



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

BÁRBARA PINTO CARNEIRO

**ANÁLISE DE ESCALA NO MAPA PADRÃO
DISSIPATIVO DESCONTÍNUO**

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

São Paulo - 2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “Júlio de Mesquita Filho”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS - CAMPUS DE
RIO CLARO

BÁRBARA PINTO CARNEIRO

ANÁLISE DE ESCALA NO MAPA PADRÃO DISSIPATIVO DESCONTÍNUO

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exa-
tas do Campus de Rio Claro, da Universi-
dade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita
Filho”, como parte dos requisitos para ob-
tenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira

Rio Claro - SP
2018

517.39 Carneiro, Bárbara Pinto
C289a Análise de escala no mapa padrão dissipativo descontínuo
/ Bárbara Pinto Carneiro. - Rio Claro, 2018
54 f. : il., figs., gráfs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Juliano Antônio de Oliveira

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Mapa padrão. 3.
Função de descontinuidade. 4. Expoentes críticos. 5. Lei de
escala. I. Título.

BÁRBARA PINTO CARNEIRO

ANÁLISE DE ESCALA NO MAPA PADRÃO DISSIPATIVO DESCONTÍNUO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira
Prof. Dr. Rene Orlando Metrano Torricos
Profª. Dra. Priscilla Andressa de Souza Silva

Resultado: APROVADA

Rio Claro, SP 09 de fevereiro de 2018

“Não deixe que a saudade sufoque, que a rotina acomode, que o medo impeça de tentar. Desconfie do destino e acredite em você. Gaste mais horas realizando que sonhando, fazendo que planejando, vivendo que esperando porque, embora quem quase morre esteja vivo, quem quase vive já morreu.”

Sarah Westphal

Agradecimentos

Agradeço a minha família, meu pai, minha mãe e minha irmã, que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e me incentivando a crescer e nunca desistir dos meus sonhos, mesmo nos momentos mais difíceis até naqueles em que quis desistir, me mostraram sempre a importância de continuar.

Agradeço ao meu orientador Juliano Antônio de Oliveira, por ter aceitado me orientar e a enfrentar esse desafio de fazer um mestrado comigo, e que sempre me ajudou e “puxou” minha orelha, quando necessário, e assim me fez crescer muito como pesquisadora, mas, além disso me ajudou a crescer como pessoa, acreditando em mim e na minha capacidade de levar esse trabalho adiante.

Um agradecimento em especial ao meu marido Francisco Bauke, que me acompanhou em todos os momentos, me ajudando a superar minhas dificuldades e minhas teimosias, me apoiando sempre, em momentos difíceis, e segurando minha mão para enfrentarmos juntos todas as dificuldades.

Agradeço também as minhas amigas Rivania Teixeira e Amanda Prina, que em muitas conversas me fizeram refletir sobre minhas decisões e me ajudaram na decisão de continuar o mestrado, mas além disso fazem a minha vida cada dia melhor.

Agradeço enormemente ao meu amigo André Livorati, que me ajudou a solucionar muito problemas sejam eles pessoais ou acadêmicos, e sempre esteve presente para tomarmos um copo de cerveja.

Não tenho palavras para descrever o agradecimento que eu tenho pela minha amiga Marina Heleno, minha eterna convivente, que apesar de estar longe me ouve e me ajuda a ser uma pessoa melhor, e a refletir sobre a vida.

Gostaria de agradecer aos meus amigos de laboratório Hans Muller, Diogo Costa e Matheus Hansen, por me ajudarem. Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Edson Denis Leonel por ceder o laboratório e pelos conselhos sobre a vida acadêmica.

Um grande agradecimento as minhas amigas, Ana Laura Boscolo, Ana Laura Curcio, Tereza Ramponi, Bruna Patrocínio, meu amigo Alisson Marques pelas manhãs, tardes e noites de estudo e de muita conversa.

Gostaria de agradecer a UNESP - Rio Claro, pelo ambiente criativo amigável que proporciona aos seus graduandos e pós-graduandos, principalmente todos do Departamento de Física, pois nesses 7 anos de faculdade, sendo 5 de graduação e 2 de pós-graduação, sempre estiveram a disposição para ajudar na minha formação.

Por fim, mas não menos importante, gostaria de agradecer a CAPES, por me ajudar financeiramente nesse último ano.

Resumo

Neste trabalho consideramos o mapa padrão descrito nas variáveis momento e ângulo, a partir do movimento de um rotor pulsado. Uma vez definido o modelo para o caso conservativo, construímos o espaço de fase para analisar a dinâmica do sistema. Observamos um mar caótico ao redor de ilhas periódicas e limitado por um conjunto de curvas invariantes *spanning*. Para caracterizar o caos, usamos os expoentes de Lyapunov. Estendemos os nossos estudos introduzindo dissipação no sistema. Dada a escolha dos parâmetros de controle, observamos que a estrutura mista observada no sistema conservativo decai exponencialmente para atratores caóticos. Os expoentes de Lyapunov foram usados para caracterizar os atratores caóticos. Introduzimos uma função de descontinuidade no sistema para investigar a raiz quadrada da variável ação quadrática média ao longo dos atratores caóticos. Uma lei de escala foi estabelecida e os expoentes de escala são encontrados numericamente. Finalmente, discutimos uma abordagem analítica para a variável ação quadrática média no mapeamento padrão dissipativo descontínuo.

Palavras Chaves: Mapa Padrão, Função de Descontinuidade, Expoentes Críticos, Lei de Escala.

Abstract

In this work we consider the standard map described in the momentum and angle variables from the movement of a kicked rotor. Once the model for the conservative case is defined, we build the phase space to analyze the dynamics of the conservative system. We observe a chaotic sea surrounding periodic islands and limited by a set of invariant spanning curves. To characterize chaos we use the Lyapunov exponents. We extend our studies introducing dissipation in the system. Given the choice of the control parameters we observe that the mixed structure observed in the conservative case decays exponentially for large chaotic attractors. The Lyapunov exponents were used to characterize the chaotic attractors. We introduce a discontinuity function in the system to investigate the root mean square of the quadratic action variable along the chaotic attractors. A scaling law was established and the scaling exponents are found numerically. Finally an analytical approach for the quadratic mean action variable in the dissipative discontinuous standard mapping is discussed.

Key Words: Standard Map, Discontinuous Function, Critical Exponents, Scaling Law.

SUMÁRIO

1	Introdução	9
2	O Mapa Padrão	12
2.1	O Modelo Físico	12
2.2	O Mapa Padrão Conservativo	16
2.2.1	Os Expoentes de Lyapunov e o Cálculo da Matriz Jacobiana para o caso Conservativo	18
2.3	O Mapa Padrão Dissipativo	20
2.3.1	Os Expoentes de Lyapunov e o Cálculo da Matriz Jacobiana para o caso Dissipativo	22
2.3.2	O Decaimento de Órbitas para os Atratores	22
3	O Mapa Padrão Dissipativo Descontínuo	26
3.1	O Mapa	26
3.2	O Expoente de Lyapunov e o Cálculo da Matriz Jacobiana	27
3.3	O conceito da Raiz Quadrada da Média I_{RMS}	28
3.4	Hipóteses de Escala	30
4	Abordagem Analítica para Obter os Expoentes Críticos	36
4.1	O Comportamento de I_{RMS} para o Mapa Padrão Dissipativo Descontínuo . . .	36
4.1.1	Primeiro Caso - Sistema Conservativo ($\gamma = 0$)	37
4.1.2	Segundo Caso - Sistema Dissipativo ($\gamma \neq 0$)	40
4.1.3	Evolução Dinâmica	45
4.1.4	Obtenção do <i>Crossover</i> n_x	46
4.2	Decaimento	47
5	Conclusões e Perspectivas	50

Lista de Figuras

2.1	Esquema do sistema do Rotor Pulsado. Figura retirada da referencia [3].	13
2.2	Espaço de Fase Para o Mapa Padrão Conservativo para diferentes valores do parâmetro de controle k . Em (a) $k = 0, 5$; (b) $k = 1, 0$, (c) $k = 1, 5$, (d) $k = 2, 0$	17
2.3	Expoente de Lyapunov. Trajetória das condições iniciais. Figura extraída da referencia [20].	19
2.4	Expoentes de Lyapunov para o Mapa Padrão Conservativo (2.32) considerando $k = 2$ e condições iniciais diferentes.	20
2.5	Espaço de Fase Para do Mapa Padrão Dissipativo para $k = 10^3$ e $\gamma = 10^{-4}$	21
2.6	Expoentes de Lyapunov para o Mapa Padrão Dissipativo considerando quatro condições iniciais diferentes e $k = 10^3$ e $\gamma = 10^{-4}$. Em (a) expoentes positivos e (b) expoentes negativos. A soma dos expoentes positivo e negativo é $ \overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2 \approx 10^{-4}$	23
2.7	Decaimento para o atrator caótico: (a) o comportamento de $I \times n$ para valores de γ e condições iniciais diferentes e $k = 10^3$. (b) sobreposição de todas as curvas para uma única curva universal.	25
3.1	Espaço de fase para o mapa padrão dissipativo descontínuo, considerando os parâmetros de controle $k = 10^3$ e $\gamma = 10^{-3}$	27
3.2	Expoente de Lyapunov para o Mapa Padrão Dissipativo Descontínuo com diferentes condições iniciais (conforme legenda). Em (a) expoentes positivos e em (b) expoentes negativos, considerando os parâmetros de controle $\gamma = 10^{-3}$ e $k = 10^3$	29
3.3	Comportamento de I_{RMS} x n para valores diferentes dos parâmetros de controle.	29
3.4	Comportamento de $I_{RMS_{SAT}}$ x k com $\gamma = 0,0009$. Um ajuste em lei de potência fornece $\alpha_1 = 1,002(1) \cong 1$	33
3.5	Comportamento de $I_{RMS_{SAT}}$ x γ com $k = 10^3$. Um ajuste em lei de potência fornece $\alpha_2 = -0,4969(3) \cong -0,5$	34
3.6	Comportamento de n_x x k com $\gamma = 0,0009$. Um ajuste em lei de potência fornece $z_1 = -0,01(1) \cong 0$	34
3.7	Comportamento de n_x x γ com $k = 10^3$. Um ajuste em lei de potência fornece $z_2 = -0,9939(7) \cong -1$	35

3.8	Sobreposição de todas as curvas mostrada na figura (3.3) em uma única curva universal.	35
4.1	Gráfico de I_{RMS} x n para o Mapa Padrão Conservativo Descontínuo com os parâmetros de controle $k = 1$ e $\gamma = 0$. Um ajuste em lei de potência fornece $\beta = 0,498(8) \cong 1/2$	39
4.2	Sobreposição do resultado analítico obtido na equação (4.51) nas curvas de I_{RMS} mostrada na figura(3.3).	44
4.3	Gráfico de I_{RMS} x n para o mapa padrão dissipativo descontínuo com parâmetros de controle diferentes. Um ajuste em lei de potencia fornece $\beta \cong 1/2$	46
4.4	Decaimento para o atrator caótico considerando valores diferentes dos parâmetros de controle (conforme legenda). Em (a) o comportamento de I x n para diferentes condições iniciais e $k = 10$. (b) sobreposição de todas as curvas para uma única curva universal.	49

Capítulo 1

Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos vem despertando o interesse de vários autores nas últimas décadas. Trabalhos com esse tipo de sistema começaram a ter um maior destaque após o matemático francês *Henri Poincaré*, no final do século XVIII e início do XIX, demonstrar a estabilidade do movimento dos corpos do Sistema Solar [1, 2, 3]. O sistema de três corpos estudado, mostrou movimentos complexos e instáveis [4, 5].

Em 1961, Edward Lorenz, meteorologista americano, descobre acidentalmente as consequências do caos determinístico. Lorenz trabalhava em uma área cujas equações que descreviam a atmosfera eram não lineares. Para resolver o problema do tempo computacional que inicialmente demorava muitas horas, ele começou a evolução de um ponto intermediário da antiga solução, entretanto os dados fornecidos por ele tinham três casas decimais, mas os valores computacionais tinham seis casas [1]. Com essa pequena mudança, os valores obtidos com os dados com poucas casas decimais ocasionaram em resultados completamente diferentes dos resultados obtidos com os números completos.

Com o desenvolvimento computacional, as simulações numéricas ficaram mais acessíveis, e investigar detalhadamente as dinâmicas de sistemas não lineares ficou mais abordável. Logo, os mapeamentos discretos acabaram se tornando cada vez mais possíveis. A técnica de resolver problemas por meio de seguidas auto realimentações, isto é, necessitando inicialmente apenas de um par de condições iniciais, são conhecidas como *mapas* [1]. Tais mapeamentos são parametrizados utilizando parâmetros de controle que desempenham um papel fundamental na evolução de um sistema, de modo que, podemos observar a ocorrência de caos, sensibilidade às condições iniciais e estabilidade. O comportamento caótico segue algumas características como: a imprevisibilidade, o comportamento aperiódico e não variância de escala [6].

Um dos mapeamentos mais estudados na literatura é o mapa Taylor-Chirikov [7, 8], também conhecido como mapa padrão. Esse mapeamento pode ser descrito pelas variáveis ação e ângulo e por um parâmetro k que controla a não linearidade do sistema. Esse mapa pode descrever o comportamento de alguns sistemas físicos, tais como: do movimento de um rotor pulsado ou do movimento do pêndulo simples, ambos com pulsos periódicos.

O espaço de fase, isto é, o conjunto de todos os estados possíveis do sistema [9], que

ilustra o comportamento do sistema dinâmico, pode apresentar uma estrutura mista composta por um mar de caos envolta de ilhas periódicas e limitado por curvas invariantes *spanning* [9]. Ilhas periódicas são estruturas que se repetem periodicamente e as curvas invariantes são as curvas que limitam o tamanho do mar de caos no espaço de fase.

No mapa padrão, a escolha do parâmetro k , determina no espaço de fase a transição de caos local, caos confinado por curvas invariantes do tipo *spanning*, para caos global, quando não se observa mais as curvas invariantes *spanning* e uma partícula na região de caos difunde-se sem limites [9], essa transição pode ser observada após o valor de $k = 0,9716....$ Um estudo detalhado das propriedades dinâmicas no mapa padrão será feita no Capítulo 2.

Uma consequência imediata observada ao introduzir dissipação em um sistema é que a dinâmica do modelo é drasticamente afetada. De certa forma, podemos dizer que dissipação implica que a área do espaço de fase não é conservada sob o tempo de evolução. Existem várias maneiras de introduzir dissipação em um sistema [10, 11, 12, 13], todavia uma delas pode ser feita introduzindo forças de amortecimento, como o movimento relativo de uma partícula dentro de um fluido com um gás [10, 14]. Neste caso, o sistema não conserva área ou volume no espaço de fase e a estrutura mista vista no espaço de fase do mapa conservativo é destruída. Nesse momento é possível observar diferentes comportamentos à medida que o parâmetro de amortecimento é variado.

Dentre esses comportamentos temos, o efeitos de transiente que consiste no tempo que a partícula fica vagando até atingir o equilíbrio [15], pontos fixos atrativos que são ponto de equilíbrio estável [13, 16], órbitas periódicas que são o conjunto de todos os pontos percorrido pelo sistema no espaço de fase [14] e atratores caóticos. Atratores caóticos são atratores que têm dependência sensível às condições iniciais. Atrator é um conjunto invariante para o qual órbitas próximas convergem depois de um longo tempo. [2, 6, 17, 18].

A proposta deste trabalho é investigar algumas propriedades dinâmicas considerando o mapa padrão. Definido o mapeamento, o nosso foco será construir o espaço de fase para analisar o comportamento do sistema dinâmico considerando valores diferentes dos parâmetros de controle k e γ , onde k é um parâmetro de não linearidade e γ é um parâmetro de dissipação. Se $\gamma = 0$ recuperamos o modelo conservativo, para $\gamma \neq 0$ temos o modelo dissipativo.

No Capítulo 2, estudamos as propriedades dinâmicas para o mapa padrão conservativo e dissipativo. Inicialmente obteremos as equações para o mapa padrão conservativo, a partir da Hamiltoniana para o problema do Rotor Pulsado. Para o problema conservativo, construímos o espaço de fase e depois determinamos os expoentes de Lyapunov para caracterizar o caos. Posteriormente estudamos o caso dissipativo, construímos o espaço de fase, e determinamos os expoentes de Lyapunov. Mostramos também para o caso dissipativo que as estruturas mistas vistas no espaço de fase do modelo conservativo, quando adicionado dissipação, decaem em atratores caóticos, dependendo da escolha dos parâmetros de controle.

