^2}{4t}} \\ &= \alpha^{-n} h_t(x - \alpha^{-1}y), \end{aligned} \tag{3.35}$$

segue que

$$\begin{aligned} u_1(\alpha^2 t, \alpha x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{-n} h_t(x - \alpha^{-1}y)u_0(y)\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h_t(x - z)u_0(\alpha z)\ dz \\ &= \alpha^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} h_t(x - z)u_0(z)\ dz \\ &= \alpha^{-1}u_1(t, x). \end{aligned}$$

Assim, $u_1(t, \cdot) = \alpha u_1(\alpha^2 t, \alpha\cdot)$.

Agora, por um processo de indução, mostraremos que u também é invariante pela relação de escala (3.13). Para isso, suponhamos que u_m é invariante pela relação de escala, isto é, que $\alpha u_m(\alpha^2 t, \alpha x) = u_m(t, x)$.

Observemos que, aplicando a regra da cadeia, temos

$$\nabla(h_{\alpha^2 t}(\alpha x)) = \alpha(\nabla h_{\alpha^2 t})(\alpha x). \tag{3.36}$$

Além disso, por (3.35), temos

$$\nabla(h_{\alpha^2 t}(\alpha x)) = \nabla(\alpha^{-n} h_t(x)) = \alpha^{-n}(\nabla h_t)(x). \tag{3.37}$$

Assim, de 3.36 e 3.37, obtemos

$$(\nabla h_{\alpha^2 t})(\alpha x) = \alpha^{-1-n}(\nabla h_t)(x). \tag{3.38}$$

Desta forma, utilizando (3.38) e fazendo as mudanças de variáveis $\bar{s} = \alpha^2 s$ e $\bar{y} = \alpha y$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(u_m, u_m)(\alpha^2 t, \alpha x) &= -\int_0^{\alpha^2 t} \nabla U(\alpha^2 t - \bar{s})\mathbb{P}(u_m \otimes u_m)(\bar{s}, \alpha x)\ d\bar{s} \\
&= -\int_0^{\alpha^2 t}\int_{\mathbb{R}^n} \nabla h_{\alpha^2(t-\bar{s})}(\alpha x - \bar{y})\mathbb{P}(u_m \otimes u_m)(\bar{s}, \bar{y})\ d\bar{y}\ d\bar{s} \\
&= -\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \alpha^2 \nabla h_{\alpha^2(t-s)}(\alpha x - \bar{y})\mathbb{P}(u_m \otimes u_m)(\alpha^2 s, \bar{y})\ d\bar{y}\ ds \\
&= -\alpha^2\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \alpha^n \nabla h_{\alpha^2(t-s)}(\alpha(x - y))\mathbb{P}(u_m \otimes u_m)(\alpha^2 s, \alpha y)\ dy\ ds \\
&= -\alpha^{2+n}\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{-1-n} \nabla h_{(t-s)}(x - y)\alpha^{-2}\mathbb{P}(\alpha u_m \otimes \alpha u_m)(\alpha^2 s, \alpha y)\ dy\ ds \\
&= -\alpha^{-1}\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \nabla h_{(t-s)}(x - y)\mathbb{P}(u_m \otimes u_m)(s, y)\ dy\ ds \\
&= \alpha^{-1}\mathcal{B}(u_m, u_m)(t, x).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Portanto, podemos concluir que u_{m+1} também é invariante pela relação de escala. De fato,

$$\begin{aligned}
u_{m+1}(\alpha^2 t, \alpha x) &= u_1(\alpha^2 t, \alpha x) + \mathcal{B}(u_m, u_m)(\alpha^2 t, \alpha x) \\
&= \alpha^{-1}(u_1(t, x) + \mathcal{B}(u_m, u_m)(t, x)) \\
&= \alpha^{-1} u_{m+1}(t, x),
\end{aligned}$$

isto é, $\alpha u_{m+1}(\alpha^2 t, \alpha x) = u_{m+1}(t, x)$.

Uma vez que a norma em X é invariante pela relação de escala, isto é,

$$\|u_\alpha\|_X = \|u\|_X,\ \forall \alpha > 0,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\|u - u_\alpha\|_X &= \|u - u_m + u_m - u_\alpha\|_X \\
&\leq \|u - u_m\|_X + \|u_m - u_\alpha\|_X \\
&= \|u - u_m\|_X + \|(u_m)_\alpha - u_\alpha\|_X \\
&= \|u - u_m\|_X + \|(u_m - u)_\alpha\|_X
\end{aligned}$$

$$= \quad 2\|u-u_m\|_X.$$

Como $u_m \to u$ em X, quando $m \to \infty$, temos $\|u_m - u\|_X \to 0$, quando $m \to \infty$.

