UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

Ulcilea Alves Severino Leal

Incerteza Intervalar em Otimização e Controle

Tese de Doutorado
Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000
São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Ulcilea Alves Severino Leal[1]

Incerteza Intervalar em Otimização e Controle

Orientador:
Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

Co-orientador:
Prof. PhD. Weldon A. Lodwick

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Campus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto

3 de Junho de 2015

[1]ulcilea0803@hotmail.com

Leal, Ulcilea Alves Severino.

Incerteza Intervalar em Otimização e Controle / Ulcilea Alves Severino Leal. – São José do Rio Preto, 2015.

164 f. : il.

Orientador: Geraldo Nunes Silva.

Co-orientador: Weldon A. Lodwick.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Matemática. 2. Teoria do controle. 3. Otimização matemática. 4. Análise de intervalos (Matemática). I. Silva, Geraldo Nunes. II. Lodwick, Weldon A. III. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.

CDU - 517.91.01

Ulcilea Alves Severino Leal

Incerteza Intervalar em Otimização e Controle

Tese apresentada para obtenção do título de Doutorado em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof. PhD. Weldon A. Lodwick
Co-orientador - University of Colorado Denver

Prof. Dr. Yurilev Chalco-Cano
Universidade de Tarapacá

Prof. Dr. Valeriano A. de Oliveira
Universidade Estadual Paulista

Profa. Dra. Elizabeth Wegner Karas
Universidade Federal do Paraná

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
Universidade Estadual Paulista

São José do Rio Preto, 3 de Junho de 2015.

À minha família por acreditar e apoiar os meus sonhos.

Em especial os meus pais, Wilson e Léa.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus por ter me dado a vida, todas as coisas boas que tem me proporcionado e também, pela força necessária sempre presente para superar as dificuldades.

Ao meu esposo, Aguinaldo, quem sempre esteve ao meu lado, me incentivando nos momentos de desânimo e me estimulando ainda mais nos momentos de motivação. Muito obrigada pelo carinho, atenção, compreensão e toda a paciência durante esse período.

À minha família, Wilson Carlos e Léa Sílvia, meus pais, Ulisses Antônio, meu irmão, pelo amor, carinho e apoio incondicional.

Aos Professores Doutores Geraldo Nunes Silva, meu orientador, e Weldon A. Lodwick, meu co-orientador, pela confiança, atenção, compreensão, orientação e dedicação durante a realização deste trabalho.

A todos os meus amigos da Pós-Graduação - especialmente a Daniella Porto, o Gino Maqui e o José Renato, pelas trocas de informações e o ótimo convívio durante esses anos. Além disso, gostaria de agradecer a todos os professores do Departamento de Matemática e Matemática Aplicada.

A todos da UFMS, campus Chapadão do Sul, em especial ao diretor Fábio Baio e os coordenadores Alexandre Beutling e Luis Gustavo.

A FAPESP[2] e a Capes[3] pelo auxílio financeiro.

[2]Bolsa 2012/00189 – 3.
[3]Bolsa BEX 11153/13 – 0.

"*A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo.*"

Albert Einstein

RESUMO

O propósito desta pesquisa consiste no estudo de incerteza do tipo intervalar em problemas de otimização e controle. Para os problemas de otimização de valor intervalar foi exposto o processo de determinação das soluções, foram determinadas as condições necessárias e apresentadas as condições suficientes utilizando a diferenciabilidade extremal, para três diferentes conceitos de solução. O problema de controle ótimo de valor intervalar foi formulado e as condições de otimalidade, necessárias e suficientes, foram demonstradas, utilizando os conceitos de diferenciabilidade extremal e generalizada de Hukuhara, sob determinadas hipóteses de convexidade, para três diferentes conceitos de solução. Somando-se a isto, esses resultados foram aplicados no problema de controle de plantas daninhas, com função lucro de valor intervalar, descrevendo-se os cenários, pessimista e otimista, da lucratividade na produção de milho. Por outro lado, o arcabouço teórico da análise intervalar, segundo a aritmética intervalar restrita *single level*, foi desenvolvido considerando tanto as funções de valor intervalar quanto as funções intervalares. Para a integral e derivada *single level* de funções de valor intervalar foi proposto o teorema fundamental do cálculo e, além disso, esses conceitos foram aplicados na determinação de solução dos problemas de valor inicial intervalar. Neste âmbito, obteve-se o teorema de existência e da unicidade. Uma formulação para os problemas de controle ótimo totalmente intervalar foi apresentada e derivou-se as condições de otimalidade para o problema em questão, utilizando a diferenciabilidade $\lambda-$*single level* e as hipóteses de convexidade das funções intervalares envolvidas no problema.

Palavras-chave: incerteza intervalar, otimização, controle ótimo, condições de otimalidade, cálculo *single level*.

ABSTRACT

The purpose of this research is to look at interval uncertainty in optimization problems and control. We present a process to determine the solutions of interval-valued optimization problems. Using extremal differentiability, we demonstrate the necessary conditions and present the sufficient conditions for three different concepts of solutions. In this study, we formulated the problem of interval-valued optimal control and demonstrated the optimality of necessary and sufficient conditions using extremal differentiability and generalized Hukuhara differentiability under assumptions of convexity. Furthermore, we applied these results in the area of weed management and control with an interval-valued objective function in order to describe the best and worst-case scenarios for crop profitability in corn. The results for the interval analysis theory were found according to single-level constraint interval arithmetic for both the interval-valued functions and the interval functions. We defined the concept of single-level integral and derivative for interval-valued functions and obtained the fundamental theorem of calculus for the interval context. Using this concept, we then analyzed interval ordinary differential equations and obtained the existence and uniqueness theorem of the solution. Considering that the interval functions developed were $\lambda-$single-level differentiable, we formulated the interval optimal control problem and demonstrated the necessary and sufficient optimality conditions under assumptions of convexity for the problem in question.

Keywords: interval uncertainty, single-level calculus, optimization, optimal control, optimality conditions.

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos	**Descrição**
K_C^n	espaço dos conjuntos não-vazios compactos e convexos do $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{I}(\mathbb{R})$	conjunto de intervalos fechados e limitados da reta real
A, B, X	elementos de $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{I}(\mathbb{R})^n$
$[\mathbf{A}]$	matriz intervalar
$[B]$	vetor intervalar
$\mathbf{X}$	subconjunto de $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{I}(\mathbb{R})^n$
x, $\mathbf{x}$	elementos de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$
a^S e a^C	largura e centro do intervalo A
$\parallel X \parallel$	norma do intervalo X
d, d_C e H	métrica definida pela norma, C-diferença e Pompeiu-Hausdorff
F	função de valor intervalar ou intervalar
F'	derivada clássica para funções reais
F'_{gH}	derivada generalizada de Hukuhara
$(\frac{\partial F}{\partial x_j})_{gH}$	$j-$ésima gH-derivada parcial
∇_{gH}	gradiente via gH-derivadas parciais
$D_{SL}F$	derivada *single level*
$D_{SL}^k F$	$k-$ésima SL-derivada de F
$(\frac{DF}{DX_j})_{SL}$	$j-$ésima SL-derivada parcial
∇_{SL}	gradiente via SL-derivada
$\mathcal{F}$	integral indefinida da função de valor intervalar F
$\leq_M$	relação de ordem segundo Moore
$\leq_{LU}$	relação de ordem LU
$\preceq$	relação de ordem *single level*
$\leq_{LS}$	relação de ordem LS
$\leq_{UC}$	relação de ordem UC
$\widehat{C}([t_0, t_1]; \mathbb{R})$	funções contínuas por partes em $[t_0, t_1]$ com valores em $\mathbb{R}$
$\widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R})$	funções cont. diferenciáveis por partes em $[t_0, t_1]$ com valores em $\mathbb{R}$
$\mathcal{F}(\mathbf{X}; \mathbb{I}(\mathbb{R}))$	conjunto das funções intervalares em $\mathbf{X}$ com valores em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$
$C_{SL}^k(\mathbf{X}, \mathbb{I}(\mathbb{R}))$	funções $k-$vezes cont. SL-diferenciáveis em $\mathbf{X}$ com valores em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A análise intervalar tem se tornado campo ativo de pesquisa e aplicação, e essa, por sua vez, trata-se de um contexto matemático relativamente novo, no ímpeto que os primeiros trabalhos surgiram em 1959. Mais precisamente, a aritmética intervalar fundamentou-se na publicação de R. C. Young em 1931, *The algebra of many-valued quantities* (Young, 1931), já o conceito de função intervalar, que é um ramo da análise intervalar, pode ser encontrada no artigo de J. C. Burkill, em 1924 (Burkill, 1924), sendo o primeiro artigo em análise intervalar. Contudo, a aritmética intervalar foi amplamente estudada e bem desenvolvida, pela primeira vez, em 1956, com a publicação do matemático Polonês M. Warmus (Warmus, 1956). Em 1958, o matemático japonês T. Sunaga (Sunaga, 2009)[1], também apresentou, independentemente, uma publicação neste âmbito.

Essas publicações são consideradas como as duas primeiras publicações sobre aritmética intervalar. Além disso, um terceiro desenvolvimento independente da aritmética intervalar foi proposta por R. E. Moore, em 1959 (Moore e Yang, 1959). Mesmo que Warmus e Sunaga precederam a Moore, nem Warmus, nem Sunaga e nenhum dos seus colaboradores foram além do respectivo artigo publicado. Foi Moore e seus colaboradores quem desenvolveram a área de análise intervalar (Moore e Yang, 1959; Moore, 1966; Moore, 1969; Moore, 1979; Moore, 1985). A aritmética intervalar, desenvolvida por Moore (1966), é considerada como aritmética intervalar padrão ou usual. Um desenvolvimento histórico da aritmética intervalar pode ser encontrado em Hansen (2001) e, mais atualmente, em Lodwick (2007).

[1]Reimpresso em Sunaga (2009).

O espaço intervalar, com as operações da aritmética intervalar padrão, não possui a estrutura de espaço vetorial, pois a negação não é o inverso aditivo e, assim, a subtração não está bem definida (Aubin e Cellina, 1984; Diamond e Kloeden, 1994). Uma alternativa é a subtração proposta por Hukuhara (1967), chamada de diferença de Hukuhara (H-diferença), todavia essa diferença é única, porém nem sempre existe. Visando superar essa restrição, Stefanini e Bede (2009) apresentaram uma generalização da diferença de Hukuhara (gH-diferença), e essa diferença existe para quaisquer dois intervalos. No âmbito das aritméticas intervalar, Markov (1977) introduziu outro padrão de aritmética intervalar, que será chamada de aritmética intervalar de Markov. Essa aritmética possui algumas equivalências com as outras aritméticas, tais como: a soma é igual a soma usual proposta por Moore (1966), a diferença é igual a diferença generalizada de Hukuhara, proposta por Stefanini e Bede (2009). Porém, o produto e a divisão não existem quando algum dos intervalos envolvidos são simétricos.

A aritmética intervalar padrão leva à sobrestimação geral, pois considera todas as estimações das variáveis como sendo independentes, além disso, a simples noção $A - A = [0, 0]$ e $A \div A = 1$, tal que o 0 não pertença ao intervalo A, são propriedades desejáveis e que não são obtidas. Lodwick (1999) propôs uma extensão para aritmética intervalar padrão, chamada aritmética intervalar restrita. Essa aritmética considera todas as possíveis variações dentro de um intervalo independente. Além disso, a aritmética intervalar restrita possui um inverso aditivo, multiplicativo, e detém as leis de distribuição. Recentemente, Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) propuseram uma nova aritmética intervalar decorrente da aritmética proposta por Lodwick (1999), onde sempre se considera o mesmo nível para cada intervalo envolvido nas operações. Essa nova aritmética é chamada de aritmética intervalar restrita *single level*.

A análise intervalar tem-se difundido a partir das diferentes aritméticas intervalares propostas (ver (Moore, 1966; Hukuhara, 1967; Moore, 1969; Banks e Jacobs, 1970; Markov, 1979; Aubin e Cellina, 1984; Moore, 1985; Aubin e Frankowska, 1990; Alefeld e Mayer, 2000; Wu, 2009a; Stefanini e Bede, 2009; Chalco-Cano, Román-Flores e Jiménez-Gamero, 2011; Chalco-Cano et al., 2013)). Mais precisamente, Banks e Jacobs (1970) e Hukuhara (1967) introduziram o conceito de H-diferenciabilidade para função de valor intervalar usando a H-diferença. Outra alternativa de derivada para função de valor intervalar foi introduzida por Bede e Gal (2005) e Chalco-Cano e Román-Flores (2008). A fortemente diferenciável generalizada (G-diferenciabilidade) (Bede e Gal, 2005) foi definida considerando as H-derivadas laterais (quatro casos). Já o conceito de diferenciabilidade proposto Chalco-Cano e Román-Flores (2008) consiste de um caso particular da

G-diferenciabilidade, desde que, esse novo conceito considera apenas dois dos casos da G-diferenciabilidade. Recentemente, Stefanini e Bede (2009) introduziram o conceito de gH-diferenciabilidade baseado na generalização da H-diferença entre dois intervalos (Stefanini e Bede, 2009; Stefanini, 2010). Esses autores também apresentaram as relações entre os conceitos de G-diferenciabilidade e gH-diferenciabilidade mostrando a equivalência entre esses dois conceitos, quando o conjunto de *switching points* da função de valor intervalar é finito. Somando-se a isto, o conceito de gH-diferenciabilidade também coincide com a diferenciabilidade proposta por Markov (1979) e a π-diferenciabilidade proposta por Plotnikova (2005). Wu (2007) definiu o conceito de diferenciabilidade para uma função de valor intervalar, considerando a diferenciabilidade das funções extremas. No presente texto, buscar-se-á desenvolver os conceitos de análise intervalar, segundo essa nova aritmética e os resultados serão aplicados em equação diferencial intervalar e em problemas de controle ótimo intervalar.

A importância do estudo da análise intervalar a partir de um ponto de vista teórico, bem como de suas aplicações, é bem conhecida (Aubin e Cellina, 1984; Aubin e Frankowska, 1990). Muitos avanços da análise intervalar têm sido motivados pela programação matemática e teoria de controle (Aubin e Franskowska, 2000). No âmbito das aplicações, em geral, os problemas possuem coeficientes como sendo valores fixos e determinísticos. Porém, existem muitas situações onde esta suposição não é válida, nestes casos, em específico, onde o problema envolve algum tipo de incerteza. Assim, métodos de tomada de decisão sobre incerteza são necessários. Em problemas de programação estocástica (Charnes e Cooper, 1959; Sengupta, 1972), os coeficientes são considerados como variáveis aleatórias e assume-se que são conhecidas as distribuições de probabilidade. Por outro lado, nos problemas de programação fuzzy (Bellman e Zadeh, 1970; Tanaka, Okuda e Asai, 1974; Zimmerman, 1976), os coeficientes e o objetivo são considerados como conjuntos fuzzy. Neste caso, pressupõe-se que são conhecidas as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy. Considerando que as distribuições de probabilidade e as funções de pertinência desempenham papéis importantes em cada método e essas nem sempre são fáceis para o tomador de decisão especificá-las, uma maneira de superar essas situações é através da adoção de incerteza do tipo intervalar para os problemas.

Os artigos de Britton (2003), Ishibuchi e Tanaka (1990), Inuiguchi e Kume (1991), Ida (1996), Ida e Katai (1993), Inuiguchi e Sakawa (1995), Chanas e Kuchta (1996), Das, Goswami e Alam (1999) e mais recentemente Hyong-Yi (2007), Jiang et al. (2008), Oliveira e Antunes (2007), Wu (2003a), Wu (2003b), Wu (2007), Wu (2009a), Wu (2009b), Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana (2013), Bhurjee e Panda (2014) apresentam um desenvolvimento da programação matemática intervalar. O conceito de derivada de função de valor intervalar é de fundamental importância no desenvolvimento e no estudo da programação matemática. Recentemente, a H-derivada tem sido usada para estudar programação matemática não linear (Wu, 2007; Wu, 2009a; Wu, 2009b). Em particular, Wu (2007) obteve as condições suficientes para o problema de otimização, com função objetivo de valor intervalar, usando a H-diferenciabilidade e a diferenciabilidade extremal para as funções de valor intervalar. Subsequentemente, essas ideias foram estendidas para os problemas de programação multi-objetivo, com funções objetivos de valor intervalar (Wu, 2009a). Posteriormente, Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana (2013) obtiveram condições suficientes utilizando o conceito de diferenciabilidade generalizada de Hukuhara. No âmbito dos problemas de otimização matemática, o presente texto descreverá o processo de determinação de três diferentes conceitos de solução e, além disso, desenvolverá as condições necessárias, utilizando a diferenciabilidade extremal para esses três conceitos de solução.

No que diz respeito ao cálculo das variações e controle ótimo, as derivadas de valor intervalar foram amplamente utilizadas. Por exemplo, Mordukhovich (2006a) e Mordukhovich (2006b) obtiveram condições de otimização, e Tolstonogov (2000) utilizou a H-derivada para explorar uma ampla gama de resultados em espaço de Banach. Todavia, o espaço dos intervalos não é um espaço vetorial, sendo necessário o desenvolvimento dos conceitos de análise intervalar. Neste âmbito, utilizando os conceitos de diferenciabilidade extremal e generalizada de Hukuhara, este texto propõe as condições de otimalidade, necessárias e suficientes, para três conceitos de soluções do problema, sob hipóteses de convexidade. Somando-se a isto, a partir do desenvolvimento da análise intervalar, segundo a *single level*, as condições de otimalidade também serão propostas para os problemas de controle ótimo totalmente intervalar, utilizando o conceito de diferenciabilidade $\lambda-$*single level*.

Os objetivos do presente trabalho serão melhores detalhados na seção adiante.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é o estudo de incerteza intervalar nos problemas de otimização e controle. Neste âmbito, um arcabouço teórico, no que diz respeito as condições de otimalidade para esses problemas, será desenvolvido, considerando os diferentes conceitos de solução do problema. Neste enfoque, os objetivos específicos do trabalho consistem em:

1. Definir o problema no âmbito intervalar a ser enfocado;

2. Apresentar os diferentes conceitos de soluções do problema e suas relações;

3. Para cada tipo de solução dos problemas de otimização de valor intervalar, propor condições de otimalidade, mais precisamente, condições necessárias do tipo Fritz-John e Harush-Kuhn-Tucker, sob hipótese de convexidade, utilizando a derivada extremal e a derivada generalizada de Hukuhara.

Uma aplicação do problema de controle ótimo de valor intervalar será explorada, mais especificamente, trata-se do problema de controle de plantas daninhas, problema esse já estudado pelo autora em Leal (2012), contudo, agora, levando em consideração os cenários, pessimista e otimista, da lucratividade em uma lavoura de milho.

Por outro lado, analisando as propriedades da aritmética intervalar restrita *single level*, o presente trabalho também tem como objetivo desenvolver a análise intervalar *single level*, considerando a função intervalar e a função de valor intervalar, uma vez que o espaço dos intervalos, com essa aritmética, não é um espaço vetorial. Em adição, esses resultados serão aplicados em equações diferenciais e em problemas de controle. Neste contexto, os objetivos específicos do trabalho consistem em:

1. Definir sequência, limite, continuidade e derivada para função intervalar;

2. Considerando a função de valor intervalar, obter as suas propriedades e as equivalências com os resultados presentes na literatura;

3. Definir as derivadas de ordem superior e as derivadas parciais para a função intervalar;

4. Apresentar o conceito de integral de valor intervalar e suas propriedades;

5. Propor um teorema fundamental do cálculo e um teorema da existência e a unicidade para as equações diferenciais intervalares, considerando o caso particular de função de valor intervalar;

6. Aplicar esses conceitos nos problemas de controle ótimo totalmente intervalares, obtendo-se as condições de otimalidade neste contexto.

1.2 Organização do trabalho

O presente texto está divido em 8 Capítulos. No Capítulo 2, serão apresentados alguns resultados da literatura referentes às aritméticas intervalar e análise intervalar, que serão necessários para o desenvolvimento das abordagens propostas no decorrer do texto.

No Capítulo 3, o problema de otimização matemática de valor intervalar será explorado. Apresentar-se-ão as relações de ordem utilizadas para comparar os intervalos, os conceitos de solução do problema, a partir das diferentes relações de ordem, e as condições de otimalidade, necessárias e suficientes, do problema em questão, via três diferentes conceitos de soluções.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo dos problemas de controle ótimo, com funcional objetivo de valor intervalar. O problema será formalizado e serão apresentados os diferentes conceitos de soluções para o problema via cada relação de ordem, e também, suas implicações. Além disso, serão propostas as condições de otimalidade, necessárias e suficientes, para os problemas de controle ótimo em questão, utilizando o conceito de derivada extremal e de derivada generalizada de Hukuhara, sob a hipóteses de convexidade.

Uma aplicação do problema de controle ótimo, com função objetivo de valor intervalar, no sistema de controle de plantas daninhas em uma lavoura de milho, considerando os cenários, pessimista e otimista, na lucratividade, será apresentada no Capítulo 5.

O Capítulo 6 desenvolve o arcabouço teórico da análise intervalar segundo a aritmética intervalar restrita *single level*, considerando a função intervalar. Mais precisamente, os conceitos de sequência, de limite, de continuidade e de derivada. Além disso, para o caso particular de função de valor intervalar, no âmbito de derivada, este capítulo estuda as suas propriedades e equivalências com os conceitos já existentes. Somando-se a isto, para função de valor intervalar, apresentar-se-ão o conceito de integral, o teorema fundamental do cálculo, uma aplicação em equação diferencial intervalar e, também, o teorema de existência e da unicidade.

No Capítulo 7, serão apresentadas as condições de otimalidade para os problemas de controle ótimo, totalmente intervalares, utilizando a derivada λ-*single level*. Finalmente, no Capítulo 8 serão expostas as considerações finais.

CAPÍTULO 2 ANÁLISE INTERVALAR

Neste capítulo, apresentar-se-ão alguns conceitos da aritmética intervalar e a análise intervalar presentes na literatura. No enfoque das aritméticas intervalares, os conceitos apresentados serão a aritmética intervalar usual e via gH-diferença, a aritmética intervalar de Markov, a aritmética intervalar restrita, a aritmética intervalar restrita *single level* e suas respectivas propriedades. Já para a análise intervalar, serão expostos os conceitos de diferenciabilidade, definido a partir da H-diferença e da gH-diferença, bem como as suas propriedades e equivalências.

2.1 Aritmética intervalar

Nesta seção, alguns conceitos da aritmética intervalar serão brevemente apresentados, iniciando-se pela aritmética intervalar usual proposta por Moore (1966) e, em seguida, algumas aritméticas decorrentes dessa. Além disso, serão expostos outros conceitos de aritmética intervalar, mais precisamente, a aritmética intervalar de Markov (Markov, 1977), a aritmética intervalar restrita (Lodwick, 1999) e a recente aritmética intervalar, proposta por Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014), a aritmética intervalar restrita *single level*.

Considere o espaço $n-$dimensional dos números reais $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{K}_C^n$, o espaço dos conjuntos não-vazios compactos e convexos do $\mathbb{R}^n$. Se $n = 1$, o espaço dos conjuntos $\mathcal{K}_C^1$ será denotado por $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, o conjunto de intervalos fechados e limitados da reta real.

A aritmética intervalar usual em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ é proposta por Moore (1966), onde dados dois elementos $A, B \in \mathcal{K}_C^n$ e $k \in \mathbb{R}$, as operações da *aritmética intervalar usual* são definidas por[1]:

$$A * B = \{c = a * b;\ \ a \in A \text{ e } b \in B, * \in \{+, -, \times, \div\}\},$$
$$kA = \{ka;\ \ a \in A\}.$$

Seja A um intervalo fechado e limitado, onde os pontos extremos de A são denotados por $\underline{a}$ e $\overline{a}$, assim:

$$A = [\underline{a}, \overline{a}] = \{x \in \mathbb{R};\ \ \underline{a} \leq x \leq \overline{a}\}.$$

A abordagem desenvolvida, no presente texto, será somente para intervalos fechados. Considerando que A e B sejam dois intervalos, denotados por $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ e $B = [\underline{b}, \overline{b}]$, respectivamente, então a adição e a multiplicação por escalar via a aritmética usual é dada por:

$$A + B = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}],$$
$$kA = \begin{cases} [k\underline{a}, k\overline{a}] \text{ se } k \geq 0, \\ [k\overline{a}, k\underline{a}] \text{ se } k < 0. \end{cases}$$

É bem conhecido que a adição é associativa, comutativa e com o elemento neutro $[0, 0]$. Se $k = -1$, a multiplicação por escalar resulta na negação de A,

$$-A = (-1)A = [-\overline{a}, -\underline{a}].$$

Das operações acima, tem-se que: $A - B = A + (-1)B = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}]$. O espaço intervalar, $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, com essas operações não possui a estrutura de espaço vetorial, pois a negação de A não é o inverso aditivo de A; i.e., $A + (-1)A \neq [0, 0]$, a não ser que A seja determinístico; i.e., $A = [a, a]$, assim a subtração não está bem definida (Aubin e Cellina, 1984; Diamond e Kloeden, 1994; Stefanini e Bede, 2009; Chalco-Cano, Román-Flores e Jiménez-Gamero, 2011). Uma primeira implicação desde fato é que a simplificação aditiva não é válida,

$$A + C = B + C \nRightarrow A = B \text{ ou } (A + B) - B \neq A.$$

Uma vez que o espaço intervalar, com as operações usuais, segundo Moore (1966), não possui a estrutura de espaço linear, outros conceitos de diferença são necessários, objetivando-se tal propriedade. Uma alternativa de subtração é a diferença de Hukuhara (H-diferença)

[1]Note que, a divisão não está definida quando $0 \in B$.

proposta por Hukuhara (1967). A H-diferença entre dois conjuntos é definida por:

$$A -_H B = C \Leftrightarrow A = B + C.$$

Duas propriedades importantes da diferença de Hukuhara são:

$$A -_H A = [0,0],$$
$$(A + B) -_H B = A.$$

Além disso, a diferença de Hukuhara é única, porém nem sempre existe. Uma condição necessária para que a H-diferença exista entre dois intervalos, $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ e $B = [\underline{b}, \overline{b}]$, é que a largura do intervalo A seja maior ou igual a largura do intervalo B; i.e., $a^S \geq b^S$, onde $a^S = \overline{a} - \underline{a}$ é a largura do intervalo A. Dessa forma, tal diferença ainda possui algumas restrições, e buscando superar essas restrições, Stefanini e Bede (2009) apresentaram uma generalização da diferença de Hukuhara (gH-diferença), que possui várias propriedades, dentre elas, destacam-se o elemento oposto, a associativa e o elemento neutro.

A gH-diferença de dois conjuntos $A, B \in \mathcal{K}_C^n$ é definida por:

$$A -_{gH} B = C \Longleftrightarrow \begin{cases} (a) \;\; A = B + C \text{ ou} \\ (b) \;\; B = A + (-1)C. \end{cases} \tag{2.1}$$

É possível que $A = B+C$ e $B = A+(-1)C$ sejam satisfeitas simultaneamente, neste caso, A e B são transladados um ao outro e C é determinístico. Além disso, se a gH-diferença é dada pelo caso (a), então a gH-diferença coincide com a H-diferença.

No espaço intervalar, a gH-diferença existe para quaisquer dois intervalos compactos. Sejam $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ e $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ dois intervalos, então gH-diferença existe e é dada por:

$$[\underline{a}, \overline{a}] -_{gH} [\underline{b}, \overline{b}] = [\min\{\underline{a} - \underline{b}, \overline{a} - \overline{b}\}, \max\{\underline{a} - \underline{b}, \overline{a} - \overline{b}\}].$$

No âmbito das aritméticas intervalar, Markov (1977) introduziu outro padrão de aritmética intervalar que será chamada de *aritmética intervalar de Markov*. Markov apresenta um notação adicional para os pontos extremos de um intervalo A, considera que o número real a_u e a_v são os extremos de A tal que $|a_u| < |a_v|$. Por exemplo, associado com o intervalo $A = [-3, 2]$, ele tem duas expressões para os pontos extremos: $\underline{a} = -3$, $\overline{a} = 2$ e $a_u = 2$, $a_v = -3$. Markov (1977) definiu um intervalo A da seguinte forma:

$$A = [\alpha \vee \beta] = [\min\{\alpha, \beta\}, \max\{\alpha, \beta\}].$$

Observe que os números a_u e a_v não são definidos quando o intervalo A é simétrico; i.e., quando $A = [-a, a]$, $a > 0$. A aritmética intervalar, segundo Markov (M-operação), é definida por:

$$\begin{aligned} A +_M B &= [\underline{a} + \underline{b} \vee \overline{a} + \overline{b}], \\ A -_M B &= [\underline{a} - \underline{b} \vee \overline{a} - \overline{b}], \\ A \times_M B &= [a_u b_u \vee a_v b_v], \\ A \div_M B &= [a_u / b_u \vee a_v / b_v]. \end{aligned}$$

O M-produto e o M-quociente de dois intervalos não são definidos quando pelo menos um dos intervalos envolvidos é simétrico. A M-soma e a soma usual de intervalos são coincidentes. No caso da M-subtração, ou M-diferença, tem-se que: $A -_M B \subset A - B$ para quaisquer dois intervalos A e B. Por outro lado, a M-diferença e a gH-diferença são coincidentes. O M-produto coincide com o produto usual entre dois intervalos, desde que A e B não contenha o zero. Nos outros casos, $A \times_M B \subset A \times B$. No caso da divisão, a divisão usual não existe para qualquer intervalo B que contenha o zero, já a M-divisão sempre existe, mesmo que B contenha o zero. Note que o M-produto e a M-divisão não existem quando algum dos intervalos envolvidos é simétrico.

Como já observado, a aritmética intervalar usual não possui algumas propriedades que caracterizam a estrutura algébrica para o espaço intervalar, dessa forma, Lodwick (1999) visando obter uma álgebra para o espaço intervalar, assegurando as noções de inverso aditivo e multiplicativo, e além disso, buscando minimizar sobrestimações de funções que possuem variáveis repetidas, definiu outra noção de aritméticas intervalar, chamada de *aritmética intervalar restrita* (CIA). Esta aritmética redefine um intervalo de forma equivalente, como uma função de valor real de uma variável e dois parâmetros, sobre o conjunto compacto $[0, 1]$, como apresentado na definição a seguir.

Definição 1. *(Lodwick, 1999) Um intervalo $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ é uma função de valor real $A(\lambda_a)$, tal que:*

$$A(\lambda_a) = (1 - \lambda_a)\underline{a} + \lambda_a \overline{a} = \underline{a} + a^S \lambda_a \text{ para } 0 \leq \lambda_a \leq 1, \tag{2.2}$$

onde $a^S = \overline{a} - \underline{a}$.

Os três parâmetros da definição anterior são necessários para lidar com a dependência dos intervalos. Em (2.2), os números $\underline{a}$ e $\overline{a}$ são parâmetros conhecidos, enquanto que λ_a é a variável restrita entre 0 e 1. Logo, $A(\lambda_a)$ em (2.2) é uma função linear de valor real com dois parâmetros e variável λ_a restrita sobre o conjunto compacto $[0,1]$. Segundo a CIA, os extremos do intervalo $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ são obtidos através do cálculo de mínimo e máximo da função $A(\lambda_a)$, mais precisamente, por:

$$\underline{a} = \min_{0 \leq \lambda_a \leq 1} A(\lambda_a) \text{ e } \overline{a} = \max_{0 \leq \lambda_a \leq 1} A(\lambda_a).$$

O espaço intervalar que a CIA representa são os intervalos que pertencem ao espaço de funções lineares, com inclinação não negativa, sobre um domínio compacto. Isto significa que a álgebra da CIA não é a mesma da aritmética intervalar usual, da aritmética intervalar de Markov e, tão pouco, da aritmética decorrente das diferenças de Hukuhara e da diferença generalizada de Hukuhara. A CIA é uma aritmética de funções lineares, definidas sobre um domínio compacto, enquanto que a aritmética usual é uma aritmética de duas componentes de vetor $A = (\underline{a}, \overline{a})$; $\underline{a} \leq \overline{a}$ na metade superior do plano determinada pela linha $\underline{a} = \overline{a}$ do $\mathbb{R}^2$.

As operações algébricas da aritmética intervalar restrita são definidas da seguinte forma, sejam A e B dois intervalos e $*$ uma operação aritmética em $\mathbb{R}$, então,

1. define-se as funções associadas aos intervalos A e B, por $A(\lambda_a)$ e $B(\lambda_b)$, respectivamente.

2. as operações aritméticas $A \circledast B$ em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ são obtidas através da função associada à operação $A \circledast B$, ou seja, $(A * B)(\lambda_a, \lambda_b) = A(\lambda_a) * B(\lambda_b)$, da seguinte forma:

$$A \circledast B = \left[\min_{0 \leq \lambda_a, \lambda_b \leq 1} (A(\lambda_a) * B(\lambda_b)), \max_{0 \leq \lambda_a, \lambda_b \leq 1} (A(\lambda_a) * B(\lambda_b)) \right],$$

onde $\circledast \in \{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash\}$ representa as operações entre intervalos, e $* \in \{+, -, \times, \div\}$ representa as operações de números reais.

A ideia desta aritmética é operar em todos os níveis, de forma que para o cálculo de uma determinada operação considera-se todas as combinações possíveis entre os intervalos. Assim, ao considerar-se dois intervalos A e B, tem-se diferentes níveis em cada intervalo; i.e., λ_a e λ_b associados às funções restrições $A(\lambda_a)$ e $B(\lambda_b)$, respectivamente. Esses são operados em todos os níveis de $A(\lambda_a)$ e $B(\lambda_b)$, simultaneamente, e então o mínimo e máximo das operações em relação as variáveis λ_a e λ_b são obtidos para determinar os extremos do novo intervalo.

Exemplo 2.1.1. *Considere os intervalos* $A = [-1, 1]$ *e* $B = [2, 4]$. *Então, as funções restrições associadas para* A *e* B *são* $A(\lambda_a) = \lambda_a + (1 - \lambda_a)(-1)$ *e* $B(\lambda_b) = 4\lambda_b + (1 - \lambda_b)2$, *respectivamente. Para obter $C = (A \ominus B^2) \otimes B$ é preciso resolver os dois seguintes problemas de otimização global,*

$$\begin{aligned}
\underline{c} &= \min_{0 \leq \lambda_a, \lambda_b \leq 1} (A(\lambda_a) - B(\lambda_b)^2) B(\lambda_b), \\
&= \min_{0 \leq \lambda_a, \lambda_b \leq 1} ((\lambda_a + (1-\lambda_a)(-1)) - (4\lambda_b + (1-\lambda_b)2)^2)(4\lambda_b + (1-\lambda_b)2),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\overline{c} &= \max_{0 \leq \lambda_a, \lambda_b \leq 1} (A(\lambda_a) - B(\lambda_b)^2) B(\lambda_b), \\
&= \max_{0 \leq \lambda_a, \lambda_b \leq 1} ((\lambda_a + (1-\lambda_a)(-1)) - (4\lambda_b + (1-\lambda_b)2)^2)(4\lambda_b + (1-\lambda_b)2).
\end{aligned}$$

Portanto, através da resolução dos dois problemas de otimização, obtém-se: $[\underline{c}, \overline{c}] = [-68, -6]$.

Observação 2.1.1. *As operações aritméticas via CIA são obtidas a partir de um problema de otimização global restrita. Neste contexto, os intervalos são transformados em funções lineares, com inclinação não negativa definida sobre o domínio compacto* $[0,1]$*. Todas as operações são realizadas neste espaço e para voltar ao espaço dos intervalos, realizam-se dois problemas de otimização global com restrição simples (de caixa), são eles: a minimização e a maximização.*

Desde que todas as operações são contínuas, enquanto que a divisão por zero não é permitida, a minimização e maximização estão bem definidas, atingindo seus resultados em termos de um intervalo.

Lodwick (1999) buscando representar a dependência entre os intervalos, considera três situações: (i) $A \circledast B$, (ii) $A \circledast A$ e (iii) $A \circledast (-A)$, sendo que no caso (i) as operações são independentes, entretanto, para os casos (ii) e (iii) as operações são dependentes. Segundo esta aritmética, cada intervalo independente é redefinido por uma função linear de variável λ, onde os λ's são distintos e essas variáveis são definidas sobre o conjunto compacto $[0,1]$.

A CIA é uma extensão da aritmética intervalar usual, apresentando, portanto, as mesmas propriedades que a aritmética intervalar usual. Contudo, essa nova aritmética possui um inverso aditivo, multiplicativo e detém as leis de distribuição. Logo, a estrutura algébrica da aritmética intervalar restrita é similar à estrutura algébrica da aritmética real. Para maiores informações sobre essa aritmética, suas propriedades e seus cálculos, consultar Lodwick (1999) e Lodwick (2007).

A partir do conceito de aritmética intervalar restrita, Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) definiram um novo conceito de aritmética, chamada de *aritmética intervalar res-*

trita single level (*single level*). Essa nova aritmética segue da aritmética intervalar restrita, todavia a *single level* sempre considera a mesma variável para todos os intervalos envolvidos nas operações, sendo esses independentes ou dependentes, diferenciando-se da aritmética intervalar restrita, que para cada intervalo independente, considera-se as variáveis diferentes no processo de transformação dos intervalos. Já a aritmética intervalar usual considera todas as variações possíveis dentro de um intervalo e essas variações são consideradas independentes. Contudo, a *single level* considera que as variações dentro dos intervalos sempre ocorrem na mesma maneira. Assim, se o valor de um intervalo é instanciado em 1/4 a distância do extremo esquerdo, todos os intervalos serão instanciados a 1/4 da mesma forma no extremo esquerdo. Está nova aritmética é definida adiante.

Definição 2. *(Chalco-Cano, Lodwick e Bede, 2014) Seja* $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ *um intervalo qualquer. Então,*

1. *uma função contínua* $A : [0,1] \to \mathbb{R}$*, tal que*

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} A(\lambda) = \underline{a} \ e \ \max_{0 \leq \lambda \leq 1} A(\lambda) = \overline{a},$$

   será chamada função restrita associada a A;

2. *associado ao intervalo A, define-se a função restrita convexa decrescente* $A_d : [0,1] \to \mathbb{R}$ *por:*

$$A_d(\lambda) = \lambda\underline{a} + (1-\lambda)\overline{a} \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

   ou equivalentemente,

$$A_d(\lambda) = (\underline{a} - \overline{a})\lambda + \overline{a} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Analogamente ao item anterior, associado ao intervalo A define a função restrita convexa crescente $A_c : [0,1] \to \mathbb{R}$ *por:*

$$A_c(\lambda) = \lambda\overline{a} + (1-\lambda)\underline{a} \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

ou equivalentemente,

$$A_c(\lambda) = (\overline{a} - \underline{a})\lambda + \underline{a} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Observação 2.1.2. *Por simplificação, será chamada somente de função restrição convexa a toda função caracterizada pela Definição 2, tanto crescente quanto decrescente. A partir deste ponto, todos os resultados serão expostos apenas para as funções decrescentes e será* *denotado simplesmente por $A(\lambda)$, a função restrição convexa decrescente associada para A.*

As operações algébricas da aritmética intervalar restrita *single level* são definidas a partir das funções restrições convexas, associadas aos intervalos envolvidos.

Definição 3. *(Chalco-Cano, Lodwick e Bede, 2014) Sejam A e B dois intervalos e seja $*$ uma operação aritmética em $\mathbb{R}$. Então,*

1. *define-se a função restrita associada ao intervalo $A \circledast B$ por $(A * B)(\lambda) = A(\lambda) * B(\lambda)$, onde $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ são as funções restritas convexas associadas a A e B, respectivamente.*

2. *a operação aritmética restrita* single level *(C-operação), $A \circledast B$ em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ é dada por:*

$$A \circledast B = \left[\min_{0\leq\lambda\leq1} (A(\lambda) * B(\lambda)), \max_{0\leq\lambda\leq1} (A(\lambda) * B(\lambda)) \right],$$

   dado que o mínimo e máximo existam[2].

Primeiramente, observe que se a função restrição associada com o novo intervalo é contínua na variável λ, então o mínimo e máximo existem e são números reais. Essa definição pode ser estendida para o caso de descontinuidade usando o inf e o sup no lugar de min e max na definição anterior, resultando possivelmente em intervalos ilimitadas (Chalco-Cano, Lodwick e Bede, 2014).

Exemplo 2.1.2. *Considere os intervalos $A = [-1, 1]$ e $B = [2, 4]$. Então, as funções restrições convexas associadas para A e B são $A(\lambda) = -1\lambda + (1-\lambda)1$ e $B(\lambda) = 2\lambda + (1-\lambda)4$, respectivamente. Para obter $C = (A \ominus B^2) \otimes B$ é preciso resolver os dois seguintes problemas de otimização global:*

$$\underline{c} = \min_{0\leq\lambda\leq1} (A(\lambda) - B(\lambda)^2)B(\lambda),$$

e

$$\overline{c} = \max_{0\leq\lambda\leq1} (A(\lambda) - B(\lambda)^2)B(\lambda).$$

Portanto, resolvendo os dois problemas de otimização, obtém-se: $[\underline{c}, \overline{c}] = [-60, -10]$. Além disso, a solução obtida via single level *está contida na solução via CIA (Exemplo (2.1.1)); i.e., $[-60, -10] \subset [-68, -6]$.*

[2] Para a C-divisão $0 \notin B$.

O intuito desta aritmética é operar nível a nível. Dado dois intervalos A e B, cada intervalo possui o mesmo nível $\lambda \in [0,1]$; i.e., tem-se $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ operando no mesmo λ. As operações algébricas são definidas a partir de mínimo e máximo, em relação a variável λ, da função obtida através das operações entre as funções restritas associadas aos intervalos envolvidos. Tanto a CIA quanto a *single level* definem a função restrita convexa associada a cada intervalo, mas não necessariamente a nova função associada com as operações entre essas funções restrições será uma função convexa.

A partir da definição de C-operação, Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) apresentaram algumas operações. Sejam $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ e $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ dois intervalos e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

1. $A \oplus B = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$.

2. $\alpha \odot A = [\min\{\alpha\underline{a}, \alpha\overline{a}\}, \max\{\alpha\underline{a}, \alpha\overline{a}\}]$.

3. $A \ominus B = [\min\{\underline{a} - \underline{b}, \overline{a} - \overline{b}\}, \max\{\underline{a} - \underline{b}, \overline{a} - \overline{b}\}]$.

A C-soma de intervalos e a C-multiplicação de um intervalo por um escalar são coincidentes com as operações usuais, soma e multiplicação por escalar, segundo Moore (1969). A C-diferença é coincidente com a M-diferença e a gH-diferença.

No contexto das operações, segundo a *single level*, para obter o intervalo $C = A \ominus (-1) \odot B$, deve-se operar com as funções restrições convexas associadas com os intervalos envolvidos e, depois, usar os dois problemas de otimização global para obter os extremos do intervalo C. Por outro lado, se primeiro obter $(-1) \odot B$ e, então, operar esse resultado com A para encontrar C, pode-se determinar outro intervalo. A fim de lidar com essa situação indeterminada, deve-se operar com a expressão das componentes e não com as avaliações das componentes.

Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) estabeleceram que uma expressão $E(A_1, A_2, ..., A_n)$ é uma expressão correta na aritmética intervalar se $E(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma expressão construída corretamente (ver (Floyd e Beigel, 1994)), em uma linguagem formal para operações aritméticas com números reais operando $x_1, x_2, ..., x_n$ e operações aritméticas usuais em números reais. Nas expressões intervalar, substitui-se todas as operações aritméticas reais $*$ por $\circledast$. Considerando que $A_1(\lambda), A_2(\lambda), ..., A_n(\lambda)$ são as funções restrições convexas associadas com $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, a avaliação de uma expressão correta é estabelecida de acordo com a seguinte regra:

$$E(A_1, A_2, ..., A_n) = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} E(A_1(\lambda), A_2(\lambda), ..., A_n(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} E(A_1(\lambda), A_2(\lambda), ..., A_n(\lambda)) \right].$$

Esta é a avaliação da expressão E com os argumentos fornecidos, dado que o mínimo e máximo existam.

Proposição 2.1.1. *(Chalco-Cano, Lodwick e Bede, 2014) Se dados duas expressões $E_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $E_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ que assumem o mesmo resultado; i.e.,*

$$E_1(x_1, x_2, ..., x_n) = E_2(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ para todos } x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R},$$

então,

$$E_1(A_1, A_2, ..., A_n) = E_2(A_1, A_2, ..., A_n) \text{ para todos } A_1, A_2, ..., A_n \in \mathbb{I}(\mathbb{R}).$$

Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) obtiveram importantes resultados para a aritmética intervalar *single level*, considerando a proposição anterior. Um fato importante é que $A \ominus (-1) \odot A = [0, 0]$ para qualquer intervalo A.

Exemplo 1. *Considere o seguinte intervalo $A = [-1, 3]$, tem-se*

$$\begin{aligned} A \ominus (-A) &= \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} A(\lambda) + (-1)A(\lambda), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} A(\lambda) + (-1)A(\lambda)\right] \\ &= [0, 0], \end{aligned}$$

onde $A(\lambda)$ é a função restrição convexa associada com A. Por outro lado, segundo a aritmética usual, tem-se que: $A + (-1)A = [-4, 4]$.

A C-soma e C-diferença apresentam várias propriedades, tais como associativa, comutativa, elemento neutro único, além disso, a C-multiplicação de um intervalo por um escalar, número real, tem as seguintes propriedades: a associativa, a distributiva e o elemento neutro.

Sejam A e B dois intervalos, quando ambos são positivos ($A, B \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})^+$)[3], ou quando são negativos ($A, B \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})^-$), o C-produto coincide com o produto intervalar usual e o M-produto (se existir). Nos outros casos, o C-produto e o produto intervalar usual são diferentes. Além disso, a C-operação possui a propriedade que $A^2 = A \otimes A$ e $B \otimes ([1, 1] \oslash A) = B \oslash A$, todavia isso não ocorre quando se considera outra aritmética. Para maiores informações sobre C-operação e suas propriedades consultar Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014).

Uma vez que a estrutura algébrica está definida, é interessante analisar a topologia

[3] $\mathbb{I}(\mathbb{R})^+$ representa o conjunto dos intervalos positivos; i.e., $A = [\underline{a}, \overline{a}] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^+ \Leftrightarrow \underline{a} > 0$. Analogamente, define-se $\mathbb{I}(\mathbb{R})^-$.

do espaço intervalar. Para tal propósito, serão apresentados, na próxima seção, algumas métricas utilizadas no espaço intervalar existentes na literatura.