No capítulo 3, estudamos o mapa padrão dissipativo descontínuo. Iniciamos com o espaço de fase, depois calculamos sua matriz Jacobiana, determinamos os expoentes

de Lyapunov, e mostramos o decaimento das estruturas mistas em um atrator caótico. Ainda nesse capítulo, iremos calcular numericamente os expoentes críticos. Os expoentes críticos são aqueles que definem uma classe de universalidade do mapa padrão dissipativo descontínuo. Iremos também propor algumas hipóteses de escala, na tentativa de colapsar todas as curvas da raiz quadrada da média (I_{RMS}) em uma única curva universal. Esse colapso será comprovado, tanto analiticamente como numericamente.

Para complementar nossos estudos, no Capítulo 4, encontramos os valores dos expoentes críticos analiticamente. Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos as considerações finais e as perspectivas de continuidade.

Capítulo 2

O Mapa Padrão

Este capítulo é dedicado a uma revisão bibliográfica para determinar as equações do mapa padrão [2, 3], e ao estudo de algumas de suas propriedades. Iniciamos com o cálculo da Hamiltoniana para o sistema do rotor pulsado, assim encontraremos as equações do mapa padrão conservativo. Após obter essas equações, iremos discutir algumas propriedades deste mapa. Posteriormente faremos um estudo do mapa padrão dissipativo e algumas de suas propriedades estatísticas.

2.1 O Modelo Físico

Algumas das vantagens de se representar um sistema físico por mapas, isto é, representá-lo por equações discretas ao invés do uso de equações diferenciais, são o custo computacional e a precisão numérica [2]. A dinâmica de um sistema Hamiltoniano é determinada por uma única função, a Hamiltoniana, e essa função descreve seu comportamento. O estado do sistema é caracterizado pelo seu “momentum”, $\vec{p}$, e sua “posição”, $\vec{x}$. As equações de movimento, também chamadas de equações de Hamilton, determinam a trajetória $(\vec{p}(t), \vec{x}(t))$ em uma região chamada de espaço de fase, que tem dimensão $2N$, onde N é o número de graus de liberdade [3].

Podemos chegar ao mapa padrão a partir de alguns modelos físicos, como por exemplo: o pêndulo forçado, o rotor pulsado, uma partícula em um campo eletromagnético, entre outros [19]. Neste trabalho usaremos o exemplo do Rotor Pulsado, (“*kicked rotor*”) [3].

O Rotor Pulsado é constituído por uma barra rígida de comprimento L , com uma das extremidades fixa em um pivô sem atrito. A outra extremidade está sujeita a uma força impulsiva periódica vertical de intensidade $\tilde{k}/L$ e período τ . Essa barra tem momento de inércia I e não há ação da gravidade sobre o sistema. Esse modelo pode ser visto na figura (2.1).

Com essas informações conseguimos expressar a força como sendo:

$$\vec{F}_{(r,\phi,t)} = \frac{\tilde{k}}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau) \hat{j}. \quad (2.1)$$

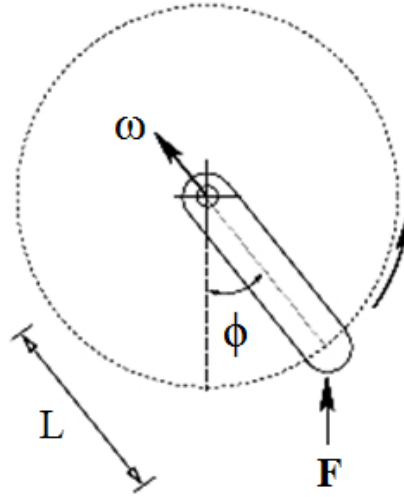


Figura 2.1: Esquema do sistema do Rotor Pulsado. Figura retirada da referencia [3].

Pela simetria do sistema, podemos expressar essa força em coordenadas polares, logo:

$$\vec{F}_{(r,\phi,t)} = \frac{\tilde{k}}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau) (\hat{\phi} \text{sen}(\phi) - \hat{r} \cos(\phi)). \quad (2.2)$$

A somatória é sobre todos os pulsos, e a função de Dirac, $\delta(t - n\tau)$, ocorre pois como os pulsos são periódicos, temos que para $t = n\tau$, temos um pulso, ($\vec{F} \neq \vec{0}$), e para qualquer outro tempo, $t \neq \tau$, temos $\vec{F} = \vec{0}$. Assim, a energia potencial, energia relacionada à distância, pode ser dada como:

$$U(\vec{r}) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (2.3)$$

$$U(\vec{r}) = \tilde{k} \cos(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau). \quad (2.4)$$

A energia cinética, energia relacionada à velocidade, de uma barra em rotação é dada por:

$$K = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2.5)$$

Sabendo que $p = I\omega$, então a energia cinética pode ser dada por:

$$K = \frac{p^2}{2I}, \quad (2.6)$$

onde, K é a energia cinética, ω é a velocidade angular, I momento de inércia, p o momento generalizado e U a energia potencial. A partir desses resultados, podemos escrever a Hamiltoniana, que é dada por:

$$\mathcal{H}_{(p,\phi,t)} = \frac{p^2}{2I} + \tilde{k} \cos(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau) , \quad (2.7)$$

Com essa Hamiltoniana, vemos que $\mathcal{H}$ é periódica no tempo e em ϕ , isto é, $\mathcal{H}_{(p,\phi+2\pi,t)} = \mathcal{H}_{(p,\phi,t)}$, logo ela é conservativa. As equações de movimento são dadas pelas seguintes derivadas:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} , \quad (2.8)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} . \quad (2.9)$$

Portanto, para o nosso caso em estudo, temos

$$\dot{\phi} = \frac{p}{I} , \quad (2.10)$$

$$\dot{p} = -\tilde{k} \sin(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau) . \quad (2.11)$$

Podemos concluir das equações de movimento que o momento, p , é constante entre quaisquer dois pulsos e varia descontinuamente no pulso. Já a variável ϕ , varia linearmente com o tempo entre quaisquer dois pulsos. Como a Hamiltoniana depende periodicamente do tempo, a superfície de seção conveniente é $t_n = t_0 + n\tau$, onde t_0 é uma variável constante positiva entre 0 e τ [3].

A fim de resolver essas equações de movimento, teremos que fazer algumas considerações como:

$$\phi_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t = n\tau - \varepsilon) , \quad (2.12)$$

$$p_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(t = n\tau - \varepsilon) , \quad (2.13)$$

onde ε é a variável de discretização, ϕ_n e p_n são os valores das variáveis do sistema no instante imediatamente anterior ao n -ésimo pulso. Analogamente, definimos os valores das variáveis no instante de tempo imediatamente posterior ao n -ésimo pulso, então outra consideração é que:

$$\phi_n^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t = n\tau + \varepsilon) , \quad (2.14)$$

$$p_n^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(t = n\tau + \varepsilon) . \quad (2.15)$$

Fazendo uma última consideração:

$$\phi_{(n+1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t = (n+1)\tau + \varepsilon) , \quad (2.16)$$

$$p_{(n+1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(t = (n+1)\tau + \varepsilon). \quad (2.17)$$

Com essas considerações, poderemos conhecer o estado do sistema em qualquer ponto. Agora, para resolver as integrais, precisaremos admitir dois intervalos de tempo diferentes. Para uma primeira solução das integrais, consideramos o primeiro intervalo sendo o intervalo entre dois pulsos, isto é, $(n\tau + \varepsilon < t < (n+1)\tau - \varepsilon)$. Logo:

$$\dot{p}_n = \frac{dp_n}{dt} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{p(n\tau+\varepsilon)}^{p((n+1)\tau-\varepsilon)} dp_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{p(n\tau+\varepsilon)}^{p((n+1)\tau-\varepsilon)} [\tilde{k} \text{sen}(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau)] dt , \quad (2.18)$$

$$\dot{\phi}_n = \frac{d\phi_n}{dt} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi(n\tau+\varepsilon)}^{\phi((n+1)\tau-\varepsilon)} d\phi_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi(n\tau+\varepsilon)}^{\phi((n+1)\tau-\varepsilon)} \frac{p}{I} dt . \quad (2.19)$$

Resolvendo as integrais, equações (2.18) e (2.19), teremos os seguintes resultados:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [p((n+1)\tau - \varepsilon) - p(n\tau + \varepsilon)] = 0 , \quad (2.20)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\phi((n+1)\tau - \varepsilon) - \phi(n\tau + \varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{p(n\tau + \varepsilon)}{I} (\tau - 2\varepsilon) \right] . \quad (2.21)$$

Aplicando o limite de ε tendendo a zero, $(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0})$, e substituindo os resultados pelas considerações que fizemos anteriormente, equações (2.12) a (2.17), chegaremos nas seguintes equações:

$$p_{n+1} = p_n^* , \quad (2.22)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n^* + \frac{p_n^*}{I} \tau . \quad (2.23)$$

Para a segunda solução das integrais, admitiremos o segundo intervalo, sendo o intervalo entre um pulso, isto é, $((n\tau - \varepsilon) < t < (n\tau + \varepsilon))$. Agora as integrais serão:

$$\dot{p}_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{p(n\tau-\varepsilon)}^{p(n\tau+\varepsilon)} dp_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{p(n\tau-\varepsilon)}^{p(n\tau+\varepsilon)} [\tilde{k} \text{sen}(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau)] dt \quad (2.24)$$

$$\dot{\phi}_n = \frac{d\phi_n}{dt} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi(n\tau-\varepsilon)}^{\phi(n\tau+\varepsilon)} d\phi_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi(n\tau-\varepsilon)}^{\phi(n\tau+\varepsilon)} \frac{p}{I} dt \quad (2.25)$$

Integrando as equações (2.24) e (2.25), obtemos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [p(n\tau + \varepsilon) - p(n\tau - \varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\tilde{k} \text{sen}(\phi)(n\tau - \varepsilon) \right] , \quad (2.26)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\phi(n\tau + \varepsilon) - \phi(n\tau - \varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{p(n\tau - \varepsilon)}{I} (2\varepsilon) \right] . \quad (2.27)$$

Aplicando novamente o limite de ε tendendo a zero, ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$), e substituindo os resultados pelas considerações feitas, teremos:

$$p_n^* = p_n + \tilde{k} \text{sen}(\phi_n) . \quad (2.28)$$

$$\phi_n^* = \phi_n , \quad (2.29)$$

Comparando as equações (2.22) e (2.23) com as equações (2.28) e (2.29), obtemos:

$$p_{n+1} = p_n + \tilde{k} \text{sen}(\phi_n) . \quad (2.30)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{\tau}{I} p_{n+1} \quad [\text{mod} 2\pi] , \quad (2.31)$$

Entretanto precisamos deixar o sistema adimensional, e para isso, multiplicamos as equações por τ/I , isso nos dá:

$$\frac{\tau}{I} p_{n+1} = \frac{\tau}{I} p_n + \frac{\tau}{I} \tilde{k} \text{sen}(\phi_n) , \quad (2.32)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{\tau}{I} p_{n+1} \quad [\text{mod} 2\pi] . \quad (2.33)$$

Mudando as variáveis, $\frac{\tau}{I} p \rightarrow I$ e $\frac{\tau}{I} \tilde{k} \rightarrow k$, chegaremos no seguinte mapeamento:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + k \text{sen}(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \quad [\text{mod} 2\pi] \end{cases} \quad (2.34)$$

Esse par de equações forma o conhecido mapa bidimensional que é o mapa padrão ou mapa de Chirikov - Taylor [3, 6].

2.2 O Mapa Padrão Conservativo

O mapa padrão conservativo mostrado na equação (2.34), ou mapa de *Chirikov - Taylor*, é um modelo muito utilizado no estudo da transição do movimento regular para o caótico. Este mapa além de ser capaz de modelar sistemas reais ele abre caminho para o estudo de outros casos, como o dissipativo e o descontínuo. Um exemplo de aplicação é para descrever

localmente a dinâmica de sistemas realísticos que tem como características a coexistência entre estados regulares e caóticos.

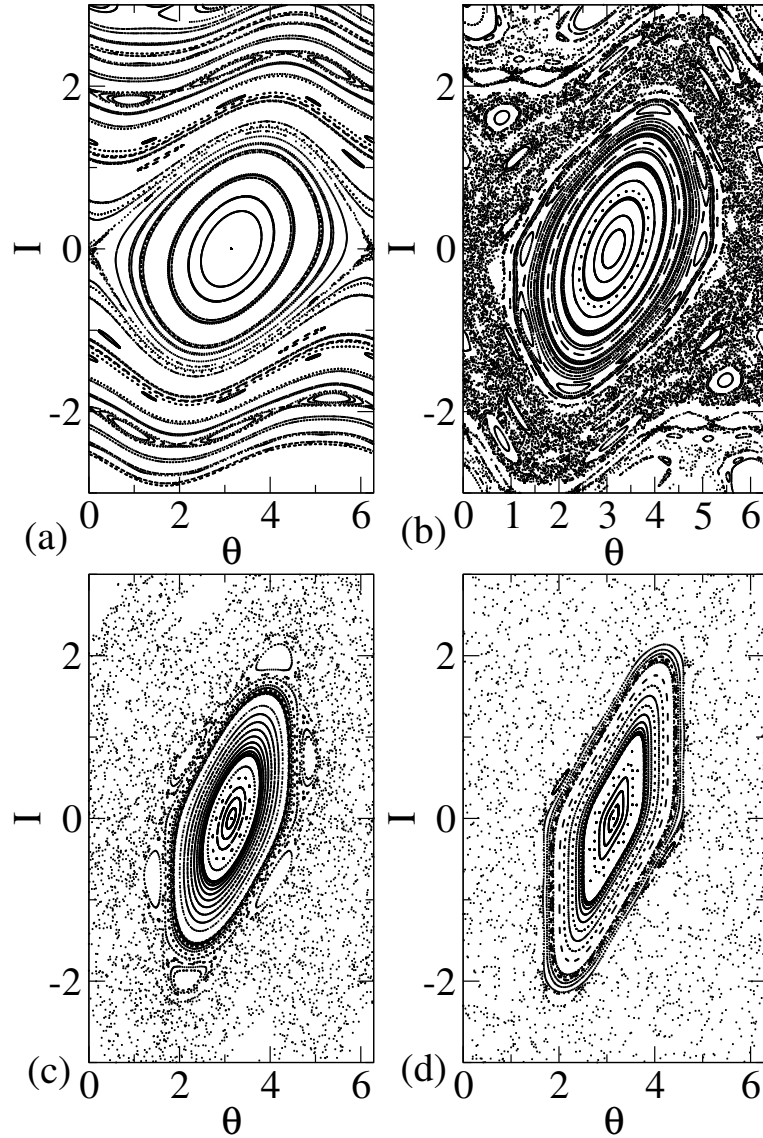


Figura 2.2: Espaço de Fase Para o Mapa Padrão Conservativo para diferentes valores do parâmetro de controle k . Em (a) $k = 0, 5$; (b) $k = 1, 0$, (c) $k = 1, 5$, (d) $k = 2, 0$.

A partir do mapa (2.34) conseguimos uma descrição completa do sistema, deste modo, dadas as condições iniciais θ_0 e I_0 , podemos obter os valores de θ_n e I_n para todos os valores de n , portanto, poderíamos também conseguir os valores de $\theta(t)$ e $I(t)$ para todos os instantes de tempo.

Quando $k = 0$ temos que o sistema é integrável. Um sistema é integrável quando o número de constantes do movimento é o mesmo que o número de graus de liberdade do sistema [9], logo os colchetes de Poisson devem ser zero. Enquanto que para $k \neq 0$ o sistema se torna não integrável, isto é, existe uma perturbação, sendo assim um sistema de transição de integrabilidade para não integrabilidade.

Quando $k > 0$, dependendo das condições iniciais, o sistema apresenta regimes

dinâmicos como caos, curvas invariantes tipo *spanning* e ilhas de estabilidade. A figura (2.2) mostra o espaço de fase do mapa padrão conservativo, equação (2.34), considerando valores de k diferentes (conforme mostra legenda). Pela figura (2.2), as curvas regulares são formadas por curvas invariantes, conhecidas também como KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), enquanto que as regiões caóticas são formadas por trajetórias que apresentam comportamento irregulares e podem gastar eventualmente muito tempo nas bordas das regiões regulares [9]. A transição de caos local para caos global ocorre para um valor específico de k , sendo ele dado por: $k_{critico} = 0,9716$. Deste valor em diante, não é possível mais observar as curvas invariantes do tipo *spanning*, observando apenas caos e ilhas periódicas.

