



**Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.002/10

Energia escura acoplada

Giovanni Otalora Patiño

Professor Dr. Rogerio Rosenfeld

26 de janeiro de 2010

Agradecimentos

Ao professor Rogerio Rosenfeld, pela sua orientação, assim como a todos os professores do IFT, com os quais aprendi muito.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Na última década várias observações indicam que o universo está expandindo aceleradamente. Essa expansão acelerada pode ser explicada em um universo composto de 70% de energia escura e 30% de matéria (25% de matéria escura e 5% de matéria bariônica). A energia escura proporciona a pressão negativa necessária para produzir a aceleração em grandes escalas. Nesse trabalho faz-se uma revisão do modelo de um campo escalar como fonte da energia escura, conhecido genericamente como modelo de quintessência. Estuda-se o modelo de quintessência acoplada à matéria escura.

Palavras e conceitos Chaves: Energia escura, matéria escura, Quintessência acoplada, expansão acelerada,

Áreas do conhecimento: Teoria da energia escura, cosmologia de quintessência acoplada

Abstract

In the previous decade many observations indicate that the universe is accelerating. This rapid expansion can be explained in an universe made up of 70% of dark energy and 30% of matter (25% of dark matter and 5% of baryonic matter). The dark energy provides negative pressure to produce acceleration. In this work it is studied the model of Quintessence, a model of scalar field, as source of the dark energy. It is studied the model of Coupled Quintessence with dark matter.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Modelo Cosmológico Padrão	2
1.1.1	Equações de Friedmann	3
1.1.2	Lei de Gravitação de Newton versus Aceleração do Universo . . .	5
2	Evidência da energia escura	7
2.1	Vínculos de supernova Ia	7
2.1.1	Distância de luminosidade	7
2.2	A idade do universo e a constante cosmológica	11
3	Quintessência	13
3.1	Equação de movimento	13
3.2	Tensor momentum Energia	14
3.3	Dinâmica cosmológica de quintessência na presença de um fluido barotrópico perfeito	14
3.4	Parâmetros cosmológicos importantes no espaço de fase	17
3.5	Soluções constantes ou pontos críticos	18
3.6	Estabilidade ao redor dos pontos críticos	20
3.6.1	Ponto crítico (a)	20
3.6.2	Ponto crítico (b1)	21
3.6.3	Ponto crítico (b2)	21
3.6.4	Ponto crítico (c)	22
3.6.5	Ponto crítico (d)	23
4	Quintessência com acoplamento á matéria escura	26
4.1	Sem radiação	26
4.1.1	Sistema autônomo e pontos críticos	28

4.1.2	Estabilidade ao redor dos pontos críticos e propriedades	29
4.1.3	ponto crítico (a)	29
4.1.4	ponto crítico (b1)	30
4.1.5	ponto crítico (b2)	30
4.1.6	ponto crítico (c)	31
4.1.7	ponto crítico (d)	32
4.2	Com radiação	33
4.2.1	Sistema autônomo e pontos críticos	35
4.2.2	Estabilidade ao redor dos pontos críticos e propriedades	36
4.2.3	Ponto crítico (a)	37
4.2.4	Ponto crítico (b1)	38
4.2.5	Ponto crítico (b2)	38
4.2.6	Ponto crítico (c)	39
4.2.7	Ponto crítico (d)	39
4.2.8	Ponto crítico (e)	40
4.2.9	Ponto crítico (f)	41
4.2.10	Ponto crítico (g)	42
5	Quintessência acoplada com acoplamento não linear	47
6	Conclusões	51
A	Tensor momentum energía	53
B	Sistema autónomo e estabilidade	55
B.1	Pontos Fixos ou críticos	55
B.2	Estabilidade ao redor dos pontos críticos	55
	Referências	57

Capítulo 1

Introdução

Na última década várias observações indicam que o universo está expandindo aceleradamente. Essa expansão acelerada pode ser explicada em um universo composto de 70% de energia escura e 30% de matéria (25% de matéria escura e 5% de matéria bariônica) [1, 2, 21]. A energia escura proporciona a pressão negativa necessária para produzir a aceleração em grandes escalas. A explicação mais simples da energia escura é dada pela constante cosmológica, mas este cenário tem um problema sério como é a discrepância em escalas de energia. De acordo com a evidência experimental, o universo a grandes escalas é especialmente plano [2]. Isso significa que o universo está em sua densidade crítica e assim, a ordem de grandeza da energia contida na constante cosmológica é da ordem da densidade crítica 10^{-47} GeV^4 [2]. Mas este valor é diferente em muitos ordens de grandeza com relação ao valor que prediz a teoria quântica de campos 10^{74} GeV^4 [3]. Este problema pode ser solucionado considerando um campo escalar com uma equação de estado barotrópica e dinâmica, $p = \omega\rho$, onde p é a densidade de pressão do campo escalar e ρ a densidade de energia. Nos últimos anos muitos modelos de energia escura foram propostos, energia escura dilatônica [8], K-essência [5], campo fantasma [6], tachiones [7], e o modelo de Quintessência [4], etc. Em todos os modelos, para proporcionar um cenário de energia escura viável, se requer que a densidade de energia do campo escalar seja subdominada durante as épocas nas quais a radiação e a matéria dominem a dinâmica do universo e que venha a ser dominante só agora para conduzir a expansão acelerada, satisfazendo o vínculo observacional de um universo plano.

Tipicamente os modelos de energia escura de campo escalar não apresentam o

acoplamento do campo escalar ao fluido material. Mas não existe uma razão fundamental para que esse acoplamento seja inexistente

1.1 Modelo Cosmológico Padrão

A evolução do universo se descreve teoricamente pela solução das equações do campo gravitacional da teoria geral da relatividade. O modelo padrão da cosmologia atual é a solução proposta por Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, o qual considera uma completa homogeneidade e isotropia na distribuição do conteúdo do universo. O modelo padrão se construiu considerando que o espaço que compreende o universo está preenchido uniformemente de matéria e radiação, é completamente homogêneo e isotrópico em suas propriedades em escalas da ordem de 10^8 parsec ou maiores ($1 \text{ parsec} \approx 10^{16} m$) [9]. Isto significa que se pode escolher um tempo universal tal que em qualquer tempo a métrica do espaço seja a mesma em todos os pontos e em todas as direções.

A métrica do espaço tempo que satisfaz estas condições é conhecida como a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, [9, 10], ou FRW, a qual se escreve do jeito

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dl^2, \quad (1.1)$$

onde

$$dl^2 = a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (1.2)$$

é a métrica do espaço em coordenadas esféricas, que depende do tempo através do fator de escala $a(t)$. A velocidade da luz considere-se $c = 1$. Há três tipos de universo descrito por esta métrica. O universo fechado $K = 1$, o espaço aberto $K = -1$ e o universo plano $K = 0$. Assim para o caso de universo plano com coordenadas espaciais (x, y, z) , a métrica do espaço-tempo FRW está dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad (1.3)$$

Algumas vezes é melhor expressar a métrica 1.1 em coordenadas esféricas quadridimensionais como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 [d\chi^2 + f_K^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (1.4)$$

onde

$$f_K(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & K = +1, \\ \chi, & K = 0, \\ \sinh \chi, & K = -1. \end{cases} \quad (1.5)$$

1.1.1 Equações de Friedmann

A lei de gravitação de Einstein sem matéria e radiação tem a forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (1.6)$$

R é a curvatura escalar, a qual define-se como uma operação de contração de índices no tensor misto $R^\mu_\nu = g^{\mu\alpha}R_{\alpha\nu}$ [11]. O tensor simétrico $R_{\mu\nu}$ é conhecido como o tensor de Ricci e se define em termos dos símbolos de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ [11]

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\beta_{\mu\beta,\nu} - \Gamma^\beta_{\mu\nu,\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}. \quad (1.7)$$

Ainda que os símbolos de Christoffel não sejam tensores se podem definir em termos do tensor fundamental $g_{\mu\nu}$, o qual é a métrica do espaço tempo [11]

$$\Gamma^\sigma_{\mu\beta} = \frac{g^{\sigma\nu}}{2}(g_{\nu\mu,\beta} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\beta,\nu}). \quad (1.8)$$

Em presença da matéria e radiação, estas equações se tem que modificar, introduzindo o tensor momentum energia $T_{\mu\nu}$. As equações de Einstein ficam [11]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.9)$$

onde G é a constante de gravitação. O tensor momentum energia $T_{\mu\nu}$, representa a presença da matéria e radiação junto com as leis de conservação, ver apêndice (A). O modelo de matéria e radiação que se escolhe é o de um fluido material perfeito. Um fluido perfeito é um fluido homogêneo e isotrópico sem fricção e sem condução de calor, para o qual o tensor momentum energia se define como [10]

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

onde u^μ é a quadri-velocidade do fluido no ponto x^μ do espaço tempo, p é a pressão, ρ a densidade de energia e $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski $(-, +, +, +)$. Devido ao sistema de referência que se escolhe, todo elemento de fluido se encontra em repouso e portanto as componentes tri-dimensionais da quadri-velocidade são iguais a zero ($u^\alpha = 0$ $\alpha = 1, 2, 3$). O tensor momentum energia, o qual é um tensor simétrico, pode-se escrever como

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

e por contração dos índices é obtido

$$T = T^\mu_\mu = -\rho + 3p. \quad (1.12)$$

Para obter as equações de Friedmann calcula-se os símbolos de Christoffel diferentes de zero as componentes diferentes de zero do tensor de Ricci, a curvatura escalar R e o traço do tensor momentum energia (1.12), para assim substituir na equação de Einstein (1.6) [11]. Substituindo $R = -8\pi GT$ na equação (1.6)

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (1.13)$$

da equação (00) encontra-se

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p), \quad (1.14)$$

e a equação (ij) junto com 1.16

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{K}{a^2}, \quad (1.15)$$

onde ρ é a densidade de energia total, p é a pressão total, G é a constante gravitacional de Newton e o termo $\frac{K}{a^2}$ é conhecido como o termo de curvatura [9]. As equações 1.14 e 1.15 são conhecidas como as equações de Friedmann e junto com a métrica de FRW, constituem o modelo cosmológico padrão.

De 1.14 pode-se deduzir que a expansão acelerada ocorre para $\rho + 3p < 0$ e pela equação de estado

$$p = \omega \rho, \quad (1.16)$$

tem-se que o universo está acelerando para

$$\omega < -\frac{1}{3}. \quad (1.17)$$

Por outro lado, a equação (1.14) pode-se escrever como

$$\Omega(t) - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}, \quad (1.18)$$

onde

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}, \quad (1.19)$$

é o parâmetro de densidade total, e define-se a densidade crítica

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad (1.20)$$

e $H = \frac{\dot{a}}{a}$ é o parâmetro de Hubble, o qual descreve a aceleração do universo. A densidade de energia total ρ determina a geometria espacial do universo da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\Omega > 1 \quad \text{ou} \quad \rho > \rho_c &\longrightarrow K = +1 \longrightarrow \text{Universo fechado}, \\ \Omega = 1 \quad \text{ou} \quad \rho = \rho_c &\longrightarrow K = 0 \longrightarrow \text{Universo plano}, \\ \Omega < 1 \quad \text{ou} \quad \rho < \rho_c &\longrightarrow K = -1 \longrightarrow \text{Universo aberto}.\end{aligned}\tag{1.21}$$

Lembrando que há evidências de que o universo é muito plano em escalas cosmológicas [2], portanto, de acordo com o modelo padrão, a densidade de energia total do universo é próxima à densidade crítica.

1.1.2 Lei de Gravitação de Newton versus Aceleração do Universo

Seja o universo completamente preenchido de um fluido material barotrópico, com equação de estado $\omega = p/\rho$, onde ω é constante. Então solucionando as equações de Friedmann 1.14 e 1.15 com $K = 0$ se obtém para o parâmetro de Hubble

$$H(t) = \frac{2}{3(1+\omega)(t-t_0)},\tag{1.22}$$

o fator de escala no tempo t

$$a(t) \propto (t-t_0)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}\tag{1.23}$$

e a densidade de energia total

$$\rho(t) \propto a^{-3(1+\omega)},\tag{1.24}$$

onde t_0 é uma constante. O universo dominado por radiação tem equação de estado $\omega = 1/3$, enquanto que o universo dominado por matéria não relativística ou matéria fria tem equação de estado $\omega = 0$. Ambos casos correspondem a um universo com expansão desacelerada. Assim, o modelo cosmológico padrão não pode explicar a expansão acelerada do universo já que descreve um universo que está preenchido de matéria ordinária e radiação.

A lei de gravitação de Newton concorda com a equação de Friedmann 1.14 para o caso de um universo plano dominado pela matéria fria. Em efeito, considere-se uma esfera homogênea com raio a e densidade de energia ρ respectivamente. A equação de Newton de movimento para um ponto material com masa m sobre esta esfera é dada por

$$m\ddot{a} = -\frac{Gm}{a^2} \left(\frac{4\pi a^3 \rho}{3} \right),\tag{1.25}$$

simplificando pode-se obter

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho,\tag{1.26}$$

onde $\omega = 0$. Para explicar a expansão acelerada do universo se requer uma energia exótica denominada *energia escura*, com equação de estado satisfazendo a desigualdade 1.17. A desigualdade 1.17 significa que requer-se uma pressão negativa para produzir uma expansão acelerada.