2.2 Métrica no espaço intervalar

Nesta seção, serão apresentados algumas métricas utilizadas no espaço intervalar. Primeiramente, Markov (1979) apresentou uma norma para o espaço intervalar, e a partir da norma, determinou a métrica induzida pela norma. Por outro lado, a métrica de Pompieu-Hausdorff (Pompeiu, 1905), proposta para determinar a distância entre dois conjuntos, tem sido amplamente utilizada no contexto intervalar (Hukuhara, 1967; Aubin e Cellina, 1984; Aubin e Frankowska, 1990; Stefanini e Bede, 2009; Stefanini e Bede, 2012; Chalco-Cano et al., 2013). Em adição, Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) definiram uma métrica para o espaço intervalar considerando as funções restrições convexas associada com intervalos envolvidos.

Segundo Markov (1979), a função $\| X \| := \max\{| \underline{x} |, | \overline{x} |\}$, onde $X = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, é uma norma em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, no sentido que

$$\begin{aligned}
&\| X \| = 0 \text{ se, e somente se, } X = [0, 0];\\
&\| \alpha X \| = | \alpha | \| X \|;\\
&\| X +_M Y \| \leq \| X \| + \| Y \|;\\
&\| X -_M Y \| \leq \| X \| + \| Y \| .
\end{aligned}$$

A métrica induzida pela norma é dada por:

$$d(X, Y) = \max\{| \underline{x} - \underline{y} |, | \overline{x} - \overline{y} |\}.$$

Note que $d(X, [0, 0]) = \| X \|$ e $d(X, Y) = \| X -_M Y \|$.

A partir do conceito de C-diferença, Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) definiram uma métrica para o espaço intervalar. Dados dois intervalos X e Y, a distância entre X e Y é dada por:

$$d_C(X, Y) = \| X \ominus Y \|_C = \max_{\lambda \in [0,1]} | X(\lambda) - Y(\lambda) |,$$

onde $X(\lambda)$ e $Y(\lambda)$ são as funções restritas convexas associadas com X e Y, respectivamente.

A métrica proposta por Pompeiu-Hausdorff (Pompeiu, 1905; Rogers, 1998), calcula a distância entre dois intervalos. A função de Pompeiu-Hausdorff $H : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \times \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$H(X, Y) = \max\{d_1(X, Y), d_1(Y, X)\},$$

onde $d_1 : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \times \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$d_1(X, Y) = \sup_{x \in X} d_2(x, Y)$$

é uma quase métrica e $d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como:

$$d_2(x, Y) = \inf_{y \in Y} d_3(x, y),$$

e d_3 é a distância Euclidiana.

As seguintes propriedades são bem conhecidas:

$$\begin{aligned} &H(A + C, B + C) = H(A, B), \\ &H(A + B, C + D) \leq H(A, C) + H(B, D). \end{aligned}$$

Sejam $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ e $Y = [\underline{y}, \overline{y}]$ dois intervalos, a distância de Pompeiu-Hausdorff é caracterizada por:

$$H(X, Y) = \max\{| \underline{x} - \underline{y} |, | \overline{x} - \overline{y} |\}.$$

Além disso, $(\mathbb{I}(\mathbb{R}), H)$ é um espaço métrico completo e separável (Aubin e Cellina, 1984; Diamond e Kloeden, 1994).

Note que $H(X, Y) = d(X, Y)$, e em adição, Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) mostraram que $H(X, Y) = d_C(X, Y)$. Portanto,

$$d(X, Y) = d_C(X, Y) = H(X, Y).$$

A partir do conceito de métrica para o espaço intervalar pode-se caracterizar as noções do cálculo intervalar. O conceito de sequência, limite e continuidade de funções de valor intervalar são amplamente discutidos e a literatura apresenta uma gama de resultados (Moore, 1969; Markov, 1979; Aubin e Cellina, 1984; Aubin e Frankowska, 1990; Stefanini e Bede, 2009; Chalco-Cano et al., 2013).

Neste contexto, diz-se que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é uma função de valor intervalar, se $F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$, satisfazendo $\underline{f}(x) \leq \overline{f}(x) \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$, com $\underline{f}, \overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\underline{f}$ e $\overline{f}$ são chamadas de funções extremas, inferior e superior, associadas com F.

2.3 Diferenciabilidade intervalar

Nesta seção, serão apresentadas algumas definições e propriedades de derivadas para função de valor intervalar. Primeiramente, será apresentado o conceito de diferenciabilidade de uma função de valor intervalar, considerando apenas a diferenciabilidade das funções extremas associada com a função intervalar.

Definição 4. *Sejam* $F :]a, b[\to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *uma função de valor intervalar, definida por* $F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$, *e* $x_0 \in]a, b[$. *Diz-se que* F *é extremal diferenciável (E-diferenciável) em* x_0 *se, e somente se, as funções extremas de valores reais* $\underline{f}$ *e* $\overline{f}$ *são diferenciáveis em* x_0.

Observação 2.3.1. *O conceito de E-diferenciável e fracamente diferenciável, introduzida por Wu (2007), são equivalentes.*

Os dois seguintes conceitos de diferenciabilidade são definidos a partir da diferença usual de Hukuhara.

Definição 5. *(Bede e Gal, 2005) Seja* $F :]a, b[\to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *e* $x_0 \in]a, b[$. *Diz-se que* F *é fortemente diferenciável generalizada Hukuhara (G-diferenciável) em* x_0, *se existe um elemento* $F'(x_0) \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, *tal que para todo* $h > 0$ *suficientemente pequeno,*

1. $\exists\ F(x_0 + h) -_H F(x_0), F(x_0) -_H F(x_0 - h)$ *e*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{F(x_0 + h) -_H F(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{F(x_0) -_H F(x_0 - h)}{h} = F'(x_0), \text{ ou}$$

2. $\exists\ F(x_0) -_H F(x_0 + h), F(x_0 - h) -_H F(x_0)$ *e*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{F(x_0) -_H F(x_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \searrow 0} \frac{F(x_0 - h) -_H F(x_0)}{(-h)} = F'(x_0), \text{ ou}$$

3. $\exists\ F(x_0 + h) -_H F(x_0), F(x_0 - h) -_H F(x_0)$ *e*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{F(x_0 + h) -_H F(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{F(x_0 - h) -_H F(x_0)}{(-h)} = F'(x_0), \text{ ou}$$

4. $\exists\ F(x_0) -_H F(x_0 + h), F(x_0) -_H F(x_0 - h)$ *e*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{F(x_0) -_H F(x_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \searrow 0} \frac{F(x_0) -_H F(x_0 - h)}{h} = F'(x_0).$$

Definição 6. *(Bede e Gal, 2005) Seja* $F :]a, b[\to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *e* $x_0 \in]a, b[$. *Para uma sequência*

$h_n \searrow 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, denota-se

$$
\begin{aligned}
A_{n_0}^{(1)} &= \{n \geq n_0;\ \exists\ E_n^{(1)} := F(x_0 + h_n) -_H F(x_0)\},\\
A_{n_0}^{(2)} &= \{n \geq n_0;\ \exists\ E_n^{(2)} := F(x_0) -_H F(x_0 + h_n)\},\\
A_{n_0}^{(3)} &= \{n \geq n_0;\ \exists\ E_n^{(3)} := F(x_0) -_H F(x_0 - h_n)\},\\
A_{n_0}^{(4)} &= \{n \geq n_0;\ \exists\ E_n^{(4)} := F(x_0 - h_n) -_H F(x_0)\}.
\end{aligned}
$$

Diz-se que F é fracamente diferenciável (Hukuhara) generalizado em x_0, se para qualquer sequência $h_n \searrow 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_{n_0}^{(1)} \cup A_{n_0}^{(2)} \cup A_{n_0}^{(3)} \cup A_{n_0}^{(4)} = \{n \in \mathbb{N}; n \geq n_0\}$, e além disso, existe um elemento em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, denotado por $F'(x_0)$, tal que se algum $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tem card$(A_{n_0}^{(j)}) = +\infty$, então

$$\lim_{n \to \infty,\ n \in A_{n_0}^{(j)}} H\left(\frac{E_n^{(j)}}{(-1)^{j+1} h_n}, F'(x_0)\right) = 0.$$

O próximo conceito de derivada utiliza a diferença generalizada de Hukuhara.

Definição 7. *(Stefanini e Bede, 2009) Sejam $x_0 \in]a, b[$ e h tal que $x_0 + h \in]a, b[$, então a gH-derivada de uma função de valor intervalar $F :]a, b[\to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ em x_0 é definida por:*

$$F'_{gH}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) -_{gH} F(x_0)}{h}. \tag{2.3}$$

Se existe $F'_{gH}(x_0) \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ satisfazendo (2.3), diz-se que F é diferenciável no sentido de Hukuhara generalizada (gH-diferenciável) em x_0. Além disso, F é gH-diferenciável em $]a, b[$ se F é gH-diferenciável para cada ponto $x_0 \in]a, b[$.

Stefanini e Bede (2009) mostraram que o conceito de gH-diferenciabilidade e o conceito de fracamente diferenciável (Hukuhara) generalizado são coincidentes. A vantagem da gH-diferenciabilidade é que se tem uma formulação mais simples e não apresenta os quatro casos do conceito fracamente diferenciável (Hukuhara) generalizado explicitamente. Contudo, implicitamente tem todos esses casos, desde que o conceito de diferenciabilidade é exatamente o mesmo. Além disso, os mesmos verificaram que os conceitos de G-diferenciável e gH-diferenciável são coincidentes, desde que a função de valor intervalar tenha um número finito de *switching points*[4]. Em adição, o conceito de gH-

[4]Diz que, um ponto $x_0 \in]a, b[$ é um *switching point* para a diferenciabilidade de F, se em qualquer vizinhança V de x_0 existam $x_1 < x_0 < x_2$ tais que:

1. (tipo I) em x_1 ocorre $F'_{gH}(x_1) = [\underline{f}'(x_1), \overline{f}'(x_1)]$ e em x_2 ocorre $F'_{gH}(x_2) = [\overline{f}'(x_2), \underline{f}'(x_2)]$;
2. (tipo II) em x_1 ocorre $F'_{gH}(x_1) = [\overline{f}'(x_1), \underline{f}'(x_1)]$ e em x_2 ocorre $F'_{gH}(x_2) = [\underline{f}'(x_2), \overline{f}'(x_2)]$.

diferenciabilidade coincide com os conceitos de diferenciabilidade segundo Markov (1979) e o de $\pi-$diferenciabilidade definida em Chalco-Cano, Román-Flores e Jiménez-Gamero (2011).

O cálculo da derivada generalizada de Hukuhara é exemplificado no exemplo adiante.

Exemplo 2.3.1. *(Stefanini e Bede, 2009) Seja A um intervalo compacto não trivial e uma função de valor intervalar definida por $F(x) = xA$. Então, a gH-derivada de F é dada por: $F'_{gH}(x) = A$. De fato, considere $A = [\underline{a}, \overline{a}]$, então*

$$xA = \begin{cases} [\underline{a}x, \overline{a}x] \ \text{se } x > 0 \\ [0, 0] \ \text{se } x = 0 \\ [\overline{a}x, \underline{a}x] \ \text{se } x < 0, \end{cases}$$

$$(x+h)A = \begin{cases} [\underline{a}x + \underline{a}h, \overline{a}x + \overline{a}h] \ \text{se } x > 0, x+h > 0 \\ [\overline{a}x + \overline{a}h, \underline{a}x + \underline{a}h] \ \text{se } x < 0, x+h < 0 \\ [\underline{a}h, \overline{a}h] \ \text{se } x = 0, h > 0 \\ [\overline{a}h, \underline{a}h] \ \text{se } x = 0, h < 0. \end{cases}$$

Considerando todas as seis combinações, tem-se

$$(x+h)A -_{gH} xA = \begin{cases} [\underline{a}h, \overline{a}h] \ \text{se } h > 0 \\ [\overline{a}h, \underline{a}h] \ \text{se } h < 0 \end{cases} \quad \forall \ h \neq 0$$

e

$$\frac{1}{h}\left((x+h)A -_{gH} xA\right) = [\underline{a}, \overline{a}] = A \ \ \forall \ h \neq 0.$$

Exemplo 2.3.2. *(Stefanini e Bede, 2009) Seja $F(x) = p(x)A$ onde $p(x)$ é uma função diferenciável no sentido clássico e A um intervalo, então a gH-derivada de F é dada por $F'_{gH}(x) = p'(x)A$.*

O próximo resultado expressa a gH-derivada em termos da derivada das funções extremas, inferior e superior, de F e resume as principais propriedades da gH-diferenciabilidade para funções de valor intervalar.

Teorema 2.3.1. *Seja $F :]a, b[\to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função de valor intervalar definida por $F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$, satisfazendo $\underline{f}(x) \leq \overline{f}(x) \ \forall \ x \in]a, b[$. Então,*

(a) F é gH-diferenciável em x_0 se, e somente se, um dos seguintes casos detém

(a1) $\underline{f}$ *e* $\overline{f}$ *são diferenciáveis em* x_0 *e*

$$F'_{gH}(x_0) = \left[\min\{\underline{f}'(x_0), \overline{f}'(x_0)\}, \max\{\underline{f}'(x_0), \overline{f}'(x_0)\}\right],$$

(a2) as derivadas laterais das funções extremas existem e satisfazem $(\underline{f})'_-(x_0) = (\overline{f})'_+(x_0)$ *e* $(\underline{f})'_+(x_0) = (\overline{f})'_-(x_0)$. *Neste caso,*

$$\begin{aligned} F'_{gH}(x_0) &= \left[\min\{\underline{f}'_-(x_0), \overline{f}'_-(x_0)\}, \max\{\underline{f}'_-(x_0), \overline{f}'_-(x_0)\}\right] \\ &= \left[\min\{\underline{f}'_+(x_0), \overline{f}'_+(x_0)\}, \max\{\underline{f}'_+(x_0), \overline{f}'_+(x_0)\}\right]. \end{aligned}$$

Além disso, se F *é gH-diferenciável em* $x_0 \in]a, b[$, *então*

(b) F *é contínua em* x_0,

(c) $\underline{f} + \overline{f}$ *é uma função diferenciável em* x_0.

Demonstração. Em Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana (2013) encontrada-se as asserções (a) e (c) e a afirmação (b) em Stefanini e Bede (2012). □

O conceito de E-diferenciabilidade é definido a partir da derivada das funções extremas associadas com a função de valor intervalar, porém não caracteriza uma expressão para a derivada. O próximo resultado correlaciona a diferenciabilidade extremal com a diferenciabilidade generalizada de Hukuhara e, consequentemente, uma caracterização para a E-derivada.

Teorema 2.3.2. *Seja* $F :]a, b[\to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *uma função de valor intervalar tal que* $F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$. *Se* F *é E-diferenciável, então*

(a) F *é gH-diferenciável, e*

(b) $\widetilde{F}'(x) \in F'_{gH}(x)$, *onde* $\widetilde{F} = (\lambda_1 \underline{f} + \lambda_2 \overline{f})$ *para alguns* $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *com* $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Demonstração. A afirmação (a) segue do Teorema 2.3.1 e a asserção (b) segue das propriedades da gH-derivada. □

Outro conceito importante para o cálculo intervalar é o de integral. Neste contexto, Stefanini e Bede (2009) definiram a integral de função de valor intervalar de forma usual. Seja $F : [a, b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função de valor intervalar com $F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$, então

$$\int_a^b F(x)dx := \left[\int_a^b \underline{f}(x)dx, \int_a^b \overline{f}(x)dx\right],$$

desde que $\underline{f}$ e $\overline{f}$ sejam integráveis.

A partir da definição de integral para função de valor intervalar, Stefanini e Bede (2009) apresentaram várias propriedades para a integral de função de valor intervalar. Além disso, esses autores utilizaram a gH-diferença para determinar uma extensão da fórmula de Newton-Leibnitz no contexto intervalar levando em consideração os casos da gH-diferença, e supondo que a função de valor intervalar não tenha *switching point*. Somando-se a isto, os mesmo autores propuseram uma versão do teorema fundamental do cálculo. Em adição, Chalco-Cano et al. (2013) também apresentaram uma versão para o teorema fundamental do cálculo, porém considerando que a função de valor intervalar seja $\mu-$crescente ou $\mu-$decrescente[5].

Considere, agora, que F é uma função de valor intervalar definida em $\mathbb{R}^n$, $F(\mathbf{x}) \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ para cada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e, neste caso, as funções extremas associadas com F são definidas em $\mathbb{R}^n$. Neste âmbito, Aubin e Cellina (1984) expressam o conceito de continuidade para função de valor intervalar em termo da continuidade das funções extremas, como apresentado na proposição abaixo.

Proposição 2.3.1. *(Aubin e Cellina, 1984) Seja F uma função de valor intervalar definida em $X \subset \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{x}_0 \in X$, então F é contínua em $\boldsymbol{x}_0$ se, e somente se, $\underline{f}$ e $\overline{f}$ são contínuas em $\boldsymbol{x}_0$.*

Utilizando o conceito de gH-derivada para função de valor intervalar, Chalco-Cano et al. (2013) definiram o conceito de derivada parcial generalizada de Hukuhara.

Definição 8. *(Chalco-Cano et al., 2013) Seja F uma função de valor intervalar definida em $X \subset \mathbb{R}^n$ e considere $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ um elemento fixo de X. Defina uma função de valor intervalar e variável unidimensional, h_j, por:*

$$h_j(x_j) \quad = \quad F(x_1^0, ..., x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, ..., x_n^0),$$

para $j = 1, ..., n$. Se h_j é gH-diferenciável em x_j^0, então F tem a $j-$ésima gH-derivada parcial em $\boldsymbol{x}_0$, denotado por $\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{gH}(\boldsymbol{x}_0)\right)$, e $\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{gH}(\boldsymbol{x}_0)\right) = (h_j)'_{gH}(x_j^0)$.

Além disso, Chalco-Cano et al. (2013) definiram que F é continuamente gH-diferenciável em $\mathbf{x}_0$, se todas as gH-derivadas parciais existem em alguma vizinhança de $\mathbf{x}_0$ e são contínuas em $\mathbf{x}_0$.

[5]Uma função de valor intervalar F é $\mu-$crescente em [a,b] se a função clássica $\mu(F(x)) := \overline{f}(x) - \underline{f}(x)$ é crescente em [a,b]. Similarmente, defini-se função de valor intervalar $\mu-$decrescente e $\mu-$monótona.

Proposição 2.3.2. *(Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana, 2013) Se uma função de valor intervalar definida em* $X \subset \mathbb{R}^n$ *é continuamente gH-diferenciável em* $\boldsymbol{x}_0$*, então* $\underline{f} + \overline{f}$ *é continuamente diferenciável em* $\boldsymbol{x}_0$.

No Capítulo 6, serão apresentados os resultados no âmbito de análise intervalar, em um contexto mais amplo, utilizando a aritmética intervalar restrita *single level.*

2.4 Conclusões

Foram apresentadas as definições de algumas aritméticas intervalares presentes na literatura, suas propriedades e as relações e diferenças existentes entre elas. Além disso, também foram expostas as definições e as propriedades no âmbito da análise intervalar, mais precisamente sobre derivada, para função de valor intervalar, segundo a H-diferença e a gH-diferença.

CAPÍTULO 3 OTIMIZAÇÃO DE VALOR INTERVALAR

Neste capítulo, serão considerados os problemas de otimização, onde a função objetivo possui uma determinada incerteza. O problema em questão possui algum tipo de incerteza na função objetivo, essa será considerada do tipo intervalar, desta forma, torna-se necessário um método de comparação entre intervalos. Neste sentido, primeiramente, serão definidas algumas relações de ordem para o espaço intervalar e, a partir dessas, definir-se-ão os diferentes conceitos de solução para o problema intervalar em questão. Posteriormente, considerando três dessas relações de ordem, serão apresentados os conceitos de solução para os problemas de otimização com função objetivo de valor intervalar. A partir dos conceitos de derivada para a função de valor intervalar, serão propostas condições necessárias do tipo Fritz-John e Karush-Kuhn-Tucker para os problemas de otimização de valor intervalar.

3.1 Problema de otimização intervalar

O problema de otimização que será considerado possui o seguinte conjunto factível $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, ..., m\}$, onde $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função vetorial real e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é a função objetivo de valor intervalar. Dessa forma, tem-se o seguinte problema de valor intervalar:

$$\begin{aligned} &\min \quad F(\mathbf{x}) = [\underline{f}(\mathbf{x}), \overline{f}(\mathbf{x})] \\ &\text{sujeito a:} \\ &g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ \ i = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{3.1}$$

O primeiro ponto que se coloca é o seguinte: o que é solução do problema de otimização de valor intervalar? Uma forma de interpretar a solução do problema (3.1) é definir relação de ordem no espaço intervalar. Assim, se o conceito de solução é definido a partir de relação de ordem parcial (ver (Ishibuchi e Tanaka, 1990; Sakawa, Inuiguchi e Ikeda, 1994; Wu, 2004; Wu, 2009a; Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana, 2013; Bhurjee e Panda, 2014; Zhang et al., 2014)), esse será similar ao conceito de solução eficiente, também chamada de solução de Pareto, utilizada nos problemas de programação multi-objetivo (ver (Haimes, Lasdon e Wismer, 1971; Miettinen, 1999; Deb, 2001)).

O conceito de solução será definido a partir da relação de ordem parcial no espaço intervalar; como esse espaço possui várias definições de relações de ordem parcial, existem diferentes conceitos de solução para o problema em questão. Visando apresentar esses diferentes conceitos de solução para o problema (3.1), primeiramente, serão apresentadas as várias definições de relação de ordem. Além disso, apresentar-se-ão as relações existentes entre as relações de ordem definidas.

3.1.1 Relações de ordem parcial

Está subseção apresenta as diferentes relações de ordem parcial existentes para o espaço intervalar e, a partir dessas, suas equivalências. O primeiro conceito de relação de ordem apresentado será o proposto por Moore (1966):

Definição 9. *(Moore, 1966) Sejam* $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ *e* $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ *dois intervalos. A relação de ordem* $\leq_M$ *é definida por:*

$$A \leq_M B \text{ se, e somente se, } \overline{a} \leq \underline{b}.$$

Também $A <_M B$ *se, e somente se,* $A \leq_M B$ *e* $A \neq B$*.*

Está relação de ordem é muito restritiva, pois os intervalos comparados não podem ter mais que um único ponto de intersecção, não podendo ser aplicada para uma gama de intervalos. Neste âmbito, outras definições foram propostas.

A seguir, será definido o conceito de relação de ordem proposta por Kulisch e Miranker (1981), superando as restrições da definição de Moore, podendo ser aplicada na comparação de um número maior de intervalos.

Definição 10. *(Kulisch e Miranker, 1981) Sejam* $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ *e* $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ *dois intervalos.*

A relação de ordem $\leq_{LU}$ é definida por:

$$A \leq_{LU} B \text{ se, e somente se, } \underline{a} \leq \underline{b} \text{ e } \overline{a} \leq \overline{b}.$$

Também $A <_{LU} B$ se, e somente se, $A \leq_{LU} B$ e $A \neq B$.

Essa relação de ordem tem sido amplamente utilizada na comparação de intervalos (ver (Ishibuchi e Tanaka, 1990; Sakawa, Inuiguchi e Ikeda, 1994; Wu, 2004; Wu, 2007; Wu, 2009a; Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana, 2013)).

A seguir, será proposto um novo conceito de relação de ordem parcial para o espaço intervalar utilizando as funções restrições convexas associadas aos intervalos envolvidos.

Definição 11. *Sejam $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ e $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ dois intervalos. Considere que $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ sejam as funções restrições convexas associadas com A e B, respectivamente. A relação de ordem* single level, *$\preceq$, é definida por:*

$$A \preceq B \text{ se, e somente se, } A(\lambda) \leq B(\lambda), \tag{3.2}$$

para cada $\lambda \in [0, 1]$. Também $A \prec B$ se, e somente se, $A \preceq B$ e $A \neq B$.

Exemplo 3.1.1. *Considere $A = [1, 3]$ e $B = [2, 4]$ dois intervalos, as funções restrição convexas associadas com A e B, são, respectivamente, $A(\lambda) = 1\lambda + (1 - \lambda)3$ e $B(\lambda) = 2\lambda + (1 - \lambda)4$. Onde, para cada $\lambda \in [0, 1]$ fixado, tem-se que $A(\lambda) \leq B(\lambda)$. Portanto, $A \preceq B$ e, além disso, $A \prec B$.*

Essa relação de ordem será de extrema importância, pois o presente texto objetiva-se desenvolver o estudo dos problemas de controle ótimo intervalar, utilizando a aritmética intervalar restrita *single level* (ver Capítulo 7) e o conceito de solução será definido nível a nível.

Teorema 3.1.1. *Sejam $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ e $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ dois intervalos. Considere que $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ são as funções restrições associadas com A e B, respectivamente. Então, para cada $\lambda \in [0, 1]$*

$$A(\lambda) \leq B(\lambda) \Longleftrightarrow \min_{0\leq\lambda\leq1} A(\lambda) \leq \min_{0\leq\lambda\leq1} B(\lambda) \text{ e } \max_{0\leq\lambda\leq1} A(\lambda) \leq \max_{0\leq\lambda\leq1} B(\lambda).$$

Demonstração. Se para cada $\lambda \in [0, 1]$ tem-se que: $A(\lambda) \leq B(\lambda)$, ou seja, $\underline{a}\lambda + (1-\lambda)\overline{a} \leq \underline{b}\lambda + (1 - \lambda)\overline{b}$, e então,

1. $\lambda = 1 \Rightarrow \underline{a} \leq \underline{b} \Rightarrow \min_{0\leq\lambda\leq1} A(\lambda) \leq \min_{0\leq\lambda\leq1} B(\lambda)$,

2. $\lambda = 0 \Rightarrow \overline{a} \leq \overline{b} \Rightarrow \max_{0\leq\lambda\leq 1} A(\lambda) \leq \max_{0\leq\lambda\leq 1} B(\lambda)$.

Reciprocamente, se $\underline{a} \leq \underline{b}$ e $\overline{a} \leq \overline{b}$, então $\underline{a}\lambda + (1-\lambda)\overline{a} \leq \underline{b}\lambda + (1-\lambda)\overline{b}$. □

O conceito de relação de ordem proposta por Kulisch e Miranker (1981) e o conceito de ordem *single level* são equivalente.

Proposição 3.1.1. *Sejam $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ e $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ dois intervalos em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. Então,*

$$A \preceq B \text{ se, e somente se, } A \leq_{LU} B.$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 3.1.1. □

Observe que a relação de ordem $\leq_M$ entre os intervalos A e B implica que $A(\lambda) \leq B(\lambda)$ para cada $\lambda \in [0, 1]$. Contudo, a recíproca não é verdadeira (considere $A = [0, 2]$ e $B = [1, 3]$).

Ishibuchi e Tanaka (1990) e Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana (2013) definiram relações de ordem considerando o problema de minimização e maximização separadamente. Seja $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ um intervalo, então o mesmo também pode ser caracterizado pelo centro, $a^C = \frac{1}{2}(\overline{a} + \underline{a})$, e pela largura, a^S, do intervalo A.

Definição 12. *(Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana, 2013) Sejam $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ e $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ dois intervalos. A relação de ordem $\leq_{LS}$ é definida por:*

1. *Para maximização*

$$A \geq_{LS} B \text{ se, e somente se, } \overline{a} \geq \overline{b} \text{ e } a^S \leq b^S.$$

Também $A >_{LS} B$ se, e somente se, $A \geq_{LS} B$ e $A \neq B$.

2. *Para minimização*

$$A \leq_{LS} B \text{ se, e somente se, } \underline{a} \leq \underline{b} \text{ e } a^S \leq b^S.$$

Também $A <_{LS} B$ se, e somente se, $A \leq_{LS} B$ e $A \neq B$.

A relação de ordem proposta por Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana (2013) busca intervalos que possuem menor incerteza, pois os dois casos, tanto a maximização quanto a minimização, buscam minimizar a largura do intervalo. Assim, essa relação de ordem deve ser aplicada na comparação de intervalos, onde o objetivo é encontrar intervalos com menor incerteza.

A última relação de ordem, que será apresentada, foi proposta por Ishibuchi e Tanaka (1990).

Definição 13. *(Ishibuchi e Tanaka, 1990) Sejam* $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ *e* $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ *dois intervalos. As relações de ordem* $\leq_{LC}$ *(maximização) e* $\leq_{UC}$ *(minimização) são definidas por:*

1. *Para maximização*

$$A \leq_{LC} B se, \text{ e somente se, } \underline{a} \leq \underline{b} \text{ e } a^C \leq b^C. \tag{3.3}$$

Também $A <_{LC} B$ *se, e somente se,* $A \leq_{LC} B$ *e* $A \neq B$.

2. *Para minimização*

$$A \leq_{UC} B \text{ se, e somente se, } \overline{a} \leq \overline{b} \text{ e } a^C \leq b^C. \tag{3.4}$$

Também $A <_{UC} B$ *se, e somente se,* $A \leq_{UC} B$ *e* $A \neq B$.

O conceito de relação de ordem proposta por Ishibuchi e Tanaka (1990) difere da ideia de Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana (2013), uma vez que essa relação de ordem busca apenas o mínimo ou o máximo dos intervalos, sem o intuito de minimizar a incerteza dos mesmos. Dessa forma, tal relação de ordem deve ser aplicada na comparação de intervalos, onde a minimização da incerteza não é requerida, assim como as relações de ordem *single level*, LU e Moore. Todas as relações de ordem apresentadas são relações de ordem parciais.

A seguir, serão estabelecidas algumas implicações entre as definições de relações de ordem. A Figura 1 apresenta um esquema que caracteriza as implicações entre as relações de ordem para o caso de minimização.

As implicações (a), (b) e (c) da Figura 1 já foram discutidas. A implicação (d) é encontrada em Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana (2013) e a implicação (e) em Ishibuchi e Tanaka (1990). Além disso, a partir do diagrama entre as relações de ordem, pode-se obter as implicações entre todas as relações de ordem definidas, por exemplo, a relação de ordem LS implica na ordem UC, assim como a relação segundo Moore também implica em UC.

A partir de cada relação de ordem, define-se um conceito de solução para os problemas de otimização com função objetivo de valor intervalar. Nas seções seguintes, serão apre-

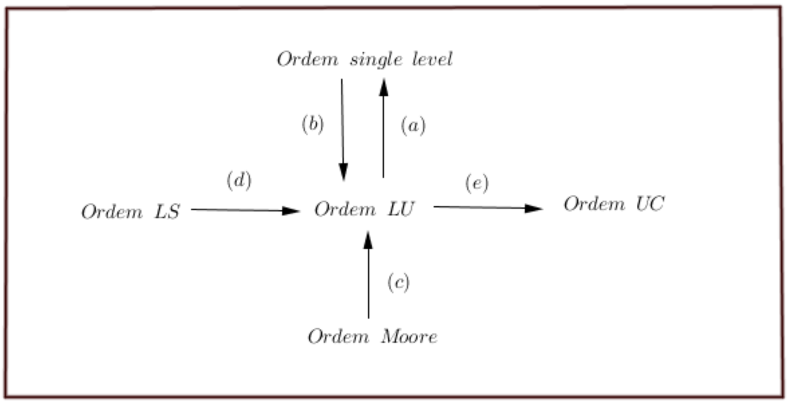


Figura 1: Equivalência entre as relações de ordem (min).

sentados alguns conceitos de solução para o problema de otimização com função objetivo de valor intervalar, considerando as relações de ordem que aparecem na literatura com maior frequência, sendo essas UC, LU e LS.

3.2 Solução via relação de ordem UC

O conceito de solução para o problema de otimização, segundo a relação de ordem UC, é dado por: seja $\widehat{\mathbf{x}}$ uma solução factível do problema (3.1); i.e., $\widehat{\mathbf{x}} \in X$. Então, $\widehat{\mathbf{x}}$ é uma UC-solução do problema (3.1), se não existe $\mathbf{x} \in X$ tal que $F(\mathbf{x}) <_{UC} F(\widehat{\mathbf{x}})$. O conjunto das UC-soluções é dado por:

$$\widehat{X}_{UC} = \{\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n ; \widehat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x})\}.$$

Além disso, $\widehat{\mathbf{x}}$ é localmente uma UC-solução do problema (3.1) se não existe $\mathbf{x} \in N_\epsilon(\widehat{\mathbf{x}}) \cap X$ tal que $F(\mathbf{x}) <_{UC} F(\widehat{\mathbf{x}})$, onde $N_\epsilon(\widehat{\mathbf{x}})$ é uma ϵ-vizinhança de $\widehat{\mathbf{x}}$.

O problema de determinar as UC-soluções dos problemas de otimização com função objetivo intervalar equivale a resolução de dois problemas de otimização clássica, obtidos a partir do problema intervalar em questão, como mostra o teorema a seguir:

Teorema 3.2.1. *Se $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é uma UC-solução do problema (3.1), então $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é solução dos dois* *seguintes problemas clássicos:*

$$(P_1)_{UC} \begin{cases} \min \quad \overline{f}(\boldsymbol{x}) \\ \textit{sujeito a:} \\ f^C(\boldsymbol{x}) \leq f^C(\widehat{\boldsymbol{x}}) \\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i = 1, ..., m, \end{cases} \quad e \quad (P_2)_{UC} \begin{cases} \min \quad f^C(\boldsymbol{x}) \\ \textit{sujeito a:} \\ \overline{f}(\boldsymbol{x}) \leq \overline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) \\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i = 1, ..., m. \end{cases}$$

Reciprocamente, se $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é solução de $(P_1)_{UC}$ e $(P_2)_{UC}$, então $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é uma UC-solução do problema (3.1).

Demonstração. Seja $\widehat{\mathbf{x}}$ é uma UC-solução e suponha que $\widehat{\mathbf{x}}$ não resolve um dos problemas clássicos, $(P_1)_{UC}$ ou $(P_2)_{UC}$. Se $\widehat{\mathbf{x}}$ não resolve $(P_1)_{UC}$, então existe uma solução $\mathbf{x} \in X$, tal que $\overline{f}(\mathbf{x}) < \overline{f}(\widehat{\mathbf{x}})$ e $f^C(\mathbf{x}) \leq f^C(\widehat{\mathbf{x}})$. Isso contradiz a UC otimalidade de $\widehat{\mathbf{x}}$. Reciprocamente, $\widehat{\mathbf{x}} \in X$ é por hipótese solução dos dois problemas clássicos. Se $\widehat{\mathbf{x}}$ é uma solução do problema $(P_1)_{UC}$, então não existe $\mathbf{x} \in X$ tal que $\overline{f}(\mathbf{x}) < \overline{f}(\widehat{\mathbf{x}})$ e $f^C(\mathbf{x}) \leq f^C(\widehat{\mathbf{x}})$; i.e., $F(\mathbf{x}) <_{UC} F(\widehat{\mathbf{x}})$. Essa é a definição de UC otimalidade para $\widehat{\mathbf{x}}$. □

Note que de acordo com as componentes necessárias do Teorema 3.2.1 é possível encontrar todas as UC-soluções de qualquer problema de otimização com função objetivo de valor intervalar, utilizando os dois problemas clássicos definidos, independentemente da convexidade do problema.

Alguns simples exemplos de otimização com função objetivo de valor intervalar serão apresentados adiante, visando obter as UC-soluções do problema e aplicar o Teorema 3.2.1.

Exemplo 3.2.1. *Considere o seguinte problema de otimização com função objetivo de valor intervalar*

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \ F(x) = [-x^2, x^2]. \tag{3.5}$$

Apenas o ponto $\widehat{x} = 0$ é UC-solução deste problema e esse ponto resolve os dois problemas clássicos oriundos do problema intervalar em questão, que são:

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} \quad x^2 \\ \textit{sujeito a:} \\ 0 \leq 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} \quad 0 \\ \textit{sujeito a:} \\ x^2 \leq 0. \end{cases}$$

Exemplo 3.2.2. *Considere o seguinte problema de otimização com função objetivo de valor intervalar*

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \quad F(x) = [x^2 - 2x, 3x^2 - 2x]. \tag{3.6}$$

É fácil ver que todo $\widehat{x} \in [1/3, 1/2]$ *é uma UC-solução do problema em questão. Além disso, todo* $\widehat{x} \in [1/3, 1/2]$ *resolve os dois problemas clássicos. Por exemplo,* $\widehat{x} = 4/10$ *resolve os dois seguintes problemas clássicos,*

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} \quad 3x^2 - 2x \\ \textit{sujeito a:} \\ 2x^2 - 2x \leq 2\widehat{x}^2 - 2\widehat{x} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} \quad 2x^2 - 2x \\ \textit{sujeito a:} \\ 3x^2 - 2x \leq 3\widehat{x}^2 - 2\widehat{x}. \end{cases}$$

Exemplo 3.2.3. *Considere o seguinte problema de otimização com função objetivo de valor intervalar*

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \quad F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)], \tag{3.7}$$

onde

$$\underline{f}(x) = \begin{cases} x - x^2, & \textit{para } x \leq 0, \\ x, & \textit{para } x > 0, \end{cases} \qquad e\ \overline{f}(x) = 1 + x^2; x \in \mathbb{R}.$$

As UC-soluções do problema em questão são todos $\widehat{x} \leq 0$*. Além disso, é fácil ver que* $\widehat{x} \leq 0$ *resolve os dois problemas clássicos oriundos desse problema de valor intervalar.*

3.2.1 Condições de otimalidade para UC-solução

Nesta seção, condições de otimalidade para UC-solução serão determinadas utilizando o conceito de diferenciabilidade extremal. Com o intuito de apresentar essas condições para o problema em questão, a seguir, será exposto o conceito de convexidade para funções de valor intervalar, via relação de ordem UC. Segundo Wu (2007), seja F uma função de valor intervalar, definida em um conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$, então F é UC-convexa em $\mathbf{x}^*$ se

$$F(\lambda \mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}) \leq_{UC} \lambda F(\mathbf{x}^*) + (1 - \lambda)F(\mathbf{x})$$

para todo $\lambda \in (0, 1)$ e cada $\mathbf{x} \in X$. Além disso, Wu (2007) prova que se X é um subconjunto convexo do $\mathbb{R}^n$ e F uma função de valor intervalar definida em X, então, F

é UC-convexa em $\mathbf{x}^*$ se, e somente se, $\overline{f}$ e f^C são convexas em $\mathbf{x}^*$.

O resultado, a seguir, apresenta uma relação entre a solução dos dois problemas clássicos, obtidos do problema de valor intervalar com a solução de um problema clássico, sob a hipótese de convexidade do problema. Esse resultado será utilizado na demonstração das condições necessárias.

Neste contexto, será considerado que um problema de otimização é convexo se todas as funções envolvidas e a região factível são convexas.

Teorema 3.2.2. *(Chankong e Haimes, 1983, pag.121) Considere que o problema de otimização é convexo. Se $\widehat{\boldsymbol{x}} \in X$ é solução dos problemas $(P_1)_{UC}$ e $(P_2)_{UC}$, então existem $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ com $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ tais que $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é também solução do seguinte problema*

$$\begin{aligned}
&\min \quad \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 \overline{f}(\boldsymbol{x}) + \alpha_2 f^C(\boldsymbol{x}) \\
&\textit{sujeito a:} \\
&g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i = 1, ..., m.
\end{aligned}$$

Condições necessárias do tipo Fritz-John para uma UC-solução do problema de otimização com função objetivo de valor intervalar, sob a hipótese de convexidade de problema, são determinadas adiante.

Teorema 3.2.3. *(Condição Necessária de Fritz-John para UC-solução) Suponha que a função de valor intervalar $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é continuamente E-diferenciável em $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e UC-convexa e, além disso, que a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é continuamente diferenciável em $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e convexa. Se $\widehat{\boldsymbol{x}} \in X$ é uma UC-solução, então existem multiplicadores (Lagrange) $0 \leq (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{2+m}$ $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \neq (0,0)$, tais que*

$$\begin{gathered}
g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) \leq 0; \quad \mu_i g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = 0, \quad i = 1, ..., m, \\
\lambda_1 \nabla \overline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \lambda_2 \nabla f^C(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = 0.
\end{gathered}$$

Demonstração. Se $\widehat{\mathbf{x}}$ é uma UC-solução do problema (3.1), então, pelo Teorema 3.2.1, $\widehat{\mathbf{x}}$ é solução dos problemas $(P_1)_{UC}$ e $(P_2)_{UC}$. Além disso, o problema é convexo, pois as funções F e g são UC-convexa e convexa, respectivamente, então, pelo Teorema 3.2.2, existem $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ com $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, tais que $\widehat{\mathbf{x}}$ também é solução do seguinte problema clássico:

$$\begin{aligned} &\min \quad \widetilde{F}(\mathbf{x}) = \alpha_1 \overline{f}(\mathbf{x}) + \alpha_2 f^C(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a:} \\ &g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, ..., m. \end{aligned}$$

Aplicando as condições necessárias de Fritz-John (Mangasarian e Fromovitz, 1967) em $\widehat{\mathbf{x}}$, tem-se que existe $0 \leq (\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{1+m}$ com $(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\mu}) \neq (0,0)$, tal que

$$\begin{aligned} &g_i(\widehat{\mathbf{x}}) \leq 0; \quad \mu_i g_i(\widehat{\mathbf{x}}) = 0 \quad i = 1, ..., m \\ &\widetilde{\lambda} \nabla (\alpha_1 \overline{f} + \alpha_2 f^C)(\widehat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\mathbf{x}}) = 0. \end{aligned}$$

Isto posto, a prova é completada considerando $\boldsymbol{\lambda} = (\widetilde{\lambda}\alpha_1, \widetilde{\lambda}\alpha_2)$. □

Para garantir a positividade de $\boldsymbol{\lambda}$ alguma regularidade no problema deve ser pressuposta (Luenberger, 1986; Miettinen, 1999), e essas condições de regularidade são chamadas de *qualificação das restrições*. Uma condição de regularidade é apresentada a seguir, seja $I(x) = \{i_1, i_2, ..., i_s\}$ um conjunto de índices, tal que: $j \in I(x)$ se, e somente se, $g_j(x) = 0$. Note que $0 \leq s \leq m$. Diz-se que $\widehat{\mathbf{x}} \in X$ é um ponto regular se, e somente se, o conjunto de vetores $\{\nabla g_j(\widehat{\mathbf{x}})\}$; $j \in I(\widehat{\mathbf{x}})$ é linearmente independente.

Utilizando a condição de regularidade, demonstrado o seguinte teorema, apresentar-se-ão as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker para uma UC-solução dos problemas de otimização de valor intervalar.

Teorema 3.2.4. *(Condição Necessária de Karush-Kuhn-Tucker para UC-solução) Suponha que a função de valor intervalar $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é continuamente E-diferenciável em $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e UC-convexa e que a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é continuamente diferenciável em $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e convexa. Se $\widehat{\boldsymbol{x}} \in X$ é um ponto regular e uma UC-solução, então existem multiplicadores (Lagrange) $0 \leq (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{2+s}$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, tais que*

$$\lambda_1 \nabla \overline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \lambda_2 \nabla f^C(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}.$$

Demonstração. Se $\widehat{\mathbf{x}}$ é uma UC-solução do problema (3.1), então, pelo Teorema 3.2.1, $\widehat{\mathbf{x}}$ é solução dos problemas $(P_1)_{UC}$ e $(P_2)_{UC}$. Além disso, o problema é convexo, pois as funções F e g são UC-convexa e convexa, respectivamente, então, pelo Teorema 3.2.2, existem $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ com $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, tais que $\widehat{\mathbf{x}}$ também é solução do seguinte problema clássico:

$$\begin{aligned}
&\min \quad \widetilde{F}(\mathbf{x}) = \alpha_1 \overline{f}(\mathbf{x}) + \alpha_2 f^C(\mathbf{x})\\
&\text{sujeito a:}\\
&g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, ..., m.
\end{aligned}$$

Aplicando as condições necessárias de Karush-Khun-Tuker (Luenberger, 1986), pois $\widehat{\mathbf{x}} \in X$ é um ponto regular, existe $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^s$, tal que

$$\nabla(\alpha_1 \overline{f}(\mathbf{x}) + \alpha_2 f^C)(\widehat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

Isto posto, a prova é completada considerando $\boldsymbol{\lambda} = (\alpha_1, \alpha_2)$. □

As condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker para uma UC-solução podem ser apresentadas através da derivada generalizada de Hukuhara.

Teorema 3.2.5. *(Condição Necessária de Karush-Kuhn-Tucker para UC-solução) Suponha que a função de valor intervalar $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é continuamente E-diferenciável em $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e UC-convexa e que a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é continuamente diferenciável em $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e convexa. Se $\widehat{\boldsymbol{x}} \in X$ é um ponto regular e uma UC-solução, então, existe um multiplicador $0 \leq \boldsymbol{\mu}$ $\in \mathbb{R}^s$, tal que*

$$\boldsymbol{0} \in \nabla_{gH} F(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}).$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 3.2.4 e do fato que se F é continuamente E-diferenciável, então, pelo Teorema 2.3.2, que F é continuamente gH-diferenciável e $\nabla\widetilde{F}(\widehat{\mathbf{x}}) \in \nabla_{gH} F(\widehat{\mathbf{x}})$, onde $\widetilde{F} = (\alpha_1 \underline{f} + \alpha_2 \overline{f})$ considerando $\alpha_1 = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{2}$. □

Wu (2007) propõe condições suficientes para uma UC-solução do problema em questão, como apresenta o teorema a seguir.

Teorema 3.2.6. *(Wu, 2007) (Condição suficiente para UC-solução) Suponha que a função de valor intervalar $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é continuamente E-diferenciável e UC-convexa em $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e que a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é continuamente diferenciável e convexa em $\widehat{\boldsymbol{x}}$. Se existem multiplicadores (Lagrange) $0 < \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$, tais que*

$$\begin{aligned}
&g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) \leq 0; \quad \mu_i g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = 0 \quad i = 1, ..., m\\
&\lambda_1 \nabla \overline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \lambda_2 \nabla f^C(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0},
\end{aligned}$$

então $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é uma UC-solução para o problema (3.1).

Observe que em virtude do problema de otimização de valor intervalar ser convexo, o Teorema 3.2.6 fornece condição suficiente para uma UC-solução global.

Os resultados foram demonstrados apenas para os problemas de otimização com o intuito de minimizar, resultados similares podem ser obtidos para os problemas visando maximizar, basta utilizar a relação de ordem LC definida para o caso de maximização. A seguir, serão apresentados os resultados similares, porém para a determinação das LU-soluções dos problema de otimização com função objetivo de valor intervalar.

