



---

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

# PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

---

Dinâmica de Pequenos Satélites de Saturno e Aplicações ao Sistema  
Atlas-Prometheus-Pandora

Demétrio Tadeu Ceccatto

---

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“Júlio de Mesquita Filho”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

DEMÉTRIO TADEU CECCATTO

**DINÂMICA DE PEQUENOS SATÉLITES DE SATURNO E  
APLICAÇÕES AO SISTEMA ATLAS-PROMETHEUS-  
PANDORA**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física

Orientador: Prof. Dr. Nelson Callegari Jr.

Rio Claro – SP

2024

C387d

Ceccatto, Demétrio Tadeu  
Dinâmica de Pequenos Satélites de Saturno e Aplicações ao  
Sistema Atlas-Prometheus-Pandora / Demétrio Tadeu Ceccatto. -- Rio  
Claro, 2024  
131 f. : il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro  
Orientador: Nelson Callegari Jr.

1. Mecânica Celeste. 2. Problema de N corpos. 3. Saturno. 4. Luas  
de Saturno. 5. Sistemas Dinâmicos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade  
Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados  
fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“Júlio de Mesquita Filho”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

DEMÉTRIO TADEU CECCATTO

DINÂMICA DE PEQUENOS SATÉLITES DE SATURNO E  
APLICAÇÕES AO SISTEMA ATLAS-PROMETHEUS-PANDORA

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física

Comissão Examinadora

Prof. Dr. NELSON CALLEGARI JR.  
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. RICARDO PAUPITZ BARBOSA DOS SANTOS  
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. RAFAEL SFAIR DE OLIVEIRA  
FEG/UNESP/Guaratinguetá (SP)

Prof. Dr. CARLOS TABARE GALLARDO CASTRO  
Universidad de la Republica/Montevideo - Uruguai

Prof. Dr. BRUNO EDUARDO MORGADO  
UFRJ/Rio de Janeiro (RJ)

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 21 de março de 2024

A todos que possam vir a se interessar.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente devo agradecer aos meus pais, Sueli e Tadeu, que concederam a oportunidade exclusiva de estudar. Em seguida, agradeço a todos os professores que passaram por minha vida, ensinando diversas áreas do conhecimento, principalmente as ciências exatas e, em especial, a minha professora do primário, Dona Norma, que me ensinou a ler, escrever e as quatro operações fundamentais.

Devo agradecer ao meu Amigo e Orientador Prof. Dr. Nelson Callegari Jr. que acreditou e não duvidou da realização desse trabalho. Também devo agradecer ao Prof. Dr. Adrián Rodríguez, que me ensinou a utilizar o pacote MERCURY necessário para a realização desse trabalho e contribuiu com diversas sugestões e dicas.

Um agradecimento especial deve ser feito aos professores que aceitaram a tarefa de participar avaliando esse trabalho: Paupitz, Tabaré, Rafael e Bruno.

Sabemos que sem a ajuda de outras pessoas, geralmente torna-se difícil atingir um objetivo, assim agradeço os colegas de Universidades, embora afastados pela distância, Gabriel Guimarães e Karyna Gimenez, que me ajudaram com contribuições valiosas para esse trabalho.

Trabalhar e estudar não é fácil, assim devo agradecer ao Colégio Nazareno pela paciência e a Escola Januário, principalmente a Érica que esteve ao meu lado enquanto escrevia as palavras presentes na maior parte desse trabalho e a Cris que me incentivou a cada dia para não desistir apesar das dificuldades enfrentadas na escola.

Uma vez que estamos utilizando ferramentas computacionais, a manutenção e garantia do funcionamento das máquinas do DEMAC foi necessária e vital, assim agradeço aos técnicos Orlando e Jorge.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização desse trabalho.

— Qual foi a sua maior descoberta? — perguntou a toupeira.

— Que basta ser do jeito que eu sou — respondeu o menino.

*O Menino, a Toupeira, a Raposa e o Cavalo, de Charlie Mackesy.*

## Resumo

Neste trabalho, realizamos uma análise detalhada da órbita atual de Atlas sob diferentes cenários, identificando perturbações seculares e ressonantes devido a Prometheus e Pandora, e também devido ao achatamento de Saturno. Mapeamos o domínio das ressonâncias 54:53 Prometheus-Atlas e 70:67 Pandora-Atlas no espaço de fase considerando um conjunto denso de condições iniciais para o semieixo maior e excentricidade para vários clones de Atlas. A análise combinada dos mapeamentos das ressonâncias 54:53 Prometheus-Atlas e 70:67 Pandora-Atlas revelou a sobreposição de ambos os domínios ressonantes no espaço de fase. Identificamos uma razão física para o movimento caótico do Atlas detectado anteriormente ( $\sim 0,1 \text{ ano}^{-1}$ ). Finalmente, investigamos a dinâmica orbital de Atlas considerando Prometheus em uma configuração de seu passado ditada pelas forças de maré em Saturno, revelando que Atlas-Prometheus poderia ter sido um sistema coorbital em  $1,8 \times 10^8$  anos.

**Palavras-chave:** Ressonância de movimentos médios, Atlas, Prometheus, Pandora, sistemas caóticos.

## Abstract

In this work, we performed a detailed analysis of the current orbit of Atlas under different scenarios identifying secular, resonant perturbations due to Prometheus and Pandora, and also due to Saturn's oblateness. We mapped the domain of the 54:53 Prometheus-Atlas and 70:67 Pandora-Atlas resonances in the phase space considering a dense set of initial conditions of semi-major axis and eccentricity for several clones of Atlas. The combined analysis of the mappings of the 54:53 Prometheus-Atlas and 70:67 Pandora-Atlas resonances revealed the *overlap* of both resonant domains in phase space. We have therefore identified a physical reason for the chaotic motion of Atlas previously detected ( $\sim 0.1 \text{ year}^{-1}$ ). Finally, we investigate the orbital dynamics of Atlas considering Prometheus in a past configuration dictated by tidal forces in Saturn, which reveals that Atlas-Prometheus could be a co-orbital system at  $1.8 \times 10^8$  years.

**Keywords:** Mean motion resonance, Atlas, Prometheus, Pandora, chaotic systems.

## Sumário

<b>1 Introdução .....</b>	<b>13</b>
1.1 Aspectos gerais .....	13
1.2 Os pequenos satélites de Saturno: Aegaeon, Anthe e Methone.....	14
1.3 Atlas, Prometheus e Pandora .....	16
1.4 Objetivos da Tese.....	18
<b>2 Métodos De Investigação E Ferramentas Computacionais .....</b>	<b>20</b>
2.1 Equações de movimento e simulações numéricas .....	20
2.2 O Espectro Individual de Potências .....	23
2.4 A análise espectral para Atlas .....	31
2.5 Mapa dinâmico .....	35
<b>3 Dinâmica Secular .....</b>	<b>37</b>
3.1 Introdução .....	37
3.2 Perturbações seculares .....	37
3.3 A Teoria Secular para Atlas .....	41
3.3.1 O subsistema Atlas-Prometheus .....	41
3.3.2 O subsistema Pandora-Atlas .....	42
3.4 Efeitos de $J_2$ em $\omega$ e $\Omega$ de Atlas e Prometheus.....	45
3.5 A variação secular para a excentricidade e inclinação de Atlas .....	47
<b>4 Ressonâncias No Sistema De Pequenos Satélites Interiores De Saturno.....</b>	<b>50</b>
4.1 Introdução .....	50
4.2 Ressonância de movimentos médios .....	50
4.3 Visão geral das estruturas do Sistema de Saturno .....	52
4.4 Os pequenos satélites naturais em ressonância com Mimas: Aegaeon, Methone e Anthe .....	53
4.4.1 Aegaeon .....	55
4.4.2 Methone .....	57
4.4.3 Anthe.....	62
4.5 Atlas .....	65
4.5.1 A ressonância 54:53 de movimentos médios com Prometheus.....	66

<b>5 Resultados Específicos Para Atlas .....</b>	<b>70</b>
5.1 Introdução .....	70
5.2 O mapeamento para a ressonância 54:53 de movimentos médios entre Atlas-Prometheus .....	70
5.2.1 A região C: local para a ressonância de corrotação.....	71
5.2.2 A região L: local para a ressonância de Lindblad .....	74
5.3 Outras ressonâncias na vizinhança da órbita de Atlas .....	76
5.4 Mapeamento com baixa excentricidade de Prometheus .....	79
5.5 A ressonância 70:67 de movimentos médios com Pandora.....	81
5.6 A influência de Pandora na dinâmica de Atlas .....	85
5.7 Difusão Caótica.....	87
5.7.1 Ferramentas utilizadas .....	88
5.7.2 Metodologia.....	89
5.7.3 Atlas Prometheus .....	89
5.7.4 Atlas Pandora.....	90
5.7.5 Atlas Prometheus e Pandora .....	91
<b>6 O Passado Dinâmico De Atlas .....</b>	<b>94</b>
6.1 A dissipação em Prometheus e sua migração: o passado da dinâmica orbital de Atlas .	94
6.1.1 A dissipação em Saturno .....	94
6.1.2 A dissipação no núcleo de Saturno .....	95
6.1.3 A dissipação no envelope de gás de Saturno .....	96
6.1.4 A dissipação de maré em Prometheus .....	96
6.1.5 A variação temporal para os parâmetros orbitais .....	97
6.2 A dinâmica de Atlas na evolução por maré de Prometheus.....	97
6.2.1 O caso coorbital .....	99
6.2.2 As vizinhanças próximas à órbita atual de Prometheus.....	102
<b>7 Conclusões Finais.....</b>	<b>105</b>
<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>108</b>
<b>Apêndice A .....</b>	<b>114</b>
A.1 As ressonâncias orbitais entre os satélites naturais de Saturno.....	114

A.2 Titan-Hyperion.....	114
A.3 Enceladus-Dione .....	115
A.4 Mimas-Tethys .....	115
<b>Apêndice B .....</b>	<b>117</b>
B.1 A Perturbação Secular Para Dois Corpos.....	117
B.2 Perturbações Seculares Generalizadas .....	122
B.3 O Achatamento Planetário .....	125
<b>Apêndice C .....</b>	<b>128</b>
C.1 O modelo CoraLin.....	128
<b>Apêndice D .....</b>	<b>130</b>
D.1 A influência da massa de Pandora na dinâmica orbital de Atlas .....	130

## Capítulo 1

### Introdução

#### 1.1 Aspectos gerais

No início da década de 1980, as sondas espaciais *Voyager 1* e *2* realizaram observações e medições no disco planetário, anéis e principalmente nos principais satélites conhecidos até aquela ocasião do planeta Saturno. Os resultados contribuíram para um detalhamento e redivisão de seu anel em subanéis e a descoberta de novos pequenos satélites de formato irregular internos à órbita de Mimas, entre eles Atlas, Prometheus e Pandora. O sucesso das missões *Voyager* abriu caminho para uma nova visita, com a finalidade de investigar as suas propriedades físicas e químicas, porém, a missão *Cassini-Huygens* acabou por revelar um ambiente com complexas leis físicas nas quais estes satélites orbitam (Thomas *et al.* 2013).

Atlas, Prometheus e Pandora, foram observados com mais detalhes a partir de meados de 2004 pela missão *Cassini-Huygens*. As imagens produzidas pela sonda *Cassini* ajudaram na compreensão de seu comportamento dinâmico devido ao ambiente a que estão inseridos. As imagens produzidas foram capazes de revelar detalhes da estrutura morfológica destes satélites, refinar as medidas das dimensões superficiais e estimar outras propriedades físicas (Thomas *et al.* 2013). Como exemplo, os satélites Pan, Daphnis e Atlas estão próximos ao anel A e Prometheus e Pandora estão localizados nas bordas interna e externa do anel F, respectivamente; por outro lado, coorbitando após o anel F, encontramos os grandes satélites Janus e Epimetheus e o par Helene-Polideuces que possuem suas órbitas coorbitais com Dione.

Os recentes descobertos, Aegaeon, Methone e Anthe, com seus curiosos arcos de partículas foram observados pela sonda *Cassini*.

**Tabela 1.1.** Propriedades físicas dos satélites de Saturno, Thomas e Helfenstein (2020)

Satélite	a (km)	b (km)	c (km)	Raio médio (km)
Aegaeon <sup>(a)</sup>	0,7±0,05	0,25±0,06	0,2±0,08	0,33±0,06
Anthe <sup>(a)</sup>	-	-	-	0,5
Atlas <sup>(a)</sup>	20,4±0,1	17,7±0,2	9,3±0,3	14,9±0,2
Methone <sup>(a)</sup>	1,94±0,02	1,29±0,04	1,21±0,02	1,45±0,03
Mimas <sup>(c)</sup>	207,8±0,5	196,7±0,5	190,6±0,3	198,2±0,4
Pandora <sup>(a)</sup>	51,5±0,3	39,5±0,3	31,5±0,2	40,0±0,3
Prometheus <sup>(a)</sup>	68,5±0,8	40,5±1,4	28,1±0,4	42,8±0,7

## 1.2 Os pequenos satélites de Saturno: Aegaeon, Anthe e Methone

Aegaeon, Anthe e Methone são três pequenos satélites de formatos irregulares com raios médios aproximados de 0,33 km, 0,5 km e 1,45 km, respectivamente, que foram descobertos pelas imagens da *Cassini* (Spitale *et al.* 2006, Cooper *et al.* 2008, Hedman *et al.* 2009). Aegaeon está inserido no anel G e Anthe e Methone estão além das órbitas de Janus e Epimetheus, orbitando entre Mimas e Enceladus, aproximadamente na borda interna do anel E. As dimensões físicas para Anthe não foram estimadas devido ao seu pequeno tamanho (Tabela 1.1 e Fig. 1.2) e incertezas sobre as propriedades físicas e químicas deste pequeno pedaço de rocha ainda prevalecem (Thomas e Helfenstein 2020).

El Moutamid *et al.* (2014) estudaram analiticamente a órbita de Aegaeon, Anthe e Methone com seu modelo CoraLin e Callegari e Yokoyama (2020) e, a partir desse estudo, apresentaram uma abordagem numérica da dinâmica orbital de Anthe.

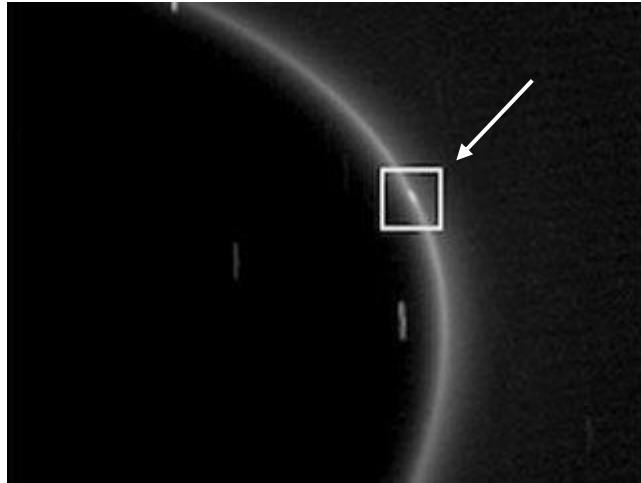
Aegaeon, Anthe e Methone experimentam significativas perturbações de longo período provocadas por Mimas (Munõz-Gutiérrez e Guiliatti Winter 2017, Callegari e Yokoyama 2020, Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021, Callegari e Rodríguez 2023).

Aegaeon está em ressonância 7:6 de movimentos médios com Mimas (Hedman *et al.* 2010). Anthe possui órbita em ressonância 11:10 de movimentos médios com Mimas (Callegari e Yokoyama 2020). Methone está na ressonância 15:14 de movimentos médios com Mimas (Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021).

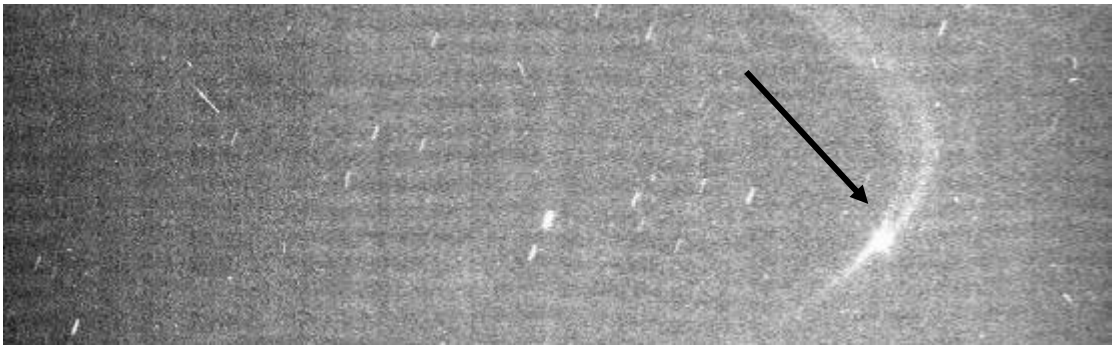
A ressonância é uma perturbação que contribuiu com variações periódicas no semieixo maior dos corpos e que será discutida no Capítulo 4. Há outras perturbações de longo período, como a variação secular na excentricidade e inclinação que serão discutidas no Capítulo 3.

No caso do satélite Methone, Callegari *et al.* (2021) realizaram uma análise detalhada das frequências fundamentais do sistema que permitiu determinar com precisão a atual configuração dinâmica para o par Methone-Mimas. Determinaram numericamente o centro da ressonância e mostraram como os componentes forçados na excentricidade e inclinação são responsáveis pelas oscilações simultâneas de 4 ângulos críticos relatados na literatura (veja a Tabela 2 de Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021).

Na Fig. 1.5, nota-se o satélite Mimas, descoberto no século XIX pelo astrônomo inglês Willian Herschel. Este satélite, com raio médio de 198 km, possui forte influência em seu meio, perturbando a órbita de vários satélites.



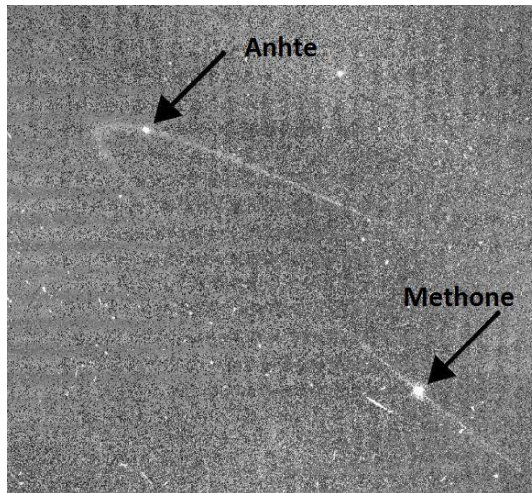
**Figura 1.1:** O pequeno satélite Aegaeon juntamente com o Anel G. Crédito da imagem: NASA/JPL/Space Science Institute, acesso em 12 de junho de 2022.



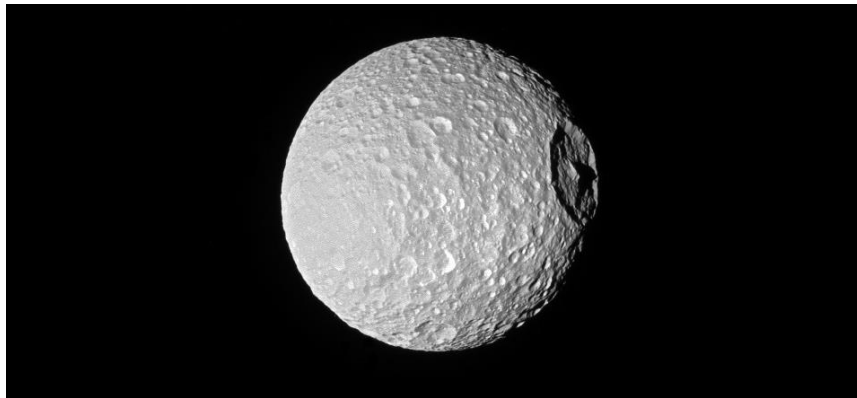
**Figura 1.2:** As imagens da Cassini revelam a existência de um arco fraco de material orbitando com o pequeno satélite, Anthe (seta). Crédito da imagem: NASA/JPL/Space Science Institute, acesso em 12 de junho de 2022.



**Figura 1.3:** Methone Crédito da imagem: NASA/JPL/Space Science Institute, acesso em 12 de junho de 2022.



**Figura 1.4:** Os Satélites Anthe e Methone com seus respectivos arcos. Imagem obtida pela Cassini em 29/10/2007. Crédito da imagem: NASA/JPL/Space Science Institute, acesso em 12 de junho de 2022.



**Figura 1.5:** Mimas, descoberto pelo astrônomo inglês William Herschel em 17/07/1789, responsável por perturbar as órbitas de Anthe, Methone e Atlas. Imagem obtida pela Cassini em 22/10/2016. Crédito da imagem: NASA/JPL/Space Science Institute, acesso em 12 de junho de 2022.

### 1.3 Atlas, Prometheus e Pandora

Atlas é um satélite que está próximo à borda externa do Anel A em um ambiente com dinâmica complexa, envolvendo várias ressonâncias de movimentos médios (Renner *et al.* 2016).

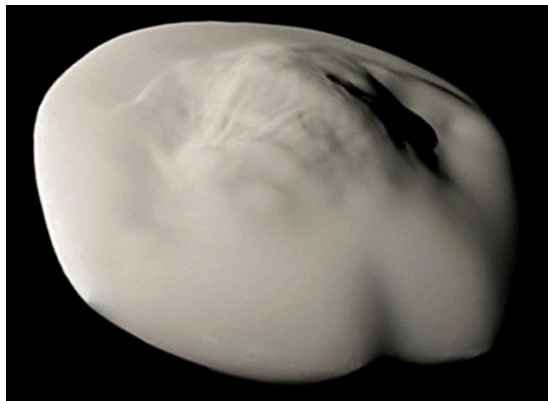
O resultado dessas observações revelou que Atlas apresentava um comportamento dinâmico muito complexo, levantando a hipótese de que Atlas estaria em uma ressonância coorbital com algum outro satélite próximo (Cooper *et al.* 2015).

Prometheus e Pandora (Fig. 1.7 e Fig. 1.8, respectivamente) estão próximos à borda interna e externa do anel F, respectivamente. Analisando em conjunto os dados obtidos pelas sondas *Voyager*, pelo Telescópio Espacial *Hubble* e pela sonda *Cassini Spitalé et al.* (2006) é

possível sugerir que a órbita de Atlas é fortemente perturbada por uma ressonância 54:53 com Prometheus e, em menor intensidade, pela ressonância 70:67 com Pandora.

Os resultados de Cooper *et al.* (2015) se concentram na dinâmica da sua órbita atual, a qual é caótica, segundo os autores. Renner *et al.* (2016) foram além, realizando um estudo mais amplo da dinâmica do satélite baseado em modelos analíticos (El Moutamid *et al.* 2014).

As imagens obtidas pela *Cassini* foram capazes de revelar detalhes da estrutura morfológica de sua superfície (Thomas *et al.* 2013), mostrando a presença de uma suave cordilheira equatorial com elevada altitude, terrenos com grandes elevações verticais nas altas latitudes ao norte e ao sul (Fig. 1.6). Essa configuração geológica sugere que Atlas possui ou possuiu, um interior geologicamente ativo (Thomas *et al.* 2013). As imagens obtidas em 2004 também foram capazes de revelar um fino anel temporário de material ao redor de Atlas.



**Figura 1.6:** Atlas visto pela *Cassini* em 12/04/2017 em sua máxima aproximação. Acima, detalhes da cordilheira equatorial, altas elevações ao norte e sul. Crédito da imagem: NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute, acesso em 12 de junho de 2022.



**Figura 1.7:** A equipe científica da *Voyager 1* descobriu Prometheus em outubro de 1980. A espaçonave *Cassini* da NASA observou detalhes na superfície marcada por crateras de Prometheus (86 quilômetros de diâmetro) durante um sobrevoo moderadamente próximo em 6 de dezembro de 2015. Podemos ver ao fundo a borda externa do Anel F. Crédito de imagem: NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute, acesso em 12 de junho de 2022.

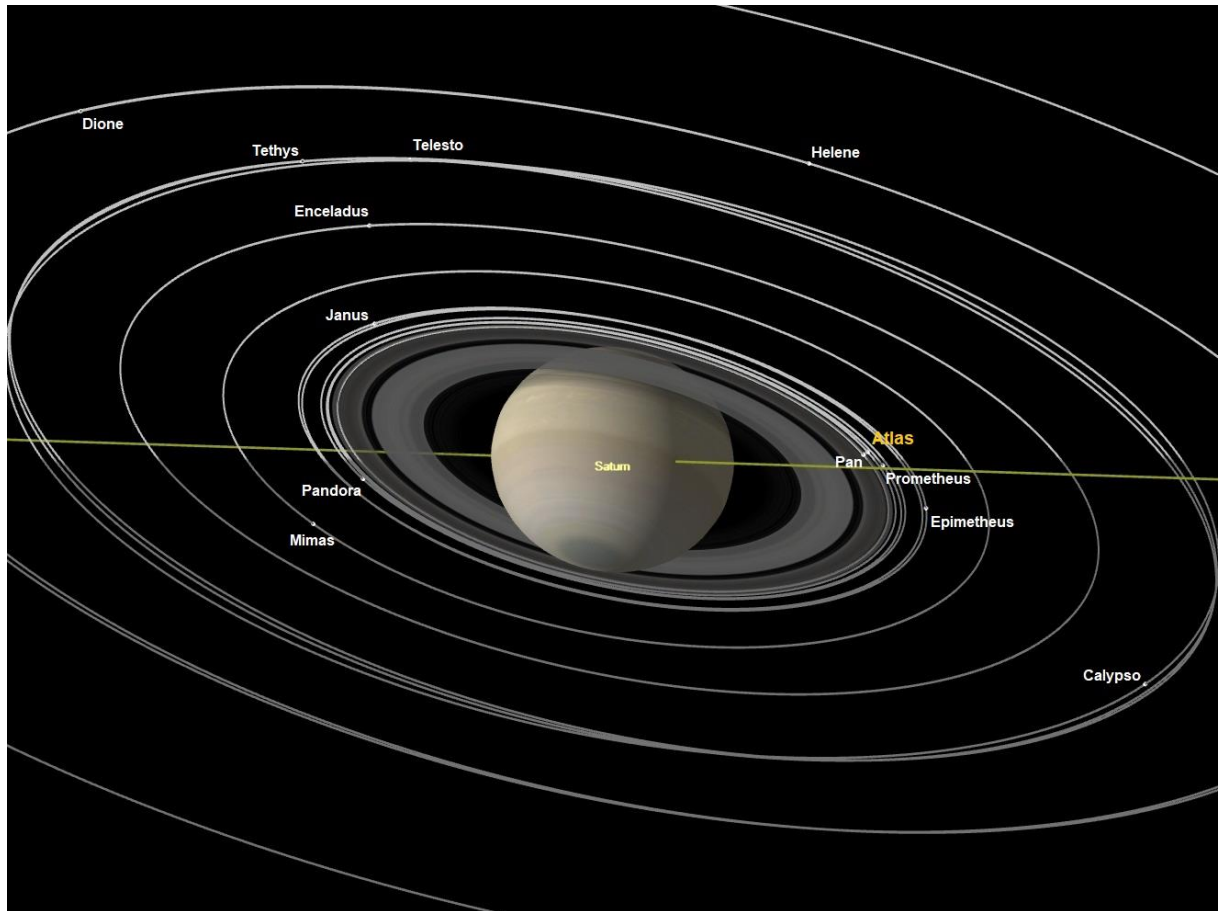


**Figura 1.8:** O satélite pastor do anel F de Saturno, Pandora, originalmente denominada de S/1980 S26. Crédito da imagem: NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute, acesso em 12 de junho de 2022.

Podemos ver na Fig. 1.9 uma representação esquemática do sistema de Saturno na época 01/01/2000, a qual foi considerada como ponto de partida para o nosso estudo.

#### **1.4 Objetivos da Tese**

O objetivo principal deste trabalho é estudar a dinâmica orbital de Atlas. Para isso, o Capítulo 2 aborda as ferramentas numéricas que foram utilizadas neste trabalho, além de apresentar uma breve caracterização para a dinâmica orbital de Atlas. O Capítulo 3 apresenta um desenvolvimento analítico para a teoria secular, aplicando esses resultados em Aegaeon, Anthe, Methone e Atlas. O Capítulo 4 discute as ressonâncias de movimentos médios que ocorrem entre os pares Mimas-Aegaeon, Anthe-Mimas e Methone-Mimas e, em seguida, discutimos as ressonâncias entre os pares Prometheus-Atlas e Pandora-Atlas. O Capítulo 5 apresenta o mapeamento dinâmico no espaço de fase das frequências para a vizinhança orbital de Atlas e, em seguida, apresentamos os efeitos da excentricidade de Prometheus na órbita de Atlas. Mostramos como a combinação entre as ressonâncias 54:53 e 70:67 afetam a dinâmica orbital de Atlas e, por fim, utilizamos o coeficiente de difusão de Laskar para estimar os efeitos combinados das perturbações de Prometheus e Pandora. O Capítulo 6 discute como a migração por maré de Prometheus contribuiu para o cenário dinâmico atual observado. Por fim, o capítulo 7 apresenta as principais conclusões e perspectivas futuras.



**Figura 1.9:** Representação esquemática para a data 01 de janeiro de 2000. Podemos observar diversos satélites naturais de Saturno, entre eles Atlas (amarelo), Prometheus e Pandora. Interessante notar as posições orbitais de Prometheus e Pandora. Figura elaborada no site *Horizons*. (Acesso em 25/03/2022)

## Capítulo 2

### Métodos de Investigação e Ferramentas Computacionais

#### 2.1 Equações de movimento e simulações numéricas

Para estudarmos o movimento de  $N$  satélites orbitando um planeta achatado com massa  $M$ , iremos utilizar as equações exatas de movimento dadas em Callegari e Yokoyama (2010).

Fixado um sistema de coordenadas no centro do planeta, seja  $\vec{r}_i$  o vetor posição de um satélite em relação ao centro do planeta e  $\vec{p}_i$ , o respectivo momentum em relação ao centro de massa do sistema, forma-se o par  $(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$  que define o conjunto de variáveis canônicas com hamiltoniana dada por:

$$H = H_0 + H_1 + H_j, \quad (2.1)$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{|\vec{p}_i|^2}{2\beta_i} - \frac{\mu_i \beta_i}{|\vec{r}_i|} \right), \quad (2.2)$$

$$H_1 = \sum_{0 < i < j} \left( -\frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j}{M} \right), j = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

$$H_j = -\sum_{i=1}^N \frac{\mu_i \beta_i}{|\vec{r}_i|} \left[ -\sum_{l=2}^{\infty} J_l \left( \frac{R_S}{|\vec{r}_i|} \right)^l P_l(\text{sen}(\varphi_i)) \right], \quad (2.4)$$

onde  $\beta_i = Mm_i/(M + m_i)$ ,  $\mu_i = G(M + m_i)$ ,  $G$  é a constante gravitacional<sup>1</sup> e  $m_i$  são as massas dos satélites,  $J_l$  são os coeficientes relacionados com o potencial devido ao achatamento, para Saturno consideramos  $l = 2, 4$  e  $6$ .  $P_l(\text{sen}(\varphi_i))$  que são os polinômios de Legendre de grau  $l$  e  $\varphi_i$  e que representa a latitude para o  $i$ -ésimo satélite em relação ao equador do planeta (o plano de referência) (Callegari e Yokoyama 2007).

Na hamiltoniana (2.1), a Eq. (2.2) representa o movimento Kepleriano de cada satélite, a Eq. (2.3) fornece as interações mútuas entre os satélites e a Eq. (2.4) representa a perturbação na órbita kepleriana devido ao achatamento do planeta.

As equações de movimento para cada um dos satélites são dadas por:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \text{ e } \frac{d\vec{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i}, i = 1, \dots, N. \quad (2.5)$$

Para cada satélite, os valores iniciais de  $(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$  são calculados a partir dos elementos orbitais. Para se obter o valor absoluto para o momento  $\vec{p}_i$ , primeiro calculamos o vetor

---

<sup>1</sup>  $G = 6,67384 \pm 0,00080 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

velocidade inicial  $\frac{d\vec{r}_i}{dt}$  e, então, calculamos  $\vec{p}_i$  resolvendo três conjuntos  $N \times N$  de equações lineares para cada componente  $p_{ix}$ ,  $p_{iy}$  e  $p_{iz}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) dado pelo conjunto de Eq. (2.5).