Capítulo 2

Evidência da energia escura

2.1 Vínculos de supernova Ia

2.1.1 Distância de luminosidade

Seja um objeto distante na posição $(t, \chi_s(t), \theta_s, \phi_s)$ com θ_s e ϕ_s fixos, que emite um fóton com energia ΔE cada intervalo de tempo Δt . Na Terra, na posição $(t_0, 0, 0, 0)$, um observador registra a chegada de cada fóton com energia ΔE_0 cada intervalo de tempo Δt_0 . A luminosidade absoluta e a luminosidade aparente estão definidas por

$$L_s = \frac{\Delta E}{\Delta t} \text{ e } L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0}, \quad (2.1)$$

respectivamente. Como sabemos a energia de cada fóton que é emitido é $\Delta E = h\nu$ e a energia de cada fóton recebido é $\Delta E_0 = h\nu_0$, onde h é a constante de Planck, ν e ν_0 são a frequência de cada fóton. Deste modo tem-se que $\frac{\Delta E}{\Delta E_0} = \frac{\nu}{\nu_0}$ e pela definição do redshift

$$1 + z = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{a_0}{a}, \quad (2.2)$$

então

$$\frac{\Delta E}{\Delta E_0} = 1 + z. \quad (2.3)$$

Agora, seja Δ o comprimento que percorre o fóton no tempo Δt . Também, seja Δt pequeno de tal jeito que o fator de escala $a(t)$ não mude. Então pela trajetória geodésica que percorre cada fóton, segundo a métrica (1.4), tem-se que $\Delta t = a(t)\Delta$ e do mesmo modo para o fóton que chega à Terra no tempo t_0 , satisfaz-se $\Delta t_0 = a_0\Delta$. Assim

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t} = 1 + z. \quad (2.4)$$

Portanto, pela equação 2.1, 2.3 e a 2.4 têm-se que

$$L_s = L_0(1 + z)^2. \quad (2.5)$$

A luz viajando na direção χ satisfaz a equação geodésica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 d\chi^2 = 0, \quad (2.6)$$

e, portanto, integrando tem-se

$$\chi_s = \int_0^{\chi_s} d\chi = \int_{t_0}^t \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.7)$$

da definição de z , equação 2.2,

$$z = \frac{a_0}{a} - 1, \quad (2.8)$$

então

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a_0}{a} \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{a_0}{a} H, \quad (2.9)$$

e

$$dt = -\frac{dz}{\frac{a_0}{a} H}, \quad (2.10)$$

desta maneira fazendo a mudança de variável t por z na integral 2.7 se chega à expressão

$$\chi_s = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (2.11)$$

O área da esfera com centro em $(\chi_s, \theta_s, \phi_s)$ e raio χ_s , de acordo com a métrica 1.4, está dada por

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{-g} d\theta d\phi = 4\pi a_0^2 f^2(\chi_s), \quad (2.12)$$

onde g é o determinante da métrica espacial, em $t = t_0$

$$d\gamma^2 = a_0^2 f^2(\chi) d\theta^2 + a_0^2 f_K^2(\chi) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.13)$$

Portanto o fluxo de energia recebido pelo observador em $(t_0, 0, 0, 0)$ é

$$F = \frac{L_0}{4\pi a_0^2 f_K^2(\chi_s)}. \quad (2.14)$$

A distancia de luminosidade define-se como

$$d_L^2 = \frac{L_s}{4\pi F}, \quad (2.15)$$

então pela definição de d_L^2 e da equação 2.5 e 2.14 obtém-se

$$d_L = a_0 f_K(\chi_s) (1 + z), \quad (2.16)$$

Lembrando que no universo de FRW com curvatura $K = 0$ (universo plano) satisfaz $f_K(\chi_s) = \chi$, equação 1.5, e usando a equação 2.11 encontra-se que

$$d_L = (1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (2.17)$$

A densidade de energia ρ do lado direito da equação 1.16 inclui todas as componentes presentes no universo, matéria bariônica, radiação, energia escura, matéria escura, etc. Considere-se que cada componente da energia total do universo tem uma equação de estado ω_i , que não muda no transcurso do tempo. Deste jeito a densidade de energia total está dada por

$$\rho = \sum_i \rho_i^{(0)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega_i)}, \quad (2.18)$$

por meio da equação 2.2, obtém-se

$$\rho = \sum_i \rho_i^{(0)} (1+z)^{3(1+\omega_i)}, \quad (2.19)$$

assim a equação 1.17 com $K = 0$ escreve-se na forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i^{(0)} (1+z)^{3(1+\omega_i)} \quad (2.20)$$

e da definição do parâmetro de densidade $\Omega_i^{(0)} = \frac{\rho_i^{(0)}}{\rho_c^{(0)}}$, para cada componente, onde $\rho_c^{(0)} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ é a densidade crítica do universo no instante t_0 , encontra-se que

$$H^2 = H_0^2 \sum_i \Omega_i^{(0)} (1+z)^{3(1+\omega_i)}, \quad (2.21)$$

portanto, substituindo a última equação (2.21) na equação (2.17), obtém-se finalmente

$$d_L = \frac{(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\sum_i \Omega_i^{(0)} (1+z)^{3(1+\omega_i)}}}. \quad (2.22)$$

Na figura (2.1) se tem dados de observação da distância de luminosidade d_L versus redshift z junto com curvas teóricas derivadas da equação (2.22). Nesta figura pode-se ver que para o universo plano no qual dominam dois tipos de componentes, a matéria escura fria com equação de estado $\omega_m = 0$ e o outro uma componente com equação de estado $\omega_\varphi \approx -1$ tal que $\Omega_\varphi \approx 0.7$ e $\Omega_m \approx 0.3$ se ajusta muito bem aos dados experimentais. Este é um dos argumentos para apoiar a existência da energia escura.

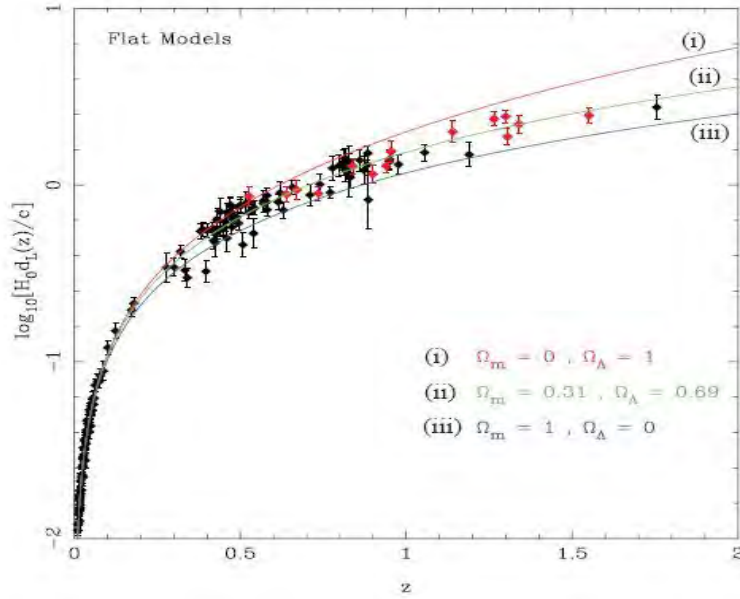


Figura 2.1: Nesta figura pode-se observar três curvas teóricas traçadas de acordo com a equação (2.22) e um conjunto de valores determinados via observação para a dependência entre a distância luminosidade d_L e o redshift z (esta figura foi retirada da referência [3]). Como se pode constatar a curva teórica que mais se ajusta aos dados experimentais é aquela que se constrói considerando $\Omega_m = 0.31$ e $\Omega_\Lambda = 0.69$ (constante cosmológica). Este é um dos argumentos para apoiar a existência da energia escura

2.2 A idade do universo e a constante cosmológica

Otra peça de evidencia para a existência da energia escura ocorre quando se compara a idade do universo (t_0) com a idade de populações de estrelas mais velhas (t_s). Se requer $t_0 > t_s$, mas isto só se logra num modelo cosmológico plano quando se considera a existência da energia escura. Na referencia [16] se calculo a idade do cúmulo globular na via láctea do ordem de $t_1 = 13.5 \pm 0.2$ Gyr. Usando uma técnica diferente na referencia [17] obteve-se a idade do cúmulo globular $M4$ como $t_1 = 12.7 \pm 0.7$ Gyr, o qual é o cúmulo mais velho conhecido. Então a idade do universo deve satisfazer $t_0 > 11 - 12$ Gyr.

Agora vai-se determinar a idade do universo para dois situações . Na primeira situação só considera-se materia escura. Na segunda situação considera-se dos componentes para o universo, a materia escura e a energia escura na forma de constante cosmológica. A radiação pode-se despreciar em ambos casos já que o período dominado pela radiação é muito menor em relação á idade total do universo.

De acordo com a equação 2.9 tem-se que

$$-\int_{t_0}^0 dt = \int_0^\infty \frac{dz}{H(1+z)}, \quad (2.23)$$

onde o tempo atual é considerado como o tempo zero e o tempo t_0 é um instante de tempo no começo do universo. O redshift de um fóton emitido neste instante é infinito. Assim,

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{H(1+z)}, \quad (2.24)$$

Segundo a equação 2.21, tem-se que

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_m^{(0)} (1+z)^3 + \Omega_\lambda^{(0)} \right]. \quad (2.25)$$

Pela equação 2.2 e a 2.25, a equação 2.24 escreve-se do jeito

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{H_0 (1+z) \left(\Omega_m^{(0)} (1+z)^3 + \Omega_\lambda^{(0)} \right)^{1/2}}. \quad (2.26)$$

Num universo dominado pela materia escura não relativista, $\Omega_m = 1$ y $\Omega_\lambda = 0$, durante a maior parte da história, a idade do universo está dada por

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}, \quad (2.27)$$

Das observações do telescópio espacial Hubble [18], das observações da CMB [19] e da estrutura a grande escala [20], a grandeza do parâmetro de Hubble no presente

é $H_0^{-1} = 9.776h^{-1}$ Gyr com $0.64 < h < 0.80$. Assim, de acordo com a equação 2.27, se obtém $t_0 = 8 - 10$ Gyr, valor que não satisfaz o requerimento. Pelo tanto um modelo do universo plano sem energia escura não satisfaz. Agora, considere-se a contribuição por parte da energia escura, pela equação 2.26 tem-se que

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_\lambda^{(0)}}}, \quad (2.28)$$

integrando encontra-se

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\lambda^{(0)}}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_\lambda^{(0)}}}{\sqrt{\Omega_m^{(0)}}} \right). \quad (2.29)$$

De acordo com a evidencia experimental [1, 2], tem-se que $\Omega_m^{(0)} = 0.3$ e $\Omega_\lambda^{(0)} = 0.7$, então a idade do universo, segundo a equação 2.29 é do ordem $t_0 = 0.964H_0^{-1}$, o qual corresponde a $t_0 = 13.1$ Gyr para $h=0.72$, idade que satisfaz a condição $t_0 > 11 - 12$ Gyr. Pelo tanto requer-se a existência da energia escura para poder ter consistência com as estimações da idade das estrelas velhas.

Capítulo 3

Quintessência

O modelo de quintessência postula a existência de um campo escalar ϕ que ainda não se encontra no mínimo de seu potencial $V(\phi)$. A densidade de energia associada ao campo pode ser uma explicação para a energia escura caso a equação de estado para o campo satisfaça $\omega < -1/3$.

3.1 Equação de movimento

A ação para o modelo de quintessência é

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right]. \quad (3.1)$$

Variando a ação com respeito do campo tem-se que

$$\delta S = \int d^4x \delta(\sqrt{-g}L), \quad (3.2)$$

$$\delta(\sqrt{-g}L) = \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\partial_\mu\phi} \delta\partial_\mu\phi, \quad (3.3)$$

onde $\delta\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta\phi$, logo

$$\delta(\sqrt{-g}L) = \sqrt{-g} \frac{\partial L}{\partial\phi} \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\partial_\mu\phi} \delta\phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\partial_\mu\phi} \right) \delta\phi, \quad (3.4)$$

e portanto

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial\partial_\mu\phi} \right) \right] \delta\phi, \quad (3.5)$$

onde o termo de superfície foi eliminado.

Agora do princípio de mínima ação $\delta S = 0$, e para $\delta\phi$ arbitrário tem-se

$$\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial\partial_\mu\phi} \right) = 0, \quad (3.6)$$

para o campo de quintessência $L = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$, logo substituindo encontra-se

$$\sqrt{-g}\partial_\mu\partial^\mu\phi + \partial_\mu\sqrt{-g}\partial^\mu\phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (3.7)$$

e para o caso *FRW* plano e ϕ espacialmente homogêneo $\sqrt{-g} = a^3$ e

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (3.8)$$

3.2 Tensor momentum Energia

O tensor momentum energia do campo escalar está definido assim

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.9)$$

e portanto para o campo de quintessência tem-se que

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi) \right], \quad (3.10)$$

ver apêndice A. Subindo um índice e considerando o campo espacialmente homogêneo tem-se que

$$\rho_\phi = -T_0^0 = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (3.11)$$

também

$$p_\phi = T_i^i = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (3.12)$$

3.3 Dinâmica cosmológica de quintessência na presença de um fluido barotrópico perfeito

As equações que definem o modelo são

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} (\rho_\phi + \rho_m), \quad (3.13)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} (\rho_\phi + \rho_m + p_\phi + p_m), \quad (3.14)$$

e

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.15)$$

onde ρ_m é a densidade de energia da matéria escura, considerada com um fluido barotrópico e não relativístico (matéria escura fria). A densidade de energia da matéria bariônica é desprezada. Também, $\kappa = 8\pi G$ é uma constante.