3.3 Solução via relação de ordem LU

Visando obter as LU-soluções, deve-se utilizar a relação de ordem LU. O conceito de LU-solução para o problema de otimização é dado por Wu (2007): seja $\widehat{\mathbf{x}}$ uma solução factível do problema (3.1); i.e., $\widehat{\mathbf{x}} \in X$. Então, $\widehat{\mathbf{x}}$ é uma LU-solução do problema (3.1) se não existe $\mathbf{x} \in X$, tal que $F(\mathbf{x}) <_{LU} F(\widehat{\mathbf{x}})$. O conjunto das LU-soluções é dado por:

$$\widehat{X}_{LU} = \{\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n; \widehat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}\in X} F(\mathbf{x})\}.$$

Além disso, $\widehat{\mathbf{x}}$ é localmente uma LU-solução do problema (3.1), se não existe $\mathbf{x} \in N_\epsilon(\widehat{\mathbf{x}}) \cap X$, tal que $F(\mathbf{x}) <_{LU} F(\widehat{\mathbf{x}})$, onde $N_\epsilon(\widehat{\mathbf{x}})$ é uma ϵ-vizinhança de $\widehat{\mathbf{x}}$.

O processo de determinação das LU-soluções equivale a resolução de dois problemas de otimização clássica, obtidos a partir do problema intervalar em questão, como mostra este teorema:

Teorema 3.3.1. *Se $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é uma LU-solução do problema (3.1), então $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é solução dos dois seguintes problemas clássicos*

$$(P_1)_{LU} \begin{cases} \min \quad \underline{f}(\boldsymbol{x}) \\ \textit{sujeito a:} \\ \overline{f}(\boldsymbol{x}) \leq \overline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) \\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i = 1, ..., m, \end{cases} \qquad e \qquad (P_2)_{LU} \begin{cases} \min \quad \overline{f}(\boldsymbol{x}) \\ \textit{sujeito a:} \\ \underline{f}(\boldsymbol{x}) \leq \underline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) \\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i = 1, ..., m. \end{cases}$$

Reciprocamente, se $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é solução de $(P_1)_{LU}$ e $(P_2)_{LU}$, então $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é uma LU-solução do problema (3.1).

Demonstração. Seja $\widehat{\mathbf{x}}$ é uma LU-solução e suponha que $\widehat{\mathbf{x}}$ não resolve um dos problemas clássicos, $(P_1)_{LU}$ ou $(P_2)_{LU}$. Se $\widehat{\mathbf{x}}$ não resolve $(P_1)_{LU}$, então existe uma solução $\mathbf{x} \in X$, tal que $\underline{f}(\mathbf{x}) < \underline{f}(\widehat{\mathbf{x}})$ e $\overline{f}(\mathbf{x}) \leq \overline{f}(\widehat{\mathbf{x}})$. Isso contradiz a LU otimalidade de $\widehat{\mathbf{x}}$. Reciprocamente, $\widehat{\mathbf{x}} \in X$ é por hipótese solução dos dois problemas clássicos. Se $\widehat{\mathbf{x}}$ é uma solução do problema $(P_1)_{LU}$, então não existe $\mathbf{x} \in X$ tal que $\underline{f}(\mathbf{x}) < \underline{f}(\widehat{\mathbf{x}})$ e $\overline{f}(\mathbf{x}) \leq \overline{f}(\widehat{\mathbf{x}})$; i.e., $F(\mathbf{x}) <_{LU} F(\widehat{\mathbf{x}})$. Essa é a definição de LU otimalidade para $\widehat{\mathbf{x}}$. □

A seguir, serão apresentados os mesmos exemplos vistos anteriormente, porém buscar-se-ão as LU-soluções dos mesmos.

Exemplo 3.3.1. *Considere o problema de otimização com função objetivo de valor intervalar*

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \quad F(x) = [-x^2, x^2]. \tag{3.8}$$

Todo $\widehat{x} \in \mathbb{R}$ é uma LU-solução do problema em questão. Note que $\widehat{x} = 0$ é uma UC-solução do problema, então $\widehat{x} = 0$ é uma LU-solução do problema. Contudo, a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 3.3.2. *Considere o problema de otimização com função objetivo de valor intervalar*

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \quad F(x) = [x^2 - 2x, 3x^2 - 2x]. \tag{3.9}$$

Neste caso, todo $\widehat{x} \in [1/3, 1]$ é uma LU-solução do problema em questão. Além disso, todo $\widehat{x} \in [1/3, 1]$ resolve os dois problemas clássicos. Por exemplo, $\widehat{x} = 1/2$ resolve os dois seguintes problemas clássicos:

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} \quad x^2 - 2x \\ \textit{sujeito a:} \\ 3x^2 - 2x \leq 3\widehat{x}^2 - 2\widehat{x} \end{cases} \quad \textit{e} \quad \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} \quad 3x^2 - 2x \\ \textit{sujeito a:} \\ x^2 - 2x \leq \widehat{x}^2 - 2\widehat{x}. \end{cases}$$

Por outro lado, $\widehat{x} = 0$ não resolve os dois problemas clássicos, e como já observado, $\widehat{x} = 0$ não é uma LU-solução do problema (3.9). Note que $\widehat{X}_{UC} = [1/3, 1/2] \subset \widehat{X}_{LU} = [1/3, 1]$.

Exemplo 3.3.3. *Considere o seguinte problema de otimização com função objetivo de valor intervalar*

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \quad F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$$

onde

$$\underline{f}(x) = \begin{cases} x - x^2 \ \text{para} \ x \leq 0, \\ x \quad \text{para} \ x > 0, \end{cases} \qquad e \ \overline{f}(x) = 1 + x^2 \ \text{para todo} \ x \in \mathbb{R}.$$

As LU-soluções do problema em questão são quaisquer $\widehat{x} \leq 0$. *Além disso, todo* $\widehat{x} \leq 0$ *resolve os dois problemas clássicos oriundos desse problema de valor intervalar. Note que* $\widehat{X}_{UC} \subset \widehat{X}_{LU}$.

3.3.1 Condições de otimalidade para LU-solução

Visando obter as condições de otimalidade para uma LU-solução do problema de otimização com função objetivo de valor intervalar, sob a hipótese de diferenciabilidade extremal, primeiramente, será exposto o conceito de convexidade para as funções de valor intervalar, via relação de ordem LU. Segundo Wu (2007), seja F uma função de valor intervalar definida em um conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$, então F é LU-convexa em $\mathbf{x}^*$ se

$$F(\lambda \mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}) \leq_{LU} \lambda F(\mathbf{x}^*) + (1-\lambda)F(\mathbf{x})$$

para todo $\lambda \in (0,1)$ e cada $\mathbf{x} \in X$. Além disso, Wu (2007) prova que sejam X um subconjunto convexo do $\mathbb{R}^n$ e F uma função de valor intervalar definida em X. Então, F é LU-convexa em $\mathbf{x}^*$ se, e somente se, $\underline{f}$ e $\overline{f}$ são convexas em $\mathbf{x}^*$.

O teorema, a seguir, apresenta as condições necessárias do tipo Fritz-John para uma LU-solução.

Teorema 3.3.2. *(Condição Necessária de Fritz-John para LU-solução) Suponha que a função de valor intervalar* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *é continuamente E-diferenciável em* $\widehat{\boldsymbol{x}}$ *e LU-convexa, e que a função* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é continuamente diferenciável em* $\widehat{\boldsymbol{x}}$ *e convexa. Se* $\widehat{\boldsymbol{x}} \in X$ *é uma LU-solução, então existem multiplicadores* $0 \leq (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{2+m}$ *com* $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \neq (0,0)$, *tais que*

$$g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) \leq 0; \quad \mu_i g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = 0 \quad i = 1, ..., m$$
$$\lambda_1 \nabla \underline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \lambda_2 \nabla \overline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}.$$

Demonstração. Se $\widehat{\mathbf{x}}$ é uma LU-solução do problema (3.1), então, pelo Teorema 3.3.1, $\widehat{\mathbf{x}}$ é solução dos problemas $(P_1)_{LU}$ e $(P_2)_{LU}$. Além disso, o problema é convexo, pois as funções F e g são LU-convexa e convexa, respectivamente, então, pelo Teorema 3.2.2, existem $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ com $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, tais que $\widehat{\mathbf{x}}$ também é a solução do seguinte problema clássico:

$$\begin{aligned}
&\min \quad \widetilde{F}(\mathbf{x}) = \alpha_1 \underline{f}(\mathbf{x}) + \alpha_2 \overline{f}(\mathbf{x}) \\
&\text{sujeito a:} \\
&g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ \ i = 1, ..., m.
\end{aligned}$$

Aplicando as condições necessárias de Fritz-John (Mangasarian e Fromovitz, 1967) em $\widehat{\mathbf{x}}$, tem-se que existe $0 \leq (\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{1+m}$ com $(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\mu}) \neq (0,0)$, tais que

$$\begin{aligned}
&g_i(\widehat{\mathbf{x}}) \leq 0; \quad \mu_i g_i(\widehat{\mathbf{x}}) = 0 \ \ i = 1, ..., m \\
&\widetilde{\lambda} \nabla(\alpha_1 \underline{f} + \alpha_2 \overline{f})(\widehat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Isto posto, a prova é completada considerando $\boldsymbol{\lambda} = (\widetilde{\lambda}\alpha_1, \widetilde{\lambda}\alpha_2)$. □

Utilizando a condição de regularidade, o seguinte teorema apresentará as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker para uma LU-solução dos problemas de otimização de valor intervalar.

Teorema 3.3.3. *(Condição Necessária de Karush-Kuhn-Tucker para LU-solução) Suponha que a função de valor intervalar $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é continuamente E-diferenciável em $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e LU-convexa, e que a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é continuamente diferenciável em $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e convexa. Se $\widehat{\boldsymbol{x}} \in X$ é um ponto regular e uma LU-solução, então existem multiplicadores (Lagrange) $0 \leq (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{2+s}$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, tais que*

$$\lambda_1 \nabla \underline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \lambda_2 \nabla \overline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}.$$

Demonstração. Se $\widehat{\mathbf{x}}$ é uma LU-solução do problema (3.1), então, pelo Teorema 3.3.1, $\widehat{\mathbf{x}}$ é solução dos problemas $(P_1)_{LU}$ e $(P_2)_{LU}$. Além disso, o problema é convexo, pois as funções F e g são LU-convexa e convexa, respectivamente, então, pelo Teorema 3.2.2, existem $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ com $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, tais que $\widehat{\mathbf{x}}$ também é a solução do seguinte problema clássico:

$$\begin{aligned}
&\min \quad \widetilde{F}(\mathbf{x}) = \alpha_1 \underline{f}(\mathbf{x}) + \alpha_2 \overline{f}(\mathbf{x}) \\
&\text{sujeito a:} \\
&g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ \ i = 1, ..., m.
\end{aligned}$$

Aplicando as condições necessárias de Kahush-Khun-Tuker (Luenberger, 1986), pois $\widehat{\mathbf{x}} \in X$ é um ponto regular, existe $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^s$, tal que

$$\nabla(\alpha_1 \underline{f}(\mathbf{x}) + \alpha_2 \overline{f})(\widehat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

Isto posto, a prova é completada considerando $\boldsymbol{\lambda} = (\alpha_1, \alpha_2)$. □

As condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker para uma LU-solução podem ser apresentadas através da derivada generalizada de Hukuhara.

Teorema 3.3.4. *(Condição Necessária de Karush-Kuhn-Tucker para LU-solução) Suponha que a função de valor intervalar $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é continuamente E-diferenciável em $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e LU-convexa e que a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é continuamente diferenciável em $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e convexa. Se $\widehat{\boldsymbol{x}} \in X$ é um ponto regular e uma LU-solução, então existe um multiplicador $0 \leq \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^s$, tal que*

$$\boldsymbol{0} \in \nabla_{gH} F(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}).$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 3.3.3 e do fato que se F é continuamente E-diferenciável, então, pelo Teorema 2.3.2, que F é continuamente gH-diferenciável e $\nabla \widetilde{F}(\widehat{\mathbf{x}}) \in \nabla_{gH} F(\widehat{\mathbf{x}})$ onde $\widetilde{F} = (\lambda_1 \underline{f} + \lambda_2 \overline{f})$. □

Considerando que o problema de otimização com função objetivo de valor intervalar é convexo, Wu (2007) propõe as condições suficientes para a LU-solução.

Teorema 3.3.5. *(Wu, 2007) (Condição suficiente para LU-solução) Suponha que a função de valor intervalar $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é continuamente E-diferenciável e LU-convexa em $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e que a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é continuamente diferenciável e convexa em $\widehat{\boldsymbol{x}}$. Se existem multiplicadores $0 < \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$, tais que*

$$\begin{gathered} g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) \leq 0; \quad \mu_i g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = 0 \quad i = 1, ..., m \\ \lambda_1 \nabla \underline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \lambda_2 \nabla \overline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}, \end{gathered}$$

então $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é uma LU-solução para o problema (3.1).

Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana (2013) apresentaram condições suficientes para LU-solução baseado no conceito de gH-diferenciabilidade da função objetivo de valor intervalar.

A seguir, serão apresentados resultados similares, porém para a determinação das LS-soluções do problema de otimização com função objetivo de valor intervalar.

3.4 Solução via relação de ordem LS

O conceito de LS-solução para o problema de otimização é dado por Chalco-Cano et al. (2013): seja $\widehat{\mathbf{x}}$ uma solução factível do problema (3.1); i.e., $\widehat{\mathbf{x}} \in X$. Então, $\widehat{\mathbf{x}}$ é uma LS-solução do problema (3.1), se não existe $\mathbf{x} \in X$, tal que $F(\mathbf{x}) <_{LS} F(\widehat{\mathbf{x}})$. O conjunto das LS-soluções é dado por:

$$\widehat{X}_{LS} = \{\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n; \widehat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}\in X} F(\mathbf{x})\}.$$

Além disso, $\widehat{\mathbf{x}}$ é localmente uma LS-solução do problema (3.1), se não existe $\mathbf{x} \in N_\epsilon(\widehat{\mathbf{x}}) \cap X$, tal que $F(\mathbf{x}) <_{LS} F(\widehat{\mathbf{x}})$, onde $N_\epsilon(\widehat{\mathbf{x}})$ é uma ϵ-vizinhança de $\widehat{\mathbf{x}}$.

As demonstrações dos resultados a seguir serão omitidas, pois são similares as demonstrações do caso UC-solução e LU-solução, mas agora considerando o conceito de LS-solução.

Teorema 3.4.1. *Se $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é uma LS-solução do problema (3.1), então $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é solução dos dois seguintes problemas clássicos*

$$(P_1)_{LS}\begin{cases}\min \quad \underline{f}(\boldsymbol{x})\\ \textit{sujeito a:}\\ f^S(\boldsymbol{x}) \leq f^S(\widehat{\boldsymbol{x}})\\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i = 1, ..., m,\end{cases} \qquad e \qquad (P_2)_{LS}\begin{cases}\min \quad f^S(\boldsymbol{x})\\ \textit{sujeito a:}\\ \underline{f}(\boldsymbol{x}) \leq \underline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}})\\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i = 1, ..., m.\end{cases}$$

Reciprocamente, se $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é solução de $(P_1)_{LS}$ e $(P_2)_{LS}$, então $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é uma LS-solução do problema (3.1).

Exemplo 3.4.1. *Considere um problema de otimização com função objetivo de valor intervalar*

$$\min_{x\in\mathbb{R}} \quad F(x) = [x^2 - 2x, 3x^2 - 2x]$$

É fácil ver que todo $\widehat{x} \in [0, 1]$ é uma LS-solução do problema em questão. Além disso, todo $\widehat{x} \in [0, 1]$ resolve os dois problemas clássicos oriundos desse problema, utilizando a relação de ordem LS. Note que $\widehat{X}_{UC} = [1/3, 1/2] \subset \widehat{X}_{LU} = [1/3, 1] \subset \widehat{X}_{LS} = [0, 1]$.

Exemplo 3.4.2. *Considere o problema de otimização com função objetivo de valor intervalar*

$$\min_{x\in\mathbb{R}} \; F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)],$$

onde

$$\underline{f}(x) = \begin{cases} x - x^2 & \textit{para } x \leq 0, \\ x & \textit{para } x > 0, \end{cases} \qquad \textit{e } \overline{f}(x) = 1 + x^2 \textit{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

As LS-soluções do problema em questão são $\widehat{x} \leq 1/2$*. Note que* $\widehat{X}_{UC} \subset \widehat{X}_{LU} \subset \widehat{X}_{LS}$*.*

3.4.1 Condições de otimalidade para LS-solução

Com o intuito de apresentar condições de otimalidade para LS-solução deste problema intervalar, a seguir, será definido o conceito de convexidade para funções de valor intervalar, via relação de ordem LS. Segundo Chalco-Cano et al. (2013), seja F uma função de valor intervalar definida em um conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$, então F é LS-convexa em $\mathbf{x}^*$ se

$$F(\lambda\mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}) \leq_{LS} \lambda F(\mathbf{x}^*) + (1-\lambda)F(\mathbf{x})$$

para todo $\lambda \in (0,1)$ e cada $\mathbf{x} \in X$. Além disso, Chalco-Cano et al. (2013) prova que sejam X um subconjunto convexo do $\mathbb{R}^n$ e F uma função de valor intervalar definida em X. Então, F é LS-convexa em $\mathbf{x}^*$ se, e somente se, $\underline{f}$ e f^S são convexas em $\mathbf{x}^*$.

Teorema 3.4.2. *(Condição Necessária de Fritz-John para LS-solução) Suponha que a função de valor intervalar* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *é continuamente E-diferenciável em* $\widehat{\boldsymbol{x}}$ *e LS-convexa, e que a função* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é continuamente diferenciável em* $\widehat{\boldsymbol{x}}$ *e convexa. Se* $\widehat{\boldsymbol{x}} \in X$ *é uma LS-solução, então existem multiplicadores* $0 \leq (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{2+m}$ *com* $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \neq (0,0)$*, tais que*

$$g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) \leq 0; \quad \mu_i g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = 0 \quad i = 1, ..., m$$
$$\lambda_1 \nabla \underline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \lambda_2 \nabla f^S(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}.$$

Teorema 3.4.3. *(Condição Necessária de Karush-Kuhn-Tucker para LS-solução) Suponha que a função de valor intervalar* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *é continuamente E-diferenciável em* $\widehat{\boldsymbol{x}}$ *e LS-convexa, e que a função* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é continuamente diferenciável em* $\widehat{\boldsymbol{x}}$ *e convexa. Seja* $\widehat{\boldsymbol{x}} \in X$ *um ponto regular. Se* $\widehat{\boldsymbol{x}}$ *é uma LS-solução, então, existem multiplicadores*

(Lagrange) $0 \leq (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{2+s}$ *com* $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, *tais que*

$$\lambda_1 \nabla \underline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \lambda_2 \nabla f^S(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}.$$

Teorema 3.4.4. *(Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana, 2013) (Condição suficiente para LS-solução) Suponha que a função de valor intervalar* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *é continuamente E-diferenciável e LS-convexa em* $\widehat{\boldsymbol{x}}$ *e que a função* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é continuamente diferenciável e convexa em* $\widehat{\boldsymbol{x}}$. *Se existem multiplicadores (Lagrange)* $0 < \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *e* $0 \leq \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$, *tais que*

$$g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) \leq 0; \quad \mu_i g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = 0 \quad i = 1, ..., m$$
$$\lambda_1 \nabla \underline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \lambda_2 \nabla f^S(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0},$$

então $\widehat{\boldsymbol{x}}$ *é uma LS-solução para o problema (3.1).*

Observação 3.4.1. *Embora os resultados são demonstrados para os conjuntos* X *do espaço Euclidiano com dimensão finita, a prova pode ser adaptada para os espaços de Banach mais abstratos. Esses resultados serão utilizados, neste contexto, para propor as condições de otimalidade para os problemas de controle ótimo com funcional objetivo de valor intervalar.*

3.5 Conclusões

Foram expostos vários conceitos de relação de ordem para o espaço intervalar e utilizando três dessas definições, apresentou-se as diferentes definições de solução para o problema de otimização intervalar em questão. Via três conceitos de solução para o problema de otimização, com função objetivo de valor intervalar, apresentaram-se as condições suficientes e foram propostas as condições necessárias de Fritz-John e Karush-Kuhn-Tucker, utilizando o conceito de E-diferenciabilidade da função de valor intervalar. Além disso, as condições necessárias de Karash-Kuhn-Tucker também foram apresentadas pela gH-derivada.

No capítulo seguinte, serão apresentados os diferentes conceitos de solução para os problemas de controle ótimo com funcional objetivo de valor intervalar e suas implicações. Além disso, serão propostas as condições de otimalidade para esses problemas, usando os conceitos de E-diferenciável e, também, gH-diferenciável.

CAPÍTULO 4

CONTROLE ÓTIMO DE VALOR INTERVALAR

Neste capítulo, será considerado o problema de controle ótimo com funcional objetivo de valor intervalar. Para tal propósito, definir-se-ão os diferentes conceitos de solução, a partir das várias relações de ordem já definidas para o espaço intervalar. Além disso, serão aduzidas as relações existentes entre esses diferentes conceitos de solução. Utilizando os conceitos de diferenciabilidade extremal e generalizada de Hukuhara, para a função de valor intervalar, serão obtidas as condições de otimalidade, necessárias e suficientes, sob as hipóteses de convexidade para os diferentes conceitos de solução do problema em questão. Esses resultados serão obtidos, considerando um problema particular de controle ótimo, segundo a formulação de Lagrange. Além disso, dois exemplos numéricos foram desenvolvidos buscando exemplificar tais resultados.

4.1 O problema de controle ótimo intervalar

Os problemas de controle ótimo originaram-se da teoria do cálculo variacional por volta de 1956. Bellman (1957) e Pontryagin et al. (1965) foram os grandes contribuintes para o desenvolvimento desta teoria. A gama de aplicações da teoria de controle ótimo é bastante ampla, permitindo a abordagem de problemas (ver (Skowronski, Flashner e Guttalu, 1991; Knobloch, Isidori e Flockerzi, 1993; Schmidt et al., 1998)) oriundos de diferentes áreas do conhecimento, tais como a física, a economia, a engenharia e as demais ciências aplicadas (ver (Kennedy, 1986; Cacho, 1999; Campo et al., 2006)). A teoria de controle ótimo é utilizada para descrever e estudar as aplicações, tipicamente as situações onde é difícil determinar os coeficientes de uma função, como números reais. Os coeficientes frequentemente possuem incerteza inerente ou imprecisão. Neste âmbito, nesta seção, será feita uma breve apresentação dos problemas de controle ótimo de valor intervalar, onde os coeficiente do funcional objetivo são considerados incertos, com incerteza do tipo intervalar.

Em um problema de controle ótimo, uma *variável de estado* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, dependente do tempo, evolui de acordo com uma dada dinâmica

$$\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \;\; t > t_0, \tag{4.1}$$

a partir de um estado inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Aqui $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ corresponde ao modelo estudado, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ é o estado inicial do sistema e $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ é um parâmetro livre influenciando a dinâmica, denominado *controle* do sistema. Em muitos problemas, é também fornecida uma condição de contorno final $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$, ou ainda, uma condição de contorno transversal. A equação (4.1) é denominada *equação de estado* (Baumeister e Leitão, 2008).

Tendo em vista os problemas de controle ótimo de valor intervalar considerados neste capítulo, o objetivo que se impõe é minimizar os funcionais intervalares, do tipo

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt,$$

onde $L : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ estão relacionados pela dinâmica $\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ e ainda $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{u} \in U_{ad}$. O conjunto dos controles admissíveis será simplesmente $U_{ad} := \widehat{C}([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$[1], pois o problema em questão não possui restrição nas variáveis de controle. O conjunto das trajetórias admissíveis é dado por[2]:

$$X_{ad} = \{\mathbf{x} \in \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n); \mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \;\; \mathbf{u} \in U_{ad}, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\}.$$

Os candidatos a solução do problema em questão serão os processos admissíveis, $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in X_{ad} \times U_{ad}$.

O problema de controle ótimo com funcional objetivo de valor intervalar que será

[1] $\widehat{C}([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m) := \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m; \mathbf{u}$ é contínua por partes$\}$. Onde, uma função $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ é denominada *contínua por partes*, nota-se $y \in \widehat{C}([t_0, t_1]; \mathbb{R})$, quando existe uma partição $t_0 = x_0 < .... < x_{n+1} = t_1$ tal que, para todo $i = 0, ..., n$, a restrição $y \mid_{(x_i, x_{i+1})}$ possui uma extensão contínua no intervalo $[t_0, t_1]$.

[2] $\widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) := \{\mathbf{y} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m; \mathbf{y}$ é continuamente diferenciável por partes$\}$. Onde, uma função $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ é denominada *continuamente diferenciável por partes*, quando existe uma partição $t_0 = x_0 < .... < x_{n+1} = t_1$ tal que, para todo $i = 0, ..., n$, a restrição $y \mid_{(x_i, x_{i+1})}$ possui uma extensão continuamente diferenciável ao intervalo $[t_0, t_1]$.

considerado, é o seguinte:

$$\begin{aligned}
&\min \quad I(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))dt \\
&\text{sujeito a:} \quad \mathbf{u} \in U_{ad} \\
&\mathbf{x}'(t) = f(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)), \;\; t \in (t_0,t_1) \\
&\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Dessa forma, objetiva-se determinar o conjunto das soluções ótimas para o problema de controle ótimo de valor intervalar (PCOI):

$$(PCOI)\begin{cases} \widehat{X} \times \widehat{U} = \{(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}}) \in \widehat{C}^1([t_0,t_1];\mathbb{R}^n) \times \widehat{C}([t_0,t_1];\mathbb{R}^n); \\ (\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}}) = \arg\min_{(\mathbf{x},\mathbf{u})\in X_{ad}\times U_{ad}} \;\; I(\mathbf{x},\mathbf{u})\}. \end{cases}$$

O intuito é determinar o conjunto $\widehat{X} \times \widehat{U}$, pertencente ao conjunto dos processos admissíveis, $X_{ad} \times U_{ad}$, tal que este minimize, de certa forma, a função de valor intervalar. Como estudado no Capítulo 3, o conceito de solução será definido a partir das relações de ordem definidas no espaço intervalar e, assim, para cada relação de ordem será definido um conceito de solução para o problema em questão. Além disso, apresentar-se-ão as relações existentes entre os diferentes conceitos de soluções [3].

4.2 Conceito de solução para PCOI

Nesta seção, será caracterizado o conceito de solução para os problemas de controle ótimo com incerteza intervalar. Para cada relação de ordem identificada, define-se o conceito de solução do problema intervalar. Será caracterizado o conceito de solução global, mas de forma similar, obtém-se o conceito de solução local, bastando considerar uma determinada vizinhança. Previamente, para a relação de ordem determinada por Kulisch e Miranker (1981), o conceito de solução é dado por:

Definição 14. *Seja $(\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{u}})$ um processo admissível do problema (4.2); i.e., $(\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{u}}) \in X_{ad} \times U_{ad}$. Diz-se que $(\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{u}})$ é uma LU-solução ótima do problema (4.2), se não existe $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \in X_{ad} \times U_{ad}$, tal que $I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) <_{LU} I(\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{u}})$.*

Considerando o caso de minimização, o conceito de solução segundo as relações de

[3] O Capítulo 3 apresentou diferentes conceitos de soluções para os problemas de otimização com função objetivo de valor intervalar presentes na literatura. Aqui esses conceitos serão re-enunciados, porém no contexto dos problemas de controle ótimo com funcional objetivo de valor intervalar.

ordem LS e UC são definidas a seguir:

Definição 15. *Seja* $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ *um processo admissível do problema (4.2); i.e.,* $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}) \in X_{ad} \times U_{ad}$*. Diz-se que* $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ *é uma LS-solução ótima do problema (4.2), se não existe* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in X_{ad} \times U_{ad}$*, tal que* $I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) <_{LS} I(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$*.*

Definição 16. *Seja* $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ *um processo admissível do problema (4.2); i.e.,* $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}) \in X_{ad} \times U_{ad}$*. Diz-se que* $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ *é uma UC-solução ótima do problema (4.2), se não existe* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in X_{ad} \times U_{ad}$*, tal que* $I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) <_{UC} I(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$*.*

Da mesma forma, define-se o conceito de solução de acordo com as outras relações de ordem. A Figura 2 apresenta um esquema ilustrativo entre as relações dos diferentes conceitos de solução para o problema de controle ótimo com funcional de valor intervalar.

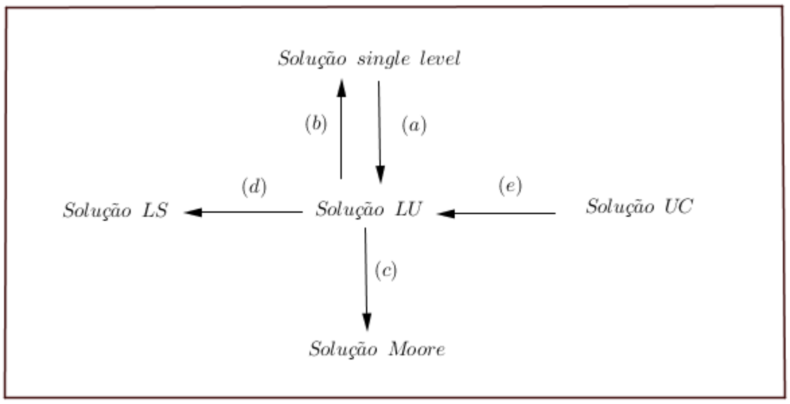


Figura 2: Equivalência entre as soluções dos PCOI (min).

As implicações (a) e (b) da Figura 2 seguem, diretamente, da relação existente entre a relação de ordem *single level* e a LU. Por outro lado, a implicação (d) foi verificada por Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana (2013), no contexto de otimização de valor intervalar. Considerando a formalização dos problemas de controle ótimo de valor intervalar, tem-se o seguinte:

Teorema 4.2.1. *Seja* $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ *um processo admissível do problema (4.2), i.e.,* $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}) \in X_{ad} \times U_{ad}$*. Se* $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ *é uma* LU*-solução ótima do problema (4.2), então é uma LS-solução ótima do problema (4.2).*

Demonstração. Suponha que $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ não é uma LS-solução ótima do problema (4.2). Então, existe $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in X_{ad} \times U_{ad}$, tal que $I(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq_{LS} I(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ e $I(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \neq I(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$. Da implicação da relação de ordem LS na relação LU, segue que: $I(\mathbf{x},\mathbf{u}) \leq_{LU} I(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ e $I(\mathbf{x},\mathbf{u}) \neq I(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$, que contradiz a hipótese do teorema. $\square$

Já a implicação (e) segue do resultado abaixo, que é facilmente verificada, a partir da implicação entre a relação de ordem LU e a relação UC.

Teorema 4.2.2. *Seja $(\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{u}})$ um processo admissível para o problema (4.2), i.e., $(\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{u}}) \in X_{ad} \times U_{ad}$. Se $(\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{u}})$ é uma UC-solução ótima do problema (4.2), então é uma LU-solução ótima do problema (4.2).*

De forma similar, obtém-se a implicação (c), utilizando a implicação entre essas duas relações de ordem. Consequentemente, se um processo ótimo do problema (4.2) é uma UC-solução ótima, então é também uma solução *single level* ótima, pois é uma LU-solução, e além disso, é uma LS-solução ótima do problema (4.2). Definições e análises similares se detém para os problemas de maximização, considerando as relações de ordem neste contexto.

Nas próximas seções, serão apresentados condições de otimalidade, para três dos conceitos de soluções, dos problemas de controle ótimo de valor intervalar, sob certas hipóteses de convexidade. Antes de apresentar as condições de otimalidade será definido uma função auxiliar, denominada de *função de Hamilton* de valor intervalar, associada ao problema em questão.

Definição 17. *Seja $H : [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função de valor intervalar. Então, a função de Hamilton, de valor intervalar H, é definida por:*

$$H(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{p}(t)) \quad = \quad L(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)) + \boldsymbol{p}^T(t) f(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)), \tag{4.3}$$

onde $\boldsymbol{p} \in \widehat{C}^1([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)$ é um multiplicador.

A função de Hamilton é definida a partir do funcional objetivo de valor intervalar, assim essa é também uma função de valor intervalar.

4.3 Condições de Otimalidade para UC-solução

Nesta seção, serão obtidas as condições de otimalidade, necessárias e suficientes, para UC-solução ótima dos problemas de controle ótimo, com funcional objetivo de valor intervalar. O primeiro resultado trata de condições necessárias para o problema (4.2), que é um variante do princípio de otimalidade, para o caso que L é uma função de valor intervalar, f é uma função clássica e, além disso, UC-convexa e convexa, respectivamente.

Teorema 4.3.1. *Suponha que a função de valor intervalar* $L : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *é continuamente E-diferenciável e UC-convexa, nas variáveis* $\boldsymbol{x}(\cdot)$ *e* $\boldsymbol{u}(\cdot)$*, para cada* $t \in [t_0, t_1]$*. Seja* $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *continuamente diferenciável e convexa, nas variáveis* $\boldsymbol{x}(\cdot)$ *e* $\boldsymbol{u}(\cdot)$*, para cada* $t \in [t_0, t_1]$*. Se* $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ *é uma UC-solução ótima local fraca*[4] *do problema (4.2) em* $X_{ad} \times U_{ad}$*, então existem* $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$*, tais que* $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ *e o multiplicador* $\widehat{\boldsymbol{p}} \in \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$*, tais que:*

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{x}}'(t) & = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p}(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \widehat{\boldsymbol{p}}'(t) & = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \widehat{\boldsymbol{x}}(t_0) & = \boldsymbol{x}_0 \text{ e } \widehat{\boldsymbol{p}}(t_1) = \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{4.4}$$

e ainda, o controle $\widehat{\boldsymbol{u}}$ *satisfaz a seguinte condição de otimalidade*

$$\widetilde{H}(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}) = \min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m} \{\widetilde{H}(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}, \widehat{\boldsymbol{p}})\}, \quad t \in (t_0, t_1),$$

onde $\widetilde{H} = (\lambda_1 \bar{l} + \lambda_2 l^C) + \boldsymbol{p}^T f$*.*

Demonstração. O problema de controle ótimo de valor intervalar é convexo, pois L e f são UC-convexa e convexa, respectivamente, e $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ é localmente uma UC-solução, então, pelo Teorema 3.2.1 e a Observação 3.4.1, $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ também é solução dos dois problemas clássicos $(P_1)_{UC}$ e $(P_2)_{UC}$. Agora, aplicando o Teorema 3.2.2, existem $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, tais que $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ é uma solução local fraca do problema de controle ótimo com funcional objetivo $(\lambda_1 \overline{I} + \lambda_2 I^C)$, mais precisamente, do seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \min \int_{t_0}^{t_1} \left(\lambda_1 \bar{l} + \lambda_2 l^C\right)(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \\ & \text{sujeito a:} \quad \mathbf{u} \in U_{ad} \\ & \mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

A função $\left(\lambda_1 \bar{l} + \lambda_2 l^C\right)$ é continuamente diferenciável, pois L é continuamente E-diferenciável. Além disso, se L é UC-convexa, então $\bar{l}$ e l^C são convexas, e como f é convexa, a função

[4] Aqui a norma dos elementos $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in X_{ad} \times U_{ad}$ é dada por: $\|(\mathbf{x}, \mathbf{u})\| := \|\mathbf{x}\|_{1,\infty} + \|\mathbf{u}\|_\infty$, onde $\|\mathbf{x}\|_{1,\infty} = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{x}'\|_\infty$ e $\|\mathbf{u}\|_\infty = \sup_{t \in [t_0, t_1]} |\mathbf{u}(t)|$.

de Hamilton deste problema, que é dada por:

$$\widetilde{H} = \left(\lambda_1 \bar{l} + \lambda_2 l^C\right) + \mathbf{p}^T f, \tag{4.5}$$

é uma função convexa na variável $\mathbf{u}$ e $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ é uma solução ótima local fraca deste problema de valor real. Dessa forma, pelo Teorema 176, em Baumeister e Leitão (2008, pag. 212), existe $\widehat{\mathbf{p}} \in \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, tal que

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}'(t) &= \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p}(t, \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}), \\ \widehat{\mathbf{p}}'(t) &= -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}(t, \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}), \\ \widehat{\mathbf{x}}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \text{ e } \widehat{\mathbf{p}}(t_1) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

e ainda, o controle $\widehat{u}$ satisfaz a seguinte condição de otimalidade

$$\widetilde{H}(t, \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}) = \min_{u \in \mathbb{R}^m} \{\widetilde{H}(t, \widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \widehat{\mathbf{p}})\} \quad t \in (t_0, t_1).$$

□

A seguir, serão apresentadas as condições suficientes para o problema de controle (4.2), também sob a hipótese de convexidade das funções envolvidas.

Teorema 4.3.2. *Suponha que a função de valor intervalar $L : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to I(\mathbb{R})$ é continuamente E-diferenciável e UC-convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$. Seja $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável e convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$. Se $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}) \in \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \times \widehat{C}([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m) \times \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ é solução do sistema:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \boldsymbol{p}'(t) = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial u}(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{0}, \quad t \in (t_0, t_1), \\ \widehat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \text{ e } \widehat{\boldsymbol{p}}(t_1) = \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{4.6}$$

onde $\widetilde{H} = (\lambda_1 \bar{l} + \lambda_2 l^C) + \boldsymbol{p}^T f$ com $0 < \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, então $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ é uma UC-solução ótima e, também, LU-solução e LS-solução do problema (4.2).

Demonstração. Defina a função de valor real

$$\widetilde{H} = (\lambda_1 \bar{l} + \lambda_2 l^C) + \mathbf{p}^T f,$$

com $0 < \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Desde que L e f são UC-convexa e convexa nas variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$, respectivamente, então $\widetilde{H}$ é uma função convexa nessas variáveis. Além disso, L é continuamente E-diferenciável e, portanto, $\overline{l}$ e l^C são continuamente diferenciáveis. Dessa forma, $\widetilde{H}$ é continuamente diferenciável. Assim sendo,

$$\widetilde{H} = (\lambda_1 \overline{l} + \lambda_2 l^C) + \mathbf{p}^T f$$

é a função de Hamilton do seguinte problema

$$\begin{aligned} &\min \widetilde{I}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} (\lambda_1 \overline{l} + \lambda_2 l^C)(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt \\ &\text{sujeito a: } \mathbf{u} \in U_{ad} \\ &\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad t \in (t_0, t_1) \\ &\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Uma vez que $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}})$ satisfaz as condições (4.6), então, pelo Teorema 174 em Baumeister e Leitão (2008, pag.209), $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ é o mínimo global de $\widetilde{I}$ em $X_{ad} \times U_{ad}$. Agora, para completar a prova, suponha que $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ não é uma UC-solução ótima do problema (4.2). Então, existe $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in X_{ad} \times U_{ad}$, tal que:

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt < \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})dt \\ \text{e} \\ \int_{t_0}^{t_1} l^C(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt \leq \int_{t_0}^{t_1} l^C(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})dt \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})dt \\ \text{e} \\ \int_{t_0}^{t_1} l^C(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt < \int_{t_0}^{t_1} l^C(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})dt, \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt < \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})dt \\ \text{e} \\ \int_{t_0}^{t_1} l^C(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt < \int_{t_0}^{t_1} l^C(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})dt. \end{cases}$$

Isso implica que $\widetilde{I}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) < \widetilde{I}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$, contradizendo o fato de que $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ é uma solução ótima do problema com função objetivo de valor real $(\lambda_1 \overline{l} + \lambda_2 l^C)$. Portanto, desde que $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ é uma UC-solução ótima, no que se refere aos Teoremas 4.2.2 e 4.2.1, $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ é também uma LU-solução e LS-solução ótima do problema (4.2), respectivamente. □

4.4 Condições de Otimalidade para LU-solução

Nesta seção, serão obtidas as condições de otimalidade, necessárias e suficientes, para uma LU-solução dos problemas de controle ótimo com função objetivo de valor intervalar, utilizando os conceitos de E-diferenciável e gH-diferenciabilidade, sob a hipótese de convexidade.

Teorema 4.4.1. *Suponha que a função objetivo de valor intervalar $L : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é continuamente E-diferenciável e LU-convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$. Seja $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável e convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$. Se $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ é uma LU-solução local fraca do problema (4.2) em $X_{ad} \times U_{ad}$, então existem $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e um multiplicador $\widehat{\boldsymbol{p}} \in \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, tais que:*

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{x}}'(t) &= \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p}(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \widehat{\boldsymbol{p}}'(t) &= -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \widehat{\boldsymbol{x}}(t_0) &= \boldsymbol{x}_0 \text{ e } \widehat{\boldsymbol{p}}(t_1) = \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{4.8}$$

e ainda, o controle $\widehat{\boldsymbol{u}}$ satisfaz a seguinte condição de otimalidade

$$\widetilde{H}(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}) = \min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m} \{\widetilde{H}(t, \widehat{x}, \boldsymbol{u}, \widehat{\boldsymbol{p}})\}, \quad t \in (t_0, t_1),$$

onde $\widetilde{H} = (\lambda_1 \underline{l} + \lambda_2 \overline{l}) + \boldsymbol{p}^T f$.

Demonstração. O problema de controle ótimo de valor intervalar é convexo, pois L e f são LU-convexa e convexa, respectivamente, e $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ é localmente uma LU-solução, então, pelo Teorema 3.3.1 e a Observação 3.4.1, $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ também é solução dos dois problemas clássicos $(P_1)_{LU}$ e $(P_2)_{LU}$. Agora, aplicando o Teorema 3.2.2, existem $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, tais que $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ é uma solução local fraca do problema de controle ótimo com funcional objetivo $(\lambda_1 \underline{I} + \lambda_2 \overline{I})$, mais precisamente, do seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\min \int_{t_0}^{t_1} \left(\lambda_1 \underline{l} + \lambda_2 \overline{l}\right)(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt \\ &\text{sujeito a:} \quad \mathbf{u} \in U_{ad} \\ &\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ &\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

A função $\left(\lambda_1 \underline{l} + \lambda_2 \overline{l}\right)$ é continuamente diferenciável, pois L é continuamente E-diferenciável. Além disso, se L é LU-convexa, então $\underline{l}$ e $\overline{l}$ são convexas e, como f é convexa, a função de Hamilton, deste problema, é dada por

$$\widetilde{H} = \left(\lambda_1 \underline{l} + \lambda_2 \overline{l}\right) + \mathbf{p}^T f, \tag{4.9}$$

é convexa na variável $\mathbf{u}$ e $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ é uma solução ótima local do problema clássico. Assim, pelo Teorema 176 em Baumeister e Leitão (2008, pag.212), existe $\widehat{\mathbf{p}} \in \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, tal que

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}'(t) & = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p}(t, \widehat{x}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}), \\ \widehat{\mathbf{p}}'(t) & = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}(t, \widehat{x}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}), \\ \widehat{\mathbf{x}}(t_0) & = \mathbf{x}_0 \text{ e } \widehat{\mathbf{p}}(t_1) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

e ainda, o controle $\widehat{\mathbf{u}}$ satisfaz a seguinte condição de otimalidade

$$\widetilde{H}(t, \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}) = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m} \{\widetilde{H}(t, \widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \widehat{\mathbf{p}})\} \quad t \in (t_0, t_1).$$

□

As condições suficientes para LU-solução dos problemas de controle ótimo de valor intervalar são apresentadas adiante.

Teorema 4.4.2. *Suponha que a função de valor intervalar $L : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to I(\mathbb{R})$ é continuamente E-diferenciável e LU-convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$. Seja $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável e convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$. Se $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}) \in \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \times \widehat{C}([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m) \times \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ é solução do sistema:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \boldsymbol{p}'(t) = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial u}(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{0}, \quad t \in (t_0, t_1), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \text{ e } \widehat{\boldsymbol{p}}(t_1) = \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{4.10}$$

onde $\widetilde{H} = (\lambda_1 \underline{l} + \lambda_2 \overline{l}) + \boldsymbol{p}^T f$ com $0 < \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, então $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ é uma LU-solução ótima e, também, LS-solução ótima do problema (4.2).

Demonstração. Defina a função de valor real

$$\widetilde{H} = (\lambda_1 \underline{l} + \lambda_2 \overline{l}) + \mathbf{p}^T f,$$

com $0 < \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Desde que L e f são LU-convexa e convexa nas variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$, respectivamente, então $\widetilde{H}$ é uma função de valor real convexa nessas variáveis. Além disso, L é continuamente E-diferenciável e, portanto, $\underline{l}$ e $\overline{l}$ são continuamente diferenciáveis. Dessa forma, $\widetilde{H}$ é continuamente diferenciável. Além disso,

$$\widetilde{H} = (\lambda_1 \underline{l} + \lambda_2 \overline{l}) + \mathbf{p}^T f$$

é a função de Hamilton do seguinte problema

$$\begin{aligned} &\min \widetilde{I}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} (\lambda_1 \underline{l} + \lambda_2 \overline{l})(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))dt \\ &\text{sujeito a: } \mathbf{u} \in U_{ad} \\ &\mathbf{x}'(t) = f(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)), \quad t \in (t_0,t_1) \\ &\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Assim, se $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{p}})$ satisfaz as condições (4.10), então, pelo Teorema 174, em Baumeister e Leitão (2008, pag.209), $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ é o mínimo global de $\widetilde{I}$ em $X_{ad} \times U_{ad}$. Agora, para completar a prova, suponha que $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ não é uma LU-solução ótima do problema (4.2). Então, existe $(\mathbf{x},\mathbf{u}) \in X_{ad} \times U_{ad}$, tal que:

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(\mathbf{x},\mathbf{u})dt < \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})dt \\ \text{e} \\ \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})dt \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})dt \\ \text{e} \\ \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\mathbf{x},\mathbf{u})dt < \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})dt, \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(\mathbf{x},\mathbf{u})dt < \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})dt \\ \text{e} \\ \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\mathbf{x},\mathbf{u})dt < \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})dt. \end{cases}$$

Isso implica que $\widetilde{I}(\mathbf{x},\mathbf{u}) < \widetilde{I}(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$, contradizendo o fato de que $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ é uma solução ótima do problema com função objetivo de valor real $(\lambda_1 \underline{l} + \lambda_2 \overline{l})$. Portanto, desde que $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ é uma LU-solução ótima, então, do Teorema 4.2.1, $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ é também uma LS-solução ótima do problema (4.2). □

O seguinte resultado apresenta as condições suficientes para o problema (4.2), usando o conceito de gH-diferenciabilidade.