Em nosso estudo, podemos considerar  $N \leq 3$  satélites, nomeados Atlas, Prometheus e Pandora. Com o objetivo de comparar resultados, utilizamos dois modelos distintos para as equações de movimento:

i) o modelo dado em Callegari e Yokoyama (2010), descrito acima, utilizando os termos  $J_2$  e  $J_4$  (os coeficientes adimensionais presentes na expansão do potencial de Saturno até a 4ª. ordem);

ii) aplicação direta do pacote Mercury (Chambers 1999) com adição do termo  $J_6$  (coeficiente adimensional presente na expansão do potencial de Saturno até a 6ª. ordem). Ambos resolvidos com a aplicação do código “RA15” (Everhart 1985).

As constantes físicas para Saturno estão apresentadas na Tabela 2.1 e as condições iniciais e parâmetros numéricos para Atlas, Prometheus e Pandora estão listadas na Tabela 2.2 e esses serão mantidos no transcorrer desse trabalho (exceções serão descritas). Os detalhes de simulações numéricas específicas estão indicados nas legendas das correspondentes figuras (veja a Figura 2.1, abaixo, como exemplo).

**Tabela 2.1:** Constantes físicas para Saturno <sup>a</sup> Horizon, <sup>b</sup> Jacobson *et al.* (2006)

Constante	Valor	Unidade
Massa <sup>(a)</sup>	$568,317 \times 10^{24}$	kg
Raio <sup>(a)</sup>	60268	km
$J_2$ <sup>(b)</sup>	$16290.6 \times 10^{-6}$	
$J_4$ <sup>(b)</sup>	$-935.1 \times 10^{-6}$	
$J_6$ <sup>(b)</sup>	$86.8 \times 10^{-6}$	

Na Tabela 2.2 temos os seguintes elementos osculadores: semieixo maior ( $a$ ), excentricidade orbital ( $e$ ), inclinação orbital em relação ao plano do equador de Saturno ( $i$ ), pericentro ( $\omega$ ), longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ) e o movimento médio ( $n$ ).

Dois esforços adicionais serão sempre aplicados para analisarmos nosso conjunto de dados numéricos: I) em alguns casos, as órbitas serão comparadas com os elementos orbitais osculadores fornecidos pelo sistema de efemérides *Horizons*<sup>2</sup> que utiliza o banco de dados SAT343 (Giorgini *et al.* 1996), garantindo a validade de nossos dados numéricos; II) A partir

<sup>2</sup> <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

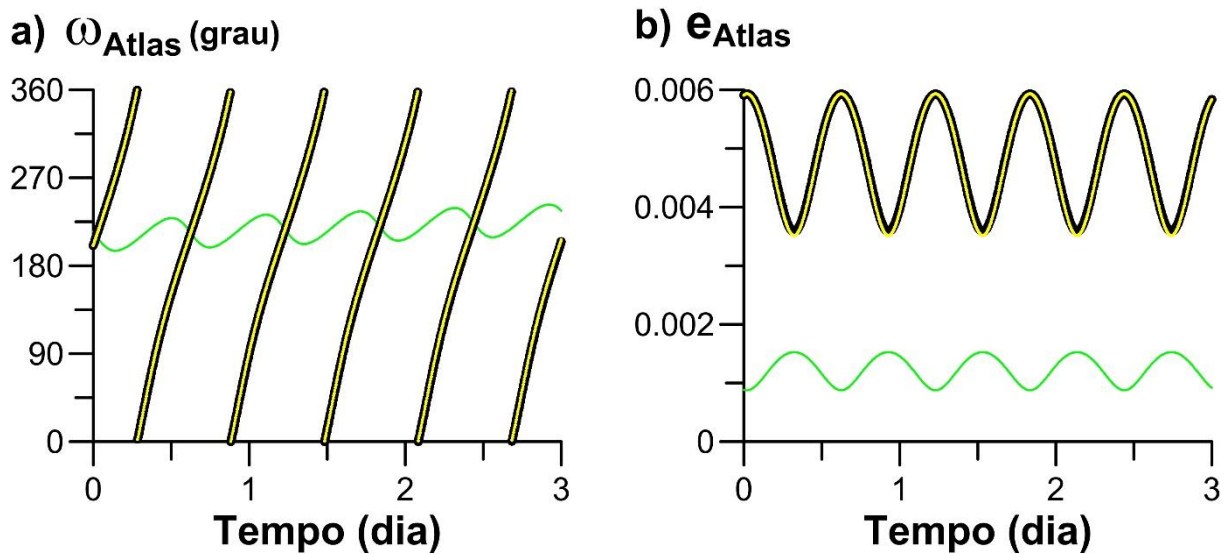
do chamado vetor de estado, isto é, o vetor que contém as coordenadas de posição e as respectivas velocidades instantâneas para o satélite obtidas a partir dos elementos osculadores, calculamos os chamados *elementos geométricos* pela aplicação direta do algoritmo descrito em Renner e Sicardy (2006).

Os elementos geométricos são calculados para obter um melhor ajuste na órbita quando um satélite está sobre a influência de um campo gravitacional não central (como Saturno). Nesse caso, o argumento do pericentro ( $\omega$ ) avança periodicamente com a mesma frequência do movimento médio. Essa rápida componente observada em  $\omega$  é provocada por  $J_2$  (Greenberg 1981; ver Tabela 1 de Callegari e Yokoyama 2020).

**Tabela 2.2:** Elementos osculadores para Atlas, Prometheus e Pandora, em relação a data 01 de janeiro de 2000, obtidos a partir do Efemérides *Horizons* (acesso 29/05/2022). As massas foram obtidas em Thomas e Helfenstein (2020).

	<b>Atlas</b>	<b>Prometheus</b>	<b>Pandora</b>
Massa (kg)	$0,575 \times 10^{16}$	$0,15 \times 10^{18}$	$0,137 \times 10^{18}$
$a$ (km)	138325,37	140024,64	142346,13
$e$	0,00591	0,00252	0,00145
$i$ (grau)	0,00419	0,00807	0,05024
$\omega$ (grau)	200,77	201,36	332,15
$\Omega$ (grau)	235,44	309,14	149,98
$n$ (grau/dia)	592,97	581,87	567,69

A Fig. 2.1 ilustra o nosso método de cálculo e comparação com os diferentes esquemas numéricos. A esquerda na Fig. 2.1(a) temos o avanço de curto período de  $\omega$  no caso de Atlas. A curva preta foi gerada com os dados obtidos a partir do sistema *Horizons*. A curva amarela foi obtida com uma simulação numérica realizada com o esquema ii), no qual um satélite semelhante a Atlas sobre os efeitos de  $J_2$  foi incluído na simulação juntamente com Prometheus e Pandora. O alinhamento entre as curvas preta e amarela mostra que a rápida circulação do pericentro de Atlas é regida pelo termo  $J_2$ . A curva verde representa o pericentro geométrico de Atlas calculado com o esquema II) a partir do vetor de estado gerado na simulação ii) em que foi considerado as perturbações provocadas pelos termos  $J_2, J_4$  e  $J_6$  juntamente com Prometheus e Pandora.



**Figura 2.1:** O (a) argumento do pericentro e (b) a excentricidade orbital de Atlas. A curva preta representa o pericentro osculador ( $\omega$ ) de Atlas obtido a partir de <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi> com data inicial em 01 de janeiro de 2000. Os dados foram obtidos para 3 dias com intervalo de 5 minutos. A curva amarela foi gerada a partir do esquema ii) em que somente a perturbação devido ao termo  $J_2$  foi considerada. As curvas verdes representam o pericentro geométrico (esquerda) e a excentricidade geométrica (direita) calculadas a partir do esquema ii) considerando as perturbações provocadas pelos termos  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$ .

## 2.2 O Espectro Individual de Potências

A variação dos elementos orbitais consiste em uma série de oscilações periódicas, sendo necessário a identificação dos períodos mais relevantes no espectro de potências. As trajetórias regulares são periódicas, de modo que qualquer elemento orbital, definido como  $ele(t)$ , dependente do tempo, pode ser representado da seguinte maneira

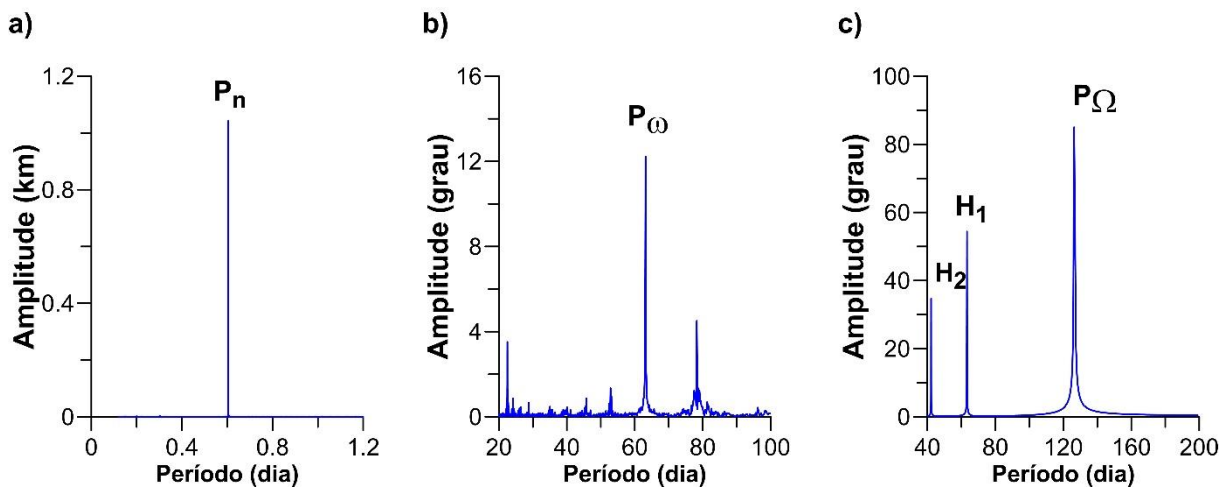
$$ele(t) = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} e^{2\pi i \mathbf{k} \mathbf{f} t}, \quad (2.6)$$

no qual  $\mathbf{f}$  é um vetor frequência cuja as componentes são frequências independentes do movimento e  $\mathbf{k}$  é um vetor inteiro arbitrário (Michtchenko e Ferraz-Mello 2001).

Para uma função regular  $ele(t)$ , as amplitudes  $A_{\mathbf{k}}$  decrescem rapidamente com  $|\mathbf{k}|$ , assim a soma em (2.6) apresenta poucos termos, assim, o espectro para o movimento regular será caracterizado por um número contável de frequências e picos (geralmente um pequeno número). Essas frequências representam dois grupos: as fundamentais e os harmônicos que são combinações lineares das frequências fundamentais.

As órbitas obtidas numericamente serão analisadas no domínio das frequências, de modo que, a partir de seus elementos osculadores orbitais, obteremos o seu espectro via Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* - FFT) com o algoritmo dado em Press *et al.* (1996).

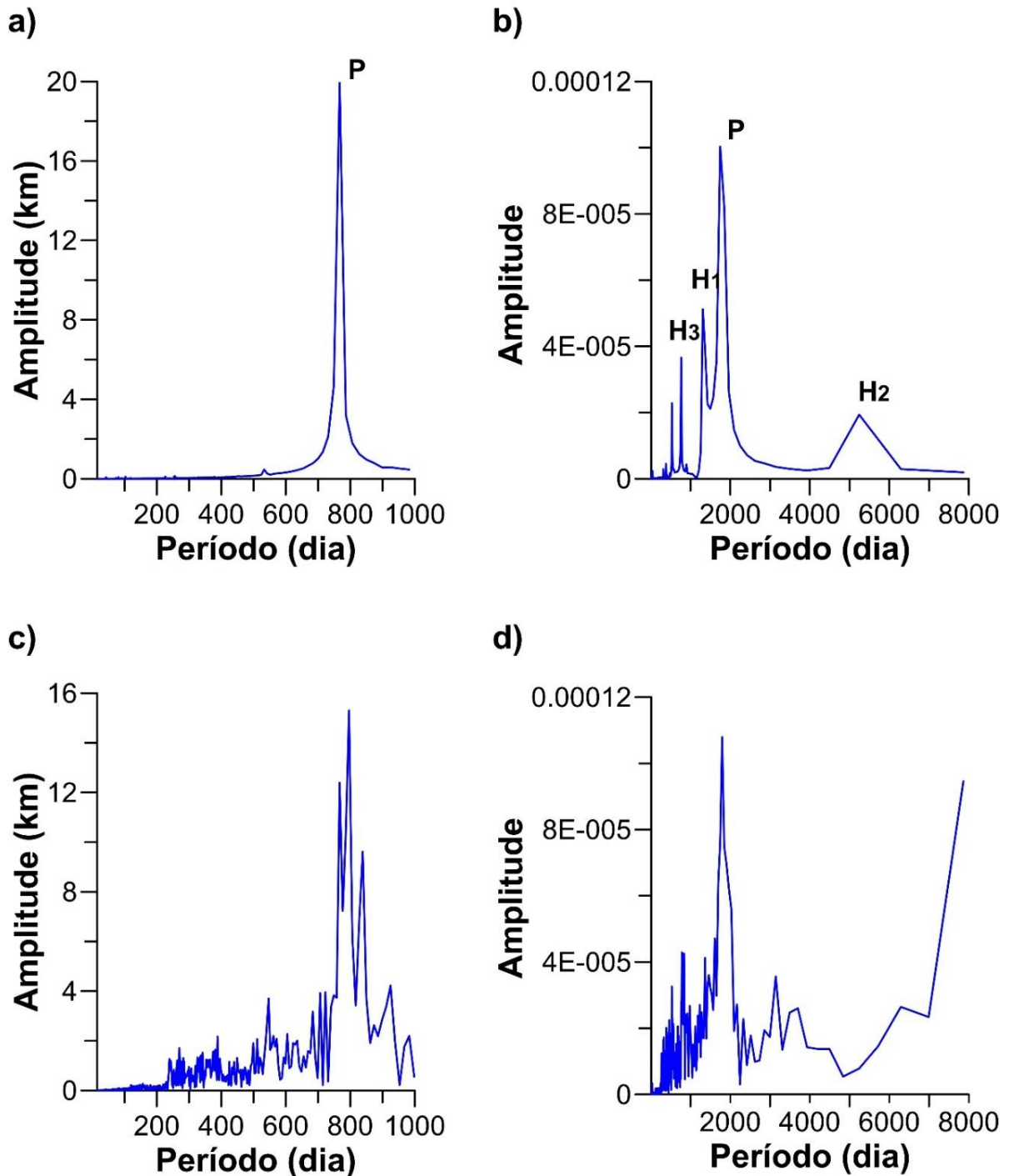
Uma grande quantidade de picos significativos distintos aparece no espectro de um determinado elemento orbital e são identificados de acordo com as diferentes forças perturbadoras que serão descritas em detalhes mais adiante. A Fig. 2.2 exibe o espectro de curto período para um clone de Atlas. Na Fig. 2.2(a), temos o espectro para o semieixo maior osculador de Atlas em um período de 1,2 dia. Notamos o pico relacionado com o movimento médio ( $n$ ) e o seu período de  $P_n \sim 0,6$  dia. Já na Fig. 2.2(b) e Fig. 2.2(c), temos o espectro para dois elementos osculadores angulares, o pericentro ( $\omega$ ) e a longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ) representados para períodos maiores que 20 e 40 dias, respectivamente. Podemos observar os períodos fundamentais  $P_\omega \sim 63,17$  dias e  $P_\Omega \sim 126,33$  dias além de seus respectivos harmônicos  $H_1 = \left(\frac{1}{2}\right) P_\Omega$  e  $H_2 = \left(\frac{1}{3}\right) P_\Omega$ .



**Figura 2.2:** Espectro de Fourier para os elementos osculadores (a) semieixo maior, (b) argumento do pericentro e (c) longitude do nodo ascendente. O curto período é provocado pelo termo  $J_2$ . Em (b) e (c) representamos os picos relacionados a períodos maiores que 20 e 40 dias, respectivamente. Espectro obtido a partir da integração de um clone de Atlas com condições iniciais à época 01/01/2000 por um período de 172,25 anos com intervalo de 0,06 dia, corpos presentes nessa simulação Atlas e Prometheus.

A fim de testarmos nosso código vamos reproduzir os resultados já publicados em Callegari e Yokoyama (2020). Na Fig. 2.3 temos a representação para o espectro dos elementos osculadores semieixo maior (esquerda) e para a excentricidade orbital (direita) de duas partículas semelhantes à Anthe. Observamos um pico em (a) e cinco picos em (b) e um elevado número de picos em (c) e (d). Essa quantidade de picos está relacionada com o tipo de movimento orbital. Em (a) e (b) vemos o espectro de Fourier para uma órbita regular. Identificamos o período fundamental (P) em ambos elementos e os respectivos harmônicos ( $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$ ) para a excentricidade. Por outro lado, (c) e (d) representam o movimento caótico. As frequências independentes variam com o tempo e as trajetórias se tornam irregulares e não periódicas, logo a soma em (2.6) terá um grande número de termos. Conseqüentemente, o espectro de potência não será discreto, mostrando componentes de banda larga e um grande

número de frequências e amplitudes, tal como pode ser observado em (c) e (d). Esses resultados são idênticos aos apresentados na Fig. 6 de Callegari e Yokoyama (2020).



**Figura. 2.3:** Comparativo entre os espectros de Fourier para os elementos orbitais osciladores semieixo maior (km) e excentricidade entre uma órbita regular (a-b) e uma órbita irregular (c-d) obtidos para um satélite semelhante à Anthe. Podemos observar o baixo número de picos em (a) e (b) característico do movimento regular e o elevado número de picos para o movimento irregular em (c) e (d). Espectro obtido a partir dos elementos orbitais osciladores relativos à época 01/01/2016 integrados por um período de 172,25 anos com intervalo de 0,06 dia, referente a uma amostra da ordem aproximada de  $2^{16}$ .

O Espectro Individual de Potências (*Individual Dynamic Power Spectra – IPS*) utilizado por Callegari e Yokoyama (2010, 2020) e Callegari *et al.* (2021) é uma ferramenta para análise espectral que se baseia na metodologia dada por Michtchenko e Ferraz-Mello (2001).

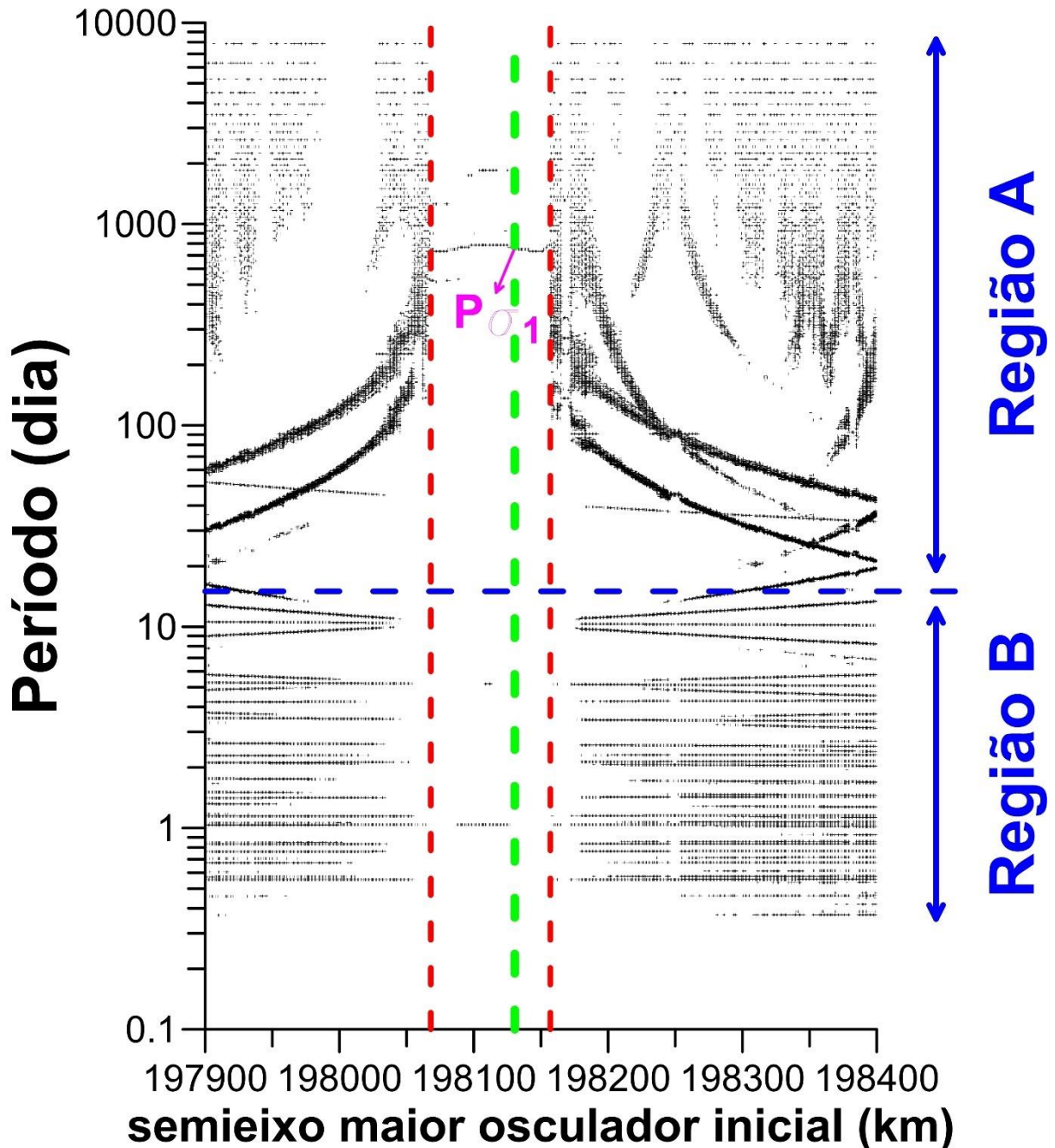
Assim, para uma determinada partícula de teste no sistema de Saturno, Callegari e Yokoyama (2010, 2020) e Callegari *et al.* (2021) determinam o IPS analisando o espectro obtido por meio da FFT (Press *et al.* 1992) para algum elemento orbital, geralmente, o semieixo maior, a excentricidade orbital, ou a inclinação do plano orbital em relação ao equador do corpo central, sempre considerando o semieixo maior inicial  $a_0$  dessa partícula de teste, como um parâmetro livre. Assim, as integrações numéricas são realizadas em um denso conjunto de condições iniciais para  $a_0$ , enquanto os demais elementos orbitais da partícula de teste e demais corpos maiores são mantidos constantes em relação à época. Cada linha desses espectros individuais, com amplitude espectral maior que uma certa porcentagem pré-definida, a priori, fornece a maior amplitude espectral observada no espectro, será considerada como relevante, um exemplo é dado na Fig. 2.4.

A análise do IPS revela as regiões de movimento regular e irregular para os clones de teste. Nele podemos identificar os períodos fundamentais e harmônicos. Por exemplo, a Fig. 2.4, reproduzida de Callegari e Yokoyama (2020), representa o IPS construído com o semieixo maior osculador para 700 clones semelhantes à Anthe obtido considerando como porcentagem de referência 5% da maior amplitude para cada um dos espectros individuais do semieixo maior. Nele podemos observar distintas regiões, sendo que duas regiões podem ser definidas em relação ao seu significado físico:

- a) **Região A:** que contém todas as amplitudes livres de perturbações associadas aos termos  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$  e demais perturbações de curto período. Nessa região, encontramos os períodos associados às ressonâncias e perturbações seculares, além das perturbações de longo período e perturbações que ocorrem com algum outro satélite presente na simulação.
- b) **Região B:** contém todos os termos associados às perturbações de curto período e demais perturbações associadas aos termos  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$ , desde que essas sejam maiores que a amplitude de referência, sendo uma região do espectro que não possui interesse físico e mantida apenas por questão de completude (Callegari e Yokoyama, 2020).

Podemos observar que a região compreendida entre  $198068 \text{ km} < a_0 < 198157 \text{ km}$  (demarcada com linhas tracejadas em vermelho na Fig. 2.4) contém o valor para o semieixo osculador de Anthe,  $a = 198130,5 \text{ km}$  (linha vertical tracejada verde), e apresenta órbitas com

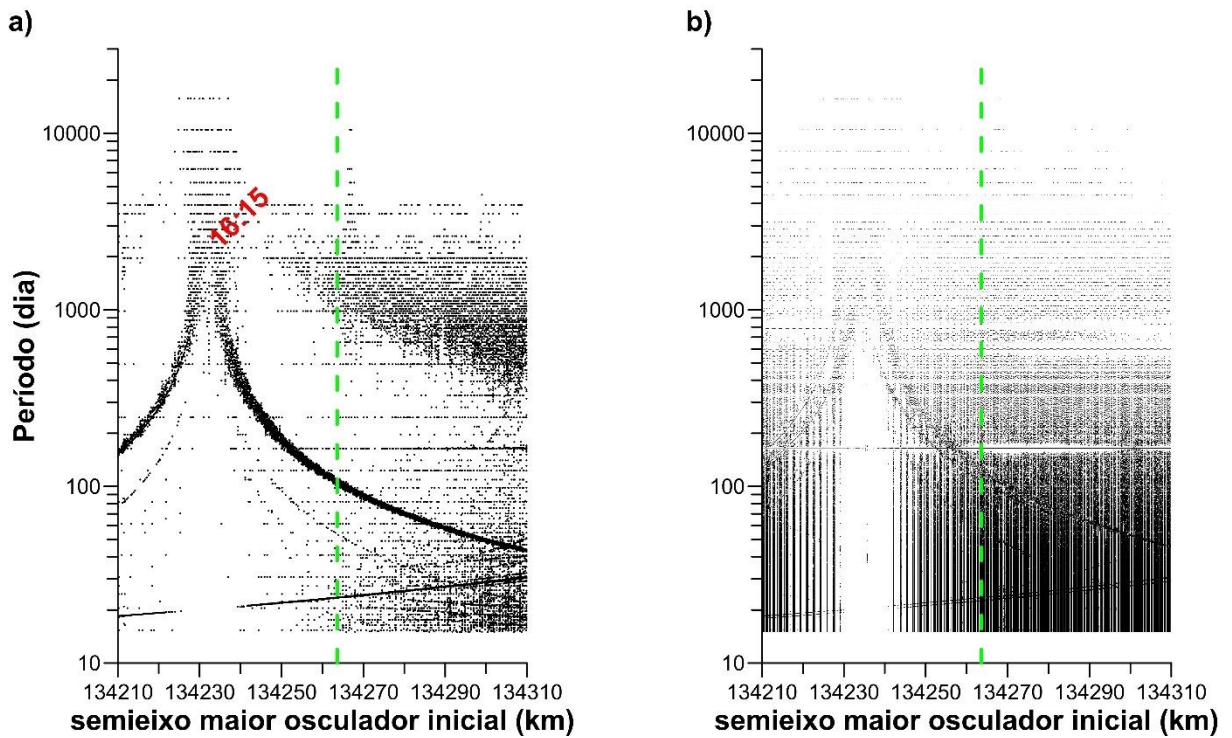
um baixo número de picos, limitando, assim, a região na qual as órbitas individuais apresentam-se regulares. Nela encontramos o período ( $P_{\sigma_1}$ ) associado à ressonância 11:10 de movimentos médios Anthe-Mimas. Callegari e Yokoyama (2020) descrevem em detalhe essa região.



**Figura. 2.4:** Individual Dynamic Power Spectra (IPS) para o semieixo de Anthe construído com amplitudes superiores a 5% do valor da maior amplitude obtido para cada espectro de potência individual. As linhas tracejadas verticais vermelhas delimitam a região na qual os espectros individuais possuem um pequeno número de picos representando órbitas regulares. O valor para o semieixo de Anthe em 01/01/2016 é indicado pela linha tracejada vertical verde. A linha horizontal tracejada azul delimita as regiões A e B. Cada órbita individual foi integrada por 172,25 anos com intervalo de 0,06 dia.

Na Fig. 2.5 podemos observar o IPS para Pan, um pequeno satélite de Saturno responsável por manter a divisão de Enke livre de partículas, que foi obtido a partir da

integração de 1000 órbitas de clones semelhantes à Pan. Esse satélite encontra-se próximo à ressonância 16:15 com Prometheus (Spitale *et al.* 2006). Neste IPS consideramos apenas as amplitudes com períodos maiores que 15 dias. A linha vertical tracejada verde representa o valor para o semieixo osculador de Pan,  $a = 134.263,6$  km em relação à data 01 de janeiro de 2016.



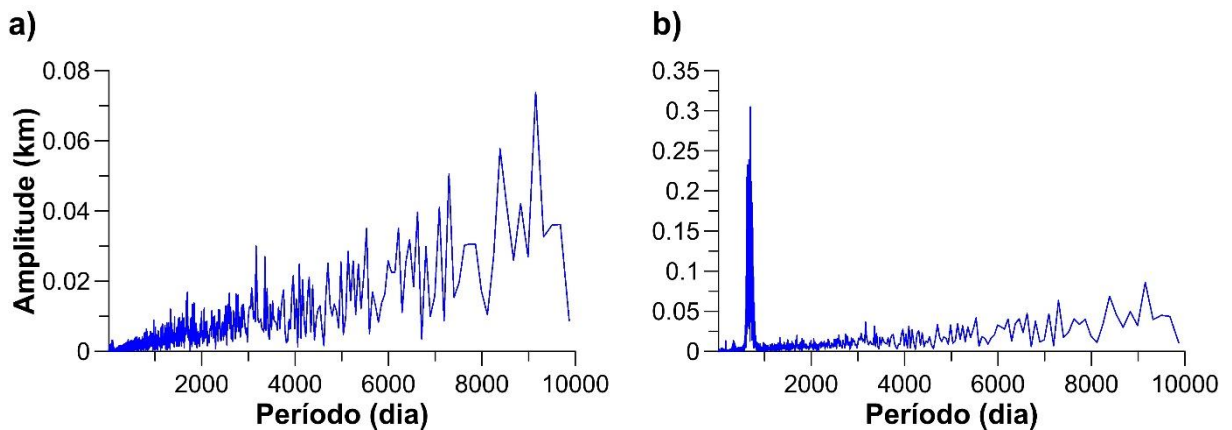
**Figura 2.5:** IPS para Pan obtidos com a análise do (a) semieixo maior e (b) excentricidade orbital. A linha vertical tracejada verde representa o valor para o semieixo maior osculador de Pan. Diferentemente da Fig. 2.4, aqui observamos um denso conjunto de pontos que dificultam a análise dos períodos fundamentais e em (a) podemos observar a distância entre a órbita atual de Pan e a ressonância 16:15 com Prometheus. Satélites utilizados nas simulações Pan e Prometheus além dos termos  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$  relacionados com o potencial de Saturno.

Notamos na Fig. 2.5(a) que representa o IPS para o semieixo maior osculador, uma estrutura relacionada com a ressonância 16:15 entre Prometheus-Pan (Spitale *et al.* 2006), porém Pan encontra-se distante cerca de 30 km em relação à região central que apresenta um denso conjunto de pontos relacionados com diversas amplitudes. Na Fig. 2.5(b) temos o IPS para a excentricidade orbital osculadora de Pan, vemos um denso conjunto de pontos que estão relacionados com um grande número de amplitudes, caracterizando a ausência de regularidade no movimento orbital de Pan<sup>3</sup>.