Introduzindo as variáveis do espaço de fase

$$x = \frac{\kappa\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \quad y = \frac{\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3}H}, \quad \lambda = -\frac{V_{,\phi}}{\kappa V} \quad e \quad \Gamma = \frac{VV_{,\phi\phi}}{V_{,\phi}^2}, \quad (3.16)$$

e derivando com respeito ao tempo físico tem-se

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\kappa\ddot{\phi}}{\sqrt{6}H} + \frac{\kappa\dot{\phi}}{\sqrt{6}} \left(-\frac{\dot{H}}{H^2} \right). \quad (3.17)$$

Substituindo o tempo físico pelo número de e-folding $N = \ln a$, $\frac{dN}{dt} = H$ obtém-se

$$\frac{dx}{dN} = \frac{\kappa\ddot{\phi}}{\sqrt{6}H^2} + x \left(-\frac{\dot{H}}{H^2} \right). \quad (3.18)$$

A equação de movimento do campo escalar

$$\frac{\kappa\ddot{\phi}}{\sqrt{6}H^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \lambda y^2 - 3x, \quad (3.19)$$

também, da equação 3.14

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{\kappa^2}{2H^2} (\rho_\phi + p_\phi + \rho_m (1 + \omega_m)), \quad (3.20)$$

onde $\rho_\phi + p_\phi = \dot{\phi}^2$ e portanto

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = 3 \left(\frac{\kappa^2 \dot{\phi}^2}{3H^2} \right) + \frac{\kappa^2 \rho_m}{2H^2} (1 + \omega_m), \quad (3.21)$$

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = 3x^2 + \frac{\kappa^2 \rho_m}{2H^2} (1 + \omega_m). \quad (3.22)$$

Por comodidade se vai conservar ω_m , no final se considera matéria escura fria $\omega_m = 0$. Definindo $\gamma = 1 + \omega_m$ e da equação 3.11 e 3.13 tem-se que

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_m \right), \quad (3.23)$$

$$1 = \frac{\kappa^2 \dot{\phi}^2}{6H^2} + \frac{\kappa^2 V(\phi)}{3H^2} + \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2} = 1 - x^2 - y^2, \quad (3.25)$$

logo

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = 3x^2 + \frac{3\gamma}{2} (1 - x^2 - y^2), \quad (3.26)$$

portanto

$$\frac{dx}{dN} = \frac{\sqrt{6}}{2} \lambda y^2 - 3x + \left[3x^2 + \frac{3\gamma}{2} (1 - x^2 - y^2) \right], \quad (3.27)$$

$$\frac{dx}{dN} = \frac{\sqrt{6}\lambda}{2} y^2 - 3x + \frac{3}{2} x [(2 - \gamma) x^2 + (1 - y^2) \gamma]. \quad (3.28)$$

Da mesma maneira

$$\frac{dy}{dN} H = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{V}} \frac{V_{,\phi}}{H} \dot{\phi} + \frac{\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\dot{H}}{H^2} \right), \quad (3.29)$$

$$\frac{dy}{dN} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \left(\frac{\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \right) \left(\frac{\kappa\dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \right) \left(-\frac{V_{,\phi}}{\kappa V} \right) + \left(\frac{\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3}V} \right) \left(-\frac{\dot{H}}{H^2} \right), \quad (3.30)$$

$$\frac{dy}{dN} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \lambda xy + \frac{3y}{2} [(2 - \gamma) x^2 + (1 - y^2) \gamma]. \quad (3.31)$$

Finalmente

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\frac{V_{,\phi\phi}}{\kappa V} \phi + \frac{V_{,\phi}}{\kappa} \left(\frac{V_{,\phi}\dot{\phi}}{V^2} \right), \quad (3.32)$$

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\left(\frac{VV_{,\phi\phi}}{V_{\phi}^2} \right) \left(\frac{V_{,\phi}^2}{\kappa^2 V^2} \right) \left(\frac{\kappa\dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \right) \sqrt{6} + \sqrt{6} \left(-\frac{V_{,\phi}}{\kappa V} \right)^2 \left(\frac{\kappa\dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \right), \quad (3.33)$$

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\sqrt{6} x \lambda^2 \Gamma + \lambda^2 x \sqrt{6}, \quad (3.34)$$

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\sqrt{6} \lambda^2 (\Gamma - 1) x. \quad (3.35)$$

Junto com a equação

$$x^2 + y^2 + \frac{k^2 \rho_m}{3H^2} = 1, \quad (3.36)$$

que expressa o fato que o universo seja muito plano $\Omega_\phi + \Omega_m = 1$. O sistema de equações do modelo ficam assim

$$\frac{dx}{dN} = \frac{\sqrt{6}\lambda}{2}y^2 - 3x + \frac{3}{2}x[(2-\gamma)x^2 + (1-y^2)\gamma]. \quad (3.37)$$

$$\frac{dy}{dN} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda xy + \frac{3y}{2}[(2-\gamma)x^2 + (1-y^2)\gamma]. \quad (3.38)$$

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\sqrt{6}x\lambda^2\Gamma + \lambda^2x\sqrt{6}, \quad (3.39)$$

3.4 Parâmetros cosmológicos importantes no espaço de fase

Para expressar que o universo é plano tem-se o parâmetro de densidade de energia total. Para descrever sua expansão acelerada se tem o parâmetro da equação de estado. O parâmetro de densidade de energia está definido pela equação 1.20. No caso do campo de quintessência $\rho = \rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)$, e portanto

$$\Omega_\phi = \frac{\kappa^2 \dot{\phi}^2}{6H^2} + \frac{\kappa^2 V}{3H^2}, \quad (3.40)$$

e em termos de x e y

$$\Omega_\phi = x^2 + y^2. \quad (3.41)$$

Assim a condição de que o universo seja plano fica

$$\Omega_\phi + \Omega_m = x^2 + y^2 + \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2} = 1, \quad (3.42)$$

a mesma equação 3.36. O parâmetro de estado está definido pela equação 1.17. Então das equações 3.11 e 3.12, em termos de x e y a equação de estado para ϕ está dada por

$$\omega_\phi = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \quad (3.43)$$

Também se p e ρ são as densidade de pressão total e densidade de energia total, tem-se o parâmetro de estado efetivo ω_{eff} ,

$$\omega_{eff} = \frac{p_\phi + p_m}{\rho_\phi + \rho_m} = \frac{p_\phi}{\rho_c} + \frac{p_m}{\rho_c}, \quad (3.44)$$

onde

$$\frac{p_\phi}{\rho_c} = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} \frac{\rho_\phi}{\rho_c} = \omega_\phi \Omega_\phi, \quad (3.45)$$

e portanto

$$\omega_{eff} = x^2 - y^2 + \omega_m \Omega_m, \quad (3.46)$$

onde da equação 3.42 tem-se que $\Omega_m = 1 - x^2 - y^2$ e então

$$\omega_{eff} = -1 + \gamma + (2 - \gamma)x^2 - \gamma y^2. \quad (3.47)$$

Lembrando a desigualdade 1.18, a condição de expansão acelerada é $\omega_{eff} < -1/3$ ou em termos de $\gamma_{eff} = 1 + \omega_{eff}$ fica como $\gamma_{eff} < 2/3$.

3.5 Soluções constantes ou pontos críticos

O estudo é feito para λ constante, ou seja, para o potencial exponencial típico do modelo de quintessência,

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda \kappa \phi}, \quad (3.48)$$

e portanto $\Gamma = 1$. Os pontos críticos podem-se obter escolhendo

$$\frac{dx}{dN} = 0, \quad \frac{dy}{dN} = 0, \quad (3.49)$$

resultando em duas equações

$$-3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 + \frac{3}{2}x A(x, y) = 0, \quad (3.50)$$

$$y \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x + \frac{3}{2}A(x, y) \right) = 0, \quad (3.51)$$

onde $A(x, y) = [(2 - \gamma)x^2 + \gamma(1 - y^2)]$. Da equação 3.51 tem-se para $y \neq 0$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x + \frac{3}{2}A(x, y) = 0, \quad (3.52)$$

e

$$\frac{3x}{2}A(x, y) = \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x^2. \quad (3.53)$$

Substituindo 3.53 na equação 3.50

$$-3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x^2 = 0, \quad (3.54)$$

agora da mesma equação 3.53

$$y^2 = 1 + \frac{(2 - \gamma) x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \lambda x}{\gamma}, \quad (3.55)$$

então substituindo a equação 3.55 na equação 3.54 obtém-se o polinômio de segundo grau

$$x^2 - \frac{1}{\sqrt{6}\lambda} [3\gamma + \lambda^2] x + \frac{\gamma}{2} = 0. \quad (3.56)$$

As soluções são

$$x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\gamma}{\lambda}, \quad x_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{6}}. \quad (3.57)$$

Para a solução x_1 , da equação 3.55 encontra-se

$$y_1 = \sqrt{\frac{3}{2\lambda^2} (2 - \gamma) \gamma}, \quad (3.58)$$

e para a solução x_2 obtém-se

$$y_2 = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}. \quad (3.59)$$

No caso de $y = 0$, da equação 3.50

$$-3x + \frac{3x}{2} A(x, 0) = 0, \quad (3.60)$$

$$\frac{3x}{2} (2 - \gamma) [-1 + x^2] = 0, \quad (3.61)$$

de aquí tem-se as soluções

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1, \quad (3.62)$$

com $y = 0$. Em resumo, os pontos críticos são

(a) $x = 0$ e $y = 0$,

(b1) $x = 1$ e $y = 0$,

(b2) $x = -1$ e $y = 0$,

(c) $x = \frac{\lambda}{\sqrt{6}}$ e $y = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}$ e

(d) $x = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\gamma}{\lambda}$ $y = \sqrt{\frac{3}{2\lambda^2} (2 - \gamma) \gamma}$.

3.6 Estabilidade ao redor dos pontos críticos

Para estudar a estabilidade dos pontos críticos tem-se que calcular os autovalores da matriz de perturbações do sistema autônomo de equações diferenciais, ver apêndice B. Definindo

$$f(x, y) \equiv \frac{dx}{dN} = -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 + \frac{3}{2}xA(x, y), \quad (3.63)$$

$$g(x, y) \equiv \frac{dy}{dN} = \frac{3y}{2} \left[-\frac{\sqrt{6}}{3}\lambda x + A(x, y) \right], \quad (3.64)$$

a matriz de perturbações está definida por

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Da equação 3.63

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3 + \frac{9}{2}(2 - \gamma)x^2 + \frac{3}{2}(1 - y^2)\gamma, \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (\sqrt{6}\lambda - 3)y, \quad (3.67)$$

e da equação 3.64

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \left[-\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda + 3(2 - \gamma)x \right] y, \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x + \frac{3}{2}\gamma - \frac{9}{2}\gamma y^2 + \frac{3}{2}(2 - \gamma)x^2, \quad (3.69)$$

3.6.1 Ponto crítico (a)

Para esta solução, das equações 3.66, 3.67, 3.68 e 3.69 tem-se que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0, y=0} = -3 + \frac{3}{2}\gamma, \quad (3.70)$$

e

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{x=0, y=0} = \frac{3}{2}\gamma, \quad (3.71)$$

as outras entradas da matriz M são zero. Da equação de autovalores $\det(M - \mu I) = 0$ obtém-se

$$\left(-3 + \frac{3}{2}\gamma - \mu \right) \left(\frac{3}{2}\gamma - \mu \right) = 0, \quad (3.72)$$

de aquí os autovalores do M são

$$\mu_1 = -\frac{3}{2}(2 - \gamma), \quad \mu_2 = \frac{3}{2}\gamma. \quad (3.73)$$

No caso de um fluido material que satisfaz $2 - \gamma > 0$ e $\gamma > 0$ ($\gamma = 1$, matéria escura e $\gamma = 4$ radiação) encontra-se $\mu_1 < 0$ e $\mu_2 > 0$. Assim o ponto (a) é um ponto de sela. Também para esta solução, da equação 3.41 $\Omega_\phi = 0$, assim (a) é uma solução onde somente a radiação ou matéria escura contribui à densidade de energia total do universo. A matéria é dominante nesta fase. Também é uma fase onde não há expansão acelerada.

3.6.2 Ponto crítico (b1)

As entradas diferentes de zero da matriz M são

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=1, y=0} = 3(2 - \gamma), \quad (3.74)$$

e

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x=1, y=0} = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda, \quad (3.75)$$

da equação de autovalores encontra-se

$$(3(2 - \gamma) - \mu) \left(3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda - \mu\right) = 0, \quad (3.76)$$

de aquí que

$$\mu_1 = 3(2 - \gamma), \quad \mu_2 = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda. \quad (3.77)$$

De novo para o caso que interessa $\mu_2 > 0$ e $\mu_1 > 0$ ou $\mu_1 < 0$ dependendo do valor do λ . Em ambos casos o ponto (b1) é instável. No primeiro caso um nodo instável e no segundo um ponto de sela. Da equação 3.41 $\Omega_\phi = 1$ e o campo de quintessência é dominante. Pela equação 3.41 $\omega_{eff} = 1 > -1/3$ e portanto esta solução também não pode descrever a expansão acelerada.

3.6.3 Ponto crítico (b2)

Para este ponto

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=1, y=0} = 3(2 - \gamma), \quad (3.78)$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x=1,y=0} = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda, \quad (3.79)$$

e da equação de autovalores

$$(3(2 - \gamma) - \mu) \left(3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda - \mu\right) = 0, \quad (3.80)$$

de aquí

$$\mu_1 = 3(2 - \gamma), \quad \mu_2 = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda. \quad (3.81)$$

Também para este ponto, tem-se que $\mu_2 > 0$ e $\mu_1 > 0$ ou $\mu_1 < 0$. E é um nodo instável ou ponto de sela, sendo em ambos casos instável. Do mesmo modo da equação 3.41 $\Omega_\phi = 1$ e de 3.47 $\omega_{eff} = 1 > -1/3$. Logo esta solução também é uma solução de campo escalar dominante e sem expansão acelerada.

3.6.4 Ponto crítico (c)

Para esta solução as entradas diferente de zero da matriz M são

$$M_{1,1} = -3 + \frac{1}{2}(3 - \gamma)\lambda^2, \quad (3.82)$$

$$M_{1,2} = \frac{3\lambda}{\sqrt{6}}(2 - \gamma)\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}, \quad (3.83)$$

$$M_{2,1} = \frac{3\lambda}{\sqrt{6}}(1 - \gamma)\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}, \quad (3.84)$$

e

$$M_{2,2} = -3\gamma \left(1 - \frac{\lambda^2}{6}\right). \quad (3.85)$$

Assim, da equação de autovalores encontra-se o polinômio de segundo grau

$$\mu^2 + \frac{3}{2}[2(1 + \gamma) - \lambda^2]\mu - \frac{1}{2}(3\gamma - \lambda^2)(-6 + \lambda^2) = 0, \quad (3.86)$$

e a solução de esta equação é

$$\mu_1 = -3 + \frac{\lambda^2}{2}, \quad \mu_2 = -3\gamma + \lambda^2. \quad (3.87)$$

Então , para que $\mu_1 < 0$, tem-se que ter

$$\lambda^2 < 6, \quad (3.88)$$

e $\mu_2 < 0$

$$\lambda^2 < 3\gamma. \quad (3.89)$$

Sendo $\gamma < 2$ então o ponto crítico (c) é um nodo estável se

$$\lambda^2 < 3\gamma. \quad (3.90)$$

No outro caso, para

$$3\gamma < \lambda^2 < 6, \quad (3.91)$$

tem-se que $\mu_1 < 0$ e $\mu_2 > 0$ e portanto (c) é um ponto de sela. Da equação 3.41 para este ponto encontra-se que $\Omega_\phi = 1$. Por tanto nesta solução tem-se que a energia escura é a componente dominante da densidade de energia total.

Agora, da equação 3.47, encontra-se para esta solução

$$\omega_{eff} = \omega_m + (2 - \gamma) \left(\frac{\lambda}{\sqrt{6}} \right)^2 - \gamma \left(1 - \frac{\lambda^2}{6} \right), \quad (3.92)$$

$$\omega_{eff} = \frac{\lambda^2}{3} - 1, \quad (3.93)$$

e a expansão acelerada se dá para $\frac{\lambda^2}{3} - 1 < -\frac{1}{3}$, isto é

$$\lambda^2 < 2. \quad (3.94)$$

Então, para

$$\lambda^2 < 2, \quad \lambda^2 < 3\gamma, \quad (3.95)$$

tem-se que o ponto (c) é uma solução de campo escalar dominante attractor e com expansão acelerada.