Teorema 4.4.3. *Suponha que a função de valor intervalar $L : [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to I(\mathbb{R})$ é continuamente gH-diferenciável e LU-convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0,t_1]$. Seja $f : [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável e convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0,t_1]$. Se $(\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{\boldsymbol{p}}) \in \widehat{C}^1([t_0,t_1];\mathbb{R}^n) \times \widehat{C}([t_0,t_1];\mathbb{R}^m) \times$*

$\widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ *é solução do seguinte sistema:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\underline{h}+\overline{h}}{2}\right)(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \boldsymbol{p}'(t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\underline{h}+\overline{h}}{2}\right)(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\underline{h}+\overline{h}}{2}\right)(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{0}, \quad t \in (t_0, t_1), \\ \widehat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \text{ e } \widehat{\boldsymbol{p}}(t_1) = \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{4.12}$$

então, $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ *é uma LU-solução ótima e, também, uma LS-solução do problema (4.2).*

Demonstração. Defina a função de valor real

$$\frac{\underline{h}+\overline{h}}{2} = \left(\frac{\underline{l}+\overline{l}}{2} + \mathbf{p}^T f\right).$$

Desde que L e f são LU-convexa e convexa nas variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$, respectivamente, então, $\frac{\underline{h}+\overline{h}}{2}$ é uma função de valor real convexa nessas variáveis. Além disso, L é continuamente gH-diferenciável e, portanto, $\frac{\underline{l}+\overline{l}}{2}$ é continuamente diferenciável. Dessa forma, $\frac{\underline{h}+\overline{h}}{2}$ é continuamente diferenciável. Assim,

$$\frac{\underline{h}+\overline{h}}{2} = \left(\frac{\underline{l}+\overline{l}}{2} + \mathbf{p}^T f\right)$$

é a função de Hamilton do seguinte problema

$$\begin{aligned} &\min \widetilde{I}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\underline{l}+\overline{l}}{2}\right)(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt \\ &\text{sujeito a: } \mathbf{u} \in U_{ad} \\ &\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad t \in (t_0, t_1) \\ &\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Assim, se $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}})$ satisfaz as condições (4.12), então, pelo Teorema 174 em Baumeister e Leitão (2008, pag.209), $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ é mínimo global de $\widetilde{I}$ em $X_{ad} \times U_{ad}$. Agora, para completar a prova, suponha que $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ não é uma LU-solução ótima do problema (4.2). Então, existe $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in X_{ad} \times U_{ad}$, tal que:

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt < \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})dt \\ \text{e} \\ \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})dt \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})dt \\ \text{e} \\ \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt < \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})dt, \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(\mathbf{x},\mathbf{u})dt < \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})dt \\ \text{e} \\ \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\mathbf{x},\mathbf{u})dt < \int_{t_0}^{t_1} \overline{l}(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})dt. \end{cases}$$

Isso implica que $\widetilde{I}(\mathbf{x},\mathbf{u}) < \widetilde{I}(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$, contradizendo o fato de que $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ é uma solução ótima do problema com função objetivo de valor real $\left(\frac{\underline{l}+\overline{l}}{2}\right)$. Portanto, desde que $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ é uma LU-solução ótima, então, do Teorema 4.2.1, $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ é também uma LS-solução ótima do problema (4.2). □

Teorema 4.4.4. *Suponha que a função de valor intervalar $L : [t_0,t_1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to I(\mathbb{R})$, seja continuamente gH-diferenciável e $f : [t_0,t_1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável. Suponha também que a função Hamilton de valor intervalar H é LU−convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t\in[t_0,t_1]$. Se $(\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{\boldsymbol{p}}) \in \widehat{C}^1([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)\times\widehat{C}([t_0,t_1];\mathbb{R}^m)\times\widehat{C}^1([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)$ é uma solução do sistema,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\underline{h}+\overline{h}}{2}\right)(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \boldsymbol{p}'(t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\underline{h}+\overline{h}}{2}\right)(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\underline{h}+\overline{h}}{2}\right)(t,\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{0}, \quad t\in(t_0,t_1), \\ \widehat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \text{ e } \widehat{\boldsymbol{p}}(t_1) = \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

então, $(\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{u}})$ é uma LU-solução ótima e, também, uma LS-solução ótima do problema (4.2).

Demonstração. Desde que H é LU-convexa nas variáveis $\mathbf{x}(\cdot)$ e $\mathbf{u}(\cdot)$ para cada $t\in[t_0,t_1]$, então $\frac{\underline{h}+\overline{h}}{2} = \left(\frac{\underline{l}+\overline{l}}{2} + p^T f\right)$ é uma função convexa, nas variáveis $\mathbf{x}(\cdot)$ e $\mathbf{u}(\cdot)$, para cada $t\in[t_0,t_1]$. Além disso, $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{p}})$ satisfaz o sistema acima,desta forma, pelo Teorema 174 em Baumeister e Leitão (2008, pag.209), $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ é o mínimo global do problema clássico com funcional objetivo dado por: $\widetilde{I}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\underline{l}+\overline{l}}{2}\right)(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))dt$ em $X_{ad}\times U_{ad}$. Agora, para completar a prova, suponha que $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ não é uma LU-solução ótima do problema (4.2). Isso implicará que $\widetilde{I}(\mathbf{x},\mathbf{u}) < \widetilde{I}(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$. Contradizendo o fato de que $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ é uma solução ótima do problema com função objetivo de valor real $\left(\frac{\underline{l}+\overline{l}}{2}\right)$. Portanto, desde que $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ é uma LU-solução ótima, então, do Teorema 4.2.1, $(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{u}})$ é também uma LS-solução ótima do problema (4.2). □

Posteriormente, serão apresentadas as condições necessárias para o problema de controle com funcional objetivo de valor intervalar, utilizando a gH-derivada parcial. Por simplificação, considere que $n = m = 1$, contudo o resultado se detém para $n, m > 1$.

Dado a função de Hamilton de valor intervalar, H, o gradiente de H em $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}})$ é dado por:

$$\nabla_{gH} H(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}) \quad = \quad \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{gH} (\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}), \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_{gH} (\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}), \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{gH} (\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}) \right).$$

Se H é E-diferenciável, então as funções extremas $\underline{h}$ e $\overline{h}$ são diferenciáveis e, portanto, H é gH-diferenciável. Neste caso, por exemplo, a gH-derivada parcial de H com respeito a variável $\mathbf{x}$ é dada por:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{gH} (\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}) \quad = \quad \left[\min\{\frac{\partial \underline{h}}{\partial x}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}), \frac{\partial \overline{h}}{\partial x}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}})\}, \max\{\frac{\partial \underline{h}}{\partial x}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}), \frac{\partial \overline{h}}{\partial x}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}})\} \right].$$

Supondo que L é uma função de valor intervalar continuamente E-diferenciável e que $\mathbf{p}^T f$ é uma função real continuamente diferenciável, tem-se a seguinte equação:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{gH} (\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}) \quad = \quad \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{gH} (\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}) + \mathbf{p}(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}). \tag{4.14}$$

Além disso, pelo Teorema 2.3.2(b), tem-se que:

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}) \in \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{gH} (\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}), \tag{4.15}$$

onde $\widetilde{H} = (\lambda_1 \underline{l} + \lambda_2 \overline{l}) + \mathbf{p}^T f$ com $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Deste resultado, segue o teorema:

Teorema 4.4.5. *Suponha que a função de valor intervalar $L : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to I(\mathbb{R})$ é continuamente E-diferenciável e LU-convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$. Seja $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável e convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$. Se $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ é uma LU-solução local fraca do problema (4.2), então existem $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e um multiplicador $\widehat{\boldsymbol{p}} \in \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, tais que*

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{x}}'(t) \in \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{gH} (t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}) \\ \widehat{\boldsymbol{p}}'(t) \in -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{gH} (t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}) \\ \boldsymbol{0} \in \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_{gH} (t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}), \quad t \in (t_0, t_1) \\ \widehat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \text{ e } \widehat{\boldsymbol{p}}(t_1) = \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{4.16}$$

Demonstração. Suponha que $n = m = 1$. Seja $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})$ uma LU-solução do problema (4.2), então, pelo Teorema 4.4.1, existem $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $\widehat{\mathbf{p}} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, tais que $\widehat{\mathbf{p}}'(t) = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}(t, \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}})$, onde $\widetilde{H} = (\lambda_1 \underline{l} + \lambda_2 \overline{l}) + \mathbf{p}^T f$, e juntamente com a equação

(4.15) implica que

$$\widehat{\mathbf{p}}'(t) \in -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{gH}(t, \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{p}}).$$

Argumentação análoga é utilizada para obter os outros dois casos.

O resultado também se detém para $n, m > 1$. □

4.5 Condições de Otimalidade para LS-solução

As condições de otimalidade para LS-solução dos problemas de controle ótimo com funcional objetivo de valor intervalar serão apresentadas a seguir. As demonstrações serão omitidas, pois são similares às demonstrações do caso UC-solução e LU-solução, mas, desta vez, considerando o conceito de LS-solução.

Teorema 4.5.1. *Suponha que a função de valor intervalar $L : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é continuamente E-diferenciável e LS-convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$. Seja $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável e convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$. Se $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ é uma SL-solução local fraca do problema (4.2) em $X_{ad} \times U_{ad}$, então existem $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e um multiplicador $\widehat{\boldsymbol{p}} \in \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$, tais que:*

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{x}}'(t) & = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p}(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \widehat{\boldsymbol{p}}'(t) & = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \widehat{\boldsymbol{x}}(t_0) & = \boldsymbol{x}_0 \text{ e } \widehat{\boldsymbol{p}}(t_1) = \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{4.17}$$

e ainda, o controle $\widehat{\mathbf{u}}$ satisfaz a seguinte condição de otimalidade

$$\widetilde{H}(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}) = \min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m} \{\widetilde{H}(t, \widehat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}, \widehat{\boldsymbol{p}})\}, \quad t \in (t_0, t_1),$$

onde $\widetilde{H} = (\lambda_1 \underline{l} + \lambda_2 l^S) + \boldsymbol{p}^T f$.

A seguir, serão apresentadas as condições suficientes para o problema de controle (4.2).

Teorema 4.5.2. *Suponha que a função de valor intervalar $L : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to I(\mathbb{R})$ é continuamente E-diferenciável e LS-convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$. Seja $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável e convexa, nas variáveis $\boldsymbol{x}(\cdot)$ e $\boldsymbol{u}(\cdot)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$. Se $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{p}}) \in \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \times \widehat{C}([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m) \times$*

$\widehat{C}^1([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)$ *é solução do seguinte sistema:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \boldsymbol{p}'(t) = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\widehat{\boldsymbol{p}}), \\ \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial u}(t,\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{0}, \quad t \in (t_0,t_1), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \text{ e } \widehat{\boldsymbol{p}}(t_1) = \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{4.18}$$

onde $\widetilde{H} = (\lambda_1 \underline{l} + \lambda_2 l^S) + \boldsymbol{p}^T f$ *com* $0 < \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tais que* $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$*, então,* $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{u}})$ *é uma LS-solução ótima do problema (4.2).*

4.6 Exemplos Numéricos

Neste tópico, alguns exemplos serão expostos a fim de ilustrar os teoremas propostos. Em um primeiro momento, os Teoremas 4.4.1 e 4.4.5 serão ilustrados por um simples exemplo de controle ótimo com funcional objetivo de valor intervalar, dado por:

$$\begin{aligned} &\min I(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^1 x(t)[0.9, 1.1]x(t)dt \\ &\text{sujeito a:} \\ &x'(t) = u(t)^2, \quad t \in (0,1) \\ &x(0) = 1, \end{aligned}$$

onde

$$L(t,x,u) = \frac{1}{2}\left(x(t)[0.9,1.1]x(t)\right) = \left[\frac{0.9}{2}x(t)^2, \frac{1.1}{2}x(t)^2\right].$$

Para este problema, tem-se que:

$$\widetilde{H}(t,x,u,p) = \lambda_1\left(\frac{0.9}{2}x(t)^2\right) + \lambda_2\left(\frac{1.1}{2}x(t)^2\right) + p(t)u(t)^2,$$

com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. A verificação das asserções do teorema são apresentadas a seguir:

1. L é continuamente E-diferenciável e LU-convexa, pois $\underline{l}(t,x,u) = \frac{0.9}{2}x(t)^2$ e $\overline{l}(t,x,u) = \frac{1.1}{2}x(t)^2$ são continuamente diferenciáveis e convexas. Consequentemente, L é também continuamente gH-diferenciável.

2. f é continuamente diferenciável e convexa, desde que $f(t,x,u) = u(t)^2$.

3. É fácil ver que $(\widehat{x}, \widehat{u}) = (1, 0)$ é uma LU-solução.

Existe um multiplicador $\widehat{p}(t) = -t + 1$, tal que o sistema de equações (4.8) e a condição de otimalidade do Teorema 4.4.1 são satisfeitas para $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Além disso, segue do Teorema 2.3.2(b), que as condições do Teorema 4.4.5 também são satisfeitas.

Agora, será ilustrado o Teorema 4.4.3. Considere o seguinte problema de controle ótimo com incerteza intervalar na função objetivo dado por:

$$\begin{aligned} &\min I(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x(t)[0.9, 1.1]x(t) + u(t)[0.9, 1.1]u(t))\, dt \\ &\text{sujeito a:} \\ &x'(t) = 3x(t) + u(t), \quad t \in (0,1) \\ &x(0) = 1, \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde

$$L(t,x,u) = \frac{1}{2}\left(x(t)[0.9, 1.1]x(t) + u(t)[0.9, 1.1]u(t)\right).$$

Assim,

$$H(t,x,u,p) = \frac{1}{2}\left(x(t)[0.9, 1.1]x(t) + u(t)[0.9, 1.1]u(t)\right) + p^T(t)(3x(t) + u(t)).$$

A verificação das suposições do teorema são apresentadas abaixo:

1. L é continuamente gH-diferenciável, pois $\underline{l}(t,x,u) = \frac{0.9}{2}(x(t)^2 + u(t)^2)$ e $\overline{l}(t,x,u) = \frac{1.1}{2}(x(t)^2 + u(t)^2)$ são continuamente diferenciáveis.
2. f é continuamente diferenciável, desde que $f(t,x,u) = 3x(t) + u(t)$.
3. L é LU-convexa e f é convexa nas variáveis x e u.

Portanto, a solução do sistema referente ao Teorema 4.4.3, considerando que $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, é dada por:

$$\begin{aligned} \widehat{x}(t) &= \frac{e^{-\sqrt{10}t}}{20}\left(10 - 3\sqrt{10} + 10e^{2\sqrt{10}t} + 3\sqrt{10}e^{2\sqrt{10}t}\right) - \frac{e^{-\sqrt{10}t}(-1 + e^{2\sqrt{10}t})K}{2\sqrt{10}}, \\ \widehat{u}(t) &= \frac{e^{-\sqrt{10}t}(-1 + e^{2\sqrt{10}t})}{2\sqrt{10}} + \frac{e^{-\sqrt{10}t}}{20}\left(-10 - 3\sqrt{10} - 10e^{2\sqrt{10}t} + 3\sqrt{10}e^{2\sqrt{10}t}\right)K, \\ \widehat{p}(t) &= -\frac{e^{-\sqrt{10}t}(-1 + e^{2\sqrt{10}t})}{2\sqrt{10}} - \frac{e^{-\sqrt{10}t}}{20}\left(-10 - 3\sqrt{10} - 10e^{2\sqrt{10}t} + 3\sqrt{10}e^{2\sqrt{10}t}\right)K, \\ I(\widehat{x},\widehat{u}) &= \left[\int_0^1 \frac{0.9}{2}(\widehat{x}(t)^2 + \widehat{u}(t)^2)dt, \int_0^1 \frac{1.1}{2}(\widehat{x}(t)^2 + \widehat{u}(t)^2)dt\right], \end{aligned}$$

onde

$$K \;=\; -\frac{10(-1+e^{2\sqrt{10}})}{\sqrt{10}\left(-10-3\sqrt{10}+10e^{2\sqrt{10}}+3\sqrt{10}e^{2\sqrt{10}}\right)}.$$

Dessa forma, o Teorema 4.4.3 assegura que qualquer solução $(\widehat{x},\widehat{u})$, satisfazendo o sistema apresentado, no referido teorema, é uma LU-solução ótima do problema (4.19). As Figuras 3 e 4 são os gráficos do estado ótimo e controle ótimo, respectivamente. Já a Figura 5 é o gráfico da função Lagrangiana de valor intervalar, obtida a partir do estado, e o controle ótimo ambos apresentados nas Figuras 3 e 4, respectivamente. Observe que a função Lagrangiana de valor intervalar contém uma função Lagrangiana clássica, função essa derivada do problema de controle ótimo clássico, que possui como coeficientes os pontos médios dos intervalos envolvidos no problema de valor intervalar.

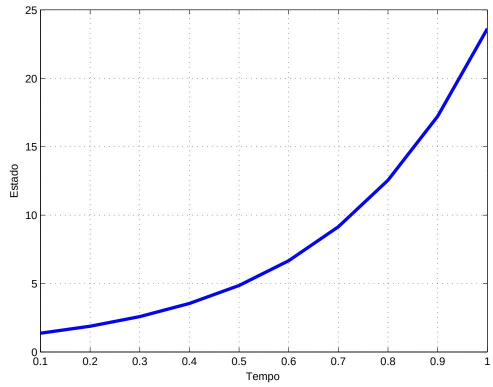


Figura 3: Estado ótimo via LU-solução.

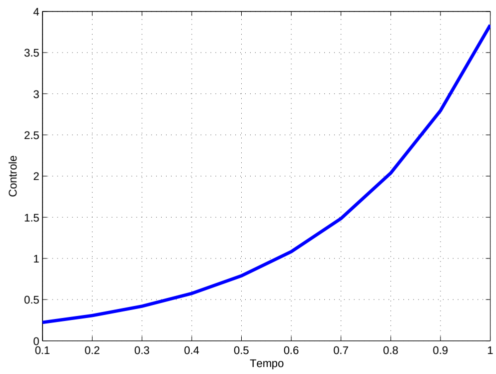


Figura 4: Controle ótimo via LU-solução.

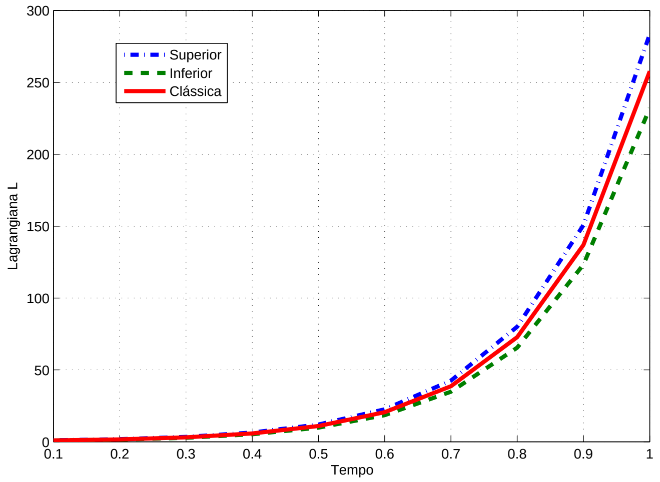


Figura 5: Lagrangiana de valor intervalar e Lagrangiana clássica.

4.7 Conclusões

Utilizando as diversas relações de ordem no espaço intervalar, foram definidos os diferentes conceitos de solução, para o problema de controle ótimo com funcional objetivo intervalar. Além disso, obteve-se as implicações entre os diferentes conceitos de soluções. Aplicando os conceitos de E-diferenciabilidade e de gH-diferenciabilidade para função de valor intervalar derivaram-se as condições de otimalidade, necessárias e suficientes, para os problemas de controle ótimo, com funcional objetivo de valor intervalar, via três dos principais conceitos de solução. Os resultados apresentados são meritórios, pois representam um modo de tratar a incerteza em problemas de controle ótimo, o que é particularmente interessante, quando o conhecimento prévio da distribuição de probabilidade não está disponível. Dessa forma, foi dado o primeiro passo na direção de um dos principais resultados na teoria de controle ótimo, a saber: o princípio do máximo de Pontryagin (Vinter, 2000), agora, no contexto intervalar segundo a diferenciabilidade extremal e generalizada de Hukuhara.

O próximo capítulo apresentará uma aplicação para os problemas de controle ótimo com funcional objetivo de valor intervalar. Será estudado o problema de controle de plantas daninhas, cujo o objetivo é maximizar o lucro da produção de uma lavoura de milho. A função lucro leva em consideração o custo de produção, o preço da unidade do produto e, também, o preço da unidade de controle, tais valores apresentam incertezas nas suas determinações. Dessa forma, o problema de controle de daninhas será considerado como um problema de controle ótimo de valor intervalar.

CAPÍTULO 5

OTIMIZAÇÃO DO LUCRO INTERVALAR NO CONTROLE DE PLANTAS DANINHAS

Este capítulo apresenta o problema de controle de plantas daninhas, levando em consideração incerteza do tipo intervalar na função lucro. O controle de plantas daninhas é uma prática de elevada importância para a obtenção de altos rendimentos em qualquer exploração agrícola e tão antiga quanto a própria agricultura. Neste sentido, o presente texto, buscar-se-á o controle das plantas daninhas e a otimização da produtividade levando em consideração os diferentes cenários da lucratividade em uma lavoura de milho. Primeiramente, será apresentada a função de dose-resposta, que é usada para quantificar a sensibilidade da planta ao herbicida e a relação entre a dose do herbicida. A resposta da planta daninha é importante para a compreensão da eficácia do herbicida. Posteriormente, apresentar-se-á a dinâmica populacional da planta daninha, que possibilita entender como essa se relaciona com o meio e como compete com a plantação (Park, Benjamin e Watkinson, 2002). Além de descrever o comportamento ao se buscar controlar a infestação, a dinâmica populacional também aponta as formas de atacar o problema de infestação de plantas daninhas. Em seguida, será realizada a formulação do rendimento final de uma colheita, considerando os vários fatores que influenciam este rendimento. Por exemplo, a forma como é feito o plantio, o clima, a densidade pluviométrica, as pragas, as doenças, a infestação por plantas daninhas e outros fatores. Dessa forma, o problema resultante será tratado como problema de controle ótimo com função lucro de valor intervalar. Deve ficar claro que o objetivo, em geral, não é erradicar totalmente a planta daninha e, sim, determinar uma relação entre o equilíbrio da lavoura com a planta daninha, visando maximizar o lucro do produtor.

5.1 O modelo de dose-resposta

A relação entre a dose de herbicida e a resposta da planta é de fundamental importância para analisar a eficácia do herbicida e o meio de ação. A função de dose-resposta é usada para quantificar a sensibilidade da planta daninha ao herbicida.

A curva de dose-resposta, usada para determinar a suscetibilidade das plantas daninhas ao herbicida aplicado, é utilizada por diversos autores, os quais sugerem que o modelo log-logístico apresenta as várias vantagens em relação aos outros métodos de análise (Streibig e Kudsk, 1993; Lacerda e Filho, 2004; Kim et al., 2006; Merotto et al., 2009).

Segundo Seefeldt, Jensen e Fuerst (1995), o modelo mais adequado de dose-resposta é o log-logístico, devido a presença do parâmetro GR_{50} (*growth reduction*) na equação. O índice GR_{50}, representa a dose necessária para reduzir 50% do crescimento de uma população de plantas daninhas.

O modelo de dose-resposta, proposto por Seefeldt, Jensen e Fuerst (1995), usado para quantificar a sensibilidade da planta ρ ao herbicida u, é o seguinte:

$$\rho(u) \quad = \quad c + \frac{d-c}{1+\exp[b(\ln(u)-\ln(GR_{50}))]}, \tag{5.1}$$

em que c é o limite inferior da curva, que corresponde às respostas médias com doses altas de herbicidas, d é o limite superior da curva, que corresponde à resposta média da testemunha, b é a declividade da curva, em torno de GR_{50}, que corresponde à dose necessária para reduzir 50% do crescimento da planta daninha em relação à testemunha.

5.2 Modelo populacional de plantas daninhas

As plantas daninhas competem rigorosamente com as colheitas, resultando em grande perda de rendimento, pois essas plantas apresentam alta capacidade competitiva e alta eficiência na utilização de luz, água e nutrientes, limitando as plantações comerciais desses elementos. Além disso, possuem um alto poder de reprodução, gerando um grande número de sementes, afetando diretamente o tamanho do banco de sementes no solo e a capacidade de regeneração da população daninha.

O modelo que descreve a dinâmica populacional para as plantas daninhas é descrito segundo Jones e Cacho (2000):

$$
\begin{aligned}
y_t &= x^g \delta x_t && (5.2)\\
y_t^a &= (1-\rho(u_t))y_t && (5.3)\\
x_t^r &= \exp[\gamma \ln y_t^a/(\mu + \varepsilon \ln y_t^a)] && (5.4)\\
x_t^n &= \kappa x_t^r - \eta + \xi && (5.5)\\
x_{t+1} &= x_t^n + (1-\Psi)(1-\delta)x_t && (5.6)
\end{aligned}
$$

com variáveis e parâmetros definidos na Tabela 1. Considera-se x_t^r nulo, quando y_t^a for menor que $0,5$, pois, devido a forma do funcional em questão, o resultado de (5.4) tende ao infinito quando y_t^a se aproxima de zero.

Tabela 1: Definição dos parâmetros e variáveis do modelo populacional

x_t	Densidade do banco de sementes (m^{-2}) no início do ano t
y_t	Densidade de plantas daninhas jovens (m^{-2}) no ano t
y_t^a	Densidade de plantas daninhas emergentes (m^{-2}) que chegam à fase adulta
x_t^r	Densidade de sementes (m^{-2}) resultantes da reprodução da planta daninha
x_t^n	Novas sementes adicionadas ao banco de sementes (m^{-2}) no ano t
x^g	Porcentagem de sementes germinadas que emergiram (m^{-2})
δ	Taxa de germinação anual das sementes da planta daninha
u_t	Dose de herbicida aplicada (litro ha^{-1}) no ano t
ρ	Taxa de mortalidade de plantas daninhas induzida pelo herbicida no ano t
$\gamma,\ \mu,\ \varepsilon$	Coeficientes de x_t^r
κ	Taxa de sobrevivência de novas sementes
η	Retirada de sementes na colheita
ξ	Importação de sementes (vento, pássaros, etc)
Ψ	Índice de mortalidade de sementes dormentes

A taxa de mortalidade induzida pelo herbicida, $\rho(u_t)$, apresentada em (5.1), é de fundamental importância, pois descreve a relação entre a dose de herbicida e a resposta da planta, sendo utilizada na compreensão da eficácia do herbicida e do seu modo de ação.

5.3 A função de produção e a função lucro

Na determinação da produção de um sistema agrícola, vários fatores são envolvidos, que podem ser fixos ou variáveis. Por exemplo, o rendimento da cultura é determinado por fatores como a variedade e solo usados, a precipitação pluviométrica, as ocorrências de pragas e de doenças. Diante da importância das plantas daninhas, na limitação da produção de um cultivo, esse será o fator avaliado no presente estudo, sendo os demais considerados fixos.

O objetivo, nesse momento, é avaliar as mudanças na densidade de plantas daninhas na lavoura através da aplicação de herbicidas, ou seja, não será utilizada qualquer outra técnica de controle, além da aplicação do defensivo químico. Dessa forma, apenas dois fatores serão tomados como variáveis: a população inicial de plantas daninhas, x_t, e a dosagem de herbicida aplicada, u_t, e todos os outros fatores serão fixos denotados por z_t (Jones e Cacho, 2000). A função de produção pode ser escrita da seguinte forma:

$$Y = f(x_t, u_t, z_t). \tag{5.7}$$

O efeito de x_t em Y é reduzir o rendimento alcançado na lavoura, enquanto que o efeito de u_t é amenizar a perda causada por x_t. A função de produção (5.7) pode ser separada em outras duas funções: Y_0, que é o rendimento de produção numa lavoura livre de plantas daninhas e Y_L que é a perda de rendimento associada com a densidade e controle da planta daninha, expresso por:

$$\begin{aligned} Y_0 &= f_1(z_t) \\ Y_L &= f_2(x_t, u_t), \end{aligned}$$

no qual Y_L corresponde à perda de rendimento, através da concorrência entre a cultura e a planta daninha. Segundo Cousens (1985), a função que melhor descreve a perda de rendimento, como uma função de densidade de planta daninhas, é um hiperbolóide, pois, para uma baixa densidade de plantas daninhas têm-se uma maior competição com a cultura e assim causa uma redução na produção. No entanto, quando a densidade de plantas daninhas é alta, o aumento da concorrência intra-específica tende a reduzir a perda de rendimento. A função hiperbolóide é dada da seguinte forma:

$$Y_L = \frac{aD}{1 + \frac{a}{r}D},$$

onde a é o parâmetro que representa a perda de rendimento causada a cada adição de uma planta daninha por m^2 (baixas densidades de plantas daninhas), r é o parâmetro que indica a perda de rendimento quando a densidade de plantas daninhas tende ao infinito (altas densidades de plantas daninhas) e D é uma função da densidade inicial da planta daninha e da proporção de plantas daninhas mortas pela aplicação do herbicida de acordo com $\rho(u_t)$:

$$D = x_t(1-\rho(u_t)), \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

A perda de rendimento na produção, devido à ação tóxica do produto químico (fitotoxicidade) sobre o cultivo, foi estimada segundo Pandey e Medd (1990) e é dada por: $Y_p = \varphi u_t$, onde φ é um parâmetro de ajuste, que depende do herbicida aplicado. Dessa forma, a função de produção Y é descrita por:

$$Y = Y_0(1-Y_L)(1-Y_p).$$

Definida a função de produção, a função lucro para um problema, no qual deseja-se determinar a dosagem ótima do herbicida, aplicado na lavoura, é dada por:

$$\pi(x_t,u_t) = P_yY(x_t,u_t) - P_uu_t - C(t) \tag{5.8}$$

com parâmetros definidos na Tabela 2. O termo P_yY de (5.8) é o rendimento total, sendo determinado não apenas pelo nível da variável de controle, mas também pela densidade inicial de plantas daninhas, x_t. Portanto, o rendimento total para qualquer variação de u_t será especificado pelo valor inicial de x_t. Todavia, em um sistema de produção dinâmico

Tabela 2: Definição dos parâmetros do modelo econômico

π	Lucro anual da fazenda (R\$ ha^{-1})
P_y	Preço de cada unidade do produto (R\$ $tonelada^{-1}$)
P_u	Custo por unidade de controle (R\$ $litro^{-1}$)
C	Constante dos custos de aplicação do controle e produção

a estimativa do custo está sujeito a variações ocasionadas por maior ou menor demanda de inseticida, fungicida, adjuvante ou mesmo pela necessidade de irrigação. Segundo o Instituto Mato-grossense de Economia Agropecuária (IMEA, 2014) existem outros fatores que influenciam nas despesas com a lavoura, tais como os custos correlacionados com a mão de obra, manejo pré plantio, adubação, plantio e colheita. Há ainda o fator da incerteza no custo de produção, devido as variações causadas com o manejo da lavoura, os preços da unidade de controle, P_u e, também, da unidade de produção, P_y, que alteram de uma região para outra, mesmo quando são avaliados em um único estado do Brasil, como no caso de Mato Grosso. Isso é o reflexo da menor disponibilidade dos fatores de produção ou mesmo das limitações de logística para o fornecimento dos elementos necessários para a produção.

Averiguar essas oscilações, no custo de produção, é fundamental para garantir a lucratividade, sendo necessário considerar a possibilidade de ocorrência de um cenário otimista ou pessimista no sistema de produção. Com o intuito de descrever as incertezas, presentes nos parâmetros P_y, P_u e C, esses serão considerados do tipo intervalar.

A função lucro para um problema, no qual deseja-se determinar a dosagem ótima do herbicida, aplicado na lavoura, levando em consideração as oscilações dos preços e do custo de produção será dada por:

$$\Pi(x_t, u_t) \quad = \quad [\underline{P_y}, \overline{P_y}]Y(x_t, u_t) - [\underline{P_u}, \overline{P_u}]u_t - [\underline{C(t)}, \overline{C(t)}] \tag{5.9}$$

onde o termo $[\underline{P_y}, \overline{P_y}]Y$ de (5.9) é o rendimento total, sendo determinado, não apenas pelo nível da variável de controle e pela densidade inicial de plantas daninhas, x_t, mas também pelas possíveis variações do preço de cada unidade do produto. De forma similar, o termo $[\underline{P_u}, \overline{P_u}]u_t$ leva em consideração as possíveis variações no custo por unidade de controle. Além disso, $[\underline{C(t)}, \overline{C(t)}]$ representa as oscilações dos custos de aplicação do controle e da produção. Portanto, a função lucro de valor intervalar avalia a ocorrência dos cenários, otimista ou pessimista, em um sistema de produção.

5.4 Formulação do problema de otimização intervalar

Segundo Kennedy (1986), o problema de controle de planta daninha deve ser tratado como um problema de manejo de recursos e, para isso, necessita-se desenvolver um modelo dinâmico. Logo, é necessário definir de que forma a variável de estado irá evoluir com o tempo. Neste caso, considera-se como variável de estado o banco de sementes, x_t, e como variável de controle, u_t, expressa na função de dose-resposta $\rho(u_t)$. Deve-se definir a equação, que descreve a variação deste banco de sementes, com o passar do tempo, como sendo uma equação dinâmica. Para esse caso, tratam-se as sementes da planta como um recurso renovável, e o banco de sementes como o estoque deste recurso. Nos problemas dinâmicos, esse estoque pode alterar, com o passar do tempo, a solução ótima do problema.

Ao longo do tempo, o banco de semente pode sofrer alterações no seu tamanho, devido aos diversos fatores, tais como a ação do controle aplicado, que causa o decréscimo do banco de sementes e, também, a reprodução da planta, que faz com que o banco de sementes cresça com o passar dos anos. Essas alterações podem ser descritas da seguinte forma:

$$x_{t+1} = (1-\Psi)(1-\delta)x_t + \kappa \exp^{\frac{\gamma \ln\left(\left(1-\left(c+\frac{d-c}{1+\exp[b(\ln(u_t)-\ln(GR_{50}))]}\right)\right)x^g \delta x_t\right)}{\mu+\varepsilon \ln\left(\left(1-\left(c+\frac{d-c}{1+\exp[b(\ln(u_t)-\ln(GR_{50}))]}\right)\right)x^g \delta x_t\right)}} - \eta + \xi. \tag{5.10}$$

Observe que no modelo populacional dado por (5.2)-(5.6), ao substituir (5.2) em (5.3), (5.3) em (5.4), (5.4) em (5.5), (5.5) em (5.6), obtém-se a dinâmica populacional sintetizado por (5.10). A otimização do processo no período t influencia diretamente a otimização no período $t+1$, no modelo dinâmico (5.10). Ou seja, a quantidade do controle aplicado em um período, irá afetar diretamente a solução ótima no período seguinte.

De modo geral, o objetivo é determinar de que maneira e em qual intensidade, o banco de sementes, x_t, de cada estação ou ano, é alterado com aplicação do herbicida, u_t, visando assim reduzir o uso do herbicida e, consequentemente, maximizar o lucro do produtor considerando diferentes cenários no custo da produção. Como o interesse da pesquisa é otimizar uma função de valor intervalar, o problema resultante será um problema de otimização de valor intervalar.

O problema de otimização de valor intervalar é descrito da seguinte forma:

$$\max \ J = \sum_{t=0}^{T} \alpha^t \Pi(x_t, u_t) \tag{5.11}$$

sujeito a:

$$x_{t+1} = g(x_t, u_t) \tag{5.12}$$

$$x(0) = x_0 \tag{5.13}$$

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max} \tag{5.14}$$

onde J é o lucro de valor intervalar alcançado em um período de T anos, Π é uma função E-diferenciável dada por (5.9), α é um fator de desconto (Kennedy, 1986), $u_{\max}$ é a dose máxima de herbicida permitida em campo e (5.14) é o conjunto de valores admissíveis para u_t.

O problema descrito por (5.11)-(5.14) trata-se de um problema de controle ótimo com funcional objetivo de valor intervalar, dessa forma, a partir de alguma relação de ordem no espaço intervalar, define-se o conceito de solução para o problema em questão. Uma vez que o objetivo em questão é descrever os diferentes cenários da lucratividade, no sistema de produção de uma lavoura, a relação de ordem utilizada será a LU. Caso o interesse fosse minimizar a variabilidade da lucratividade deveria-se utilizar a relação de ordem LS.

A técnica de ponderação do problema de valor intervalar, aplicada nos capítulos anteriores, para os problemas contínuos será, agora, desenvolvida para o problema de controle ótimo de valor intervalar discreto[1], visando determinar a taxa anual de herbicida que maximize, no sentido da relação de ordem LU, o lucro de valor intervalar no sistema de produção de milho. Uma componente importante, desse tipo de problema, é a variável de co-estado, denotada por p_t semelhante ao multiplicador de Lagrange. A forma como a variável de co-estado é inserida no problema de controle ótimo é por meio da função de Hamilton. Para o problema de manejo de plantas daninhas, a função de Hamilton de valor intervalar é dada por (Kennedy, 1986):

$$H_t(p_{t+1}, x_t, u_t) \;=\; \Pi(x_t, u_t) + \alpha p_{t+1} g(x_t, u_t).$$

Para o problema de manejo de plantas daninhas, em questão, tem-se o seguinte sistema:

$$\frac{\partial \widetilde{H}_t}{\partial u_t} = (\lambda_1 \underline{P_y} + \lambda_2 \overline{P_y})\frac{\partial Y}{\partial u_t} - (\lambda_1 \overline{P_u} + \lambda_2 \underline{P_u}) + \alpha p_{t+1}\frac{\partial g}{\partial u_t} = 0 \tag{5.15}$$

$$\alpha p_{t+1} = -\frac{\partial \widetilde{H}_t}{\partial x_t} = -(\lambda_1 \underline{P_y} + \lambda_2 \overline{P_y})\frac{\partial Y}{\partial x_t} - \alpha p_{t+1}\frac{\partial g}{\partial x_t} \tag{5.16}$$

$$x_{t+1} = \frac{\partial \widetilde{H}_t}{\partial p_{t+1}} = g(x_t, u_t). \tag{5.17}$$

Destacando-se o fato de que $\widetilde{H}$ é uma função clássica dada por:

$$\widetilde{H}_t = \big(\lambda_1 \underline{\Pi}(x_t, u_t) + \lambda_2 \overline{\Pi}(x_t, u_t)\big) + \alpha p_{t+1} g(x_t, u_t)$$

com $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Dessa forma, (5.15) fornece a condição necessária para a maximização do problema com relação a u_t, (5.16) corresponde a equação de coestado e (5.17) é a redeclaração da equação de movimento, em relação ao banco de sementes.

A variável de estado depende do estado inicial do sistema x_0, embora x_0 seja dado, p_1 é desconhecido e uma condição adicional, conhecida como a condição de transversalidade, é requerida para que o problema obtenha solução única. Em particular, tem-se que o tempo final T é dado, e o estado final x_T é livre, assim a condição de transversalidade é $p_{T+1} = 0$. Com isso, para qualquer valor de $0 < \lambda_1, \lambda_2$, determina-se um LU-processo

[1]Observe que, neste caso, trata-se de um problema de maximização, assim a negação da função lucro que é convexa (ver Stiegelmeier (2012)).

ótimo, composto pela variável de estado $\widehat{x}$, a variável de controle $\widehat{u}$ e a variável de coestado relacionada ao estado, $\widehat{p}$, respectivamente.

Uma vez que o problema de valor intervalar, em questão, pode ser interpretado como um problema ponderado clássico que possui restrição sobre a variável de controle, u_t, na forma de limitantes inferiores e superiores, um método de programação não-linear para variáveis limitadas deve ser adotado. Assim, utilizou-se o método ASA_CG.

O método ASA_CG, disponível em Hager (2010), consiste na combinação de dois algoritmos utilizados para a resolução numérica de problemas de programação não-linear. O algoritmo consiste de duas etapas, na qual a primeira é a projeção do gradiente não monótona e a segunda realiza uma otimização irrestrita, executada pelo método do gradiente conjugado e também um conjunto de regras para a ramificação entre essas duas etapas. Ou seja, este algoritmo alterna entre as iterações desses dois métodos. Uma vez que o método do gradiente projetado pode ter convergência lenta na vizinhança de um mínimo local, o algoritmo ramifica-se para o método do gradiente conjugado para explorar a propriedade de convergência superlinear que o método possui.

O método ASA_CG requer como entrada uma solução inicial x_0 e um procedimento que calcula o gradiente da função a ser maximizada. Como o algoritmo escolhe α^k e d^k é descrito em Hager e Zhang (2006). Para calcular α^k é feita uma busca linear na direção d^k, baseada no gradiente da função hamiltoniana do problema. Para maiores informações sobre o método ASA_CG deve-se consultar Hager e Zhang (2006).

5.5 Resultados da simulação

Nesta seção apresenta-se um estudo de caso, que analisará a dinâmica populacional da planta daninha *Bidens subalternans*, presente na cultura do milho, com aplicação de controle do herbicida atrazina. Busca-se a melhor forma de combater a infestação e uma estimativa para a lucratividade diante de dois cenários, o pessimista e o otimista.

Os valores dos parâmetros econômicos, utilizados para a cultura do milho safra 2013/2014, do modelo populacional e do modelo de dose-resposta, encontram-se na Tabela 3. Os coeficientes técnicos e os custos de cultivo do milho, safra 2013/2014, foram obtidos em IMEA (2014), e se referem aos diferentes níveis tecnológicos adotados na produção e regiões do estado de Mato Grosso, o maior produtor de milho do Brasil (Conab, 2015). Os dados referentes ao modelo populacional e da função de dose-resposta foram obtidos de Jones e Cacho (2000) e Stiegelmeier (2012), respectivamente. Foram avaliados o desenvolvimento do banco de sementes e a taxa ótima do herbicida para os períodos de 5 e 10 anos, com condição inicial do banco de sementes de 500 sementes m^{-2}.

Serão apresentados os resultados de quando maximiza-se o lucro do produtor, considerando as oscilações dos preços da unidade do produto e do controle e, além disso, considerar-se-á, também, a incerteza do custo de aplicação do controle e da produção. Uma vez que para cada fator de ponderação $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, obtém-se uma LU-solução do

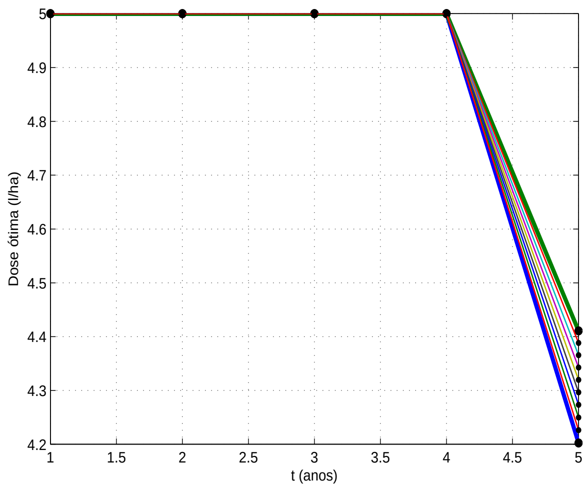


Figura 6: LU-controles para o horizonte de 5 anos.

problema em questão, a Figura 6 apresenta uma gama de LU-controle ótimo para o horizonte de 5 anos. A partir de cada controle, determina-se a evolução do banco de semente e o cenário da lucratividade. De posse da baixa variação do controle e da irrisória influência na lucratividade, o presente texto apresentará os resultados apenas para uma única LU-solução, mais precisamente, considerando $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$, tanto para o horizonte de 5 quanto para o de 10 anos.

As Figuras 7(a) e 8(a) trazem o valor ótimo do banco de sementes, $\widehat{x}$, as Figuras 7(b) e 8(b) representam a taxa ótima de controle aplicado, $\widehat{u}$, para um horizonte de 5 e 10 anos, respectivamente.

Verifica-se nas Figuras 7(a) e 8(a) que o banco de sementes sofreu um decréscimo significativo com o passar do tempo, devido às doses ótimas de herbicida, apresentadas nas Figuras 7(b) e 8(b), respectivamente. Além disso, observa-se que a partir da quarta aplicação, as doses sofreram uma redução e, mesmo diante deste cenário, o banco de semente se mantém estável.

As Figuras 7(c) e 8(c) apresentam os cenários da lucratividade, pessimista e otimista, considerando a taxa ótima da aplicação do herbicida. A curva inferior representa o cenário pessimista e a curva superior, o cenário otimista do lucro da produção de milho, descrevendo as variações do lucro a partir das variações do custo de produção e dos preços da unidade do produto e do controle. No horizonte de 10 anos, pode-se observar que a partir do quinto ano, a função lucro de valor intervalar aumenta de forma significativa e esse fator está associado à redução das taxas de aplicação do herbicida, no respectivo período. Já as Figuras 7(d) e 8(d) trazem o cenário da lucratividade ao longo de 5 e 10 anos, respectivamente.

Utilizando o problema de otimização de valor intervalar foi determinado a taxa de aplicação do herbicida, analisado o decrescimento do banco de sementes e, além disso, pode-se predizer os cenário da lucratividade no horizonte do tempo.