2.2.1 Os Expoentes de Lyapunov e o Cálculo da Matriz Jacobiana para o caso Conservativo

O principal sinal de existência de caos em sistemas não lineares é a sensibilidade das condições iniciais. Se duas trajetórias com condições iniciais muito próximas divergirem uma da outra exponencialmente, podemos caracterizar caos no sistema. Por exemplo, no caso dissipativo, mesmo com duas condições iniciais muito próximas uma da outra, não existe certeza que ambas serão atraídas pelo mesmo atrator. Para estudar a caoticidade do sistema, usaremos o método que se refere a sensibilidade as condições iniciais. [2].

O matemático russo Alexandre M. Lyapunov desenvolveu um método de medida de afastamento entre duas trajetórias iniciadas em pontos próximos. O cálculo dos expoentes de Lyapunov, λ , consiste em evoluir duas condições iniciais vizinhas infinitesimalmente próximas e verificar se elas divergem exponencialmente uma da outra com o passar do tempo, como no esquema da figura (2.3). Se λ for positivo, ou seja, $\lambda > 0$, o sistema tem componente caótica [19, 20].

Os expoentes de Lyapunov para o caso bidimensional são definidos como:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^{(n)}|, \quad j = 1, 2, \quad (2.35)$$

onde $\Lambda_j^{(n)}$ são os autovalores da matriz $M = \prod_{i=1}^n J_i(I, \theta)$, J_i é a matriz Jacobiana do mapeamento calculado evoluído ao longo da órbita. Para o cálculo dos expoentes de Lyapunov foi utilizado o método de triangularização de matrizes, Eckmann-Ruelle [20]. Dá-se o nome de órbita o conjunto de todos os pontos percorrido pelo sistema no espaço de fase.

Para cada uma das quatro condições iniciais as curvas vistas na figura (2.4) convergem para um valor positivo diferente. Os expoentes de Lyapunov para o mapa padrão conservativo, equação (2.34), podem ser vistos na figura (2.4) considerando o parâmetro $k = 2$ e condições iniciais diferentes (conforme legenda).

A matriz Jacobiana utilizada nos cálculos dos Expoentes de Lyapunov é definida

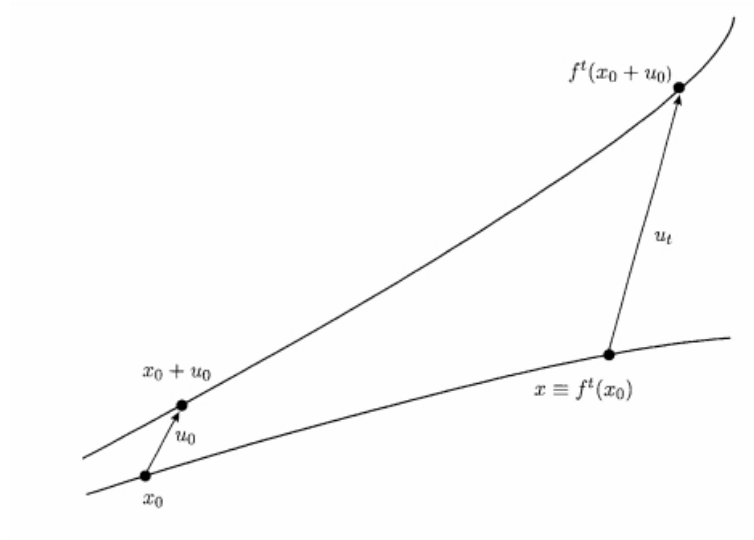


Figura 2.3: Expoente de Lyapunov. Trajetória das condições iniciais. Figura extraída da referência [20].

como:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

onde os elementos da matriz Jacobiana são dados por:

$$\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = 1, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = k \cos(\theta_n), \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = 1. \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 + k \cos(\theta_n), \quad (2.40)$$

Logo a Jacobiana será:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & k \cos(\theta_n) \\ 1 & 1 + k \cos(\theta_n) \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Calculando o determinante dessa matriz, obteremos

$$\text{Det}(J) = 1. \quad (2.42)$$

O teorema de Liouville [19, 21], que diz que se o determinante da matriz Jacobiana de um sistema for igual a ± 1 , o sistema é caracterizado como conservativo. Logo a área do espaço de fase é conservada. Conservar área no espaço de fase significa que, para regiões de formas geométricas diferentes dentro do espaço de fase, a área destas regiões serão as mesmas.

Com o resultado do determinante que obtivemos da matriz Jacobiana para o mapa padrão conservativo, equação (2.32), podemos concluir que a área do espaço de fase é preservada. Podemos ver os expoentes de Lyapunov para o mapa padrão conservativo na figura (2.4) considerando $k = 2$, quatro pares de condições iniciais diferentes (conforme mostra legenda) e iterando 10^7 vezes obtemos uma média dos expoentes de Lyapunov igual a $\bar{\lambda} = 0,2822(6)$.

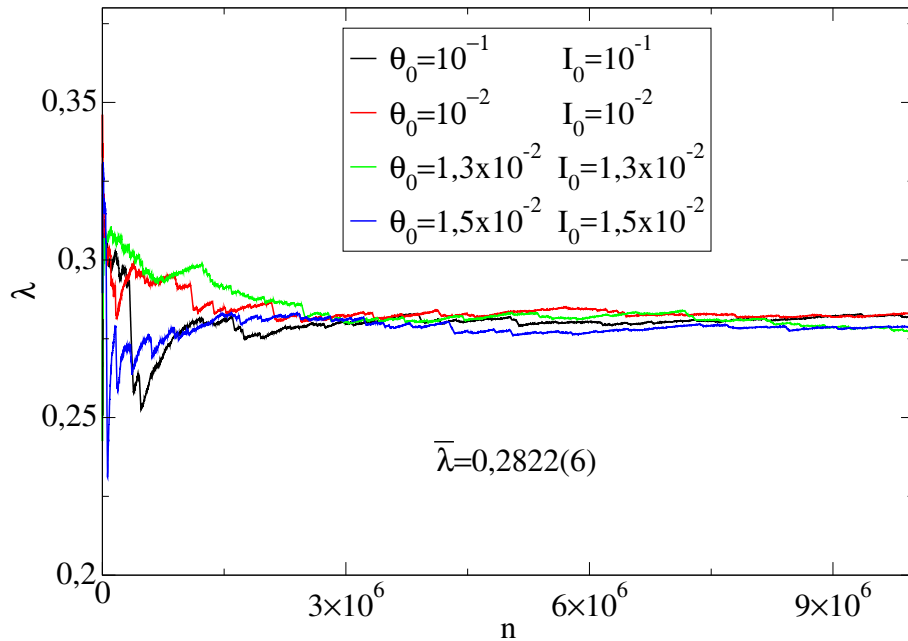


Figura 2.4: Expoentes de Lyapunov para o Mapa Padrão Conservativo (2.32) considerando $k = 2$ e condições iniciais diferentes.

2.3 O Mapa Padrão Dissipativo

O interesse nos estudos de sistemas dissipativos ocorre por serem capazes de modelar problemas de forma mais complementares que no caso conservativo. Quando consideramos dissipação, o mapa padrão passa de conservativo para dissipativo. Se pensarmos no modelo físico que estudamos anteriormente, essa dissipação pode decorrer de um atrito na barra rígida e o pivô onde ela está presa. Esses tipos de sistemas são caracterizados por uma contínua contração de seu volume conforme evolui o tempo, diferentemente de sistemas Hamiltonianos que o volume no espaço de fase se mantêm constante [2, 8]. As equações para o mapa padrão dissipativo são dadas por:

$$\begin{cases} I_{n+1} = (1 - \gamma)I_n + k \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \quad [mod 2\pi] \end{cases} \quad (2.43)$$

Novamente, I é a variável ação, θ é a variável ângulo, k é o parâmetro de controle, mas agora temos γ que é o parâmetro de dissipação. O espaço de fase para esse sistema é dado na figura (2.5) utilizando os parâmetros $k = 10^3$ e $\gamma = 10^{-4}$. Podemos ver vemos que as estruturas mistas vistas no modelo conservativo, figura (2.2) são destruídas. Com a redução do volume do espaço de fase é possível que se formem estruturas para onde as trajetórias são atraídas. Essas estruturas tem como característica dimensão fractal, isto é, dimensão não inteira, e são chamadas de *atratores caóticos*. Um atrator é o conjunto invariante para o qual órbitas convergem depois de um longo tempo [6]. Um atrator é caótico quando duas órbitas próximas divergem exponencialmente com movimento caótico [2]. Logo as estruturas mistas vistas no modelo conservativo, figura (2.2) decaem para um atrator caótico.

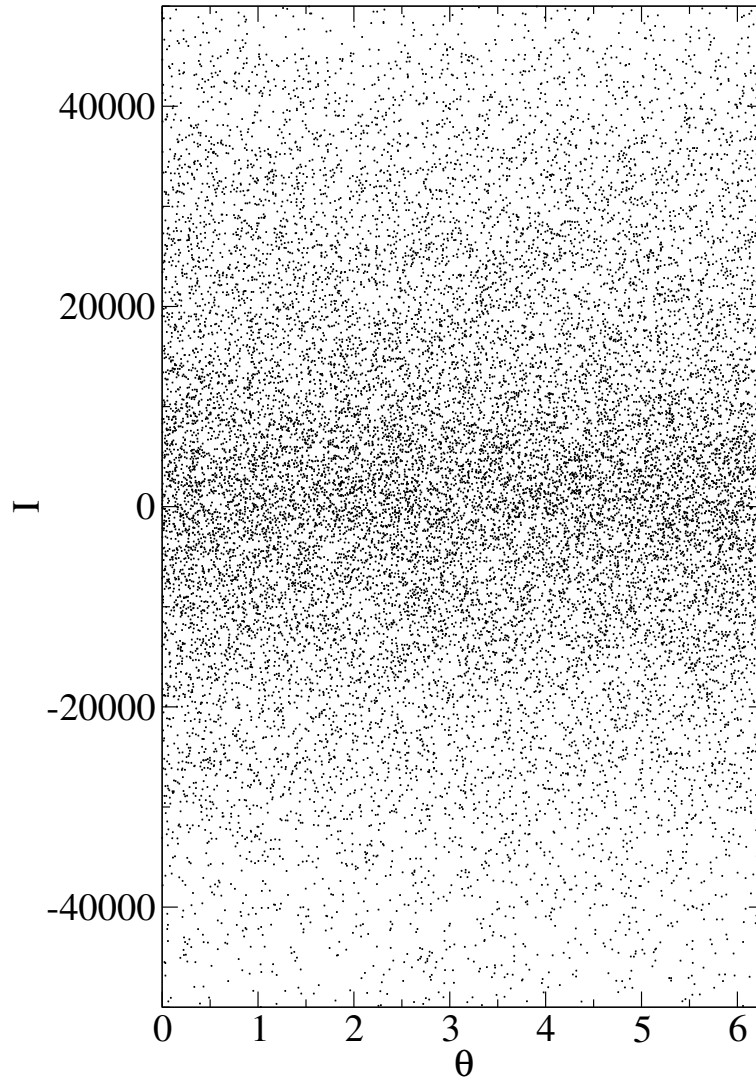


Figura 2.5: Espaço de Fase Para do Mapa Padrão Dissipativo para $k = 10^3$ e $\gamma = 10^{-4}$.

2.3.1 Os Expoentes de Lyapunov e o Cálculo da Matriz Jacobiana para o caso Dissipativo

Para caracterizar o caos no mapa padrão dissipativo, vamos calcular os expoentes de Lyapunov para esse sistema. Mas como vimos antes, precisamos primeiramente calcular a matriz Jacobiana.

Para o sistema dissipativo os elementos da Jacobiana são dados por:

$$\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = 1 - \gamma , \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = k \cos(\theta_n) , \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = 1 - \gamma , \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 + k \cos(\theta_n) , \quad (2.47)$$

Calculando o determinante encontramos:

$$\text{Det}(J) = 1 - \gamma . \quad (2.48)$$

Com esse resultado, podemos concluir que a área no espaço de fase não é preservada. Logo, para diferentes regiões no espaço de fase, mesmo com a mesma geometria, as áreas dentro dessas regiões não serão as mesmas. Com $\gamma \neq 0$ e $k \gg 0,9716\dots$ o sistema exibe atratores.

Com a definição dos expoentes de Lyapunov, equação (2.35), e os elementos da matriz Jacobiana, podemos calcular os expoentes de Lyapunov. A figura (2.6) mostra estes expoentes. Utilizamos os seguintes valores para os parâmetros de controle, $k = 10^3$, $\gamma = 10^{-4}$ e quatro condições iniciais diferentes considerando 10^7 iterações. A figura (2.6)(a) mostra os expoentes de Lyapunov positivos, enquanto a figura (2.6)(b) mostra os expoentes negativos. A média dos expoentes Lyapunov positivos fornece $\overline{\lambda_1} = 6,21461(9)$, enquanto o negativo fornece $\overline{\lambda_2} = -6,21471(9)$. Algo interessante de se perceber é que a diferença entre o módulo da média dos expoentes é da mesma ordem que o parâmetro de dissipação 10^{-4} .

2.3.2 O Decaimento de Órbitas para os Atratores

Agora vamos investigar analiticamente o decaimento das órbitas apresentadas no modelo conservativo para os atratores caóticos mostrado no modelo dissipativo. Iterando a primeira

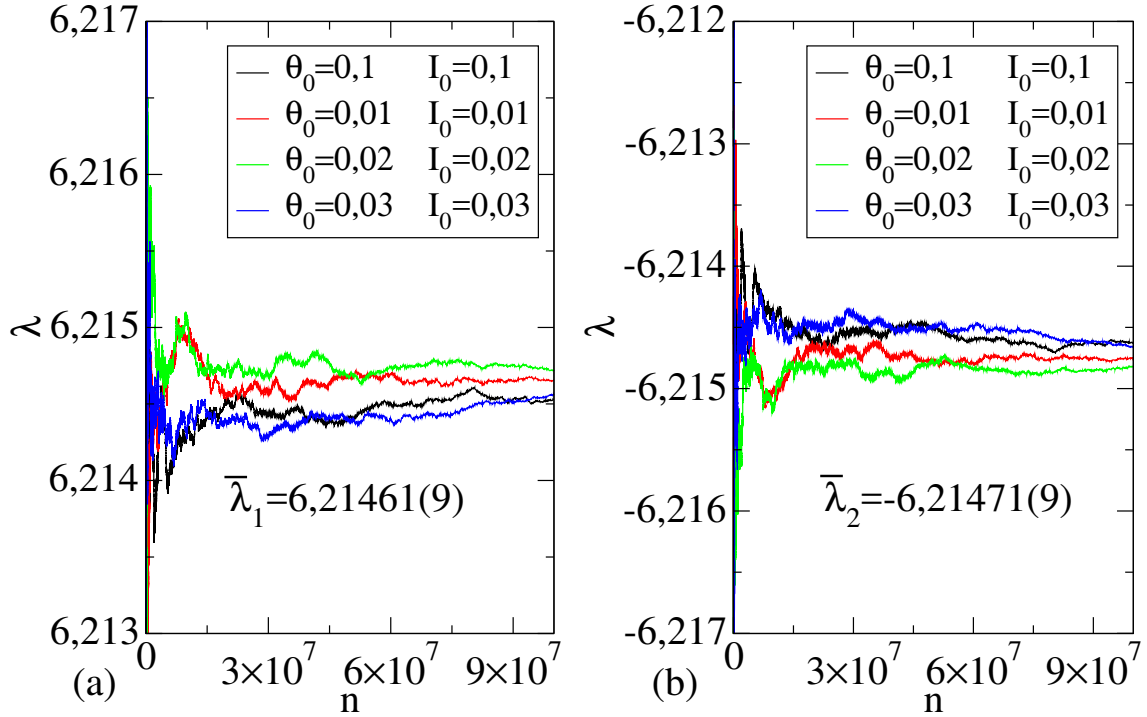


Figura 2.6: Expoentes de Lyapunov para o Mapa Padrão Dissipativo considerando quatro condições iniciais diferentes e $k = 10^3$ e $\gamma = 10^{-4}$. Em (a) expoentes positivos e (b) expoentes negativos. A soma dos expoentes positivo e negativo é $|\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2| \approx 10^{-4}$.

equação do mapeamento (2.43), partindo de um par inicial (I_0, θ_0) . Temos

$$I_1 = (1 - \gamma)I_0 + k \sin(\theta_0) , \quad (2.49)$$

$$I_2 = (1 - \gamma)I_1 + k \sin(\theta_1) . \quad (2.50)$$

Substituindo (2.49) em (2.50), obtemos

$$I_2 = (1 - \gamma)^2 I_0 + k[(1 - \gamma)\sin(\theta_0) + \sin(\theta_1)] . \quad (2.51)$$