3.6.5 Ponto crítico (d)

Para esta solução as componentes do M são

$$M_{1,1} = -3 + \frac{3}{2}\gamma + \frac{9}{2}(2 - \gamma) \frac{\gamma^2}{\lambda^2}, \quad (3.96)$$

$$M_{1,2} = 3 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\gamma^2}{\lambda^2} \right), \quad (3.97)$$

$$M_{2,1} = \frac{3}{2} \left[3(2 - \gamma) \frac{\gamma}{\lambda^2} - 1 \right] \sqrt{(2 - \gamma)\gamma}, \quad (3.98)$$

e

$$M_{2,2} = -\frac{9}{2}(2-\gamma)\frac{\gamma^2}{\lambda^2}, \quad (3.99)$$

então da equação de autovalores $\det(M - \mu I) = 0$ obtém-se o polinômio de segundo grau

$$\mu^2 + \frac{3}{2}(2-\gamma)\mu + \frac{9}{2}\left(1 - 3\frac{\gamma}{\lambda^2}\right)(2-\gamma) = 0, \quad (3.100)$$

e os autovalores são

$$\mu_{1,2} = -\frac{3}{4}(2-\gamma)\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{8(\lambda^2 - 3\gamma)\gamma}{\lambda^2(2-\gamma)}}\right]. \quad (3.101)$$

Lembrando que $2 - \gamma > 0$, então $\mu_1 < 0$ sempre. Enquanto que $\mu_2 < 0$ se

$$1 - \sqrt{1 - \frac{8\gamma(\lambda^2 - 3\gamma)}{\lambda^2(2-\gamma)}} > 0, \quad (3.102)$$

ou

$$\lambda^2 > 3\gamma. \quad (3.103)$$

O parâmetro efetivo é

$$\omega_{eff} = -1 + \gamma + (2-\gamma)\left(\sqrt{\frac{3\gamma}{2\lambda^2}}\right)^2 - \gamma\left(\sqrt{\frac{3}{2\lambda^2}(2-\gamma)\gamma}\right)^2, \quad (3.104)$$

$$\omega_{eff} = \gamma - 1. \quad (3.105)$$

A condição de expansão acelerada exige que $\gamma - 1 < -1/3$ e portanto $\gamma < 2/3$. Então esta solução não satisfaz a condição de expansão acelerada para o caso de que o fluido barotrópico material seja a matéria escura fria $\gamma = 1$. O parâmetro de densidade de energia é dado por

$$\Omega_\phi = x^2 + y^2 = \frac{3\gamma^2}{2\lambda^2} + \frac{3}{2\lambda^2}(2-\gamma)\gamma, \quad (3.106)$$

$$\Omega_\phi = \frac{3\gamma}{\lambda^2}, \quad (3.107)$$

sendo que $\lambda^2 < 3\gamma$ implica que $0 < \Omega_\phi < 1$. Portanto o ponto crítico (d) é um nodo estável e $\Omega_\phi < 1$ para $\lambda^2 > 3\gamma$. Para $\lambda^2 < 3\gamma$ é um ponto de sela e não é uma solução física $\Omega_\phi > 1$.

Assim o estudo feito permite concluir que pode-se descrever a expansão acelerada

do universo se o sistema dinâmico do campo de quintessência vai para o ponto fixo (c) com $\lambda^2 < 2$, em qual caso o estado final do universo está dominado pelo campo escalar, $\Omega_\phi = 1$. A solução (d) não pode explicar a aceleração atual do universo. Embora, está pode ser usada para proporcionar uma evolução cosmológica na qual a densidade de energia do campo escalar vai diminuindo proporcional á densidade do fluido background na era da radiação ou na era da matéria, como se vai ver mais adiante. Esta classe de solução é conhecida como solução de escala. Si a derivada do potencial exponencial vem a satisfazer $\lambda^2 < 2$ no presente, o universo sai do regime de escala e aproxima-se ao ponto crítico (c) levando a uma expansão acelerada. No capítulo 4 vai-se estudar o acoplamento do campo de quintessência com a matéria escura, e a solução de escala (d) vai poder explicar a expansão acelerada do universo.

Capítulo 4

Quintessência com acoplamento á matéria escura

A possibilidade de um campo escalar ϕ acoplado à matéria e seus consequência cosmológicas foram primeiro discutidas em [12]. Na referencia [13, 14] foi proposto um cenário de quintessência com acoplamento matéria escura, como uma extensão das teorias acopladas não minimalmente. Uma aspecto interessante dos cenários de energia escura acoplada é que o sistema pode-se aproximar para soluções de escala com uma expansão acelerada, em diferencia dos cenários sem acoplamento onde pode-se ter soluções de escala mas sem expansão acelerada.

4.1 Sem radiação

Considera-se o acoplamento entre o campo escalar de quintessência e a matéria escura fria. No estudo não considera-se a contribuição dos barions. Também, primeiro faz-se o estudo do sistema dinâmico sem considerar o fluido de radiação . Na última parte do capítulo considera-se o fluido de radiação , mas sem considerar o acoplamento de este com os outros fluidos.

A ação que vamos considerar está dada por

$$S = S_g + S_m + S_\phi, \quad (4.1)$$

sendo que a ação da matéria tem a dependência $S_m(g^{\mu\nu}, \psi, \phi)$, onde ψ são os campos

materiais. S_g é a ação da gravitação. Variando a ação com respeito do campo ϕ

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \frac{\delta S_m}{\delta \phi} + \frac{\delta S_\phi}{\delta \phi}, \quad (4.2)$$

onde

$$\frac{\delta S_m}{\delta \phi} = -\sqrt{-g}\sigma, \quad (4.3)$$

sendo σ a carga escalar que caracteriza a interação, [3, 13, 14]. A natureza da matéria escura não vai-se tratar, ela pode ser em principio matéria escura fermiônica ou bosônica com uma densidade lagrangiana específica. Do princípio de mínima ação $\delta S = 0$ tem-se que

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = -Q\rho_m, \quad (4.4)$$

onde define-se o parâmetro de acoplamento $Q = \frac{\sigma}{\rho_m}$ o qual é definido positivo. Neste capítulo considera-se constante.

As equações do modelo são

$$3H^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \rho_m, \quad (4.5)$$

$$-2\dot{H} = \dot{\phi}^2 + \gamma\rho_m, \quad (4.6)$$

junto com a equação 4.4. De aquí em adiante considere-se $\kappa = 1$. Introduz-se de novo as variáveis do espaço fase 3.16 e faz-se o mesmo procedimento que antes. Da conservação da energia se encontra $\dot{\rho}_m + 3H(1 + \omega_m)\rho_m = Q\rho_m$, e assim o comportamento do ρ_m depende do acoplamento e da dinâmica do campo escalar. $\rho_m \propto a^{-3}$ se $Q = 0$. Diferenciando x a respeito do número de e-folding N , tem-se

$$\frac{dx}{dN} = \frac{\ddot{\phi}}{\sqrt{6}H^2} + x \left(-\frac{\dot{H}}{H^2} \right), \quad (4.7)$$

o segundo termo é o mesmo que já foi deduzido na equação 3.26. Mas o primeiro termo tem uma nova contribuição dependente do acoplamento Q . Da equação 4.4

$$\ddot{\phi} = -Q\rho_m - V_{,\phi} - 3H\dot{\phi}, \quad (4.8)$$

e

$$\frac{\ddot{\phi}}{\sqrt{6}H^2} = -\frac{Q\rho_m}{\sqrt{6}H^2} + \frac{\sqrt{6}}{2}y^2\lambda - 3x, \quad (4.9)$$

então da equação 4.5

$$\rho_m = 3H^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (4.10)$$

e

$$-\frac{Q\rho_m}{\sqrt{6}H^2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}Q(1-x^2-y^2), \quad (4.11)$$

portanto

$$\frac{\ddot{\phi}}{\sqrt{6}H^2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}Q(1-x^2-y^2) + \frac{\sqrt{6}}{2}y^2\lambda - 3x, \quad (4.12)$$

e de aquí que

$$\frac{dx}{dN} = \sqrt{6}2\lambda y^2 - 3x + \frac{3}{2}xA(x, y) - \frac{\sqrt{6}Q}{2}(1-x^2-y^2). \quad (4.13)$$

Em quanto para diferenciar y a respeito do N não se tem novos termos. A equação 3.31 continua sendo válida.

4.1.1 Sistema autônomo e pontos críticos

Neste caso para encontrar as soluções constantes ou pontos críticos tem-se que resolver o sistema de equações (equações 4.13, 3.31 com x e y constantes)

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 - 3x + \frac{3}{2}xA(x, y) - \frac{\sqrt{6}Q}{2}(1-x^2-y^2) = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{3y}{2} \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\lambda x + A(x, y) \right) = 0. \quad (4.15)$$

Como antes no caso $y \neq 0$ obtém-se as equações 3.52, 3.53, e 3.55. Substituindo estas equações na primeira equação encontra-se o polinômio de segundo grau

$$\frac{\sqrt{6}}{\gamma}(\lambda + Q)x^2 - \left(3 + \frac{\lambda^2}{\gamma} + \frac{\lambda Q}{\gamma} \right)x + \frac{\sqrt{6}\lambda}{2} = 0, \quad (4.16)$$

as soluções são

$$x = \frac{\sqrt{6}\gamma}{2(\lambda + Q)}, \quad (4.17)$$

e a mesma solução x_2 , equação 3.57. De fato fazendo $Q = 0$ na solução 4.17 obtém-se a solução x_1 , equação 3.57. Também substituindo a solução 4.17 na equação 3.55 encontra-se

$$y = \sqrt{\frac{2Q(\lambda + Q) + 3(2 - \gamma)}{2(\lambda + Q)^2}}, \quad (4.18)$$

e para x_2 de novo a mesma solução y_2 , equação 3.59. Para $y = 0$ da equação 4.14 obtém-se o polinômio de terceiro grau

$$\frac{3}{2}(2 - \gamma)x^3 + \frac{\sqrt{6}Q}{2}x^2 - \frac{3}{2}(2 - \gamma)x - \frac{\sqrt{6}Q}{2} = 0, \quad (4.19)$$

as soluções são as mesmas soluções $x_4 = 1$, e $x_5 = -1$, equação 3.62 e

$$x = -\frac{\sqrt{6}Q}{3(2-\gamma)}. \quad (4.20)$$

Para $Q = 0$ recupera-se a solução $x_3 = 0$ da equação 3.62. Assim os pontos críticos que mudam pela presença do acoplamento ficam

$$(a) \ x = -\frac{\sqrt{6}Q}{3(2-\gamma)} \text{ e } y = 0$$

$$(d) \ x = \frac{\sqrt{6}\gamma}{2(\lambda+Q)} \text{ e } y = \sqrt{\frac{2Q(\lambda+Q)+3(2-\gamma)\gamma}{2(\lambda+Q)^2}}.$$

4.1.2 Estabilidade ao redor dos pontos críticos e propriedades

Das equações 3.31 e 4.13 os elementos da matriz de perturbações estão dados por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3 + \frac{9}{2}(2-\gamma)x^2 + \frac{3}{2}\gamma(1-y^2) + \sqrt{6}Qx, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y(\sqrt{6}\lambda - 3x\gamma + \sqrt{6}Q), \quad (4.22)$$

os outros elementos da matriz $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ são os mesmos 3.68 e 3.69 respectivamente

4.1.3 ponto crítico (a)

Para esta solução a matriz de perturbações está dada por 4.21

$$M_{1,1} = -3 + \frac{3}{2}\gamma + \frac{Q^2}{2-\gamma}, \quad (4.23)$$

e 3.71

$$M_{2,2} = \frac{3}{2}\gamma + \frac{\lambda Q}{2-\gamma} + \frac{Q^2}{2-\gamma}, \quad (4.24)$$

e os outros elementos da matriz são zero. De aquí a equação de autovalores

$$\left(-3 + \frac{3}{2}\gamma + \frac{Q^2}{2-\gamma} - \mu\right) \left(\frac{3}{2}\gamma + \frac{\lambda Q}{2-\gamma} + \frac{Q^2}{2-\gamma} - \mu\right) = 0, \quad (4.25)$$

e os autovalores são

$$\mu_1 = -\frac{3}{2}(2-\gamma) + \frac{Q^2}{2-\gamma}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2-\gamma} \left[\frac{3}{2}(2-\gamma)\gamma + Q(\lambda+Q) \right]. \quad (4.26)$$

Para este ponto crítico, da equação 4.26, tem-se que $\mu_1 < 0$ se

$$\frac{Q^2}{2-\gamma} < \frac{3}{2}(2-\gamma), \quad (4.27)$$

ou

$$Q < \sqrt{\frac{3}{2}}(2 - \gamma), \quad (4.28)$$

e μ_2 , também 4.26, é sempre positivo, dado que $2 - \gamma > 0$. Então (a) é um ponto de sela quando satisfaz-se a equação 4.28. E é um nodo instável no outro caso. Além disso (a) é justamente uma solução física somente quando é um ponto de sela, isto é no caso

$$\Omega_\phi = x^2 + y^2 = \frac{2Q^2}{3(2 - \gamma)^2} < 1, \quad (4.29)$$

se $Q < \sqrt{\frac{3}{2}}(2 - \gamma)$. O parâmetro de estado efetivo é

$$\omega_{eff} = -1 + \gamma + \frac{2Q^2}{3(2 - \gamma)}, \quad (4.30)$$

e $\omega_{eff} < -1/3$ se $Q^2 < 0$ para $\gamma \leq 1$, logo para o caso de interesse $\gamma = 1$, matéria escura fria, (a) não descreve uma solução com expansão acelerada.