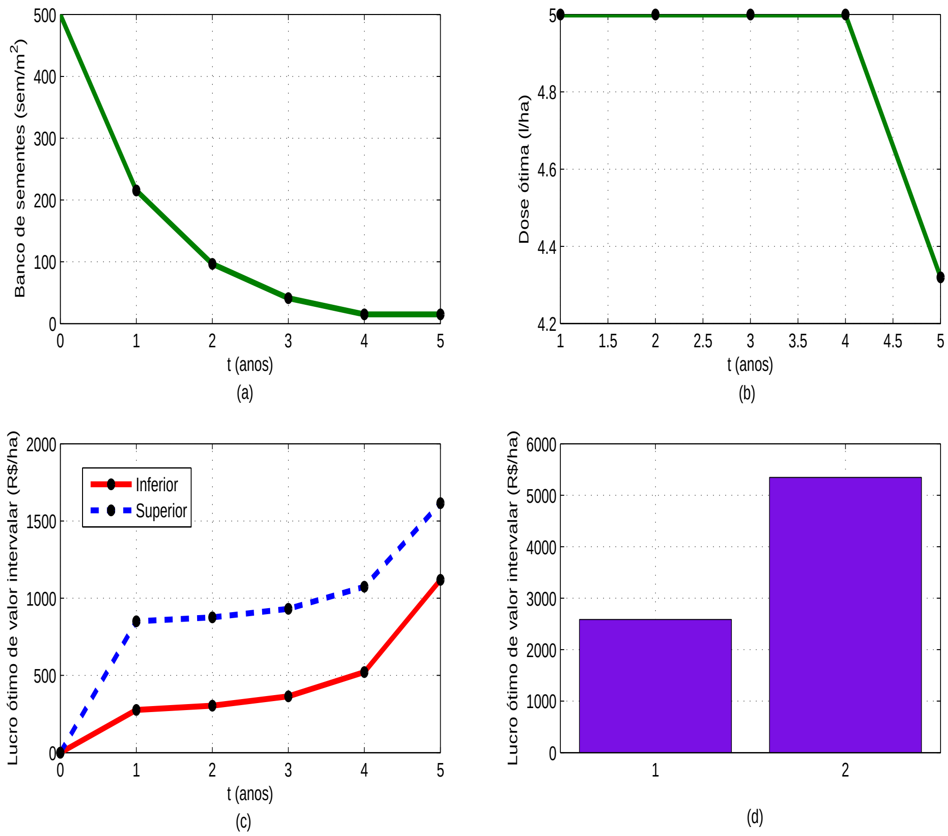


Figura 7: Resultados da otimização para o horizonte de 5 anos.

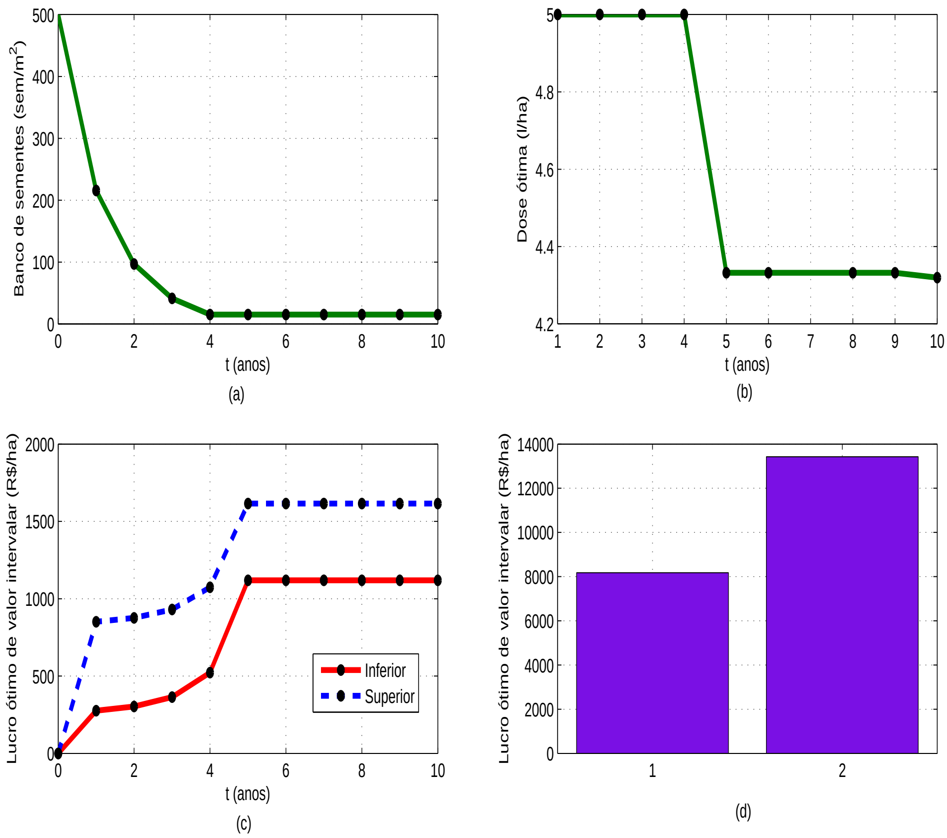


Figura 8: Resultados da otimização para o horizonte de 10 anos.

5.6 Conclusões

O problema de controle de planta daninha foi descrito e apresentado como um problema de otimização dinâmica de valor intervalar referente à aplicação de herbicida. Para a resolução do problema, em questão, utilizou-se o conceito de solução, estabelecido pela relação de ordem LU. Considerando uma das LU-soluções ótimas, expôs-se a evolução do banco de semente e os cenários de lucratividade.

No próximo capítulo, será introduzido o conceito de cálculo intervalar *single level*, almejando estender os resultados, obtidos até agora, para o caso mais geral, quando o problema possui incerteza no custo e, também, na dinâmica do problema.

Tabela 3: Valores dos parâmetros usados na simulação numérica

Populacional	Valores
$\delta(\%)$	60
$\psi(\%)$	30
η(sementes m^{-2})	0
ξ(sementes m^{-2})	0
$\kappa(\%)$	30
$x^g(\%)$	60
γ	6,80
μ	2,00
ε	0,67
Dose-resposta	
b	-0,18
c	-3,05
d	103,04
GR_{50} (litro ha^{-1})	727,33
Econômicos	
$[\underline{P_y}, \overline{P_y}]$ (R\$ $tonelada^{-1}$)	[498;547,8]
$[\underline{P_u}, \overline{P_u}]$ (R\$ $litro^{-1}$)	[11,90;12,90]
Y_0 (tonelada ha^{-1})	7,80
$[\underline{C}, \overline{C}]$ (R\$ ha^{-1})	[954,73;1457,09]
u_{max} (litro ha^{-1})	5,00

CAPÍTULO 6

ANÁLISE INTERVALAR VIA *SINGLE LEVEL*

Neste capítulo, desenvolve-se os conceitos de análise intervalar, segundo a aritmética intervalar restrita *single level*. Essa aritmética possui outras propriedades importantes, vistas anteriormente, propriedades essas que não ocorrem quando considera-se a aritmética intervalar usual ou, também, a aritmética intervalar decorrente da gH-diferença e tão pouco com a aritmética intervalar de Markov. Motivos esses que direcionaram o interesse em trabalhar com essa aritmética.

A análise intervalar tem sido amplamente desenvolvida considerando as funções de valores intervalar[1], todavia, algumas aplicações possuem incerteza, também, nas variáveis, neste sentido, será desenvolvido um arcabouço teórico da análise intervalar, considerando a função intervalar, onde tanto o domínio quanto o contra-domínio da função são subconjuntos do espaço intervalar.

6.1 Função Intervalar

No contexto intervalar, o conceito de função possui algumas variações, sendo essas: o domínio determinístico ou intervalar e a imagem intervalar. Desta forma, existem três caracterizações para as funções intervalares; (a) a função de valor intervalar simples, (b) a função de valor intervalar e (c) a função intervalar. Os casos (a) e (b) são redefinidos adiante:

(a) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é uma função da valor intervalar simples, se $F(x) = p(x)A$, onde

[1]Ver Capítulo 2.

$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real e $A \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$;

(b) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é uma função de valor intervalar, se $F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$ satisfazendo $\underline{f}(x) \leq \overline{f}(x) \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$, com $\underline{f}, \overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\underline{f}$ e $\overline{f}$ são chamadas de funções extremas, inferior e superior, associadas com F.

Os dois tipos de funções definidas, anteriormente, onde apenas o contra-domínio é intervalar, já foram estudadas nos capítulos anteriores, segundo outras aritméticas e, além disso, a literatura apresenta inúmeros resultados via diferentes aritméticas (Aumann, 1965; Moore, 1979; Aubin e Cellina, 1984; Aubin e Frankowska, 1990; Bede e Gal, 2005; Stefanini e Bede, 2009; Chalco-Cano, Flores-Franulic e Román-Flores, 2012; Chalco-Cano et al., 2013; Chalco-Cano, Lodwick e Rufián-Lizana, 2013). Assim, o escopo será desenvolver o conceito de função intervalar, onde tanto o domínio quanto o contra-domínio da função, estão definidos no espaço intervalar. Observe que o conceito de função de valor intervalar é uma particularização de função intervalar. Dessa forma, os resultados, no âmbito da análise intervalar para função intervalar e função de valor intervalares, serão desenvolvidos.

O entendimento de função intervalar possui, essencialmente, a mesma ideia de mapeamento das funções reais, porém, agora, o mapeamento será entre os dois subconjuntos intervalares. Assim, como para função real é necessário uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a relação entre os subconjuntos do espaço intervalar. Neste contexto, é necessário definir o conceito de relação entre dois intervalos.

Definição 18. *(Maqui-Huamán, 2014) Um conjunto R é uma relação binária intervalar, se todo elemento de R é um par ordenado; i.e., se para todo $Z \in R$ existem $X, Y \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, tais que $Z = (X, Y)$. Se $R \subset \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, diz-se que R é uma relação de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$, ou entre $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. Além disso, se $R \subset \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$, simplesmente, diz-se que R é uma relação em $\boldsymbol{A}$.*

Definição 19. *(Maqui-Huamán, 2014) Seja R uma relação binária intervalar.*

1. *Diz-se que X está em relação R com algum Y, se $(X, Y) \in R$.*

2. *O conjunto de todos os $X \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, que estão em relação R com algum Y, é chamado domínio de R e é denominado por D_R.*

3. *O conjunto de todos os $Y \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, tais que para algum X, X esteja relacionado com Y, é chamado de Imagem de R e é denotado por ImR.*

O domínio e a imagem de uma relação intervalar, R, podem ser descritos por:

$$D_R = \{X \in \mathbb{I}(\mathbb{R}); \exists\ Y \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \text{ e } (X,Y) \in R\}.$$
$$ImR = \{Y \in \mathbb{I}(\mathbb{R}); \exists\ X \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) \text{ e } (X,Y) \in R\}.$$

Definição 20. *(Maqui-Huamán, 2014) Uma relação intervalar F é chamada de função intervalares, se dados A, B e $C \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $(A,B) \in F$ e $(A,C) \in F$ implica que $B = C$.*

Seja F uma função intervalar, D_F seu domínio e $CD_F \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{R})$ seu contradomínio, além disso, utiliza-se a notação $F : D_F \to CD_F$ para denotar a função intervalar F, mais precisamente,

$$\begin{aligned} F: \quad & D_F \longrightarrow CD_F \\ & X \longmapsto F(X). \end{aligned}$$

A regra F associa, a cada elemento intervalar $X \in D_F$, um único elemento intervalar $F(X) \in CD_F$, chamado o intervalo, que a função intervalar assume em X (ou no intervalo X). Segundo a definição de função intervalar, se $X = Y$ em D_F, então $F(X) = F(Y)$ em CD_F. Dessa forma, duas funções intervalares $F : D_F \to CD_F$ e $G : D_G \to CD_G$ são iguais se, e somente se, $D_F = D_G$, $CD_F = CD_G$ e $F(X) = G(X)$ para todo $X \in D_F$. O conjunto das funções intervalares será denotado por $\mathcal{F}(\mathbf{X}; \mathbb{I}(\mathbb{R}))$, onde: $\mathcal{F}(\mathbf{X}; \mathbb{I}(\mathbb{R})) = \{F : \mathbf{X} \subset \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R});\ \ F \text{ é uma função intervalar}\}$.

Segundo a *single level*, o intervalo que a função intervalar F representa, em dado intervalo X, é obtido da seguinte forma:

$$F(X) = \{F(X(\lambda)); \lambda \in [0,1]\},$$

onde $F(X(\lambda))$ é a função restrição associada com a função intervalar em questão, mais precisamente,

$$F(X) = \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1} F(X(\lambda)), \max_{0\leq\lambda\leq 1} F(X(\lambda))\right],$$

dado que o mínimo e máximo existam.

Observação 6.1.1. *O cálculo do intervalo que a função intervalar assume em X é determinado a partir da função restrição associada com a função intervalar. Assim, a obtenção correta da função restrição é de fundamental importância. A função restrição associada com a função intervalar será denotada por $F(X(\lambda))$ e é obtida da seguinte forma: $F(X(\lambda)) := f_1(X(\lambda))$, onde $X(\lambda)$ é a função restrição associada com X e f_1 é a* *função real a ser estendida, tal que:*

$$F(X) = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} F(X(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} F(X(\lambda)) \right].$$

Destacando-se,

1. *se F é uma função intervalar e não possui coeficientes intervalares; i.e., como por exemplo $F(X) = X^2$, então $F(X(\lambda)) = X(\lambda)^2$ é a função restrição associada com F, onde $X(\lambda)$ é a função restrição convexa associada com X e a função real a ser estendida é $f_1(x) = x^2$.*

2. *se F é uma função intervalar, que possui coeficientes intervalares; i.e., como por exemplo $F(X) = X^2 \oplus A$, então $F(X(\lambda)) = X(\lambda)^2 + A(\lambda)$ é a função restrição associada com F, onde $X(\lambda)$ é a função restrição associada com X e a função real a ser estendida é $f_1(x) = x^2 + A(\lambda)$, sendo $A(\lambda)$ é a função restrição associada com A.*

O cálculo para determinação do intervalo que uma função intervalar assume em um dado intervalo é exemplificado a seguir.

Exemplo 6.1.1. *Seja $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar definida por: $F(X) = X \ominus X^2$. Para $X_0 = [0, 1]$, tem-se que: $F([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{4}\right]$. De fato, sejam $X_0(\lambda)$ a função restrição associada ao intervalo X_0 e, neste caso, a função real a ser estendida é $f_1(x) = x - x^2$. Assim, $F(X_0(\lambda)) = X_0(\lambda) - (X_0(\lambda))^2$ é a função restrição associada com $F(X_0)$. Portanto,*

$$\begin{aligned} F([0,1]) &= \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} F(X_0(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} F(X_0(\lambda)) \right] \\ &= \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} \{-\lambda^2 + \lambda\}, \max_{0 \leq \lambda \leq 1} \{-\lambda^2 + \lambda\} \right] \\ &= \left[0, \frac{1}{4} \right]. \end{aligned}$$

Os cálculos, segundo a single level*, são obtidos da seguinte forma:*

1. *Para $\lambda = 1$, tem-se $F(1) = 1 - 1^2 = 0$;*

2. *Para $\lambda = \frac{1}{2}$, tem-se $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$;*

3. *Para $\lambda = 0$, tem-se $F(0) = 0 - 0^2 = 0$.*

O gráfico de uma função intervalar $F : D_F \to CD_F$ é um subconjunto $G(F)$ do produto cartesiano $D_F \times CD_F$ formado pelo pares ordenados $(X, F(X))$, onde $X \in D_F$ é arbitrário, mais precisamente,

$$\begin{aligned} G(F) &= \{(X,Y) \in D_F \times CD_F; Y = F(X)\} \\ &= \{(X(\lambda), Y(\lambda)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; Y(\lambda) = F(\lambda), \quad \lambda \in [0,1]\}, \end{aligned}$$

onde $D_F \times CD_F = \{(X,Y); X \in D_F \text{ e } Y \in CD_F\}$.

O produto cartesiano, entre subconjuntos do espaço intervalar e sua interpretação, segundo a *single level*, é ilustrado no exemplo adiante.

Exemplo 6.1.2. *Sejam* $A = \{[0,1],[2,4]\}$ *e* $B = \{[1,3],[4,5]\}$. *O produto cartesiano entre esses dois conjuntos é dado por:*

$$A \times B = \{([0,1],[1,3]),([0,1],[4,5]),([2,4],[1,3]),([2,4],[4,5])\}.$$

Observe que $A(\lambda) = \{(1-\lambda), 2\lambda + (1-\lambda)4\}$ *e* $B(\lambda) = \{\lambda + (1-\lambda)3, 4\lambda + (1-\lambda)5\}$, *assim*

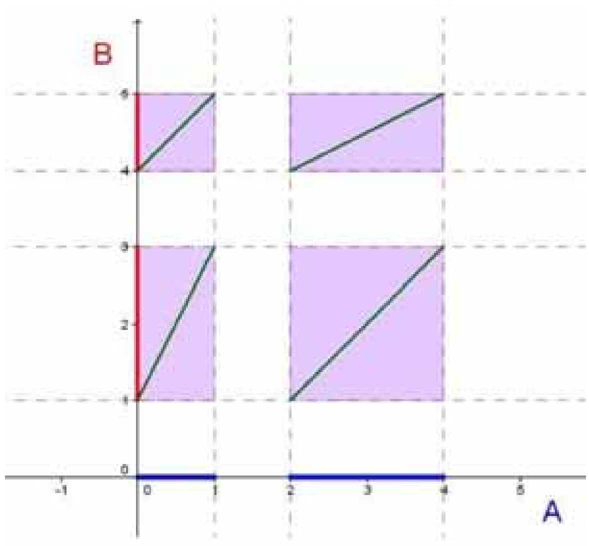


Figura 9: Produto cartesiano intervalar (Fonte: Maqui-Huamán (2014)).

$(A \times B)(\lambda) = \{(1-\lambda, \lambda + (-\lambda)3), (1-\lambda, 4\lambda + (1-\lambda)5), (2\lambda + (1-\lambda)4, \lambda + (-\lambda)3), (2\lambda + (1-\lambda)4, 4\lambda + (1-\lambda)5)\}$. *Logo,*

1. *para* $\lambda = 1$, *tem-se* $(A \times B)(1) = \{(1,3),(1,5),(4,3),(4,5)\}$;

2. *para* $\lambda = 1/2$, *tem-se* $(A \times B)(1/2) = \{(0.5,2),(0.5,4.5),(3,2),(3,4.5)\}$;

3. *para* $\lambda = 0$, *tem-se* $(A \times B)(0) = \{(0,1), (0,4), (2,1), (2,4)\}$,

conforme pode ser observado na Figura 9.

Alguns exemplos de funções intervalar e suas representações gráficas, quando possível, estão apresentados adiante.

Exemplo 6.1.3. *Sejam* $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *e* $B = [\underline{b}, \overline{b}] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^+$ *um intervalo qualquer fixo. Seja* $F(X) = B$ *uma função intervalar, chamada de função intervalar constante. Sejam* $X(\lambda)$ *e* $B(\lambda)$ *as funções restrições convexas associadas com os intervalos* X *e* B*, respectivamente. Dessa forma,* $F(X(\lambda)) = B(\lambda)$ *é a função restrição associada com a função intervalar. Observe que se* $B = [1,9; 4,4]$ *e* $A = [3; 7,8]$*, tem-se:*

$$\begin{aligned} F(A) &= \{F(A(\lambda)) = F(3\lambda + (1-\lambda)7,8); \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{B(\lambda) = 1,9\lambda + (1-\lambda)4,4; \lambda \in [0,1]\} \\ &= B. \end{aligned}$$

Os cálculos, segundo a single level*, são obtidos da seguinte forma:*

1. *Para* $\lambda = 1$, *tem-se* $F(3) = 1,9$;

2. *Para* $\lambda = \frac{1}{2}$, *tem-se* $F(5,4) = 3,15$;

3. *Para* $\lambda = 0$, *tem-se* $F(7,8) = 4,4$,

conforme pode ser observado na Figura 10.

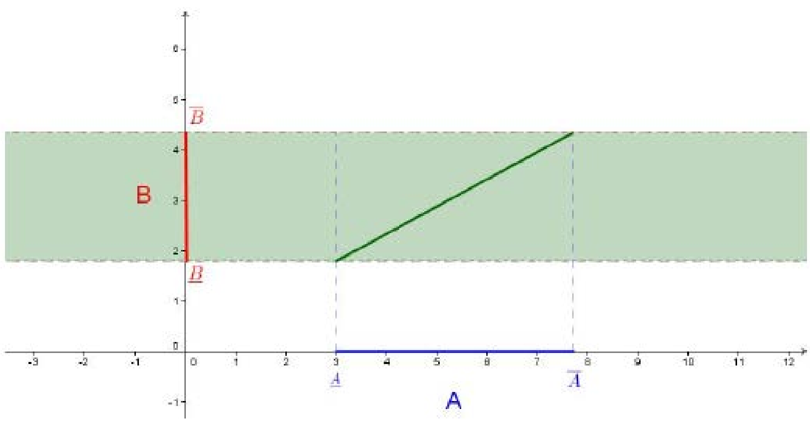


Figura 10: Função intervalar constante (Fonte: Maqui-Huamán (2014)).

Exemplo 6.1.4. *Seja F uma função intervalar definida por $F(X) = X$, chamada de função intervalar identidade. Neste caso, seja $X(\lambda)$ a função restrição convexa associada com X, logo $F(X(\lambda)) = X(\lambda)$ é a função restrição associada com F e*

$$\begin{aligned} F(X) &= \{F(X(\lambda)),\ \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{X(\lambda),\ \lambda \in [0,1]\} = X. \end{aligned}$$

Mais precisamente, os cálculos, segundo a single level*, são obtidos da seguinte forma:*

1. *Para $\lambda = 1$, tem-se $F(\overline{x}) = \overline{x}$;*
2. *Para $\lambda = \frac{1}{2}$, tem-se $F(\frac{\underline{x}+\overline{x}}{2}) = \frac{\underline{x}+\overline{x}}{2}$;*
3. *Para $\lambda = 0$, tem-se $F(\underline{x}) = \underline{x}$,*

conforme pode ser observado na Figura 11.

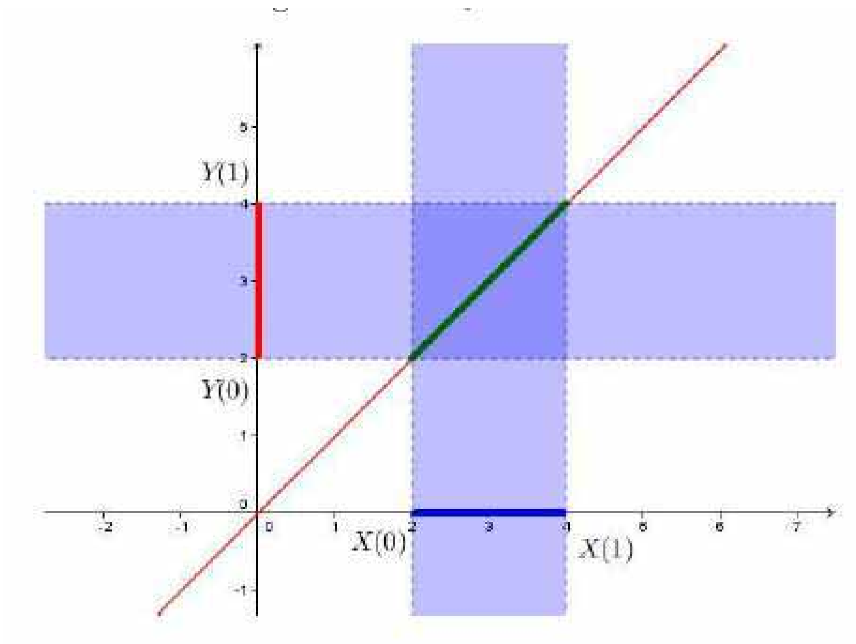


Figura 11: Função intervalar identidade (Fonte: Maqui-Huamán (2014)).

Exemplo 6.1.5. *Seja F uma função intervalar definida por $F(X) = X^2$, chamada de função intervalar quadrática. Logo, segundo a* single level

$$F(X) = \{F(X(\lambda)) = X(\lambda)^2,\ \lambda \in [0,1]\}.$$

Considere $X = [0,2]$, portanto,

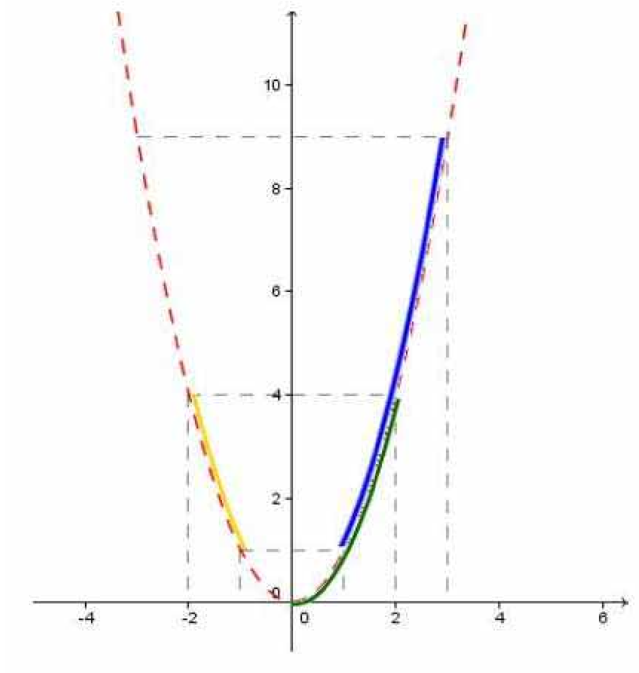


Figura 12: Função intervalar quadrática (Fonte: Maqui-Huamán (2014)).

$$\begin{aligned} F([0,2]) &= \{F(2\lambda) = (2\lambda)^2, \;\; \lambda \in [0,1]\} \\ &= \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1}(2\lambda)^2, \max_{0\leq\lambda\leq 1}(2\lambda)^2\right] \\ &= [0,4]. \end{aligned}$$

Dadas duas funções intervalares $F, G : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ as operações aritméticas entre essas funções são definidas por:

$$(F \circledast G)(X) := F(X) \circledast G(X),$$

onde $\circledast \in \{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash\}$ são as operações *single level* em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. Essas operações, por sua vez, são expressas através das funções restrições associadas a elas. Considere que $F(X(\lambda))$ e $G(X(\lambda))$ sejam as funções restrições associadas com $F(X)$ e $G(X)$, respectivamente. Seja $\circledast$ uma operação aritmética em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, assim a operação $(F \circledast G)(X)$ em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ é dada por:

$$(F \circledast G)(X) \;\; = \;\; \{(F * G)(X(\lambda)) = F(X(\lambda)) * G(X(\lambda)), \;\; \lambda \in [0,1]\}$$

onde $*$ é uma operação aritmética em $\mathbb{R}$. Logo,

$$(F \circledast G)(X) := \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1}(F * G)(X(\lambda)), \max_{0\leq\lambda\leq 1}(F * G)(X(\lambda))\right],$$

dado que o mínimo e máximo existam.

As operações entre duas funções intervalares serão ilustradas no exemplo a seguir.

Exemplo 6.1.6. *Considere as funções intervalar* $F, G : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *definidas por:* $F(X) = [2,3] \otimes X$ *e* $G(X) = [1,5] \otimes X$*. Primeiramente, note que* $F(X(\lambda)) = (2\lambda + (1-\lambda)3)X(\lambda)$ *e* $G(X(\lambda)) = (\lambda + (1-\lambda)5)X(\lambda)$ *são as funções restrições associadas com* $F(X)$ *e* $G(X)$*, respectivamente. Assim,*

1. *Para a C-soma:*

$$\begin{aligned}(F \oplus G)(X) &= \{(F+G)(X(\lambda)) = F(X(\lambda)) + G(X(\lambda)),\ \ \lambda \in [0,1]\}\\ &= \{(2\lambda + (1-\lambda)3)X(\lambda) + (\lambda + (1-\lambda)5)X(\lambda),\ \ \lambda \in [0,1]\}\\ &= \{(3\lambda + (1-\lambda)8)X(\lambda),\ \ \lambda \in [0,1]\}\\ &= [3,8] \otimes X.\end{aligned}$$

Logo, $(F \oplus G)(X) = F(X) \oplus G(X) = [3,8] \otimes X.$

2. *Para a C-subtração:*

$$\begin{aligned}(F \ominus G)(X) &= \{(F-G)(X(\lambda)) = F(X(\lambda)) - G(X(\lambda)),\ \ \lambda \in [0,1]\}\\ &= \{(2\lambda + (1-\lambda)3)X(\lambda) - (\lambda + (1-\lambda)5)X(\lambda),\ \ \lambda \in [0,1]\}\\ &= \{(\lambda + (1-\lambda)(-2))X(\lambda),\ \ \lambda \in [0,1]\}\\ &= [-2,1] \otimes X.\end{aligned}$$

Logo, $(F \ominus G)(X) = F(X) \ominus G(X) = [-2,1] \otimes X.$

3. *Para a C-multiplicação:*

$$\begin{aligned}(F \otimes G)(X) &= \{(F.G)(X(\lambda)) = F(X(\lambda)).G(X(\lambda)),\ \ \lambda \in [0,1]\}\\ &= \{(2\lambda + (1-\lambda)3)X(\lambda).(\lambda + (1-\lambda)5)X(\lambda),\ \ \lambda \in [0,1]\}\\ &= \{(2 + 9\lambda + 4\lambda^2)(X(\lambda))^2,\ \ \lambda \in [0,1]\}\\ &= [2,15] \otimes X^2.\end{aligned}$$

Logo, $(F \otimes G)(X) = F(X) \otimes G(X) = [2,15] \otimes X^2.$

4. Para a C-divisão: suponha que $0 \notin G(X)$*,*

$$\begin{aligned}(F \oslash G)(X) &= \{\left(\frac{F}{G}(X(\lambda))\right) = \frac{F(X(\lambda))}{G(X(\lambda))}, \ \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{\frac{(2\lambda + (1-\lambda)3)X(\lambda)}{(\lambda + (1-\lambda)5)X(\lambda)}, \ \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{\frac{2\lambda + (1-\lambda)3}{\lambda + (1-\lambda)5}, \ \lambda \in [0,1]\} \\ &= \left[2, \frac{3}{5}\right].\end{aligned}$$

Logo, $(F \oslash G)(X) = F(X) \oslash G(X) = \left[2, \frac{3}{5}\right]$.

A próxima seção discutirá o conceito de sequência intervalar, assim como o limite de sequência intervalar.

6.2 Sequência Intervalar

Todos os conceitos e resultados importantes da Análise Intervalar se referem, quer explicitamente ou implicitamente, ao conceito de limite intervalar. Daí o papel central que esse conceito desempenha. Os limites de sequências de números intervalares são os mais simples; por isso, será o primeiro caso analisado. Outros tipos, mais sofisticados, de limites intervalares serão estudados posteriormente.

Uma *sequência de números intervalares* é uma função de valor intervalar $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$, definida sobre o conjunto dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. O intervalo $\varphi(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por X_n e chamado de *termo de ordem* n da sequência. Uma sequência intervalar será denotada por: $(X_0, X_1, X_2, ...)$, ou $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (X_n).

Exemplo 6.2.1. *Seja* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *definida por* $\varphi(n) = \left[1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right]$*. Logo,* $X_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right]$ *é uma sequência intervalar. Neste caso,* $X_n(\lambda) = \lambda(1 - \frac{1}{n}) + (1-\lambda)(2 + \frac{1}{n})$ *é a função restrição convexa associada com a sequência intervalar em questão.*

Diz-se que uma sequência intervalar (X_n) é *limitada* se existe $0 < k \in \mathbb{R}$ tal que $H(X_n, [0,0]) \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, uma sequência intervalar (X_n) ser limitada, significa que todos os termos da sequência estão contidos na bola de centro zero e raio k; i.e., $X_n \in B(0,k) \ \forall \ n \in \mathbb{N}$[2].

[2]Onde $B(0,k) = \{X \in \mathbb{I}(\mathbb{R}); H([0,0], X) = \| X \| < k\}$.

Dada uma sequência $\varphi = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos, uma *subsequência* de X é a restrição da função φ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_i < ...\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $\varphi' = (X_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ para indicar a subsequência $\varphi' = \varphi|_{\mathbb{N}'}$.

Toda subsequência intervalar, de uma sequência intervalar limitada, é limitada.

Exemplo 6.2.2. *Considere $X_n = A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $A = [\underline{a}, \overline{a}]$; isto define a sequência constante $(A, A, ..., A, ...)$ e é evidentemente limitada, pois $\varphi(\mathbb{N}) = \{A\}$.*

Exemplo 6.2.3. *Considere $X_n = [n, n + n^2]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, obtém-se a sequência intervalar $([1, 2], [2, 6], ..., [n, n+n^2], ...)$ que não é limitada, ou seja, a sequência intervalar é ilimitada.*

O limite de sequência intervalar será definido a partir da métrica H, todavia o mesmo pode ser interpretado segundo as outras métricas, devido a igualdade entre as mesmas. Intuitivamente, dizer que o intervalo $A \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é o limite da sequência intervalar X_n, significa afirmar que para valores muito grandes de n, os termos X_n tornam-se e se mantém tão próximos de $A \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ quanto se deseje.

Definição 21. *(Maqui-Huamán, 2014) Seja uma sequência intervalar (X_n), $n = 1, 2, ...$; $A \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Diz-se que X_n converge para o intervalo A, se para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $H(X_n, A) < \epsilon$ sempre que $n > n_0$. Além disso, denota-se por: $\lim X_n = A$ ou $X_n \to A$.*

Segundo a *single level*, seja $(X_n(\lambda))$ a função restrição convexa associada com a sequência intervalar (X_n). Assim, $\lim X_n(\lambda)$ é a função restrição associada ao novo intervalo e, dessa forma,

$$\lim X_n = \left[\min_{0\leq\lambda\leq1} \lim X_n(\lambda), \max_{0\leq\lambda\leq1} \lim X_n(\lambda)\right],$$

dado que o mínimo e máximo existam.

Exemplo 6.2.4. *Seja $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ definida por $\varphi(n) = \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$. Logo, $X_n = \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$*[3] *é uma sequência intervalar. Neste caso, $X_n(\lambda) = \lambda(\frac{1}{n}) + (1 - \lambda)(1 + \frac{1}{n})$ é a função restrição convexa associada com (X_n), logo $\lim X_n(\lambda) = \lambda 0 + (1 - \lambda)1$ é a função restrição associada com o limite da sequência intervalar. Dessa forma,*

$$\lim X_n = \left[\min_{0\leq\lambda\leq1} (1 - \lambda), \max_{0\leq\lambda\leq1} (1 - \lambda)\right] = [0, 1].$$

[3]Observe que, $X_n = \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] \to (0, 1]$, contudo $H((0, 1], [0, 1]) = 0$. Logo, $[0, 1]$ é o limite de X_n. Além disso, o cálculo segundo a *single level* supera essa situação através do min e max em λ.

A convergência de uma sequência intervalar pode ser caracterizada pela convergência da função restrição associada à respectiva sequência intervalar, para todo λ. Primeiramente, seja $(X_n(\lambda))$ a função restrição convexa associada com (X_n). Se para todo $\lambda \in [0,1]$, $(X_n(\lambda))$ converge para $A(\lambda)$, então $\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \text{ implicará que } |X_n(\lambda) - A(\lambda)| < \epsilon.$$

Assim,

$$n > n_0 \text{ implicará que } \max_{0 \leq \lambda \leq 1} |X_n(\lambda) - A(\lambda)| < \epsilon.$$

Logo, (X_n) converge para A. A recíproca segue analogamente. Dessa forma, tem-se o seguinte resultado.

Proposição 6.2.1. *(Maqui-Huamán, 2014) Uma sequência intervalar (X_n) é convergente se, e somente se, $(X_n(\lambda))$ é convergente para todo $\lambda \in [0,1]$.*

O próximo resultado apresenta algumas propriedades sobre o limite de sequência intervalar.

Teorema 6.2.1. *Seja (X_n) uma sequência intervalar.*

1. *Se $\lim X_n = A$ e $\lim X_n = B$, então $A = B$;*

2. *Se $limX_n = A$, então toda subsequência de (X_n) converge para o limite A;*

3. *Toda sequência convergente é limitada.*

Agora, será apresentado como se comportam os limites de sequências intervalares relativamente às C-operações.

Teorema 6.2.2. *Se $\lim X_n = [0,0]$ e Y_n é uma sequência intervalar limitada, então $\lim X_n \otimes Y_n = [0,0]$.*

Demonstração. Sejam $X_n(\lambda)$ e $Y_n(\lambda)$ as funções restrições convexas associadas com X_n e Y_n, respectivamente. Se $limX_n = [0,0]$ e Y_n é uma sequência intervalar limitada, então $X_n(\lambda)$ converge para 0 e $Y_n(\lambda)$ é limitada para todo $\lambda \in [0,1]$. Logo, $X_n(\lambda).Y_n(\lambda)$ converge para 0, para todo $\lambda \in [0,1]$, de onde segue o resultado. □

Proposição 6.2.2. *(Maqui-Huamán, 2014) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $(X_n), (Y_n), X, Y \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})$, tais que $X_n \to X$ e $Y_n \to Y$, então, tem-se os seguintes resultados:*

1. $X_n \oplus Y_n \to X \oplus Y$;

2. $\alpha \odot X_n \to \alpha \odot X$;

3. $X_n \ominus Y_n \to X \ominus Y$;

4. $X_n \otimes Y_n \to X \otimes Y$;

5. $X_n \oslash Y_n \to X \oslash Y$ *para toda* (Y_n) *e* Y *que não contém o zero.*

Seja X_n uma sequência intervalar, X_n é chamada de *sequência intervalar de Cauchy* quando cumpre a seguinte condição: dado arbitrariamente um número real $\epsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implica $H(X_n, X_m) < \epsilon$. Além disso, toda sequência intervalar convergente é de Cauchy e toda sequência intervalar de Cauchy é convergente.

Na próxima seção, será apresentado a noção de limite intervalar, em um contexto mais amplo, em vez de sequência, como anteriormente, considerando as funções intervalares $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$.

6.3 Limite e Continuidade Intervalar

Seja $F : \mathbf{X} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar, definida em um subconjunto $\mathbf{X} \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Seja $A \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ um intervalo de acumulação de $\mathbf{X}$; i.e., um intervalo $A \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é um *intervalo de acumulação* do conjunto $\mathbf{X}$, quando para todo $\epsilon > 0$ existe $X \in \mathbf{X}$, tal que $0 < H(X, A) < \epsilon$.

Diz-se que $L \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é o *limite intervalar* de $F(X)$, quando X tende para A, e escreve-se por:

$$\lim_{X \to A} F(X) = L,$$

para significar o seguinte: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$0 < H(X, A) < \delta \text{ implica } H(F(X), L) < \epsilon.$$

Portanto, quando A é um intervalo de acumulação no domínio de F, a expressão $\lim_{X \to A} F(X) = L$ é uma abreviatura para a afirmação abaixo:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0;\ \ X \in \mathbf{X},\ \ 0 < H(X, A) < \delta \Rightarrow H(F(X), L) < \epsilon.$$

Exemplo 6.3.1. *Considere a seguinte função intervalar* $F(X) = [2,3] \otimes X$, *então*

$$\lim_{X \to [1,2]} F(X) = [2,6].$$

De fato, note que $0 < H(X,[1,2]) < \delta := \frac{\epsilon}{3}$ *tem-se que:*

$$\begin{aligned} H(F(X),[2,6]) &= H([2,3] \otimes X, [2,3] \otimes [1,2]) \\ &= \| [2,3] \| \, H(X,[1,2]) \\ &< 3\delta \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Teorema 6.3.1. *Seja* $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *uma função intervalar. Então,*

$$\lim_{X \to A} F(X) = L \Longleftrightarrow \lim_{X \to A} (F(X) \ominus L) = [0,0].$$

Demonstração. Segue do fato que $H(F(X),L) = H(F(X) \ominus L, [0,0])$[4]. □

Segundo a *single level*, sejam $X(\lambda)$ e $A(\lambda)$ as funções restrições convexas associadas com X e A, respectivamente, e $F(X(\lambda))$ a função restrita associada com $F(X)$. Logo,

$$\lim_{X(\lambda) \to A(\lambda)} F(X(\lambda)) \tag{6.1}$$

é a função restrição associada ao novo intervalo. Portanto,

$$\lim_{X \to A} F(X) = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} \lim_{X(\lambda) \to A(\lambda)} F(X(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} \lim_{X(\lambda) \to A(\lambda)} F(X(\lambda)) \right],$$

dado que o mínimo e máximo existam.

Na sequência, serão expostos alguns exemplos de limite de função intervalar, visando exemplificar a definição e a manipulação, segundo a *single level*.

Exemplo 6.3.2. *Seja* $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *uma função intervalar, definida por:* $F(X) = [2,3] \otimes X$, *então*

$$\lim_{X \to [1,2]} F(X) = [2,6].$$

De fato, sejam $A(\lambda) = 1\lambda + (1-\lambda)2$, $C(\lambda) = 2\lambda + (1-\lambda)3$ *e* $X(\lambda) = \underline{x}\lambda + (1-\lambda)\overline{x}$ *as funções restrições convexas associadas com* $A = [1,2]$, $C = [2,3]$ *e* $X = [\underline{x}, \overline{x}]$, *respectivamente, e* $F(X(\lambda)) = C(\lambda)X(\lambda) = (2\lambda + (1-\lambda)3)(\underline{x}\lambda + (1-\lambda)\overline{x})$ *a função restrição associada com*

[4]Ver Capítulo 2 em métrica no espaço intervalar.

$F(X)$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{X(\lambda)\to A(\lambda)} F(X(\lambda)) &= \lim_{X(\lambda)\to A(\lambda)} C(\lambda)X(\lambda)\\ &= (2\lambda+(1-\lambda)3)(1\lambda+(1-\lambda)2)\\ &= 2\lambda^2+7\lambda(1-\lambda)+6(1-\lambda)^2\end{aligned}$$

é a função restrição associada ao limite de F, quando X tende para em $[1,2]$. Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{X\to[1,2]} F(X) &= \left[\min_{0\le\lambda\le1}(2\lambda^2+7\lambda(1-\lambda)+6(1-\lambda)^2), \max_{0\le\lambda\le1}(2\lambda^2+7\lambda(1-\lambda)+6(1-\lambda)^2)\right],\\ &= [2,6].\end{aligned}$$

Exemplo 6.3.3. *Seja $F:\mathbb{I}(\mathbb{R})\to\mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar, definida por: $F(X)=[2,3]\otimes X$, então*

$$\lim_{X\to[-1,1]} F(X) = [-2,3].$$

De fato, sejam $A(\lambda)=-1\lambda+(1-\lambda)1$, $C(\lambda)=2\lambda+(1-\lambda)3$ e $X(\lambda)=\underline{x}\lambda+(1-\lambda)\overline{x}$ as funções restrições convexas associadas com $A=[-1,1]$, $C=[2,3]$ e $X=[\underline{x},\overline{x}]$, respectivamente, e $F(X(\lambda))=C(\lambda)X(\lambda)=(2\lambda+(1-\lambda)3)(\underline{x}\lambda+(1-\lambda)\overline{x})$ a função restrição associada com $F(X)$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{X(\lambda)\to A(\lambda)} F(X(\lambda)) &= \lim_{X(\lambda)\to A(\lambda)} C(\lambda)X(\lambda)\\ &= 2\lambda^2-7\lambda+3\end{aligned}$$

é a função restrição associada ao limite de F quando X tende para em $[-1,1]$. Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{X\to[-1,1]} F(X) &= \left[\min_{0\le\lambda\le1}(2\lambda^2-7\lambda+3), \max_{0\le\lambda\le1}(2\lambda^2-7\lambda+3)\right],\\ &= [-2,3].\end{aligned}$$

Proposição 6.3.1. *Seja $F:\mathbb{I}(\mathbb{R})\to\mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar. Se $\lim_{X(\lambda)\to A(\lambda)} F(X(\lambda)) = L(\lambda)$ para todo $\lambda\in[0,1]$, então*

$$\lim_{X\to A} F(X) = L.$$

Demonstração. Por hipótese, o limite da função restrição associada com F existe para todo $\lambda\in[0,1]$, então dado $\epsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que:

$$0 <\mid X(\lambda)-A(\lambda)\mid< \delta \text{ implica } \mid F(X(\lambda))-L(\lambda)\mid< \epsilon.$$

Dessa forma,

$$0 < \max_{0 \leq \lambda \leq 1} \mid X(\lambda) - A(\lambda) \mid < \delta \text{ implica } \max_{0 \leq \lambda \leq 1} \mid F(X(\lambda)) - L(\lambda) \mid < \epsilon.$$

Portanto,

$$0 < H(X, A) < \delta \text{ implica } H(F(X), L) < \epsilon.$$

□

Os teoremas, abaixo, estabelecem as principais propriedades de limite de uma função intervalar.

Teorema 6.3.2. *(Maqui-Huamán, 2014) Se* $\lim_{X \to A} F(X) = B$ *e* $\lim_{X \to A} F(X) = C$*, então* $B = C$*.*

Teorema 6.3.3. *Sejam* $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})$*,* $F : \boldsymbol{X} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *e* A *um intervalo de acumulação. Se existe* $\lim_{X \to A} F(X)$*, então,* $F(X)$ *é limitada numa vizinhança de* A*.*

Demonstração. Seja $\lim_{X \to A} F(X) = L$. Tomando $\epsilon = 1$ na definição de limite, obtém-se $\delta > 0$ tal que $X \in \mathbf{X}$, $0 < H(X, A) < \delta \Rightarrow H(F(X), L) < 1$. Logo,

$$H(F(X), [0, 0]) = H(F(X) \oplus L, [0, 0] \oplus L) \leq H(F(X), L) + H(L, [0, 0]) < 1 + \parallel L \parallel .$$

Considere este δ e a constante limitante $k = 1 + \parallel L \parallel$. □

Teorema 6.3.4. *Sejam* $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})$*,* $F : \boldsymbol{X} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *e* A *um intervalo de acumulação. O* $\lim_{X \to A} F(X)$ *existe se, e somente se,* $\lim F(X_n) = L$ *para toda sequência intervalar* $X_n \in \boldsymbol{X} - \{A\}$*, tal que* $\lim X_n = A$*.*

Demonstração. Suponha que $\lim_{X \to A} F(X) = L$ e que $\lim X_n = A$, com $X_n \in \mathbf{X} - \{A\}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $0 < H(X, A) < \delta$, $X \in \mathbf{X} \Rightarrow H(F(X), L) < \epsilon$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < H(X_n, A) < \delta$. Segue-se que $n > n_0 \Rightarrow 0 < H(F(X_n), L) < \delta$, donde $\lim F(X_n) = L$. Reciprocamente, suponha que não se tenha $\lim_{X \to A} F(X) = L$. Então existe $\epsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$ (tome $\delta = 1/n$), tal que $0 < H(X, A) < 1/n$, $X \in \mathbf{X} \Rightarrow H(F(X), L) \geq \epsilon$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < H(X_n, A) < 1/n$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ pode-se obter $X_n \in \mathbf{X}$ com $0 < H(X_n, A) < 1/n$ e $H(F(X_n), L) \geq \epsilon$. Então, $\lim X_n = A$, porém não se tem $\lim F(X_n) = L$. □

A partir desse resultado, segue que se tal limite existe, então esse não dependerá da sequência intervalar.