Para satélites que possuem suas órbitas caóticas, esperamos encontrar um IPS que apresente um denso conjunto de amplitudes. Goldreich e Rappaport (2003a, 2003b) determinaram que os satélites Prometheus e Pandora possuem as suas órbitas caóticas e esse

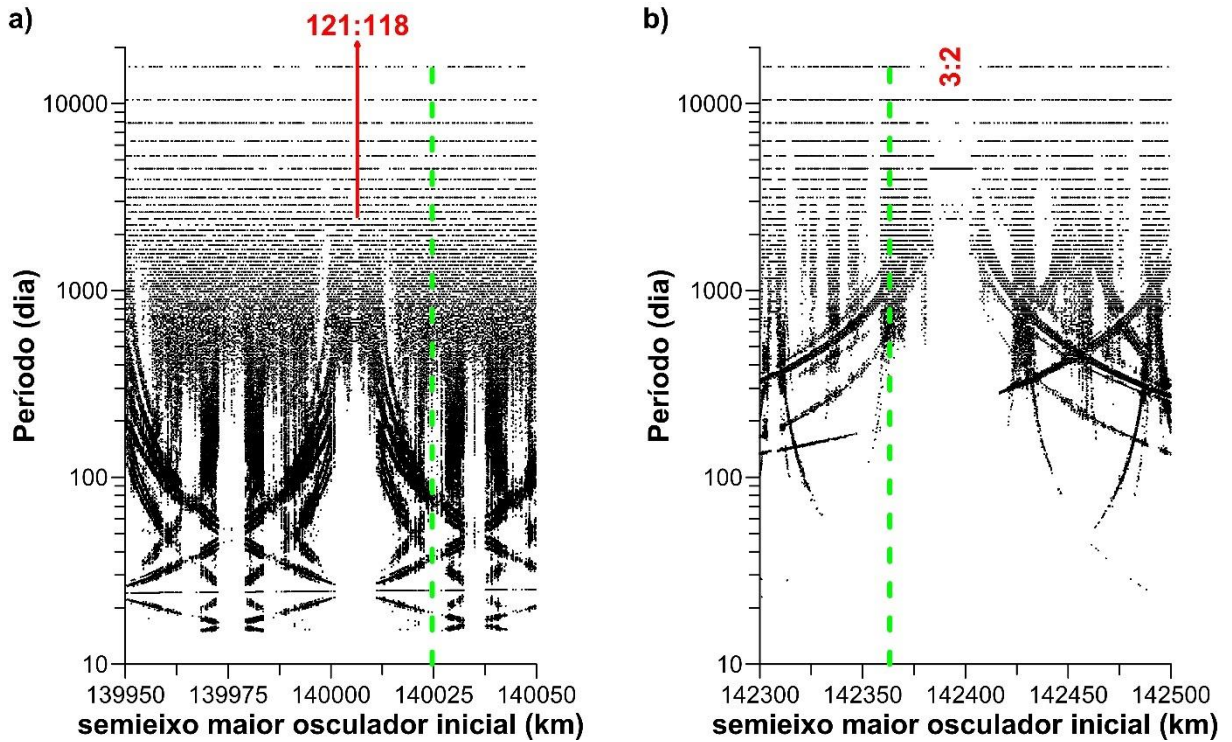
<sup>3</sup> Os resultados mostrados na Fig. 2.5 são originais.

par encontra-se próximo à ressonância 121:118. Determinamos os espectros para o semieixo maior osculador de Prometheus e Pandora. Para Prometheus, Fig. 2.6(a), o seu espectro revelou um grande número de picos concentrados em períodos menores que 2000 dias que provocam uma pequena variação aproximada de 0,02 km no semieixo osculador de Prometheus e uma amplitude de 0,08 km que ocorre com período aproximado de 9250 anos. Por outro lado, o espectro para semieixo osculador de Pandora Fig. 2.6(b) apresenta uma elevada amplitude de 0,3 km com período de 700 dias. Esse elevado número de picos condiz com a dinâmica caótica de Prometheus e Pandora.



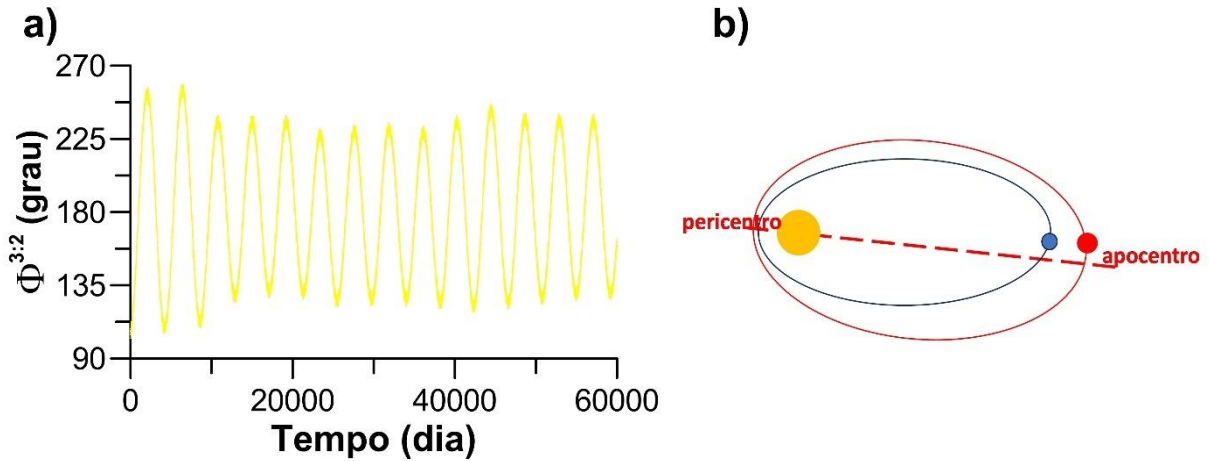
**Figura 2.6:** Espectros de Fourier para o semieixo maior osculador de Prometheus (a) e Pandora (b). O elevado número de picos reflete a dinâmica caótica desse par de satélites. Nessa simulação consideramos Atlas, Prometheus, Pandora e incluímos Mimas e Tethys e suas órbitas foram integradas por um período de 1720 anos com intervalo de 0,06 dia.

Nas Fig. 2.7(a) e Fig. 2.7(b) temos os IPS para o semieixo maior osculador de Prometheus e Pandora. Esses IPS foram construídos a partir da análise de 1000 órbitas de clones semelhantes a Prometheus e 2000 clones semelhantes à Pandora com condições iniciais na data 01/01/2000. Assim como Pan, Prometheus e Pandora estão afastados da ressonância. Para Prometheus, Fig. 2.7(a), há um denso conjunto de amplitudes, característico de um movimento irregular, mas para Pandora, Fig. 2.7(b), podemos notar à direita de seu semieixo maior osculador, que há uma região na qual os clones de Pandora possuem movimento regular e essa região está associada à ressonância 3:2 de movimentos médios com Mimas.



**Figura 2.7:** A linha verde tracejada em (a-b) representa o semieixo maior para cada satélite de teste em relação à data 01/01/2000. Em (a) vemos o IPS para o semieixo maior osculador de Prometheus que está distante cerca de 25 km da ressonância 121:118 com Pandora. Em (b) Pandora, encontra-se distante cerca de 40 km do centro da ressonância 3:2 de movimentos médios com Mimas. Nessa simulação, consideramos Mimas, Tethys, Atlas, Prometheus e Pandora. Cada uma das órbitas individuais desses satélites clones foram integradas por 172,25 anos com intervalo de 0,06 dia.

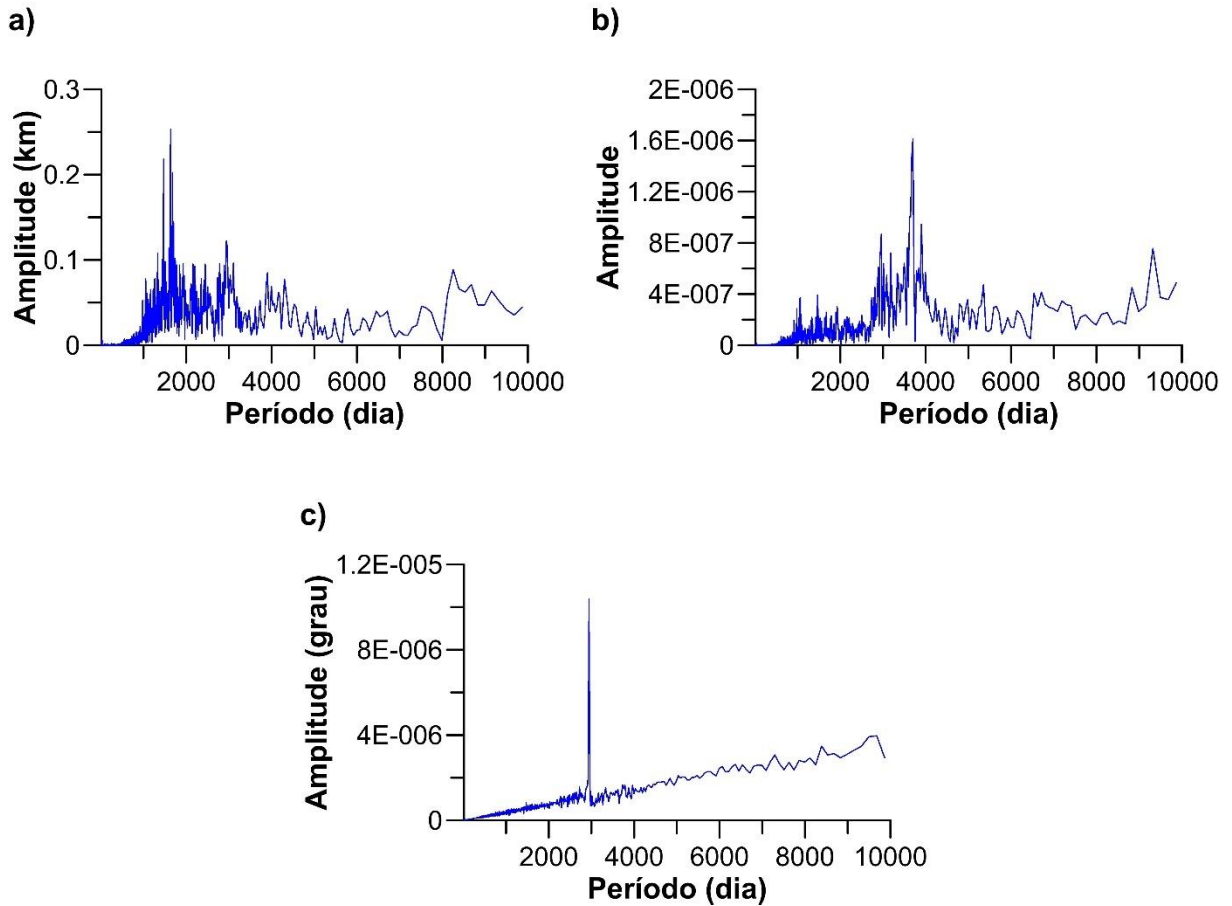
Para confirmarmos que a região compreendida entre  $142380 < a_0 < 142420$  km representa o domínio da ressonância 3:2 de movimentos médios com Mimas, calculamos a variável angular geométrica  $\Phi^{3:2} = 3\lambda_{Mimas} - 2\lambda - \varpi_{Mimas}$ , em que  $\lambda_{Mimas}$  e  $\varpi_{Mimas}$  representam a longitude média e a longitude do pericentro de Mimas e  $\lambda$  se refere à longitude média do clone semelhante à Pandora com semieixo maior osculador igual a  $a = 142395$  km e os demais elementos orbitais osculadores considerados em relação a data 01/01/2000. A variação temporal dessa quantidade angular pode ser observada na Fig. 2.8(a) para um período de 60 mil dias. Observamos que, para esse satélite,  $\Phi^{3:2}$  está librando ao redor de  $180^\circ$ , ou seja, as conjunções entre o par Mimas-“Clone de Pandora” oscilam ao redor de uma linha que passa pelo apocentro de Mimas (Fig. 2.8(b)) e esse resultado será discutido com mais detalhes no Capítulo 4.



**Figura 2.8:** (a) A libração para o ângulo geométrico  $\Phi^{3:2} = 3\lambda_{Mimas} - 2\lambda - \varpi_{Mimas}$  ao redor de  $180^\circ$  significa que as conjunções entre esse clone de Pandora e Mimas oscilam ao redor de uma linha que passa pelo apocentro de Mimas. Nessa simulação, usamos o tempo de integração de 60 mil dias com intervalo de 1 dia e os satélites considerados foram: Mimas, Tethys, Atlas, Prometheus e Pandora, ilustrando o esquema de uma ressonância. (b) Representação esquemática para a libração ao redor do apocentro de Mimas.

## 2.4 A análise espectral para Atlas

Como vimos acima, podemos utilizar a análise espectral para a identificação de frequências fundamentais e avaliarmos se o movimento orbital de um satélite é regular ou irregular. A Fig. 2.2, acima, revelou os picos relacionados com a dinâmica de curto período para Atlas. Para a caracterização da dinâmica secular e ressonante, devemos observar os picos relacionados com o longo período. Na Fig. 2.9 vemos os espectros para os elementos orbitais osciladores (a) semieixo maior, (b) excentricidade e (c) a inclinação orbital para um clone de Atlas perturbado unicamente por Prometheus. Com o objetivo de determinar os períodos fundamentais com precisão, a órbita para esse satélite foi determinada para 1720 anos com intervalo de 0,06 dia. Diferentemente dos espectros obtidos para Anthe (Callegari e Yokoyama 2020) e Methone (Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021), os espectros revelaram um grande número de picos relacionados com pequenas variações nesses elementos orbitais.

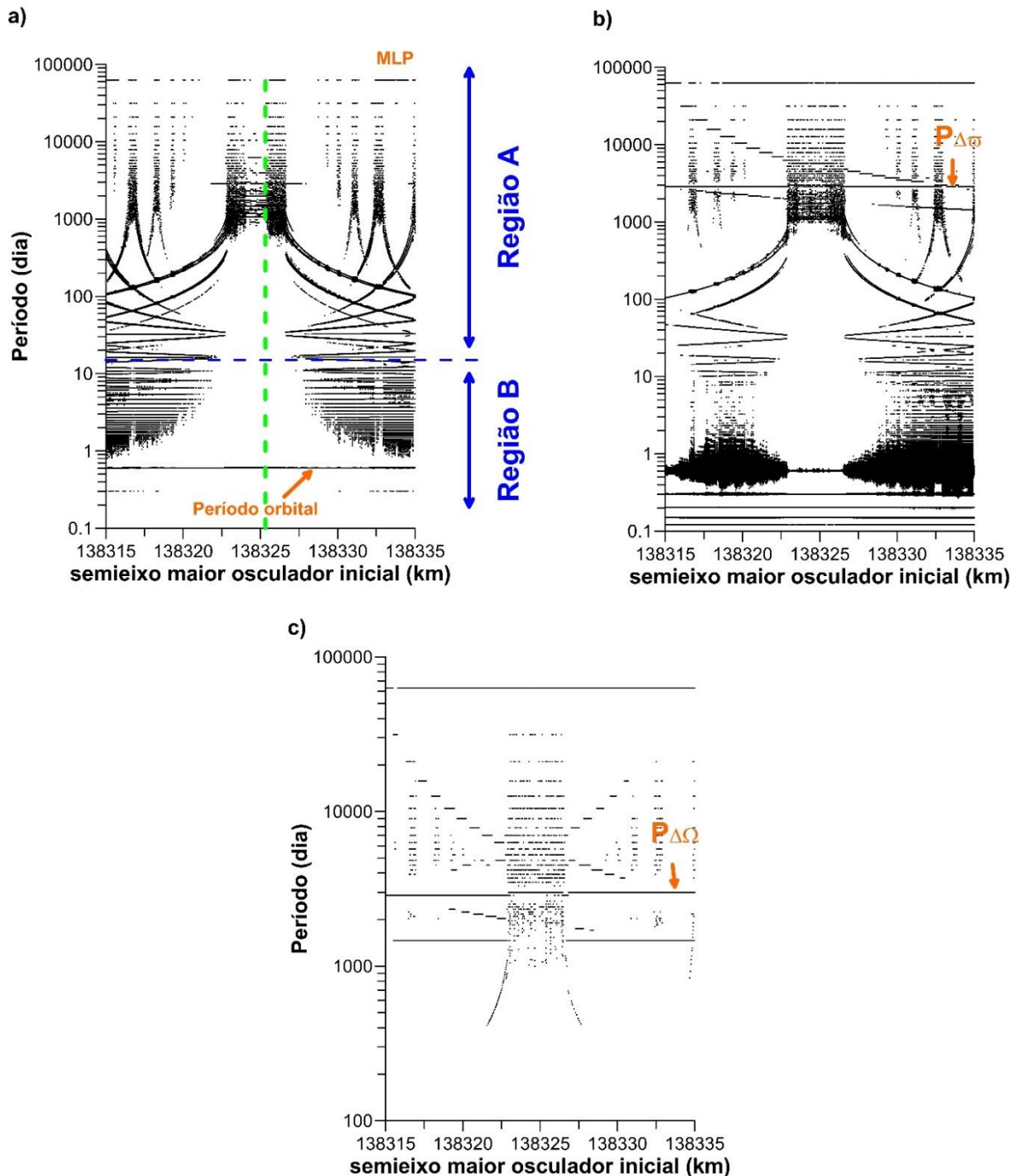


**Figura 2.9:** O Espectro de Fourier para os osculadores (a) semieixo maior, (b) excentricidade e (c) inclinação orbital para um clone de Atlas perturbado somente por Prometheus, obtidos a partir de 1720 anos com intervalo de 0,06 dia. Podemos observar um grande número de picos dificultando a identificação dos períodos fundamentais. Condições iniciais relativas à data 01/01/2000

Em um comparativo com os espectros para Prometheus e Pandora (Figs. 2.6(a-b)) vemos que o elevado número de picos para os espectros de Atlas está relacionado com o seu movimento orbital irregular. Para confirmarmos, podemos construir o IPS para Atlas.

Assim como o IPS para Anthe (Fig. 2.4), a Fig. 2.10 mostra três IPS's obtidos a partir dos espectros calculados para os elementos osculadores (a) semieixo maior, (b) excentricidade e (c) inclinação orbital de 5 mil clones de Atlas no intervalo  $138.315 \leq a_0 \leq 138.328$  km, perturbado unicamente por Prometheus considerando a amplitude de referência igual a 5%. Fixamos a excentricidade osculadora desses clones de Atlas em  $e_0 = 0.0059$ . Os lugares geométricos dos períodos fundamentais no semieixo maior, excentricidade e inclinação são distribuídos na direção vertical e identificados com os respectivos símbolos ( $P_{\Delta\varpi}$ ,  $P_{\Delta\Omega}$  ver Capítulo 3 para a definição de  $\Delta\varpi$  e  $\Delta\Omega$ ). Em (a) temos o espectro para o semieixo maior osculador e a **região A** que contém os picos relacionados com o longo período e a **região B** que contém os picos relacionados com o curto período.

Nesses IPS's, identificamos o período orbital de Atlas,  $\sim 0,6$  dia, os períodos seculares devido a perturbação com Prometheus  $P_{\Delta\omega} \sim 2.859,75$  e  $P_{\Delta\Omega} \sim 2.995,32$  e a perturbação de “Muito Longo Período<sup>4</sup>” (MLP)  $\sim 62914$ . A linha vertical verde tracejada representa o valor para o semieixo de Atlas dado na Tabela 2.2.

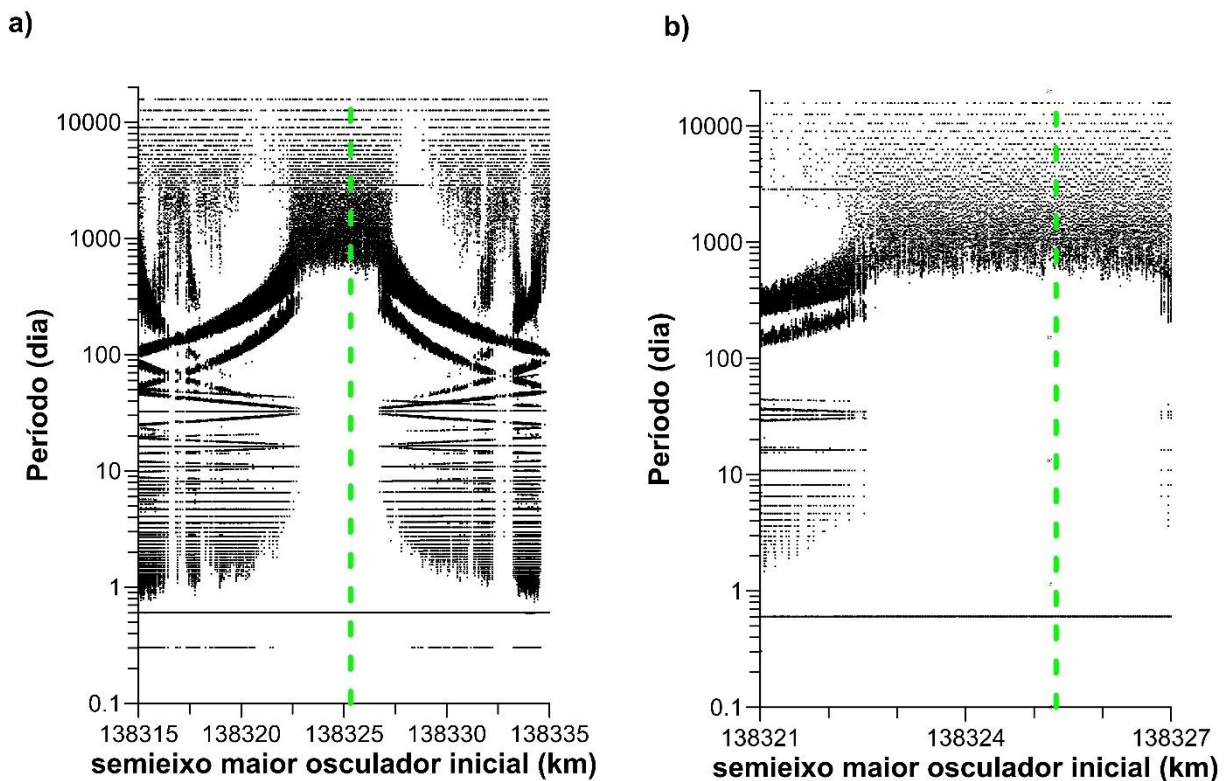


**Figura 2.10:** O IPS para Atlas obtido a partir do espectro de 5 mil clones semelhantes a Atlas integrados por 172,25 anos com intervalo de 0,06 dia. Em (a) observamos o IPS para o semieixo maior osculador, (b) excentricidade osculadora e (c) inclinação orbital. O curto período foi mantido apenas para efeito de completude.

<sup>4</sup> O termo “Muito Longo Período” se refere ao tempo total de integração 172,25 anos ou 62.914,3125 dias.

Na Fig. 2.10 vemos o IPS para um sistema formado apenas pelos satélites clones de Atlas perturbados por Prometheus. Com o objetivo de ampliarmos a análise feita em Cooper *et al.* (2015) e Renner *et al.* (2016), adicionamos o satélite Pandora ao IPS dado na Fig. 2.10 e o resultado pode ser visto na Fig. 2.11. Uma rápida comparação entre as Fig. 2.10(a) e 2.11(a) revela o aparecimento de um grande número de picos que não estavam presentes anteriormente, e esse aumento de picos sugere que o acréscimo de Pandora contribui com perturbações significativas na dinâmica orbital de Atlas.

Embora o IPS seja uma ferramenta computacional útil para a análise do movimento orbital, temos a desvantagem de mantermos apenas um parâmetro livre, logo a introdução de uma nova variável livre. A excentricidade orbital, o que nos permite analisar o espectro de frequências para um denso conjunto de condições iniciais e a metodologia adotada em Callegari e Yokoyama (2010, 2020), Callegari *et al.* (2021) e Ceccatto *et al.* (2022) que aborda o mapeamento do domínio das ressonâncias no espaço de fase, denominado de Mapa Dinâmico, o que será abordado na próxima seção.



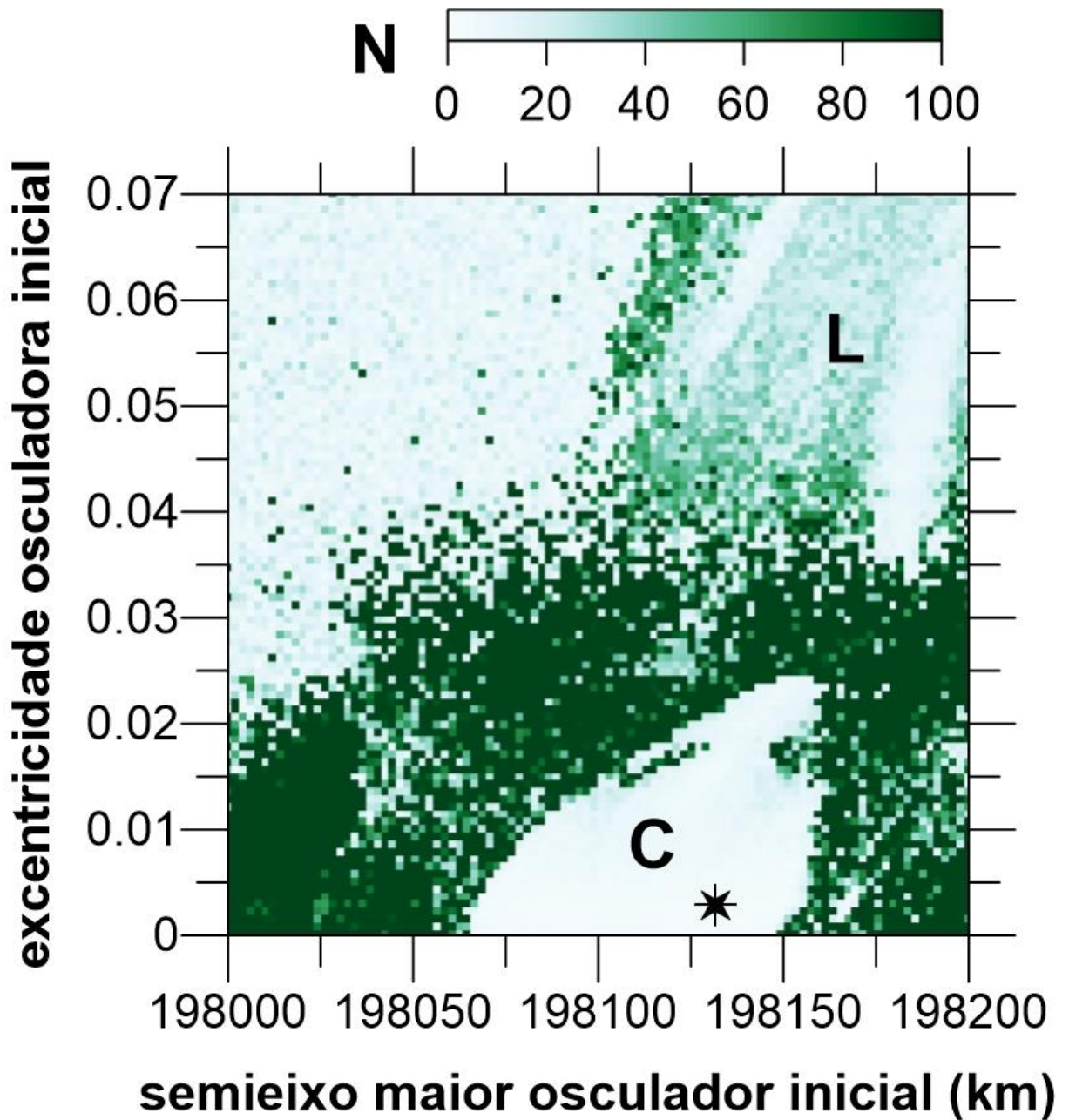
**Figura 2.11:** (a) IPS para o semieixo maior de Atlas obtido como na Fig. 2.10(a), porém acrescentamos os efeitos perturbativos de Pandora. Notamos que a inclusão de Pandora provocou o aparecimento de um elevado número de picos na região da ressonância 54:53. (b) Vista detalhada para a região interna a ressonância 54:53.

## 2.5 Mapa dinâmico

Os mapas dinâmicos consistem da grade onde é possível investigar o espaço de fase em função da excentricidade ( $e_0$ ) e do semieixo maior ( $a_0$ ). Assim, uma nova dimensão é adicionada e, nesse caso, para cada condição inicial de um clone de Atlas, associamos o número espectral  $\mathbf{N}$  que representa o número de picos no espectro de Fourier que são maiores que uma porcentagem previamente definida do maior pico presente no espectro, isto é, a amplitude de referência (AR). Para evitarmos o curto período, excluimos os picos associados com os períodos menores que 15 dias. Os mapas dinâmicos são construídos associando uma paleta de cores (azul/branco) com distintos tons associados aos valores de  $\mathbf{N}$ , ou seja, para um pequeno valor de  $\mathbf{N}$ , a respectiva cor tenderá para o branco/azul claro e os altos valores de  $\mathbf{N}$  serão representados por azul escuro.

A Fig. 2.12 representa o mapa dinâmico construído a partir do espectro de 25.041 satélites clones de Anthe, no qual  $\mathbf{N}$  foi construído com o número de picos significativos cuja AR representa 5% para a amplitude máxima do espectro individual da órbita do satélite clone. Reproduzimos na Fig. 2.12 a Fig. 7 de Callegari e Yokoyama (2020).

Com a introdução da excentricidade osculadora inicial, Callegari e Yokoyama (2020) identificaram as regiões que estão relacionadas com os domínios para as ressonâncias de corotação (C) e Lindblad (L). Vemos que as regiões para as quais o movimento é regular apresentam um valor pequeno para  $\mathbf{N}$ , porém, as regiões nas quais as órbitas apresentam-se irregulares ou caóticas (regiões mais escuras) têm um alto valor para  $\mathbf{N}$ .



**Figura 2.12:** Mapa Dinâmico para Anthe, reprodução da Fig. 7 de Callegari e Yokoyama (2020). Os Mapas Dinâmicos auxiliam na identificação das regiões relacionadas com a ressonância e demais perturbações. A estrela em negrito representa a condição inicial  $(a_0, e_0) = (198131.08 \text{ km}, 0.0027)$  para Anthe em relação à data 01/01/2016. As regiões representadas por **C** indicam a região para a ressonância de corotação e **L** a região para a ressonância de Lindblad, discutidas com detalhes no Capítulo 4.

## Capítulo 3

### Dinâmica Secular

#### 3.1 Introdução

No capítulo anterior, realizamos uma breve discussão sobre as ferramentas computacionais utilizadas neste trabalho e, em seguida, apresentamos o método da análise de frequências do espectro obtido por meio da FFT e estudamos os espectros para alguns satélites naturais de Saturno. Notamos a presença nos IPS para a excentricidade e inclinação orbital de uma frequência relacionada com uma perturbação de longo período denominada de “Componente secular mútua de longo de período” (veja a Fig. 5 de Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021 como exemplo).

Nesse capítulo, iremos apresentar essa perturbação e analisar os efeitos provocados na excentricidade e inclinação devido à perturbação secular introduzida pelo termo  $J_2$  (veja o Apêndice B para mais detalhes) e de longo período utilizando a metodologia dada no Capítulo 7 de Murray e Dermott (1999). Como aplicação, apresentamos uma breve discussão sobre os efeitos seculares de Mimas em Aegaeon, Methone e Anthe e, por fim, analisamos os efeitos seculares nos sistemas formados por Atlas-Prometheus, Atlas-Pandora e Atlas-Prometheus-Pandora.

#### 3.2 Perturbações seculares

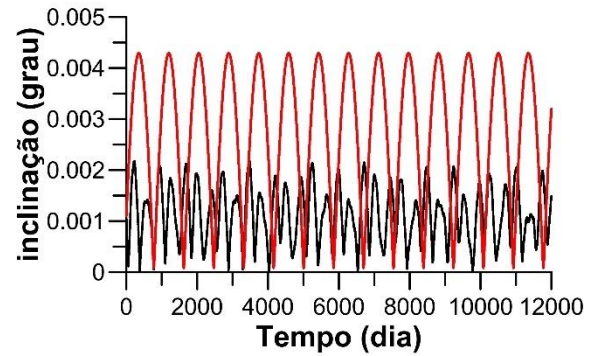
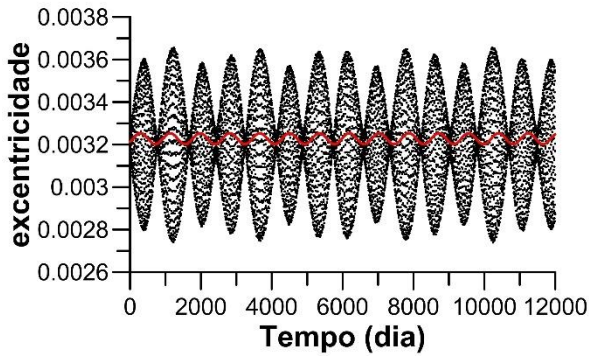
Com o objetivo de exemplificar a análise para a variação secular na excentricidade e inclinação, utilizamos Aegaeon, Methone e Anthe perturbados por Mimas. As condições iniciais desses satélites foram obtidas considerando as Efemérides dadas pelo *Horizons* na época 01/01/2016 e dadas na Tabela 3.1. As massas para Methone e Aegaeon foram obtidas de Thomas e Helfenstein (2020) já a massa de Anthe foi obtida de Callegari e Yokoyama (2020) e a massa de Mimas obtida diretamente do efemérides. sendo que, para cada satélite, os seus elementos foram obtidos para um período de 12 mil dias com intervalo de 8 horas cada (Fig. 3.1).