Portanto,

$$u(t,x) = u_\alpha(t,x) = \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x),$$

para todo $t,\ \alpha > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja, a solução u é autosimilar, como queríamos. $\square$

3.4.5 Prova do Teorema 3.4.4

Nesta subseção, temos como objetivo mostrar a estabilidade assintótica das soluções mild que obtivemos no Teorema 3.4.2.

Mostremos primeiramente (3.18). Assumamos que

$$\lim_{t\to+\infty} \|U(t)u_0 - U(t)v_0\|_{p,\lambda} = \lim_{t\to+\infty} \|U(t)(u_0 - v_0)\|_{p,\lambda} = 0$$

e consideremos $u = u(t,x)$ e $v = v(t,x)$ duas soluções mild globais do problema de Navier-Stokes, com dados iniciais $u_0 = u_0(x)$ e $v_0 = v_0(x)$, respectivamente.

Então, tais soluções satisfazem a equação integral (3.3), isto é,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= U(t)u_0(x) + \mathcal{B}(u,u)(t,x) \\ v(t,x) &= U(t)v_0(x) + \mathcal{B}(v,v)(t,x). \end{aligned}$$

Logo, usando a bilinearidade do operador $\mathcal{B}$, segue que

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{p,\lambda} &= \|U(t)u_0 + \mathcal{B}(u,u)(t,\cdot) - U(t)v_0 - \mathcal{B}(v,v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda} \\ &= \|U(t)(u_0 - v_0) + \mathcal{B}(u, u-v)(t,\cdot) + \mathcal{B}(u-v, v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda} \\ &\leq \|U(t)(u_0 - v_0)\|_{p,\lambda} + \|\mathcal{B}(u, u-v)(t,\cdot) + \mathcal{B}(u-v, v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Procedendo como no Lema 3.4.8, temos

$$\begin{aligned} \|B(u-v,v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda} &\leq C \int_0^t s^k \|(u-v)(s,\cdot)\|_{p,\lambda} \|v(s,\cdot)\|_{q,\lambda} s^{-k} (t-s)^{-\frac{n-\lambda}{2r}}\ ds \\ &\leq C\|v\|_X \int_0^t \|(u-v)(s,\cdot)\|_{p,\lambda} s^{-k} (t-s)^{-\frac{n-\lambda}{2r}}\ ds, \end{aligned} \tag{3.41}$$

e, também

$$\begin{aligned}
\|B(u,u-v)\|_{p,\lambda} &\leq C\int_0^t s^k\|u(s,x)\|_{q,\lambda}\|(u-v)(s,x)\|_{p,\lambda}s^{-k}(t-s)^{-\frac{m-\lambda}{2r}}\,ds \\
&\leq C\|u\|_X\int_0^t \|(u-v)(s,x)\|_{p,\lambda}s^{-k}(t-s)^{-\frac{m-\lambda}{2r}}\,ds, \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

em que r é tal que $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ e $k=\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}$.

Pelo Teorema 3.4.2, sabemos que $\|u\|_X \leq 2\varepsilon$ e $\|v\|_X \leq 2\varepsilon$. Então, pelas estimativas (3.41) e (3.42), obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}(u,u-v)(t,\cdot)+\mathcal{B}(u-v,v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda} &\leq \|\mathcal{B}(u,u-v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda}+\|\mathcal{B}(u-v,v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda} \\
&\leq C(\|v\|_X+\|u\|_X)\int_0^t \|(u-v)(s,\cdot)\|_{p,\lambda}s^{-k}(t-s)^{k-1}\,ds \\
&\leq 4C\varepsilon\int_0^t \|(u-v)(s,\cdot)\|_{p,\lambda}s^{-k}(t-s)^{k-1}\,ds \\
&= 4C\varepsilon\int_0^1 \|(u-v)(ts,\cdot)\|_{p,\lambda}s^{-k}(1-s)^{k-1}\,ds,
\end{aligned}$$

sendo $-\frac{n-\lambda}{2r}=k-1$.

Consideremos agora $\mathcal{A}=\limsup\limits_{t\to+\infty}\|(u-v)(ts,\cdot)\|_{p,\lambda}=\lim\limits_{j\in\mathbb{N},j\to+\infty}\sup\limits_{t\geq j}\|(u-v)(ts,\cdot)\|_{p,\lambda}$.