Teorema 6.3.5. *(Maqui-Huamán, 2014) Dadas $F, G : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ duas funções intervalares, tais que $\lim_{X \to A} F(X) = B$ e $\lim_{X \to A} G(X) = C$, então*

1. $\lim_{X \to A}(F \oplus G)(X) = \lim_{X \to A} F(X) \oplus \lim_{X \to A} G(X) = B \oplus C$;
2. $\lim_{X \to A}(F \ominus G)(X) = \lim_{X \to A} F(X) \ominus \lim_{X \to A} G(X) = B \ominus C$;
3. $\lim_{X \to A}(F \otimes G)(X) = \lim_{X \to A} F(X) \otimes \lim_{X \to A} G(X) = B \otimes C$;
4. $\lim_{X \to A}(F \oslash G)(X) = \lim_{X \to A} F(X) \oslash \lim_{X \to A} G(X) = B \oslash C$ *tal que* $0 \notin C$.

Uma função intervalar é contínua se detém a definição adiante.

Definição 22. *Uma função intervalar $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é contínua em A, se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que*

$$H(X, A) < \delta \textit{ implica } H(F(X), F(A)) < \epsilon,$$

e será denotado por

$$\lim_{X \to A} F(X) = F(A).$$

Consequentemente,

$$F(A) \quad = \quad \left[\min_{0 \le \lambda \le 1} \lim_{X(\lambda) \to A(\lambda)} F(X(\lambda)), \max_{0 \le \lambda \le 1} \lim_{X(\lambda) \to A(\lambda)} F(X(\lambda)) \right],$$

dado que o mínimo e máximo existam, onde $A(\lambda)$ e $X(\lambda)$ são as funções restrições convexas associadas com A e X, respectivamente.

Exemplo 6.3.4. *Seja $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar, definida por $F(X) = [2, 3] \otimes X$, então*

$$\lim_{X \to [1,2]} F(X) = F([1, 2]).$$

De fato, note que $H(X, [1, 2]) < \delta := \frac{\epsilon}{3}$ tem-se que:

$$\begin{aligned} H(F(X), F([1, 2])) &= H([2, 3] \otimes X, [2, 3] \otimes [1, 2]) \\ &= \| [2, 3] \| \, H(X, [1, 2]) \\ &< 3\delta \le \epsilon. \end{aligned}$$

Exemplo 6.3.5. *Seja $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar, definida por $F(X) = [2,3] \otimes X$, então*

$$\lim_{X \to [-1,1]} F(X) = F([-1,1]).$$

De fato, sejam $A(\lambda) = -1\lambda + (1-\lambda)1$ e $C(\lambda) = 2\lambda + (1-\lambda)3$ as funções restrições convexas associadas para $A = [-1,1]$ e $C = [2,3]$, respectivamente, e

$$F(A(\lambda)) = C(\lambda)A(\lambda) = (2\lambda + (1-\lambda)3)(-1\lambda + (1-\lambda)1),$$

a função restrição associada para $F([-1,1])$. Logo,

$$\begin{aligned} F([-1,1]) &= \left[\min_{0\le\lambda\le1}(2\lambda^2 - 7\lambda + 3), \max_{0\le\lambda\le1}(2\lambda^2 - 7\lambda + 3)\right], \\ &= [-2,3]. \end{aligned}$$

Portanto, $F(X)$ é contínua em $[-1,1]$, pois o $\lim_{X\to[-1,1]} F(X) = [-2,3]$ (ver exemplo (6.3.3)).

O conceito de continuidade de função intervalar pode ser caracterizado pela preservação da convergência, como apresenta o próximo teorema.

Teorema 6.3.6. *Sejam F uma função intervalar contínua em X_0 e X_n, uma sequência de intervalos no domínio de F, com $X_n \to X_0$. Então, $F(X_n) \to F(X_0)$.*

Teorema 6.3.7. *Se uma função intervalar F, com domínio D_F, tem a propriedade que $X_n \in D_F$ e $X_n \to X_0 \in D_F$, e $F(X_n) \to F(X_0)$. Então, F é uma função intervalar contínua em X_0.*

Visando exemplificar que a continuidade preserva a convergência, considere os exemplos adiante.

Exemplo 6.3.6. *Seja $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar, dada por: $F(X) = [2,3] \otimes X$. Pelo exemplo (6.3.4), F é uma função intervalar contínua em $[1,2]$. Considere a seguinte sequência $X_n = [1 + 1/n, 2 + 1/n]$, onde $X_n \to [1,2]$ e tem-se que $F(X_n) \to F([1,2])$.*

Exemplo 6.3.7. *Seja $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar, dada por: $F(X) = [2,3] \otimes X$. Pelo exemplo (6.3.5), F é uma função intervalar contínua em $[-1,1]$. Considere a seguinte sequência $X_n = [-1 + 1/n, 1 + 1/n]$, tem-se que $X_n \to [-1,1]$ e tem-se que $F(X_n) \to F([-1,1])$.*

6.4 Diferenciabilidade Intervalar

Está seção é dedicada ao estudo das derivadas de funções intervalares segundo a *single level*. A partir da definição da *single level* derivada, obter-se-ão várias propriedades, tanto no contexto totalmente intervalar, função intervalar, quanto para função de valor intervalar. Para o caso particular, função de valor intervalar, também serão apresentadas as equivalências com os conceitos de derivadas já existentes.

O conceito de *single level* derivada para uma função intervalar é definido a seguir.

Definição 23. *Sejam $X_0 \in \boldsymbol{X} \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})$ e $0 \notin \Theta \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ dois intervalos, tais que $X_0 \oplus \Theta \in \boldsymbol{X}$. Então, a $SL-$derivada de uma função intervalar $F : \boldsymbol{X} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ em X_0 é definida por:*

$$D_{SL}F(X_0) = \lim_{\Theta \to 0} (F(X_0 \oplus \Theta) \ominus F(X_0)) \oslash \Theta. \tag{6.2}$$

Se existe $D_{SL}F(X_0)$ satisfazendo (6.2), então F é single level *diferenciável intervalar (SL-diferenciável) em X_0. Além disso, diz-se que F é* single level *diferenciável intervalar, se F é* single level *diferenciável intervalar para todo intervalo X_0, no domínio da função intervalar.*

Escrevendo $\Theta = X \ominus X_0$, ou $X = X_0 \oplus \Theta$, a *single level* derivada de F no intervalo X_0 torna-se o limite:

$$D_{SL}F(X_0) = \lim_{X \to X_0} (F(X) \ominus F(X_0)) \oslash (X \ominus X_0),$$

neste caso, X_0 é um intervalo de acumulação.

Observação 6.4.1. *Segue das propriedades gerais do limite que $F : \boldsymbol{X} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é SL-derivável no intervalo X_0 se, e somente se, dada qualquer sequência intervalar $X_n \in \boldsymbol{X} - \{X_0\}$ com $\lim X_n = X_0$, tem-se*

$$D_{SL}F(X_0) = \lim_{n \to \infty} (F(X_n) \ominus F(X_0)) \oslash (X_n \ominus X_0).$$

Segundo a *single level*, o cálculo da SL-derivada é obtido da seguinte forma: uma vez que $X_0 = [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ e $\Theta = [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ são intervalos, sejam $X_0(\lambda)$ e $\Theta(\lambda)$ as funções restrições convexas associadas com X_0 e Θ, respectivamente, e

$$F(X_0(\lambda) + \Theta(\lambda)) \text{ e } F(X_0(\lambda))$$

as funções restrições associadas com $F(X_0 \oplus \Theta)$ e $F(X_0)$, respectivamente. Desse modo,

$$F'(X_0(\lambda)) := \lim_{\Theta(\lambda)\to 0} \frac{F(X_0(\lambda) + \Theta(\lambda)) - F(X_0(\lambda))}{\Theta(\lambda)} \tag{6.3}$$

é a função restrição associada ao novo intervalo. Então,

$$D_{SL}F(X_0) = \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1} F'(X_0(\lambda)), \max_{0\leq\lambda\leq 1} F'(X_0(\lambda))\right],$$

dado que o mínimo e máximo existam. Se a função restrição associada ao novo intervalo é contínua em λ, e $\lambda \in [0,1]$, então o mínimo e o máximo existem.

Visando exemplificar o cálculo da *single level* derivada, alguns exemplos serão expostos adiante.

Exemplo 6.4.1. *Seja $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar constante, definida por: $F(X) = A$, onde $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ é um intervalo. Então, $D_{SL}F(X) = [0,0]$. Basta ver que:*

$$\lim_{\Theta\to 0} (A \ominus A) \oslash \Theta = [0,0].$$

Além disso, observe que $F'(X(\lambda))$ é diferenciável para todo $\lambda \in [0,1]$ e $F'(X(\lambda)) = 0$.

Exemplo 6.4.2. *Seja $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar, definida por $F(X) = A \otimes X$, onde $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ é um intervalo. Então, $D_{SL}F(X) = A$.*

De fato, considere que $A(\lambda) = \lambda\underline{a} + (1-\lambda)\overline{a}$, $X(\lambda) = \lambda\underline{x} + (1-\lambda)\overline{x}$ e $\Theta(\lambda) = \lambda\underline{\theta} + (1-\lambda)\overline{\theta}$ são as funções restrições convexas associadas com A, X e Θ, respectivamente, e

$$\begin{aligned} &F(X(\lambda)) = (\lambda\underline{a} + (1-\lambda)\overline{a})(\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\overline{x}) \ \text{e} \\ &F(X(\lambda) + \Theta(\lambda)) = (\lambda\underline{a} + (1-\lambda)\overline{a})\left((\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\overline{x}) + (\lambda\underline{\theta} + (1-\lambda)\overline{\theta})\right) \end{aligned}$$

são as funções restrições associadas com $F(X)$ e $F(X \ominus \Theta)$, respectivamente. Além disso,

$$\frac{F(X(\lambda) + \Theta(\lambda)) - F(X(\lambda))}{\Theta(\lambda)} = (\lambda\underline{a} + (1-\lambda)\overline{a}).$$

Assim,

$$F'(X(\lambda)) = \lim_{\Theta(\lambda)\to 0} (\lambda\underline{a} + (1-\lambda)\overline{a}) = (\lambda\underline{a} + (1-\lambda)\overline{a}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D_{SL}F(X) &= [\min_{0\leq\lambda\leq 1}\{(\lambda\underline{a} + (1-\lambda)\overline{a})\}, \max_{0\leq\lambda\leq 1}\{(\lambda\underline{a} + (1-\lambda)\overline{a})\}], \\ &= [\underline{a}, \overline{a}] = A. \end{aligned}$$

Observação 6.4.2. *A* single level *derivada não implica, que a função restrição associada com a* single level *derivada, $F'(X_0(\lambda))$, seja diferenciável para todo $\lambda \in [0,1]$. Note que $F'(X_0(\lambda))$ é diferenciável para todo $\lambda \in [0,1]$ se, e somente se, $F'_+(X_0(\lambda)) = F'_-(X_0(\lambda))$ para todo $\lambda \in [0,1]$. Essa observação será exemplificada, na próxima subseção, para o caso particular, função de valor intervalar.*

Definição 24. *Seja $F : \boldsymbol{X} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar. Diz-se que F é $\lambda-$*single level *diferenciável em $X_0 \in \boldsymbol{X}$, se a função restrição associada com F for diferenciável em $X_0(\lambda)$ para todo $\lambda \in [0,1]$.*

Teorema 6.4.1. *Seja $F : \boldsymbol{X} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar. Se a função real a ser estendida, F_1,[5] for diferenciável, então F é $\lambda-$*single level *diferenciável.*

Demonstração. Se a função real a ser estendida, F_1, é diferenciável, então $F_1(X(\lambda))$ é diferenciável para todo $\lambda \in [0,1]$. Uma vez que a função restrição associada com F é definida por $F(X(\lambda)) := F_1(X(\lambda))$, segue que essa é diferenciável para todo $\lambda \in [0,1]$. Portanto, F é $\lambda-$*single level* diferenciável. □

Teorema 6.4.2. *Seja $F : \boldsymbol{X} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar. Se F é $\lambda-$*single level *diferenciável em $X_0 \in \boldsymbol{X}$, então, F é* single level *diferenciável em X_0.*

Demonstração. Se F é $\lambda-$*single level* diferenciável em $X_0 \in \mathbf{X}$, então, $F(X_0(\lambda))$ é diferenciável em $X_0(\lambda)$ para todo $\lambda \in [0,1]$. Logo, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$0 < |\Theta(\lambda)| < \delta \Longrightarrow |\frac{F(X_0(\lambda) + \Theta(\lambda)) - F(X_0(\lambda))}{\Theta(\lambda)} - F'(X_0(\lambda))| < \epsilon,$$

para todo $\lambda \in [0,1]$. Portanto,

$$0 < \max_{0 \leq \lambda \leq 1} |\Theta(\lambda)| < \delta \Longrightarrow \max_{0 \leq \lambda \leq 1} |\frac{F(X_0(\lambda) + \Theta(\lambda)) - F(X_0(\lambda))}{\Theta(\lambda)} - F'(X_0(\lambda))| < \epsilon,$$

de onde segue o resultado. □

Observe que, por outro lado, para cada $\lambda \in [0,1]$, $X(\lambda) = (\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\overline{x})$ pode ser expressa pelas variáveis $\underline{x}$ e $\overline{x}$. Assim, $F(X(\lambda))$ é uma função expressa de acordo com $\underline{x}$ e $\overline{x}$, e caracterizada por $X(\lambda)$. Dessa forma, a derivada da função $F(X(\lambda))$ pode ser determinada pelas derivadas parciais em $\underline{x}$ e $\overline{x}$, como mostra o resultado seguinte.

[5]Ver Observação 6.1.1.

Proposição 6.4.1. *Seja F uma função de variável real diferenciável*[6]*. Seja $X(\lambda) = \lambda\underline{x} + (1-\lambda)\overline{x}$ uma função de $\underline{x}$ e $\overline{x}$, para cada $\lambda \in [0,1]$. Então, tem-se que:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}(X(\lambda)) &= F'(X(\lambda))\lambda, \\
\frac{\partial F}{\partial \overline{x}}(X(\lambda)) &= F'(X(\lambda))(1-\lambda).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$F'(X(\lambda)) = \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}(X(\lambda)) + \frac{\partial F}{\partial \overline{x}}(X(\lambda)). \tag{6.4}$$

Demonstração. Está proposição segue, imediatamente, da regra da cadeia usual para composição de funções reais. □

A proposição, anterior, é importante, pois se F é $\lambda-$*single level* diferenciável, então a *single level* derivada de uma função intervalar pode ser expressa pelas derivadas parciais da função restrição associada à função intervalar em questão, como segue:

$$D_{SL}F(X) = \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1}\{\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}(X(\lambda)) + \frac{\partial F}{\partial \overline{x}}(X(\lambda))\}, \max_{0\leq\lambda\leq 1}\{\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}(X(\lambda)) + \frac{\partial F}{\partial \overline{x}}(X(\lambda))\}\right].$$

Exemplo 6.4.3. *Seja $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar, definida por $F(X) = X^2$. Então, $D_{SL}F(X) = 2 \odot X$.*
De fato, $F(X(\lambda)) = X(\lambda)^2$ é a função restrição associada com $F(X)$, onde $f_1(x) = x^2$ é a função real a ser estendida e é diferenciável, assim

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}(X(\lambda)) + \frac{\partial F}{\partial \overline{x}}(X(\lambda)) = 2(\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\overline{x}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
D_{SL}F(X) &= \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1}\{2(\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\overline{x})\}, \max_{0\leq\lambda\leq 1}\{2(\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\overline{x})\}\right], \\
&= [2\underline{x}, 2\overline{x}] = 2 \odot [\underline{x}, \overline{x}] = 2 \odot X.
\end{aligned}$$

Proposição 6.4.2. *Seja $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar, definida por $F(X) = X^n$, tal que $n > 0 \in \mathbb{N}$. Então, $D_{SL}F(X) = n \odot X^{n-1}$.*

Demonstração. Seja $X(\lambda)$ a função restrição convexa associada com X, e $F(X(\lambda)) = X(\lambda)^n$ a função restrição associada com $F(X)$, onde $f_1(x) = x^n$ é a função real a ser

[6] Aqui F é uma função clássica, mais precisamente, F está representando a função real a ser estendida pela função intervalar, como na Observação 6.1.1.

estendida e é diferenciável. Então,

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}(X(\lambda)) + \frac{\partial F}{\partial \overline{x}}(X(\lambda)) \quad = \quad n(\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\overline{x})^{n-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D_{SL}F(X) &= \left[\min_{0 \le \lambda \le 1} \{ n(\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\overline{x})^{n-1} \}, \max_{0 \le \lambda \le 1} \{ n(\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\overline{x})^{n-1} \} \right], \\ &= n \odot X^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Proposição 6.4.3. *Seja $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar. Então,*

1. *Se $F(X) = (1 \oslash X^n)$, então $D_{SL}F(X) = -n \oslash X^{n+1}$.*
2. *Se $F(X) = X^{1/2}$, então $D_{SL}F(X) = 1 \oslash (2 \odot X^{1/2})$.*
3. *Se $F(X) = \operatorname{sen}(X)$, então $D_{SL}F(X) = \cos(X)$ para $X^S < 2\pi$.*
4. *Se $F(X) = \cos(X)$, então $D_{SL}F(X) = -\operatorname{sen}(X)$ para $X^S < 2\pi$.*
5. *Se $F(X) = e^X$, então $D_{SL}F(X) = e^X$.*

Demonstração. Segue, diretamente, da derivada da função restrição associada a cada função intervalar, onde as funções reais a serem estendidas são diferenciáveis, e da Proposição 2.1.1. □

Teorema 6.4.3. *Seja $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar. Se F é SL-diferenciável em X_0, então F é contínua* single level *em X_0.*

Demonstração. Segue, diretamente, da igualdade abaixo

$$F(X) \ominus F(X_0) = ((F(X) \ominus F(X_0)) \otimes (X \ominus X_0)) \oslash (X \ominus X_0)$$

e das propriedades de limite de função intervalar. □

Teorema 6.4.4. *Sejam $F, G : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ funções SL-diferenciáveis e $A \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, então $(A \otimes F), (F \oplus G), (F \otimes G)$ e $F \oslash G$ se $0 \notin G(X)$ são SL-diferenciáveis. Além disso:*

1. *$D_{SL}(A \otimes F)(X) = A \otimes D_{SL}F(X)$.*
2. *$D_{SL}(F \oplus G)(X) = D_{SL}F(X) \oplus D_{SL}G(X)$.*

3. $D_{SL}(F \otimes G)(X) = D_{SL}F(X) \otimes G(X) \oplus F(X) \otimes D_{SL}G(X)$.

4. $D_{SL}(F \oslash G)(X) = (D_{SL}F(X) \otimes G(X) \ominus F(X) \otimes D_{SL}G(X)) \oslash G(X)^2$, *se* $0 \notin G(X)$.

Demonstração. Para o caso (1), tem-se:

$$\begin{aligned} D_{SL}(A \otimes F)(X) &= \lim_{\Theta \to 0}((A \otimes F)(X \oplus \Theta) \ominus (A \otimes F)(X)) \oslash \Theta \\ &= \lim_{\Theta \to 0} A \otimes (F(X \oplus \Theta) \ominus F(X)) \oslash \Theta \\ &= \lim_{\Theta \to 0} A \otimes \lim_{\Theta \to 0}(F(X \oplus \Theta) \ominus F(X)) \oslash \Theta \\ &= A \otimes D_{SL}F(X). \end{aligned}$$

Os demais casos são verificados utilizando as propriedades de limite de função intervalar.[7]

□

Proposição 6.4.4. *A derivada* single level, $D_{SL} : \mathcal{F}(\mathcal{X}; \mathbb{I}(\mathbb{R})) \to \mathcal{F}(\mathcal{Y}; \mathbb{I}(\mathbb{R}))$, *é um operador linear.*

Demonstração. Segue, diretamente, do Teorema 6.4.4. □

As SL-derivadas de ordem superior serão definidas por indução. Sejam $F : \mathbf{X} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar e $X_0 \in \mathbf{X} \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Defina $D^0_{SL}F := F$ e suponha que $k \in \mathbb{N}$ e $D^{k-1}_{SL} : \mathbf{X} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ esteja bem definida. Se

$$D^k_{SL}F(X_0) := D_{SL}\left(D^{k-1}_{SL}F\right)(X_0)$$

existe, diz-se que $D^k_{SL}F(X_0)$ é a k-ésima SL-derivada de F em X_0, e F é k-vezes SL-diferenciável em X_0. Quando $D^k_{SL}F(X_0)$ existe para todo $X \in \mathbf{X}$, $D^k_{SL}F$ é a $k-$ésima SL-derivada de F. Se $D^k_{SL}F$ também é contínua, F é k-vezes continuamente SL-diferenciável. Considere

$$\begin{aligned} C^k_{SL}(\mathbf{X}) &= C^k_{SL}(\mathbf{X}, \mathbb{I}(\mathbb{R})) \\ &:= \{F : \mathbf{X} \to \mathbb{I}(\mathbb{R}) \text{ é } k\text{-vezes continuamente SL-diferenciável}\}. \end{aligned}$$

Além disso, denota-se $C_{SL}(\mathbf{X}, \mathbb{I}(\mathbb{R})) = C^0_{SL}(\mathbf{X}, \mathbb{I}(\mathbb{R}))$.

A seguir, será apresentado o conceito de função intervalar F definida em $\mathbb{I}(\mathbb{R})^n$, $F(X) = F(X_1, X_2, ..., X_n) \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ para cada $X = (X_1, X_2, ...X_n) \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$. Onde,

[7] Observe que a verificação do item (1), apesar de estar expressa na forma intervalar, essa por sua vez, é apenas uma representação, pois pela *single level*, as operações devem ser realizadas com as expressões das componentes e não com as avaliações das componentes.

para cada $X = (X_1, X_2, ...X_n)$ a função restrição convexa associada com X é dada por: $X(\lambda) = (X_1(\lambda), X_2(\lambda), ...X_n(\lambda))$ com $\lambda \in [0, 1]$.

A definição de *single level* derivada parcial é estabelecida a seguir.

Definição 25. *Seja F uma função intervalar definida em $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ e seja $X_0 = (X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0)$ um elemento fixo de $\boldsymbol{X}$. Considere a seguinte função intervalar com variável definida em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$,*

$$H_j(X_j) = F(X_1^0, ..., X_{j-1}^0, X_j, X_{j+1}^0, ..., X_n^0),$$

para $j = 1, 2, ..., n$. Se H_j é SL-diferenciável em X_j^0, então F tem a $j-$ésima SL-derivada parcial em X_0, que será denotada por $\left(\frac{DF}{DX_j}\right)_{SL}(X_0)$. Além disso,

$$\left(\frac{DF}{DX_j}\right)_{SL}(X_0) = D_{SL}H_j(X_j^0).$$

Agora, será definido o conceito de continuamente *single level* diferenciável de uma função intervalar definida em $\mathbf{X} \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$.

Definição 26. *Seja F uma função intervalar definida em $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ e $X_0 = (X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0)$ um elemento fixo de $\boldsymbol{X}$. Diz-se que F é continuamente SL-diferenciável em X_0, se todas as SL-derivadas parciais existem em alguma vizinhança de X_0 e essas são contínuas em X_0.*

Dado uma função intervalar F, o gradiente de F em $X_0 \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ será denotado por $\nabla_{SL}F(X_0)$ e é definido como:

$$\nabla_{SL}F(X_0) = \left(\left(\frac{DF}{DX_1}\right)_{SL}(X_0), ..., \left(\frac{DF}{DX_n}\right)_{SL}(X_0)\right),$$

onde $\left(\frac{DF}{DX_j}\right)_{SL}(X_0)$ é a $j-$ésima SL-derivada parcial de F em X_0. Se F é $\lambda-$*single level* diferenciável, então

$$\left(\frac{DF}{DX_j}\right)_{SL}(X_0) = \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1}\left(\frac{\partial}{\partial X_j(\lambda)}(F(X_0(\lambda)))\right), \max_{0\leq\lambda\leq 1}\left(\frac{\partial}{\partial X_j(\lambda)}(F(X_0(\lambda)))\right)\right],$$

dado que o mínimo e o máximo existam, sendo que $F(X_0(\lambda))$ é a função restrição associada com $F(X_0)$.

Exemplo 6.4.4. *Seja $F : \mathbb{I}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar com duas variáveis intervalares, definida por $F(X, Y) = X \oplus Y$. Então, $\nabla_{SL}F(X) = ([1, 1], [1, 1])$.*

Exemplo 6.4.5. *Seja* $F : \mathbb{I}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *uma função intervalar com duas variáveis intervalares, definida por* $F(X,Y) = X^2 \oplus Y^2$*. Então,* $\nabla_{SL}F(X) = (2 \odot X, 2 \odot Y)$*.*

6.4.1 Função de valor intervalar

No contexto de função de valor intervalar, a definição da *single level* derivada é apresentada abaixo:

Definição 27. *Seja* $x_0 \in\ ]a,b[$ *e* h *tal que* $x_0 + h \in\ ]a,b[$*, então a* $SL-$*derivada de uma função de valor intervalar,* $F :]a,b[\to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *em* x_0*, é definida por:*

$$D_{SL}F(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \odot (F(x_0+h) \ominus F(x_0)). \tag{6.5}$$

Se existe $D_{SL}F(x_0)$ *satisfazendo (6.5), então* F *é* single level *diferenciável (SL-diferenciável) em* x_0*. Além disso, diz-se que* F *é* single level *diferenciável, se* F *é* single level *diferenciável para todo* x_0 *no domínio de* F*.*

As derivadas laterais também podem ser consideradas. A SL-derivada lateral de F pela direita de x_0 é definida por:

$$D_{SL+}F(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \odot (F(x_0+h) \ominus F(x_0)).$$

A SL-derivada lateral pela esquerda é definida por:

$$D_{SL-}F(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \odot (F(x_0+h) \ominus F(x_0)).$$

Deve-se observar que a SL-derivada de F existe em x_0 se, e somente se, as SL-derivadas esquerda e direita em x_0 existem e são iguais.

Observe que a definição de derivada *single level*, também, pode ser escrita da seguinte forma:

$$F(x_0+h) \ominus F(x_0) = h \odot D_{SL}F(x_0) \oplus O(h) \text{ com } h \to 0.$$

Note que $O(h)$ é uma função de valor intervalar definida na vizinhança do zero, tal que $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \odot O(h) = [0,0]$.

Como já foi destacado, o cálculo para determinar a SL-derivada é expresso através da função restrição associada com a derivada. Mais precisamente, sejam $F((x_0+h)(\lambda))$ e $F(x_0(\lambda))$ as funções restrições convexas associadas com $F(x_0+h)$ e $F(x_0)$, respectivamente. Logo,

$$F'(x_0(\lambda)) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(F((x_0 + h)(\lambda)) - F((x_0)(\lambda)) \right) \tag{6.6}$$

é a função restrição (não, necessariamente, convexa) com o novo intervalo. Supondo que a função restrição associada ao novo intervalo é contínua em λ, o resultado é minimizado e maximizado sobre o conjunto compacto $[0,1]$. Desta forma, volta-se para o espaço dos intervalos, como segue:

$$D_{SL}F(x_0) = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} F'(x_0(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} F'(x_0(\lambda)) \right].$$

Observação 6.4.3. *Seja $F : [a,b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função de valor intervalar contínua definida por partes; i.e., que é definido pelas funções de valores intervalares F_i nos intervalos $[a_{i-1}, a_i]$ com $i = 1, ..., n$:*

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x); & x \in [a_0, a_1] \\ F_2(x); & x \in [a_1, a_2] \\ \vdots & \\ F_n(x); & x \in [a_{n-1}, a_n]. \end{cases}$$

A função restrição convexa associada com F é dada por:

$$F(x(\lambda)) = \begin{cases} F_1(x(\lambda)); & x \in [a_0, a_1] \\ F_2(x(\lambda)); & x \in [a_1, a_2] \\ \vdots & \\ F_m(x(\lambda)); & x \in [a_{n-1}, a_n], \end{cases}$$

onde $m \leq n$ e $\lambda \in [0,1]$. Se para algum $i \in \{1, ..., n\}$ existe $F_i(x(\lambda))$, tal que $F_i(x(\lambda))$ gera $F_j(x(\lambda))$, então, considera-se $F_i(x(\lambda))$ para toda $F_j(x(\lambda))$ gerada por esta. A função restrição, associada a qualquer função, é obtida de tal forma que:

$$F(x) = [\min_{0 \leq \lambda \leq 1} F(x(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} F(x(\lambda))].$$

Por exemplo, seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função de valor intervalar dada por:

$$F(x) = \begin{cases} [-x^2, 1] \text{ se } x \leq 0 \\ [x, 1] \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ [1, x] \text{ se } x \geq 1. \end{cases} \quad \text{Logo, } F(x(\lambda)) = \begin{cases} \lambda(-x^2) + (1-\lambda)1 \text{ se } x \leq 0 \\ \lambda x + (1-\lambda)1 \text{ se } 0 \leq x \end{cases}$$

é a função restrição convexa associada com F.

A determinação da *single level* derivada será apresentada considerando os seguintes exemplos:

Exemplo 6.4.6. *Seja $F : [a,b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função de valor intervalar, tal que $F(x) = x \odot A$, onde $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ um intervalo. A função restrição convexa associada com A é dada por: $A(\lambda) = \lambda \underline{a} + (1-\lambda)\overline{a}$, dessa forma,*

$$F(x(\lambda)) = xA(\lambda) \ \text{e}\ F((x+h)(\lambda)) = (x+h)A(\lambda)$$

são as funções restrições associadas com $F(x)$ e $F(x+h)$, respectivamente. Assim,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(F((x+h)(\lambda)) - F(x(\lambda))\right) = \lim_{h\to 0} A(\lambda) = A(\lambda).$$

Portanto,

$$D_{SL}F(x) = \left[\min_{0\le\lambda\le 1} A(\lambda), \max_{0\le\lambda\le 1} A(\lambda)\right] = A.$$

Exemplo 6.4.7. *Seja $F : [a,b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função de valor intervalar, tal que $F(x) = p(x) \odot A$, onde p é uma função real diferenciável e $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ é um intervalo. Considere a função restrição convexa associada com A, $A(\lambda) = \lambda \underline{a} + (1-\lambda)\overline{a}$, dessa forma,*

$$F(x(\lambda)) = p(x)A(\lambda) \ \text{e}\ F((x+h)(\lambda)) = p(x+h)A(\lambda)$$

são as funções restrições convexas associadas com $F(x)$ e $F(x+h)$, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(F((x+h)(\lambda)) - F(x(\lambda))\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(p(x+h) - p(x))A(\lambda), \\ &= p'(x)A(\lambda). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D_{SL}F(x) &= [\min_{0\le\lambda\le 1}\{p'(x)A(\lambda)\}, \max_{0\le\lambda\le 1}\{p'(x)A(\lambda)\}] \\ &= \begin{cases} [\underline{a}p'(x), \overline{a}p'(x)] \ \text{se}\ p'(x) \ge 0 \\ [\overline{a}p'(x), \underline{a}p'(x)] \ \text{se}\ p'(x) < 0 \end{cases} \\ &= p'(x) \odot A. \end{aligned}$$

No enfoque da equivalência entre a C-diferença e a gH-diferença, a diferenciabilidade, via *single level* e generalizada de Hukuhara, de funções de valores intervalares são coincidentes. A vantagem da derivada *single level* é que as operações são mais simples, neste contexto, não é necessário considerar os quatro casos implícitos presentes na definição da gH-diferenciabilidade. A C-diferença trabalha esses quatro casos implicitamente, como apresentaram os dois exemplos anteriores. Consequentemente, a SL-diferenciabilidade é coincidente com todos os conceitos de diferenciabilidade que são equivalentes com a gH-diferenciabilidade[8], por exemplo: G-derivada definida por Bede e Gal (2005), $\pi-$derivada definida em Chalco-Cano, Román-Flores e Jiménez-Gamero (2011) e a derivada de Markov definida em Markov (1979).

O resultado a seguir expressa a SL-derivada em termos das derivadas das funções extremas[9].

Teorema 6.4.5. *Seja $F : [a, b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função de valor intervalar, $F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$, tal que $\underline{f}(x) \leq \overline{f}(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Se $\underline{f}$ e $\overline{f}$ são diferenciáveis em $x_0 \in [a, b]$, então F é SL-diferenciável em x_0 e, além disso,*

$$D_{SL}F(x_0) = \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1} \{\lambda \underline{f}'(x_0) + (1-\lambda)\overline{f}'(x_0)\}, \max_{0\leq\lambda\leq 1} \{\lambda \underline{f}'(x_0) + (1-\lambda)\overline{f}'(x_0)\} \right].$$

Demonstração. Se $\underline{f}$ e $\overline{f}$ são diferenciáveis em x_0, então o limite (6.6) existe e é contínuo em λ; portanto, F é SL-diferenciável em x_0. Além disso, $F(\lambda)(x_0)$ e $F(\lambda)(x_0 + h)$ são as funções restrições convexas associadas com $F(x_0)$ e $F(x_0 + h)$, respectivamente. Assim, o limite (6.6) é dado por:

$$\begin{aligned} F'(x_0)(\lambda) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left((F(\lambda)(x_0 + h) - F(\lambda)(x_0)\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\lambda(\underline{f}(x_0 + h) - \underline{f}(x_0)) + (1-\lambda)(\overline{f}(x_0 + h) - \overline{f}(x_0))\right) \\ &= \lambda \underline{f}'(x_0) + (1-\lambda)\overline{f}'(x_0). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$D_{SL}F(x_0) = \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1} \{\lambda \underline{f}'(x_0) + (1-\lambda)\overline{f}'(x_0)\}, \max_{0\leq\lambda\leq 1} \{\lambda \underline{f}'(x_0) + (1-\lambda)\overline{f}'(x_0)\} \right].$$

□

De acordo com o Teorema 6.4.5, pode-se observar que se $\underline{f}'(x_0) \leq \overline{f}'(x_0)$, então $D_{SL}F(x_0) = [\underline{f}'(x_0), \overline{f}'(x_0)]$. Por outro lado, se $\overline{f}'(x_0) \leq \underline{f}'(x_0)$, então $D_{SL}F(x_0) =$

[8]Discutido no Capítulo 2.

[9]Observe que se as funções extremas são diferenciáveis, consequentemente, a função restrição associada com a função de valor intervalar é obtida através da combinação convexa das funções extremas. Caso as funções extremas não sejam diferenciáveis, a função restrição não é necessariamente a combinação convexa das funções extremas.

$[\overline{f}'(x_0), \underline{f}'(x_0)]$.

O seguinte exemplo ilustra o cálculo da *single level* derivada, quando as funções extremas são diferenciáveis.

Exemplo 6.4.8. *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *uma função de valor intervalar, tal que* $F(x) = [e^{-x}, 2e^{-x}]$. *É fácil ver que:* $F'(x(\lambda)) = e^{-x}(\lambda - 2)$*; i.e.,* $e^{x}(\lambda - 2) = \lambda(e^{-x})' + (1-\lambda)(2e^{-x})'$. *Então,*

$$D_{SL}F(x) = \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1}\{e^{-x}(\lambda-2)\}, \max_{0\leq\lambda\leq 1}\{e^{-x}(\lambda-2)\}\right] = [-2e^{-x}, -e^{-x}].$$

Note que a recíproca do Teorema 6.4.5 não é verdadeira; i.e., a SL-diferenciabilidade de F não implica na diferenciabilidade de $\underline{f}$ e $\overline{f}$.

Exemplo 6.4.9. *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *uma função de valor intervalar, tal que* $F(x) = [- \mid x \mid, \mid x \mid]$. *Neste caso,* F *é SL-diferenciável em* $x_0 = 0$ *e* $D_{SL}F(0) = [-1, 1]$*, todavia suas funções extremas não são diferenciáveis em* $x_0 = 0$ *(ver Figura (13)).*

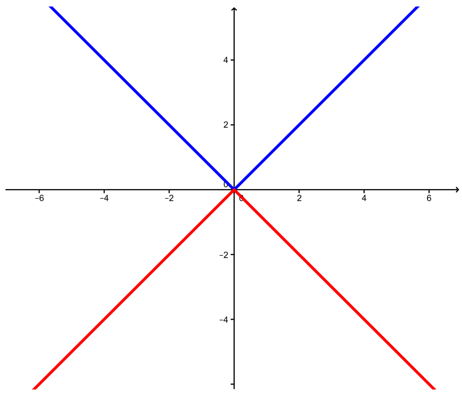


Figura 13: Função de valor intervalar $F(x) = [- \mid x \mid, \mid x \mid]$.

Se a função restrição associada com F, $F(x(\lambda))$, é diferenciável em x_0 para todo $\lambda \in [0, 1]$, como já definido, F é λ-*single level* diferenciável em x_0. Observe que F ser λ-*single level* diferenciável não implica $\underline{f}$ e $\overline{f}$ serem diferenciáveis, como mostram os exemplos a seguir[10].

Exemplo 6.4.10. *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *uma função de valor intervalar, definida por:* $F(x) = [- \mid x \mid, \mid x \mid]$. *A função restrição associada com* F *é* $F(x(\lambda)) = \lambda(-x) + (1-\lambda)x$

[10]Lembrando que a função restrição associada com uma função intervalar é $F(x(\lambda))$ tal que

$$F(x) = [\min_{0\leq\lambda\leq 1} F(x(\lambda)), \max_{0\leq\lambda\leq 1} F(x(\lambda))].$$

e é λ-single level *diferenciável em* $x_0 = 0$. *Todavia,* $\underline{f}$ *e* $\overline{f}$ *não são diferenciáveis em* $x_0 = 0$.

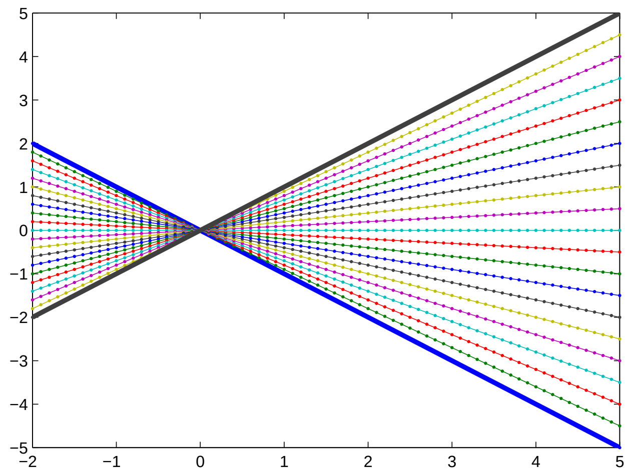


Figura 14: Função restrição associada com $F(x) = [- \mid x \mid, \mid x \mid]$.

Exemplo 6.4.11. *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *uma função de valor intervalar, definida por:*

$$F(x) = \begin{cases} [\operatorname{sen}(x), \cos(x)] & se\ x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ [\cos(x), \operatorname{sen}(x)] & se\ x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \\ [\operatorname{sen}(x), \cos(x)] & se\ x \in [\frac{5\pi}{4}, 2\pi]. \end{cases}$$

Neste caso, $F(x(\lambda)) = \lambda \operatorname{sen}(x) + (1 - \lambda) \cos(x)$ *é* λ-single level *diferenciável para todo* x. *Todavia, as funções extremas associadas com* F *não são diferenciáveis para todo* $x \in [0, 2\pi]$ *(ver Figuras 15 e 16).*

Em particular, pelo Teorema 6.4.2, se $F : [a, b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função de valor intervalar é λ-*single level* diferenciável em $x_0 \in [a, b]$, então F é SL-diferenciável em x_0. Todavia, a recíproca não é verdadeira; i.e., F ser SL-diferenciável não implica que F é λ-*single level* diferenciável.

Exemplo 6.4.12. *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ *uma função de valor intervalar, definida por:* $F(x) = [-|x| - 2, |x|]$. *É fácil ver que* F *é SL-diferenciável em* $x_0 = 0$ *e, além disso,* $D_{SL}F(0) = [-1, 1]$. *A função restrição associada com* F *é dada por:*

$$F(x(\lambda)) = \begin{cases} \lambda(-x) + (1 - \lambda)(x - 2) & se\ x \leq 0; \\ \lambda x + (1 - \lambda)(-x - 2) & se\ x > 0. \end{cases}$$

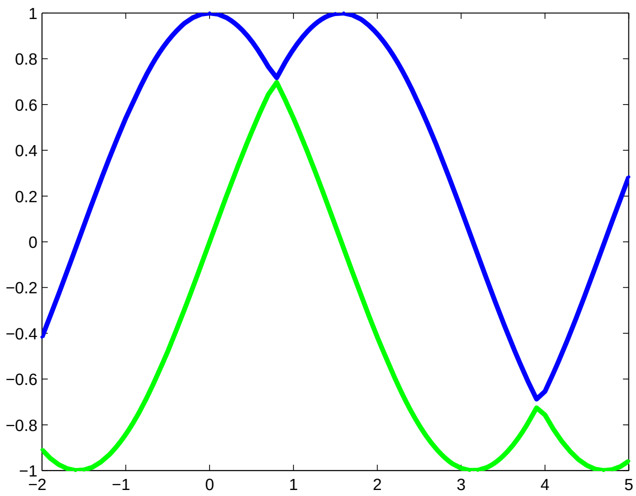


Figura 15: Função de valor intervalar $F(x) = [\text{sen}(x), \cos(x)]$.

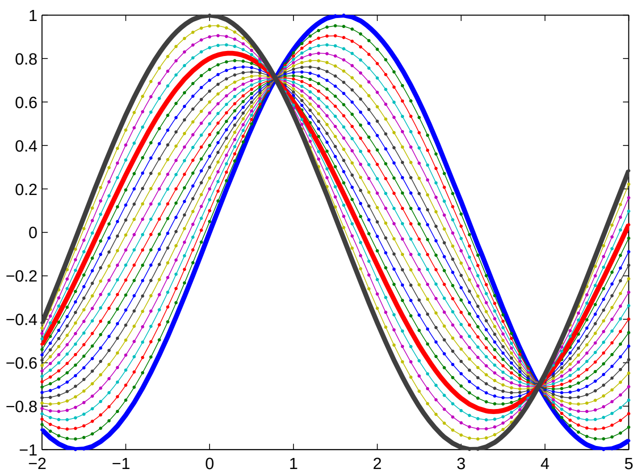


Figura 16: Função restrição associada com $F(x) = [\text{sen}(x), \cos(x)]$.

Note que $F'_-(x(\lambda)) \neq F'_+(x(\lambda))$ *para* $\lambda \in [0,1]$, *tal que* $\lambda \neq \frac{1}{2}$ *em* $x_0 = 0$, *portanto,* F *não é* λ-single level *diferenciável em* $x_0 = 0$.

Se F é uma função da valor intervalar, o gradiente de F em $\mathbf{x}_0$, denotado por $\nabla_{SL}F(\mathbf{x}_0)$, é dado por:

$$\nabla_{SL}F(\mathbf{x}_0) = \left(\left(\frac{DF}{Dx_1}\right)_{SL}(\mathbf{x}_0), ..., \left(\frac{DF}{Dx_n}\right)_{SL}(\mathbf{x}_0) \right),$$

onde $\left(\frac{DF}{Dx_i}\right)_{SL}(\mathbf{x}_0)$ é a $i-$ésima SL-derivada parcial de F em $\mathbf{x}_0$. Note que se $\underline{f}$ e $\overline{f}$ são

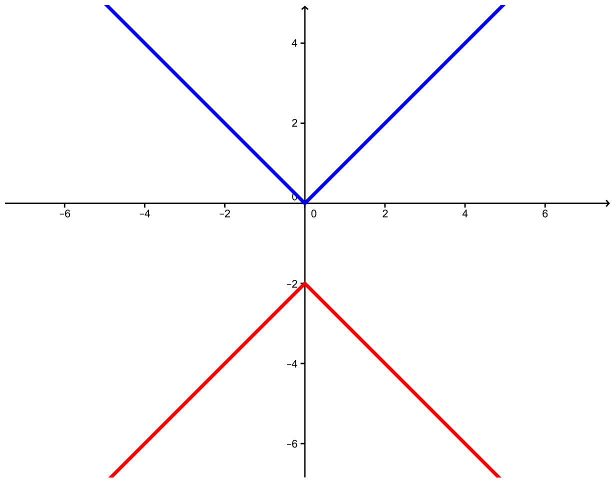


Figura 17: Função de valor intervalar $F(x) = [-|x| - 2, |x|]$.

funções parcialmente diferenciáveis, então

$$\left(\frac{DF}{Dx_i}\right)_{SL}(\mathbf{x}_0) =$$
$$\left[\min_{0\le\lambda\le1}\left(\lambda\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + (1-\lambda)\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\right), \max_{0\le\lambda\le1}\left(\lambda\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + (1-\lambda)\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\right)\right].$$

Exemplo 2. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função de valor intervalar, definida por $F(x_1, x_2) = [-x_1^2 - x_2^2, x_1^2 + x_2^2]$, tal que $(x_1, x_2) \geq \boldsymbol{0}$. Assim, o gradiente de F é*

$$\nabla_{SL}F(x_1, x_2) = ([-2x_1, 2x_1], [-2x_2, 2x_2]).$$

Outro conceito importante, na análise intervalar, é o de integral. Contudo, visando aplicar os conceitos de SL-derivada e integral intervalar nos problemas de controle ótimo, os quais por sua vez, a integração é realizada em t, o estudo de integral intervalar e, posteriormente, de equação diferencial intervalar, serão enfatizados apenas para funções de valor intervalar, como apresentar-se-ão nas próximas seções.

6.5 Integral de valor intervalar

Nesta seção, apresentar-se-á o conceito de integral *single level* para a função de valor intervalar e algumas propriedades de integral.

Definição 28. *Seja $F : [a, b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função de valor intervalar. Diz-se que F é* single level *integrável (SL-integrável) se, e somente se, $F(\lambda)$ é Riemann integrável para todo $\lambda \in [0, 1]$, onde $F(\lambda)$ é a função restrição convexa associada com F.*

A integral *single level* de F em $[a,b]$ é definida com

$$\int_a^b F(x)dx = \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1}\int_a^b F(x(\lambda))dx, \max_{0\leq\lambda\leq 1}\int_a^b F(x(\lambda))dx\right],$$

dado que o mínimo e máximo existam.