**Tabela 3.1:** Massas e elementos orbitais para Aegaeon, Anthe, Methone e Mimas em relação à época 01/01/2016.

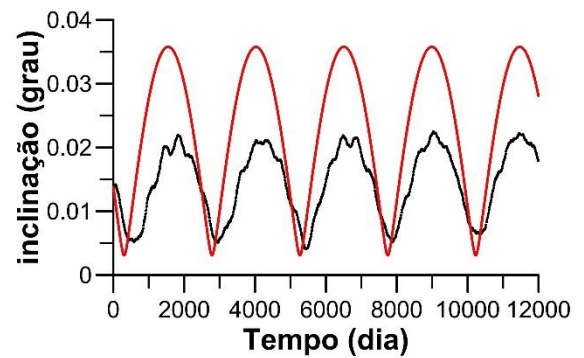
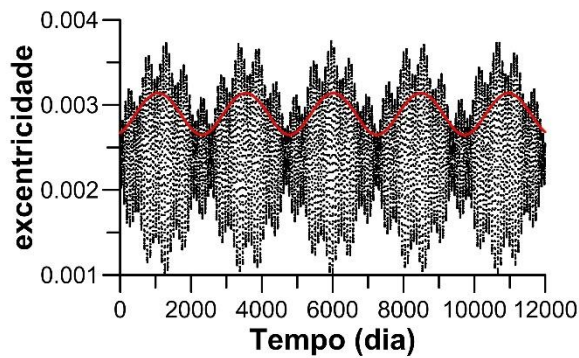
	Aegaeon	Methone	Anthe	Mimas
Massa (kg)	$7,82 \times 10^{10}$	$3,902 \times 10^{12}$	$1,4987 \times 10^{12}$	$3,75057 \times 10^{19}$
$a$ (km)	$1,94717 \times 10^5$	$1,94717 \times 10^5$	$1,98131 \times 10^5$	$1,86026 \times 10^5$
$e$	$3,21228 \times 10^{-3}$	$2,67417 \times 10^{-3}$	$2,70805 \times 10^{-3}$	$2,00286 \times 10^{-2}$
$I$ (°)	$1,09530 \times 10^{-2}$	$1,37551 \times 10^{-2}$	$2,11603 \times 10^{-2}$	1,56808
$\Omega$ (°)	172,11251	328,62956	284,43665	92,68827
$\omega$ (°)	305,30558	247,93951	77,73816	149,66971
$n$ (°/dia)	442,63108	354,840625	345,70510	379,99295
$\varpi$ (°)	117,41809	216,56907	2,17481	242,35798

Na Fig. 3.1 abaixo temos um comparativo entre a excentricidade e inclinação osculadora (curva em negrito) e secular (curva em vermelho) obtida com a solução analítica para a teoria secular dada em Murray e Dermott (1999) para Aegaeon, Methone e Anthe. A comparação entre ambas excentricidades, osculadora e secular, nos permite determinar o período que a componente secular possui. Fig. 3.1(a): período secular ~1200 dias. Fig. 3.2(b): período ~2440 dias, semelhante ao “período secular mútuo” encontrado por Callegari *et al.* (2021). Fig. 3.2(c): apresenta o período ~1800 dias para a excentricidade e inclinação de Anthe (Callegari e Yokoyama 2020).

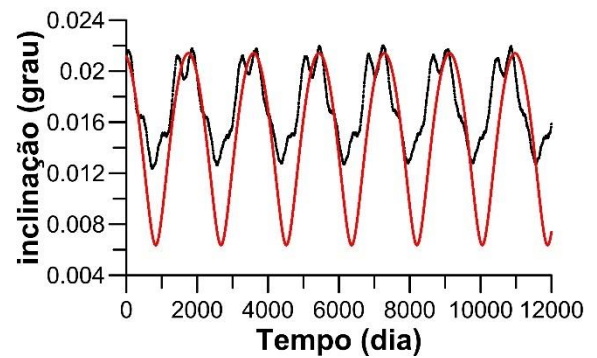
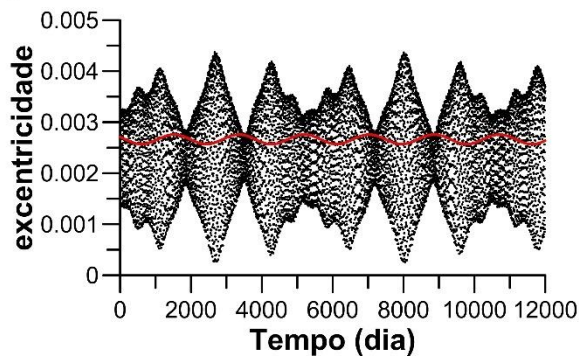
## a) Aegaeon



## b) Methone

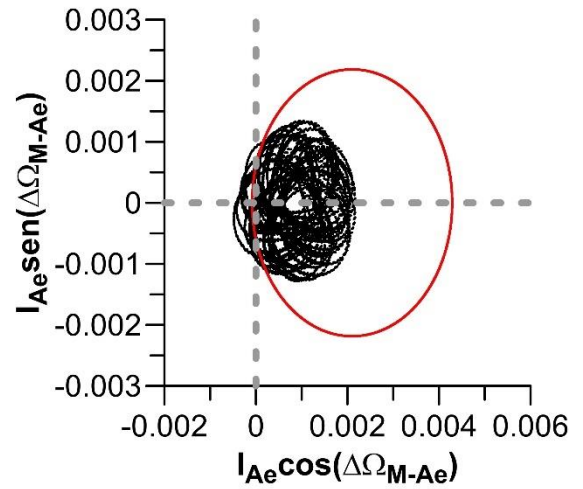
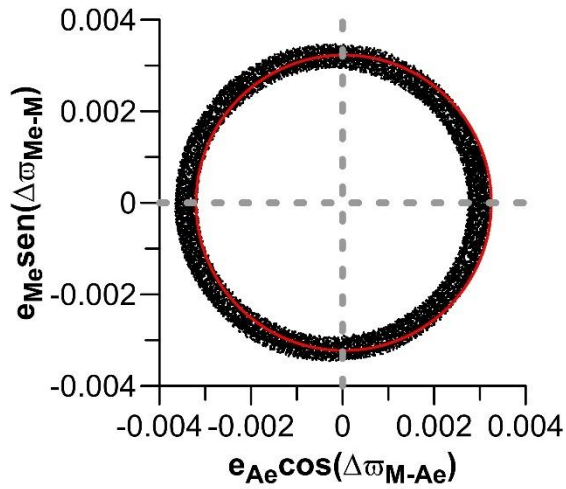


## c) Anthe

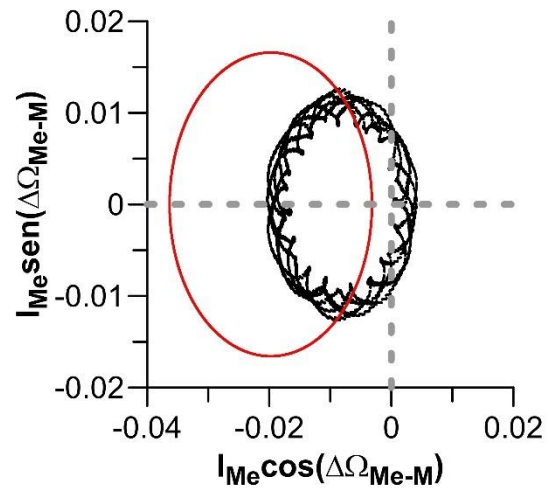
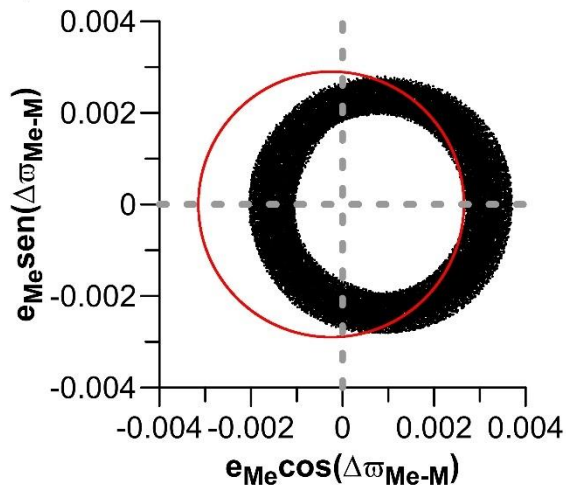


**Figura 3.1:** Comparativo entre a excentricidade e inclinação osculadoras (negrito) com a excentricidade e inclinação secular (vermelho) para (a) Aegaeon, (b) Methone e (c) Anthe perturbados por Mimas. Notamos os períodos seculares em cada um dos elementos acima, sendo que, para (a) Aegaeon  $\sim 1200$  dias, (b) Methone  $\sim 2440$ , (c) Anthe  $\sim 1800$  dias para excentricidade e inclinação em ambos elementos.

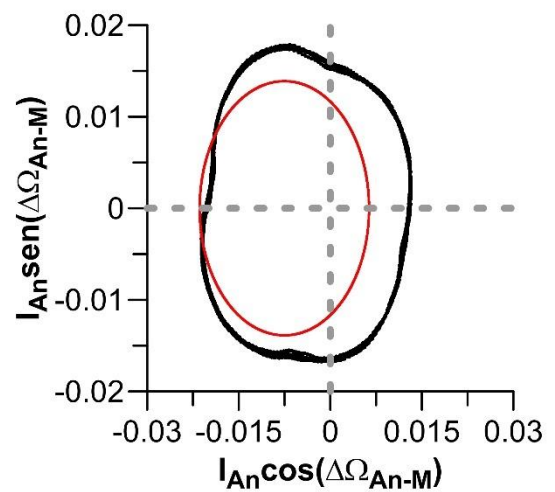
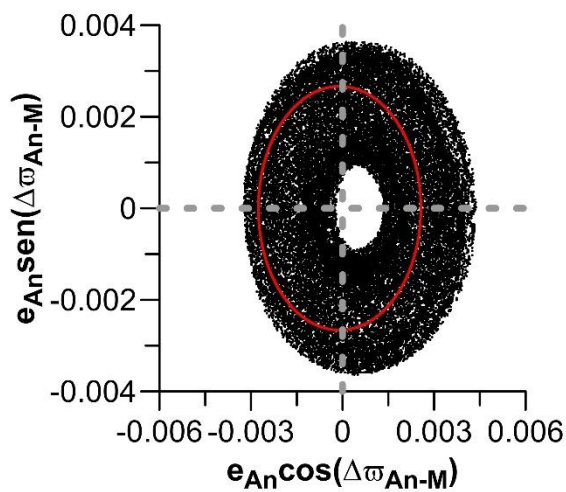
## a) Aegaeon



## b) Methone



## c) Anthe



**Figura 3.2:** Representação polar para a excentricidade e inclinação de (a) Aegaeon (b) Methone e (c) Anthe perturbados por Mimas. Podemos observar que a perturbação provocada em Methone por Mimas introduz componentes forçadas em sua excentricidade e inclinação, mas para Aegaeon e Anthe, essa perturbação é observada na inclinação orbital.

Pequenos corpos, em particular, os pequenos satélites, possuem uma componente forçada em sua excentricidade e inclinação provocadas pelo corpo perturbador de sua órbita. Na Fig. 3.2, observamos o gráfico polar para Aegaeon, Methone e Anthe. A representação no plano polar permite avaliar as componentes livres e forçadas para a excentricidade e inclinação. Duas novas quantidades angulares são definidas,  $\Delta\varpi_{i-j} \equiv \varpi_i - \varpi_j$  e  $\Delta\Omega_{i-j} \equiv \Omega_i - \Omega_j$ , nas quais  $i$  e  $j$  se referem aos satélites. Assim como na Fig. 3.1, a curva em negrito representa os elementos osculadores obtidos com as efemérides do *Horizons* e, a curva vermelha representa os elementos obtidos com a teoria secular generalizada. No caso de Methone, Aegaeon e Anthe, Mimas provoca uma componente forçada na excentricidade de Methone  $\sim 0,0004$  e em sua inclinação  $\sim 0,0007^\circ$  (Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021), por outro lado, para Aegaeon e Anthe, a componente forçada em sua excentricidade é bem pequena, mas a componente forçada para a inclinação é  $\sim 0,002^\circ$  e  $\sim 0,02^\circ$ , respectivamente.

### 3.3 A Teoria Secular para Atlas

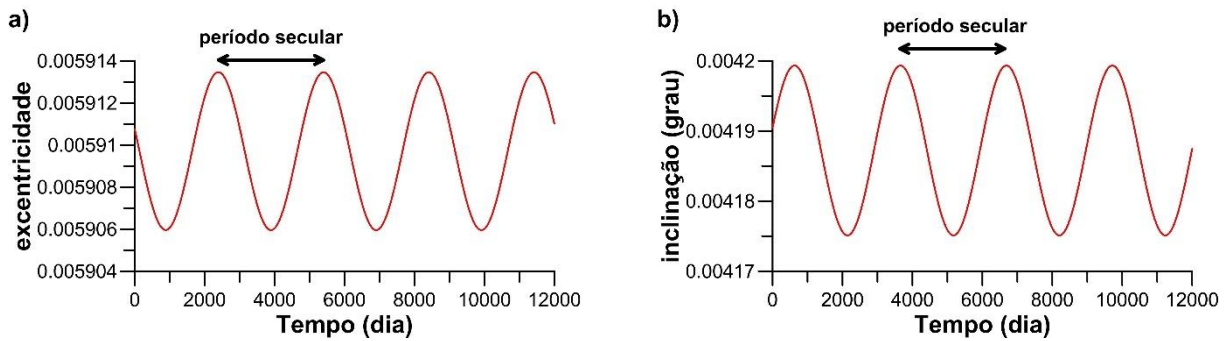
Cooper *et al.* (2015) e Renner *et al.* (2016) investigaram o movimento orbital de Atlas utilizando apenas Prometheus. Porém, Atlas é perturbado, em menor intensidade, por Pandora (Spitale *et al.*, 2006). Com o objetivo de avaliarmos o quão significativo é a perturbação de Pandora na órbita de Atlas, tal perturbação será investigada utilizando a teoria secular para esses três corpos. Iremos considerar três diferentes cenários: i) Para um subsistema formado apenas entre Atlas e Prometheus; ii) um subsistema formado apenas por Atlas e Pandora; iii) Para um sistema formado por Atlas, Prometheus e Pandora. Assim como na seção anterior, poderemos identificar os períodos, utilizando a FFT, como descrito na seção 2.3, relacionados com a perturbação secular para Atlas.

As condições iniciais são as mesmas da Tabela 2.2 para cada um dos satélites Atlas, Prometheus e Pandora.

#### 3.3.1 O subsistema Atlas-Prometheus

Quando consideramos esse subsistema, podemos ver que a excentricidade de Atlas é perturbada por Prometheus com um período aproximado de 2978,9 dias, obtido por meio da FFT. Tal perturbação provoca uma variação com amplitude aproximada de  $2,63 \times 10^{-6}$ , ou seja, muito pequena (veja a Fig. 3.3 abaixo).

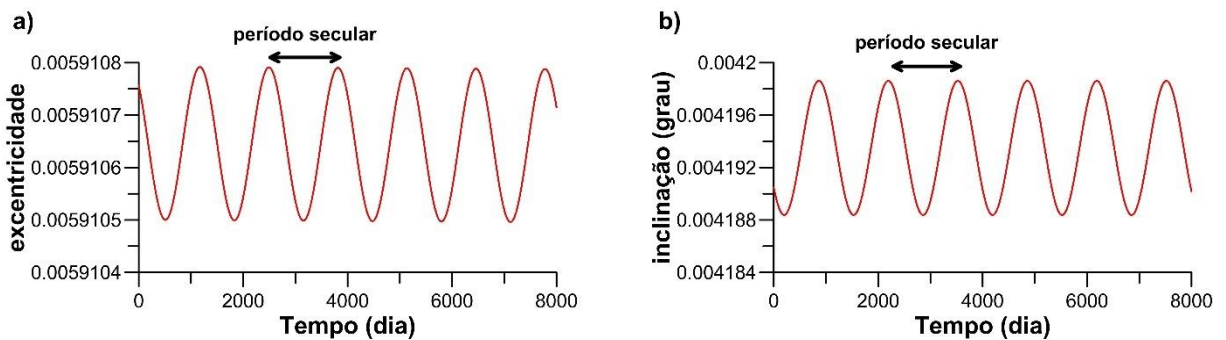
Para a inclinação, Atlas apresenta um período aproximado de 3048,1 dias, mais longo em relação ao obtido para a excentricidade, com uma variação aproximada de  $0,00001^\circ$ .



**Figura 3.3:** Excentricidade e inclinação calculadas pela Teoria Secular para Atlas-Prometheus. A contribuição secular de Prometheus em Atlas produz uma pequena variação em sua excentricidade da ordem de  $10^{-6}$  e, em relação à inclinação, temos uma variação ligeiramente maior da ordem de  $10^{-5}$ .

### 3.3.2 O subsistema Pandora-Atlas

Pela Fig. 3.4, vemos que a excentricidade de Atlas sofre uma perturbação com período aproximado de 1324 dias e com variação de  $1,4 \times 10^{-7}$ . Em relação à inclinação, o sistema Pandora-Atlas sofre perturbação de cerca de 1337,5 dias, com uma variação de  $3,4 \times 10^{-6}$  para Atlas.

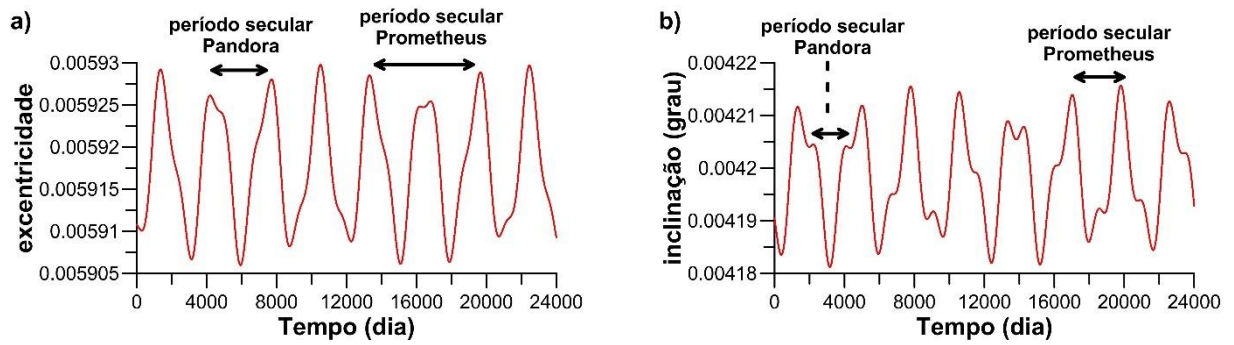


**Figura 3.4:** Excentricidade e inclinação secular calculadas para Atlas-Pandora. Assim como na Fig. 3.3, secularmente, a perturbação provocada por Pandora em Atlas é bem pequena.

### 3.3.3 O sistema Atlas, Prometheus e Pandora

Quando consideramos o sistema formado com os três satélites, encontramos evidências da pequena perturbação que Pandora provoca com Atlas e Prometheus.

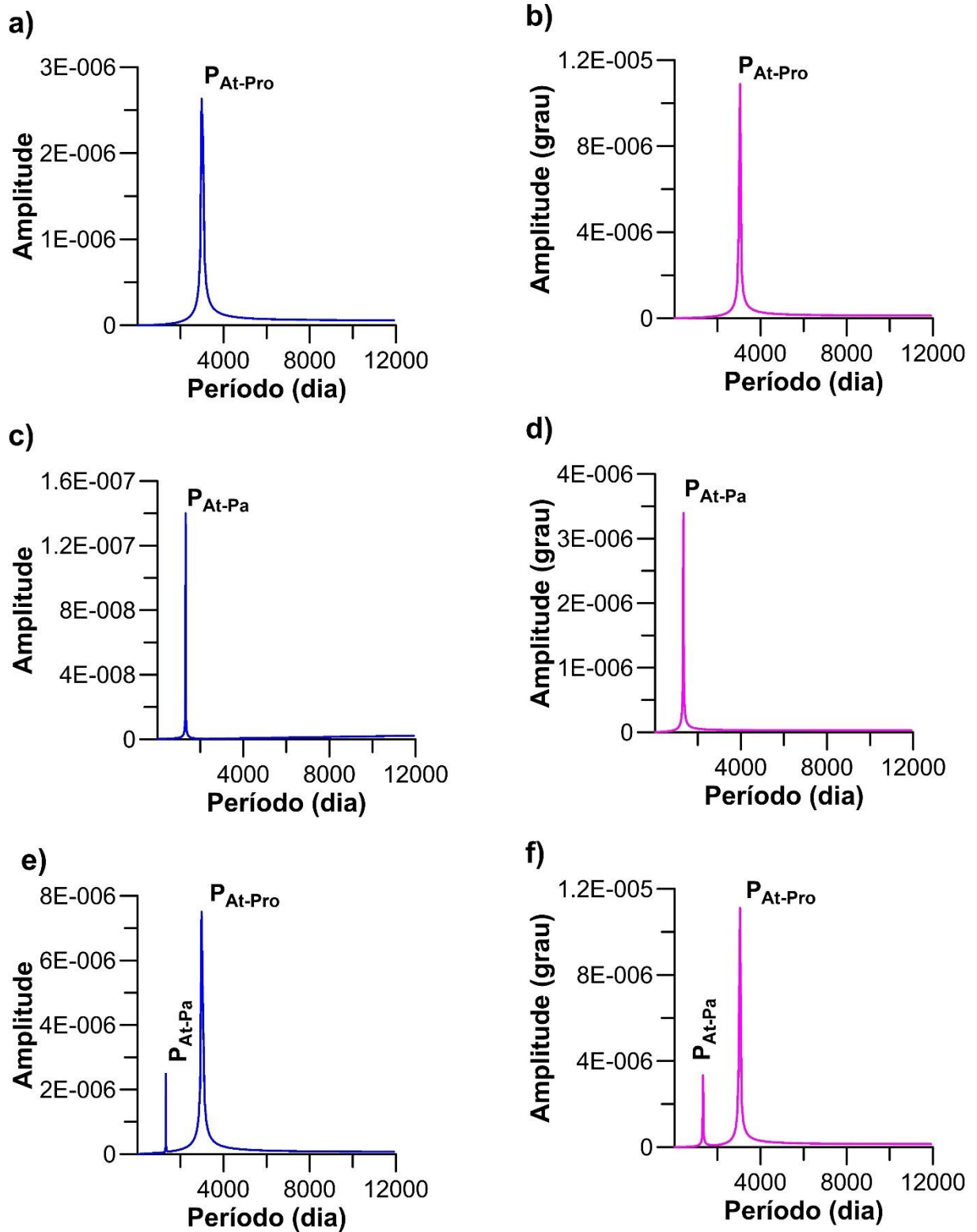
Podemos observar na Fig. 3.5 que a excentricidade e a inclinação de Atlas passam a apresentar uma composição de dois períodos:  $\sim 1000$  dias relacionados com Pandora e, com Prometheus, apresentando uma perturbação com período aproximado de 3000 dias.



**Figura 3.5:** Podemos observar que a introdução de Pandora afeta a excentricidade e a inclinação orbital de Atlas. Notamos a presença de dois períodos relacionados com a perturbação secular de Prometheus, ~3000 dias, e a perturbação secular provocada por Pandora, ~1000 dias.

A análise espectral para as osculadoras excentricidade (curva azul à esquerda) e inclinação orbital (curva magenta à direita) dada na Fig. 3.6 revela os períodos fundamentais relacionados com a perturbação secular. Observamos que tanto a excentricidade como a inclinação possuem apenas um período fundamental Fig. 3.6(a-b), mas, quando consideramos o espectro para a órbita de Atlas obtida juntamente com Prometheus e Pandora, ambos períodos são observáveis, Fig. 3.6(c).

Apesar das perturbações seculares sofridas por Atlas decorrentes de Prometheus e Pandora provocarem uma pequena amplitude em seus elementos osculadores excentricidade e inclinação, quando combinamos os efeitos mútuos dessas perturbações, vemos pela Fig. 3.5 que há um pequeno aumento na amplitude desses elementos osculadores.



**Figura 3.6:** FFT para os subsistemas formados por (a) Atlas-Prometheus; (b) Atlas-Pandora e (c) Atlas-Prometheus-Pandora. Curva azul, à esquerda, representa o espectro para a excentricidade e a curva magenta, à direita, representa a inclinação orbital

### 3.4 Efeitos de $J_2$ em $\omega$ e $\Omega$ de Atlas e Prometheus

Vamos considerar apenas os termos seculares que envolvem  $J_2$  na expansão da função perturbadora. Temos que a taxa de variação média para o nodo ascendente ( $\Omega$ ) e o argumento do pericentro ( $\omega$ ) de um corpo movendo-se ao redor de um corpo central oblato é dada por

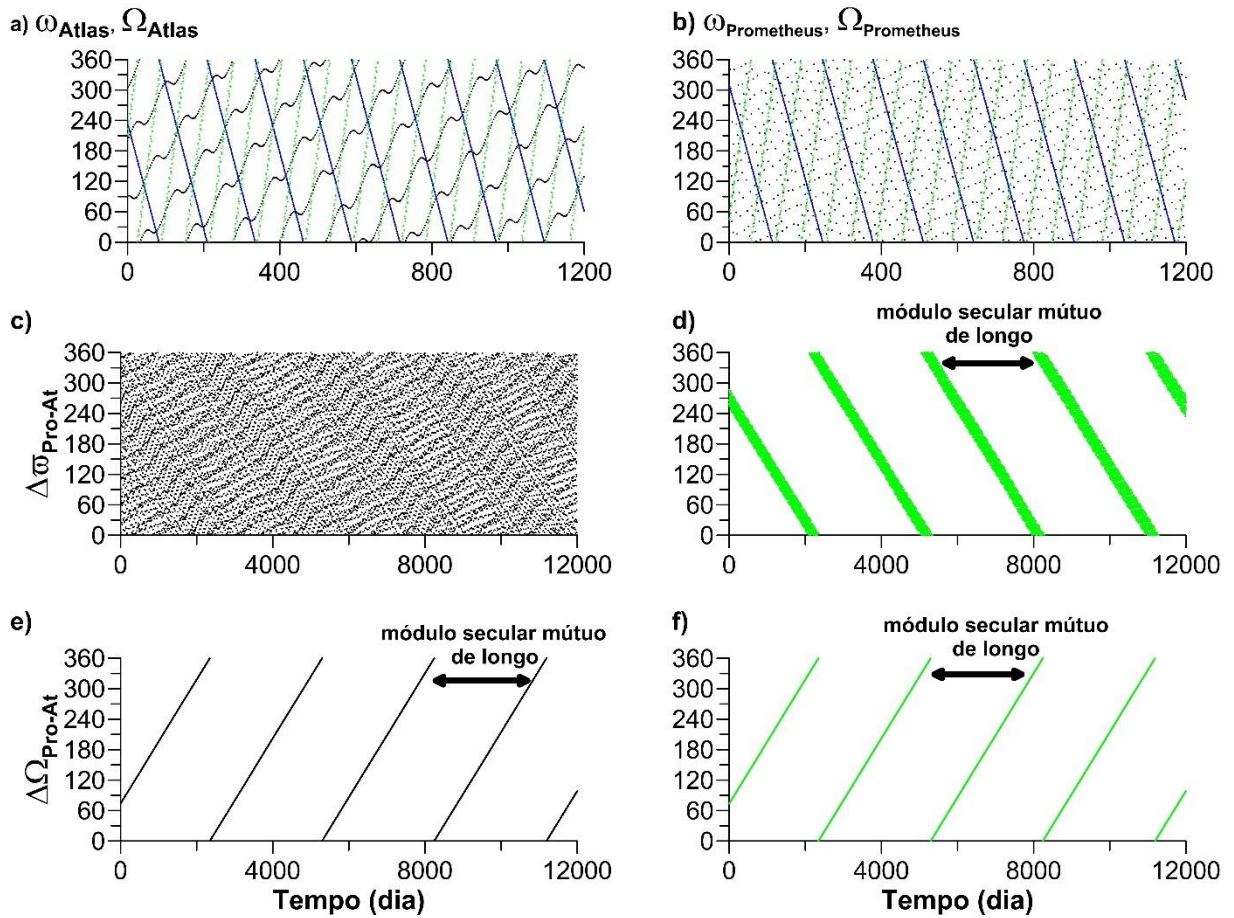
$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{(J_2 n R_c^2)}{a^2(1-e^2)} \cos i, \quad (3.1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2} \frac{(J_2 n R_c^2)}{a^2(1-e^2)} \left(2 - \frac{2}{5} \sin^2 i\right), \quad (3.2)$$

(Danby, 1988), em que  $n$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $R_c$  são o movimento médio, o semieixo maior, a excentricidade, a inclinação orbital com relação ao equador celestial do corpo central e o raio equatorial do planeta. Quando a órbita é próxima ao plano equatorial,  $\cos i \sim 1$ ,  $\sin^2 i \sim 0$ . Nesses casos,  $\omega$  circula em sentido prógrado com período que pode ser calculado pela Equação (3.2) e  $\Omega$  circula em sentido retrógrado e período determinado pela Eq. (3.1).

A Fig. 3.7 ilustra essa dinâmica considerando apenas Atlas e Prometheus. As variações angulares podem ser observadas nas Fig. 3.7(a-b), na qual a curva em negrito representa o osculador argumento do pericentro de Atlas ( $\omega_{Atlas}$ ) e a curva verde o respectivo geométrico argumento do pericentro e a curva azul o osculador nodo ascendente ( $\Omega_{Atlas}$ ). Com efeito, considera-se a variação temporal para o argumento do pericentro de Atlas. Vemos que  $\omega_{Atlas}$  circula no sentido prógrado com período aproximadamente igual a metade do período do nodo ascendente. Isso ocorre devido ao fator 2 no termo  $\left(2 - \frac{2}{5} \sin^2 i\right)$  na Eq. (3.2), a variação média para a longitude do pericentro de Atlas ( $\varpi_{Atlas} = \omega_{Atlas} + \Omega_{Atlas}$ ) e  $\Omega_{Atlas}$  possuem ordens similares de magnitude e sinais contrários, como ilustrado na Fig. 3.7(c).

Considerando as condições iniciais dadas na Tabela 2.2 e, lembrando que  $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2\pi}{T_\Omega}$ , podemos aplicá-las na Equação (3.1) para Atlas e Prometheus e assim, obtermos os períodos para as variações retrógradas para os nodos ascendentes de Atlas e Prometheus que são, respectivamente, 130,95 e 136,68 dias. Esses valores são semelhantes aos que podem ser coletados a partir da análise espectral do conjunto de dados obtidos pelas efemérides (pontos em negrito) utilizadas na construção dos gráficos como vistos na Fig. 3.7.



**Figura 3.7:** A dinâmica de curto período para o argumento do pericentro ( $\omega$ ) e a longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ) podem ser vistos na parte superior. As curvas pontilhadas em preto representam o osculador  $e$ , em verde, o geométrico  $\omega$  e, em azul, o nodo ascendente  $\Omega$ . Podemos notar como o osculador  $\omega$  possui componentes oscilatórios que dificultam a análise visual. Podemos notar que  $\Delta\omega_{Pr-At}$  é de difícil interpretação física (um conjunto difuso de pontos), uma vez que  $\Delta\omega_{Pr-At}$  contém o pericentro de ambos os satélites, sendo fortemente influenciado pela componente rápida devido ao termo  $J_2$ . Para os demais, podemos observar o período relacionado ao módulo secular mútuo de longo período ( $\sim 3123,6$  dias). Satélites presentes na simulação: Atlas e Prometheus. Condições iniciais em 01 de janeiro de 2000, calculadas por intervalo de 30 mil dias, com passo de 1 dia.

Seja a variação relativa para os nodos ascendentes de Prometheus e Atlas,

$$\Delta\Omega_{Pr-At} \equiv \Omega_{Prometheus} - \Omega_{Atlas}, \quad (3.3)$$

respectivamente ao plano equatorial de Saturno. A partir das taxas de variação para os  $\Omega_{Atlas}$  e  $\Omega_{Prometheus}$  obtidas com a Equação (3.1) podemos, de maneira simples, determinar que  $\Delta\Omega_{Pr-At}$  circula com período  $P$  aproximado de 3123,60 dias, obtido a partir da relação

$$\frac{1}{P_{\Delta\Omega}} = \frac{1}{\Omega_{Prometheus}} - \frac{1}{\Omega_{Atlas}} = -\frac{1}{136,68} - \left(-\frac{1}{130,95}\right) \Leftrightarrow P_{\Delta\Omega} \sim 3123,6.$$

Como podemos observar na Fig. 3.7(e-f),  $\Delta\Omega_{Pr-At}$  circula no sentido prógrado com período  $P_{\Delta\Omega} \sim 3123,6$  dias, mostrando, assim, uma boa aproximação entre a teoria secular de primeira ordem, efemérides e a integração numérica.