Iterando o mapa novamente, e substituindo I_2 , teremos

$$I_3 = (1 - \gamma)I_2 + k \sin(\theta_2) , \quad (2.52)$$

$$I_3 = (1 - \gamma)^3 I_0 + k[(1 - \gamma)^2 \sin(\theta_0) + (1 - \gamma)\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)] . \quad (2.53)$$

Continuando as iterações, pode-se encontrar uma generalização para a expressão acima, que será dada por

$$I_n = (1 - \gamma)^n I_0 + k \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \gamma)^{n-1-i} \text{sen}(\theta_i) , \quad (2.54)$$

ao tomarmos γ pequeno, e dada a periodicidade da função seno, a segunda parte depois da igualdade da equação (2.54), pode ser anulada, pois o seno oscila em pequenas oscilações em torno da média do decaimento [13]. Então temos que $\sum_{i=0}^{n-1} (1 - \gamma)^{n-1-i} \text{sen}(\theta_i) = 0$, assim

$$I_n = (1 - \gamma)^n I_0 . \quad (2.55)$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor, obtemos

$$I_n = I_0 [1 + \ln(1 - \gamma)n + \frac{1}{2} \ln(1 - \gamma)^2 n^2 + \dots] , \quad (2.56)$$

onde, observando os termos dentro dos colchetes, perceberemos que é exatamente a definição de exponencial, então I_n pode ser escrita como

$$I_n = I_0 e^{\ln(1-\gamma)n} . \quad (2.57)$$

Agora, fazendo novamente uma expansão em série de Taylor no termo da exponencial, teremos que

$$\ln(1 - \gamma) = -\gamma - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^3}{3} - \frac{\gamma^4}{4} + \dots . \quad (2.58)$$

Considerando apenas o termo de primeira ordem da série, teremos finalmente

$$I_n = I_0 e^{-\gamma n} . \quad (2.59)$$

Esse resultado confirma o decaimento exponencial da variável ação com expoente dado por $-\gamma$. Iterando a primeira equação do mapa (2.43) e considerando $k = 10^3$ e valores diferentes de γ e de condições iniciais, podemos construir as curvas de decaimento, I x n , como pode ser visto na figura (2.7)(a). Vemos que as órbitas decaem exponencialmente para os atratores caóticos. Um ajuste exponencial do tipo $I = Ae^{Bn}$ (curva amarela), na curva com parâmetro e condição inicial $\gamma = 8 \times 10^{-4}$ e $I_0 = 12 \times 10^4$ (curva preta) fornece um expoente $B = -0,00077361$ e coeficiente $A = 11,351 \times 10^5$. Esse resultado confirma, mais uma vez, que a variável ação decai exponencialmente.

Observando os comportamentos das curvas na figura (2.7)(a), podemos fazer uma

reescala nos eixos coordenados, do tipo, $I \rightarrow \frac{I}{I_0}$ e $n \rightarrow n\gamma$, observado na figura (2.7)(b). Em (b) uma sobreposição de todas as curvas mostradas em (a) em uma única curva universal pode ser vista, mostrando deste modo, uma invariância de escala. Novamente o melhor ajuste a ser feito foi o ajuste exponencial (curva em amarelo) agora com o expoente dado por $B = -0,96694$ e coeficiente $A = 0,9451$.

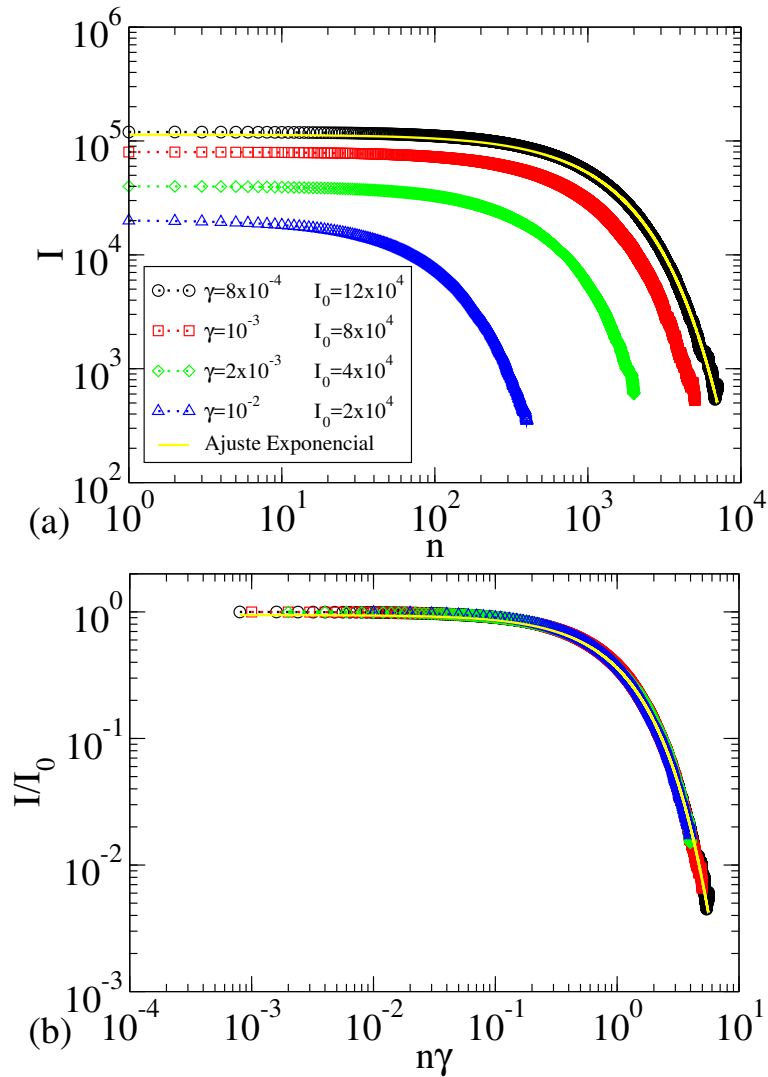


Figura 2.7: Decaimento para o atrator caótico: (a) o comportamento de $I \times n$ para valores de γ e condições iniciais diferentes e $k = 10^3$. (b) sobreposição de todas as curvas para uma única curva universal.

Capítulo 3

O Mapa Padrão Dissipativo Descontínuo

Apresentamos nesse Capítulo algumas propriedades estatísticas para o mapa padrão dissipativo descontínuo. Iniciamos os nossos estudos com a apresentação das equações do mapeamento e em seguida, o cálculo da matriz Jacobiana com o intuito de determinar os expoentes de Lyapunov. Posteriormente, discutimos numericamente algumas propriedades de escala.

3.1 O Mapa

O mapa padrão dissipativo descontínuo pode ser obtido a partir do mapeamento (2.32). Para isso, adicionamos na primeira equação do mapa, uma dissipação no primeiro termo, e uma descontinuidade no segundo termo. A dissipação pode vir da resistência do ar ou da viscosidade do meio, como foi visto no Capítulo anterior. A descontinuidade pode ser resultado do pulso dado ao sistema do rotor pulsado [9]. Para o caso dissipativo descontínuo o pulso será ora para esquerda, ora para a direita. Com isso, o mapeamento pode ser escrito como:

$$\begin{cases} I_{n+1} = (1 - \gamma)I_n + kf(\theta_n)\text{sen}(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \mod 2\pi \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde I é a variável ação, θ é a variável ângulo, γ é o parâmetro de dissipação, k é o parâmetro que controla a intensidade de não linearidade e $f(\theta_n)$ é a função sinal que é o termo de descontinuidade, e que é definida como:

$$f(\theta_n) = \text{sign}(\cos\theta_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } \cos(\theta_n) \geq 0 \\ -1 & \text{se } \cos(\theta_n) < 0 \end{cases}. \quad (3.2)$$

Com as equações do mapa podemos iterar as variáveis I e θ . Considerado os parâmetros de controle $k = 10^3$ e $\gamma = 10^{-3}$ e 100 condições iniciais diferentes, construímos o espaço de fase, como pode ser visto na figura (3.1). É possível observar que, assim como no modelo dissipativo, as estruturas mistas vistas no modelo conservativo são destruídas e decaem para um

atrator caótico, de acordo com a escolha dos parâmetros.

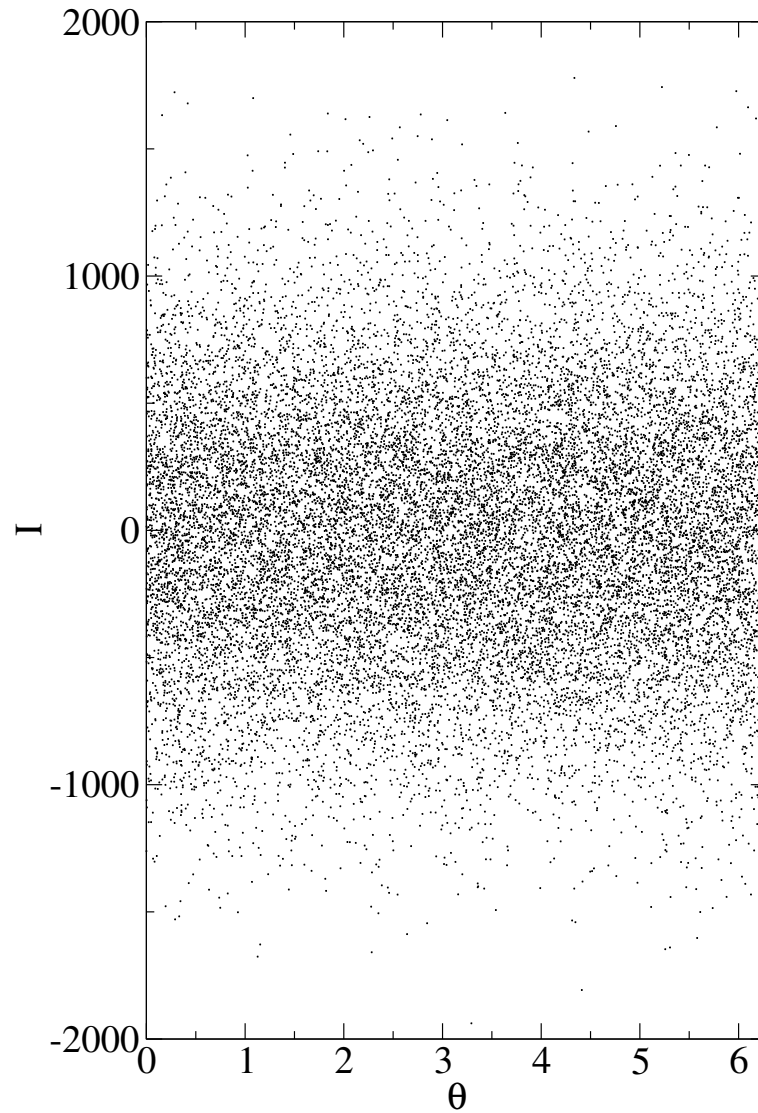


Figura 3.1: Espaço de fase para o mapa padrão dissipativo descontínuo, considerando os parâmetros de controle $k = 10^3$ e $\gamma = 10^{-3}$.

3.2 O Expoente de Lyapunov e o Cálculo da Matriz Jacobiana

Como discutido no Capítulo anterior, para calcular os expoentes de Lyapunov definidos na equação (2.35), precisamos calcular a matriz Jacobiana, cujos elementos são dados por:

$$\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = 1 - \gamma, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = k f(\theta_n) \cos(\theta_n), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = 1 - \gamma . \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 + kf(\theta_n)\cos(\theta_n) , \quad (3.6)$$

ficando então

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \gamma & kf(\theta_n)\cos(\theta_n) \\ 1 - \gamma & 1 + kf(\theta_n)\cos(\theta_n) \end{pmatrix} , \quad (3.7)$$

o determinante dessa matriz fornece

$$\text{Det}(J) = 1 - \gamma . \quad (3.8)$$

A partir do resultado do determinante, percebemos novamente que, para $\gamma \neq 0$, a área no espaço de fase não é preservada.

Com as equações da matriz Jacobiana podemos calcular os expoentes de Lyapunov, conforme mostramos na figura (3.2), e assim conseguimos caracterizar o sistema como caótico. Para a figura (3.2), utilizamos os seguintes valores para os parâmetros de controle, $k = 10^3$, $\gamma = 10^{-2}$, e condições iniciais diferentes (conforme legenda). Em (a) mostramos a média dos expoentes de Lyapunov positivo, que fornece $\overline{\lambda_1} = 3,98222(7)$, enquanto (b) fornece a média dos expoentes de Lyapunov negativo dado por $\overline{\lambda_2} = -3,99227(7)$. Podemos perceber novamente que, a diferença entre o módulo da média dos expoentes é da mesma ordem que o parâmetro de dissipação, 10^{-2} .

3.3 O conceito da Raiz Quadrada da Média I_{RMS}

Agora vamos discutir sobre a raiz quadrada da média, ou *Root Mean Square*, denotada por I_{RMS} , que é definida como sendo a raiz quadrada de duas médias da variável I do mapeamento (3.1), sendo a primeira na órbita e a segunda em um *ensemble* de $\theta \in [0, 2\pi]$. Considerando então, a primeira equação do mapeamento (3.1), iremos estudar o comportamento de I_{RMS} ao longo dos atratores caóticos. A raiz quadrada da média, I_{RMS} , pode ser obtida pela seguinte equação:

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{j,i}^2} , \quad (3.9)$$

onde M é o número de condições iniciais distintas, n é o número de iterações da órbita e I é a variável ação. Na figura (3.3) mostramos o comportamento de I_{RMS} x n para valores diferentes

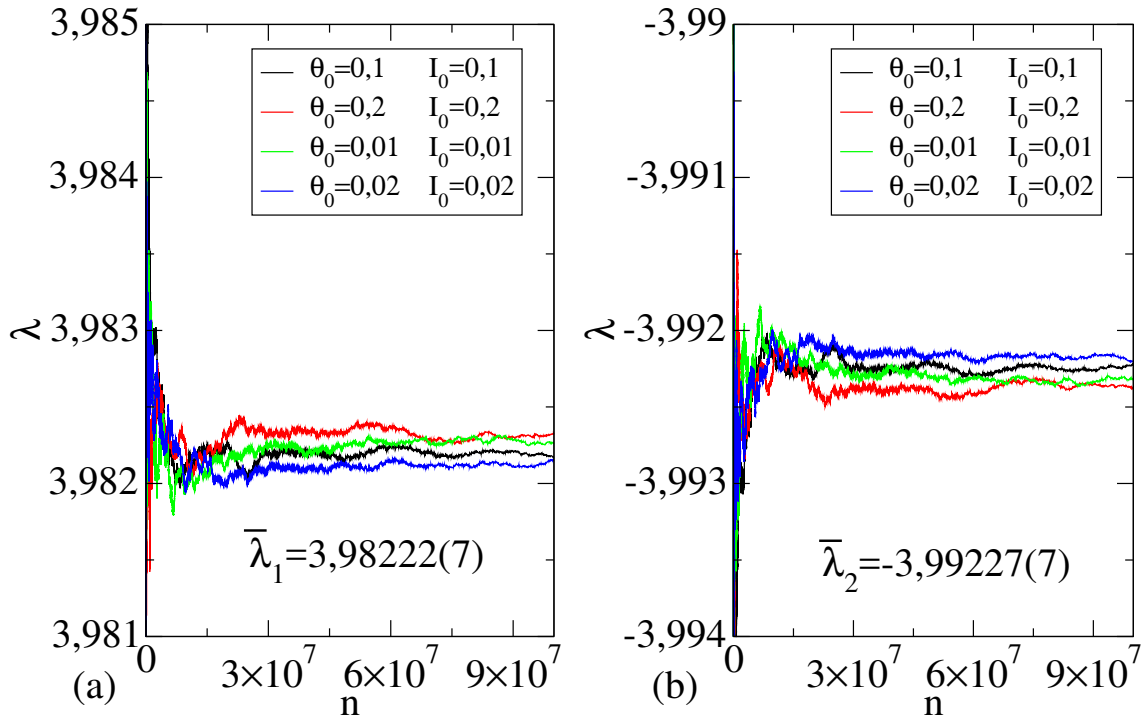


Figura 3.2: Expoente de Lyapunov para o Mapa Padrão Dissipativo Descontínuo com diferentes condições iniciais (conforme legenda). Em (a) expoentes positivos e em (b) expoentes negativos, considerando os parâmetros de controle $\gamma = 10^{-3}$ e $k = 10^3$.

de k e γ (conforme mostrado na legenda).