Exemplo 3. *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função de valor intervalar definida por:*

$$F(x) = \begin{cases} [1,-x] \; se \; x \leq -1 \\ [1,1] \; se \; -1 < x \leq 1 \\ [1,x] \; se \; x > 1. \end{cases}$$

Dessa forma, a single level *integral é obtida por:*

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 F(x)dx &= \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1}\int_{-2}^2 F(x(\lambda))dx, \max_{0\leq\lambda\leq 1}\int_{-2}^2 F(x(\lambda))(x)dx\right] \\ &= [4,5]. \end{aligned}$$

Tendo em vista que,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 F(x(\lambda))dx &= \int_{-2}^{-1}(\lambda+(1-\lambda)(-x))dx + \int_{-1}^1 1dx + \int_1^2(\lambda+(1-\lambda)x)dx \\ &= -\lambda+5. \end{aligned}$$

Observe que se a função restrição associada com um função de valor intervalar $F(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)];\; \underline{f}(x) \leq \overline{f}(x)$ é dada por $F(x(\lambda)) = \lambda\underline{f}(x) + (1-\lambda)\overline{f}(x)$, então

$$\int_a^b F(x)dx = \left[\int_a^b \underline{f}(x)dx, \int_a^b \overline{f}(x)dx\right].$$

Teorema 6.5.1. *Uma função de valor intervalar contínua $F : [a,b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é SL-integrável.*

Demonstração. Uma função de valor intervalar é contínua, então, sua função restrição é contínua para todo $\lambda \in [0,1]$. Logo, essas são integráveis. $\square$

No próximo teorema, apresenta-se algumas importantes propriedades para as funções de valor intervalar SL-integráveis.

Teorema 6.5.2. *Sejam $F, G : [a,b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ duas funções de valores intervalares SL-integráveis. Então:*

1. *Para $a < c < b$, $F\mid_{[a,c]}$ e $F\mid_{[c,b]}$ são SL-integráveis e se tem*

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^c F(x)dx \oplus \int_c^b F(x)dx.$$

Reciprocamente, se $F\mid_{[a,c]}$ e $F\mid_{[c,b]}$ são SL-integráveis, então F é SL-integrável, e vale a igualdade acima.

2. *Se $F(x) \leq_{LU} G(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b F(x)dx \leq_{LU} \int_a^b G(x)dx.$$

Em particular, se $F(x) \geq_{LU} [0,0]$ para todo $x \in [a,b]$, então,

$$\int_a^b F(x)dx \geq_{LU} [0,0].$$

3. *$\parallel F(x) \parallel$ é SL-integrável e se tem*

$$\parallel \int_a^b F(x)dx \parallel \leq \int_a^b \parallel F(x) \parallel dx.$$

Segue de (2) e (3) que se $\parallel F(x) \parallel \leq K$ para todo $x \in [a,b]$, então

$$\parallel \int_a^b F(x)dx \parallel \leq K(b-a).$$

Demonstração. 1. Como $F : [a,b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é SL-integrável em $[a,b]$, então $F(\lambda)$ é integrável para todo $\lambda \in [0,1]$. Consequentemente, para $a < c < b$, $F(\lambda)\mid_{[a,c]}$ e $F(\lambda)\mid_{[c,b]}$ são integráveis. Portanto, $F\mid_{[a,c]}$ e $F\mid_{[c,b]}$ são integráveis. Para $\lambda \in [0,1]$, tem-se

$$\int_a^b F(x(\lambda))dx = \int_a^c F(x(\lambda))dx + \int_c^b F(x(\lambda))dx.$$

Então, o resultado segue da Proposição 2.1.1. De forma similar, os outros casos podem ser facilmente verificados. □

O conceito de integral pode ser facilmente generalizado para Lebesgue integrável *single level*. Além disso, observe que o conceito de Lebesgue integrável é um caso especial da definição, mais geral, de integral de funções de multi valores (Aumann, 1965), usada na teoria de integração de multi-funções.

Um resultado importante, na análise real, é o teorema fundamental do cálculo, que especifica a relação entre as duas importantes operações de cálculo: a derivada e a integral. Esse resultado também é de fundamental importância na análise intervalar. Neste âmbito, Markov (1979) apresentou uma versão do teorema fundamental do cálculo, pressupondo que F seja uma função de valor intervalar $\mu-$crescente e diferenciável, no sentido de Markov. Por outro lado, considerando a gH-diferença e gH-derivada, Chalco-Cano et al. (2013) provaram esse teorema supondo que a função de valor intervalar é $\mu-$crescente ou $\mu-$decrescente. Além disso, Stefanini e Bede (2009) e Chalco-Cano et al. (2013) apresentaram uma versão do teorema fundamental do cálculo, considerando que a função de valor intervalar não tenha *switching points*.

A próxima subseção mostra que o teorema fundamental do cálculo pode ser estendido para o caso intervalar, sem hipóteses adicionais, considerando a C-diferença e a SL-derivada.

6.5.1 Teorema fundamental do cálculo

Seja $F : [a, b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ SL-integrável. Pelo item (1) do Teorema 6.5.2, para todo $x \in [a, b]$, $F \mid_{[a,x]}$ é SL-integrável. Defina, então, uma função de valor intervalar $\mathcal{F} : [a, b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ por:

$$\mathcal{F}(x) = \int_a^x F(t)dt.$$

Se $\| F(t) \| \leq K$ para todo $t \in [a, b]$, então, dados quaisquer $x, y \in [a, b]$, tem-se:

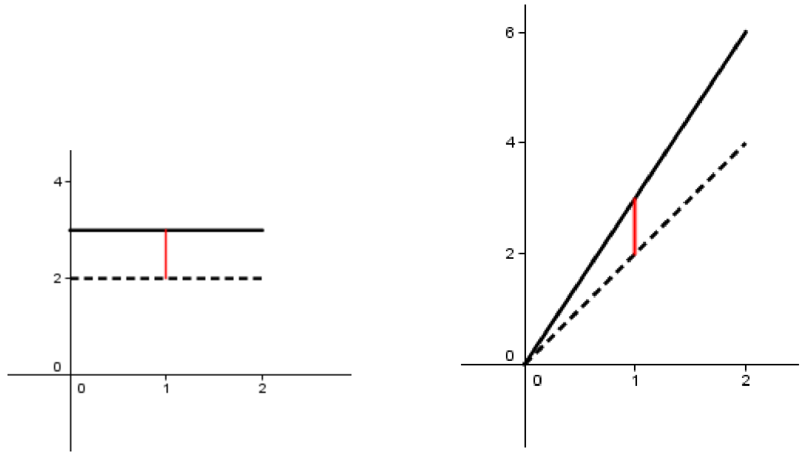
$$\| \mathcal{F}(y) \ominus \mathcal{F}(x) \| = \| \int_x^y F(t)dt \| \leq K|y - x|.$$

Por conseguinte, $\mathcal{F}$ é uniformemente contínua no intervalo $[a, b]$.

Exemplo 4. *Seja $F : [0, 2] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ definida por $F(x) = A$, com $A \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^+$ fixo; i.e., F é uma função de valor intervalar constante. Considerando $\mathcal{F}(x) = \int_0^x F(t)dt$, tem-se $\mathcal{F}(x) = A \odot x$. Supondo que $A = [2, 3]$, tem-se $\mathcal{F}(x) = [2, 3] \odot x$ (ver Figura 18).*

A função $\mathcal{F}(x) = \int_a^x F(t)dt$ será chamada de *integral indefinida de valor intervalar* de F. O processo de passar de F para $\mathcal{F}$ melhora a qualidade da função. Já foi apresentado que F limitada implica $\mathcal{F}$ Lipschitziana. O próximo resultado garante que F contínua implica $\mathcal{F}$ SL-derivável.

Teorema 6.5.3. *Seja $F : [a, b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função de valor intervalar SL-integrável. Se F é contínua no ponto $c \in [a, b]$, então a função de valor intervalar definida por $\mathcal{F}(x) = \int_a^x F(t)dt$ é SL-derivável no ponto $c \in [a, b]$ e se tem $D_{SL}\mathcal{F}(c) = F(c)$.*



(a) Função de valor intervalar. (b) Integral indefinada de valor intervalar.

Figura 18: Gráfico da função F e integral indefinida $\mathcal{F}$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $t \in [a, b]$,

$$|t - c| < \delta \Longrightarrow \| F(t) \ominus F(c) \| < \epsilon.$$

Então, se $0 < h < \delta$ e $c + h \in [a, b]$, tem-se

$$\begin{aligned}
\| \frac{1}{h} \odot (\mathcal{F}(c+h) \ominus \mathcal{F}(c)) \ominus F(c) \| &= \frac{1}{h} \| \int_c^{c+h} (F(x) \ominus F(c))\, dx \| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} \| F(x) \ominus F(c) \| \, dx \\
&< \frac{1}{h} h\epsilon = \epsilon.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $D_{SL+}\mathcal{F}(c) = F(c)$. De modo análogo, se raciocina com h negativo, obtendo-se $D_{SL-}\mathcal{F}(c) = F(c)$, donde $D_{SL}\mathcal{F}(c) = F(c)$. $\square$

Corolário 6.5.1. *Dada $F : [a, b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ contínua, existe $\mathcal{F} : [a, b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ SL-derivável, tal que $D_{SL}\mathcal{F}(x) = F(x)$.*

Demonstração. Basta tomar $\mathcal{F}(x) = \int_a^x F(t)dt$. $\square$

Chama-se *I-primitiva* de uma função de valor intervalar $F : [a, b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ a uma função SL-diferenciável $\mathcal{F} : [a, b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$, tal que $D_{SL}\mathcal{F}(x) = F(x)$. O corolário, acima, diz-se que toda função de valor intervalar contínua, num intervalo compacto, possui I-primitiva. Além disso, se $F : [a, b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ possui uma I-primitiva, então, possui uma infinidade delas. Duas I-primitivas de F em $[a,b]$ diferem por uma constante, pois têm a mesma SL-derivada F. Daí, resulta que se $\mathcal{F} : [a,b] \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é continuamente SL-diferenciável, então

$$\int_a^b D_{SL}\mathcal{F}(x)dx = \mathcal{F}(b) \ominus \mathcal{F}(a).$$

Com efeito, se $D_{SL}\mathcal{F}$ é contínua, pelo Corolário 6.5.1, as funções de valor intervalar $\Phi(x) = \int_a^x D_{SL}\mathcal{F}(t)dt$ e $\mathcal{F}$ são ambas I-primitivas de $D_{SL}F$ em $[a,b]$. Logo $\Phi(x) \ominus \mathcal{F}(x)$ é constante. Como $\Phi(a) = [0,0]$, segue-se que $\Phi(x) \ominus \mathcal{F}(x) = -\mathcal{F}(a)$, logo $\Phi(x) = \mathcal{F}(x) \ominus \mathcal{F}(a)$; i.e.,

$$\int_a^x D_{SL}\mathcal{F}(t)dt = \mathcal{F}(x) \ominus \mathcal{F}(a),$$

para todo $x \in [a,b]$. Tomando $x = b$, obtém-se o resultado desejado.

Teorema 6.5.4. *Se F é continuamente SL-diferenciável no intervalo $[a,b]$, então*

$$\int_a^b D_{SL}F(t)dt = F(b) \ominus F(a).$$

Exemplo 5. *Seja F uma função de valor intervalar definida por:*

$$F(x) = \begin{cases} [\mathrm{sen}(x), \cos(x)] & se\ x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ [\cos(x), \mathrm{sen}(x)] & se\ x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \\ [\mathrm{sen}(x), \cos(x)] & se\ x \in [\frac{5\pi}{4}, 2\pi]. \end{cases}$$

Note que F é continuamente SL-diferenciável em $[0, 2\pi]$ e

$$\int_0^{2\pi} D_{SL}F(x)dx = F(2\pi) \ominus F(0) = [0,0].$$

Nesse caso, a função restrição associada com F é $F(\lambda)(x) = \lambda\mathrm{sen}(x) + (1-\lambda)\cos(x)$ para todo $\lambda \in [0,1]$ e $x \in [0, 2\pi]$.

Exemplo 6. *Seja F uma função de valor intervalar definida por $F(x) = [\frac{x^2}{2}, 1 + \frac{x^2}{2} + 2\mathrm{sen}^2(x)]$. Logo,*

$$D_{SL}F(x) = \begin{cases} [x, x + 4\mathrm{sen}(x)\cos(x)] & se\ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ [x + 4\mathrm{sen}(x)\cos(x), x] & se\ x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ [x, x + 4\mathrm{sen}(x)\cos(x)] & se\ x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}] \\ [x + 4\mathrm{sen}(x)\cos(x), x] & se\ x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$$

é continuamente SL-diferenciável em $[0, 2\pi]$ *e*

$$\int_0^{2\pi} D_{SL}F(x)dx = F(2\pi) \ominus F(0) = [2\pi^2, 2\pi^2].$$

A seguir, será apresentado o conceito de equação diferencial intervalar, segundo a *single level*.

6.6 Equação Diferencial Intervalar

Uma equação diferencial ordinária intervalar (EDOI) é uma relação da forma

$$\widehat{F}(x, Y(x), Y^{(1)}(x), ..., Y^{(k)}(x)) = [0, 0] \tag{6.7}$$

para alguma função desconhecida $Y \in C^k_{SL}(J)$, $J \subset \mathbb{R}$. Aqui $\widehat{F} \in C_{SL}(U)$ com U um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^{k+1}$ e

$$Y^{(k)}(x) = \left(\frac{D^kY(x)}{Dx^k}\right)_{SL}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

são as SL-derivadas ordinárias de Y. Uma solução da EDOI (6.7) é uma função de valor intervalar $\Phi \in C^k_{SL}(I)$, onde $I \subseteq J$ é um intervalo, tal que

$$\widehat{F}(x, \Phi(x), \Phi^{(1)}(x), ..., \Phi^{(k)}(x)) = [0, 0], \text{ para todo } x \in I.$$

Isso implica que $(x, \Phi(x), \Phi^{(1)}(x), ..., \Phi^{(k)}(x)) \in U$ para todo $x \in I$. Suponha que se pode resolver $\widehat{F}$ para a SL-derivada de ordem superior, resultando em uma equação diferencial intervalar da forma

$$Y^{(k)}(x) = F(x, Y(x), Y^{(1)}(x), ..., Y^{(k-1)}(x)).$$

Esse é o tipo de equação diferencial ordinária intervalar que será considerado a partir de agora. Neste seção, será estudado o problema de valor inicial intervalar da forma:

$$\begin{cases} D_{SL}Y(x) = F(x, Y(x)) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \tag{6.8}$$

onde $F : [x_0, x_1] \times \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é uma função contínua, $Y(x) = [\underline{y}(x), \overline{y}(x)]$ e $Y_0 = [\underline{y}_0, \overline{y}_0]$ são intervalos. Esse problema pode ter diferentes interpretações, quando considera-se diferentes conceitos de derivadas. Neste âmbito, o problema (6.8) tem sido explorado considerando a derivada generalizada (Hukuhara generalizada forte e fraca) (Bede e Gal, 2005; Chalco-Cano e Román-Flores, 2008), a gH-derivada (Stefanini e Bede, 2009) ou a π-derivada (Chalco-Cano, Román-Flores e Jiménez-Gamero, 2011). Aqui, o problema (6.8), será analisado considerando a SL-derivada.

O teorema de existência e unicidade é obtido utilizando a formulação de equação integral. Seja $\overline{B}(Y_0, q) \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma bola fechada com centro Y_0 e raio q.

Teorema 6.6.1. *Seja $R_0 = [x_0, x_0+\delta] \times \overline{B}(Y_0, q)$, $Y_0 \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ e $F : R_0 \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ contínua. Se F satisfaz a condição de Lipschitz $\| F(x, Y) \ominus F(x, Z) \| \leq L \| Y \ominus Z \| \ \forall \ (x, Y), \ (x, Z) \in R_0$, então o problema intervalar*

$$\begin{cases} D_{SL}Y = F(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

tem uma única solução de valor intervalar $Y : [x_0, x_0 + r] \to R_0$.

Demonstração. Do teorema fundamental do cálculo, pode-se observar que o problema apresentado é equivalente ao, seguinte, problema

$$Y(x) \ominus Y_0 = \int_{x_0}^{x} F(t, Y(t))dt. \tag{6.9}$$

Desde $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ é uma espaço localmente compacto, tem-se que $\overline{B}(Y_0, q)$ também é compacto. Considere $K_0 = [x_0, x_0 + \delta] \times \overline{B}(Y_0, q)$, compacto, e o operador $P : K_0 \to \overline{B}(Y_0, q)$ como

$$\begin{aligned} P(Y_0)(x) &= Y_0 \\ P(Y)(x) &= Y_0 \oplus \int_{x_0}^{x} F(t, Y(t))dt. \end{aligned}$$

Observe que P está bem definido para todo x, usando o compacidade de K_0, segue que

$$\| P(Y)(x) \ominus Y_0 \| \leq \int_{x_0}^{x} \| F(t, Y(t)) \| \, dt \leq M_1(x - x_0)$$

onde $M_1 = \max_{(x,Y)\in K_0} \| F(x, Y) \|$. Seja $K_1 = C_{SL}([x_0, x_0 + \frac{q}{M_1}], \overline{B}(Y_0, q))$, denota o espaço das funções contínuas $Y : [x_0, x_0 + \frac{q}{M_1}] \to \overline{B}(Y_0, q)$. A estrutura métrica é dada pela distância uniforme $\| Y \ominus Z \| = \max_{x\in[x_0,x_0+\frac{q}{M_1}]} \| Y(x) \ominus Z(x) \|$. É um espaço métrico completo, uma vez que é um subespaço fechado de um espaço métrico completo. Logo, se $Y \in K_1$, então $P(Y) \in K_1$. Além disso,

$$\| P(Y) \ominus P(Z) \| \leq \int_{x_0}^{x} \| F(t, Y(t)) \ominus F(t, Z(t)) \| \, dt \leq L(x - x_0) \| Y \ominus Z \| .$$

Ao considerar-se $r < \min\{\delta, \frac{q}{M_1}, \frac{1}{L}\}$, tem-se que $L(x - x_0) \leq 1$. Então, P será uma contração e pelo teorema do ponto fixo de Banach, têm-se a existência e a unicidade do ponto fixo Y de P. Agora, suponha que Z é uma outra solução. Desde que Z é, necessariamente, uma solução da equação integral (6.9) com solução única Y, tem-se $Z = Y$. □

Considere a função restrição associada com a equação diferencial intervalar (6.8), mais precisamente,

$$\begin{cases} Y'(\lambda)(x) = F(x, Y(\lambda)(x)) \\ Y(\lambda)(x_0) = Y_0(\lambda) \end{cases} \tag{6.10}$$

onde, agora, $F(\lambda) : [x_0, x_1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e Lipschitz contínua na variável $Y(\lambda)$ com $Y(\lambda)(x) = \lambda \underline{y}(x) + (1-\lambda)\overline{y}(x)$ e $Y_0(\lambda) = \lambda \underline{y}_0 + (1-\lambda)\overline{y}_0$ para $\lambda \in [0,1]$. Então, pelo Teorema de existência e unicidade de Picard (Coddington, 1989; Zwillinger, 1998) tem-se que a caracterização da equação diferencial ordinária intervalar possui uma única solução $Y(\lambda) : [x_0, x_1] \to R_0(\lambda)$ para cada $\lambda \in [0,1]$. Supondo que a solução $Y(\lambda)(x)$ é contínua na variável λ para todo x, então o resultado é minimizado e maximizado sobre o conjunto compacto, tal que resultará em um intervalo e, dessa forma, retorna-se ao espaço intervalar. Portanto,

$$Y(x) = \left[\min_{\lambda \in [0,1]} Y(\lambda)(x), \max_{\lambda \in [0,1]} Y(\lambda)(x) \right].$$

A seguir, serão expostos alguns simples exemplos de EDOI que podem ser facilmente resolvidos.

Exemplo 7. *Considere o seguinte problema de valor inicial intervalar*

$$\begin{cases} D_{SL}Y(x) = [1,2] \otimes Y(x) \\ Y(0) = [1,1] \end{cases} \tag{6.11}$$

onde $x \in [0,3]$. Observe que F é contínua e satisfaz a condição de Lipschitz. Denote $Y(x) = [\underline{y}(x), \overline{y}(x)]$, onde $\underline{y}(x)$ e $\overline{y}(x)$ são funções de valores reais. Neste exemplo, o sistema (6.10) é dado por

$$\begin{cases} Y'(\lambda)(x) = (-\lambda + 2) Y(\lambda)(x) \\ Y(\lambda)(0) = 1. \end{cases} \tag{6.12}$$

Para $\lambda \in [0,1]$*, a solução do sistema (6.12) é dada por:*

$$Y(\lambda)(x) = e^{(-\lambda+2)x}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Y(x) &= \left[\min_{\lambda\in[0,1]} e^{(-\lambda+2)x}, \max_{\lambda\in[0,1]} e^{(-\lambda+2)x}\right] \\ &= [e^x, e^{2x}]. \end{aligned}$$

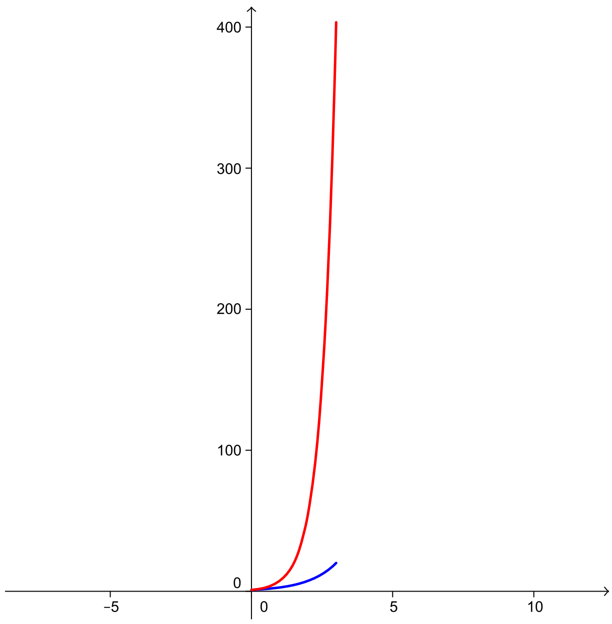


Figura 19: Solução da EDOI (6.11).

Exemplo 8. *Considere o problema de valor inicial intervalar*

$$\begin{cases} D_{SL}Y(x) = (-1)\odot Y(x) \oplus [1,2]\odot x \\ Y(0) = [0,1] \end{cases} \tag{6.13}$$

onde $x \in [0,4]$*. A solução desse problema é dada por:*

$$Y(x) = [x - 1 + e^{-x}, 2x - 2 + 3e^{-x}].$$

A solução segundo Stefanini e Bede (2009) do problema (6.13) é diferente (ver Figura 21). Para este problema, eles determinaram a seguinte solução: $Y(x) = [2x - e^x + 2e^{-x} - 1, x +$

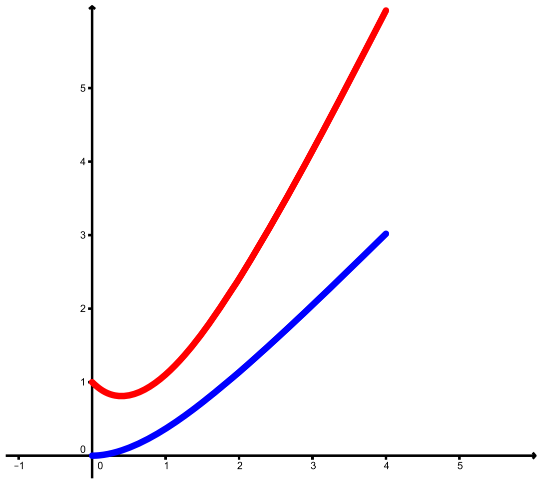


Figura 20: Solução da EDOI (6.13).

$e^x + 2e^{-x} - 2]$.

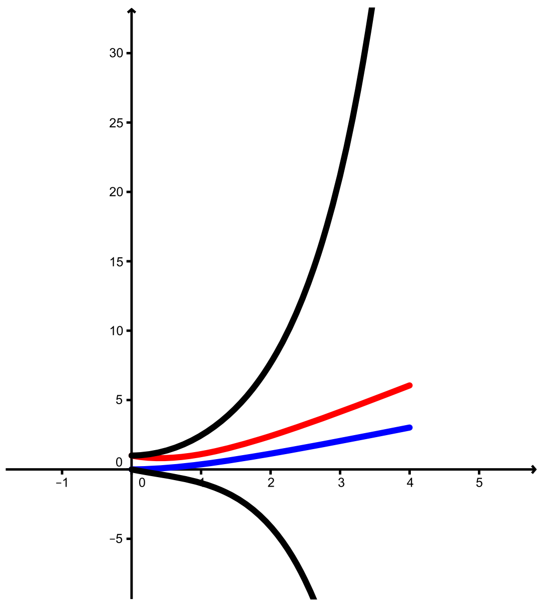


Figura 21: Solução da EDOI (6.13) via *single level* e Stefanini e Bede (2009).

Exemplo 9. *Considere o problema intervalar*

$$\begin{cases} D_{SL}Y(x) = Y(x) \odot \operatorname{sen}(x) \\ Y(0) = [1, 2], \end{cases} \tag{6.14}$$

onde $x \in [0, 6]$. *A solução é* $Y(x) = [e^{1-\cos(x)}, 2e^{1-\cos(x)}]$ *e está ilustrada na Figura 22.*

Exemplo 10. *Seja* $y'(x) = -y(x) + x^2$ *a equação diferencial ordinária com* $x \in [0, 2]$. *Assim, a solução da equação diferencial é* $y(x) = c_1 e^{-x} + x^2 - 2x + 2$. *Considere que*

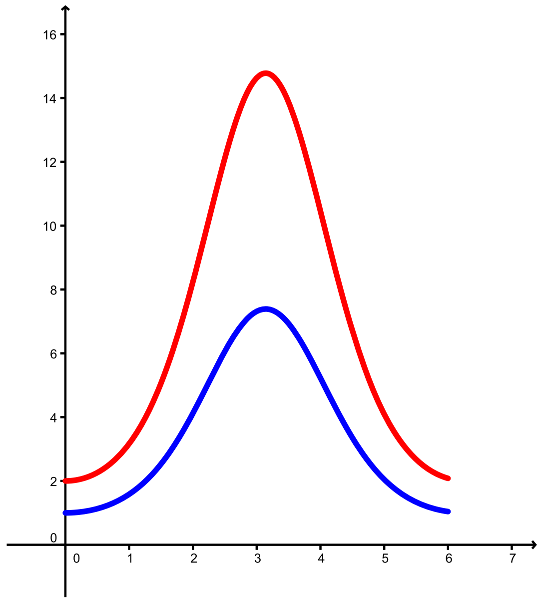


Figura 22: Solução da EDOI (6.14).

$Y(0) = [1; 1,5]$ é a condição inicial intervalar. Então, a solução do problema de valor inicial com condição inicial intervalar é dada por:

$$Y(x) = \left[-e^{-x} + x^2 - 2x + 2, -0.5e^{-x} + x^2 - 2x + 2\right]. \qquad (6.15)$$

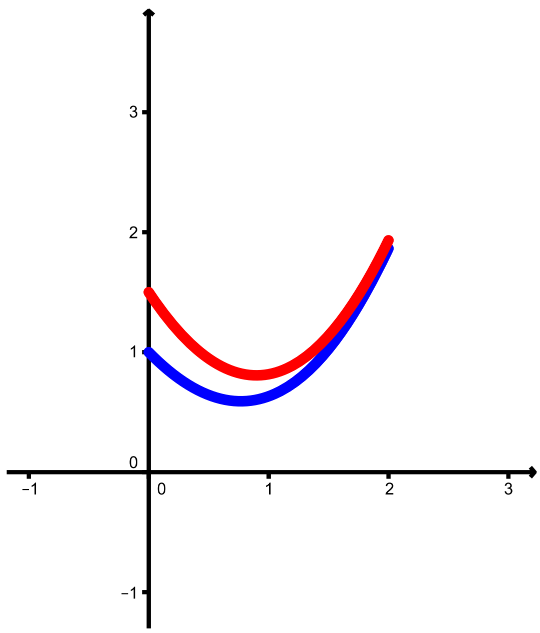


Figura 23: Solução da EDOI (6.15).

6.7 Conclusões

Este capítulo apresentou um arcabouço teórico do cálculo intervalar, segundo a aritmética intervalar restrita *single level*. Foram apresentados os conceitos de limite, de continuidade e de derivada de função no âmbito totalmente intervalar, segundo a *single level*. Esses resultados são meritórios, pois trata-se de uma nova abordagem, mais ampla, do conceito de função. Além disso, para os tópicos de integral intervalar e para equação diferencial intervalar, um estudo detalhado foi apresentado, considerando a função de valor intervalar. No contexto de integral e de derivada *single level*, para funções de valores intervalar, foi proposto o teorema fundamental do cálculo, resultado esse que não era possível obter considerando outras aritméticas, a não ser que algumas hipóteses adicionais sejam pressupostas. Esses conceitos foram aplicados na determinação de solução para os problemas de valor inicial intervalar e, também, obteve-se o teorema de existência e unicidade. Neste âmbito, vários exemplos foram apresentados, visando descrever o processo de determinação das soluções considerando as operações *single level*.

CAPÍTULO 7

CONTROLE ÓTIMO VIA *SINGLE LEVEL*

Neste capítulo, será feito uma breve apresentação dos problemas de controle ótimo totalmente intervalares. Além disso, o problema de controle ótimo intervalar será estudado sob a hipótese de convexidade, a suficiência e necessidade para otimalidade de um conjunto particular de condições serão obtidas. Para tal propósito, em todo o desenvolvimento deste capítulo utilizar-se-á a derivada λ-*single level*. Dessa forma, a análise conduzida, neste capítulo, utiliza argumentos elementares, devido ao fato de considerar a convexidade da função de Hamilton e, também, funções $\lambda-$*single level* diferenciáveis.

Com intuito de propor uma abordagem para resolver os problemas de controle ótimo intervalar, utilizando a *single level*, primeiramente, será apresentada a formalização do problema, no contexto totalmente intervalar. Em um problema de controle intervalar, uma *variável de estado intervalar* $X(t) \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ dependente do tempo e evolui de acordo com uma dada dinâmica incerta

$$D_{SL}X(t) = F(t, X(t), U(t)), \quad t > t_0, \tag{7.1}$$

a partir de um estado inicial incerto $X(t_0) = X_0$. Aqui $F : \mathbb{R} \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^m \to \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ corresponde ao modelo estudado, $X_0 \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ é o estado inicial intervalar do sistema e $U : \mathbb{R} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})^m$ é um parâmetro de valor intervalar livre influenciando a dinâmica incerta, denominado *controle intervalar* do sistema. A equação (7.1) é denominada de *equação de estado intervalar*.

Para os problemas de controle ótimo intervalar, considerados neste capítulo, a tarefa que se impõe é a de minimizar o funcional intervalar do tipo

$$I(X,U) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, X(t), U(t))dt,$$

com $L : \mathbb{R} \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^m \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ e as variáveis de valor intervalar X e U estão relacionadas pela dinâmica $D_{SL}X(t) = F(t, X(t), U(t)),\ \ t \in (t_0, t_1)$ e, ainda, $X(t_0) = X_0$ e $U \in \mathcal{U}_{ad}$.

O conjunto $\mathcal{U}_{ad}$ é denominado *conjunto de controles admissíveis intervalar* e é escolhido como subconjunto de $\widehat{C}_{SL}([t_0, t_1]; \mathbb{I}(\mathbb{R})^m)$[1]. Note que diferentes escolhas de $\mathcal{U}_{ad}$ implicarão em diferentes graus de regularidade de X e também determinam o conceito que deve ser utilizado para definir a solução do problema de valor inicial intervalar em (7.1).

O *conjunto de trajetórias admissíveis intervalares* é dado por[2][3]:

$$\mathcal{X}_{ad} = \{X \in \widehat{C}^1_{SL}([t_0, t_1]; \mathbb{I}(\mathbb{R})^n); D_{SL}X(t) = F(t, X(t), U(t)),\ \ X(t_0) = X_0,\ \ U \in \mathcal{U}_{ad}\}.$$

Os candidatos à solução do problema de otimização intervalar são os processos intervalares admissíveis $(X, U) \in \mathcal{X}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}$.

O problema de controle ótimo intervalar descrito pode ser formulado da seguinte

[1] Será considerado o seguinte:
$Y \in \widehat{C}_{SL}([t_0, t_1]; \mathbb{I}(\mathbb{R})^n)$ se, e somente se, $Y(\lambda) \in \widehat{C}([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. Onde, uma função $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ é denominada *contínua por partes*, nota-se $y \in \widehat{C}([t_0, t_1]; \mathbb{R})$, quando existe uma partição $t_0 = x_0 < .... < x_{n+1} = t_1$, tal que para todo $i = 0, ..., n$, a restrição $y\mid_{(x_i, x_{i+1})}$ possui uma extensão contínua no intervalo $[t_0, t_1]$.

[2] $X \in \widehat{C}^1_{SL}([t_0, t_1]; \mathbb{I}(\mathbb{R})^n)$ se, e somente se, $X(\lambda) \in \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. Onde, uma função $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ é denominada *continuamente diferenciável por partes*, nota-se $y \in \widehat{C}^1([t_0, t_1]; \mathbb{R})$, quando existe uma partição $t_0 = x_0 < .... < x_{n+1} = t_1$, tal que para todo $i = 0, ..., n$, a restrição $y\mid_{(x_i, x_{i+1})}$ possui uma extensão continuamente diferenciável ao intervalo $[t_0, t_1]$.

[3] A seguir é apresentado uma versão do teorema fundamental do cálculo.
Seja $Y \in \widehat{C}^1_{SL}([t_0, t_1]; \mathbb{I}(\mathbb{R}))$. Então vale a identidade

$$Y(t) \ominus Y(t_0) = \int_{t_0}^{t} D_{SL}Y(s)ds,\ \ t \in [t_0, t_1].$$

Uma vez que a derivada em questão é a λ-*single level* e para todo λ este resultado é válido, ver Baumeister e Leitão (2008, pag.157,Lema 142), então, pela Proposição 2.1.1 segue o resultado.

forma:

$$\begin{aligned}
&\min \quad I(X,U) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, X(t), U(t))dt \\
&\text{sujeito a:} \quad U \in \mathcal{U}_{ad} \\
&D_{SL}X(t) = F(t, X(t), U(t)), \;\; t \in (t_0, t_1) \\
&X(t_0) = X_0.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Uma vez que o problema de controle ótimo já está bem formulado, o próximo passo é a interpretação do conceito de solução do problema. O conceito de solução será definido a partir da relação de ordem parcial para o espaço intervalar, assim como definido para os problemas de valor intervalar. A relação de ordem utilizada será a *single level*, e como apresentado, essa relação é equivalente com a LU. Considerando a relação de ordem *single level* o conceito de solução para o problema de controle ótimo intervalar é dado a seguir.

Definição 29. *Seja* $(\widehat{X}, \widehat{U})$ *um processo admissível do problema (7.2); i.e.,* $(\widehat{X}, \widehat{U}) \in \mathcal{X}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}$. *Diz que,* $(\widehat{X}, \widehat{U})$ *é uma* single level *solução ótima do problema (7.2), se não existe* $(X, U) \in \mathcal{X}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}$, *tal que* $I(X, U) \prec I(\widehat{X}, \widehat{U})$.

Utilizando a aritmética intervalar restrita *single level*, o problema algébrico de controle ótimo intervalar será considerado como um problema algébrico de funções. No espaço das funções, o problema será resolvido e a solução será mapeada de volta ao espaço dos intervalos através de dois problemas de otimização global restrita. Tal procedimento será apresentado, a seguir, para o problema de minimização, consequentemente, resultados análogos são válidos para os problemas de maximização, devido a equivalência entre esse dois problemas com a relação de ordem que está sendo considerada.

7.1 Processo de resolução *single level*

Considere o problema de controle ótimo irrestrito intervalar (7.2), segundo a aritmética intervalar restrita *single level*, todos os intervalos devem ser redefinidos por funções de valores reais restrita de mesma variável, definida sobre o conjunto compacto $[0, 1]$. Dessa forma, o problema restrição (subproblema) associado ao problema intervalar (7.2) é o seguinte[4]:

$$
\begin{aligned}
&\min \;\; I(X(\lambda),U(\lambda)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,X(\lambda)(t),U(\lambda)(t))dt \\
&\text{sujeito a:} \;\; U(\lambda) \in U_{ad} \\
&X(\lambda)'(t) = F(t,X(\lambda)(t),U(\lambda)(t)), \;\; t \in (t_0,t_1) \\
&X(\lambda)(t_0) = X_0(\lambda),
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

onde $U(\lambda)(t)$, $X(\lambda)(t)$ e $X_0(\lambda)$ são as funções restrição convexas associadas com $U(t)$, $X(t)$ e $X(t_0)$, respectivamente. Além disso, $L(t,X(\lambda)(t),U(\lambda)(t))$ e $F(t,X(\lambda)(t),U(\lambda)(t))$ são funções restrições associadas com $L(t,X(t),U(t))$ e $F(t,X(t),U(t))$, respectivamente. O conjunto dos processos ótimos do subproblema será denotado por[5]:

$$\widehat{X}_\lambda \times \widehat{U}_\lambda := \{(\widehat{X}(\lambda),\widehat{U}(\lambda)) \in X_{ad} \times U_{ad}; \;\; (\widehat{X}(\lambda),\widehat{U}(\lambda)) = \arg \min_{(\widehat{X}(\lambda),\widehat{U}(\lambda)) \in X_{ad}\times U_{ad}} I(\widehat{X}(\lambda),\widehat{U}(\lambda))\}.$$

Os elementos de $\widehat{X}_\lambda \times \widehat{U}_\lambda$ são dados em função da variável λ, dessa forma, o conjunto do processo ótimo via a abordagem *single level* é obtido por:

$$(\widehat{X} \times \widehat{U})_{SL} = \left[\min_{0\le\lambda\le1} \widehat{X}_\lambda \times \widehat{U}_\lambda, \max_{0\le\lambda\le1} \widehat{X}_\lambda \times \widehat{U}_\lambda \right],$$

desde que o mínimo e máximo existam.

O processo ótimo obtido pela abordagem *single level* é equivalente com a solução *single level* do problema intervalar. Com efeito, seja $(\widehat{X},\widehat{U})$ solução intervalar *single level* do problema (7.2) e suponha que $(\widehat{X},\widehat{U})$ não é um processo ótimo via abordagem *single level*. Então existe $(X(\lambda),U(\lambda))$ admissível, tal que

$$I(X(\lambda),U(\lambda)) < I(\widehat{X}(\lambda),\widehat{U}(\lambda)),$$

para cada $\lambda \in [0,1]$, contradizendo o fato que $(\widehat{X},\widehat{U})$ ser *single level* solução intervalar do problema (7.2). Reciprocamente, seja $(\widehat{X},\widehat{U})$ processo ótimo via abordagem *single level* e suponha que $(\widehat{X},\widehat{U})$ não é *single level* solução intervalar do problema (7.2), então existe (X,U), tal que

$$I(X,U) \prec I(\widehat{X},\widehat{U}).$$

Portanto, $I(X(\lambda),U(\lambda)) < I(\widehat{X}(\lambda),\widehat{U}(\lambda))$ para cada $\lambda \in [0,1]$ e $I(X,U) \neq I(\widehat{X},\widehat{U})$, contradizendo o fato que $(\widehat{X},\widehat{U})$ é processo ótimo via abordagem *single level*.

[4]Aqui, $U_{ad} := \widehat{C}([t_0,t_1];\mathbb{R}^m)$.

[5]Note que, $X_{ad} := \{x \in \widehat{C}^1([t_0,t_1];\mathbb{R}^n); \;\; x'(t) = f(t,x,u), \;\; x(t_0) = x_0, \;\; u \in U_{ad}\}$.

O conceito de solução local também pode ser estabelecido, aqui, esse conceito será caracterizado da seguinte forma: $(\widehat{X}, \widehat{U})$ é denominado um processo ótimo *single level local fraco* do problema intervalar se, e somente se, $(\widehat{X}(\lambda), \widehat{U}(\lambda))$ é um processo ótimo local fraco do subproblema [6].

Visando exemplificar o processo de determinação do conjunto de soluções *single level* do problema intervalar, primeiramente, será exposto a determinação do conjunto de soluções *single level*, considerando o problema particular, de valor intervalar.

7.1.1 Problema de valor intervalar

Considere o problema de controle ótimo irrestrito onde apenas a função objetivo é de valor intervalar. Neste caso, $L : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ onde $L(t,x,u) = [\underline{l}(t,x,u), \overline{l}(t,x,u)]$ tal que $\underline{l}(t,x,u) \leq \overline{l}(t,x,u)$ para todo (t,x,u) é a função objetivo de valor intervalar e

$$I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt = \left[\int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(t,x,u)dt, \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(t,x,u)dt\right].$$

Assim, $L(\lambda) : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ onde $L(\lambda)(t,x,u) = \lambda\underline{l}(t,x,u) + (1-\lambda)\overline{l}(t,x,u)$, com $\lambda \in [0,1]$, é a função restrição convexa associada a L. Dessa forma,

$$\begin{aligned} I(\lambda)(x,u) &= \int_{t_0}^{t_1} L(\lambda)(t,x(t),u(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} \lambda\underline{l}(t,x,u)dt + \int_{t_0}^{t_1} (1-\lambda)\underline{l}(t,x,u)dt \\ &= \lambda \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(t,x,u)dt + (1-\lambda) \int_{t_0}^{t_1} \underline{l}(t,x,u)dt \\ &= \lambda\underline{I}(x,u) + (1-\lambda)\overline{I}(x,u). \end{aligned}$$

Neste contexto, o subproblema associado ao problema de controle ótimo onde apenas a função objetivo é de valor intervalar é o seguinte:

$$\begin{aligned} &\min I(\lambda)(x,u) = \lambda\underline{I}(x,u) + (1-\lambda)\overline{I}(x,u) \\ &\text{sujeito a: } x \in \widehat{C}^1([t_0,t_1];\mathbb{R}^n); u \in \widehat{C}([t_0,t_1];\mathbb{R}^m) \\ &x'(t) = f(t,x(t),u(t)), \ \ t \in (t_0,t_1) \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned}$$

[6] Os conjuntos $\widehat{C}([t_0,t_1];\mathbb{R})$ e $\widehat{C}^1([t_0,t_1];\mathbb{R})$ são espaços vetoriais (normalisáveis) sobre $\mathbb{R}$. Como $\widehat{C}^1([t_0,t_1];\mathbb{R}) \subset \widehat{C}([t_0,t_1];\mathbb{R})$, então $\| \cdot \|_\infty$ define uma norma em $\widehat{C}^1([t_0,t_1];\mathbb{R})$, entretanto, de especial interesse para este espaço é a norma definida por

$$\| y \|_{1,\infty} := \max_{t \in [t_0,t_1]} |y(t)| + \max_{t \in [t_0,t_1]} |y'(t)|.$$

O conjunto dos processos ótimos do problema do subproblema será denotado por:

$$\widehat{X}_\lambda \times \widehat{U}_\lambda := \{(\widehat{x}, \widehat{u}) \in X_{ad} \times U_{ad}; (\widehat{x}, \widehat{u}) := \arg \min_{(x,u) \in X_{ad} \times U_{ad}} I(\lambda)(x,u)\}.$$

Portanto, o conjunto dos processo ótimos do problema em questão será dado por:

$$\left(\widehat{X} \times \widehat{U}\right)_{SL} := \left[\min_{\lambda \in [0,1]} \widehat{X}_\lambda \times \widehat{U}_\lambda, \max_{\lambda \in [0,1]} \widehat{X}_\lambda \times \widehat{U}_\lambda\right],$$

desde que o mínimo e máximo existam.

A seguir, essa metodologia será exemplificada considerando uma classe especial dos problemas de controle ótimo intervalar, os problemas quadrático linear. Para esse desenvolvimento, considerar-se-ão as seguintes notações: sejam $[\mathbf{A}]$ uma matriz intervalar e $[B]$ um vetor intervalar qualquer, assim:

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{A}] = [a_{ij}]; \quad [a_{ij}] = \{a_{ij}; \ \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij}\},\\
&[B] = [b_i]; \quad [b_i] = \{b_i; \ \underline{b}_i \leq b_i \leq \overline{b}_i\},\\
&\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \underline{b}_i, \overline{b}_i \in \mathbb{R}, \ \ i = 1, ..., m \text{ e } j = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

As funções restrições associadas para $[\mathbf{A}]$ e $[B]$, respectivamente, serão denotadas por:

$$\begin{aligned}
A(\Lambda) &= \overline{A} + W_A \Lambda,\\
B(\lambda) &= \overline{b} + w_b \lambda,
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= (\overline{a}_{ij}) \text{ é o valor direito da matriz intervalar } [\mathbf{A}],\\
W_A &= (\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}) \text{ é a matriz de largura da componente de } [\mathbf{A}],\\
\Lambda & \quad \text{ é a matriz dos lambdas } \lambda \in [0,1],\\
\overline{b} &= (\overline{b}_i) \text{ é o valor direito do vetor intervalar } [B],\\
w_b &= (\overline{b}_i - \underline{b}_i) \text{ é o vetor de largura da componente de } [B],\\
\lambda & \quad \text{ é o vetor dos lambdas } \lambda \in [0,1].
\end{aligned}$$

Primeiramente, serão caracterizados os conceitos de simetria e definida positiva para matrizes intervalares, via *single level*, como segue:

Definição 30. *Uma matriz intervalar* $[\boldsymbol{A}]$ *é simétrica via* single level*, se para cada* $\lambda \in$

$[0,1]$,

$$a_{ij}(\lambda) = a_{ji}(\lambda) \text{ para } i \neq j,$$

onde $a_{ij}(\lambda)$ e $a_{ji}(\lambda)$ são as funções restrições convexas associadas aos intervalos $[a_{ij}]$ e $[a_{ji}]$, respectivamente.

Definição 31. *Uma matriz intervalar $[\boldsymbol{A}]$ é definida positiva via* single level*, se para cada $\lambda \in [0,1]$, tem-se que:*

$$y^T(\overline{A} + W_A\lambda)y > 0 \ \ \forall \ y \in \mathbb{R}^n; y \neq 0.$$

Permitindo a igualdade na inequação acima, dizemos que $[\boldsymbol{A}]$ é semi-definida positiva.