O osculador  $\omega_{Prometheus}$  mostra uma aparente circulação prógrada com período aproximado de 68,33 dias, obtido a partir da Equação (3.2), poluído pelo ruído formado por um conjunto de pontos, conforme visto na Fig. 3.7(b). A variação relativa para as longitudes do pericentro,

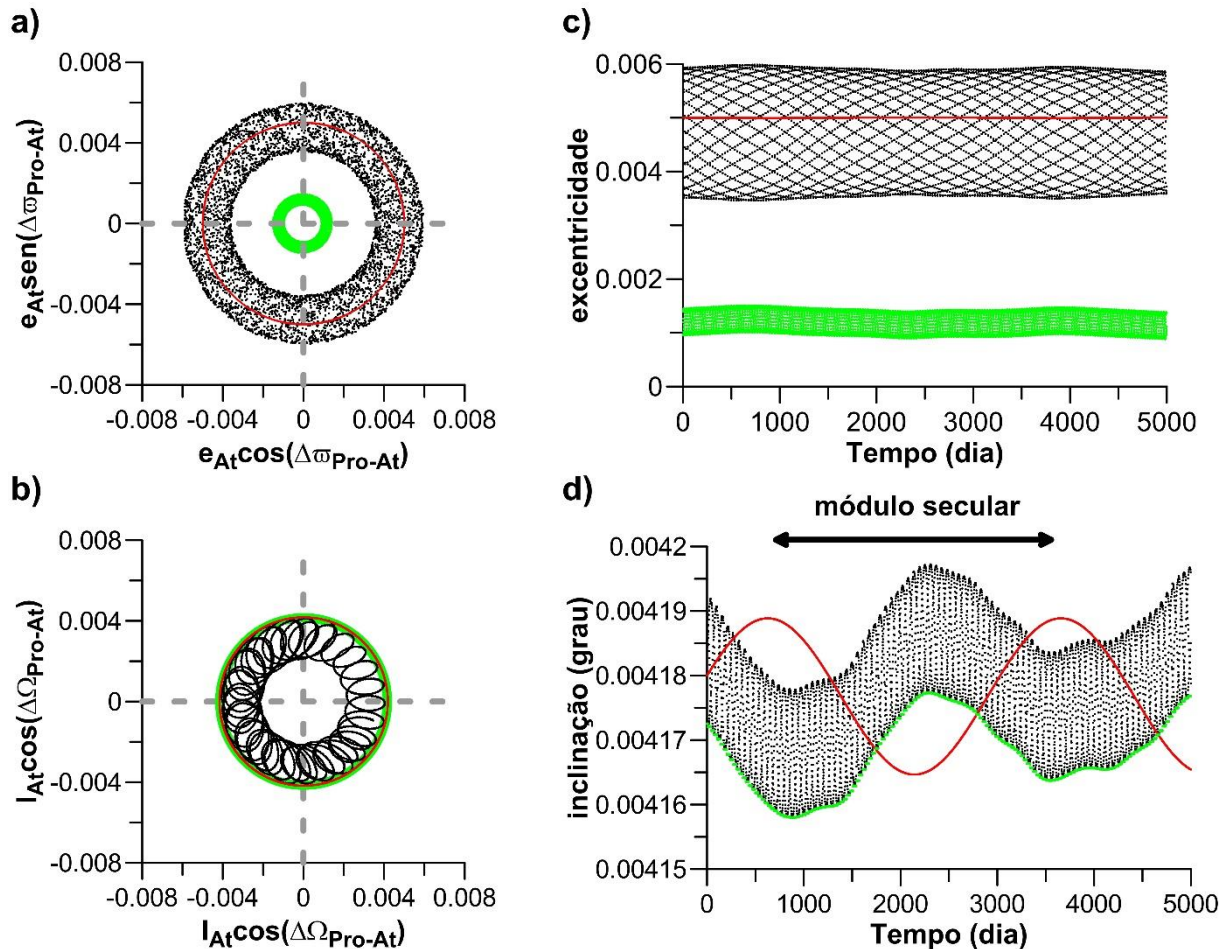
$$\Delta\bar{\omega}_{Pro-At} \equiv \bar{\omega}_{Prometheus} - \bar{\omega}_{Atlas}, \quad (3.4)$$

demonstra também um aspecto borrado, já que o osculador  $\bar{\omega}_{Prometheus}$  contém  $\omega_{Prometheus}$ . Em contrapartida, a variação de  $\Delta\bar{\omega}_{Pro-At}$  é lenta e suave, com período de 3133,15 dias (Fig. 3.7(c-d)).

O motivo para a rápida variação de  $\omega_{Atlas}$  e  $\omega_{Prometheus}$  é associado às perturbações provocadas por  $J_2$ , um fenômeno muito bem conhecido por trabalhos clássicos (Greenberg, 1981). Os elementos geométricos são calculados para corrigir este rápido avanço do pericentro, o qual somente ocorre nos casos em que a excentricidade orbital é menor que um determinado valor superior (Callegari e Yokoyama, 2020).

### 3.5 A variação secular para a excentricidade e inclinação de Atlas

As componentes forçadas e próprias para uma dada órbita, devido as interações seculares em geral, são bem representadas em coordenadas polares. As componentes seculares mútuas  $\Delta\bar{\omega}_{Pro-At}$  e  $\Delta\bar{\Omega}_{Pro-At}$  estão principalmente lincadas com a excentricidade e inclinação, respectivamente. A coluna à esquerda na Fig. 3.8(a-b) mostra a projeção para os elementos geométricos (curva verdes) obtidos com os esquemas ii) e II) representados em um período de 5 mil dias e a solução secular clássica (curva vermelha) para um satélite semelhante a Atlas no plano  $e_{At}\cos(\Delta\bar{\omega}_{Pro-At}) \times e_{At}\sin(\Delta\bar{\omega}_{Pro-At})$  e  $i_{At}\cos(\bar{\Omega}_{Pro-At}) \times i_{At}\sin(\Delta\bar{\Omega}_{Pro-At})$ .



**Figura 3.8:** Curvas pretas representam os elementos osculadores obtidos com o esquema ii); curvas verdes elementos geométricos obtidos com o esquema II), curvas vermelhas obtidas com a teoria secular clássica, incluindo Saturno com os coeficientes  $J_2$  e  $J_4$  e Prometheus. (a) projeção das trajetórias no plano  $e_{At} \cos(\Delta\varpi_{Pro-At}) \times e_{At} \sin(\Delta\varpi_{Pro-At})$ , (b) projeções das trajetórias no plano  $i_{At} \cos(\Delta\Omega_{Pro-At}) \times i_{At} \sin(\Delta\Omega_{Pro-At})$ , em que  $i_{At}$  está em grau, (c) variação temporal para a excentricidade correspondente a (a), (d) variação das inclinações orbitais correspondentes a (b). Podemos observar em (d) a componente secular mútua de longo período na inclinação.

Como podemos observar na Fig. 3.8(a), a trajetória relacionada com a excentricidade de Atlas está muito próxima à origem, por outro lado, na Fig. 3.8(b), podemos observar que a trajetória relacionada com a inclinação de Atlas está ligeiramente afastada em relação à origem.

Na Fig. 3.8(a), a curva verde representa a componente própria para a excentricidade geométrica de Atlas,  $e_{Pg} \sim 0,002$  enquanto a curva preta representa a órbita obtida pelo *Horizons* e a curva vermelha representa a solução secular clássica para um satélite que possui as condições iniciais semelhantes a Atlas. Podemos estimar que a componente própria para essa excentricidade é  $e_p \sim 0,006$ , ou seja, quase o triplo para a componente geométrica. A inclinação forçada de Atlas é  $i_f \sim 0,0032^\circ$ , uma boa estimativa medida a partir do raio médio da trajetória preta representada na Fig. 3.8(b). Por outro lado, diferentemente da componente própria

geométrica para a excentricidade, a componente própria para a inclinação geométrica possui valor semelhante ao obtido com a teoria secular clássica, isto é,  $\sim 0,004^\circ$ .

Os elementos geométricos são fracamente afetados por essas variações de curto período, no entanto, a inclinação geométrica de Atlas sofre com oscilações de longo período provocadas pela componente secular mútua de longo período (Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021).

A coluna à direita representa a variação temporal para a excentricidade e inclinação das simulações presentes na coluna à esquerda.

Na Fig. 3.8(c) podemos observar que a comparação simultânea desses três elementos se torna complicada por questão de escala. A excentricidade geométrica é muito menor que a osculadora, tornando difícil a identificação visual de componentes de longo período. Por outro lado, na Fig. 3.8(d), podemos identificar a componente secular mútua de longo período para a inclinação. Notamos que o período obtido com a teoria secular clássica é semelhante ao valor  $\sim 3100$  dias.

Diferentemente do que Callegari *et al.* (2021) encontraram em sua Fig. 6, não podemos identificar componentes ressonantes, uma vez que a órbita atual de Atlas não está presa à ressonância 54:53 de movimentos médio com Prometheus.

## Capítulo 4

### Ressonâncias no sistema de pequenos satélites interiores de Saturno

#### 4.1 Introdução

Mesmo antes das descobertas realizadas pela sonda Cassini, o sistema de Saturno era conhecido por fornecer uma variedade de exemplos em estruturas ressonantes. Os pares de satélites Mimas-Tethys, Enceladus-Dione e Titan-Hyperion mostraram como a comensurabilidade entre os seus períodos orbitais podem vir a realçar os efeitos gravitacionais mútuos<sup>5</sup>. Recentemente a sonda espacial Cassini revelou a existência de novos pequenos satélites naturais, entre eles podemos destacar Aegaeon, Methone e Anthe, cujas primeiras análises apontaram uma relação de comensurabilidade de seus períodos orbitais com Mimas (Spitale *et al.*, 2006; Cooper *et al.* 2008; Heddman *et al.* 2010). Esse fenômeno de comensurabilidade entre os períodos orbitais é conhecido como uma ressonância e podem vir a fornecerem pistas tentadoras sobre a origem e evolução desses mundos (Peale 1999).

Em 2004, Saturno fora visitado novamente pela sonda *Cassini-Huygens* e suas imagens obtidas dos anéis e satélites redefiniram o sistema de Saturno. Vários pequenos satélites foram descobertos, entre eles Anthe, Methone e Aegaeon.

As recentes descobertas realizadas por sondas espaciais, combinadas com os dados de instrumentos baseados em Terra, fornecem fortes evidências da importância dinâmica das ressonâncias no sistema de Saturno. Os novos satélites descobertos, Anthe, Methone e Aegaeon, possuem peculiaridades no comportamento dinâmico, apresentam arcos de poeira e a origem destes arcos provavelmente está relacionada com as ressonâncias com Mimas (Munõz-Gutiérrez e Giuliatti Winter 2017).

Neste capítulo discutiremos o papel das ressonâncias com a interpretação de novos dados, concentrando na relação entre as ressonâncias e as propriedades dinâmicas dos satélites de Saturno.

#### 4.2 Ressonância de movimentos médios

A ressonância de movimentos médios pode ocorrer quando a relação entre os períodos orbitais de dois corpos orbitando ao redor do mesmo corpo central satisfaz a relação

$$\frac{n_2}{n_1} \approx \frac{p}{p+q}, \quad (4.1)$$

---

<sup>5</sup> No Apêndice A as ressonâncias citadas foram estudadas brevemente.

em que  $n_1$  e  $n_2$  representam o movimento médio do corpo interno e externo, respectivamente,  $p$  e  $q$  são inteiros não nulos e  $q$  irá denotar a ordem da ressonância. Tal condição é válida desde que as variações nas longitudes dos pericentro e dos nodos ascendentes sejam muito menores que os respectivos movimentos médios.

Iremos supor que o corpo interno possua uma pequena excentricidade e inclinação, sendo considerado uma partícula de teste e essa partícula será perturbada pelo corpo externo que também possui uma pequena excentricidade e inclinação. Essas considerações permitem a expansão da função perturbadora  $\mathcal{R} = \mu_2 \sum S \cos \phi$ , na qual  $S$  representa uma função do semieixo maior, excentricidade e inclinação para os corpos internos e externos (Murray e Dermott, 1999).

A partir da definição de longitude média ( $\lambda$ ), longitude do pericentro ( $\varpi$ ) e longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ), de um modo geral, o argumento  $\phi$  pode ser escrito como

$$\phi = j_1 \lambda_2 + j_2 \lambda_1 + j_3 \varpi_2 + j_4 \varpi_1 + j_5 \Omega_2 + j_6 \Omega_1, \quad (4.2)$$

em que  $\lambda = \ell + \varpi$  e  $j_i$  são números inteiros que devem satisfazer a condição de *d'Alembert*

$$\sum_{i=1}^6 j_i = 0. \quad (4.3)$$

A relação de *d'Alembert* não influencia na escolha dos ângulos, assim, podemos escolher ângulos que possuam a direção fixa.

Os termos de baixa ordem na expansão média são dados por

$$\langle \mathcal{R}_1 \rangle = G \frac{m_2}{a_2} \left[ \mathcal{R}_D^{(sec)} + e_1^{|j_4|} e_2^{|j_3|} s_1^{|j_6|} s_2^{|j_5|} (f_d(\alpha) + f_e(\alpha)) \cos \varphi \right], \quad (4.4)$$

$$\langle \mathcal{R}_2 \rangle = G \frac{m_1}{a_1} \left[ \mathcal{R}_D^{(sec)} + e_1^{|j_4|} e_2^{|j_3|} s_1^{|j_6|} s_2^{|j_5|} (\alpha f_d(\alpha) + f_i(\alpha)) \cos \varphi \right], \quad (4.5)$$

sendo  $s_1 = \sin \frac{1}{2} I_1$  e  $s_2 = \sin \frac{1}{2} I_2$ . Sendo  $\mathcal{R}_D^{(sec)}$  a contribuição secular dada pela Equação (7.1) em Murray e Dermott (1999).

As expressões para  $f_d(\alpha)$ ,  $f_e(\alpha)$  e  $f_i(\alpha)$  para  $j = 1, 2, 3$ , e 4 podem ser vistas no Apêndice B de Murray e Dermott (1999).

Logo, uma ressonância irá ocorrer em determinado semieixo maior quando

$$\dot{\phi} = j_1 \dot{\lambda}_2 + j_2 \dot{\lambda}_1 + j_3 \dot{\varpi}_2 + j_4 \dot{\varpi}_1 + j_5 \dot{\Omega}_2 + j_6 \dot{\Omega}_1 \approx 0, \quad (4.6)$$

no qual  $\dot{\Omega}_1$ ,  $\dot{\Omega}_2$ ,  $\dot{\varpi}_1$  e  $\dot{\varpi}_2$  são dados pelas Equações de Lagrange (veja as equações (6.148) e (6.149) de Murray e Dermott 1999). Para localizarmos uma ressonância no semieixo maior, devemos encontrar  $j_i$ 's que satisfazem as Equações (4.3) e (4.6).

Para uma ressonância de primeira ordem,  $\frac{n_e}{n_i} = \frac{p}{p+1}$ , em que  $e$  representa o corpo externo e  $i$  o interno, os quatorze argumentos relacionados com essa comensurabilidade podem ser conferidos na Tabela 4.1.

**Tabela 4.1:** Argumentos dos cossenos  $\phi_k$  para a expansão até a terceira ordem em excentricidade e inclinação da função perturbadora associada à comensurabilidade de movimentos médios do tipo  $(p+1):p$ , em que  $p$  é um inteiro (Adaptado de Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021).

Argumento ( $\phi_k$ )	Argumento do cosseno
1	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i - \varpi_e$
2	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i - \varpi_i$
3	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_e - 2\varpi_i$
4	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i - 2\varpi_e + \varpi_i$
5	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_i - 2\Omega_i$
6	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_e - 2\Omega_i$
7	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i - \varpi_i - \Omega_e + \Omega_i$
8	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i - \varpi_i + \Omega_e - \Omega_i$
9	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_i - \Omega_e - \Omega_i$
10	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i - \varpi_e - \Omega_e + \Omega_i$
11	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i - \varpi_e + \Omega_e - \Omega_i$
12	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_e - \Omega_e - \Omega_i$
13	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_i - 2\Omega_e$
14	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_e + 2\Omega_e$

### 4.3 Visão geral das estruturas do Sistema de Saturno

Uma vez que os satélites regulares<sup>6</sup> estão próximos a Saturno desde a sua formação, as suas órbitas evoluem devido às forças de marés envolvidas nas interações entre Saturno e seus satélite. A ação dessas forças provoca a migração do satélite, causando pequenas mudanças em suas órbitas iniciais, sendo o semieixo maior, a excentricidade e inclinação orbital os elementos mais afetados. Mas devido aos efeitos da migração por marés, grupos de satélites podem vir a cruzar regiões nas quais encontram-se as ressonâncias de movimentos médios e, eventualmente, serem capturados por algumas delas. Esse mecanismo, provavelmente, ocorreu e ainda ocorre no caso dos satélites de Saturno. As três ressonâncias clássicas Mimas-Tethys, Enceladus-Dione e Titan-Hyperion possuem efeitos bem conhecidos que contribuíram para a determinação de suas massas (Peale 1999).

<sup>6</sup> O termo regular é adotado quando a órbita do satélite é quase circular, a inclinação do plano orbital é próxima ao equador do corpo central e o semieixo maior é menor que a distância crítica clássica.

Para um satélite natural que apresenta sua órbita capturada em uma ressonância é uma importante pista para a compreensão da origem e evolução orbital dado que, esses encontros, podem mudar significativamente os valores “pré-ressonantes” dos elementos orbitais do satélite. Por exemplo, Janus e Epimetheus, satélites coorbitais estão na ressonância 1:1 um com o outro e, essa ressonância, previne a colisão mútua entre eles.

Uma hipótese para a formação dos satélites coorbitais é que eles são fragmentos de uma colisão interrompida entre dois corpos. Uma vez que Janus e Epimetheus estão muito próximos à comensurabilidade 2:1 com Enceladus é natural especular que, no passado, poderia haver um envolvimento ressonante com Enceladus. Tal ressonância poderia ter promovido o aquecimento de maré explicando a recente atividade geológica em Enceladus (Greenberg 1981).

Similarmente, Atlas, Prometheus e Pandora, conhecidos como “Satélites Pastores”, exercem torque na borda de seus respectivos anéis. Esse processo de pastoreio é feito provavelmente pela proximidade da borda de um anel com o seu satélite pastor a uma comensurabilidade da forma  $j:j + 1$ ,  $j$  um inteiro, e a combinação desses efeitos é geralmente aceita como uma explicação para o motivo da não dispersão das partículas que formam os anéis devido às colisões entre elas (Hedman *et al.* 2010). Por exemplo, a borda interna do anel A apresenta uma ressonância 7:6 com Atlas, 6:5 com Prometheus e 5:4 com Pandora (Colwell *et al.* 2009).

Fenômenos ressonantes são comuns entre os satélites de Saturno, em particular a ressonância de excentricidade corrotação, *corrotation eccentricity resonance* (CER) e ressonância Lindblad, *Lindblad eccentricity resonance* (LER). A ressonância de corrotação (CER) ocorre quando as conjunções entre o perturbador (corpo maior) e o perturbado (corpo menor) acontecem ao redor de uma linha que cruza o pericentro do perturbador e, a ressonância de Lindblad (LER) ocorre ao redor da linha que cruza o pericentro do perturbado. O conhecimento do comportamento físico desses dois argumentos torna possível prever em qual local as conjunções entre esses dois corpos irá ocorrer e avaliar a estabilidade orbital do sistema.

#### **4.4 Os pequenos satélites naturais em ressonância com Mimas: Aegaeon, Methone e Anthe**

Aegaeon, Methone e Anthe são três pequenos satélites descobertos pela sonda espacial Cassini durante os primeiros anos de sua incursão no sistema de Saturno. Esse trio de pequenos corpos apresentam arcos de material ao redor de suas órbitas e estão inseridos entre as posições do par coorbital formado por Janus e Epimetheus, a partir de aproximadamente 152000 km do centro de Saturno até a borda interna do Anel E onde o satélite Enceladus orbita a

aproximadamente 238000 km. Logo após as suas descobertas, esses pequenos corpos demonstraram ser um desafio para uma precisa caracterização de suas órbitas, devido à complexidade do ambiente em que estão envolvidos. Com a combinação de dados observacionais, as suas principais características orbitais puderam ser bem determinadas por uma série de trabalhos (Spitale *et al.* 2006; Cooper *et al.* 2008; Hedman *et al.* 2010; El Moutamid *et al.* 2014; Munõz-Gutiérrez e Guiliatti Winter 2017; Callegari e Yokoyama 2020; Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021, Callegari e Rodríguez 2023). Esses trabalhos mostraram que Aegaeon, Methone e Anthe formam uma classe distinta de satélites que estão em ressonância de corrotação com Mimas (Hedman *et al.* 2010).

A dinâmica de curto período para esses três satélites vem sendo explorada em um grande número de trabalhos como já mencionado, Anthe, Methone e Aegaeon possuem suas órbitas presas à ressonância de corrotação com Mimas (Callegari e Yokoyama 2010; Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021; Callegari e Rodríguez 2023).

Motivado por esse resultado, El Moutamid *et al.* (2014) elaboraram um modelo semi-analítico simplificado denominado de CoraLin para explorar a dinâmica de um satélite de teste próximo as ressonâncias de corrotação (CER) e Lindblad (LER) que pode ser aplicado para esses pequenos satélites. O modelo CoraLin é uma simplificação do Hamiltoniano (Eq. 22 de El Moutamid *et al.* (2014)) para o problema restrito de três corpos, em que o satélite perturbador possui excentricidade pequena e a órbita da partícula de teste é próxima à ressonância de movimentos médios da forma  $m + 1 : m$ , em que  $m$  é um número inteiro.

Munõz-Gutiérrez e Guiliatti Winter (2017) exploraram numericamente a evolução orbital para esses satélites em um período superior a 100 mil anos, usando um sistema formado por Saturno e os cinco maiores satélites próximos, a saber: Janus, Epimetheus, Mimas, Enceladus e Tethys, incluindo as perturbações provocadas pelo achatamento de Saturno. Por meio da análise de frequências, determinaram a estabilidade desses pequenos satélites, encontrando um regime estável e há presença de regiões caóticas ao redor de Aegaeon, Methone e Anthe. A estabilidade encontrada pode permanecer inalterada por um período aproximado de  $5 \times 10^5$  anos, dado a atual configuração orbital do sistema.

Uma breve revisão bibliográfica sobre a dinâmica desses pequenos satélites será apresentada abaixo. Para as figuras, usamos o sistema Efemérides, nas quais consideramos os vetores de estado, que estão representados na Tabela 4.2 e que foram convertidos em elementos

geométricos. Os dados foram considerados em relação à época 01 de janeiro de 2016 até 01 de janeiro de 2050, com intervalo de 1 dia entre eles.

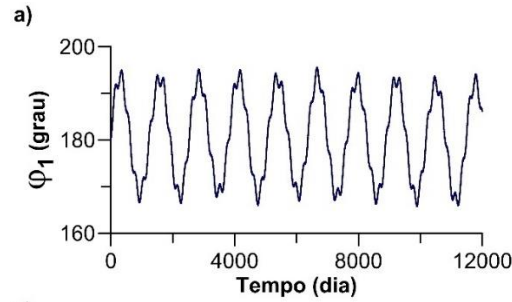
**Tabela 4.2:** Vetores de estado para obtidos por meio da plataforma Efemérides, consideramos os vetores de estado em (UA/dia) relativos à época 01 de janeiro de 2016. Acesso em 16 de abril de 2022.

Satélite	$x \times 10^{-3}$	$y \times 10^{-3}$	$z \times 10^{-5}$	$v_x \times 10^{-3}$	$v_y \times 10^{-3}$	$v_z \times 10^{-5}$
Mimas	91,221	-83,468	-2,3896	5,7113	6,0098	-0.1636
Aegaeon	-53,783	98,198	-17183,38	-7,6354	-4,1812	9920,49
Methone	-1,0833	-7,1519	-281,699	4,454	-6,7445	-8,1494
Anthe	1,262	-39,047	415,412	2,3612	-7,6557	15,4941

#### 4.4.1 Aegaeon

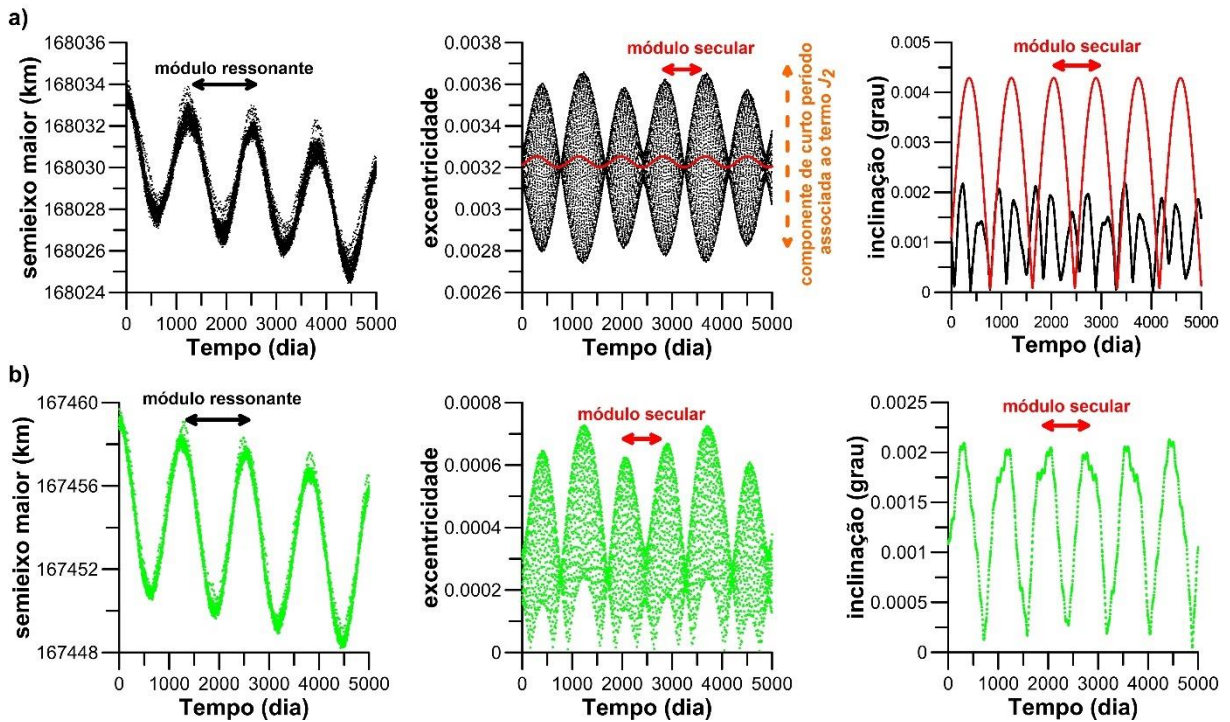
Aegaeon foi descoberto por Hedman *et al.* (2010), trata-se de um pequeno satélite com raio médio aproximado de 0,33 km (Thomas e Helfenstein 2020) que está inserido em uma estrutura em formato de arco, localizado no interior no Anel G. Esse arco encontra-se em uma ressonância de corrotação 7:6 com Mimas, sendo essa ressonância a responsável pelo confinamento longitudinal das partículas que constituem este arco (Hedman *et al.* 2010). Assim como o arco do Anel G está preso à ressonância de corrotação 7:6 com Mimas, em particular, a órbita de Aegaeon também se encontra presa a essa ressonância de corrotação 7:6 com Mimas, cujos efeitos primários dessa ressonância de corrotação podem afetar o movimento médio orbital e o semieixo maior, tendo um efeito menor em sua excentricidade e inclinação orbital de Aegaeon (Hedman *et al.* 2010).

O argumento ressonante é dado por  $\varphi_1 = 7\lambda_M - 6\lambda_{Ae} - \varpi_M$ , em que  $\lambda$  e  $\varpi$  representam a longitude média, a longitude do pericentro e  $M$  e  $Ae$  se referem a Mimas e Aegaeon, respectivamente, librando com uma amplitude de  $10^\circ$  ao redor de  $180^\circ$  (veja a Fig. 8(a) de Hedman *et al.* 2010). Contudo, a longitude de Aegaeon desvia da posição esperada, considerando a libração aproximada de  $10^\circ$  devido a ressonância de corrotação, esse pequeno desvio apresenta um período aproximado de 70 anos, similar ao período da libração do argumento relacionado à comensurabilidade de movimentos médios 4:2 Mimas-Tethys. Callegari *et al.* (2021) identificaram a influência da comensurabilidade de movimentos médios 4:2 Mimas-Tethys na órbita de Methone (veja a Fig. 4.1 abaixo).



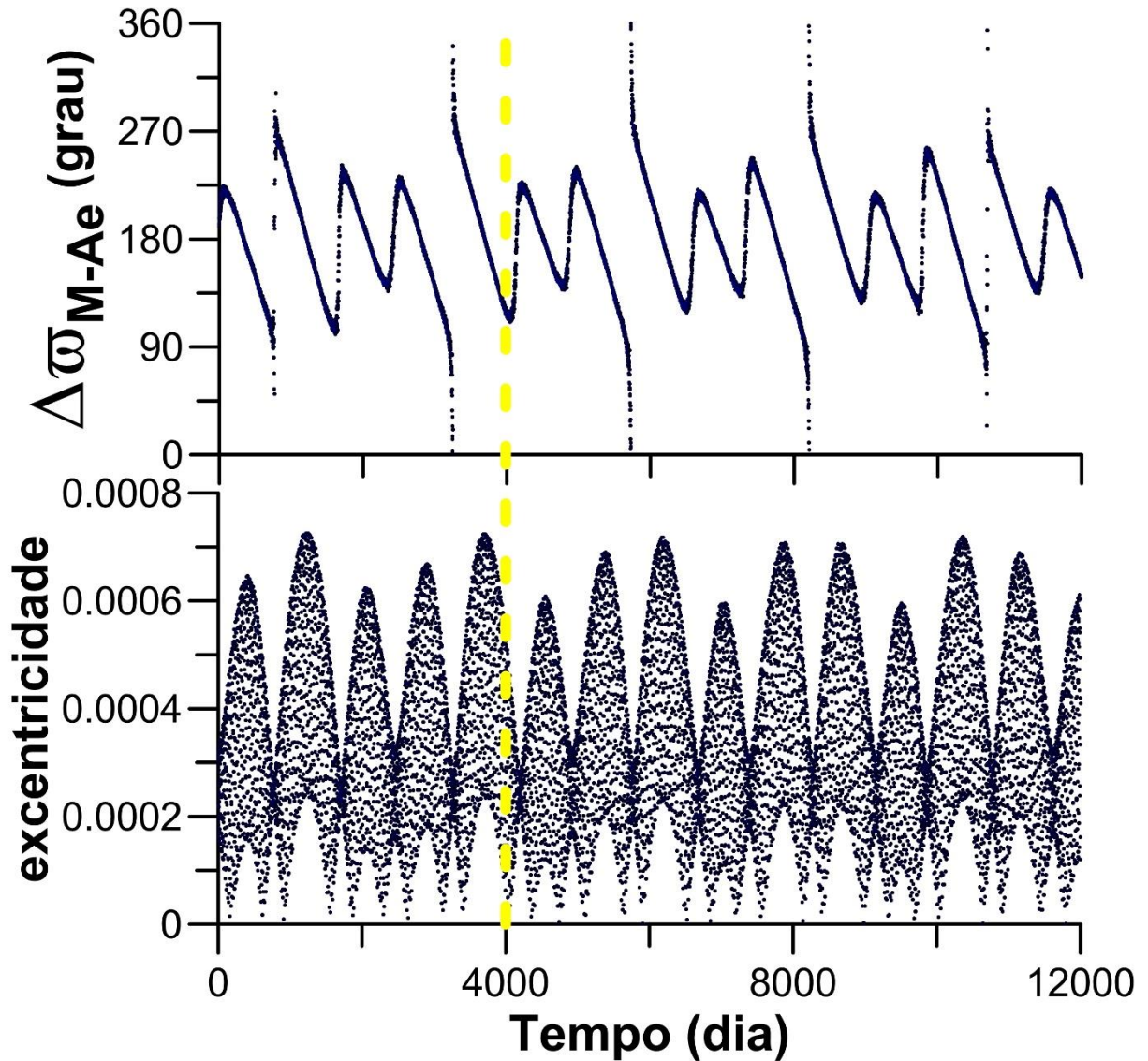
**Figura 4.1:** Podemos observar em (a) a libração para os argumentos geométricos  $\varphi_1$ . Reconstrução da Fig. 3 de Callegari e Rodríguez (2023).

A Fig. 4.2, abaixo, apresenta os elementos orbitais osculadores (negrito), geométricos (verde) e seculares (vermelho). Podemos ver o período relacionado com a ressonância 7:6 com Mimas, os períodos ressonantes e seculares na excentricidade e inclinação. Os períodos são semelhantes para os elementos osculadores. 4.2(a) e geométricos 4.2(b). As variações na excentricidade e inclinação mencionados acima também ocorrem nos elementos geométricos e seculares. Para a excentricidade osculadora de Aegaeon, podemos observar a componente de curto período relacionada ao termo  $J_2$ . Tal componente provoca rápidas oscilações que implicam em uma série de pequenas amplitudes (picos com períodos menores do que 15 dias presentes nos IPS).