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq j}\|(u-v)(ts,\cdot)\|_{p,\lambda} &= \sup_{t\geq j}\|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{p,\lambda} \\
&\leq \sup_{t\geq 0}\|u(ts,\cdot)\|_{p,\lambda}+\sup_{t\geq 0}\|v(ts,\cdot)\|_{p,\lambda} \\
&\leq \|u\|_X+\|v\|_X \leq 4\varepsilon,
\end{aligned}$$

o Teorema da Convergência Dominada 1.2.6 garante que

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to+\infty}\int_0^1 \|(u-v)(ts,\cdot)\|_{p,\lambda}s^{-k}(1-s)^{k-1}\,ds &\leq \mathcal{A}\int_0^1 s^{-k}(1-s)^{k-1}\,ds \\
&= \mathcal{A}\beta(1-k,k)
\end{aligned}$$

e como já sabemos, a $\beta(1-k,k)$ é finita, pois $1-k,k>0$.

Portanto, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &\leq \limsup_{t\to+\infty}\|U(t)(u_0-v_0)\|_{p,\lambda}+\limsup_{t\to+\infty}\|\mathcal{B}(u,u-v)+\mathcal{B}(u-v,v)\|_{p,\lambda} \\
&\leq \limsup_{t\to+\infty}\|U(t)(u_0-v_0)\|_{p,\lambda}+4C\varepsilon\mathcal{A}. \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

Note que a constante C acima pode ser tomada igual a constante K no Teorema 3.4.2 e, portanto, temos $4K\varepsilon < 1$. Então

$$\mathcal{A} = \limsup_{t\to+\infty} \|(u-v)(ts,\cdot)\|_{p,\lambda} = 0,$$

isto é, $\lim\limits_{t\to+\infty} \|u(t,x) - v(t,x)\|_{p,\lambda} = 0$.

Reciprocamente, mostraremos que se $\lim\limits_{t\to+\infty} \|u(t,x) - v(t,x)\|_{p,\lambda} = 0$ então $\lim\limits_{t\to+\infty} \|U(t)u_0 - U(t)v_0\|_{p,\lambda} = 0$.

Observe que, podemos reescrever (3.40) e obter

$$\begin{aligned} \|U(t)(u_0 - v_0)(t,\cdot)\|_{p,\lambda} &= \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot) - [\mathcal{B}(u,u-v)(t,\cdot) + \mathcal{B}(u-v,v)(t,\cdot)]\|_{p,\lambda} \\ &\leq \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{p,\lambda} + \|\mathcal{B}(u,u-v)(t,\cdot) + \mathcal{B}(u-v,v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Por hipótese, $\lim\limits_{t\to+\infty} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{p,\lambda} = 0$, então, aplicando o $\limsup\limits_{t\to+\infty}$ em (3.44) segue que

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to+\infty} \|U(t)(u_0 - v_0)\|_{p,\lambda} &\leq \limsup_{t\to\infty} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{p,\lambda} \\ &\quad + \limsup_{t\to+\infty} \|\mathcal{B}(u,u-v)(t,\cdot) + \mathcal{B}(u-v,v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda} \\ &\leq 0 + \limsup_{t\to+\infty} \|\mathcal{B}(u,u-v)(t,\cdot) + \mathcal{B}(u-v,v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda} \\ &= \limsup_{t\to+\infty} \|\mathcal{B}(u,u-v)(t,\cdot) + \mathcal{B}(u-v,v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda}. \end{aligned}$$

Agora, por (3.43), vale que

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to+\infty} \|\mathcal{B}(u,u-v)(t,\cdot) + \mathcal{B}(u-v,v)(t,\cdot)\|_{p,\lambda} &\leq 4K\varepsilon\mathcal{A} \\ &= 4K\varepsilon \limsup_{t\to\infty} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{p,\lambda} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 \leq \limsup_{t\to+\infty} \|U(t)(u_0 - v_0)\|_{p,\lambda} \leq 0$$

e então,

$$\lim_{t\to+\infty} \|U(t)u_0 - U(t)v_0\|_{p,\lambda} = 0,$$

como desejávamos.

A prova de (3.19) segue por um raciocínio similar e, por esta razão, será omitida. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] de ALMEIDA, M. F., *Existência e comportamento assintótico de soluções em espaços de Morrey para equações de Boussinesq no* $\mathbb{R}^n$ *e de Navier-Stokes no semi-plano* $\mathbb{R}^n_+$. 120f. Teste de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife. (2011). 9-20.