Exemplo 7.1.1. *Considere a matriz intervalar dada por:*

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{pmatrix} [3,4] & [0,1] \\ [0,1] & [3,4] \end{pmatrix}.$$

A matriz intervalar $[\boldsymbol{A}]$ é simétrica, pois a matriz de função restrição associada para $[\boldsymbol{A}]$ é dada por

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 4+\lambda & 1+\lambda \\ 1+\lambda & 4+\lambda \end{pmatrix}.$$

Para cada $\lambda \in [0,1]$, tem-se que $a_{21}(\lambda) = 1 + \lambda = a_{21}(\lambda)$. Além disso, $[\boldsymbol{A}]$ é definida positiva, pois $y^T A(\lambda)y > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^2, y \neq 0$ e para cada $\lambda \in [0,1]$.

Considere o problema de controle ótimo quadrático linear com a função objetivo de valor intervalar:

$$\begin{aligned}
&\min \ \ I(x,u) = \frac{1}{2} \odot \int_0^1 (x^T(t) \odot [\mathbf{Q}] \odot x(t) + u^T(t) \odot [\mathbf{R}] \odot u(t))dt \\
&\text{sujeito a:} \\
&x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\
&x(0) = \mathbf{x}_0,
\end{aligned} \tag{7.4}$$

onde $[\mathbf{Q}]$ e $[\mathbf{R}]$ são matrizes intervalares simétricas, semi-definida positiva e definida positiva, respectivamente. Uma vez que a função objetivo de valor intervalar possui matrizes intervalares, sua função restrição é dada através das funções restrições associadas as matrizes intervalares dessa função. Associado ao problema em questão, tem-se o seguinte subproblema:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad I(\lambda)(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^T(t)Q(\lambda)x(t) + u^T(t)R(\lambda)u(t))dt \\
&\text{sujeito a:} \\
&x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\
&x(0) = \mathbf{x}_0.
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Por sua vez, para cada λ no conjunto compacto $[0,1]$, as funções restrições convexas $Q(\lambda)$ e $R(\lambda)$ são matrizes reais e, além disso, são simétricas semi-definida positiva e definida positiva[7], respectivamente. Assim, o conjunto dos processos ótimos do subproblema é dado pelos processos $(x(t),u(t)) \in \widehat{X}_\lambda \times \widehat{U}_\lambda$, que resolvem o sistema a seguir:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= Ax(t) - B(R(\lambda))^{-1}B^T p(t), \\
p'(t) &= -(Q(\lambda))x(t) - A^T p(t), \\
x(0) &= \mathbf{x}_0(\lambda) \text{ e } p(1) = 0 \text{ para todo } \lambda \in [0,1],
\end{aligned}
$$

sendo que $u(t) = -(R(\lambda))^{-1}B^T p(t)$ e $p \in \widehat{C}^1([t_0,t_1];\mathbb{R}^m)$ é a variável de co-estado do problema[8].

Considere o seguinte problema de controle ótimo com função objetivo de valor intervalar:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad I(x,u) = \frac{1}{2} \odot \int_0^1 (x(t) \odot [0,9;1,1] \odot x(t) + u(t) \odot [0,9;1,1] \odot u(t))dt \\
&\text{sujeito a:} \\
&x'(t) = u(t) \\
&x(0) = 1.
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

Neste caso, tem-se as seguintes funções restrição convexas $Q(\lambda) = 1.1 + 0.2\lambda$ e $R(\lambda) = 1.1+0.2\lambda$ associadas com $Q = [0,9;1,1]$ e $R = [0,9;1,1]$, respectivamente. O subproblema

[7] As condições necessárias de otimalidade, associadas ao princípio do máximo de Pontryagin, passam a ser suficientes com $R>0$.

[8] Observe que a variável de co-estado dependerá de λ.

associado ao problema (7.6) é dado por:

$$\begin{aligned}
&\min \ \frac{1}{2}\int_0^1 (1,1+0,2\lambda)(x^2(t)+u^2(t))dt \\
&\text{sujeito a:} \\
&x'(t) = u(t) \\
&x(0) = 1.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

A função de Hamilton associada ao subproblema é a seguinte:

$$H(\lambda)(x,u,p,t) = \frac{1}{2}(1,1+0,2\lambda)(x^2(t)+u^2(t)) + p(t)u(t).$$

Logo, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
&x'(t) = u(t) \\
&p'(t) = (1,1+0,2\lambda)x(t), \\
&p'(1) = 0 \text{ e } x(0) = 1,
\end{aligned}$$

com $u(t) = -\frac{p(t)}{(1,1+0,2\lambda)}$ para todos os níveis de λ. Sem perda de generalidade, considere $q = 1,1+0,2\lambda$, assim as soluções de estado e controle do subproblema são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
\widehat{x}(t) &= \frac{1}{2}e^{-t}(1+e^{2t}) + \frac{e^{-t}(-1+e^{2t})}{2}\frac{-(-1+e^2)}{(1+e^2)}, \\
\widehat{u}(t) &= \frac{1}{2}e^{-t}(-1+e^{2t}) + \frac{1}{2}e^{-t}(1+e^{2t})\frac{-(-1+e^2)}{(1+e^2)}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, o *single level* processo ótimo do problema (7.6) é composto por:

$$\begin{aligned}
\widehat{x}(t) &= \frac{1}{2}e^{-t}(1+e^{2t}) + \frac{e^{-t}(-1+e^{2t})}{2}\frac{-(-1+e^2)}{(1+e^2)}, \\
\widehat{u}(t) &= \frac{1}{2}e^{-t}(-1+e^{2t}) + \frac{1}{2}e^{-t}(1+e^{2t})\frac{-(-1+e^2)}{(1+e^2)}.
\end{aligned}$$

Observe que para cada $\lambda \in [0,1]$, a função de Hamilton é estritamente convexa e o subproblema possui a mesma solução para todo $\lambda \in [0,1]$, justificando o fato do problema de valor intervalar apresentar a solução de estado e de controle determinística.

As Figuras 24 e 25 apresentam os gráficos das equações de controle e estado, respectivamente, do problema de valor intervalar em questão. Consequentemente, essas figuras apresentam o processo *single level* ótimo do problema intervalar (7.6). Já a Figura 26 apresenta o gráfico da função objetivo de valor intervalar, obtido a partir dos processos ótimo do problema (7.6). Além disso, qualquer função objetivo clássica extraída, desde que extraída sempre no mesmo nível, dessa função objetivo de valor intervalar, possuirá sua função ótima contida na função objetivo *single level* ótima.

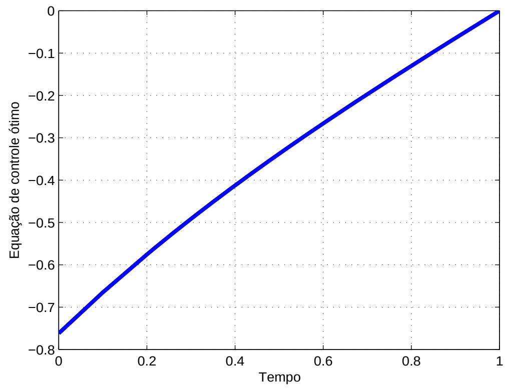


Figura 24: Controle ótimo via *single level*.

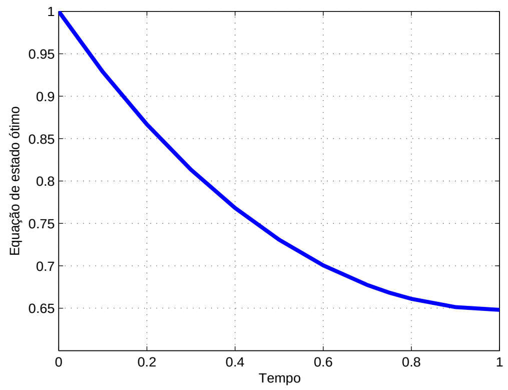


Figura 25: Estado ótimo via *single level*.

O próximo exemplo considera um problema de controle ótimo quadrático linear totalmente intervalar:

$$\begin{aligned}
&\min \ I(X,U) = \frac{1}{2} \odot \int_0^1 ((X(t) \otimes [0,9;1,1] \otimes X(t)) \oplus (U(t) \otimes [0,9;1,1] \otimes U(t)))dt \\
&\text{sujeito a:} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (7.8) \\
&D_{SL}X(t) = [0,8;1,2] \otimes U(t) \\
&X(0) = [0,9;1,1].
\end{aligned}$$

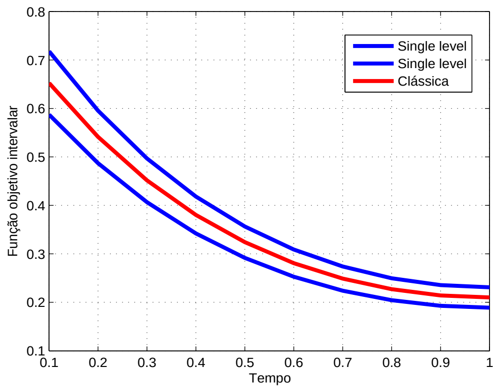


Figura 26: Lagrangiana de valor intervalar e Lagrangiana clássica via *single level.*

Considere as seguintes funções restrições convexas:

$$\begin{aligned} X(\lambda)(t) &= \lambda \underline{x}(t) + (1-\lambda)\overline{x}(t), \\ U(\lambda)(t) &= \lambda \underline{u}(t) + (1-\lambda)\overline{u}(t), \\ Q(\lambda) &= \lambda(0,9) + (1-\lambda)(1,1), \\ R(\lambda) &= \lambda(0,9) + (1-\lambda)(1,1), \\ B(\lambda) &= \lambda(0,8) + (1-\lambda)(1,2), \\ X_0(\lambda) &= \lambda(0,9) + (1-\lambda)(1,1), \end{aligned}$$

associadas com $X(t), U(t), Q = [0,9;1,1], R = [0,9;1,1], B = [0,8;1,2]$ e $X_0 = [0,9;1,1]$, respectivamente. O subproblema resultante é o seguinte:

$$\begin{aligned} &\min \;\; I(X(\lambda), U(\lambda)) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\lambda(0,9) + (1-\lambda)(1,1))(X(\lambda)(t)^2 + U(\lambda)(t)^2)dt \\ &\text{sujeito a:} \\ &X'(\lambda)(t) = \lambda(0,8) + (1-\lambda)(1,2)U(\lambda)(t) \\ &X_0(\lambda) = \lambda(0,9) + (1-\lambda)(1,1) \end{aligned} \tag{7.9}$$

com $\lambda \in [0,1]$. Observe que segundo a *single level* os subproblemas são os seguintes problemas:

1. Para $\lambda = 1$ tem-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\min \;\; I(\underline{x}, \underline{u}) = \frac{1}{2}\int_0^1 0,9(\underline{x}(t)^2 + \underline{u}(t)^2)dt \\ &\text{sujeito a:} \\ &\underline{x}'(t) = 0,8\underline{x}(t) \\ &\underline{x}_0 = 0,9. \end{aligned}$$

2. Para $\lambda = 0$ tem-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
&\min \quad I(\overline{x}, \overline{u}) = \frac{1}{2}\int_0^1 1,1(\overline{x}(t)^2 + \overline{u}(t)^2)dt \\
&\text{sujeito a:} \\
&\overline{x}'(t) = 1,2\overline{x}(t) \\
&\overline{x}_0 = 1,1.
\end{aligned}$$

Neste contexto, para todo $\lambda \in [0,1]$, o subproblema (7.9) é um problema de controle ótimo irrestrito clássico, então utilizando a teoria clássica de controle ótimo, tem-se a seguinte função de Hamilton:

$$\begin{aligned}
H(X(\lambda), U(\lambda), P(\lambda), t) &= \frac{((\lambda)(0,9) + (1-\lambda)(1,1))}{2}\left((X(\lambda)(t)^2 + U(\lambda)(t)^2\right) \\
&+ \ P(\lambda)(t)\left(((\lambda)(0,8) + (1-\lambda)(1,2))U(\lambda)(t)\right),
\end{aligned}$$

cujas as condições de otimalidade são dadas por:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial U(\lambda)(t)} = 0 \\
&P(\lambda)'(t) = -\frac{\partial H}{\partial X(\lambda)(t)} \\
&X(\lambda)'(t) = \frac{\partial H}{\partial P(\lambda)(t)}
\end{aligned}$$

onde $P(\lambda)(1) = 0$ e $X(\lambda)(0) = X_0(\lambda)$ para cada $\lambda \in [0,1]$. Uma vez que $P(\lambda)(1) = 0$, resulta-se que a variável de co-estado e, consequentemente, a variável de controle intervalar serão determinísticas no tempo final $t = 1$. Sem perda de generalidade, considere $q = \lambda 0,8 + (1-\lambda)1,2$ e $r = \lambda 0,9 + (1-\lambda)1,1$. Assim, as soluções de estado e controle do subproblema (7.9) são dadas, respectivamente, por:

$$\widehat{X}(\lambda)(t) = \frac{1}{2}e^{-qt}(1 + e^{2qt})r + \frac{qe^{-qt}(-1 + e^{2qt})C_2}{2r}, \tag{7.10}$$

$$\widehat{U}(\lambda)(t) = \frac{re^{-qt}(-1 + e^{2qt})r}{2q} + \frac{1}{2}e^{-qt}(1 + e^{2qt})C_2, \tag{7.11}$$

onde

$$C_2 = \frac{-\frac{re^{-q}(-1+e^{2q})r}{2q}}{\frac{e^{-q}}{2}(1 + e^{2q})}.$$

As *single level* soluções ótimas de estado e controle do problema intervalar (7.8) são dadas, respectivamente, por:

$$\widehat{X}(t) = [\min_{0\leq\lambda\leq 1} \widehat{X}(\lambda)(t), \max_{0\leq\lambda\leq 1} \widehat{X}(\lambda)(t)],$$
$$\widehat{U}(t) = [\min_{0\leq\lambda\leq 1} \widehat{U}(\lambda)(t), \max_{0\leq\lambda\leq 1} \widehat{U}(\lambda)(t)].$$

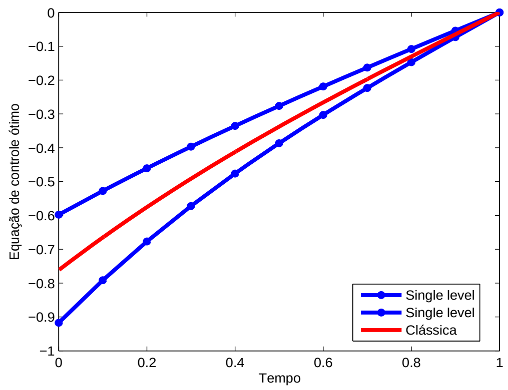


Figura 27: Controle intervalar *single level* ótimo.

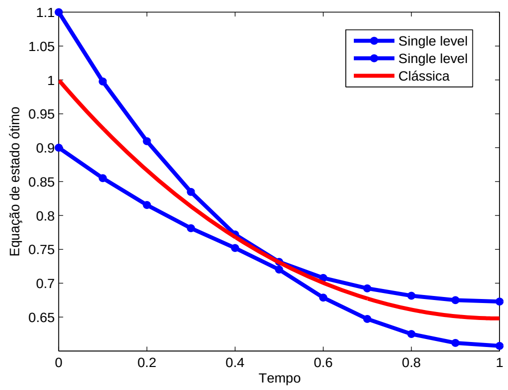


Figura 28: Estado intervalar *single level* ótimo.

A Figura 27 apresenta a solução de controle *single level* ótima, enquanto que a Figura 28 representa a solução de estado intervalar *single level* ótima do problema intervalar (7.8), obtidas através dos dois problemas de otimização global, em λ das equações (7.10) e (7.11), respectivamente. Observe que a *single level* solução de controle torna-se determinística no ponto final ($t = 1$), pois o subproblema (7.9) é um problema de controle clássico com restrição de contorno $P(\lambda)(1) = 0$.

O problema intervalar apresentado, anteriormente, é uma extensão do problema com função objetivo de valor intervalar (7.4). Neste caso, além da função objetivo ser intervalar, o problema também possui incerteza na dinâmica e na condição inicial do problema, tornando-o um problema intervalar com funções e variáveis intervalares. Desta forma, o problema (7.4) é uma caso particular do problema intervalar em questão e, além disso, pode-se observar que as soluções de estado e controle *single level* ótimas, obtidas para o problema (7.4) estão contidas nas *single level* soluções ótimas intervalar, obtidas para o problema totalmente intervalar, como mostram as Figuras 27 - 28.

7.2 Condições de Otimalidade

Nesta seção, o objetivo é mostrar, sob as hipóteses de convexidade, as condições de otimalidade para os problemas de controle ótimo intervalar, que não possuem restrições nas variáveis de controle. Essas condições serão obtidas a partir do conceito de diferenciabilidade $\lambda-$*single level*[9].

O problema de controle ótimo, totalmente intervalar, que será investigado é o seguinte:

$$\begin{aligned} &\min \;\; I(X,U) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, X(t), U(t))dt \\ &\text{sujeito a:} \;\; U \in \mathcal{U}_{ad} \\ &D_{SL}X(t) = F(t, X(t), U(t)), \;\; t \in (t_0, t_1) \\ &X(t_0) = X_0, \end{aligned} \tag{7.12}$$

onde as variáveis $X(t)$ e $U(t)$ são intervalos, $L : \mathbb{R} \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^m \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ e $F : \mathbb{R} \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^m \to \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ são funções intervalares.

Considere, agora, a função intervalar auxiliar, denominada *função de Hamilton intervalar*, e definida por:

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^m \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^n &\to \mathbb{I}(\mathbb{R}) \\ (t, X(t), U(t), P(t)) &\mapsto L(t, X(t), U(t)) \oplus \langle P^T(t), F(t, X(t), U(t))\rangle, \end{aligned} \tag{7.13}$$

onde $P \in \widehat{C}^1_{SL}(\mathbb{R}; \mathbb{I}(\mathbb{R})^n)$ é a variável de coestado intervalar e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto vetorial intervalar, mais precisamente, nível a nível tem-se o produto vetorial clássico.

Na sequência, apresentar-se-ão condições de otimalidade para o problema intervalar (7.12). Primeiramente, será definido o conceito de convexidade *single level*.

Definição 32. *Seja $F : \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ uma função intervalar. Diz-se que F é convexa em $X \subset \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$, se a função restrição associada com F, $F(\lambda)$, é convexa em $X(\lambda)$ com $\lambda \in [0,1]$. Similarmente, diz-se que F é convexa na variável $X_i \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, se a função*

[9] F é diferenciável λ-*single level* em X_0, se a função restrição associada com F é diferenciável em $X_0(\lambda)$ para todo λ.

restrição associada com F, $F(\lambda)$, é convexa na variável $X_i(\lambda)$ com $\lambda \in [0,1]$.

O teorema, a seguir, trata-se de uma variante do princípio do máximo, para o caso em que a função de Hamilton intervalar é convexa *single level.*

Teorema 7.2.1. *Sejam $L : [t_0, t_1] \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^m \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ e $F : [t_0, t_1] \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^m \to \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ funções intervalares continuamente $\lambda-$*single level *diferenciáveis e convexas na variável $U(\cdot)$ para cada $t \in [t_0, t_1]$. Se $(\widehat{X}, \widehat{U}) \in \mathcal{X}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}$ é um processo* single level *fraco ótimo, então, existe uma função de valor intervalar $\widehat{P} \in \widehat{C}^1_{SL}([t_0, t_1]; \mathbb{I}(\mathbb{R})^n)$, tal que:*

$$\begin{cases} D_{SL}\widehat{X}(t) = \left(\frac{DH}{DP}\right)_{SL}(t, \widehat{X}, \widehat{U}, \widehat{P}), \\ D_{SL}\widehat{P}(t) = -\left(\frac{DH}{DX}\right)_{SL}(t, \widehat{X}, \widehat{U}, \widehat{P}), \\ \left(\frac{DH}{DU}\right)_{SL}(t, \widehat{X}, \widehat{U}, \widehat{P}) = [0,0], \\ \widehat{X}(t_0) = X_0 \ e \ \widehat{P}(t_1) = [0,0]. \end{cases} \tag{7.14}$$

Demonstração. Se $(\widehat{X}, \widehat{U}) \in \mathcal{X}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}$ é um processo *single level* ótimo, então

$$\widehat{X}(t) = [\min_{0\leq\lambda\leq 1} \widehat{X}(\lambda)(t), \max_{0\leq\lambda\leq 1} \widehat{X}(\lambda)(t)],$$
$$\widehat{U}(t) = [\min_{0\leq\lambda\leq 1} \widehat{U}(\lambda)(t), \max_{0\leq\lambda\leq 1} \widehat{U}(\lambda)(t)],$$

onde $(\widehat{X}(\lambda)(t), \widehat{U}(\lambda)(t))$ é o processo ótimo fraco do, seguinte, problema de controle, com $\lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} &\min \int_{t_0}^{t_1} L(t, X(\lambda)(t), U(\lambda)(t))dt \\ &\text{sujeito a:} \quad U(\lambda) \in U_{ad} \\ &X(\lambda)'(t) = F(t, X(\lambda)(t), U(\lambda)(t)), \ \ t \in (t_0, t_1) \\ &X(\lambda)(t_0) = X_0(\lambda). \end{aligned} \tag{7.15}$$

Além disso, as funções intervalares L e F são continuamente $\lambda-$*single level* diferenciáveis e convexas na variável $U(t)$, então, suas funções restrições são continuamente diferenciáveis e convexas na variável $U(\lambda)(t)$, para todo $\lambda \in [0,1]$. Consequentemente, a função restrição associada com a função de Hamilton é convexa nesta variável. Assim, pelo Teorema 176

Baumeister e Leitão (2008, pag.212), existe $\widehat{P}(\lambda)(t) \in \widehat{C}^1([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)$, tal que

$$\begin{cases} X(\lambda)'(t) = \frac{\partial}{\partial P(\lambda)} H(t, X(\lambda), U(\lambda), \widehat{P}(\lambda))), \\ P(\lambda)'(t) = -\frac{\partial}{\partial X(\lambda)} H(t, X(\lambda), U(\lambda), \widehat{P}(\lambda))), \\ X(\lambda)(t_0) = X_0(\lambda) \text{ e } \widehat{P}(\lambda)(t_1) = 0, \end{cases} \tag{7.16}$$

e, ainda,

$$H(t, \widehat{X}(\lambda), \widehat{U}(\lambda), \widehat{P}(\lambda)) = \min_{U(\lambda)\in\mathbb{R}^m} \{H(t, \widehat{X}(\lambda), U(\lambda), \widehat{P}(\lambda))\}. \tag{7.17}$$

Uma vez que essas condições são satisfeitas para todo $\lambda \in [0,1]$, o sistema (7.16) e a equação (7.17) são as funções restrições do sistema (7.14), respectivamente, então existe $\widehat{P} \in \widehat{C}^1_{SL}([t_0,t_1];\mathbb{I}(\mathbb{R})^n)$, dado por:

$$\widehat{P}(t) = [\min_{0\le\lambda\le1} \widehat{P}(\lambda)(t), \min_{0\le\lambda\le1} \widehat{P}(\lambda)(t)],$$

que satisfaz o sistema (7.14). □

O teorema, anterior, apresentou as condições necessárias para o problema de controle ótimo intervalar, utilizando a diferenciabilidade $\lambda-$*single level*. O seguinte resultado apresentará as condições suficientes para um processo intervalar *single level* ótimo do problema totalmente intervalar.

Teorema 7.2.2. *Sejam $L : [t_0,t_1] \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^m \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ e $F : [t_0,t_1] \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^m \to \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ funções intervalares continuamente $\lambda-$*single level *diferenciáveis e convexas nas variáveis $X(\cdot)$ e $U(\cdot)$ para cada $t \in [t_0,t_1]$. Se $(\widehat{X}, \widehat{U}, \widehat{P}) \in \widehat{C}^1_{SL}([t_0,t_1];\mathbb{I}(\mathbb{R})^n) \times \widehat{C}_{SL}([t_0,t_1];\mathbb{I}(\mathbb{R})^m) \times \widehat{C}^1_{SL}([t_0,t_1];\mathbb{I}(\mathbb{R})^n)$ é solução do seguinte sistema intervalar*

$$\begin{cases} D_{SL}X(t) = \left(\frac{DH}{DP}\right)_{SL}(t, X, U, P), \\ D_{SL}P(t) = -\left(\frac{DH}{DX}\right)_{SL}(t, X, U, P), \\ \left(\frac{DH}{DU}\right)_{SL}(t, X, U, P) = [0,0], \\ X(t_0) = X_0 \text{ e } P(t_1) = [0,0], \end{cases} \tag{7.18}$$

então, $(\widehat{X}, \widehat{U})$ é um processo intervalar single level *ótimo do problema (7.12).*

Demonstração. Se $(\widehat{X}, \widehat{U}, \widehat{P}) \in \widehat{C}^1_{SL}([t_0,t_1];\mathbb{I}(\mathbb{R})^n) \times \widehat{C}_{SL}([t_0,t_1];\mathbb{I}(\mathbb{R})^m) \times \widehat{C}^1_{SL}([t_0,t_1];\mathbb{I}(\mathbb{R})^n)$

é solução do sistema (7.18), então

$$\widehat{X}(t) = [\min_{0\leq\lambda\leq1} \widehat{X}(\lambda)(t), \max_{0\leq\lambda\leq1} \widehat{X}(\lambda)(t)],$$
$$\widehat{U}(t) = [\min_{0\leq\lambda\leq1} \widehat{U}(\lambda)(t), \max_{0\leq\lambda\leq1} \widehat{U}(\lambda)(t)],$$
$$\widehat{P}(t) = [\min_{0\leq\lambda\leq1} \widehat{P}(\lambda)(t), \max_{0\leq\lambda\leq1} \widehat{P}(\lambda)(t)],$$

onde $(\widehat{X}(\lambda)(t), \widehat{U}(\lambda)(t), \widehat{P}(\lambda)(t)) \in \widehat{C}^1_{SL}([t_0,t_1];\mathbb{R}^n) \times \widehat{C}_{SL}([t_0,t_1];\mathbb{R}^m) \times \widehat{C}^1_{SL}([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} X(\lambda)'(t) = \frac{\partial}{\partial P(\lambda)} H(t, X(\lambda), U(\lambda), P(\lambda))), \\ P(\lambda)'(t) = -\frac{\partial}{\partial X(\lambda)} H(t, X(\lambda), U(\lambda), P(\lambda))), \\ \frac{\partial}{\partial U(\lambda)} H(t, X(\lambda), U(\lambda), P(\lambda)) = 0, \\ X(\lambda)(t_0) = X_0(\lambda) \text{ e } \widehat{P}(\lambda)(t_1) = 0, \end{cases} \tag{7.19}$$

com $\lambda \in [0,1]$. Além disso, as funções intervalares L e F são continuamente SL-diferenciáveis, então, suas funções restrições são continuamente diferenciáveis para todo $\lambda \in [0,1]$ e, além disso, a função restrição associada com a função de Hamilton intervalar é dada por:

$$H(t, X(\lambda), U(\lambda), P(\lambda)) = L(t, X(\lambda)(t), U(\lambda)(t)) + (P(\lambda))^T(t) F(t, X(\lambda)(t), U(\lambda)(t)),$$

e é convexa nas variáveis $X(\lambda)(\cdot)$ e $U(\lambda)(\cdot)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, pois L e F são convexas nas variáveis $X(\cdot)$ e $U(\cdot)$. Então, pelo Teorema 174 em Baumeister e Leitão (2008, pag.209), $(\widehat{X}(\lambda), \widehat{U}(\lambda))$ é o processo ótimo para o subproblema do problema intervalar, dado por:

$$\begin{aligned} &\min I(X(\lambda), U(\lambda)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, X(\lambda)(t), U(\lambda)(t)) dt \\ &\text{sujeito a: } U(\lambda) \in U_{ad} \\ &X(\lambda)'(t) = F(t, X(\lambda)(t), U(\lambda)(t)) \\ &X(\lambda)(t_0) = X_0(\lambda). \end{aligned} \tag{7.20}$$

Consequentemente, $(\widehat{X}, \widehat{U})$ é o processo intervalar *single level* ótimo do problema (7.12).

$\square$

7.3 Conclusões

Foram apresentados os problema de controle ótimo intervalar e o processo de resolução segundo a *single level*, além disso, dois simples exemplos foram expostos visando exemplificar tal abordagem. Sob determinadas hipóteses de convexidade e, também, considerando que as funções intervalar envolvidas sejam $\lambda-$*single level* diferenciáveis, derivou-se as condições de otimalidade para o problema de controle totalmente intervalar. Os resultados apresentados são bastantes restritivos, pelas suposições de convexidade, diferenciabilidade em todos os λ, todavia, são meritórios, pois se trata dos primeiros resultados neste âmbito.

CAPÍTULO 8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho apresentou a adoção de incerteza do tipo intervalar nos problemas de otimização e controle ótimo. Primeiramente, para os problemas de otimização de valor intervalar, descreveram-se os diferentes conceitos de solução e a partir da diferenciabilidade extremal e generalizada de Hukuhara, obteve-se as condições necessárias do tipo Fritz-John e Karush-Kuhn-Tucker para os problemas de otimização de valor intervalar e, em adição, foram apresentadas as condições suficientes para o problema em questão.

Posteriormente, formulou-se o problema de controle ótimo de valor intervalar e foram apresentados os diferentes conceitos de solução para o problema. Considerando três diferentes conceitos de solução, as condições de otimalidade, necessárias e suficientes, foram demonstradas utilizando a diferenciabilidade do tipo extremal e generalizada de Hukuhara, sob a hipótese de convexidade. Somando-se a isto, apresentou-se uma aplicação do problema de controle ótimo de valor intervalar, no controle de plantas daninhas, levando em consideração as variações no custo de produção, no preço por unidade do controle e do produto. Assim, analisando as incertezas presentes na caracterização do lucro de um sistema de controle de plantas daninhas, a aplicação descreveu os possíveis cenários, pessimista e otimista, da lucratividade na produção do milho.

Por outro lado, desenvolveu-se o conceito de cálculo intervalar para aritmética intervalar restrita *single level*, considerando tanto as funções de valor intervalares quanto as funções intervalares. No caso das funções de valores intervalares verificou-se as equivalências com outras derivadas já existentes. Destacando-se para a função de valor intervalar, que utilizando a diferença e diferenciabilidade, via *single level*, uma extensão do teorema fundamental do cálculo foi obtido sem hipóteses adicionais. Neste contexto, formulou-se o problema de controle ótimo, totalmente intervalar e obteve-se as condições de otimalidade utilizando a diferenciabilidade $\lambda-$*single level*, sob a hipótese de convexidade do problema.

No enfoque de pesquisas subsequentes, objetiva-se determinar as condições de otimalidade, segundo outros conceitos de qualificação das restrições, para os problema de otimização de valor intervalar. Além disso, buscar-se-á extender as condições de otimalidade, obtidas para os problemas de controle ótimo de valor intervalar, para os problemas de controle no contexto Fuzzy. Por outro lado, no âmbito da análise intervalar *single level*, estruturar os conceitos de integral intervalar e desenvolver as condições de otimalidade para os problemas de otimização e controle ótimo totalmente intervalar, utilizando a *single level* derivada, sem colocar as hipóteses nível a nível.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEFELD, G.; MAYER, G. Interval analysis: Theory and applications. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 121, p. 421–464, 2000.

AUBIN, J.; CELLINA, A. *Differential Inclusions*. New York, NY: Springer-Verleg, 1984.

AUBIN, J.; FRANKOWSKA, H. *Set-Valued Analysis*. Boston: Birkhauser, 1990.

AUBIN, J. P.; FRANSKOWSKA, H. Introduction: Set-valued analysis in control theory. *Set-Valued Analysis*, v. 8, p. 1–9, 2000.

AUMANN, R. J. Integrals of set-valued functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 12, p. 1–12, 1965.

BANKS, H.; JACOBS, M. A differential calculus for multifunctions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 29, n. 2, p. 246 – 272, 1970.

BAUMEISTER, J.; LEITÃO, A. *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica*. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: Projeto Euclides, 2008.

BEDE, B.; GAL, S. G. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst*, v. 151, p. 581–599, 2005.

BELLMAN, R. *Dymanic Programming*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.

BELLMAN, R. E.; ZADEH, L. A. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, v. 17, p. 141–164, 1970.

BHURJEE, A.; PANDA, G. Sufficient optimality conditions and duality theory for interval optimization problem. *Annals of Operations Research*, Springer US, p. 1–14, 2014.

BRITTON, N. F. *Essential Mathematical Biology*. London, UK: Springer Undergraduate Mathematics Series, 2003.

BURKILL, J. C. Functions of intervals. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-22, n. 1, p. 275–310, 1924.

CACHO, O. J. Dynamic models, externalities and sustainability in agriculture. In: *Workshop Paper Series in Agricultural and Resource Economics*. New England: [s.n.], 1999. p. 1–9.

CAMPO, J. R.; CHELA, R. S.; MORAES, C. R. C.; SILVA, G. N. Simulações da dinâmica populacional de plantas daninhas com aplicação de controle. In: *Anais do 5º Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*. Guaratinguetá, SP: [s.n.], 2006.

CHALCO-CANO, Y.; FLORES-FRANULIC, A.; ROMÁN-FLORES, H. Ostrowski type inequalities for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative. *Computational and Applied Mathematics*, v. 31, n. 3, p. 457–472, 2012. ISSN 1807-0302.

CHALCO-CANO, Y.; LODWICK, W. A.; BEDE, B. Single level constraint interval arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*, 2014.

CHALCO-CANO, Y.; LODWICK, W. A.; RUFIÁN-LIZANA, A. Optimality conditions of type KKT for optimization problem with interval-valued objective function via generalized derivative. *Fuzzy Optm. Decis. Making*, v. 12, p. 305–322, 2013.

CHALCO-CANO, Y.; ROMÁN-FLORES, H. On the new solution of fuzzy differential equations. *Chaos, Solitons and Fractal*, v. 38, p. 112–119, 2008.

CHALCO-CANO, Y.; ROMÁN-FLORES, H.; JIMÉNEZ-GAMERO, M. D. Generalized derivative and π-derivalive for set-valued functions. *Information Sciences*, v. 181, p. 2177–2188, 2011.

CHALCO-CANO, Y.; RUFIÁN-LIZANA, A.; ROMÁN-FLORES, H.; JIMÉNEZ-GAMERO, M. D. Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 219, p. 49–67, 2013.

CHANAS, S.; KUCHTA, D. Multiobjective programming in optimization of interval objective functions-a generalized approach. *European Journal of Operation Research*, Elsevier Science Publishers, v. 94, p. 594–598, 1996.

CHANKONG, V.; HAIMES, Y. Y. *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*. North-Holland: [s.n.], 1983.

CHARNES, A.; COOPER, W. W. Chance constrained programming. *Management Science*, v. 6, p. 73–79, 1959.

CODDINGTON, E. A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. New York,NY: Englewood Cliffs, 1989.

CONAB. *Acompanhamentos da Safra Brasileira de Grãos*. Brsília,BR: Observatório Agrícola, 2015. ISSN 2318-6852.

COUSENS, R. A simple model relating yield loss to weed density. *Annals of Applied Biology*, v. 107, n. 2, p. 239–252, 1985.

DAS, S.; GOSWAMI, A.; ALAM, S. Multiobjective transportation problem with interval cost, source and destination parameters. *European Journal of Operational Research*, v. 117, n. 1, p. 100 – 112, 1999.

DEB, K. *Multi-Objevtive Optimization using Evolutionary Algorithms*. New York, NY: John Wiley and Sons, 2001.

DIAMOND, P.; KLOEDEN, P. Metric space of fuzzy sets: Theory and application. *World Scientific, Singapore*, 1994.

FLOYD, R. W.; BEIGEL, R. *The Language of Machines: An Introduction to Computability and Formal Languages*. New York, NY: Computer Science Press, Inc., 1994. ISBN 0-7167-8266-9.

HAGER, W. *Source code for ASA-CG Version 1.3*. Acessado em novembro 2010. Http://www.math.ufl.edu/˜hager/papers/Software.

HAGER, W. W.; ZHANG, H. A new active set algorithm for box constrained optimization. *Journal of Optimization*, v. 17, n. 2, p. 526–557, 2006.

HAIMES, Y.; LASDON, L.; WISMER, D. On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v. 1, n. 3, p. 296–297, 1971.

HANSEN, E. R. Publications related to early interval work of R E Moore. *Web document: interval. louisiana. edu/Moores early papers/bibliography. html*, 2001.

HUKUHARA, M. Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convex. *Funkcial Ekvac*, v. 10, p. 205–229, 1967.

HYONG-YI, C. Interval programming model for risk-based partner selection of virtual enterprise. *Chinese Business Review*, v. 6, n. 3, p. 34–41, 2007.

IDA, M. Multiple objective linear programming with interval coefficients and its all efficient solutions. In: *IEEE CDC*. Kobe, Japan: [s.n.], 1996. p. 1247–1249.

IDA, M.; KATAI, O. Discrimination methods of efficient solutions for multiobjective linear programming problems with interval coefficients. In: *Transactions of the SICE*. Japan: [s.n.], 1993. v. 29, p. 1247–1249.

IMEA, I. M. G. de E. A. *Custo de produção de milho - Safra 2013/14*. Acessado em Maio 2014. Http://www.imea.com.br/upload/publicacoes/ arquivos/R410-2013-01-CPMilho.pdf.

INUIGUCHI, M.; KUME, Y. Goal programming problems with interval coefficients and target intervals. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 52, n. 3, p. 345–360, 1991.

INUIGUCHI, M.; SAKAWA, M. Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function. *European Journal of Operational Research*, v. 86, n. 3, p. 526 – 536, 1995.

ISHIBUCHI, H.; TANAKA, H. Multiobjective programming in optimization of the interval objective function. *European Journal of Operation Research*, Elsevier Science Publishers, v. 48, p. 219–225, 1990.

JIANG, C.; HAN, X.; LIU, G.; LIU, G. A nonlinear interval number programming method for uncertain optimization problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 188, n. 1, p. 1–13, 2008.

JONES, R.; CACHO, O. J. A dynamic optimisation model of weed control. In: *44th Annual Conference of the Australian Agricultural and Resource Economics*. Sydney, Australia: [s.n.], 2000. p. 1–17.

KENNEDY, J. O. S. *Dynamic Programming: Applications to Agriculture and Natural Resources*. New York, NY: Elsevier, 1986.

KIM, D. S.; MARSHALL, E.; BRAIN, P.; CASELEY, J. Modelling the effects of sub-lethal doses of herbicide and nitrogen fertilizer on crop weed competition. *Weed Research*, v. 46, n. 6, p. 492–502, 2006.

KNOBLOCH, H. W.; ISIDORI, A.; FLOCKERZI, D. *Topics in Control Theory*. 1. ed. Basel: Birkhäuser Basel, 1993. (Oberwolfach Seminars, v. 22). ISBN 1661-237X.

KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. Computer arithmetic in theory and in practice. *Academic Press*, 1981.

LACERDA, A.; FILHO, R. V. Curvas de dose-resposta em espécies de plantas daninhas com uso do herbicida glyphosate. *Bragantia*, v. 63, n. 1, p. 73–79, 2004.

LEAL, U. A. S. *Otimização Vetorial e Técnicas de Misturas de Herbicidas Aplicadas ao Controle de Plantas Daninhas*. Dissertação (Mestrado) — IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, SP, 2012.

LODWICK, W. A. Constrained interval arithmetic. *CCM Report*, v. 138, 1999.

LODWICK, W. A. Interval and fuzzy analysis: A unified approach. *Advances in Imaging and Electronic Physics*, v. 148, p. 76–192, 2007.

LUENBERGER, D. G. *Linear and nonlinear programming*. 2. ed. Nova York, NY: Addison-Wesley Publishing Company, 1986.

MANGASARIAN, O. L.; FROMOVITZ, S. The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 17, n. 1, p. 37–47, 1967.

MAQUI-HUAMÁN, G. G. *Introdução à Análise em Níveis Simples e Extensão de Zadeh*. Dissertação (Mestrado) — IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, SP, 2014.

MARKOV, S. A non-standard subtraction of intervals. *Serdica*, v. 3, p. 359–370, 1977.

MARKOV, S. Calculus for interval functions of a real variable. *Computing*, v. 22, p. 325–337, 1979.

MEROTTO, A. J.; JASIENIUK, M.; OSUNA, M.; FERRERO, F. V. A.; FICHER, A. Cross resistance to herbicides of five als inhibiting groups and sequencing of the als gene in cyperus difformis l. *Agricultural and Food Chemistry*, v. 57, n. 4, p. 1389–1398, 2009.

MIETTINEN, K. M. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1999.

MOORE, R. E. *Interval analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1966.

MOORE, R. E. Interval analysis. *Printice-Hall, Englewood Cliffs, NJ*, 1969.

MOORE, R. E. *Methods and Application of Inteval Analysis*. Philadelphia: SIAM, 1979.

MOORE, R. E. *Computational Functional Analysis*. England: Ellis Horwood Limited, 1985.

MOORE, R. E.; YANG, C. Interval analysis. *Technical Document LMSD-285875, Lockheed Missiles and Space Division, Sunnyvale, CA, USA*, DTIC Document, 1959.

MORDUKHOVICH, B. S. *Variational analysis and generalized differentiation I: basic theory*. 1. ed. Berlin: Springer-Vergal, 2006.

MORDUKHOVICH, B. S. *Variational analysis and generalized differentiation, II: applications*. 1. ed. Berlin: Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 2006.

OLIVEIRA, C.; ANTUNES, C. H. Multiple objective linear programming models with interval coefficients–an illustrated overview. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 181, n. 3, p. 1434–1463, 2007.

PANDEY, S.; MEDD, R. Integration of seed and palnt kill tactics for control of wild oats: An economic evaluation. *Agricultural Systems 34*, v. 1, p. 65–76, 1990.

PARK, S.; BENJAMIN, L.; WATKINSON, A. Comparing biological productivity in cropping systems: A competition approach. *Journal of Applied Ecology*, v. 39, p. 416–426, 2002.

PLOTNIKOVA, N. V. Systems of linear differential equations with π -derivative and linear differential inclusions. *Sbornik: Mathematics*, v. 196, n. 11, p. 1677, 2005.

POMPEIU, D. *Sur la continuité des fonctions de variables complexes (Thèses)*. authier-Villars, Paris: [s.n.], 1905.

PONTRYAGIN, L. S.; BOLTYANSKII, V. H.; GAMKRELIDZE, R. V.; MISHCHENKO, E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York, NY: John Wiley, 1965.

ROGERS, C. A. *Hausdorff Measures*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998. ISBN 978-0-521-62491-6.

SAKAWA, M.; INUIGUCHI, M.; IKEDA, T. Fuzzy programming approaches to multiobjective linear optimal control problems. *Fuzzy sets and Systems*, v. 7, p. 303–31, 1994.

SCHMIDT, W. H.; HEIER, K.; BITTNER, L.; BULIRSCH, R. *Topics in Control Theory*. Basel: Birkhäuser Basel, 1998. (Proceesings of the 12th International Conference in Honour of L. Bittner and R. Klatzler, Trassenheide, Germany, September, 1996, International Series of Numerical Mathematics, 124).

SEEFELDT, S. S.; JENSEN, J. E.; FUERST, E. P. Log-logistic analysis of herbicide dose-response relationships. *Weed Technology*, v. 9, n. 1, p. 218–227, 1995.

SENGUPTA, J. *Stochastic Programming: Methods and Applications*. North-Holland, Amsterdam: [s.n.], 1972.

SKOWRONSKI, J. M.; FLASHNER, H.; GUTTALU, R. *Mechanics and control*. Berlin: Springer Verlag, 1991. (Proceesings of the 3rd Workshop on Control Mechanics, in Honor of the 65th Birthday of George Leitmann, January, 1990, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 151).

STEFANINI, L. A generalized of Huhukara difference and division for interval and fuzzy arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 161, p. 1564–1584, 2010.

STEFANINI, L.; BEDE, B. Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis*, Elsevier, v. 71, p. 1311–1328, 2009.

STEFANINI, L.; BEDE, B. Some notes on generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Elsevier Science*, 2012.

STIEGELMEIER, E. W. *Modelo de otimização para o controle de plantas daninhas usando programação não linear inteira mista*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.

STREIBIG, J. C.; KUDSK, P. *Herbicide Bioassays*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1993.

SUNAGA, T. Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Springer-Verlag, v. 26, n. 2-3, p. 125–143, 2009. ISSN 0916-7005.

TANAKA, H.; OKUDA, T.; ASAI, K. On fuzzy-mathematical programming. *Journal of Cypernetics*, v. 3, n. 4, p. 37–46, 1974.

TOLSTONOGOV, A. *Differential Inclusions in a Banach Space*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 2000.

VINTER, R. *Optimal Control*. New York: Birkhäuser, 2000.

WARMUS, M. Calculus of approximations. *Bulletin de l'Academie Polonaise de Sciences*, v. 4, n. 5, p. 253–257, 1956.

WU, H.-C. Duality theorems in fuzzy mathematical programming problems based on the concept of necessity. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 139, n. 2, p. 363–377, 2003.

WU, H.-C. Duality theory in fuzzy linear programming problems with fuzzy coefficients. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Springer, v. 2, n. 1, p. 61–73, 2003.

WU, H.-C. Evaluate fuzzy optimization problems based on biobjective programming problems. *Computer and Mathematics with Applications*, v. 47, 2004.

WU, H. C. The Karush-Kuhn-Tucker optimization conditions in an optimization problem with interval-valued objective function. *European Journal of Operation Research*, v. 176, p. 47–59, 2007.

WU, H. C. The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective functions. *European Journal of Operation Research*, v. 196, p. 49–60, 2009.

WU, H.-C. The optimality conditions for optimization problems with convex constraints and multiple fuzzy-valued objective functions. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Springer, v. 8, n. 3, p. 295–321, 2009.

YOUNG, R. C. The algebra of many-valued quantities. *Mathematische Annalen*, Springer-Verlag, v. 104, n. 1, p. 260–290, 1931.

ZHANG, J.; LIU, S.; LI, L.; FENG, Q. The K K T optimality conditions in a class of generalized convex optimization problems with an interval-valued objective function. *Optimization Letters*, Springer Berlin Heidelberg, v. 8, n. 2, p. 607–631, 2014.

ZIMMERMAN, H. J. Description and optimization of fuzzy systems. *International Journal of General Systems*, v. 2, p. 206–215, 1976.

ZWILLINGER, D. *Handbook of Differential Equations*. 3. ed. San Diego,CA: Academmic Press, 1998.

ÍNDICE REMISSIVO

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 03/06/2015.

Ulcilea Alves Severino Leal