**Figura 4.2:** (a) elementos orbitais osculadores e (b) elementos orbitais geométricos para Aegaeon. Comparando os gráficos osculadores e seculares para a excentricidade e inclinação podemos determinar a componente secular e, conseqüentemente, identificar a componente ressonante. Como a comparação entre o osculador e geométrico semieixo maior em um único gráfico não é viável, apresentamos o geométrico em um conjunto separado de gráficos.

A semelhança entre as variações temporais para o argumento  $\varphi_2$  e  $\Delta\varpi_{M-Ae}$  são devido ao fato que  $\varphi_2$  pode ser reescrito como uma combinação angular que contém  $\Delta\varpi_{M-Ae}$  da seguinte maneira:  $\varphi_2 = 7\lambda_M - 6\lambda_{Ae} - \varpi_{Ae} + \varpi_M - \varpi_M = 7\lambda_M - 6\lambda_{Ae} - \varphi_M - (\varpi_M - \varpi_{Ae}) = \varphi_1 - \Delta\varpi_{M-Ae}$ , logo, esse argumento é uma composição de dois argumentos:  $\varphi_1$  que libra ao redor de  $180^\circ$  com  $\Delta\varpi_{M-Ae}$  que circula, resultando na sua circulação vista na Fig. 4.1(b) (veja a Fig. 4.3 abaixo e Callegari e Rodríguez 2023).



**Figura 4.3.:** Podemos observar a influência que a ressonância 7:6 exerce na excentricidade de Aegaeon. Notamos que a cada início e final de oscilação de  $\varphi_1$  a excentricidade geométrica orbital de Aegaeon se anula.

#### 4.4.2 Methone

Methone é um pequeno satélite de formato elíptico e com raio médio aproximado 1,45 km (Thomas e Helfenstein 2020). Primeiramente reportado por Porco *et al.* (2005), está localizado a aproximadamente 194.200 km a partir do centro de Saturno. Assim como Aegaeon,

exibe um arco de poeira cuja longitude do arco se estende por  $10^\circ$  aproximadamente, ao redor do centro desse pequeno satélite, Spitale *et al.* (2006) propôs a proximidade da órbita de Methone à uma ressonância de movimentos médios com Mimas para explicar diversas componentes oscilatórias em seus elementos orbitais, sugerindo que o ângulo crítico para essa ressonância é escrito como  $\psi_2 = 15\lambda_{Me} - 14\lambda_M - \varpi_{Me}$ , oscilando ao redor de zero, Hedman *et al.* (2009) sugeriu que outro argumento associado à ressonância de movimentos médios 15:14 apresenta o seu comportamento oscilatório, a saber,  $\psi_1 = 15\lambda_{Me} - 14\lambda_M - \varpi_M$ , oscilando ao redor de zero, porém Hedman *et al.* (2009) não apresenta simulações numéricas que ilustram essa libração simultânea destes dois ângulos críticos.

Para El Moutamid *et al.* (2014), esta libração simultânea entre  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sugere que a órbita de Methone está próxima às ressonâncias de corrotação e Lindblad 15:14 com Mimas e estão separadas por aproximadamente 4 km.

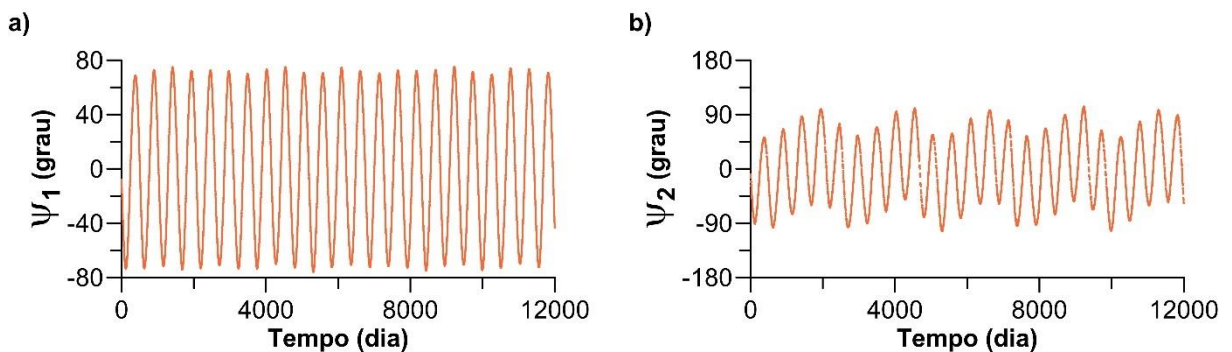
A primeira simulação numérica que apresenta a libração simultânea dos geométricos  $\psi_1$  e  $\psi_2$  foi apresentada na Fig. 1 de Munõz-Gutiérrez e Giuliatti Winter (2017). Simulando a variação temporal para esses ângulos por um breve período de 20 anos, ambos argumentos ressonantes libraram com amplitude aproximada de  $90^\circ$  ao redor de zero e com período de 515,72 dias. Na Fig. 4.4(a-b) podemos ver a oscilação para os argumentos geométricos  $\psi_1$  e  $\psi_2$  elaborada com vetores de estado fornecidos pelas efemérides do *Horizons*. Notamos que a amplitude da oscilação é diferente entre ambos os argumentos, mas o período condiz com Munõz-Gutiérrez e Giuliatti Winter (2017).

Porém, a oscilação simultânea para esses argumentos pode colocar em questão o que é bem conhecido na teoria dinâmica das ressonâncias de movimentos médios (Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021) pelo fato de que a linha das conjunções entre Methone-Mimas não estaria muito bem definida, fato que não fora discutido nos trabalhos anteriores (Hedman *et al.* 2009; El Moutamid *et al.* 2014; Munõz-Gutiérrez e Giuliatti Winter 2017).

Callegari *et al.* (2021) colaboraram com melhorias na interpretação do estado ressonante da órbita de Methone por meio da análise numérica das componentes de sua órbita a qual é principalmente perturbada por Mimas e pelo campo gravitacional  $J_2$  decorrente do achatamento de Saturno. Eles analisaram a órbita atual de Methone por meio dos dados obtidos pela efemérides do sistema *Horizons* bem como utilizaram diversas simulações numéricas com distintas ferramentas numéricas e apresentaram uma resposta ao aparente conflito na incerteza

da exata localização da linha das conjunções entre o par Methone-Mimas, que será discutido ao longo do texto.

Uma vez que as Efemérides do sistema *Horizons* são limitadas a um intervalo máximo de tempo, há a necessidade de realizar a integração das equações de movimento para uma compreensão mais precisa da dinâmica de longo período, assim como feito por Muñoz-Gutiérrez e Giuliatti Winter (2017), Callegari *et al.* (2021) utilizaram um sistema formado pelos seis principais satélites: Mimas, Enceladus, Tethys, Dione, Rhea e Titan juntamente com Methone e a influência dos harmônicos  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$ , decorrentes do campo provocado pelo achatamento de Saturno.

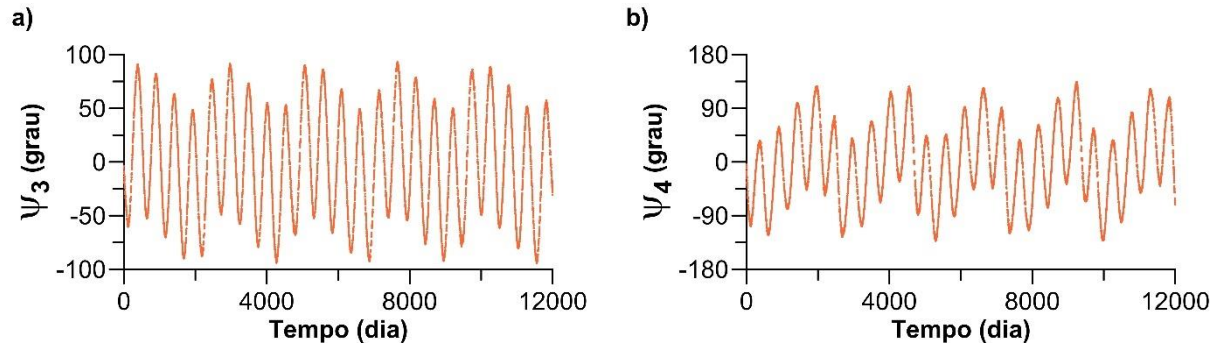


**Figura 4.4:** Oscilação simultânea para os argumentos geométricos  $\psi_1$  e  $\psi_2$  relacionados com a ressonância de movimentos médios 15:14 Methone-Mimas para um período de 12 mil dias, aqui podemos notar que o argumento  $\psi_1$  oscila ao redor de zero com amplitude aproximada de  $75^\circ$  já o argumento  $\psi_2$  oscila ao redor de zero com amplitude aproximada de  $105^\circ$ , ambos com períodos aproximados de 521,57 dias. Condições iniciais relativas à época 01 janeiro de 2016, com intervalo de 1 dia.

A ressonância de movimentos médios 15:14 Methone-Mimas é bem caracterizada pelo argumento  $\psi_1 = 15\lambda_{Me} + 14\lambda_M - \bar{\omega}_M$  com libração ao redor de zero, com período aproximado de 521,57 dias e com uma grande amplitude  $\sim 75^\circ$  (Fig. 4.4). Fisicamente, a libração de  $\psi_1$  significa que as conjunções entre Methone-Mimas ocorrem ao redor de uma linha que oscila na direção do pericentro de Mimas, correspondendo à uma característica típica para o domínio da ressonância de corrotação.

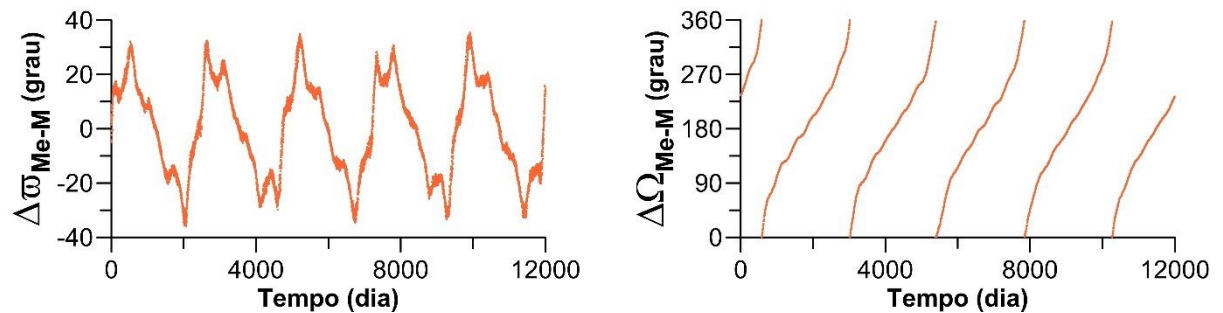
A libração de  $\psi_1$  ocorre independentemente do tipo de elemento orbital que foram adotados (Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021), isto é, a libração ocorre tanto para o elemento osculador quanto para o geométrico (veja a Figura 4 de Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021), uma vez que a longitude média de Mimas não é afetada pelas variações de curto período induzidas por  $J_2$ . Porém, estendendo a análise de Muñoz-Gutiérrez e Giuliatti Winter (2017), Callegari *et al.* (2021) analisaram a órbita geométrica e a variação temporal para os outros argumentos relacionados com a ressonância de movimentos médios (veja a Tabela 2 de

Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021 e a Tabela 4.1 acima) na qual há a definição para os 14 argumentos relacionados com as ressonâncias de primeira ordem da forma  $m + 1 : m$ , em que  $m$  é um inteiro) é observada uma oscilação em função do tempo para os outros três ângulos geométricos:  $\psi_2 = 15\lambda_{Me} - 14\lambda_M - \varpi_{Me}$  (descrito por Spitale *et al.* 2006, Munõz-Gutiérrez e Giuliatti Winter, 2017),  $\psi_3 = 15\lambda_{Me} - 14\lambda_M + \varpi_{Me} - 2\varpi_M$  e  $\psi_4 = 15\lambda_{Me} - 14\lambda_M - 2\varpi_{Me} + \varpi_M$  (veja a Figura 4.5).



**Figura 4.5.:** Representamos a libração simultânea para os argumentos geométricos  $\psi_3$  e  $\psi_4$  observado por Callegari *et al.* (2021), podemos notar que o período para a libração desses argumentos é aproximadamente 521,75 dias, semelhante ao período de  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , porém suas amplitudes são mais elevadas. Callegari *et al.* (2021) solucionaram o problema da libração simultânea demonstrando o alinhamento entre os pericentro de Mimas e Methone.

Esse aparente conflito de quatro argumentos ressonante estarem librando simultaneamente pode ser explicado por meio da reescrita desses argumentos como uma combinação angular para cada uma das componentes envolvidas na variação da longitude do pericentro, a saber,  $\Delta\varpi_{Me-M} = \varpi_{Me} - \varpi_M$ , logo temos:  $\psi_2 = \psi_1 - \Delta\varpi_{Me-M}$ ,  $\psi_3 = \psi_1 + \Delta\varpi_{Me-M}$  e  $\psi_4 = \psi_1 - 2\Delta\varpi_{Me-M}$  (Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021), Uma vez que o geométrico  $\Delta\varpi_{Me-M}$  oscila ao redor de zero (Fig. 4.6), com período aproximado de 2408,21 dias, o resultado na variação temporal de  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  e  $\psi_4$  é uma composição de duas frequências: a ressonante (relacionada com  $\psi_1$ ) e a de longo período (relacionada com  $\Delta\varpi_{Me-M}$ ).



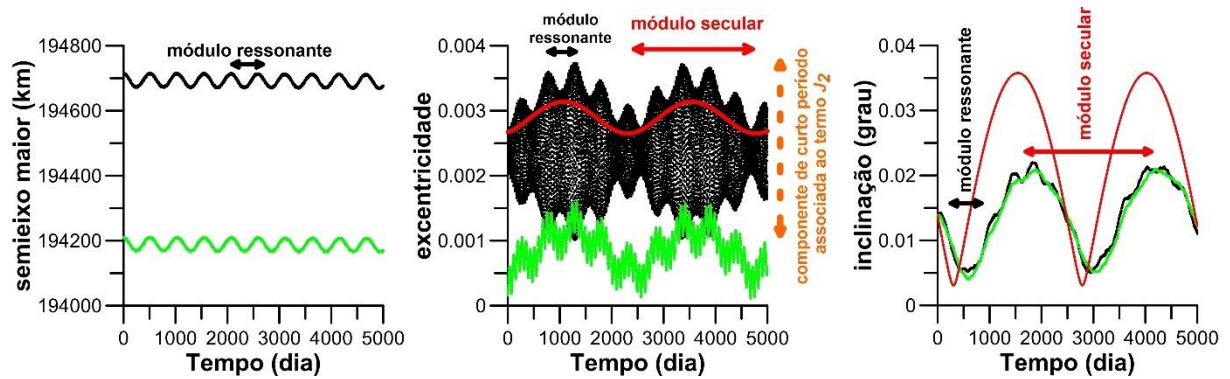
**Figura 4.6:** Podemos ver a libração de  $\Delta\varpi_{Me-M}$  com seu período aproximado de 2408,21 dias. Essa dinâmica peculiar é responsável pela libração simultânea de quatro argumentos relacionados à ressonância de movimentos médios 15:14 Methone-Mimas.

Para Callegari *et al.* (2021), a conclusão acima é uma aplicação imediata da teoria clássica para ressonâncias descrito por Brower e Clemence (1966) juntamente com a variação secular dada por Murray e Dermott (1999), logo, a oscilação de longo período da componente  $\Delta\varpi_{Me-M}$  somente é assegurada quando a variação de longo período para a longitude geométrica do pericentro de Mimas e Methone são semelhantes (Figura 7 (b) de Callegari *et al.* (2021)). A análise espectral desse argumento mostrou que seus períodos estão centrados em 360,54 dias, confirmando o resultado esperado (veja Figura 9 de Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021).

Uma vez que a órbita de Mimas e Methone estão separadas por poucas centenas de milhares de quilômetros, a variação para os argumentos do pericentro de Mimas e Methone não pode ser explicada somente pela variação secular provocada por  $J_2$ , a qual é responsável pela diferença na precessão das órbitas (Danby, 1988) e que possuem uma maior dependência com a distância entre Saturno e o satélite. Callegari *et al.* (2021) determinaram o período para a circulação da longitude do pericentro de um satélite como Methone sofrendo exclusivamente a perturbação de  $J_2$  como sendo de 424,024 dias e a diferença desses valores com o atual é de 63,5 dias, mostrando numericamente que isso é decorrente exclusivamente da ressonância de corrotação 15:14 Methone-Mimas e a ressonância fornece uma regra geral para o alinhamento das órbitas de Methone e Mimas. Logo, Callegari *et al.* (2021) demonstraram numericamente que a libração simultânea de quatro argumentos ( $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  e  $\psi_4$ ) somente é possível no caso em que as órbitas de Mimas e Methone estejam alinhadas.

El Moutamid *et al.* (2014) estudaram o domínio da ressonância de movimentos médios 15:14 Methone-Mimas utilizando o seu modelo CoraLin. Callegari *et al.* (2021) mapearam o domínio da ressonância de movimentos médios 15:14 Methone-Mimas no espaço de fase. O plano mais apropriado para esse mapeamento é o definido pelos pares da forma  $(a_0, e_0)$  no qual  $a_0$  e  $e_0$  representam o semieixo maior inicial e a excentricidade inicial, ambos em osculadores e analisaram a combinação angular  $\psi_1 = 15\lambda_S - 14\lambda_M - \varpi_M$ , na qual  $S$  representa um satélite de teste semelhante a Methone, no qual todos os demais elementos são considerados constantes em relação à época e somente o semieixo e a excentricidade são considerados parâmetros livres. Para órbitas individuais no intervalo  $194655 < a_0 < 194735$  km e  $0 < e_0 < 0,015$ , o argumento  $\psi_1$  libra ao redor de zero, delimitando essa região como a zona associada à ressonância de corrotação 15:14 Methone-Mimas. As bordas da zona de corrotação são caracterizadas por órbitas não regulares, característica típica associada às separatrizes das ressonâncias. De acordo com o modelo analítico de El Moutamid *et al.* (2014).

Na Fig. 4.7 temos um comparativo entre os elementos orbitais semieixo maior, excentricidade e inclinação, como descrito na Fig. 4.2 acima.

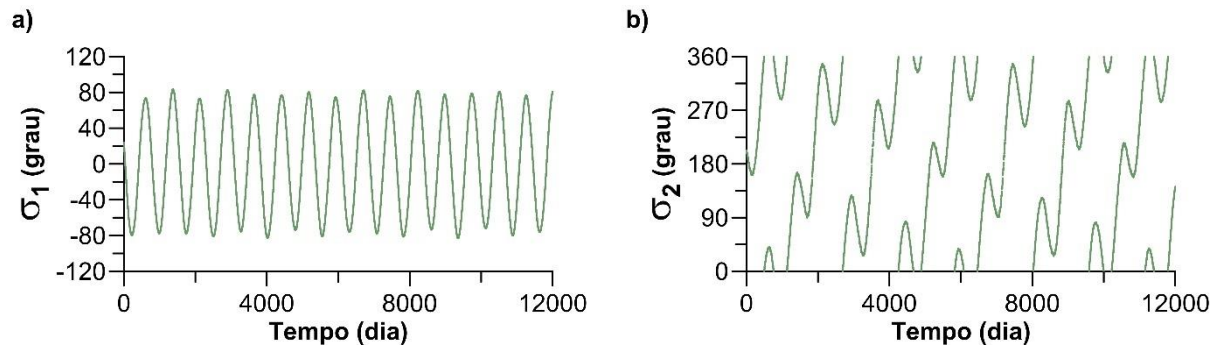


**Figura 4.7:** Comparativo entre os elementos orbitais osculadores (negrito), geométricos (verde) e seculares (vermelhos). Podemos identificar as componentes ressonantes no semieixo maior (osculador e geométrico) e as componentes ressoantes nos elementos excentricidades e inclinação (osculadores e geométricos).

Aqui podemos comparar o osculador e geométrico semieixo maior em um mesmo gráfico, identificando que a componente ressonante apresenta o mesmo período para ambos. Notamos que a excentricidade geométrica não é afetada significativamente pela componente de curto período e que há uma boa equivalência entre a inclinação osculadora e geométrica. A grande amplitude observada na inclinação secular é resultado da componente forçada para a inclinação, como descrito por Callegari *et al.* (2021).

#### 4.4.3 Anthe

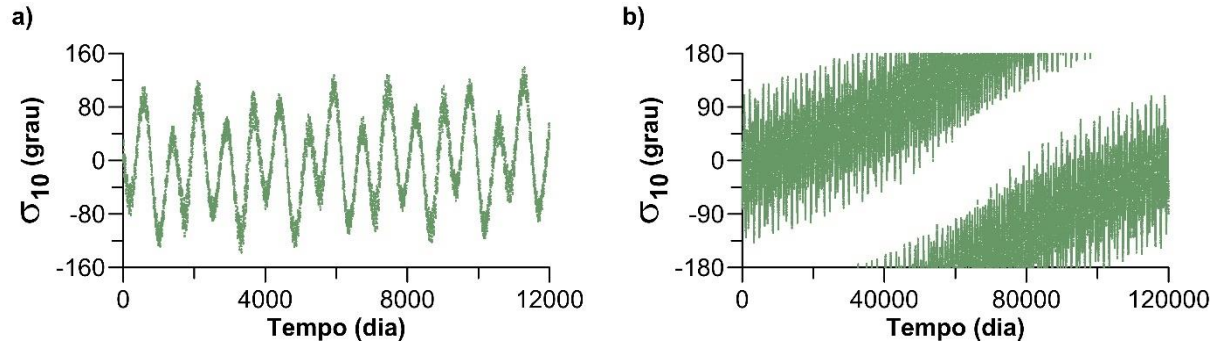
Anthe é um pequeno satélite com diâmetro estimado em 0,5 km (Thomas e Hefenstein, 2020) localizado próximo a 197.600 km do centro de Saturno. Sua caracterização dinâmica foi reportada por Cooper *et al.* (2008). Eles encontraram que Anthe está próximo à ressonância 11:10 com Mimas, com argumento associado a essa ressonância dada por  $\sigma_1 = 11\lambda_A - 10\lambda_M - \varpi_M$ . Podemos observar na Figura 7 de Cooper *et al.* (2008) que além de  $\sigma_1$  a combinação angular  $\sigma_{10} = 11\lambda_A - 10\lambda_M - \varpi_M - \Omega_A + \Omega_M$  também está librando, em um período aproximado de 50 anos (~18.262,5 dias). Ambos os argumentos, libram ao redor de zero com período aproximado de 761 dias (Munõz-Gutiérrez e Giuliatti Winter 2017). Assim como Aegaeon e Methone, Anthe possui um arco de poeira que se estende por 20° (Hedman *et al.* 2009).



**Figura 4.8:** (a) A libração para os geométricos  $\sigma_1$  e (b) a oscilação para  $\sigma_2$ .

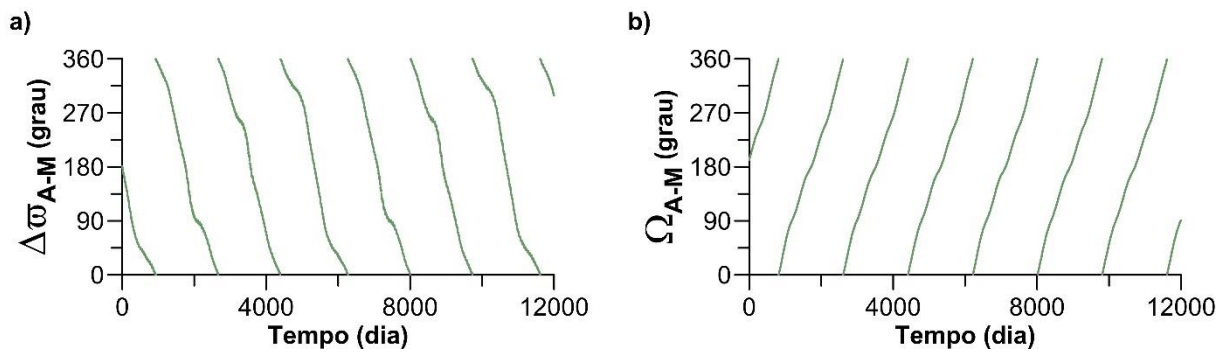
Callegari e Yokoyama (2020) expandiram o tempo de integração em suas simulações numéricas com o objetivo de avaliar a libração de ambos os argumentos. Seus resultados afirmam que o atual estado do par Anthe-Mimas é caracterizado de forma única pela libração do argumento  $\sigma_1 = 11\lambda_A - 10\lambda_M - \varpi_M$  ao redor de zero. Fisicamente, a libração de  $\sigma_1$  ao redor de zero significa que as conjunções do par Anthe-Mimas oscila ao redor de uma linha de referência cuja direção passa pela longitude do pericentro de Mimas. A atual configuração do par Anthe-Mimas é estável e está capturada na ressonância de movimentos médios 11:10, confirmada nas simulações de longo período, contemplando as efemérides disponíveis no sistema *Horizons*.

Cooper *et al.* (2008) argumentam que a combinação angular  $\sigma_{10} = 11\lambda_A - 10\lambda_M - \varpi_A - \Omega_A + \Omega_M$  também está librando para o mesmo conjunto de condições iniciais em que  $\sigma_1$  libra (veja Fig. 4.9(a)). Os resultados mostram que, após 35 mil dias, aproximadamente, um regime progrado de circulação é revelado por meio das simulações numéricas. De fato,  $\sigma_{10}$  pode ser escrito como a combinação angular:  $\sigma_{10} = \sigma_1 - \Delta\varpi_{A-M} - \Delta\Omega_{A-M}$  que circula em uma escala de tempo muito maior do que o período da libração de  $\sigma_1$ , desde que  $\Delta\varpi_{A-M}$  e  $\Delta\Omega_{A-M}$  possuem taxas parecidas de circulação em direções opostas (veja a Fig. 4.10), como descrito pela teoria da perturbação secular generalizada (Callegari e Yokoyama 2020).



**Figura 4.9:** (a) libração aparente do argumento  $\sigma_{10}$  e (b) o comportamento oscilatório para esse argumento. Para (a) consideramos os dados obtidos pela Efemérides, (b) representa a integração das equações de movimento para um período de 120 mil dias, utilizando o pacote Mercury.

Após a compreensão da órbita atual de Anthe e as interações com a componente  $J_2$  e as perturbações com Mimas, Callegari e Yokoyama (2020) detalharam as propriedades da ressonância de movimentos médio 11:10 entre Anthe-Mimas, determinando o domínio da ressonância 11:10 no espaço de fase por meio das integrações numéricas das equações totais de movimento para um conjunto de órbitas dadas ao redor da posição atual do pequeno satélite, tal como dito na Fig. 2.12 da pag. 35. A dimensão da zona de corrotação é de aproximadamente 90 km centrado em 198120 km, apresentando limite estável localizado para pequenas excentricidades no espaço de fase em que  $e < 0,0025$  aproximadamente.



**Figura 4.10:** Circulação para os argumentos geométricos (a)  $\Delta\varpi_{A-M}$  e (b)  $\Delta\Omega_{A-M}$ .

Diferente do que ocorre no mapeamento do espaço de fase para Methone, para valores de excentricidades iniciais maiores que 10 vezes o valor atual, e dependendo do semieixo maior inicial,  $\sigma_2 = 11\lambda_S - 10\lambda_M - \varpi_S$  (em que  $S$  representa um satélite de teste semelhante à Anthe, no qual as condições iniciais são mantidas exceto os valores para  $a_0$  e  $e_0$ ) libra ao redor de  $180^\circ$  definindo o local estável para a ressonância de Lindblad no espaço de fase (Fig. 2.12).

Por meio da análise do mapeamento do espaço de fase para a ressonância 11:10 Anthe-Mimas, Callegari e Yokoyama (2020) estimaram que para valores de  $e_{0c} \sim 0,0425$ , as órbitas de satélites semelhantes à Anthe se cruzam com as órbitas de Mimas. Para as órbitas de satélites

semelhantes à Anthe, com valores para excentricidade inicial distinta e maiores que  $e_{0c}$ , temos a libração de  $\sigma_2$  ao redor de  $180^\circ$  o que significa que as conjunções ocorrem em uma linha na direção do apocentro do satélite semelhante à Anthe. Essa configuração atua como um mecanismo natural de proteção, pois, caso a libração de  $\sigma_2$  ocorresse ao redor zero, as conjunções aconteceriam próximos ao pericentro desse satélite de teste, o que poderia ocasionar uma colisão.

A importância do mapeamento dessa região no espaço de fase reside no fato de que a zona de Lindblad é a contrapartida da zona de corrotação, ambas estruturas estão associadas com a comensurabilidade de movimentos médios 11:10 Anthe-Mimas. Seus domínios estão separados por regiões de órbitas não regulares, possivelmente caóticas no espaço de fase, associadas com as separatrizes da ressonância, Callegari e Yokoyama (2020) não encontraram outras regiões que sugerissem possíveis ressonâncias secundárias ou de ordem mais elevada. Na fronteira da zona de Lindblad, a excentricidade para o satélite de teste semelhante à Anthe é mais afetada pela ressonância do que o semieixo maior, mostrando outro acordo qualitativo do resultado numérico com as estimativas analíticas dadas por El Moutamid *et al.* (2014). Um satélite de teste que está fora da zona de corrotação ou Lindblad pode vir a sofrer grandes variações devido aos efeitos gravitacionais com Mimas podendo ser ejetado ou colidindo com outros satélites (Callegari e Yokoyama 2010). A captura atual do par Anthe-Mimas na ressonância de corrotação 11:10 é um indicativo para a longa estabilidade observada na órbita de Anthe.

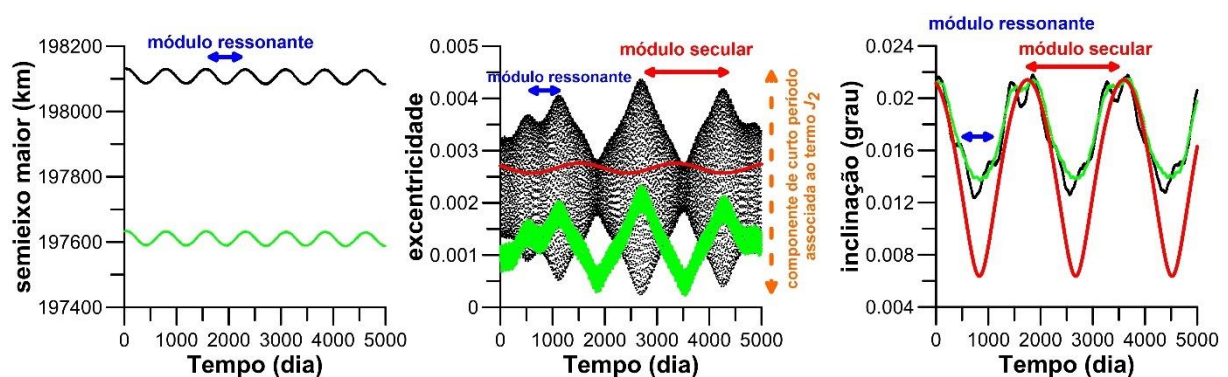


Figura 4.11: Similar a Fig. 4.7, considerando o satélite Anthe.

## 4.5 Atlas

Spitale *et al.* (2006) ao combinar diferentes dados observacionais notaram perturbações periódicas na órbita de Atlas com períodos aproximados de 3 anos ( $\sim 1.095,75$  dias) devido a uma ressonância 54:53 de movimentos médios com Prometheus. Além dessa ressonância,

identificaram a ressonância 70:67 de movimentos médios entre o par Pandora-Atlas (Fig. 5.9) com período aproximado de 6,2 anos ( $\sim 2.264,55$  dias) – período semelhante ao antialinhamento das órbitas de Prometheus e Pandora (Goldreich e Rappaport 2003). Uma vez que as órbitas de Prometheus e Pandora são caóticas (Goldreich e Rappaport 2003), Spitale *et al.* (2006) sugeriram a possibilidade de que Atlas também teria sua dinâmica orbital caótica e que, sua órbita seria perturbada principalmente por Prometheus e em menor intensidade por Pandora.