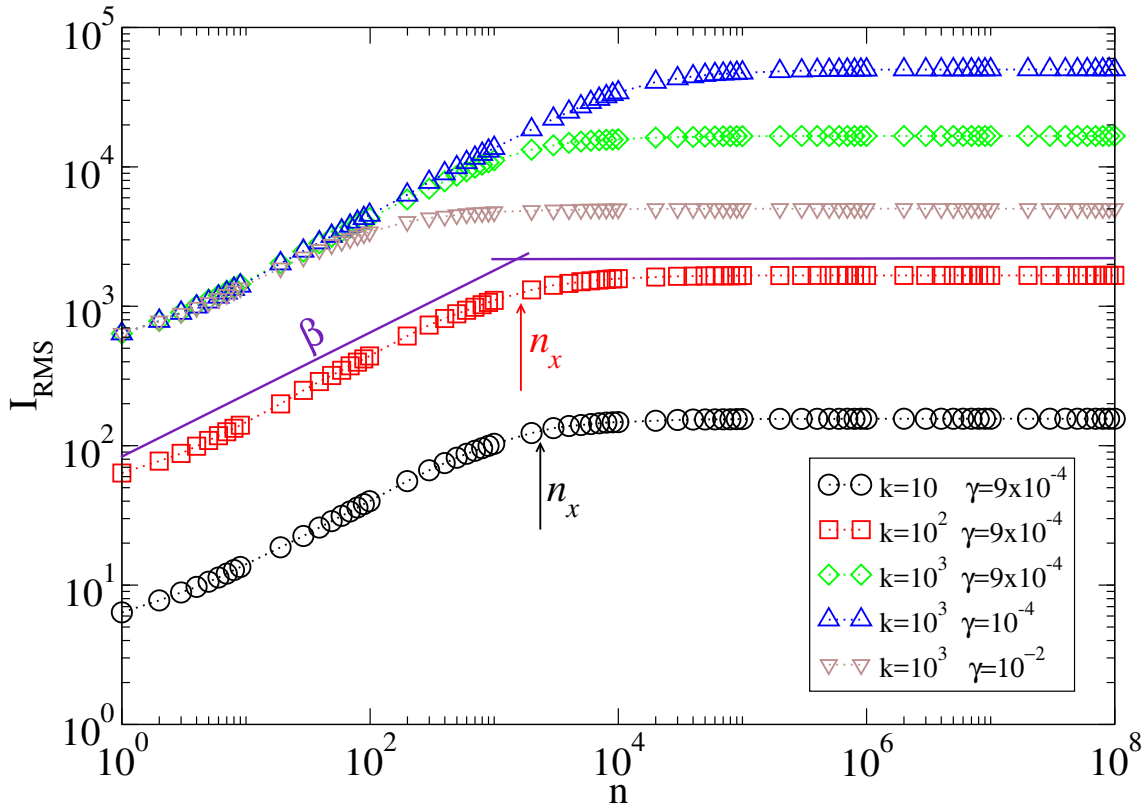


Figura 3.3: Comportamento de I_{RMS} x n para valores diferentes dos parâmetros de controle.

A partir do comportamento observado na figura (3.3), notamos que para tempos curtos e considerando $I_0 \cong 0$, as curvas crescem de acordo com uma lei de potência. Após certo número de iterações, no *crossover* (n_x), as curvas se aproximam de um regime de saturação. Notamos também que quanto maiores os parâmetros de controle k , maior será o valor de saturação.

3.4 Hipóteses de Escala

A partir do comportamento das curvas de I_{RMS} x n , mostrados na figura (3.3) que podemos propor as seguintes hipóteses de escala:

1. Para $n \ll n_x$, temos

$$I_{RMS} \sim (nk^2)^\beta, \quad (3.10)$$

2. Para $n \gg n_x$, temos

$$I_{RMS_{SAT}} \sim k^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2}, \quad (3.11)$$

3. Para o ponto de transição do crescimento para o regime constante (número *crossover*), temos

$$n_x \sim k^{z_1} \gamma^{z_2}. \quad (3.12)$$

Das três hipóteses de escala acima, temos que, β é um expoente crítico chamado de expoente de aceleração, α_1 e α_2 são chamados de expoentes de crescimento e z_1 e z_2 são os expoentes dinâmicos. Estas hipóteses de escala junto com o comportamento das curvas I_{RMS} , permitem propor uma função homogênea generalizada, a partir do comportamento descrito de I_{RMS} . Essa função é dada por:

$$I_{RMS}(nk^2, k, \gamma) = l I_{RMS}(l^a nk^2, l^b k, l^c \gamma), \quad (3.13)$$

temos que l é um fator de escala e a, b, c são expoentes característicos [1].

Como l é um fator de escala, isto é, um fator que irá reescalar todas as curvas, pode-se escolher que ele seja:

$$l^a nk^2 = 1, \quad (3.14)$$

$$l = (nk^2)^{-\frac{1}{a}} . \quad (3.15)$$

Se esse resultado mostrado na equação (3.14) for substituindo na função homogênea generalizada temos que

$$I_{RMS} = (nk^2)^{-\frac{1}{a}} I_{RMS}(1, (nk^2)^{-\frac{b}{a}} k, (nk^2)^{\frac{c}{a}} \gamma) . \quad (3.16)$$

Para a região de $n \ll n_x$, o termo $I_{RMS}(1, (nk^2)^{-\frac{b}{a}} k, (nk^2)^{\frac{c}{a}} \gamma)$ pode ser considerado constante. Se compararmos com a primeira hipótese de escala, mesma região $n \ll n_x$, podemos observar que:

$$\beta = -\frac{1}{a} . \quad (3.17)$$

Considerando agora

$$l^b k = 1 , \quad (3.18)$$

$$l = k^{-\frac{1}{b}} . \quad (3.19)$$

Substituindo novamente na função homogênea generalizada, teremos

$$I_{RMS} = k^{-\frac{1}{b}} I_{RMS}((nk^2)k^{-\frac{a}{b}}, 1, (k^{-\frac{c}{b}} \gamma) . \quad (3.20)$$

Agora, considerando a região onde $n \gg n_x$, o termo $I_{RMS}((nk^2)k^{-\frac{a}{b}}, 1, (k^{-\frac{c}{b}} \gamma))$ pode ser considerado constante. Nessa região, podemos comparar esse resultado, equação (3.20), com a segunda hipótese de escala, assim, encontramos

$$\alpha_1 = -\frac{1}{b} . \quad (3.21)$$

Para o último expoente, escolheremos:

$$l^c \gamma = 1 , \quad (3.22)$$

$$l = \gamma^{-\frac{1}{c}} . \quad (3.23)$$

Fazendo a substituição na função homogênea generalizada, obteremos

$$I_{RMS} = \gamma^{-\frac{1}{c}} I_{RMS}((nk^2)\gamma^{-\frac{a}{c}}, \gamma^{-\frac{b}{c}}k, 1) . \quad (3.24)$$

Considerando novamente que $I_{RMS}((nk^2)\gamma^{-\frac{a}{c}}, \gamma^{-\frac{b}{c}}k, 1)$ é constante na região onde $n \gg n_x$, também podemos comparar o resultado, equação (3.24), com a segunda hipótese de escala, logo

$$\alpha_2 = -\frac{1}{c} . \quad (3.25)$$

Comparando as três expressões obtidas para os fatores de escala l , equações (3.17), (3.21, (3.25)) a primeira comparação nos levará a:

$$(nk^2)^\beta = k^{\alpha_1} , \quad (3.26)$$

$$nk^2 = k^{\frac{\alpha_1}{\beta}} , \quad (3.27)$$

$$n = k^{\frac{\alpha_1}{\beta} - 2} . \quad (3.28)$$

Se compararmos o resultado, equação (3.28), com a terceira hipótese de escala, percebendo também que γ é constante, teremos que

$$z_1 = \frac{\alpha_1}{\beta} - 2 . \quad (3.29)$$

O resultado da equação (3.29) define uma lei de escala: conhecendo dois expoentes pode-se definir o terceiro.

Uma segunda comparação pode ser feita, e assim determinar o segundo expoente dinâmico z_2 , logo,

$$(nk^2)^\beta = \gamma^{\alpha_2} , \quad (3.30)$$

$$nk^2 = \gamma^{\frac{\alpha_2}{\beta}} , \quad (3.31)$$

$$n = k^{-2} \gamma^{\frac{\alpha_2}{\beta}} . \quad (3.32)$$

Comparando novamente com a terceira hipótese de escala, equação (3.12), agora considerando k constante, teremos que

$$z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta} . \quad (3.33)$$

O resultado obtido na equação (3.33) define outra lei de escala.

Os expoentes críticos podem ser obtidos analiticamente, conforme será mostrado no Capítulo 4, ou numericamente, conforme mostraremos a seguir. Para a análise numérica, todos os expoentes podem ser obtidos a partir da análise da figura (3.3), com isso é possível construir figuras específicas e obter os expoentes.

Para o expoente β utilizamos um ajuste de lei de potência para o crescimento da curva de I_{RMS} como uma função de n , figura (3.3), quando $n \ll n_x$, o resultado numérico fornece $\beta \cong 0,5$. O expoente α_1 é obtido a partir do comportamento de I_{RMS} em função de k , para $n \gg n_x$ e γ fixo no valor de $\gamma = 0,0009$. Esse comportamento é mostrado na figura (3.4), onde podemos perceber também que quanto maior os parâmetros de controle k maior será o valor de saturação. Um ajuste em lei de potência nos fornece $\alpha_1 = 1,002(1) \cong 1$. O expoente α_2 é obtido a partir do comportamento de I_{RMS} em função de γ , para $n \gg n_x$ e o parâmetro k fixo no valor de $k = 10^3$. Esse comportamento é mostrado na figura (3.5). Um ajuste de lei de potência nos fornece o valor de $\alpha_2 = -0,4969(3) \cong -0,5$. A escolha dos valores de k e γ deve-se ao fato de que o cálculo do desvio padrão ser no entrono do atrator caótico.

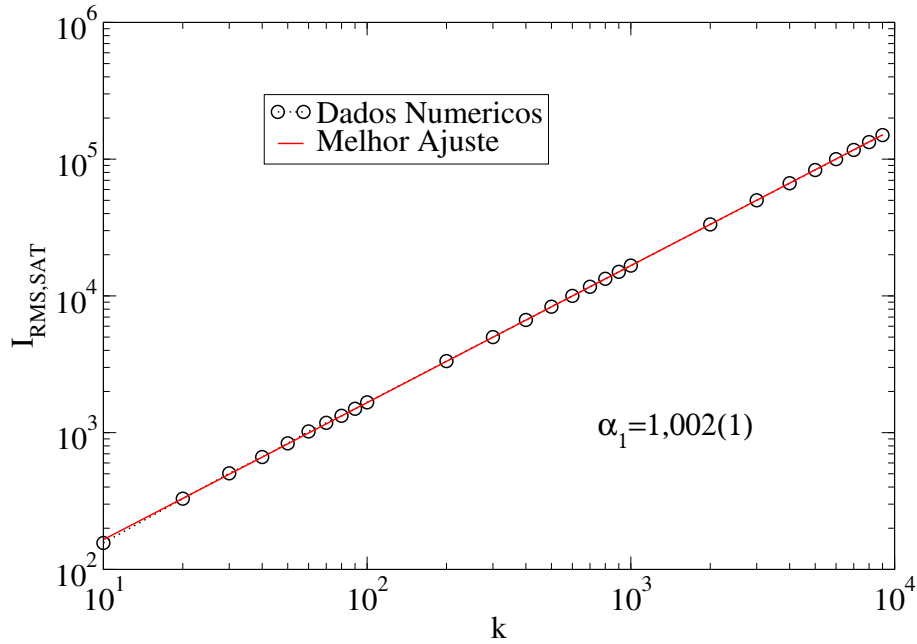


Figura 3.4: Comportamento de $I_{RMS,SAT}$ x k com $\gamma = 0,0009$. Um ajuste em lei de potência fornece $\alpha_1 = 1,002(1) \cong 1$.

O expoente z_1 é obtido a partir do comportamento de n_x x k , com o parâmetro de dissipação, γ , fixo no valor de $\gamma = 0,0009$. Esse comportamento é mostrado na figura 3.6. Podemos ver que, mesmo com γ fixo e valores diferentes de k , n_x permanece praticamente constante. Um ajuste da lei de potência fornece o valor de $z_1 = -0,01(1) \cong 0$, confirmando assim a independência de n_x com k .

Por fim, o expoente z_2 é obtido a partir do comportamento de n_x x γ , com o parâmetro de controle k fixo com valor de $k = 10^3$. Esse comportamento é mostrado na figura

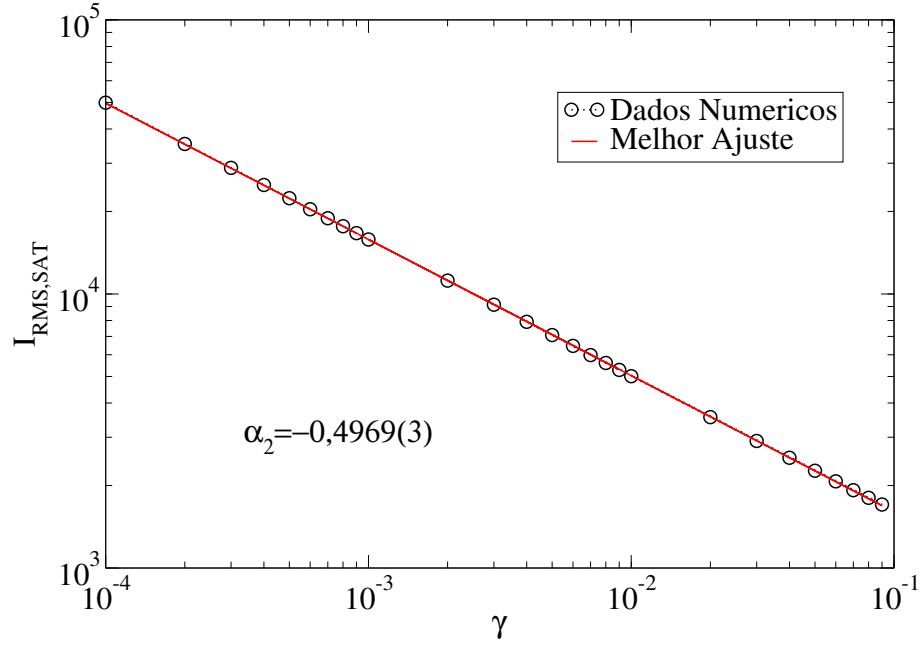


Figura 3.5: Comportamento de $I_{RMS,SAT}$ x γ com $k = 10^3$. Um ajuste em lei de potência fornece $\alpha_2 = -0,4969(3) \cong -0,5$.

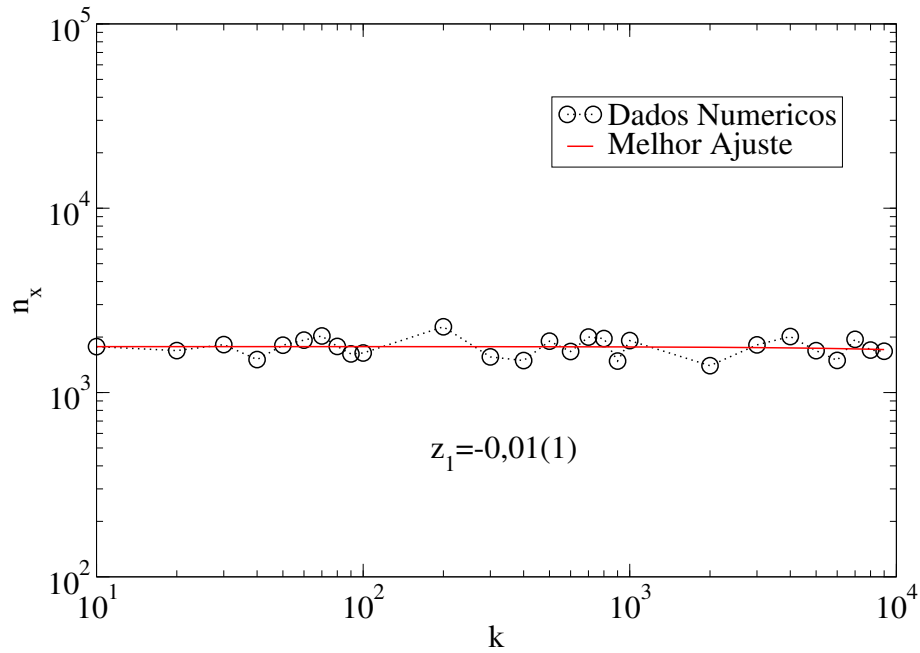


Figura 3.6: Comportamento de n_x x k com $\gamma = 0,0009$. Um ajuste em lei de potência fornece $z_1 = -0,01(1) \cong 0$.