4.1.4 ponto crítico (b1)

Para esta solução

$$M_{1,1} = 3(2 - \gamma) + \sqrt{6}Q, \quad (4.31)$$

$$M_{2,2} = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda, \quad (4.32)$$

e os outros elementos são zero. A equação de autovalores está dada por

$$\left(6 - 3\gamma + \sqrt{6}Q - \mu\right) \left(3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda - \mu\right) = 0, \quad (4.33)$$

e

$$\mu_1 = 3(2 - \gamma) + \sqrt{6}Q, \quad \mu_2 = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda. \quad (4.34)$$

4.1.5 ponto crítico (b2)

Nesta solução

$$M_{1,1} = 3(2 - \gamma) - \sqrt{6}Q, \quad (4.35)$$

$$M_{2,2} = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda, \quad (4.36)$$

e os outros elementos são zero. Da equação de autovalores

$$\left(6 - 3\gamma - \sqrt{6}Q - \mu\right) \left(3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda - \mu\right) = 0, \quad (4.37)$$

encontra-se

$$\mu_1 = 3(2 - \gamma) - \sqrt{6}Q, \quad \mu_2 = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda. \quad (4.38)$$

Tanto para o ponto (b1) como para (b2), $\omega_{eff} = 1$ e $\Omega_\phi = 1$. São soluções de campo escalar dominante sim expansão acelerada. Para (b1) $\mu_1 > 0$ para todo Q e λ . Enquanto que $\mu_2 < 0$ se $\lambda > \sqrt{6}$. Então (b1) é um ponto de sela se $\lambda > \sqrt{6}$ do contrário é um nodo instável. Para o ponto (b2), $\mu_1 < 0$ se $Q > \sqrt{\frac{3}{2}}(2 - \gamma)$. E $\mu_2 > 0$ sempre. Portanto (b2) é um ponto de sela se $Q > \sqrt{\frac{3}{2}}(2 - \gamma)$ e em outro caso é um nodo instável.

4.1.6 ponto crítico (c)

As entradas do M para este ponto são

$$M_{1,1} = -3 + \frac{1}{2}(3 - \gamma)\lambda^2 + Q\lambda, \quad (4.39)$$

$$M_{1,2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}[(2 - \gamma)\lambda + 2Q], \quad (4.40)$$

$$M_{2,1} = \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda(1 - \gamma)\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}, \quad (4.41)$$

e

$$M_{2,2} = -3\gamma\left(1 - \frac{\lambda^2}{6}\right). \quad (4.42)$$

A equação de autovalores leva ao polinômio de segundo grau

$$\mu^2 + \left[3(1 + \gamma) - \frac{3}{2}\lambda^2 - Q\lambda\right]\mu + 3\left(1 - \frac{\lambda^2}{6}\right)(3\gamma - \lambda^2 - Q\lambda) = 0, \quad (4.43)$$

e as soluções são

$$\mu_1 = -3 + \frac{\lambda^2}{2}, \quad \mu_2 = -3\gamma + \lambda(\lambda + Q). \quad (4.44)$$

Da equação (4.44), $\mu_1 < 0$ para $\lambda < \sqrt{6}$ e $\mu_2 < 0$ se

$$\lambda^2 + Q\lambda - 3\gamma < 0, \quad (4.45)$$

ou seja $\lambda < \lambda_c$ com

$$\lambda_c = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 + 12\gamma}}{2}. \quad (4.46)$$

Assim se $\lambda < \lambda_c$ e $\lambda < \sqrt{6}$ então (c) é um nodo estável. Agora como na seção 3.6.4, $\Omega_\phi = 1$ e $\omega_{eff} = -1 + \frac{\lambda^2}{3} < -1/3$ se $\lambda < \sqrt{2}$. De aquí que (c) é uma solução atratora com expansão acelerada se $\lambda < \sqrt{2}$ e $\lambda < \lambda_c$. Este tipo de solução descreve um universo onde a energia escura domina completamente e há expansão acelerada.

4.1.7 ponto crítico (d)

Para esta solução

$$M_{1,1} = -3 + \frac{9}{2}(2-\gamma) \left(\frac{\sqrt{6}\gamma}{2(\lambda+Q)} \right)^2 + \frac{3}{2}\gamma \left(1 - \frac{2Q(+Q) + 3(2-\gamma)\gamma}{2(\lambda+Q)^2} \right) + \frac{6Q\gamma}{2(\lambda+Q)}, \quad (4.47)$$

e depois de simplificar um pouco

$$M_{1,1} = -\frac{3}{2}(2-\gamma) + \frac{3}{\lambda+Q} \left[Q + \frac{1}{2(\lambda+Q)} (3(2-\gamma)\gamma - Q(\lambda+Q)) \right]. \quad (4.48)$$

Também substituindo em a 4.22, 3.68 e 3.69 encontra-se

$$M_{1,2} = \sqrt{6} \sqrt{\frac{2Q(\lambda+Q) + 3(2-\gamma)\gamma}{2(\lambda+Q)^2}} \left(\lambda - \frac{3\gamma^2}{2(\lambda+Q)} + Q \right), \quad (4.49)$$

$$M_{2,1} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{\frac{2Q(\lambda+Q) + 3(2-\gamma)\gamma}{2(\lambda+Q)^2}} \left(\lambda - \frac{3(2-\gamma)\gamma}{\lambda+Q} \right), \quad (4.50)$$

e

$$M_{2,2} = \frac{3}{2}\gamma - \frac{3\lambda\gamma}{2(\lambda+Q)} - \frac{9\gamma}{2(\lambda+Q)^2} [(2-\gamma)\gamma + Q(\lambda+Q)]. \quad (4.51)$$

Da equação de autovalores obtém-se o polinômio de segundo grau

$$\mu^2 + b\mu + c = 0, \quad (4.52)$$

onde $b = -(M_{1,1} + M_{2,2})$, e $c = M_{1,1}M_{2,2} - M_{1,2}M_{2,1}$. Das equações 4.48 e 4.51 encontra-se que

$$b = \frac{3[\lambda(2-\gamma) + 2Q]}{2(\lambda+Q)}, \quad (4.53)$$

e $-4c = b^2 f(\lambda, Q)$ com

$$f(\lambda, Q) = \frac{8[3(2-\gamma)\gamma + 2Q(\lambda+Q)][-\lambda(\lambda+Q) + 3\gamma]}{3[\lambda(2-\gamma) + 2Q]^2}. \quad (4.54)$$

De esta maneira $b^2 - 4c = b^2(1 + f(\lambda, Q))$ e

$$\mu_{1,2} = -\frac{b}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + f(\lambda, Q)} \right). \quad (4.55)$$

Das equações 4.54 e 4.55 $\mu_1 < 0$ se $\lambda > \lambda_c$ e μ_2 é negativo para todo λ e Q . Da equação 3.41 tem-se que o parâmetro de densidade de energia está dado por

$$\Omega_\phi = x^2 + y^2 = \frac{3\gamma + Q(\lambda + Q)}{(\lambda + Q)^2} = \frac{\left(1 + \frac{Q}{\lambda}\right) \frac{Q}{\lambda} + \frac{3}{\lambda^2}}{\left(1 + \frac{Q}{\lambda}\right)^2}, \quad (4.56)$$

e $\Omega_\phi < 1$ se $\lambda > \lambda_c$. Enquanto ao parâmetro de estado efetivo, pela equação 3.47, encontra-se

$$\omega_{eff} = -1 + \gamma - \frac{Q\gamma}{\lambda + Q} = -\frac{Q/\lambda}{1 + Q/\lambda} < -1/3, \quad (4.57)$$

para $\gamma = 1$ se $\lambda < 2Q$. Portanto para $\lambda_c < \lambda < 2Q$ o ponto (d) é um nodo estável e uma possível solução cosmológica com expansão acelerada. Além o ponto (d) é uma solução de escala, na qual se pode aliviar o problema da coincidência cósmica, porque permite explicar porque no estado atual o universo tem densidades de energia da matéria escura e da energia escura da mesma ordem de grandeza [22].

4.2 Com radiação

Vamos agora considerar, além da matéria escura fria, também um outro fluido barotrópico com equação de estado constante, $\omega_r = 1/3$, a radiação. A ação que vai considerar-se é

$$S = S_g + S_\phi + S_m + S_r, \quad (4.58)$$

este caso adiciona-se a ação da radiação, mas somente se considera o acoplamento entre o campo de quintessência e a matéria escura. Variando a ação com respeito ao campo escalar, de novo encontra-se

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = -Q\rho_m. \quad (4.59)$$

As equações de Friedmann ficam

$$3H^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \rho_m + \rho_r, \quad (4.60)$$

$$-2\dot{H} = \dot{\phi}^2 + \rho_m\gamma + \frac{4}{3}\rho_r, \quad (4.61)$$

e a equação de movimento para a densidade de energia da componente de radiação

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0. \quad (4.62)$$

De novo introduz-se as variáveis do espaço de fase 3.16 adicionando

$$z = \frac{\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{3}H}. \quad (4.63)$$

Seguindo o mesmo procedimento que na seção 3.3, neste caso encontra-se as equações

$$\rho_m = 3H^2 - \frac{\dot{\phi}}{2} - V(\phi) - \rho_r, \quad (4.64)$$

e

$$\frac{\rho_m}{\sqrt{6}H^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} (1 - x^2 - y^2 - z^2), \quad (4.65)$$

também

$$\ddot{\phi} = -Q\rho_m - 3H\dot{\phi} - V_{,\phi}, \quad (4.66)$$

e

$$\frac{\ddot{\phi}}{\sqrt{6}H^2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}Q(1 - x^2 - y^2 - z^2) - 3x + \frac{\sqrt{6}}{2}y^2\lambda. \quad (4.67)$$

Por outro lado da equação 4.61

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{2H^2} \left(\dot{\phi}^2 + \rho_m\gamma + \frac{4}{3}\rho_r \right), \quad (4.68)$$

e substituindo a equação 4.65 no segundo termo obtém-se

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = 3x^2 + 2z^2 + \frac{3}{2}\gamma(1 - x^2 - y^2 - z^2). \quad (4.69)$$

Então a equação 4.7 fica

$$\frac{dx}{dN} = -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 + \frac{3}{2}xA(x, y, z) - \frac{\sqrt{6}}{2}Q(1 - x^2 - y^2 - z^2), \quad (4.70)$$

onde $A(x, y, z) = (2 - \gamma)x^2 + (\frac{4}{3} - \gamma)z^2 + \gamma(1 - y^2)$ também a equação 3.31 muda para

$$\frac{dy}{dN} = \frac{3y}{2} \left[-\frac{\sqrt{6}}{3}\lambda x + A(x, y, z) \right]. \quad (4.71)$$

Do mesmo jeito que antes, derivando o z , equação 4.63, a respeito de N encontra-se

$$\frac{dz}{dN}H = \frac{1}{\sqrt{3}H} \frac{1}{2\sqrt{\rho_r}}\dot{\rho}_r + \frac{\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\dot{H}}{H^2} \right). \quad (4.72)$$

Substituindo as equações 4.62 e 4.68 obtém-se

$$\frac{dz}{dN} = \frac{1}{\sqrt{3}H^2} \frac{1}{2\sqrt{\rho_r}} (-4H\rho_r) + z \left[3x^2 + 2z^2 + \frac{3}{2}\gamma(1 - x^2 - y^2 - z^2) \right], \quad (4.73)$$

$$\frac{dz}{dN} = -2 \frac{\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{3}H} + \frac{3}{2} A(x, y, z), \quad (4.74)$$

logo

$$\frac{dz}{dN} = \frac{3}{2} z \left[-\frac{4}{3} + A(x, y, z) \right]. \quad (4.75)$$

Então o sistema autônomo de equações diferenciais para resolver está dado pelas equações 4.70, 4.71 e 4.75.

4.2.1 Sistema autônomo e pontos críticos

Considera-se soluções constantes x, y, z de 4.70, 4.71 e 4.75. Da equação 4.75 para $z \neq 0$

$$-\frac{4}{3} + A(x, y, z) = 0, \quad (4.76)$$

e

$$A(x, y, z) = \frac{4}{3} \quad (4.77)$$

da equação 4.71, também para $y \neq 0$

$$-\frac{\sqrt{6}}{3} \lambda x + A(x, y, z) = 0, \quad (4.78)$$

e de acordo com a equação 4.77 encontra-se

$$x = \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{1}{\lambda}. \quad (4.79)$$

Substituindo esta solução constante nas equação 4.70 e 4.78 obtém-se respectivamente

$$-\frac{4}{3} + \frac{8(2-\gamma)}{3\lambda^2} \gamma - \gamma y^2 + \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) z^2 = 0, \quad (4.80)$$

e

$$-\frac{4}{3\lambda} - Q \left(1 - \frac{8}{3\lambda^2} \right) + (\lambda + Q) y^2 + Q z^2 = 0. \quad (4.81)$$

A solução deste sistema de duas equações algébricas é

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}\lambda}, \quad z = \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda^2}}. \quad (4.82)$$

Agora para $z \neq 0$ e $y = 0$, da equação 4.70 junto com 4.77

$$-1 - \sqrt{\frac{2}{3}} Q^{-1} x + x^2 + z^2 = 0, \quad (4.83)$$

e da mesma equação 4.77 com $y = 0$

$$-1 + \frac{2-\gamma}{\frac{4}{3}-\gamma} x^2 + z^2 = 0. \quad (4.84)$$

A solução deste sistema algébrico de equações é

$$x = 0, \quad z = 1, \quad (4.85)$$

e

$$x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) Q^{-1}, \quad z = \sqrt{1 - \frac{3}{2} (2 - \gamma) \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) Q^{-2}}. \quad (4.86)$$

Agora para o caso $z = 0$ e $y \neq 0$, tem-se as mesmas soluções para o caso sem radiação ,
ver seção 4.1. Por tanto todos os pontos críticos são

- (a) $x = -\frac{\sqrt{6}Q}{3(2-\gamma)}, y = 0$ e $z = 0$
- (b1) $x = 1, y = 0$ e $z = 0$,
- (b2) $x = -1, y = 0$ e $z = 0$,
- (c) $x = \frac{\lambda}{\sqrt{6}}, y = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}$ e $z = 0$,
- (d) $x = \frac{\sqrt{6}\gamma}{2(\lambda+Q)}$ e $y = \sqrt{\frac{2Q(\lambda+Q)+3(2-\gamma)\gamma}{2(\lambda+Q)^2}}$ e $z = 0$,
- (e) $x = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{1}{\lambda}}, y = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\lambda}$ e $z = \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda^2}}$,
- (f) $x = 0, y = 0$ e $z = 1$,
- (g) $x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) Q^{-1}, y = 0$ e $z = \sqrt{1 - \frac{3}{2} (2 - \gamma) \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) Q^{-2}}$.