Considerando essa hipótese, Cooper *et al.* (2015) estudou a órbita atual de Atlas, considerando os novos ajustes orbitais decorrentes da atualização de dados produzidos pela sonda *Cassini*, concluindo que Atlas possui a órbita caótica tal como especulado por Spitale *et al.* (2006) e Renner *et al.* (2016) e que utilizaram o modelo analítico CoraLin (El Moutamid *et al.* 2014) para avaliar os resultados de Cooper *et al.* (2015). Ambos os trabalhos não consideraram a influência de Pandora sobre a dinâmica orbital de Atlas. Assim como descrito na Seção 3.3, iremos avaliar a órbita de Atlas considerando os seguintes subsistemas: Atlas-Prometheus, Atlas-Pandora e Atlas-Prometheus-Pandora.

#### 4.5.1 A ressonância 54:53 de movimentos médios com Prometheus

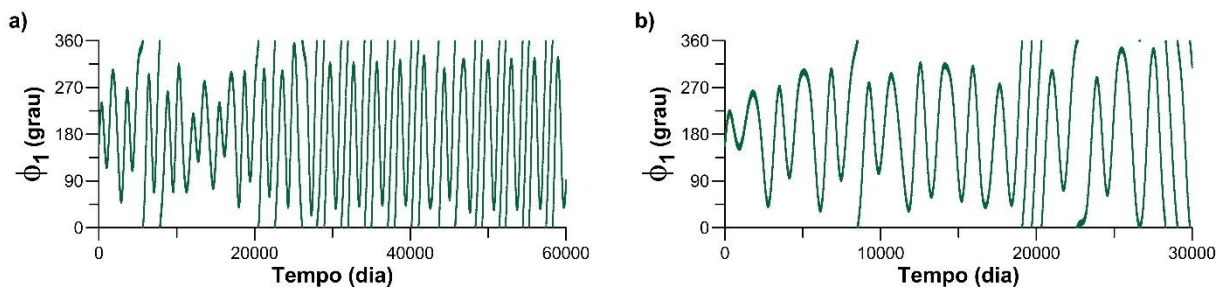
Para a ressonância 54:53 de movimentos médios Prometheus-Atlas, os argumentos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  podem ser vistos na Tabela 4.3 onde *At* e *Prom* representam Atlas e Prometheus respectivamente.

**Tabela 4.3:** Argumentos para a ressonância 54:53 de movimentos médios Prometheus-Atlas e seus respectivos períodos. <sup>(a)</sup> Renner *et al.* (2016)

Argumento	Período <sup>(a)</sup> (anos)
$\phi_1 = 54\lambda_{Prom} - 53\lambda_{At} - \varpi_{Prom}$	4,9
$\phi_2 = 54\lambda_{Prom} - 53\lambda_{At} - \varpi_{At}$	3,03

A primeira figura que ilustra esses dois argumentos é a Fig. 12 que aparece em Cooper *et al.* (2015). Essa figura representa as variações temporais para os argumentos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  por um período de 20 anos, com condições iniciais dadas à época 01/01/2000 (estamos considerando essa mesma época inicial com a finalidade de comparar os resultados) e considerando apenas Prometheus. Notamos que ambos os argumentos apresentam alternância entre oscilação e circulação. Portanto, não há a libração de qualquer ângulo crítico, tal como descrito por Cooper *et al.* (2015) e Renner *et al.* (2016). A Fig. 5.1(a) irá revelar o motivo por trás desse comportamento e esse será descrito com mais detalhes no Capítulo 5.

Para ilustrar e comparar resultados, a Fig. 4.12 abaixo, representa um comparativo entre esses subsistemas em um período de 30 mil dias. Na Fig. 4.12(a), temos o argumento geométrico  $\phi_1$  obtido considerando apenas Atlas e Prometheus e, na Fig. 4.12(b), temos o mesmo argumento geométrico  $\phi_1$  obtido com o acréscimo de Pandora. Notamos que Pandora influencia a variação temporal desse argumento, pois houve uma mudança nos intervalos em que ocorrem a mudança da oscilação para circulação e mudanças nas frequências, observadas pelas amplitudes. Tal mudança vem a contribuir com o acréscimo de picos significativos no IPS para Atlas observado na Fig. 2.11, o qual contém Pandora, além de Atlas e Prometheus.

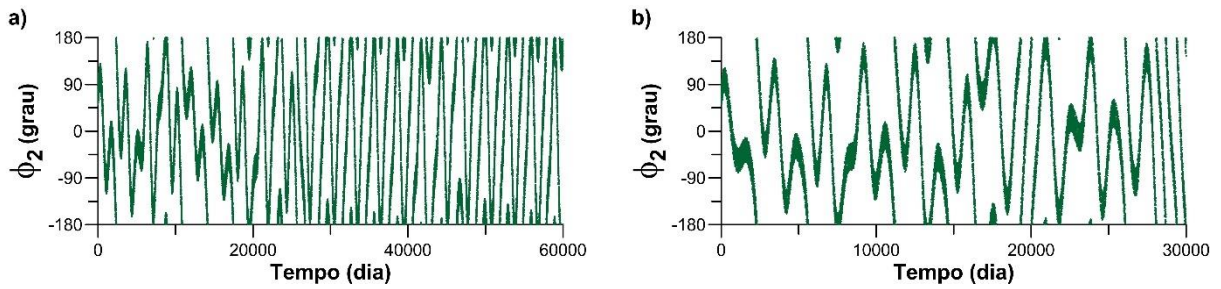


**Figura 4.12:** (a) argumento geométrico  $\phi_1$  determinado com Prometheus-Atlas e (b) argumento geométrico  $\phi_1$  determinado com Atlas-Prometheus-Pandora. O acréscimo de Pandora resultou na mudança de comportamento para a variação temporal desse argumento. Houve mudanças nas passagens entre oscilações para circulação, mudanças de frequências e consequentemente, mudanças nas amplitudes. Condições iniciais em relação à época 01/01/2000.

Cooper *et al.* (2015) e Renner *et al.* (2016) afirmaram que além do argumento  $\phi_1$  estar librando (como vimos acima, não há libração mas, sim, alternância entre oscilação e circulação), os argumentos dados por  $53\lambda_{Pro} - 52\lambda_S - \varpi_{Pro}$  e  $53\lambda_{Pro} - 52\lambda_S - \varpi_S$ , onde  $S$  representa um clone de Atlas, também estariam librando. Porém, esses argumentos estão relacionados com a ressonância 53:52 de movimentos médios que está a cerca de 30 km à esquerda da atual ressonância 54:53 de movimentos médios, como pode ser observado na Fig. 5.1.

Fisicamente, a libração do ângulo  $\phi_1$  ao redor de  $180^\circ$  significa que as conjunções ocorrem próximas ao apocentro de Prometheus, conforme a Fig. 4.12. Porém, podemos observar que há períodos de alternância entre libração e circulação, implicando que a linha para as conjunções não está bem definida.

Por outro lado, o ângulo  $\phi_2$  apresenta-se circulando com alternância para curtos períodos de oscilação ao redor de  $0^\circ$ , implicando que a linha entre as conjunções não está bem definida ao redor do pericentro de Atlas.

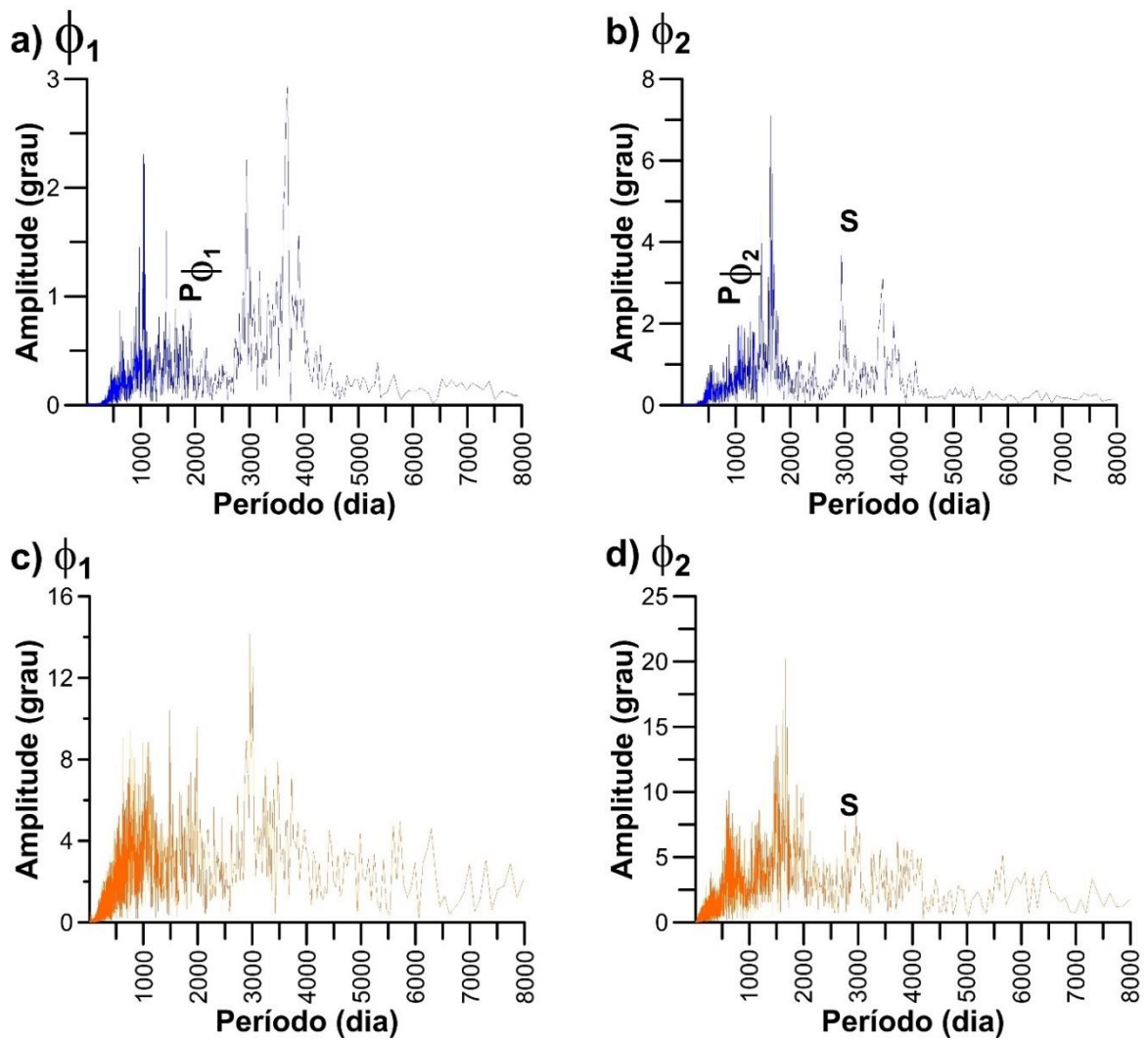


**Figura 4.13:** Similar à Fig. 4.12 para o argumento  $\phi_2$ .

Renner *et al.* (2016) estimaram que o período para os argumentos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  seriam aproximadamente iguais a  $\mathbf{P}\phi_1 = 4,92$  anos ( $\sim 1797$  dias) e  $\mathbf{P}\phi_2 = 3,03$  anos ( $\sim 1106,7$  dias) e são mantidos apenas para efeito de completude na Fig. 4.14(a-b), respectivamente, porém, como visto, os argumentos apresentam comportamentos irregulares, dificultando a análise de seus períodos fundamentais, sendo necessário uma análise espectral.

A Fig. 4.14 representa os espectros de Fourier para os argumentos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  obtidos com os subsistemas Prometheus-Atlas (curva azul) e Atlas-Prometheus-Pandora (curva laranja). Observamos nas Fig. 4.14(a), que representa o espectro para o argumento  $\phi_1$ , o período  $\mathbf{P}\phi_1$  e na Fig. 4.14(b), que representa o espectro para o argumento  $\phi_2$ , podemos identificar além de  $\mathbf{P}\phi_2$  o período secular, denotado por  $\mathbf{S}$ , pois, uma vez que  $\phi_2 = \phi_1 - \Delta\varpi_{Pro-At}$ , o seu espectro contém o período secular relacionado a  $\Delta\varpi_{Pro-At}$ .

A inclusão de Pandora, Fig. 4.14(c-d), implicou em espectros com um maior número de picos que refletem o aumento das frequências nos argumentos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , tornando-se difícil a identificação dos períodos fundamentais em ambos os espectros (curvas laranjas) e provocou um aumento nas amplitudes em relação aos espectros para  $\phi_1$  e  $\phi_2$  dados pelo subsistema Prometheus-Atlas (curvas azuis).



**Figura 4.14:** Espectro de Fourier para os argumentos geométricos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Para a determinação desse espectro, consideramos apenas Atlas e Prometheus. Dentre os diversos picos, podemos identificar os períodos relacionados ao argumento  $\phi_1$ , representado por  $P\phi_1$  e ao argumento  $\phi_2$ , denotado por  $P\phi_2$  dados por Renner *et al.* (2016), além do pico relacionado com a componente secular (**S**) no espectro de  $\phi_2$ . Cada um dos espectros foi obtido a partir de uma órbita individual integrada por 1720 anos com intervalo de 0,06 dia.

## Capítulo 5

### Resultados específicos para Atlas

#### 5.1 Introdução

Nas seções 5.2 a 5.6 vamos explorar em detalhes as regiões obtidas com o mapeamento dinâmico do espaço de fase.

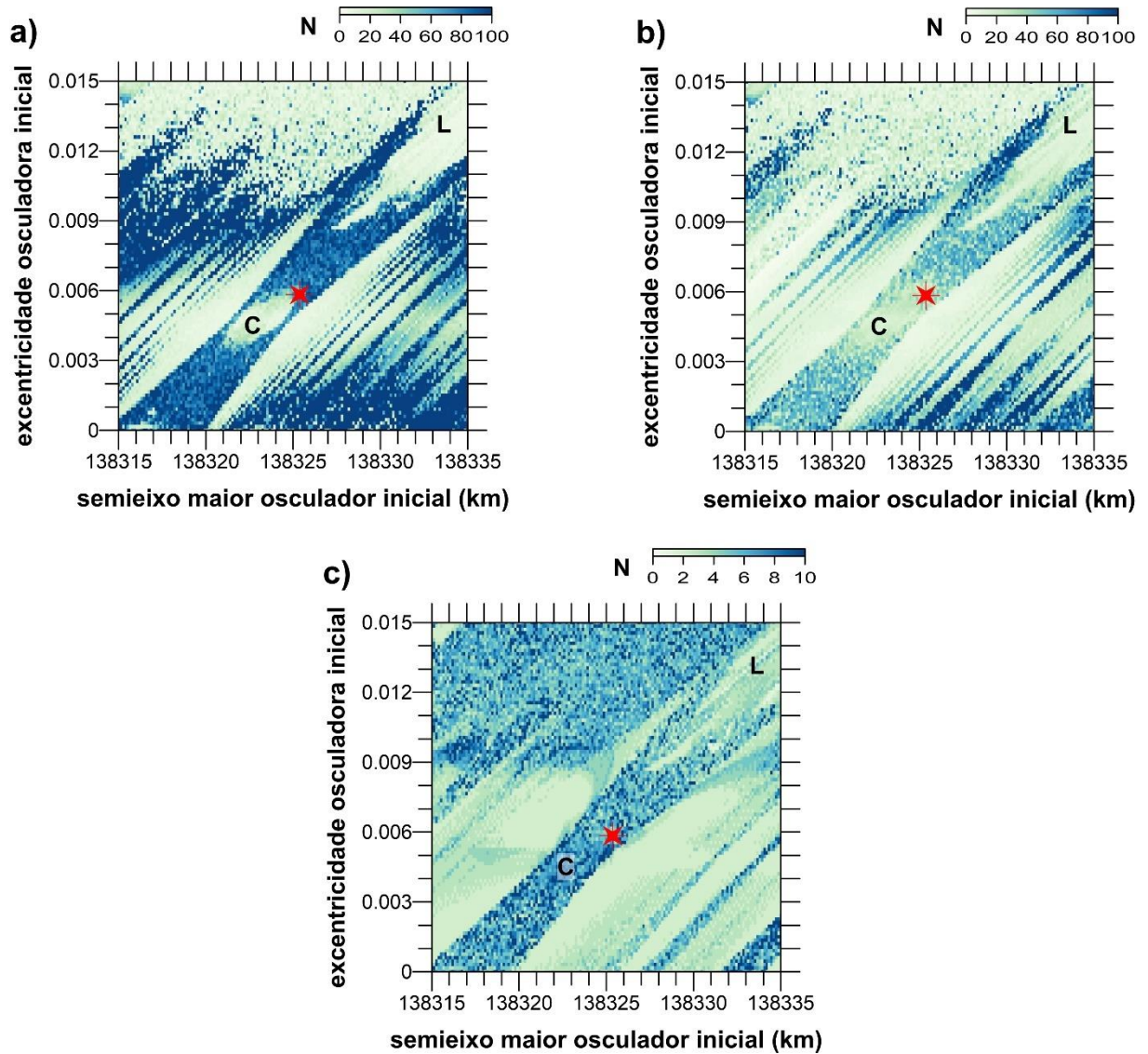
#### 5.2 O mapeamento para a ressonância 54:53 de movimentos médios entre Atlas-Prometheus

A Fig. 5.1 apresenta os mapas dinâmicos obtidos com uma densa grade de condições iniciais  $(a_0, e_0)$  relativos à data inicial 01 de janeiro de 2000, considerando o semieixo maior (Fig. 5.1 (a)) e a excentricidade (Fig. 5.1(b)). Observamos regiões claras e escuras, que estão relacionadas com o valor de  $N$  que possuem propriedades dinâmicas distintas e que serão investigadas e definidas abaixo:

- a) **C**: a região que contém ressonância de corrotação 54:53 entre Atlas e Prometheus. Para as órbitas internas nessa região, ocorre a oscilação do ângulo crítico  $\phi_1$  ao redor de  $180^\circ$ .
- b) **L**: região que contém a ressonância de Lindblad ocorre a oscilação do ângulo crítico  $\phi_2$  ao redor de  $0^\circ$ .

Notamos, pela Fig. 5.1, que Atlas, para a época 01 de janeiro de 2000, encontra-se na borda das separatrizes que conduzem a sua órbita à uma região possivelmente caótica (Ceccatto *et al.* 2022). Essa região caracterizada pelo elevado valor de  $N \sim 100$  contribui para a irregularidade observada por Cooper *et al.* (2015) nos ângulos críticos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

Na próxima seção, iremos explorar e determinar algumas órbitas com as condições iniciais  $(a_0, e_0)$  contidas nessas regiões para uma melhor compreensão, avaliando a variação temporal para os argumentos geométricos  $\phi_1 = 54\lambda_{pro} - 53\lambda - \varpi_{pro}$  e  $\phi_2 = 54\lambda_{prom} - 53\lambda - \varpi$ , em que  $\lambda$  e  $\varpi$  se referem ao clone de Atlas.



**Figura 5.1:** Mapa dinâmico para Atlas. Para a construção desse mapa usamos apenas Atlas e Prometheus. Foram determinados os espectros para 51 mil órbitas de satélites clones de Atlas integradas por 256,5 anos com intervalo de 0,6 dia. A escala de cor representa o valor para o número espectral  $N$ , quanto maior esse valor, mais picos significativos o espectro individual de cada um dos clones semelhante a Atlas possui, indicando a irregularidade de seu movimento orbital. A estrela vermelha representa o valor em relação à época 01 de janeiro de 2000. Com a construção do Mapa Dinâmico, podemos ver que Atlas está atualmente na borda entre uma região regular com baixo valor para  $N$  e uma região de movimento irregular (separatrizes), causando o comportamento não periódico do argumento crítico dessa ressonância. Em (a) temos o semieixo maior (km), (b) excentricidade e (c) inclinação obtidos com elementos osculadores, considerando como valor de referência 5% do pico máximo em cada um dos espectros individuais de Fourier. Nota-se as regiões distintas C e L.

### 5.2.1 A região C: local para a ressonância de corrotação.

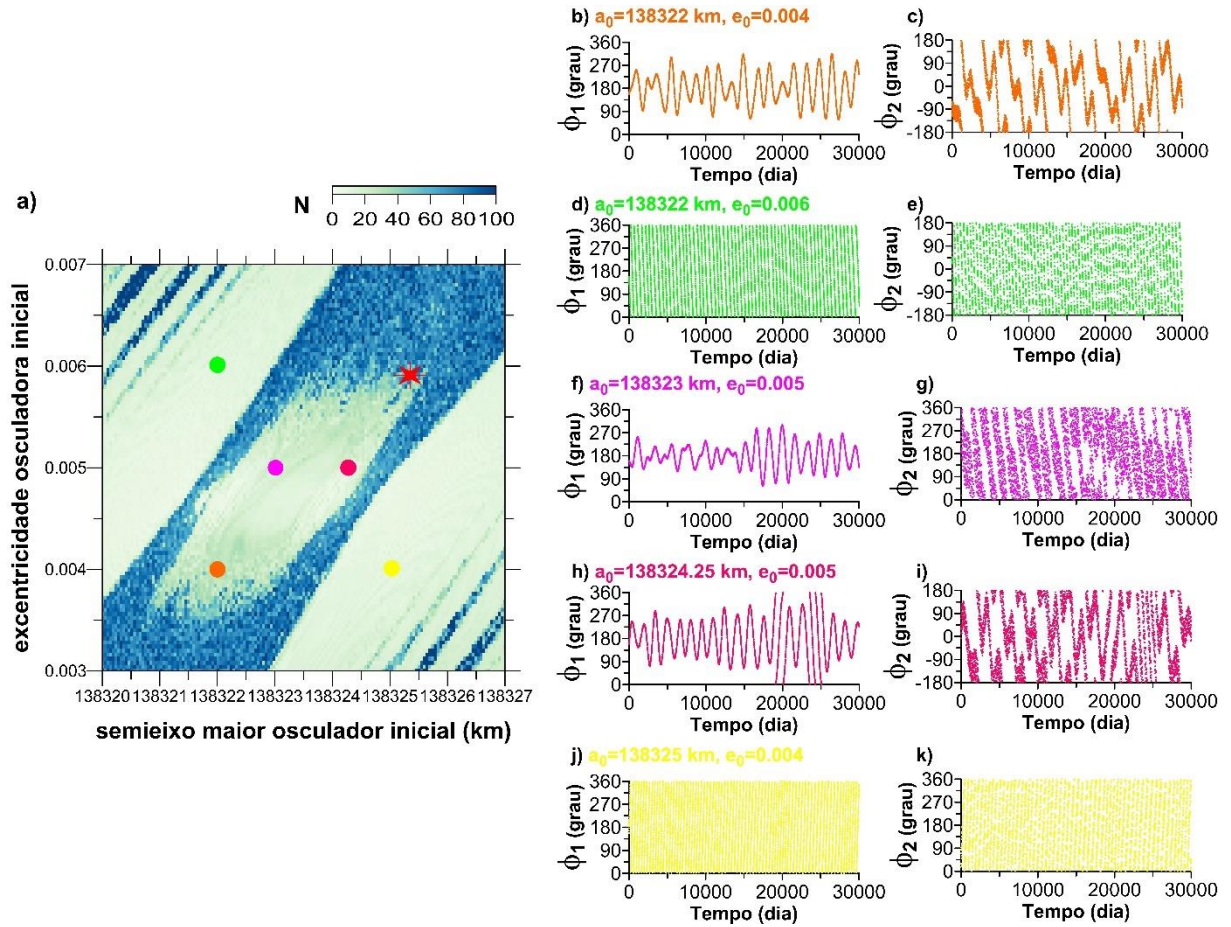
Seja a Fig. 5.2(a), que contém um “zoom” da zona de corrotação. Analisando essa região, podemos encontrar condições iniciais  $(a_0, e_0)$  em seu interior na qual o argumento  $\phi_1$  possua uma variação temporal oscilatória, sem apresentar a mudança nesse comportamento.

Na Fig. 5.2(a) determinamos 5 órbitas de clones semelhantes a Atlas com valores de semieixo maior e excentricidades representadas pelos círculos coloridos na Fig. 5.2(a) e, em

seguida, determinamos a variação temporal para os argumentos geométricos  $\phi_1$  (esquerda) e  $\phi_2$  (direita) representados pelas Fig. 5.2 (b-k). Detalhes sobre cada um desses valores ( $a_0, e_0$ ) podem ser observados acima de cada uma das figuras à esquerda e a estrela vermelha representa a posição atual de Atlas em relação à época 01/01/2000.

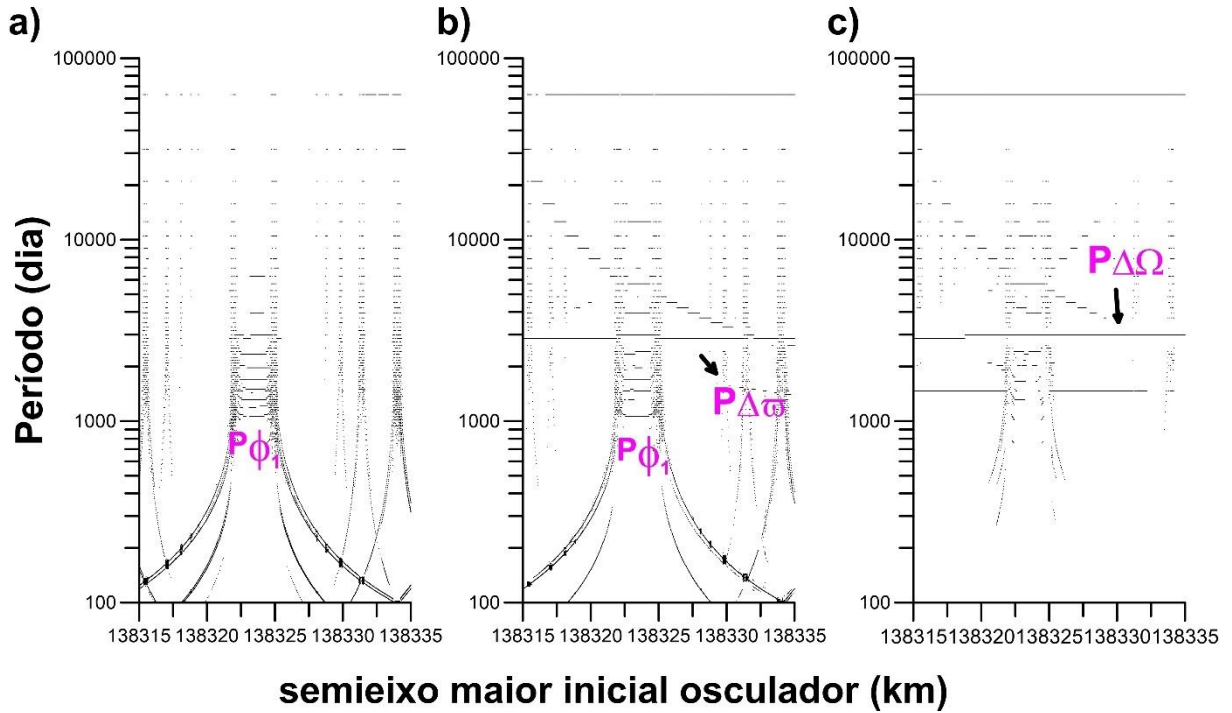
Podemos observar nas Fig. 5.2(b, c, f, g,), órbitas interiores a região **C**, representadas pelos círculos laranja e magenta, respectivamente, a oscilação do argumento geométrico  $\phi_1$  ao redor de  $180^\circ$ , indicando que as conjunções entre o par Prometheus-“*clone de Atlas*” oscilam ao redor de uma linha que passa pelo apocentro de Prometheus. Por outro, a variação temporal para os argumentos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  representada na Fig. 5.2 (h,i), círculo rosa neon na Fig. 5.2(a), apresenta a oscilação por um período aproximado de 20 mil dias, mudando para uma circulação aproximada de 10 mil e tornando a oscilar ao redor de  $180^\circ$ . Esse comportamento é característico de órbitas que estão próximas à borda de regiões de movimento irregular (separatrizes), tal como o observado por Cooper *et al.* (2015) e Renner *et al.* (2016) e representado em Ceccatto *et al.* (2022).

A Fig. 5.1(a) exhibe duas regiões próximas a região **C**, com característica interessante: as órbitas contidas nessa região apresentam um pequeno valor para o número espectral **N**, a fim de investigarmos a variação para os argumentos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  de partículas internas a nessas regiões escolhemos duas condições iniciais representadas pelos círculos verde e amarelo na Fig. 5.2(a) e a variação temporal para os argumentos geométricos pode ser vista nas Fig. 5.2(d, e) e Fig. 5.2(j, k). Observamos na Fig. 5.2(d, e) a rápida circulação retrógrada para  $\phi_1$ , indicando que a partícula Atlas encontra-se em uma região de movimento regular e para a Fig. 5.2(j, k) temos a circulação prógrada para o argumento geométrico  $\phi_1$ , revelando uma região de movimento regular.



**Figura 5.2:** (a) zoom na região C, dada na Fig. 5.1(a). Em (b-k) temos a variação temporal para os argumentos  $\phi_1$  (esquerda) e  $\phi_2$  (direita) para algumas partículas Atlas.

A Fig. 5.3 ilustra o IPS para a órbita individual com condição inicial (138323 km, 0,005) círculo magenta na Fig. 5.2(a). Podemos identificar alguns períodos fundamentais:  $P_{\phi_1}$  com período aproximado de 1.720 dias (Fig. 5.3(a)), e, os períodos associados à combinação angular  $P_{\Delta\omega_{\text{Pro-S}}}$  e  $P_{\Delta\Omega_{\text{Pro-S}}}$  (Fig. 5.3(b, c)), com períodos que equivalem a 2.978 dias, aproximadamente. Como essa órbita está quase no centro da região que contém a ressonância de corotação, o seu IPS apresenta-se “mais limpo” em relação ao IPS observado na Fig. 2.10.

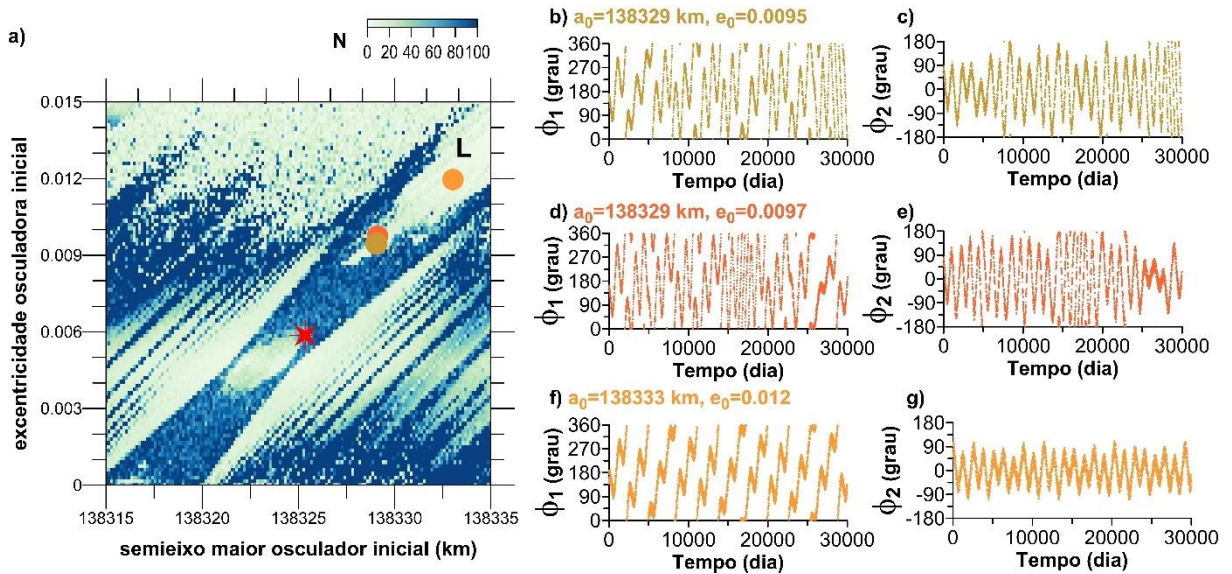


**Figura 5.3:** IPS para a órbita individual (138323 km, 0.005). (a) Semieixo maior osculador (km), (b) excentricidade osculadora e (c) inclinação (grau). Podemos identificar a região que contém o período ressoante,  $P\phi_1$  aproximadamente 1720 dias, e os períodos seculares  $P_{\Delta\omega_{Pro-S}}$  e  $P_{\Delta\Omega_{Pro-S}}$  com aproximadamente 2978 dias.

### 5.2.2 A região L: local para a ressonância de Lindblad

Outra importante região no espaço de fase observada na Fig. 5.1(a) é a região relacionada com a ressonância de Lindblad. As órbitas capturadas nessa ressonância, apresentam as linhas das conjunções passando pelo pericentro de Atlas. Na Fig. 5.1(a) podemos ver uma região clara com excentricidade maior que 0,009 e valores para o semieixo maior superior a 138328 km denominada de **L**.