(3.7). Um ajuste da lei de potência fornece o valor de $z_2 = -0,9939(7) \cong -1$.

Conhecendo os valores desses expoentes críticos e conhecendo as leis de escala, podemos reescalar os eixos da figura (3.3), e validar as hipóteses de escala. A primeira reescala conveniente é $I_{RMS} \rightarrow I_{RMS}/k^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}$, do mesmo modo, a segunda reescala conveniente é dada por $n \rightarrow n\gamma^{z_2}$. A figura 3.8 mostra essa reescala e consequentemente a sobreposição de todas as curvas em uma única curva universal. Esse resultado reforça a validade das hipóteses de escala.

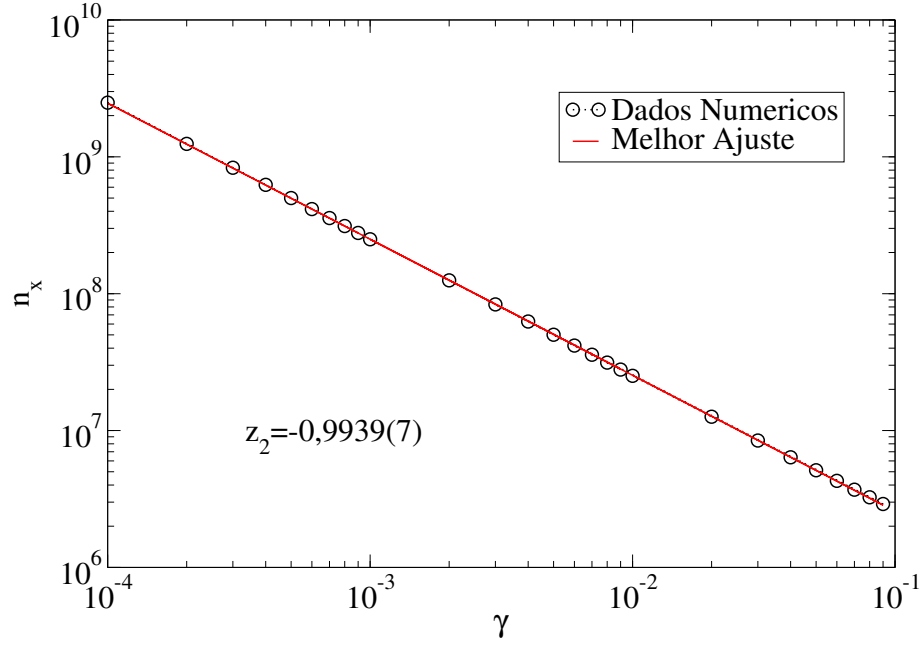


Figura 3.7: Comportamento de $n_x \times \gamma$ com $k = 10^3$. Um ajuste em lei de potência fornece $z_2 = -0,9939(7) \cong -1$.

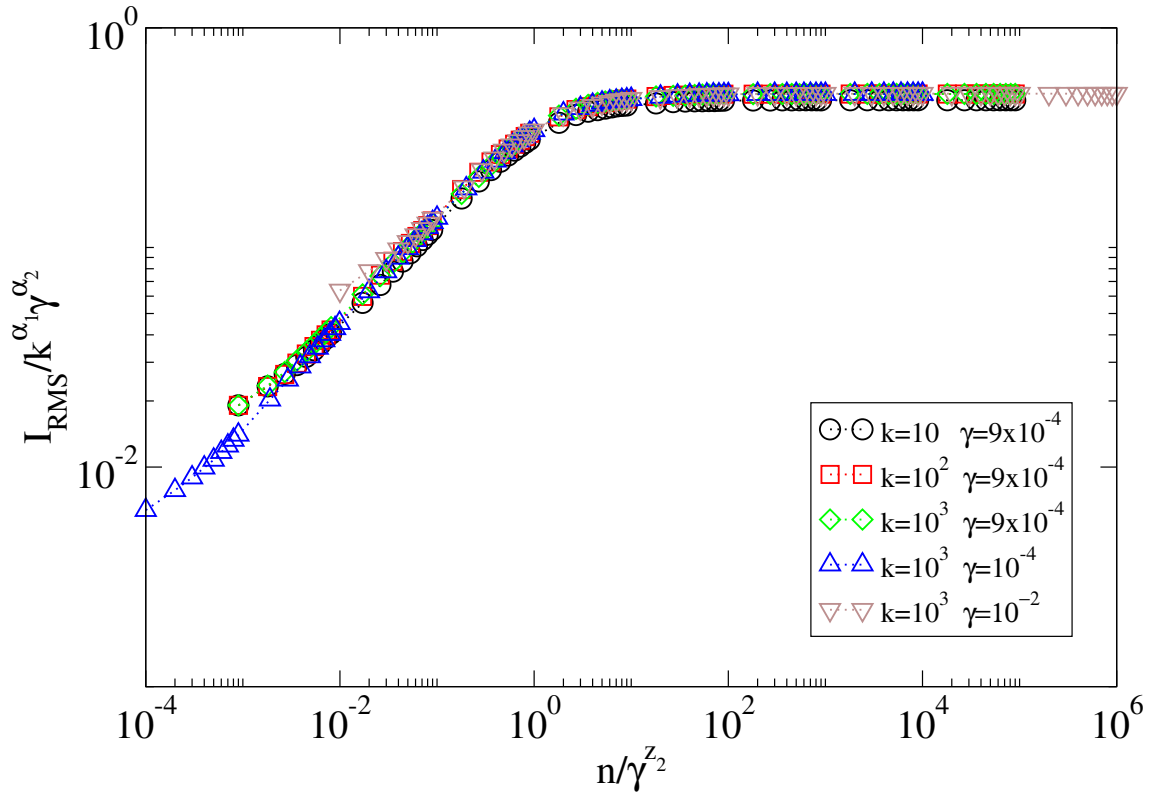


Figura 3.8: Sobreposição de todas as curvas mostrada na figura (3.3) em uma única curva universal.

Capítulo 4

Abordagem Analítica para Obter os Expoentes Críticos

Apresentaremos neste Capítulo uma descrição analítica dos expoentes críticos para o mapa padrão dissipativo descontínuo. O objetivo aqui é a comprovação analítica dos resultados computacionais discutidos anteriormente. Inicialmente encontraremos a equação para I_{RMS} , logo, estudaremos os casos particulares para a evolução dinâmica dessa equação e obteremos os expoentes críticos.

4.1 O Comportamento de I_{RMS} para o Mapa Padrão Dissipativo Descontínuo

Nesta parte do trabalho consideraremos a raiz quadrada da média da variável ação I_{RMS} do mapa padrão dissipativo descontínuo. Como foi visto no Capítulo anterior, o mapa (3.1) é dado por:

$$\begin{cases} I_{n+1} = (1 - \gamma)I_n + kf(\theta_n)\text{sen}(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \mod 2\pi \end{cases},$$

onde γ é o parâmetro de dissipação, k é o parâmetro que controla a intensidade da não linearidade e $f(\theta_n)$ é a função de descontinuidade definida na equação (3.2), como $f(\theta_n) = \text{sign}(\cos\theta_n)$. A seguir será estudado o comportamento de I_{RMS} para alguns casos, como os casos de $\gamma = 0$ e $\gamma \neq 0$.

4.1.1 Primeiro Caso - Sistema Conservativo ($\gamma = 0$)

Para determinar o comportamento de I_{RMS} , consideramos a primeira equação do mapeamento (3.1) (a equação que envolve as variáveis I e o ângulo θ). Nesta equação e para o nosso caso podemos eliminar a variável θ utilizando uma média em um *ensemble* de valores distintos para $\theta \in [0, 2\pi]$.

A descrição analítica para determinar os expoentes críticos consiste em calcular a média utilizando o quadrado da primeira equação, $\overline{I^2}$. Esse procedimento será adotado devido ao fato da variável ação média, $\bar{I}$, não ser apropriada dado que $\overline{f(\theta)\text{sen}(\theta)} = 0$, como vemos a seguir:

$$I_{n+1} = I_n + kf(\theta_n)\text{sen}(\theta_n) , \quad (4.1)$$

$$\overline{I_{n+1}} = \overline{I_n} + k\overline{f(\theta_n)\text{sen}(\theta_n)} , \quad (4.2)$$

$$\overline{I_{n+1}} = \overline{I_n} . \quad (4.3)$$

Então elevando ao quadrado a primeira equação do mapa (3.1) e depois fazendo a sua média, teremos:

$$I_{n+1}^2 = [I_n + kf(\theta_n)\text{sen}(\theta_n)]^2 , \quad (4.4)$$

$$\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} + 2k\overline{I_n f(\theta_n)\text{sen}(\theta_n)} + k^2\overline{f(\theta_n)^2\text{sen}^2(\theta_n)} , \quad (4.5)$$

$$\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} + k^2\overline{f(\theta_n)^2\text{sen}^2(\theta_n)} . \quad (4.6)$$

Sabendo que $\overline{\text{sen}^2(\theta)} = 1/2$, pela equação (3.2) é possível perceber que $\overline{f(\theta_n)^2} = 1$, então a equação (4.6) pode ser escrita como

$$\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} + \frac{k^2}{2} , \quad (4.7)$$

A definição de derivada dada por STEWART (2006, p. 158) [21] é que “A derivada de uma função f em um número a , denotada por $f'(a)$, é $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, se o limite existe”. Escrevendo $x = a + h$ e com x tendendo a a , a equação da derivada pode ser escrita como:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (4.8)$$

A partir da definição de derivada podemos fazer a aproximação da equação (4.7) para uma derivada

$$\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2} = \frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{(n+1) - n} \cong \frac{d\overline{I^2}}{dn} = \frac{k^2}{2} . \quad (4.9)$$

Observando a figura (3.3) e sabendo que a menor parte que se pode ter de n é 1, pode-se considerar $n \rightarrow 0$, logo a aproximação acima é viável. Fazendo a separação de variáveis e integrando dos dois lados da equação (4.9), teremos

$$d\overline{I^2} = \frac{k^2}{2} dn , \quad (4.10)$$

$$\int_{\frac{\overline{I_0^2}}{I_0^2}}^{\overline{I^2}} d\overline{I^2} = \frac{k^2}{2} \int_0^{n'} dn , \quad (4.11)$$

$$\overline{I^2(n)} = I_0^2 + \frac{k^2}{2} n . \quad (4.12)$$

O resultado acima, equação (4.12), também pode ser obtido se iterarmos a equação (4.7)

$$\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} + \frac{k^2}{2} ,$$

de modo para $n = 0$, obtemos

$$\overline{I_1^2} = \overline{I_0^2} + \frac{k^2}{2} , \quad (4.13)$$

e para $n = 1$, temos

$$\overline{I_2^2} = \overline{I_1^2} + \frac{k^2}{2} , \quad (4.14)$$

Substituindo (4.13) em (4.14), obteremos

$$\overline{I_2^2} = \overline{I_0^2} + 2\frac{k^2}{2} , \quad (4.15)$$

continuando as iterações, é possível generalizá-la para a seguinte expressão

$$\overline{I_n^2} = \overline{I_0^2} + n\frac{k^2}{2} , \quad (4.16)$$

de modo que obtemos o mesmo resultado encontrado em (4.12), mostrando que a aproximação é válida.

Com os resultados (4.12) e (4.16), aplicando a raiz quadrada de ambos os lados, e definindo $\sqrt{I^2(n)} = I_{RMS}(n)$

$$\sqrt{I^2(n)} = I_{RMS}(n) = \sqrt{I_0^2 + \frac{k^2}{2}n} \quad (4.17)$$

Considerando o caso particular, onde $I_0 \cong 0$, obteremos

$$I_{RMS} = \frac{k}{\sqrt{2}}n^{\frac{1}{2}}. \quad (4.18)$$

O resultado obtido na equação (4.18) mostra que na ausência de curvas invariantes *spanning*, a variável ação difunde ilimitadamente com a raiz quadrada de n . As curvas invariantes são as curvas que cortam o espaço de fase e limitam a região de caos. A figura (4.1) mostra o comportamento de I_{RMS} como uma função do número de interações n usando os parâmetros de controle $\gamma = 0$ e $k = 1, 1$. Um ajuste em lei de potência fornece o expoente crítico $\beta = 0,498(8) \cong \frac{1}{2}$.

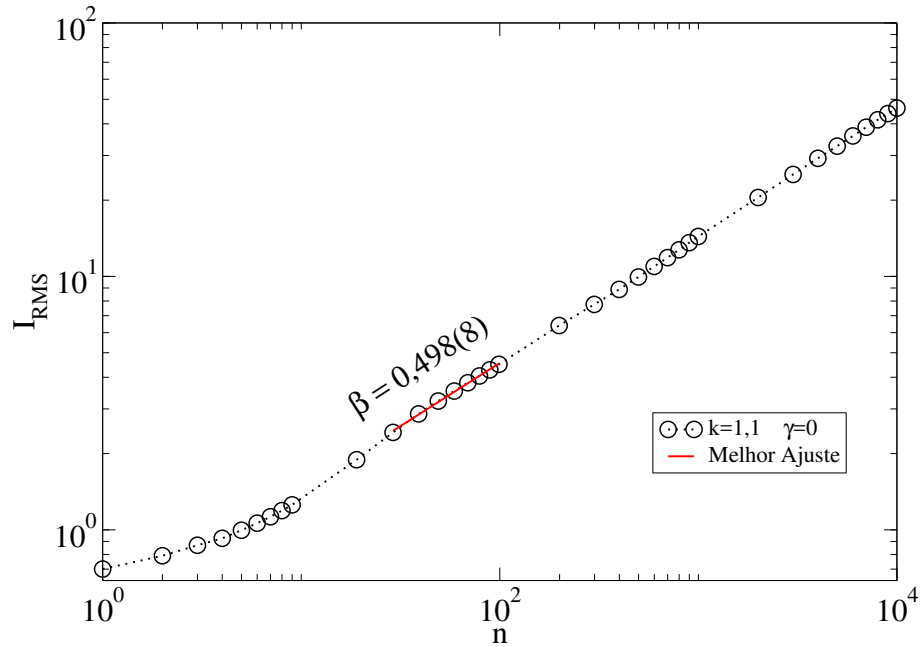


Figura 4.1: Gráfico de I_{RMS} x n para o Mapa Padrão Conservativo Descontínuo com os parâmetros de controle $k = 1$ e $\gamma = 0$. Um ajuste em lei de potência fornece $\beta = 0,498(8) \cong 1/2$.