4.2.2 Estabilidade ao redor dos pontos críticos e propriedades

Agora a matriz de perturbações lineares é uma matriz 3×3 , da forma

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

Diferenciando 4.70 a respeito de z tem-se que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(3x \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) + \sqrt{6}Q \right) z, \quad (4.88)$$

diferenciando 4.71 a respeito de z

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 3 \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) yz, \quad (4.89)$$

e finalmente diferenciando 4.75 a respeito de x, y e também z encontra-se respectivamente

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \frac{dz}{dN}}{\partial x} = 3(2 - \gamma)zx, \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -3\gamma yz, \quad (4.91)$$

e

$$\frac{\partial h}{\partial z} = -2 + \frac{3}{2}(2 - \gamma)x^2 + \frac{3}{2}\gamma(1 - y^2) + \frac{9}{2}\left(\frac{4}{3} - \gamma\right)z^2. \quad (4.92)$$

4.2.3 Ponto crítico (a)

Substituindo esta solução nas equações 4.21, 4.22, 3.68, 3.69, 4.88, 4.89, 4.90, 4.91 e 4.92, encontra-se

$$M_{1,1} = -3 + \frac{3}{2}\gamma + \frac{Q^2}{2 - \gamma}, \quad (4.93)$$

$$M_{2,2} = \frac{3}{2}\gamma + Q \left(\frac{\lambda + Q}{2 - \gamma} \right), \quad (4.94)$$

$$M_{3,3} = -2 + \frac{3}{2}\gamma + \frac{Q^2}{2 - \gamma}, \quad (4.95)$$

os outros elementos da matriz são zero. Assim, da equação de autovalores tem-se que $(M_{1,1} - \mu)(M_{2,2} - \mu)(M_{3,3} - \mu) = 0$, e os autovalores para este ponto são

$$\mu_1 = -\frac{3}{2}(2 - \gamma) + \frac{Q^2}{2 - \gamma}, \quad (4.96)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}(2 - \gamma)\gamma + Q(\lambda + Q) \right], \quad (4.97)$$

$$\mu_3 = -\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3} - \gamma\right) + \frac{Q^2}{2 - \gamma}, \quad (4.98)$$

Pela equação 4.97, tem-se que $\mu_2 > 0$. O ponto (a) é um ponto instável, poder ser saddle ou nodo instável. Também, pela equação 3.43

$$\Omega_\phi = x^2 + y^2 = \frac{2Q^2}{3(2 - \gamma)}, \quad (4.99)$$

e para $\gamma = 1$, tem-se que $\Omega_\phi < 1$ se $Q^2 < 3/2$. Agora, quando se tem a contribuição da radiação, além da matéria escura, a equação de estado efetiva é modificada por um termo proporcional a z^2 . Isto é, pela equação 3.46

$$\omega_{eff} = \frac{P_\phi + P_m + P_r}{\rho_c} = \omega_\phi \Omega_\phi + \omega_m \Omega_m + \omega_r \Omega_r, \quad (4.100)$$

e para $\gamma = 1$, ou seja $\omega_m = 0$, e equações 3.43 e 4.61 tem-se que $\Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c} = z^2$ e

$$\omega_{eff} = -y^2 + x^2 + \frac{1}{3}z^2, \quad (4.101)$$

e para a solução (a) encontra-se $\omega_{eff} = \frac{2Q^2}{3} > 0$ com $\Omega_r = 0$. Portanto esta solução é uma solução instável, que satisfaz a condição de que o universo seja plano e sem expansão acelerada.

4.2.4 Ponto crítico (b1)

Para este ponto os elementos da matriz M diferentes de zero são

$$M_{1,1} = 3(2 - \gamma) + \sqrt{6}Q, \quad (4.102)$$

$$M_{2,2} = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda, \quad (4.103)$$

e $M_{3,3} = 1$. Da equação de autovalores

$$(M_{1,1} - \mu)(M_{2,2} - \mu)(M_{3,3} - \mu) = 0, \quad (4.104)$$

e os autovalores são

$$\mu_1 = 3(2 - \gamma) + \sqrt{6}Q, \quad \mu_2 = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda, \quad \mu_3 = 1. \quad (4.105)$$

Da equação 4.105 pode-se ver que o ponto (b1) é um ponto instável. Tem-se que $\mu_3 > 0$. Também da equação 3.41 tem-se que $\Omega_\phi = 1$ e por tanto $\Omega_m = \Omega_r = 0$. E de 4.101 encontra-se que $\omega_{eff} = 1 > -1/3$. Então, o ponto (b1) é um ponto instável com o campo de quintessência dominante e expansão desacelerada.

4.2.5 Ponto crítico (b2)

Para (b2) também $M_{3,3} = 1$ e

$$M_{1,1} = 3(2 - \gamma) - \sqrt{6}Q, \quad (4.106)$$

$$M_{2,2} = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda. \quad (4.107)$$

Os outros elementos de matriz são zero. Então

$$\mu_1 = 3(2 - \gamma) - \sqrt{6}Q, \quad \mu_2 = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda, \quad \mu_3 = 1. \quad (4.108)$$

Para este ponto, de igual jeito que para (b1), tem-se que $\Omega_\phi = 1$ e $\omega_{eff} = 1$.

4.2.6 Ponto crítico (c)

Substituindo esta solução obtém-se

$$M_{1,1} = -3 + \frac{1}{2}(3 - \gamma)\lambda^2 + Q\lambda \quad (4.109)$$

$$M_{1,2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}(\lambda(2 - \gamma) + 2Q) \quad (4.110)$$

$$M_{2,1} = \frac{\sqrt{6}\lambda}{2}(1 - \gamma)\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}} \quad (4.111)$$

$$M_{2,2} = -3\left(1 - \frac{\lambda^2}{6}\right), \quad (4.112)$$

$$M_{3,3} = -2\left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right). \quad (4.113)$$

A equação de autovalores é

$$(M_{3,3} - \mu)[(M_{1,1} - \mu)(M_{2,2} - \mu) - M_{1,2}M_{2,1}] = 0, \quad (4.114)$$

e a solução é

$$\mu_1 = -3 + \frac{\lambda^2}{2}, \quad \mu_2 = -3 + \gamma + \lambda(Q + \lambda), \quad \mu_3 = -2 + \frac{\lambda^2}{2}. \quad (4.115)$$

Agora, diferente da seção 4.1.6, tem-se um terceiro autovalor μ_3 . Satisfaz-se $\mu_3 < 0$ se $\lambda < 2$. Da equação 4.46, para $\gamma = 1$, pode-se encontrar que $\lambda_c < 2$ e por tanto se $\lambda < \lambda_c$ então o (c) é um nodo estável. Além, se $\lambda < \sqrt{2}$, então também tem-se expansão acelerada 3.94.

4.2.7 Ponto crítico (d)

Para esta solução tem-se

$$M_{1,1} = -\frac{3}{2}(2 - \gamma) + \frac{3}{\lambda + Q} + \frac{3\gamma}{2(\lambda + Q)^2}[3(2 - \gamma)\gamma - Q(\lambda + Q)], \quad (4.116)$$

$$M_{1,2} = \sqrt{6}\sqrt{\frac{2Q(\lambda + Q) + 3(2 - \gamma)\gamma}{2(\lambda + Q)^2}}\left(\lambda - \frac{3\gamma^2}{2(\lambda + Q)} + Q\right), \quad (4.117)$$

$$M_{2,1} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{\frac{2Q(\lambda+Q) + 3(2-\gamma)\gamma}{2(\lambda+Q)^2}} \left(\lambda - \frac{3(2-\gamma)\gamma}{\lambda+Q} \right) \quad (4.118)$$

$$M_{2,2} = \frac{3}{2}\gamma - \frac{3\gamma}{2(\lambda+Q)} - \frac{9\gamma}{2(\lambda+Q)^2} [(2-\gamma)\gamma + Q(\lambda+Q)], \quad (4.119)$$

$$M_{3,3} = -2 + \frac{3\gamma\lambda}{2(\lambda+Q)}. \quad (4.120)$$

Da equação de autovalores obtém-se uma equação similar a 4.114, com autovalores

$$\mu_{1,2} = -\frac{3[\lambda(2-\gamma) + 2Q]}{4(\lambda+Q)} \left[1 \pm \sqrt{1 + f(\lambda, Q)} \right], \quad \mu_3 = -2 + \frac{3\gamma\lambda}{2(\lambda+Q)}. \quad (4.121)$$

De igual jeito que para o ponto anterior, aquí também tem-se um novo autovalor, μ_3 dado pela equação 4.121, além dos autovalores que se tinha na seção 4.1.7 e equação 4.55. Da equação 4.121 pode-se ver que $\mu_3 < 0$, para $\gamma = 1$, se $\lambda > -4Q$. Já que $Q > 0$ e $\lambda > 0$ então $\mu_3 < 0$ para todo Q e todo λ . Assim, de acordo com a seção 4.1.7, o ponto (d) continua sendo um nodo estável e uma solução scaling com expansão acelerada.

4.2.8 Ponto crítico (e)

A matriz de perturbações esta dada por

$$M_{1,1} = -3 + \gamma \left(\frac{3}{2} - \frac{14}{\lambda^2} \right) + \frac{4(6+Q\lambda)}{\lambda^2}, \quad (4.122)$$

$$M_{1,2} = 2\sqrt{2} \left(1 - \frac{2\gamma}{\lambda^2} + \frac{Q}{\lambda} \right), \quad (4.123)$$

$$M_{1,3} = \sqrt{6} \left[\frac{2}{\lambda} \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) + Q \right] \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda^2}}, \quad (4.124)$$

$$M_{2,1} = -\sqrt{2} \left[1 - 4 \left(\frac{2-\gamma}{\lambda^2} \right) \right], \quad (4.125)$$

$$M_{2,2} = -2 + \frac{3\gamma}{2} + \frac{2}{\lambda^2} (4 - 5\gamma) \quad (4.126)$$

$$M_{2,3} = \frac{2\sqrt{3}}{\lambda} \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda^2}}, \quad (4.127)$$

$$M_{3,1} = \frac{\sqrt{24}}{\lambda} (2-\gamma) \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda^2}}, \quad (4.128)$$

$$M_{3,2} = -\frac{2\sqrt{3}\gamma}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda^2}}, \quad (4.129)$$

$$M_{3,3} = 3 \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) \left(1 - \frac{4}{\lambda^2} \right). \quad (4.130)$$

A equação de autovalores é

$$\mu^3 + b\mu^2 + c\mu + d = 0, \quad (4.131)$$

com $b = -(M_{1,1} + M_{2,2} + M_{3,3})$, $c = M_{1,1}M_{2,2} + M_{1,1}M_{3,3} + M_{2,2}M_{3,3} - M_{2,3}M_{3,2} - M_{1,2}M_{2,1} - M_{1,3}M_{3,1}$ e $d = -M_{1,1}M_{2,2}M_{3,3} + M_{1,1}M_{2,3}M_{3,2} + M_{1,2}M_{2,1}M_{3,3} - M_{1,2}M_{2,3}M_{3,1} - M_{1,3}M_{2,1}M_{3,2} + M_{2,2}M_{1,3}M_{3,1}$. Segundo o teorema fundamental do algebra a solução para esta equação consiste de três autovalores, dois complexos, um conjugado do outro, e um real. A solução é difícil de simplificar, assim apresenta-se seu comportamento na figura 4.1. O autovalor μ_2 e μ_3 são complexos e a parte real de μ_3 é sempre negativa para todo Q e todo λ . Enquanto a μ_2 a parte real é sempre negativa onde o μ_1 é positivo e vice versa. Assim o ponto (e) é um ponto instável. Da equação 3.41 tem-se que $\Omega_\phi = \frac{4}{\lambda^2} < 1$ se $\lambda > 2$. Também da condição de universo plano e da equação 4.63 tem-se que

$$\Omega_\phi + \Omega_m + \Omega_r = \frac{4}{\lambda^2} + \Omega_m + 1 - \frac{4}{\lambda^2} = 1, \quad (4.132)$$

e portanto $\Omega_m = 0$. Logo esta é uma solução na qual só se tem a presença de radiação e energia escura, sem materia escura. Da equação 4.101

$$\omega_{eff} = -y^2 + x^2 + \frac{1}{3}z^2 = -\frac{4}{3}\frac{1}{\lambda^2} + \frac{8}{3}\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{4}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{3}, \quad (4.133)$$

por tanto tem-se o comportamento da equação de estado como se fora um fluido de radiação e portanto não tem expansão acelerada.

4.2.9 Ponto crítico (f)

As entradas da matriz M são

$$M_{1,1} = -\frac{3}{2}(2 - \gamma), \quad (4.134)$$

$$M_{1,3} = \sqrt{6}Q, \quad (4.135)$$

$$M_{2,2} = \frac{3}{2}\gamma, \quad (4.136)$$

e

$$M_{3,3} = 3\left(\frac{4}{3} - \gamma\right). \quad (4.137)$$

As outras entradas são zero. Deste jeito da equação de autovalores encontra-se

$$(M_1 - \mu)(M_5 - \mu)(M_9 - \mu) = 0, \quad (4.138)$$

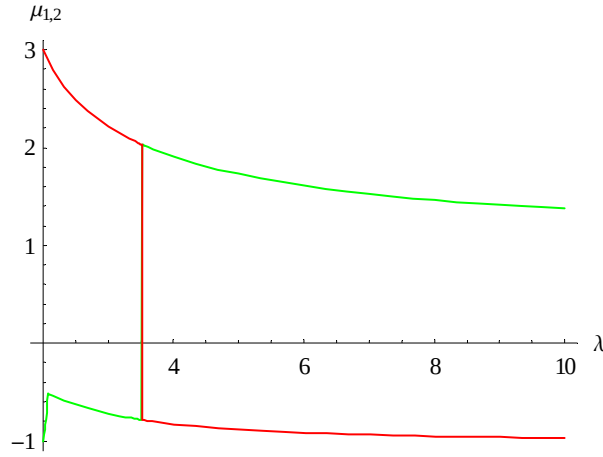


Figura 4.1: Na figura pode-se ver o comportamento dos autovalores para o ponto (e). O autovalor μ_3 é complexo e a sua parte real é sempre negativa. Enquanto a μ_2 , ele também é complexo e seu parte real é sempre negativa quando o autovalor μ_1 , que é sempre real, é positivo e vice versa. Na figura o μ_1 corresponde á linha verde e a linha azul é a parte real de μ_2 . Assim o ponto (e) é um ponto instável

e

$$\mu_1 = -\frac{3}{2}(2 - \gamma), \quad \mu_2 = \frac{3}{2}\gamma, \quad \mu_3 = 3\left(\frac{4}{3} - \gamma\right). \quad (4.139)$$

Da equação 4.139 pode-se ver que o ponto (f) é um ponto instável, μ_2 é sempre positivo. E da equação 3.37 $\Omega_\phi = 0$. Da equação 4.101 $\omega_{eff} = 1/3$. Assim, é uma solução de radiação dominante.