[2] BARRAZA, O., *Self similar solutions in weak* L^p*-spaces of the Navier-Stokes equations.* Rev. Mat. Iber., 12 (1996), no. 2, 411-439.

[3] BARTLE, R. G., *The elements of Integration and Lebesgue Measure.* Wiley Interscience, New York (1995). 44-45

[4] CANNONE, M., *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes.* Diderot Editeur (1995).

[5] CANNONE, M.; KARCH, G., *Smooth or singular solutions to the Navier- Stokes system?* J. Diff. Equations, 197 (2004), 247-274.

[6] CANNONE, M. PLANCHON, F., *A Self-similar solutions for Navier-Stokes equations* $\mathbb{R}^3$. Comm. Partial Differential Equations, 21 (1996), no. 1-2, 179-193.

[7] FOLLAND, G. B., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* Wiley, New York, 2 (1999).

[8] GIGA, Y., *Solutions for semilinear parabolic equations in* L^p *and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system.* J. Diff. Equations, 61 (1986), 186-212.

[9] GRAFAKOS, L., *Modern Fourier Analysis* Grad. Texts in Math., New York, (2009). 2-4.

[10] HOUNIE, J., *Teoria Elementar das Distribuições.* IMPA, Rio de Janeiro - RJ, (1968).

[11] KATO, T., *Strong* L^p*-Solutions of the Navier-Stokes Equations in* $\mathbb{R}^m$*, with aplications to Weak Solutions.* Math, Z., 187 (1984), 471-480.

[12] KATO, T., *Strong Solutions of the Navier-Stokes Equation in Morrey Spaces.* Bol. Soc. Bras. Mat., 22 (1992). 127-155.

[13] KATO, T.; FUJITA, H., *On the nonstationary Navier-Stokes system.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 32 (1962), 243-260.

[14] KOCH, H., *Well-posedness for the Navier-Stokes equations.* Advanced in Math., 157 (2001), 22-35.

[15] KOZONO, H.; YAMAZAKI, M., *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equations with distributions in new function spaces as initial data.* Comm. P.D.E., 19 (1994), no. 5-6, 959-1014.

[16] KOZONO, H.; YAMAZAKI, M., *The stability of small stationary solutions in Morrey spaces of the Navier-Stokes equation.* Indiana Univ. Math., 44 (1995), no. 4, 1307-1336.

[17] LAWRENCE, C. E., *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, Vol 19, (1998). 626-631.

[18] LEMARIÉ-RIEUSSET, P., *Recent Developments in the Navier-Stokes Problem.* Chapman Hall/CRC Press, Boca Raton, (2002).

[19] LERAY, J., *Essai sur le mouvement d'un uide visqueux emplissant l'espace.* Acta Math., 63 (1934). 193-248.

[20] MEDEIROS, L.A.; MIRANDA, M. M., *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elípticos não homogêneos* 151p. UFRJ. IM, Rio de Janeiro - RJ, (2000).

[21] MIYAKAWA, T., *On Morrey spaces of measures: basic properties and potential estimates.* Hiroshima Math J., 20 (1990). 213-222

[22] PICK L.; KUFNER A.; John O.; FUCÍK S., *Function Spaces.* De Gruyter, Vol. 1, (1977). 173-180.

[23] STEIN, E.M., *Singular Integrals and differentiability properties of funcctions.* No 30. Priceton Univ. Press, Princeton, N.J., xiv+290 pp, (1970).

[24] STEIN, E. M.; WEISS, G., *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton University Press, Princeton, N.J., (1971).

[25] STEIN, E. M., *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. With the assistance of Timothy S. Murphy..* Princeton Mathematical Series, 43. Monographs

in Harmonic Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, N.J. xiv+695 pp. ISBN: 0-691-03216-5, (1993).

[26] TAYLOR, E. M., *Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes equations and other evolution equations.* Comm. P.D.E., 17 (1992), 1407-1456.

[27] WEISSLER, F., *The Navier-Stokes initial value problem in* L^p Arch. Rational Mech. Anal., 74 (1981), 219-230.

[28] YAMAZAKI, M., *The Navier-Stokes equations in the weak-*L^n *spaces with time-dependent external force.* Math. Ann., 317 (2000), 635-775.

[29] ZORKO, C. T., *Morrey space* Proceedings of the American Math. Society, Vol 98, (1986)