4.1.2 Segundo Caso - Sistema Dissipativo ($\gamma \neq 0$)

Para investigar analiticamente o comportamento de I_{RMS} como uma função do número de iterações n no sistema dissipativo, $\gamma \neq 0$, devemos elevar ao quadrado a primeira equação do mapeamento equação (3.1), de modo que

$$(I_{n+1})^2 = [(1 - \gamma)I_n + kf(\theta_n)\text{sen}(\theta_n)]^2, \quad (4.19)$$

$$I_{n+1}^2 = (1 - \gamma)^2 I_n^2 + 2(1 - \gamma)I_n kf(\theta_n)\text{sen}(\theta_n) + k^2 f(\theta_n)^2 \text{sen}^2(\theta_n). \quad (4.20)$$

Tomando a média de I_{RMS}^2 em um ensemble de $\theta \in [0, 2\pi]$, teremos:

$$\overline{I_{n+1}^2} = (1 - \gamma)^2 \overline{I_n^2} + 2(1 - \gamma) \overline{I_n kf(\theta_n)\text{sen}(\theta_n)} + \overline{k^2 f(\theta_n)^2 \text{sen}^2(\theta_n)}. \quad (4.21)$$

Como foi discutido anteriormente, os valores das médias das seguintes equações são: $\overline{\text{sen}(\theta_n)} = 0$, $\overline{\text{sen}^2(\theta_n)} = \frac{1}{2}$, $\overline{f^2(\theta_n)} = 1$. Deste modo, podemos reescrever a equação (4.21) da forma

$$\overline{I_{n+1}^2} = (1 - \gamma)^2 \overline{I_n^2} + \frac{k^2}{2}, \quad (4.22)$$

$$\overline{I_{n+1}^2} = (1 - 2\gamma + \gamma^2) \overline{I_n^2} + \frac{k^2}{2}. \quad (4.23)$$

A partir deste resultado, podemos novamente considerar a aproximação da equação (4.23) à uma derivada. Assim, reescrevendo a equação (4.23), teremos a seguinte aproximação:

$$\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2} = \frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{(n+1) - n} \cong \frac{d\overline{I^2}}{dn} = (\gamma^2 - 2\gamma) \overline{I^2} + \frac{k^2}{2}. \quad (4.24)$$

Renomeando a variáveis $\overline{I^2} = E$, poderemos então, separar as variáveis dE e dn , assim a parte final da equação (4.24) é dada por

$$\frac{dE}{(\gamma^2 - 2\gamma)E + \frac{k^2}{2}} = dn. \quad (4.25)$$

Integrando os dois lados da equação (4.25), obteremos

$$\int_{E_0}^E \frac{dE'}{(\gamma^2 - 2\gamma)E' + \frac{k^2}{2}} = \int_0^n dn'. \quad (4.26)$$

Resolvendo a primeira integral pelo método da substituição, teremos

$$u = (\gamma^2 - 2\gamma)E' + \frac{k^2}{2} , \quad (4.27)$$

$$du = (\gamma^2 - 2\gamma)dE' . \quad (4.28)$$

Substituindo esses valores na integral, teremos

$$\int_{u_0}^u \frac{du'}{u'} = (\gamma^2 - 2\gamma) \int_0^n dn' , \quad (4.29)$$

o que nos leva no seguinte resultado

$$\ln \frac{u}{u_0} = (\gamma^2 - 2\gamma)n . \quad (4.30)$$

Aplicando a função exponencial em ambos os lados da equação (4.30), teremos:

$$u(n) = u_0 e^{(\gamma^2 - 2\gamma)n} . \quad (4.31)$$

Voltando para a variável E, teremos

$$(\gamma^2 - 2\gamma)E(n) + \frac{k^2}{2} = \left[(\gamma^2 - 2\gamma)E_0 + \frac{k^2}{2} \right] e^{(\gamma^2 - 2\gamma)n} , \quad (4.32)$$

$$(\gamma^2 - 2\gamma)E(n) = \frac{k^2}{2} \left[e^{(\gamma^2 - 2\gamma)n} - 1 \right] + (\gamma^2 - 2\gamma)E_0 e^{(\gamma^2 - 2\gamma)n} , \quad (4.33)$$

$$E(n) = E_0 e^{(\gamma^2 - 2\gamma)n} + \frac{k^2}{2(\gamma^2 - 2\gamma)} \left[e^{(\gamma^2 - 2\gamma)n} - 1 \right] . \quad (4.34)$$

Voltando para a variável original, $E = \overline{I^2}$, aplicando a raiz quadrada dos dois lados e renomeando $\sqrt{\overline{I^2(n)}} = I_{RMS}(n)$, teremos

$$I_{RMS}(n) = \sqrt{\overline{I^2(n)}} = \sqrt{I_0^2 e^{(\gamma^2 - 2\gamma)n} + \frac{k^2}{2(\gamma^2 - 2\gamma)} [e^{(\gamma^2 - 2\gamma)n} - 1]} , \quad (4.35)$$

de modo que podemos reorganizar os termos da equação acima, assim ficaremos com:

$$I_{RMS}(n) = \sqrt{I_0^2 e^{-(2\gamma - \gamma^2)n} + \frac{k^2}{2(2\gamma - \gamma^2)} [1 - e^{-(2\gamma - \gamma^2)n}]} . \quad (4.36)$$

Podemos comparar o resultado numérico observado na figura (3.3), com o resultado analítico obtido na equação (4.36). Observando a equação (3.9), vemos que para o caso numérico, a variável I_{RMS} faz duas médias, uma nas condições iniciais e outra ao longo da órbita. Para o cálculo da variável I_{RMS} no caso analítico, além da média das condições iniciais feita acima, equação (4.36), é preciso fazer a média em torno da órbita. Para isso faremos o seguinte procedimento [9]:

$$I_{RMS}(n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[I_0^2 e^{-(2\gamma-\gamma^2)n} + \frac{k^2}{2(2\gamma-\gamma^2)} [1 - e^{-(2\gamma-\gamma^2)n}] \right]}. \quad (4.37)$$

Elevado ao quadrado os dois lados da equação voltamos para a variável $\overline{I^2}$. Aplicando a propriedade distributiva no termo $\frac{k^2}{2(2\gamma-\gamma^2)} [1 - e^{-(2\gamma-\gamma^2)n}]$, e chamando os termos de

$$A = \frac{k^2}{2(2\gamma-\gamma^2)}, \quad (4.38)$$

$$B = (I_0^2 - \frac{k^2}{2(2\gamma-\gamma^2)}), \quad (4.39)$$

$$C = (2\gamma - \gamma^2), \quad (4.40)$$

a equação (4.37) fica:

$$\overline{I^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A + B e^{-Cn}). \quad (4.41)$$

Abrindo a somatória em n termos, teremos:

$$\overline{I^2} = \frac{1}{n} [(A + B e^{-C}) + (A + B e^{-2C}) + (A + B e^{-3C}) + \dots + (A + B e^{-nC})]. \quad (4.42)$$

Simplificando os termos, teremos:

$$\overline{I^2} = \frac{1}{n} [An + B(e^{-C} + e^{-2C} + e^{-3C} + \dots + e^{-nC})], \quad (4.43)$$

$$\overline{I^2} = A + \frac{B}{n} e^{-C} [1 + e^{-C} + e^{-2C} + e^{-3C} + \dots + e^{-(n-1)C}]. \quad (4.44)$$

Chamando os termos entre colchetes de S , com:

$$S = 1 + e^{-C} + e^{-2C} + e^{-3C} + \dots + e^{-(n-1)C}, \quad (4.45)$$

e multiplicando S por e^{-C} , temos:

$$Se^{-C} = e^{-C} + e^{-2C} + e^{-3C} + \dots + e^{-nC} . \quad (4.46)$$

Subtraindo as equações (4.46) e (4.45), obteremos:

$$S - Se^{-C} = 1 - e^{-nC} , \quad (4.47)$$

$$S(1 - e^{-C}) = 1 - e^{-nC} , \quad (4.48)$$

$$S = \frac{1 - e^{-nC}}{1 - e^{-C}} . \quad (4.49)$$

Logo a equação de $\overline{I^2}$, determinada na equação (4.44), é reescrita como:

$$\overline{I^2} = A + \frac{B}{n} e^{-C} \left(\frac{1 - e^{-nC}}{1 - e^{-C}} \right) . \quad (4.50)$$

Voltando para a equação (4.37), teremos o seguinte resultado:

$$I_{RMS}(n) = \sqrt{\frac{k^2}{2(2\gamma - \gamma^2)} + \left(\frac{\overline{I_0^2}}{n} - \frac{k^2}{2n(2\gamma - \gamma^2)} \right) e^{-(2\gamma - \gamma^2)} \left[\frac{1 - e^{-(2\gamma - \gamma^2)n}}{1 - e^{-(2\gamma - \gamma^2)}} \right]} . \quad (4.51)$$

Com o resultado acima, obtido na equação (4.51), podemos construir um gráfico de I_{RMS} como função de n e sobrepor esse resultado com as curvas mostradas na figura (3.3). Deste modo, observamos que o resultado analítico coincide com o resultado numérico, como poder ser visto na figura (4.2).

Com o resultado da equação (4.36) podemos encontrar os expoentes críticos analiticamente. Para isso analisaremos alguns casos particulares, esses casos serão apresentados a seguir.

Casos Particulares

Nessa seção iremos considerar alguns casos particulares para a equação de I_{RMS} :

1. Para $n = 0$, teremos na equação (4.36) que:

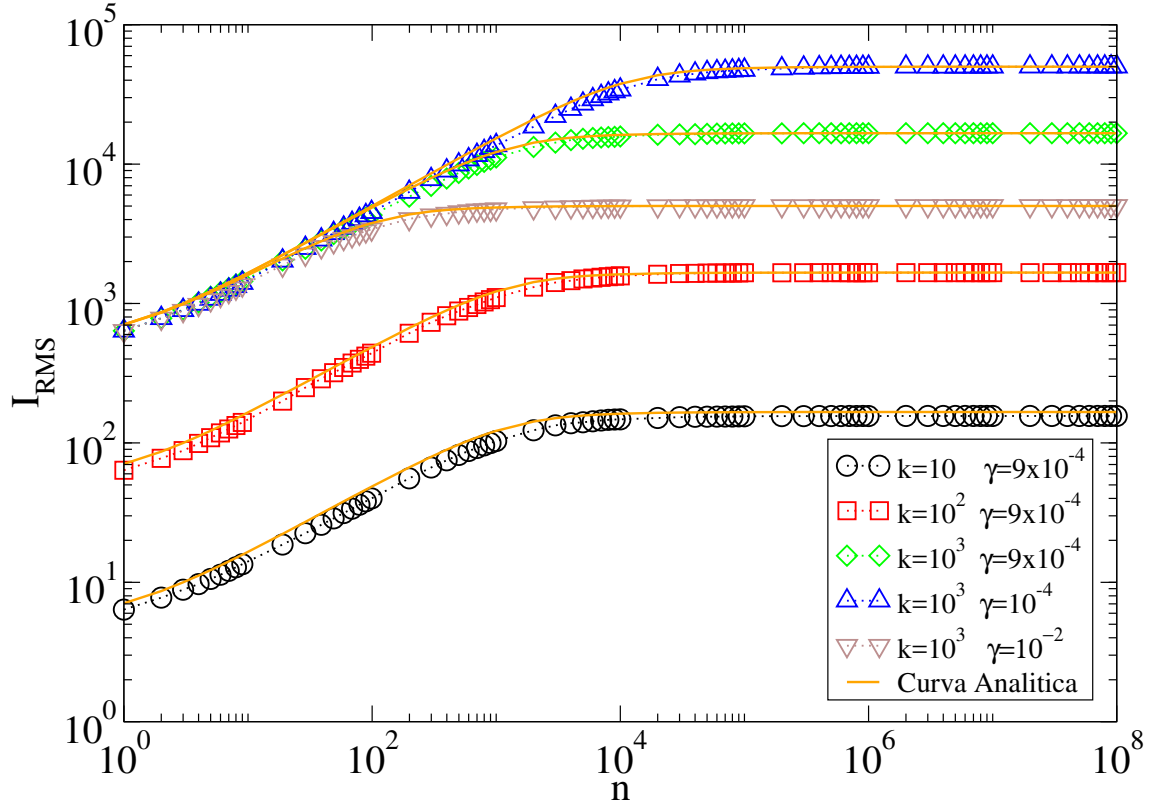


Figura 4.2: Sobreposição do resultado analítico obtido na equação (4.51) nas curvas de I_{RMS} mostrada na figura(3.3).

$$I_{RMS}(0) = \sqrt{I_0^2 - (2\gamma - \gamma^2)0 + \frac{k^2}{2(2\gamma - \gamma^2)}[1 - e^{-(2\gamma - \gamma^2)0}]} . \quad (4.52)$$

As exponenciais serão iguais a 1, de modo que

$$I_{RMS}(0) = \sqrt{I_0^2(1) + \frac{k^2}{2(2\gamma - \gamma^2)}[1 - 1]} . \quad (4.53)$$

O termo entre colchetes se anula, de modo que retornamos a condição inicial.

$$I_{RMS}(0) = \sqrt{I_0^2} = |I_0| . \quad (4.54)$$

2. Considerando $n \rightarrow \infty$, e sabendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-(2\gamma - \gamma^2)n}) = 0$, teremos na equação (4.36) que:

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{k^2}{2(2\gamma - \gamma^2)}} , \quad (4.55)$$

$$I_{RMS} = k \frac{1}{\sqrt{2\gamma(2-\gamma)}} , \quad (4.56)$$

$$I_{RMS} = \frac{k}{\sqrt{2}} (\gamma(2\gamma - \gamma^2))^{-\frac{1}{2}} . \quad (4.57)$$

Se considerarmos $\gamma \rightarrow 0$, o termo quadrático cresce mais rápido que o termo 2γ . Assim, o termo quadrado pode ser anulado, de modo que obteremos:

$$I_{RMS} \cong \frac{k^1}{\sqrt{2(2-\gamma)}} \gamma^{-\frac{1}{2}} . \quad (4.58)$$

A partir desse resultado, podemos obter os dois expoentes críticos $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Comparando a equação (4.58) com as hipóteses de escala (3.11), vistas no capítulo anterior, é possível perceber que os valores obtidos analiticamente coincidem com os valores obtidos numericamente.

4.1.3 Evolução Dinâmica

Nessa seção, faremos uma discussão de como o sistema evolui para o equilíbrio no caso $0 < \gamma < 1$ e para $I_0 \cong 0$. Assim teremos que a equação (4.36), ficará:

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{k^2}{2(2\gamma - \gamma^2)} [1 - e^{-(2\gamma - \gamma^2)n}]} . \quad (4.59)$$

Essa equação pode ser reescrita na forma

$$I_{RMS} = \frac{k}{\sqrt{2(2\gamma - \gamma^2)}} [1 - e^{-(2\gamma - \gamma^2)n}]^{\frac{1}{2}} . \quad (4.60)$$

Expandindo essa equação em série de Taylor, teremos

$$I_{RMS} = \frac{k}{\sqrt{2(2\gamma - \gamma^2)}} \left[\sqrt{(2\gamma - \gamma^2)n}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \sqrt{(2\gamma - \gamma^2)} \gamma(\gamma - 2) n^{\frac{3}{2}} + \dots \right] . \quad (4.61)$$

Se considerarmos somente o termo de primeira ordem da expansão, teremos

$$I_{RMS} \cong \frac{k}{\sqrt{2}\sqrt{(2\gamma - \gamma^2)}} \sqrt{(2\gamma - \gamma^2)n}^{\frac{1}{2}} . \quad (4.62)$$

Simplificando teremos o seguinte resultado

$$I_{RMS} \cong \frac{k}{\sqrt{2}} n^{\frac{1}{2}}. \quad (4.63)$$

Esse resultado nos permite concluir que o expoente de aceleração é $\beta = \frac{1}{2}$, coincidindo novamente com o resultado obtido numericamente, como podemos observar na figura (4.3). Considerando valores diferentes dos parâmetros de controle k e γ , conforme mostrado na legenda da figura.

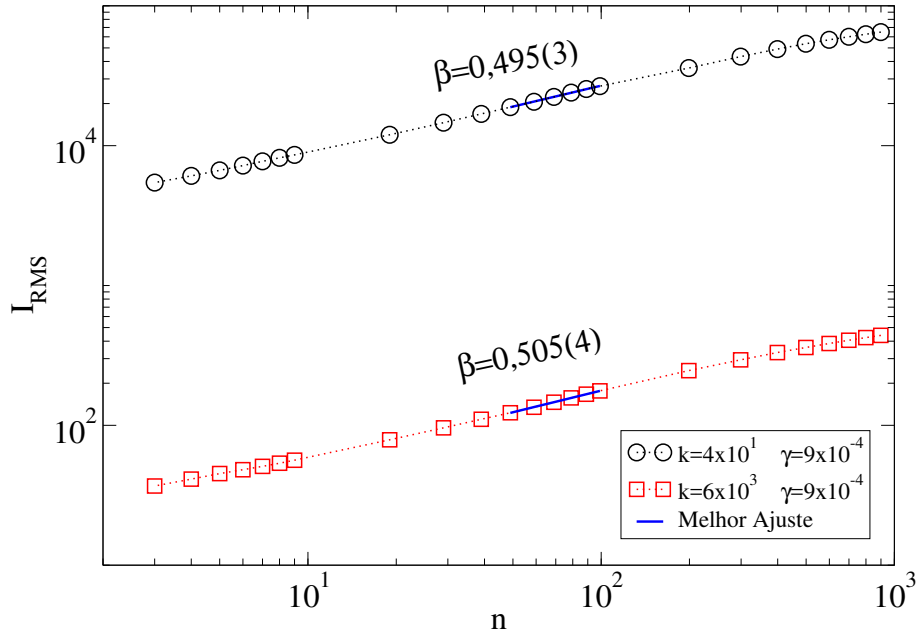


Figura 4.3: Gráfico de I_{RMS} x n para o mapa padrão dissipativo descontínuo com parâmetros de controle diferentes. Um ajuste em lei de potência fornece $\beta \cong 1/2$.