4.2.10 Ponto crítico (g)

Os elementos da matriz M diferentes zero são

$$M_{1,1} = -7 + \frac{9}{2}\gamma + \frac{27}{4}(2 - \gamma)\left(\frac{4}{3} - \gamma\right)^2 Q^{-2}, \quad (4.140)$$

$$M_{1,3} = \sqrt{6}Q\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3} - \gamma\right)^2 Q^{-2}\sqrt{1 - \frac{3}{2}(2 - \gamma)\left(\frac{4}{3} - \gamma\right)Q^{-2}}\right], \quad (4.141)$$

$$M_{2,2} = \frac{3}{2}\left[\gamma + \lambda\left(\frac{4}{3} - \gamma\right)Q^{-1} + \frac{3}{2}(2 - \gamma)\left(\frac{4}{3} - \gamma\right)^2 Q^{-2}\right],$$

$$M_{3,1} = -3\sqrt{\frac{3}{2}}(2 - \gamma)\left(\frac{4}{3} - \gamma\right)Q^{-1}\sqrt{1 - \frac{3}{2}(2 - \gamma)\left(\frac{4}{3} - \gamma\right)Q^{-2}}, \quad (4.142)$$

$$M_{3,3} = 3\left(\frac{4}{3} - \gamma\right)\left[1 - \frac{3}{2}(2 - \gamma)\left(\frac{4}{3} - \gamma\right)Q^{-2}\right]. \quad (4.143)$$

Da equação de autovalores obtém-se

$$(M_5 - \mu) [(M_1 - \mu) (M_9 - \mu) - M_3 M_7] = 0, \quad (4.144)$$

do primeiro fator obtém-se a solução

$$\mu_1 = \frac{3}{2} \left[\gamma + Q^{-1} \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) \left(\lambda + \frac{3}{2} (2 - \gamma) \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) Q^{-1} \right) \right]. \quad (4.145)$$

Do segundo fator encontra-se a equação de segundo grau

$$\mu^2 + b\mu + c = 0, \quad (4.146)$$

com $b = -(M_1 + M_9)$ e $c = M_1 M_9 - M_3 M_7$. A solução desta equação é

$$\mu_2 = -3 \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) + \frac{1}{2} Q^{-2} [32 (1 - 2\gamma) + 3\gamma^2 (14 - 3\gamma)], \quad (4.147)$$

e

$$\mu_3 = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} - \gamma \right) - \frac{1}{4} Q^{-2} [32 (1 - 2\gamma) + 3\gamma^2 (14 - 3\gamma)]. \quad (4.148)$$

Da equação 4.145 tem-se que $\mu_1 > 0$ sempre. Por tanto (f) é um ponto instável. Da equação 3.43 tem-se que, para $\gamma = 1$, $\Omega_\phi = \frac{1}{6Q^2}$ e da condição de que o universo seja plano e a equação 4.63 encontra-se $\Omega_m = \frac{1}{3Q^2}$. Assim para que esta solução exista tem-se que satisfazer $\Omega_m < 1$ e $\Omega_\phi < 1$ e portanto $Q^2 < 1/3$. Da equação 4.101 obtém-se $\omega_{eff} = 1/3$.

A solução (c) e (d) são soluções atratoras que podem descrever a expansão acelerada. A solução (d) também pode solucionar o problema da coincidência cósmica. As outras soluções podem ser soluções intermediárias que são instáveis, sendo (c) e (d) os dois tipos de soluções assintóticas. Na figura 4.2 pode-se ver como o sistema dinâmico vai para a solução (c) , sem acoplamento, na figura 4.3 com acoplamento. No caso de acoplamento diferente de zero, quando o sistema cai na solução instável (a) , apresenta-se uma contribuição à densidade de energia total por parte da energia escura de acordo com a equação 4.99. Isto pode-se ver na figura 4.3, onde na era dominada pela matéria escura também tem-se uma pequena contribuição da densidade de energia do campo de quintessência. Isto vai ter um efeito importante na formação de estruturas, o qual constitui um método direto para determinar a grandeza física do acoplamento Q . Na Figura 4.4 pode-se ver o caso onde o universo tende à solução

atrator (d) , a qual pode explicar a expansão acelerada e aliviar o problema da coincidência cósmica. A densidade de energia da energia escura pode-se comparar com a densidade da matéria escura no presente, porque o estado atual do universo é um estado atrator (d) . Mas esta solução tem um problema muito sério. No processo de evolução do universo para o estado assintótico atrator (d) , o universo não tem uma era dominada pela matéria escura a qual é fundamental para a formação de estruturas. Ele vai da era dominada pela radiação direto para a era dominada pela energia escura sem ter era dominada pela matéria escura, como é mostrado na figura 4.4.

O problema tem a ver com a natureza do acoplamento, ou seja, tem a ver com que Q é considerado constante. A grandeza do acoplamento tem que mudar nas diferentes transições do universo. A dinâmica do sistema vai muito rápido para a solução atrator (d) para a qual Ω_ϕ é maior que Ω_m . Se Ω_ϕ fora menor se poderia conseguir uma era dominada pela matéria escura. Da equação 4.56 pode-se ver que se Q/λ é pequeno então Ω_ϕ também é pequeno e assim $\Omega_m = 1 - \Omega_\phi$ é maior. Mas pela equação 4.57 precisa-se de Q/λ grande para ter $\omega_{eff} < -1/3$, e portanto a expansão acelerada. Então, para ter uma era dominada pela matéria escura e formação de estruturas precisa-se de um acoplamento pequeno, mas para poder ter expansão acelerada precisa-se de um acoplamento maior. Portanto requer-se dois acoplamentos. Precisa-se de um acoplamento não linear, onde o acoplamento depende do campo e mude essencialmente na transição da era da matéria á era da energia escura, de uma certa grandeza para uma grandeza maior. No capítulo 5 mostra-se uma forma de solucionar o problema de não ter uma era dominada pela matéria escura. Considera-se um acoplamento não linear parametrizado em termos de uma função arbitrária do campo de quintaessência.

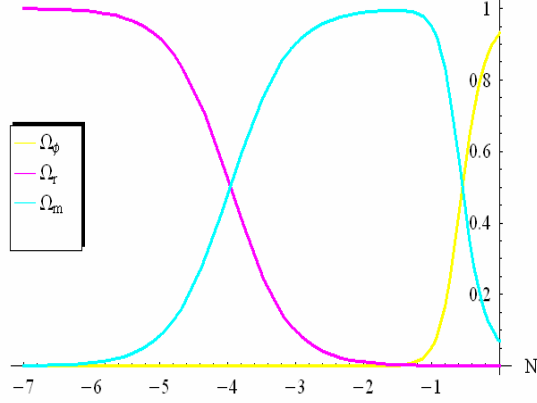


Figura 4.2: Nesta figura pode-se ver o comportamento dinâmico do sistema. Ω_ϕ é o parâmetro de densidade da energia escura, Ω_m a densidade da matéria escura e Ω_r da radiação. O universo vai assintoticamente à solução (c), com expansão acelerada e dominado completamente pela energia escura, com $\lambda = 1.25$, $Q = 0$, $\gamma = 1$ e condições iniciais $x = 0.01$, $y = 7 \times 10^{-12}$ e $z = 0.9995$. O numero de e-folding N foi reescalado para $N = \text{Log}_{10}(1+z)$. Para o redshift de transição era da radiação/era da matéria tem-se $z \approx 10^4$ e para a transição era da matéria/era da energia escura $z \approx 0.4$.

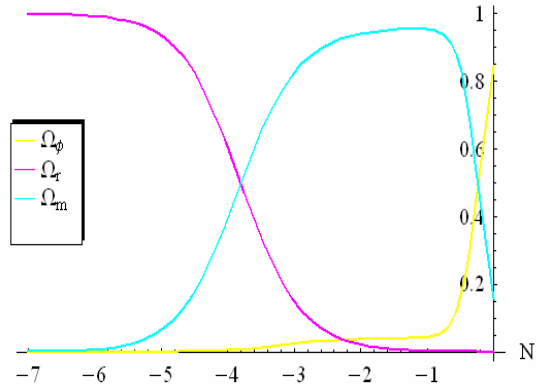


Figura 4.3: Nesta figura o sistema vai assintoticamente para a solução (c), somente que esta vez tem-se acoplamento $Q = 0.245$. Em quanto aos outros parâmetros $\lambda = 0.1$ e as condições iniciais $x = 1 \times 10^{-2}$, $y = 1 \times 10^{-12}$, $z = 0.99961$. Esta vez a densidade de energia escura tem uma contribuição importante na época dominada pela matéria escura com o valor proporcional ao acoplamento.

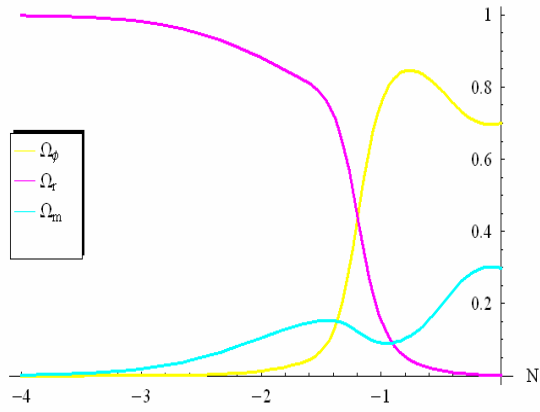


Figura 4.4: Aquí pode-se ver o sistema que vai para a solução scaling (d). Quando o sistema cai na solução (d) há um quociente diferente de zero entre a densidade de energia escura e a densidade de matéria escura (Solução de escala). O universo vai assintoticamente para um estado onde se tem expansão acelerada e também, a densidade de energia escura é do ordem da densidade de energia da matéria escura, e pode ajustar os atuais valores de $\Omega_\phi = 0.7$ e $\Omega_m = 0.3$. Assim pode-se proporcionar um acercamento á solução do problema de coincidência cósmica. Mas esta evolução para o universo não é física, porque o universo não tem uma era dominada pela matéria escura o qual é de muita importância para a formação de estruturas.

Capítulo 5

Quintessência acoplada com acoplamento não linear

A ação está dada por

$$S = S_g + S_\phi + S_m + S_r \quad (5.1)$$

sendo que o campo de quintessência esta somente acoplado á matéria escura, do jeito

$$\frac{\delta S_m}{\delta \phi} = -\sqrt{-g}\rho_m Q(\phi), \quad (5.2)$$

onde o parâmetro de acoplamento Q , neste caso depende do campo ϕ . Seguindo a proposta de [12], considera-se o acoplamento do tipo

$$Q(\phi) = \frac{1}{2} \left[(Q_2 - Q_1) \tanh \left(\frac{\phi_1 - \phi}{\Delta} \right) + Q_2 + Q_1 \right], \quad (5.3)$$

onde ϕ_1 , Δ são parâmetros livres e Q_1 e Q_2 são os parâmetros do acoplamento na era dominada pela matéria escura e radiação e na era dominada pela energia escura, respectivamente. Lembrando que o potencial de quintessência é $V = V_o e^{-\lambda\phi}$, em termos dos parâmetros do espaço de fase tem-se que

$$Q(y, H) = \frac{1}{2} \left[(Q_2 - Q_1) \frac{1 - \frac{V_o}{3H^2} \frac{2}{\Delta\lambda} y^{\frac{-4}{\Delta\lambda}} e^{-2\frac{\phi_1}{\Delta}}}{1 + \frac{V_o}{3H^2} \frac{2}{\Delta\lambda} y^{\frac{-4}{\Delta\lambda}} e^{-2\frac{\phi}{\Delta}}} + Q_1 + Q_2 \right]. \quad (5.4)$$

Assim o acoplamento fica dependente da variável y e do parâmetro de Hubble H . De este jeito tem-se um parâmetro dinâmico extra no sistema de equações do modelo. O

parâmetro de Hubble parametrizado em termos do número de e-folding vai aparecer no sistema de equações, e portanto precisa-se de uma equação mais. Da equação 4.69

$$\dot{H} = -\frac{3H^2}{2} \left[2x^2 + \frac{4}{3}z^2 + \gamma(1 - x^2 - y^2 - z^2) \right], \quad (5.5)$$

substituindo o tempo cósmico t pelo número de e-folding N obtém-se

$$\frac{dH}{dN} = -\frac{3}{2}H \left[(2 - \gamma)x^2 + \gamma(1 - y^2) + \left(\frac{4}{3} - \gamma\right)z^2 \right]. \quad (5.6)$$

Assim o sistema de equações a resolver está dado pelas equações 4.70, 4.71, 4.75 e 5.6, com $Q(y, H)$ dado pela equação 5.4.

O problema com o acoplamento linear foi que a era dominada pela matéria escura não ocorre e o universo finaliza a era dominada pela radiação e vai diretamente para a era dominada pela energia escura, o qual é catastrófico para a formação de estruturas. Precisa-se de um acoplamento não linear, onde o acoplamento depende do campo e mude essencialmente na transição da era da matéria à era da energia escura, de uma certa grandeza para uma grandeza maior. Assim quando a grandeza do acoplamento seja Q_1 o universo vai passar por uma era dominada pela matéria escura e logo quando o acoplamento mude para um de maior grandeza Q_2 o universo também vai mudar para era dominada pela energia escura com expansão acelerada. Na figura 5.2 pode-se ver como o universo vai de uma era dominada pela matéria escura com acoplamento $Q_1 = 0$ para a era dominada pela energia escura com acoplamento $Q_2 = 60$, caindo na solução atratora (*d*). Na figura 5.4 escolhe-se $Q_1 = 1$, assim o sistema primeiro vai para a solução instável (*a*), para a qual Ω_ϕ é diferente de zero e portanto tem-se um efeito importante da energia escura na formação de estruturas durante a era dominada pela matéria escura.