4.1.4 Obtenção do *Crossover* n_x

O número de *Crossover*, n_x , pode ser determinado igualando a equação (4.58) a equação (4.63). Número de *Crossover* é um número específico que determina a mudança do crescimento para a saturação, vista na figura (3.3). Teremos então

$$I_{RMS}(\infty) = I_{RMS}(I_0 \cong 0), \quad (4.64)$$

$$\frac{k}{\sqrt{2(2-\gamma)}} \gamma^{-\frac{1}{2}} = \frac{k}{\sqrt{2}} n^{\frac{1}{2}}, \quad (4.65)$$

$$\frac{k}{\sqrt{2}} (2-\gamma)^{-\frac{1}{2}} \gamma^{-\frac{1}{2}} = \frac{k}{\sqrt{2}} n^{\frac{1}{2}}, \quad (4.66)$$

$$(2-\gamma)^{-\frac{1}{2}} \gamma^{-\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}}, \quad (4.67)$$

$$n = \frac{\gamma^{-1}}{(2-\gamma)}. \quad (4.68)$$

Para $\gamma \cong 0$, obteremos:

$$n_x = \frac{1}{2}\gamma^{-1} . \quad (4.69)$$

Assim, comparando a equação (4.69) com a terceira hipótese de escala (3.12) poderemos concluir que $z_1 = 0$ e $z_2 = -1$.

4.2 Decaimento

Supondo $I_0 \gg k^2/2\gamma(2-\gamma)$, a equação de I_{RMS} , equação (4.36), tem o 2º termo desprezível, resultando em

$$I_{RMS}(n) = \sqrt{I_0^2 e^{-\gamma(2-\gamma)n}} , \quad (4.70)$$

$$I_{RMS}(n) = I_0 e^{-\frac{\gamma(2-\gamma)n}{2}} . \quad (4.71)$$

Se γ é pequeno, isto é, $\gamma \cong 0$, temos que $2-\gamma \cong 2$. Logo podemos escrever a equação acima como

$$I_{RMS}(n) = I_0 e^{-\gamma n} . \quad (4.72)$$

De acordo com a equação (4.72), o decaimento da variável ação é feita a partir de uma exponencial. Entretanto, podemos encontrar essa mesma equação iterando a primeira equação do mapeamento discreto, equação (3.1), a equação da variável ação, partindo de um par (I_0, θ_0) . Assim, teremos

$$I_{n+1} = (1-\gamma)I_n + kf(\theta_n)sen(\theta_n) , \quad (4.73)$$

$$I_1 = (1-\gamma)I_0 + kf(\theta_0)sen(\theta_0) , \quad (4.74)$$

$$I_2 = (1-\gamma)I_1 + kf(\theta_1)sen(\theta_1) . \quad (4.75)$$

Substituindo (4.74) em (4.75), obteremos

$$I_2 = (1-\gamma)^2 I_0 + k[(1-\gamma)f(\theta_0)sen(\theta_0) + f(\theta_1)sen(\theta_1)] . \quad (4.76)$$

Iterando o mapa novamente, e substituindo I_2 , teremos

$$I_3 = (1 - \gamma)I_2 + kf(\theta_2)\text{sen}(\theta_2) , \quad (4.77)$$

$$I_3 = (1 - \gamma)^3 I_0 + k[(1 - \gamma)^2 f(\theta_0)\text{sen}(\theta_0) + (1 - \gamma)f(\theta_1)\text{sen}(\theta_1) + f(\theta_2)\text{sen}(\theta_2)] . \quad (4.78)$$

Continuando as iterações, podemos encontrar uma generalização para a expressão acima, que será dada por

$$I_n = (1 - \gamma)^n I_0 + k \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \gamma)^{n-1-i} f(\theta_i)\text{sen}(\theta_i) \quad (4.79)$$

Tomando γ pequeno, e como vimos no Capítulo 2, a segunda parte da equação (4.79) depois da igualdade pode ser desconsiderada [11], logo teremos

$$I_n = (1 - \gamma)^n I_0 . \quad (4.80)$$

Expandindo a equação (4.80) em série de Taylor teremos que

$$(1 - \gamma)^n I_0 = I_0 + \ln(1 - \gamma)I_0 n + \frac{1}{2} \ln(1 - \gamma)^2 I_0 n^2 + \dots , \quad (4.81)$$

$$I_n = I_0 [1 + \ln(1 - \gamma)n + \frac{1}{2} \ln(1 - \gamma)^2 n^2 + \dots] . \quad (4.82)$$

Observando os termos dentro dos colchetes, percebemos que é exatamente a definição de exponencial, então I_n pode ser escrita como

$$I_n = I_0 e^{\ln(1-\gamma)n} . \quad (4.83)$$

Agora, fazendo novamente uma expansão em série de Taylor no termo da exponencial, teremos que

$$\ln(1 - \gamma) = -\gamma - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^3}{3} - \frac{\gamma^4}{4} + \dots . \quad (4.84)$$

Considerando apenas o termo de primeira ordem da série, temos finalmente

$$I_n = I_0 e^{-\gamma n} . \quad (4.85)$$

Esse resultado confirma o decaimento exponencial da variável ação, assumindo que

$I_0 \gg k^2/2\gamma(2-\gamma)$. Com a equação (4.85) é possível perceber também que o expoente de decaimento é dado por $-\gamma$. Com isso podemos construir as curvas de decaimento, $I \times n$, como pode ser visto na figura (4.4), (a) para valores diferentes de γ e I_0 . Fazendo um ajuste (curva em amarelo) utilizando as condições da curva preta, isto é $\gamma = 8 \times 10^{-4}$ e $I_0 = 12 \times 10^4$, vimos que o melhor ajuste foi por uma função exponencial do tipo $I = Ce^{Dn}$, onde $D = -0,00078465$ e $C = 11,633 \times 10^5$, confirmando novamente que a variável ação decai exponencialmente.

Observando a similaridade das curvas da figura (4.4)(a), pode-se fazer uma reescala nos eixos coordenados, do tipo $I \rightarrow \frac{I}{I_0}$ e $n \rightarrow \gamma$, vemos na figura (4.4)(b) que todas as curvas mostradas em (4.4)(a) sobrepõe em uma única curva universal, mostrando a invariância de escala. Novamente, o melhor ajuste a ser feito foi o ajuste exponencial do tipo $I = Ce^{Dn}$ (curva amarela), agora com expoente dado por $D = -0,98082$ e $C = 0,96941$.

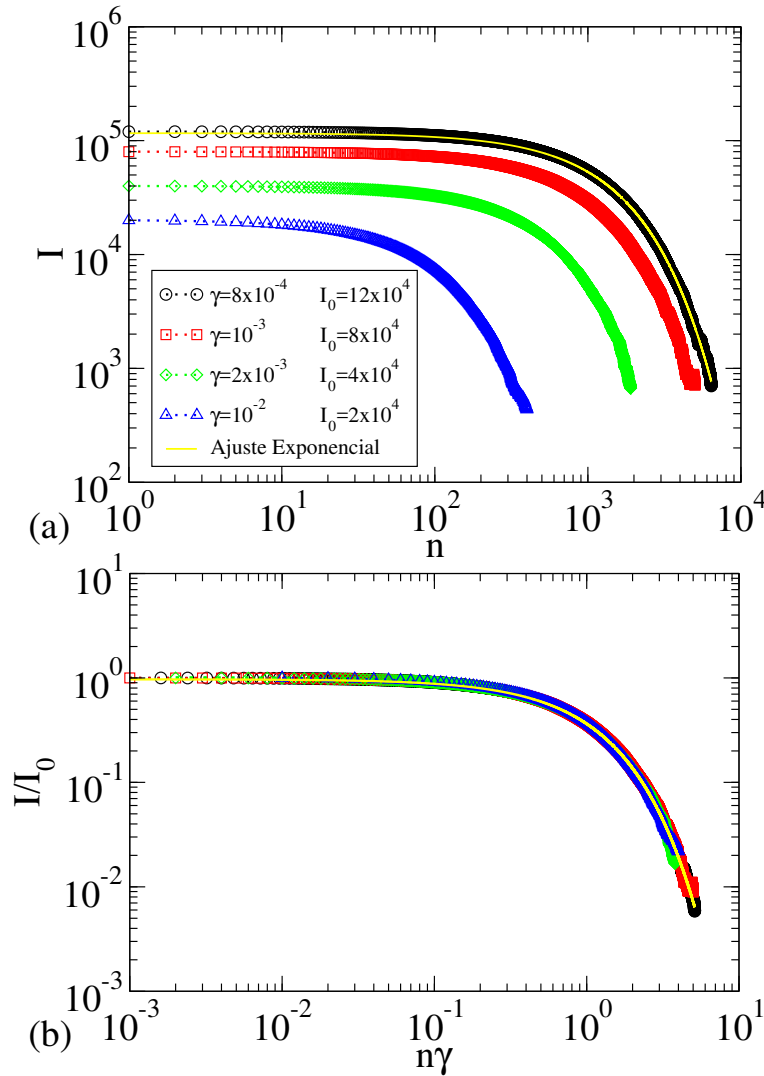


Figura 4.4: Decaimento para o atrator caótico considerando valores diferentes dos parâmetros de controle (conforme legenda). Em (a) o comportamento de $I \times n$ para diferentes condições iniciais e $k = 10$. (b) sobreposição de todas as curvas para uma única curva universal.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Estudamos nesse trabalho algumas propriedades do mapa padrão. Foi considerado três situações diferentes, o caso conservativo, o caso dissipativo e o caso dissipativo descontínuo.

Inicialmente, foi feita uma revisão dos cálculos para encontrar as equações do mapa padrão conservativo. A partir da Hamiltoniana do sistema do Rotor Pulsado, discretizamos e resolvemos as equações de movimento, assim encontramos as equações que descrevem o mapa padrão conservativo. A partir destas equações obtivemos os casos dissipativo e dissipativo descontínuo.

Para todos os mapas foram calculados os expoentes de Lyapunov. Em todas as situações encontramos expoentes positivos, podendo assim, caracterizar o caos para todos os casos.

Para o mapa padrão dissipativo e dissipativo descontínuo mostramos analiticamente e numericamente, que as estruturas vistas no modelo conservativo são destruídas e decaem exponencialmente para atratores caóticos com expoente de decaimento dado por $-\gamma$.

Aprofundamos nossos estudos no mapa padrão dissipativo descontínuo, estudando a raiz quadrada da média da variável ação, I_{RMS} , ao longo dos atratores caóticos. Conseguimos encontrar as curvas para I_{RMS} , analítica e numericamente, conseguindo uma boa sobreposição dessas curvas, possibilitando assim, a uma boa aproximação do estudo fenomenológico com o estudo numérico.

Com o estudo de I_{RMS} , foi possível encontrar os expoentes críticos que são, o expoente de aceleração β , os expoentes de saturação α_1 e α_2 , e os expoentes dinâmicos z_1 e z_2 .

Os expoentes críticos foram encontrados tanto numericamente quanto analiticamente, obtendo resultados semelhantes para ambos os casos, que podem ser visto na tabela a seguir:

Estes expoentes são os mesmos encontrados na literatura para o modelo de bouncer [18, 23, 24]. Além disso, a função de descontinuidade não interfere nos expoentes críticos obtidos para o mapa padrão dissipativo [1]. Também foi observado um colapso universal de todas as curvas das médias da variável ação, validando assim as hipóteses de escala que foram

Tabela 5.1: Comparações entre os valores analíticos e numéricos dos expoentes críticos

	expoente de aceleração	expoente de saturação	expoente dinâmicos
analítico	$\beta = 0,5(8)$	$\alpha_1 = 1,0$ e $\alpha_2 = -0,5$	$z_1 = 0$ e $z_2 = -1$
numérico	$\beta = 0,498(8)$	$\alpha_1 = 1,002(1)$ e $\alpha_2 = -0,4969(3)$	$z_1 = -0,01(1)$ e $z_2 = -0,9939(7)$

propostas.

Nossas perspectivas para a continuação desse trabalho é investigar o espaço de parâmetros a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov e dos pontos fixos para o mapa padrão dissipativo descontínuo. Esse estudo tem o intuito de investigar as estruturas de auto singularidade.

Referências Bibliográficas

- [1] FRANCISCO, C. H. *Leis de escala para o mapa padrão dissipativo*. 2015. 33 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2015.
- [2] JOUSSEPH, C. A. C. *Propriedades do Mapa Padrão na Transição do Conservativo para o Dissipativo*. 2014. 104f. Tese (Doutorado em Física) – Setor de Ciências exatas, Universidade Federal do Paraná. Curitiba. 2014.
- [3] WOELLNER, C. F. *Aspectos dinâmicos de uma rede de mapas Hamiltonianos acoplados*. 2006. 68f. Dissertação (Mestrado em Física) – Setor de Ciências Exatas da Universidade do Paraná, Universidade do Paraná, Curitiba. 2006.
- [4] POINCARÉ, H. *Les Méthodes Nouvelle de la Méchanique Céleste*. GAUTHIER-VILLARS, 1899.
- [5] POINCARÉ, H. *Sur le Problème des Trois Corps et les Équations de la Dynamique*. ACTA MATH. v. 13, p.1-271, 1890.
- [6] FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. *Caos: Uma introdução*. 1a Reimpressão. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1995. 402p.
- [7] CHIRIKOV, B. V. *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*. PHYSICS REPORTS, v. 52, n. 5, p. 263-379, 1979.
- [8] LICHTENBERG, A. J. LIEBERMAN, M. A. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2a edição. New York: Springer, v. 38, 1992. 692p.
- [9] LEONEL, E. D. *Fundamentos da Física Estatística*. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 2015. 418p.
- [10] LEONEL, E. D.; McCLINTOCK P. V. E. *Effect of a fractional force on the Fermi–Ulam model*. JOURNAL OF PHYSICS. v. 39, n. 37, p. 11399-11415, 2006.
- [11] PIASSI, V. S. M.; et al. *Arnold family in acoustically forced air bubble formation*. CHAOS, SOLITONS AND FRACTALS. v. 41, p. 1041-1049, 2009.

- [12] LEONEL, E. D.; de CARVALHO, E. *A family of crisis in a dissipative Fermi accelerator model. PHYSICS LETTERS A.* v. 364, p. 475-479, 2007.
- [13] de OLIVEIRA, J. A.; LEONEL, E. D. *The effect of weak dissipation in two-dimensional mapping. INT. JOURNAL BIFURCATION CHAOS.* v. 22, p. 1250248-1250256, 2012.
- [14] TAVARES, D. F.; LEONEL E. D. *A Simplified Fermi Accelerator Model Under Quadratic Frictional Force. BRAZILIAN JOURNAL OF PHYSICS.* v. 38, n. 1, p. 58-61, 2008.
- [15] LIEBERMAN, M. A.; TSANG, K. Y. *Transient Chaos in Dissipatively Perturbed, Near-Integrable Hamiltonian Systems. PHYSICAL REVIEW LETTERS* v. 55, n. 9, p. 908-911, 1985.
- [16] LUCK, J. M.; MEHTA A. *Bouncing ball with a finite restitution: Chattering, locking, and chaos. PHYSICAL REVIEW E.* v. 48, n. 5, p. 3988-3997, 1993.
- [17] TSANG K. Y.; LIEBERMAN M. A. *Analytical calculation of invariant distributions on strange attractors. PHYSICA D: NONLINEAR PHENOMENA* v. 11, p. 147-166, 1984.
- [18] de OLIVEIRA, J. A.; LEONEL E. D. *Dissipation and its consequences in the scaling exponents for a family of two-dimensional mappings. JOURNAL OF PHYSICS A* v. 45, p. 165101-165111, 2012.
- [19] HORSTMANN, A. C. da C. *Estudo da Dinâmica do Mapa Padrão Dissipativo Relativístico.* 2014. 77f. Dissertação (Mestrado em Física) – Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade do Estado de Santa Catarina. Joinville. 2014.
- [20] SANDRI M. *Numerical Calculation of Lyapunov Exponents.* The Mathematica Journal, Itália, v. 6, n. 3, p. 78-84, 1996.
- [21] SUSSMAN, G. J.; WISDOM, J. *Structure and Interpretation of Classical Mechanics.* v. 1, MIT Press; 2nd Revised edition, 2015.
- [22] STEWART, J. *Cálculo.* 5a Edição. São Paulo: Thomson Learning, 2006. 581p.
- [23] LIVORATI, A. L. P.; LADEIRA, D. G.; LEONEL, E. D. *Scaling investigation of Fermi acceleration on a dissipative bouncer model. PHYSICAL REVIEW E.* v. 78, p. 056205-056217, 2008.
- [24] LEONEL, E. D.; LIVORATI, A. L. P. *Describing Fermi acceleration with a scaling approach: bouncer model revisited. PHYSICA A.* v. 387, p. 1155-1160, 2008.