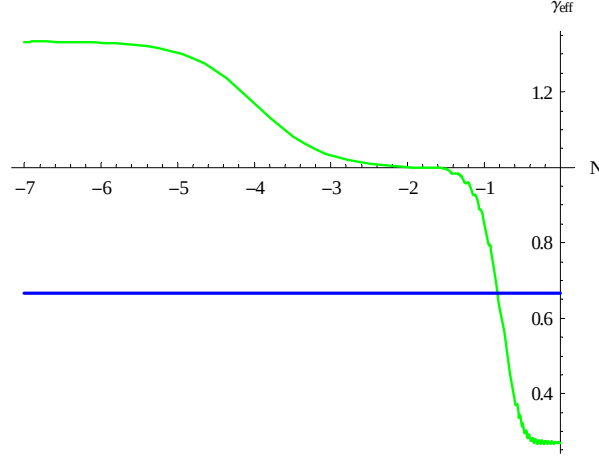


Figura 5.1: Nesta figura pode-se ver o comportamento da equação de estado efetiva e considera-se um acoplamento dependente do campo de acordo à equação 5.3. Para $\gamma_{eff} < 2/3$ tem-se expansão acelerada. Assim pode-se ver que o universo entra em expansão acelerada justamente quando termina a era dominada pela matéria escura e começa a era dominada pela energia escura. De novo, o numero de e-folding N foi reescalado para $N = \text{Log}_{10}(1+z)$.

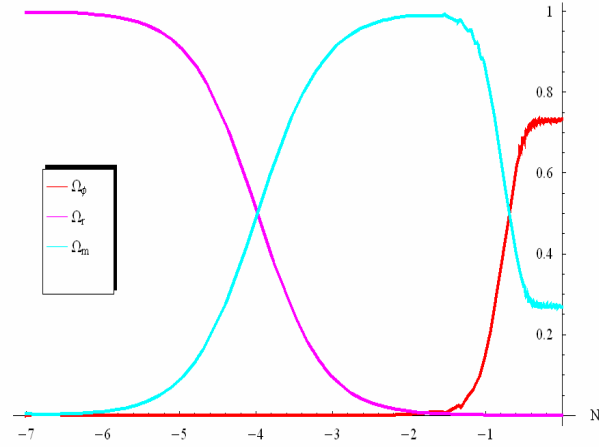


Figura 5.2: Nesta figura pode-se ver o resultado de considerar um acoplamento não linear entre a matéria escura e a energia escura. Ω_{ϕ} é o parâmetro de densidade da energia escura, Ω_m a densidade da matéria escura e Ω_r da radiação. Esta vez, a diferença do caso de acoplamento linear, o universo começa numa era dominada pela radiação e logo vai para a era dominada pela matéria escura para finalmente cair na solução atratora (d), na qual a energia escura na forma do campo escalar de quintessência é dominante e tem-se expansão acelerada com o ajustamento dos parâmetros $\Omega_{\phi} = 0.73$ e $\Omega_m = 0.27$. Aquí escolhe-se $\Delta = 0.01$, $V_0 = 1$, $\Phi_1 = 6.98$, $Q_1 = 0$, e $Q_2 = 60$.

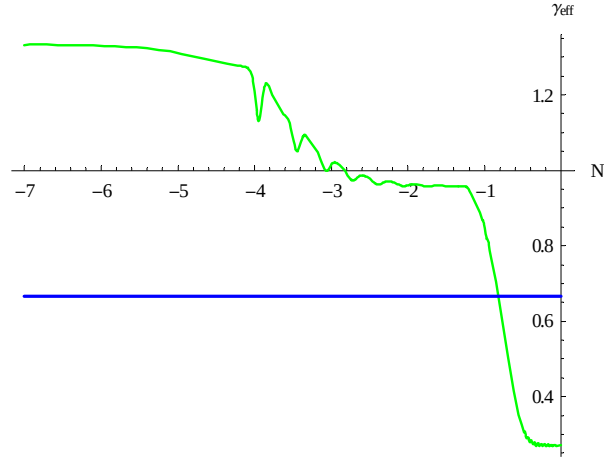


Figura 5.3: Nesta figura muda o acoplamento na era dominada pela matéria escura a respeito da figura (5.1), $Q_1 = 0$. Nesta figura escolhe-se $Q_1 = 1$.

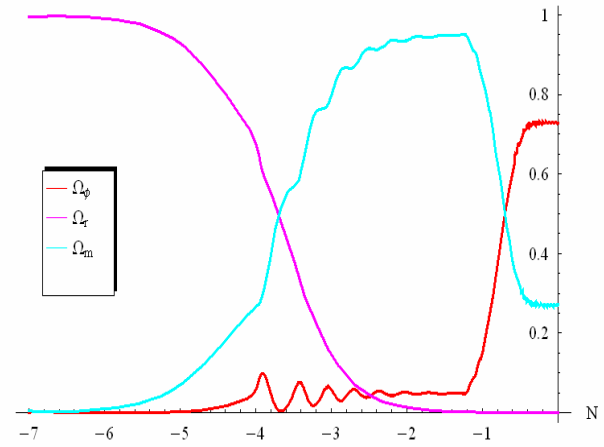


Figura 5.4: Também, nesta figura muda o acoplamento na era dominada pela matéria escura a respeito, esta vez, da figura (5.2), $Q_1 = 0$. Nesta figura escolhe-se $Q_1 = 1$.

Capítulo 6

Conclusões

No estudo do modelo dinâmico de quintessência com acoplamento à matéria escura encontra-se soluções constantes e pontos fixos atratores que podem descrever a expansão acelerada do universo e podem solucionar o pelo menos aliviar o problema da coincidência cósmica, seção 4.1. A solução constante (c) é uma solução atrator que pode explicar a expansão acelerada do universo além de ser uma possível evolução onde o universo fica dominado completamente pela energia escura. O estado atual é um instante da evolução do universo em direção à solução atratora (c), figura 4.3. Esta solução fica independente do acoplamento entre a matéria escura e energia escura. A solução constante (d) é também uma solução atrator com expansão acelerada. Mas esta solução é uma solução de escala, na qual a densidade da energia escura vai evoluindo proporcionalmente à densidade da matéria escura. Assim esta solução pode aliviar o problema da coincidência cósmica. O fato que o universo tenha hoje densidade de energia escura do mesmo ordem de grandeza da densidade de matéria escura é porque o universo está caindo na solução atratora (d), na qual se tem expansão acelerada e a densidade de energia escura domina figura 5.2 No caso do modelo de quintessência sem acoplamento, a solução (d) não pode explicar a expansão acelerada, seção 3.6.5. Só quando tem-se acoplamento ela pode explicar a aceleração. Mas no caso do acoplamento constante ocorre um problema muito sério, o universo não tem uma era dominada pela matéria escura e formação de estruturas não ocorre. Para solucionar este problema precisa-se de um acoplamento não linear. O acoplamento tem que ser menor na era dominada pela matéria escura para que a densidade da energia escura não seja dominante e depois tem que ser maior para que a energia

escura domine e ocorra a expansão acelerada. Se o acoplamento é diferente de zero na era dominada pela matéria, a densidade da energia escura vai contribuir e vai ter um efeito importante na formação de estruturas, figura 5.4. Finalmente, pode-se dizer que um acoplamento não linear leva a soluções aceitáveis, Figura 5.4, onde pode-se explicar a expansão acelerada, mas também pode-se explicar a coincidência cósmica, o fato que o universo justamente agora se encontre num estado onde a densidade de energia da matéria escura e da energia escura sejam da mesma ordem de grandeza.

Apêndice A

Tensor momentum energia

A definição do Tensor momentum energia é

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (\text{A.1})$$

de aquí, variando a ação a respeito de $g^{\mu\nu}$ se tem que

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial \left(\frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial \partial_\sigma g^{\mu\nu}} \right), \quad (\text{A.2})$$

sendo que a densidade lagrangiana do campo somente depende da métrica e no de seu derivada então

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} L + \sqrt{-g} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (\text{A.3})$$

onde $L = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$,

$$\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (\text{A.4})$$

e

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (\text{A.5})$$

e sendo que $g = \sum_\alpha g_{\alpha\beta} \text{Cof}^{\alpha\beta} = \frac{\text{Cof}^{\alpha\beta}}{g^{\alpha\beta}}$ então $\frac{\partial g}{\partial g^{\alpha\beta}} = \text{Cof}^{\alpha\beta}$ mas $\text{Cof}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} g$ portanto

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\alpha\beta}} = g^{\alpha\beta} g, \quad (\text{A.6})$$

alem disso $g^{\mu\nu} g_{\sigma\nu} = \delta_\sigma^\mu$ de aquí $g^{\mu\nu} = \delta_\sigma^\mu (g_{\sigma\nu})^{-1}$ assim

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\alpha\beta}} = -g_{\alpha\beta} g, \quad (\text{A.7})$$

portanto

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.8})$$

então

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu} - \frac{\sqrt{-g}}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi, \quad (\text{A.9})$$

e

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}L. \quad (\text{A.10})$$

Subindo um índice e considerando ϕ espacialmente homogêneo

$$T_\nu^\mu = \partial^\mu\phi\partial_\nu\phi - \delta_\nu^\mu \left[\frac{1}{2}\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi + V(\phi) \right], \quad (\text{A.11})$$

$$T_0^0 = -\dot{\phi}^2 - \left[-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (\text{A.12})$$

e define-se

$$\rho = -T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (\text{A.13})$$

também

$$p = T_i^i = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (\text{A.14})$$

Apêndice B

Sistema autónomo e estabilidade

Um sistema dinâmico que é muito importante na cosmologia é o sistema autónomo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, t), \\ \dot{y} &= g(x, y, t).\end{aligned}\tag{B.1}$$

O sistema (B.1) é um sistema autónomo se f e g não têm dependência com o tempo.

B.1 Pontos Fixos ou críticos

Um ponto (x_c, y_c) do espaço de fase é um ponto fixo se

$$(f, g)_{(x_c, y_c)} = 0,\tag{B.2}$$

Um ponto fixo (x_c, y_c) é chamado atrator quando ele satisfaz $(x(t), y(t)) \rightarrow (x_c, y_c)$ para $t \rightarrow \infty$,

B.2 Estabilidade ao redor dos pontos críticos

Pode-se estudar se o sistema aproxima-se ou não ao ponto fixo, estudando a estabilidade ao redor do ponto. Para poder estudar a estabilidade do sistema considera-se pequenas perturbações δx y δy tal que $x = x_c + \delta x$ y $y = y_c + \delta y$. Substituindo no sistema de equações (B.1) obtém-se

$$\frac{d}{dN} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

onde $N = \ln a$ é o número de e-folding [3], o qual é conveniente no estudo da dinâmica da energia escura. A matriz M esta dada por

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

onde os subíndices x e y significam as derivadas parciais a respeito de x e y respectivamente. A matriz M tem dois autovalores μ_1 e μ_2 . A solução geral para as perturbações é

$$\begin{aligned} \delta x &= c_1 e^{\mu_1 N} + c_2 e^{\mu_2 N}, \\ \delta y &= c_3 e^{\mu_1 N} + c_4 e^{\mu_2 N}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

onde c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são constantes da integração. Então a estabilidade ao redor dos pontos fixos depende da natureza dos autovalores. Em geral tem-se a seguinte classificação

- (i) *Nodo estável* : $\mu_1 < 0$ e $\mu_2 < 0$,
 - (ii) *Nodo instável* : $\mu_1 > 0$ e $\mu_2 > 0$,
 - (iii) *Ponto saddle* : $\mu_1 > 0$ e $\mu_2 < 0$ o $\mu_1 < 0$ e $\mu_2 > 0$,
 - (iv) *Ponto espiral estável* : $\det(M) < 0$ e as partes reais de μ_1 e μ_2 são negativas.
- (B.6)

O nodo estável e o ponto espiral estável são as únicas soluções constantes que são pontos atratores.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Perlmutter et al, Constraining Dark Energy with SNe Ia and Large-Scale Structure, *Astrophysics*, 517, 565,(1999)
- [2] D. N. Spergel et al, First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), Determination of Cosmological Parameters, *Astro-ph/0302209*, (2003)
- [3] J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, Dynamics of dark Energy, *Int Journal of Moderna Physics D*, 15, 1753-1938, (2006).
- [4] J. Copeland, A. R. Liddle and D. Wands, Exponential Potentials and Cosmological Scaling Solutions. *Phys. Rev. Lett.* D57, 4686, (1998).
- [5] C. Armendariz, V. Mukhanov, and P.J. Steinhardt, A Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-Time Cosmic Acceleration. *Phys. Rev. Lett.* 85. 4438, (2000).
- [6] F. Piazza and S. Tsujikawa, Dilatonic Ghost Condensate. *JCAP* 0407,004, (2004) [*hep-th/ 0405054*].
- [7] T. Padmanabhan, Accelerated Expansion of the Universe Driven by Tachyonic Matter. *Phys. Rev.* D66, 021301, (2002).
- [8] J. Copeland, A. R. Liddle and D. Wands Exponential Potentials and Cosmological Scaling Solutions. *Phys. Rev. Lett.* D57, 4686 (1998).
- [9] D. Perkins, *Particle Astrophysics* (Oxford Master Series in Particle Physics, *Astrophysics and Cosmology* , 2003)
- [10] P.M. Dirac, *General Theory of Relativity* (John Wiley Sons , 1975).
- [11] L.D. Landau, *Teoria Classica de Campos* (Editorial Reverte, S. A , 1973)
- [12] A. De Felice, S. Nasri and M. Trodden, *Phys. Rev D.* 67, 043509, (2003).

- [13] L. Amendola, Phys. Rev D. 62, 043311, (2000).
- [14] S. Tsujikawa, Phys. Rev D. 73, 103504, (2006).
- [15] L. Amendola e D. Tocchini-Valentini, Stationary Dark Energy: The present universe as a global attractor. Phys Rev D, 64, 043509, (2000).
- [16] R. Jimenez, P. Thejll, U. Jorgensen, J. MacDonald e B. Pagel, Mont. Not. R. Astron. Soc. 282, 926, (1996).
- [17] B. Hansen et al., Astrphys. J 574, L155, (2002)
- [18] W. L. Freedman et al., Astrophys. J 553, 47, (2001)
- [19] WMAP Collab. (D. N. Spergel), Astrophys.J.Suppl.170:377, (2007).
- [20] SDSS Collab. M. Tegmark et al. Phys. Rev. D 69, 103501, (2004).
- [21] E. Komatsu et al., Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation, arXiv:1001.4538, (2010)
- [22] L. Amendola, M. Quartin, S. Tsujikawa, I. Waga, Challenges for scaling cosmologies, Phys.Rev. D74, 023525, (2006).