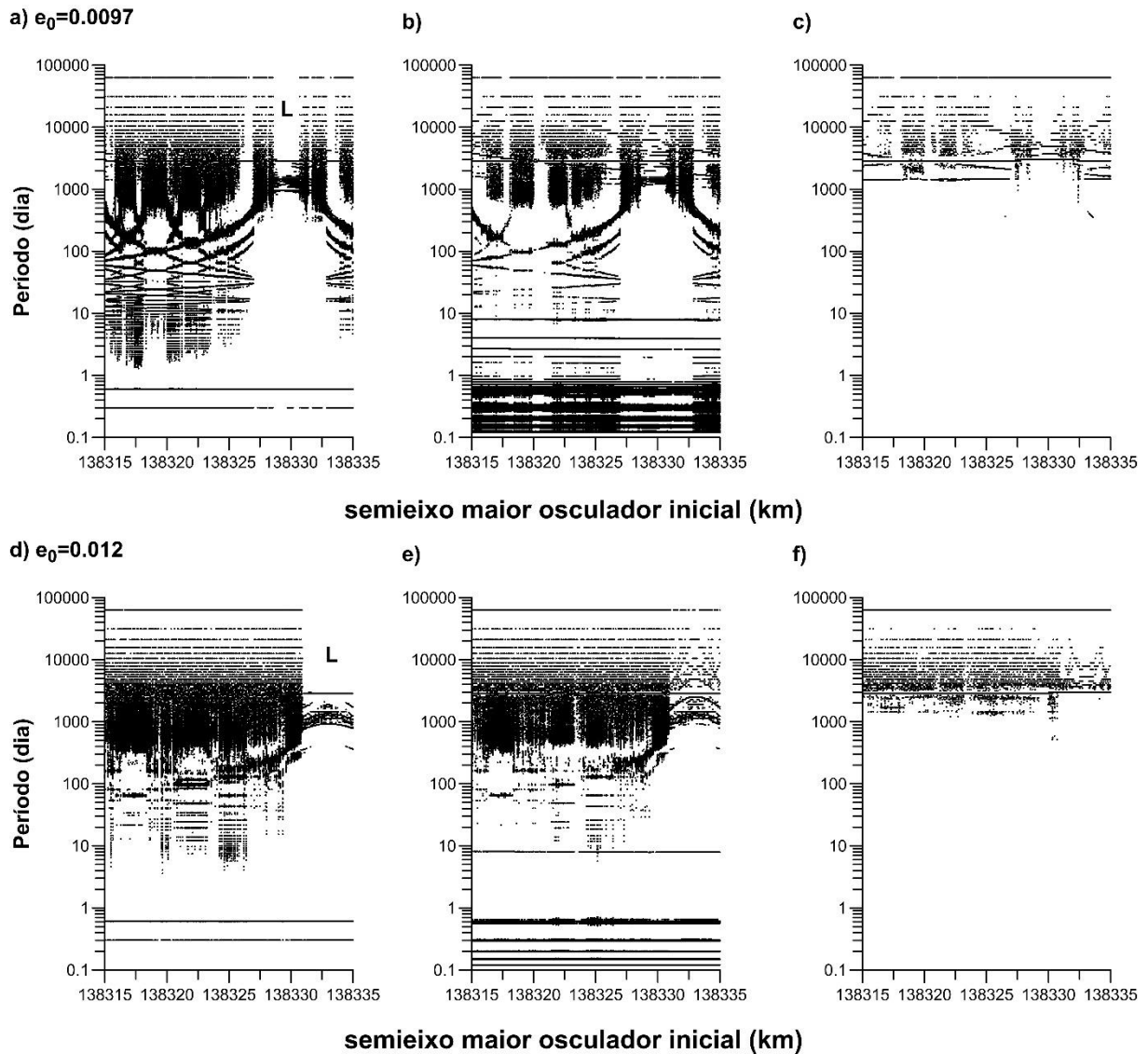
Na Fig. 5.4(a) determinamos três condições iniciais ( $a_0, e_0$ ) e calculamos as suas órbitas individuais para esses clones a Atlas. A evolução temporal para os argumentos geométricos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  podem ser observadas na Fig. 5.4(b-g). Podemos notar que para as órbitas próximas à borda inferior dessa região, Fig. 5.4(b-e) o argumento geométrico  $\phi_2$  apresenta um comportamento alternando a sua evolução temporal entre oscilações e circulações ao redor de 0. Essa característica pode ser observada na Fig. 5.2(h) que representa a variação temporal para o argumento  $\phi_1$  que também está próximo à borda entre a região de corotação e uma região de órbitas irregulares. Por outro lado, o argumento geométrico  $\phi_2$  representado na Fig. 5.4(g) apresenta sua evolução temporal librando ao redor de zero. Isso implica que, para uma partícula Atlas com condição inicial (138.333 km; 0,012), as conjunções com Prometheus ocorrem próximas de uma linha que passa pelo pericentro de Atlas.



**Figura 5.4:** (a) Os círculos coloridos representam as condições iniciais  $(a_0, e_0)$  para três clones semelhantes a Atlas. (b, c) Representam a variação temporal para os argumentos geométricos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , podemos notar a alternância entre a oscilação ao redor de 0 e a circulação de  $\phi_2$  e a circulação de  $\phi_1$  dessa partícula assim como observado em (d, e) que representam o comportamento de órbitas que estão próximas à borda da ressonância. Em (f, g) temos o comportamento dos argumentos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  para uma órbita interna a região **L** e vemos a libração de  $\phi_2$  ao redor de 0, indicando que as conjunções entre a partícula-Prometheus ocorrem próximas a uma linha que passa pelo pericentro dessa partícula. A estrela vermelha representa a órbita de Atlas em relação à época 01/01/2000.

Uma vez que estamos considerando partículas que possuem a sua excentricidade orbital acentuada, existe a possibilidade dessas órbitas cruzarem a órbita de Prometheus e, eventualmente uma colisão entre eles pode vir a ocorrer. Para determinarmos um intervalo no valor das excentricidades para as quais ambas as órbitas possam vir a se cruzar, calculamos a curva de colisão, dada por:  $a_{Pro}(1 - e_{Pro}) = a_0(1 + e_0)$ , em que  $a_0$  representa os valores para o semieixo osculador de acordo com a grade dada nas Fig. 5.1(a) e Fig. 5.2(a). Determinando os valores de  $e_0$ , considerando  $a_0$  de acordo com a grade, encontramos o intervalo  $0,009659 \leq e_0 \leq 0,009805$ , isto é, para valores de  $e_0$  contidos nesse intervalo as órbitas de Atlas e Prometheus se cruzariam, mas isso não acontece uma vez que a inclinação orbital de Prometheus ( $\sim 0,008^\circ$ ) é maior que a inclinação orbital de Atlas ( $\sim 0,004^\circ$ ). Na Fig. 5.4(d, e) vemos uma órbita para uma partícula contida nessa região que está próxima à borda entre a ressonância de Lindblad e órbitas irregulares.

O IPS para a partícula Atlas com excentricidade osculadora dada por  $e_0 = 0,0097$  é representado na Fig. 5.5(a-c) e para a partícula Atlas com excentricidade osculadora  $e_0 = 0,012$  é visto na Fig. 5.5(d-f). Podemos observar que a região que contém a ressonância de Lindblad, representada pela letra **L** nas Fig. 5.5(a, e) está limpa e contém poucos picos relacionados com os períodos do argumento  $\phi_2$  e combinações lineares desse período com outros períodos.



**Figura 5.5:** Acima: IPS para a órbita de um clone de Atlas com excentricidade inicial dada por  $e_0 = 0,0097$ . (a) Semieixo maior osculador (km), (b) excentricidade osculadora e (c) a inclinação orbital (grau). Abaixo: IPS para a órbita de um clone de Atlas com  $e_0 = 0.012$ . (d) Semieixo maior, (e) excentricidade e (f) inclinação (grau). Observamos à direita local para a ressonância de Lindblad.

### 5.3 Outras ressonâncias na vizinhança da órbita de Atlas

Uma ampliação do mapeamento do espaço de fase observado na Fig. 5.1(a) em seu semieixo maior osculador inicial para as extremidades de 138.280 km a 138.380 km revelou outras ressonâncias de movimentos médios (Fig. 5.6(a)).

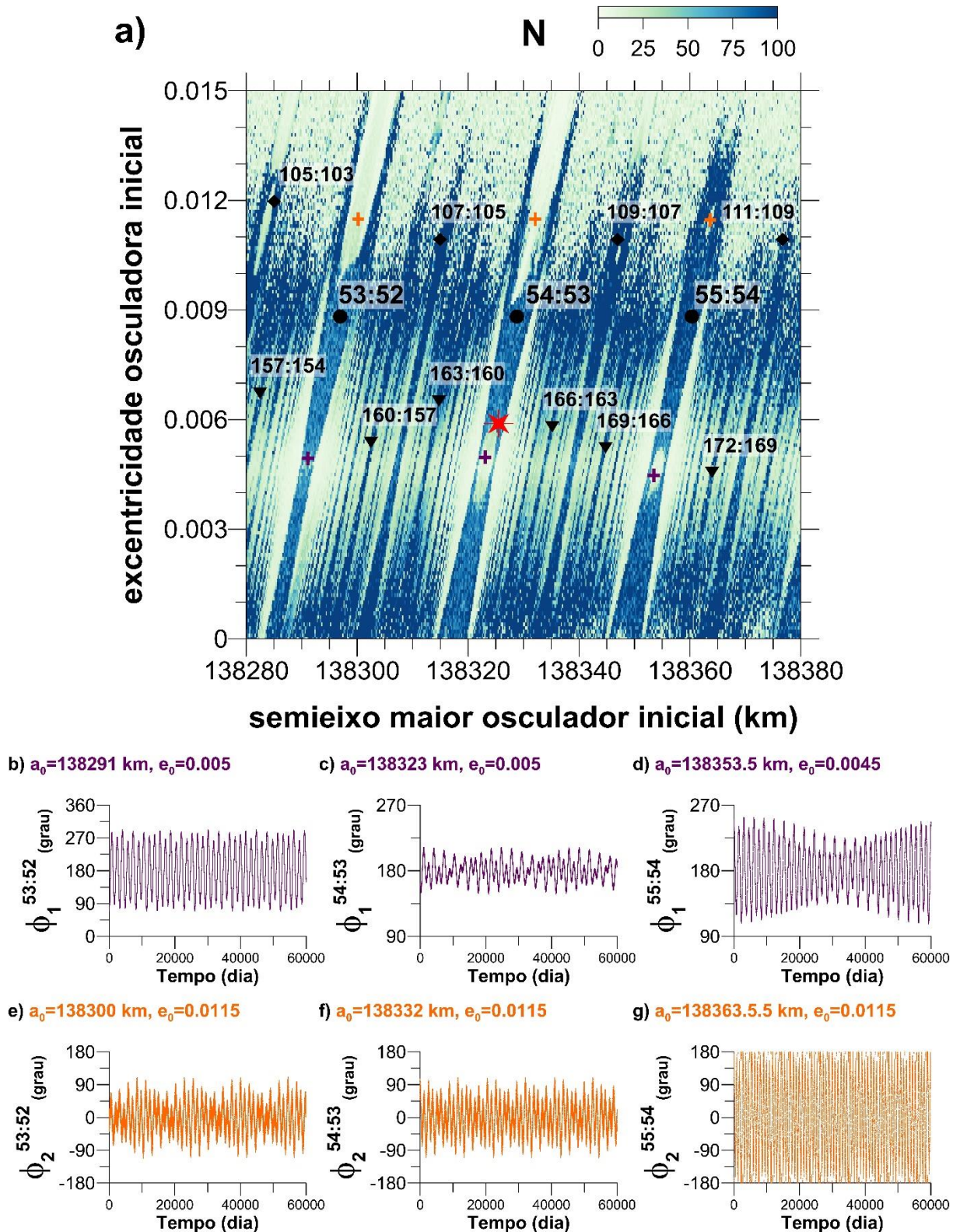
Para determinarmos essas novas ressonâncias, utilizamos o código aberto de Gallardo (2020), um código em linguagem Fortran que possibilita a determinação das possíveis ressonâncias de movimentos médios entre dois ou mais corpos que estão orbitando um corpo central massivo. Porém, o código não considera os efeitos dos termos  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$ , mas podemos considerar os dados de saída como indicadores e, em seguida, manualmente ajustá-los. A

aplicação direta desse pacote revelou as ressonâncias 53:52 (primeira vez descrita em Cooper *et al.* (2015)) e 55:54. Como um teste de validação, escolhemos órbitas individuais com condições iniciais  $(a_0, e_0)$  dadas na Fig. 5.6(a), e realizamos as integrações individuais para calcularmos a combinação angular dada na Tabela 5.1.

**Tabela 5.1** Argumentos para as ressonâncias de movimentos médios.

Argumento
$\phi_1^{53:52} = 53\lambda_{pro} - 52\lambda - \varpi_{pro}$
$\phi_2^{53:52} = 53\lambda_{pro} - 52\lambda_S - \varpi$
$\phi_1^{55:54} = 54\lambda_{pro} - 53\lambda - \varpi_{pro}$
$\phi_2^{55:54} = 54\lambda_{pro} - 53\lambda - \varpi$

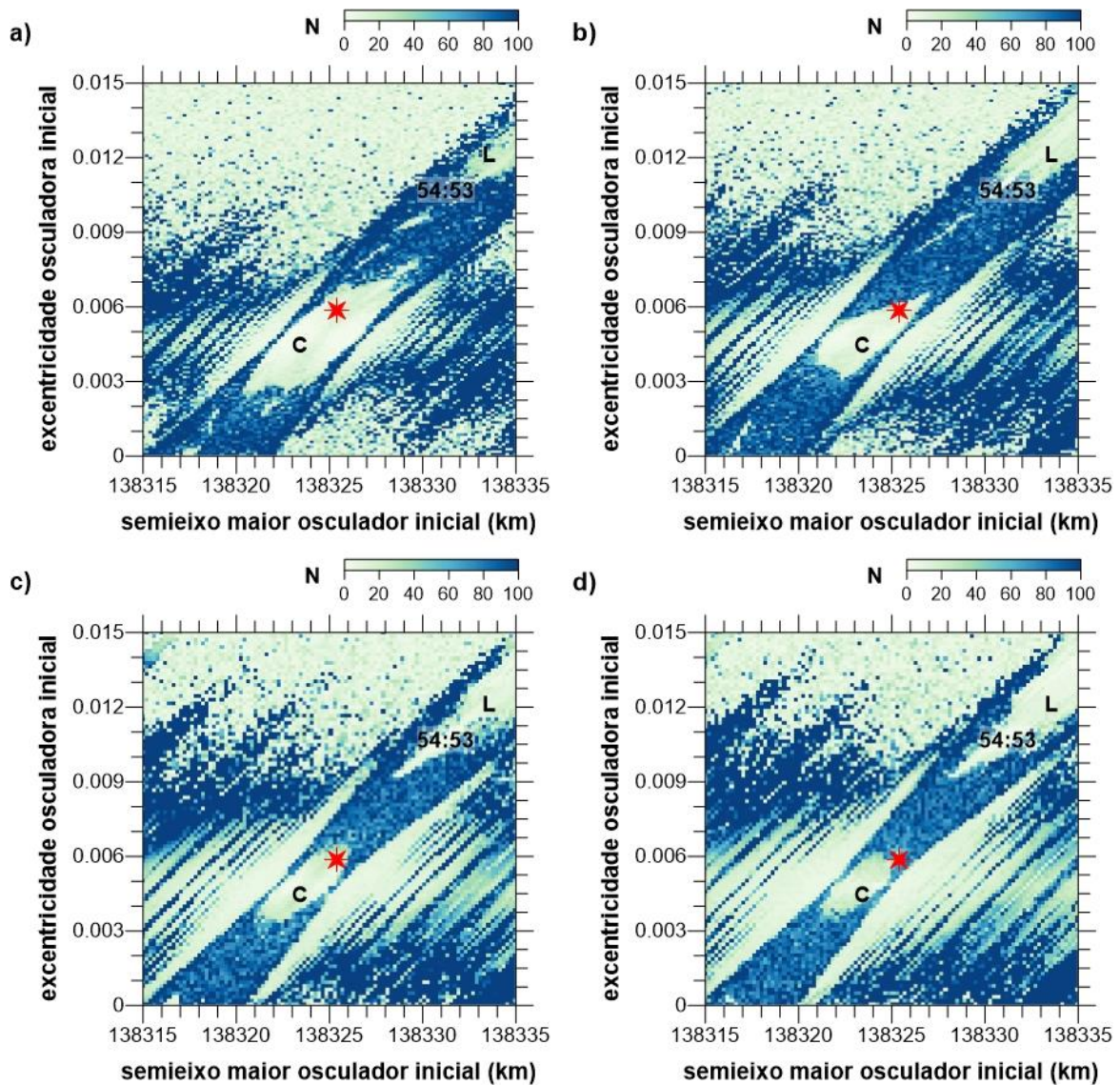
O resultado está na Fig. 5.6(b-g). Notamos que para a ressonância 53:52, um clone de Atlas com condição inicial dada por (138.291 km; 0,005) o ângulo  $\phi_1^{53:52}$  apresenta sua variação temporal librando ao redor de  $180^\circ$  (Fig. 5.6(b)). Já para um outro satélite semelhante a Atlas, com a condição inicial (138354 km, 0.0045), interior à ressonância 55:54, o ângulo  $\phi_1^{55:54}$  apresenta a sua variação temporal oscilando ao redor de  $180^\circ$  (Fig. 5.6(c)). Verificando uma possível ressonância de Lindblad, a órbita dada pela condição inicial (138300 km, 0.0115) apresenta a variação temporal para o argumento  $\phi^{53:52}_2$  oscilando ao redor de 0 (Fig. 5.6(e)).



**Figura 5.6:** Como o mapa dado pela Fig. 5.1(a) porém consideramos uma ampla vizinhança ao redor da órbita de Atlas. (a) o mapeamento no domínio das frequências permitiu identificar diversas ressonâncias de 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> ordens na vizinhança da órbita de Atlas associadas as perturbações de Prometheus. (b) variação temporal para os argumentos geométricos  $\phi_1^{53:52}$ , (c)  $\phi_1^{54:53}$ , (d)  $\phi_1^{55:54}$  notamos a oscilação ao redor de 180° desses três argumentos relacionados com a ressonância de corotação. Em (e) temos a oscilação de  $\phi_2^{53:52}$ , (f)  $\phi_2^{54:53}$  e  $\phi_2^{55:54}$  argumentos geométricos para a ressonância de Lindblad. Vemos a oscilação para esses argumentos ao redor de 0.

### 5.4 Mapeamento com baixa excentricidade de Prometheus

Como vimos na seção 5.1, a órbita de Atlas está na borda da zona de corrotação com as separatrizes relacionadas à ressonância 54:53. Renner *et al.* (2016) sugere que a excentricidade orbital de Prometheus é um parâmetro chave para a estabilidade da ressonância de movimentos médios 54:53, de modo que para uma excentricidade geométrica de Prometheus  $e_{pro} \leq 0,00008$  a órbita de Atlas ficaria presa nessa ressonância. Para verificarmos essa afirmação, construímos 4 mapeamentos dinâmicos, semelhante à Fig. 5.1(a), porém, considerando a excentricidade osculadora de um clone de Prometheus igual a (a) 0, (b) 0,001, (c) 0,002 e (d) 0,0024.

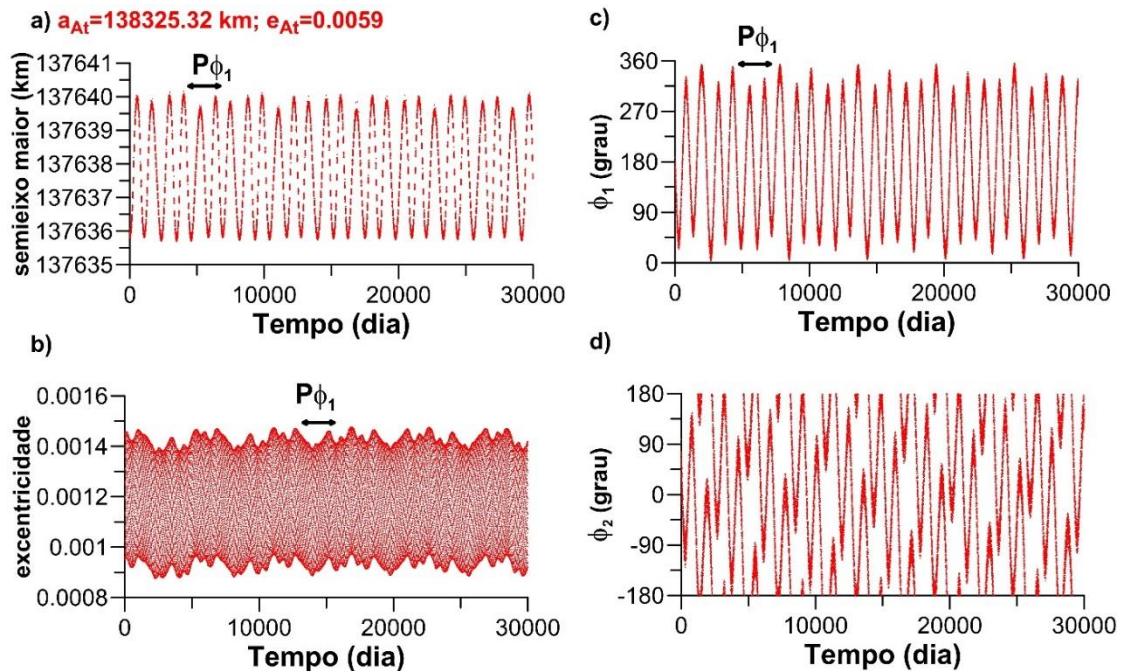


**Figura 5.7:** Semelhante à Figura 5.1(a), mas as órbitas dos clones Atlas foram obtidas integrando um clone Prometheus com excentricidade osculadora igual a (a) 0, (b) 0,001, (c) 0,002 e, (d) 0,0024. **C** e **L** representam as zonas corrotação e Lindbald associadas à ressonância 54:53 "Clone Prometheus"-Atlas. A órbita atual do Atlas (estrela vermelha) está dentro da zona **C** em (a) e (b). Em (d) Atlas é visto próximo ao limite da corrotação.

Comparando a Fig. 5.1(a) com a Figura 5.7(a, b), vemos que a posição orbital de Atlas é interna à região de corrotação, pois para as pequenas excentricidades do clone de Prometheus, a zona de corrotação é maior do que a vista em 5.7(c, d) que representam clones de Prometheus com suas excentricidades próximas à atual. Para esses clones, a zona de corrotação sofre uma contração, sendo preenchida pelas separatrizes e Atlas tende a ocupar a borda entre a zona de corrotação e suas separatrizes. Podemos ver que a zona Lindblad aumenta com o aumento da excentricidade do clone do Prometheus.

Para órbitas internas à zona de corrotação, o ângulo geométrico  $\phi_1 = 54\lambda' - 53\lambda_S - \varpi'$ , está oscilando em torno de  $180^\circ$ , em que  $\lambda'$  e  $\varpi'$  representam a longitude média e o pericentro do clone do Prometheus (ver Fig. 5.8 como um exemplo).

A Figura 5.8 mostra a variação temporal para o (a) semieixo maior geométrico, (b) a excentricidade e para os ângulos (c)  $\phi_1$  e (d)  $\phi_2$  para Atlas em sua posição orbital atual e um clone de Prometheus com excentricidade osculante igual a 0,00008 em sua posição orbital atual. O semieixo geométrico maior para este Atlas está oscilando com o período  $P_{\phi_1} \sim 1750$  dias, causando uma amplitude de  $\sim 2$  km. Esse comportamento regular resulta do aprisionamento deste clone em ressonância.  $\phi_1$  libra com  $P_{\phi_1} \sim 1750$  dias, e  $\phi_1$  está circulando na direção retrógrada.

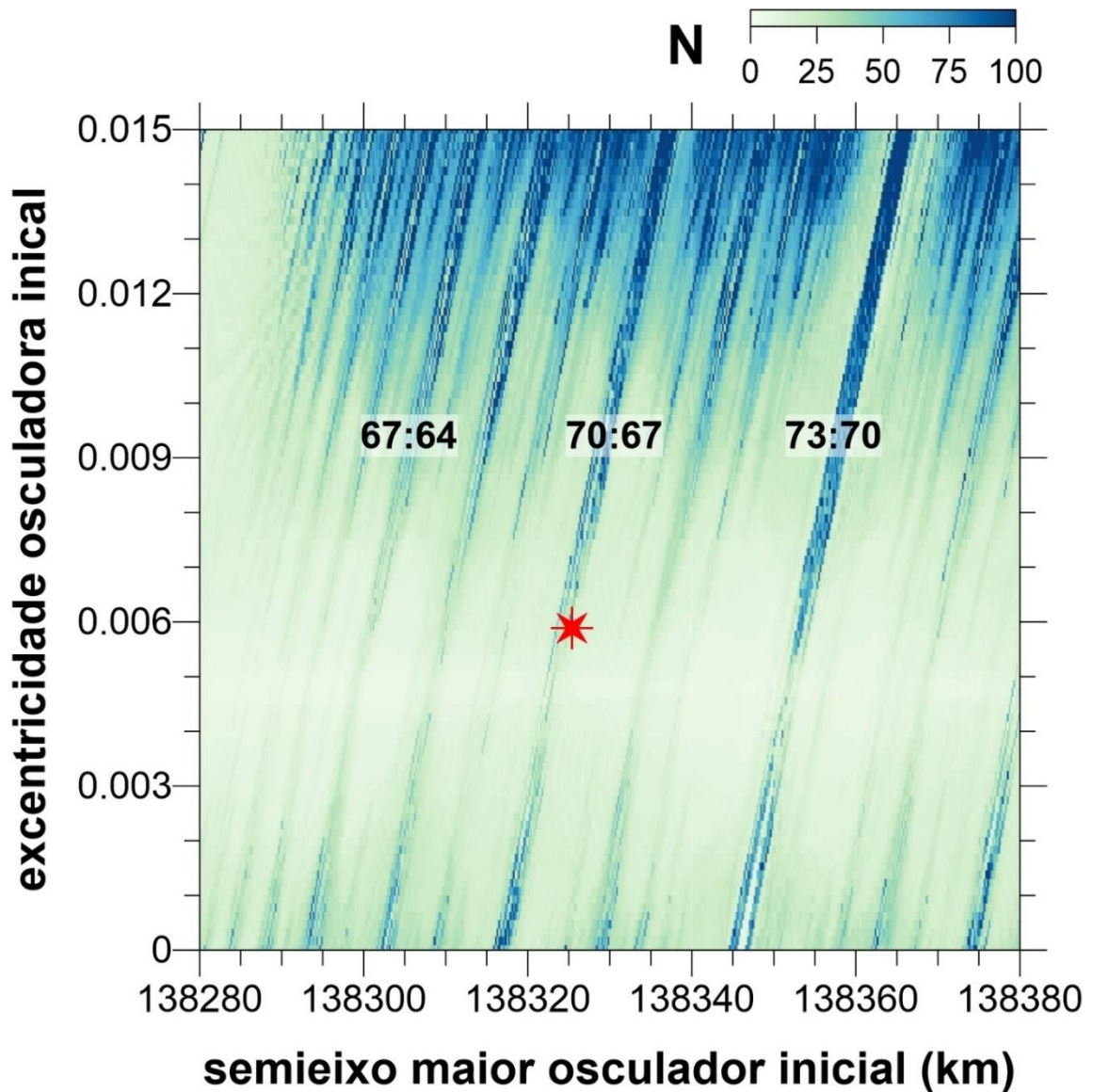


**Figura 5.8.** Variação temporal para a geometria (a) semieixo maior, (b) excentricidade, (c) ângulo  $\phi_1$  e (d) ângulo  $\phi_2$  obtido através da integração de um clone do Prometheus com sua excentricidade osculadora igual a 0,00008. Vemos o período ressonante ( $P_{\phi_1} \sim 1750$  dias) para o semieixo maior e a excentricidade.

Podemos concluir que para pequenas excentricidades do clone do Prometheus, Atlas será interno à zona de corrotação e para excentricidades próximas à atual de Prometheus, Atlas estará na borda da zona de corrotação e suas separatrizes.

### 5.5 A ressonância 70:67 de movimentos médios com Pandora

A ressonância 70:67 de movimentos médios Pandora-Atlas foi proposta por Spitale *et al.* (2006) e foi estudada em Cooper *et al.* (2015). O mapa dinâmico dado na Fig. 5.9 foi construído apenas com Atlas e Pandora. Exceto para valores altos de excentricidade no mapa, em geral,  $N$  é pequeno implicando aparentemente na hipótese da não perturbação significativa de Pandora na órbita de Atlas, assim como especulado por Spitale *et al.* (2006).



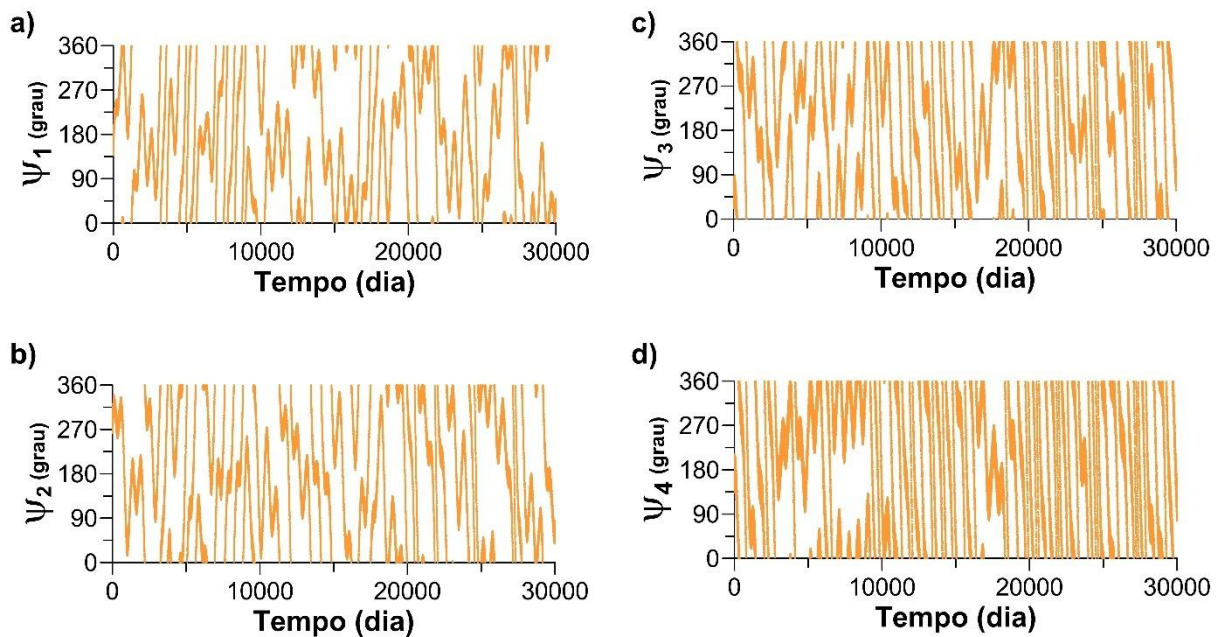
**Figura 5.9:** Mapa dinâmico para 75 mil orbitas individuais de clones de Atlas. Consideramos Atlas e Pandora nesse mapeamento. Consideramos a amplitude referência como 1%. Notamos estruturas diagonais que representam o domínio da ressonância 70:67 com Pandora.

A combinação angular para cada um dos quatro primeiros argumentos associados a ressonância 70:67 pode ser vista na Tabela 5.2.

**Tabela 5.2:** Argumentos para a ressonância 70:67 de movimentos médios Pandora-Atlas e seus respectivos períodos (Renner *et al.* 2016).

Argumento	Período (anos)
$\psi_1 = 70\lambda_{Pand} - 67\lambda_{At} - 3\varpi_{Pand}$	1,23
$\psi_2 = 70\lambda_{Pand} - 67\lambda_{At} - 2\varpi_{Pand} - \varpi_{At}$	1,9
$\psi_3 = 70\lambda_{Pand} - 67\lambda_{At} - \varpi_{Pand} - 2\varpi_{At}$	4,17
$\psi_4 = 70\lambda_{Pand} - 67\lambda_{At} - 3\varpi_{At}$	21,54

Podemos observar na Fig. 5.10 que ambos os argumentos possuem a sua variação temporal alternando entre a circulação e oscilação. Esse comportamento sugere que a órbita de Atlas não é interior a essa ressonância, como observado no caso Atlas-Prometheus. Na Fig. 5.12(b) temos uma explicação para essa alternância observada na Fig. 5.10.

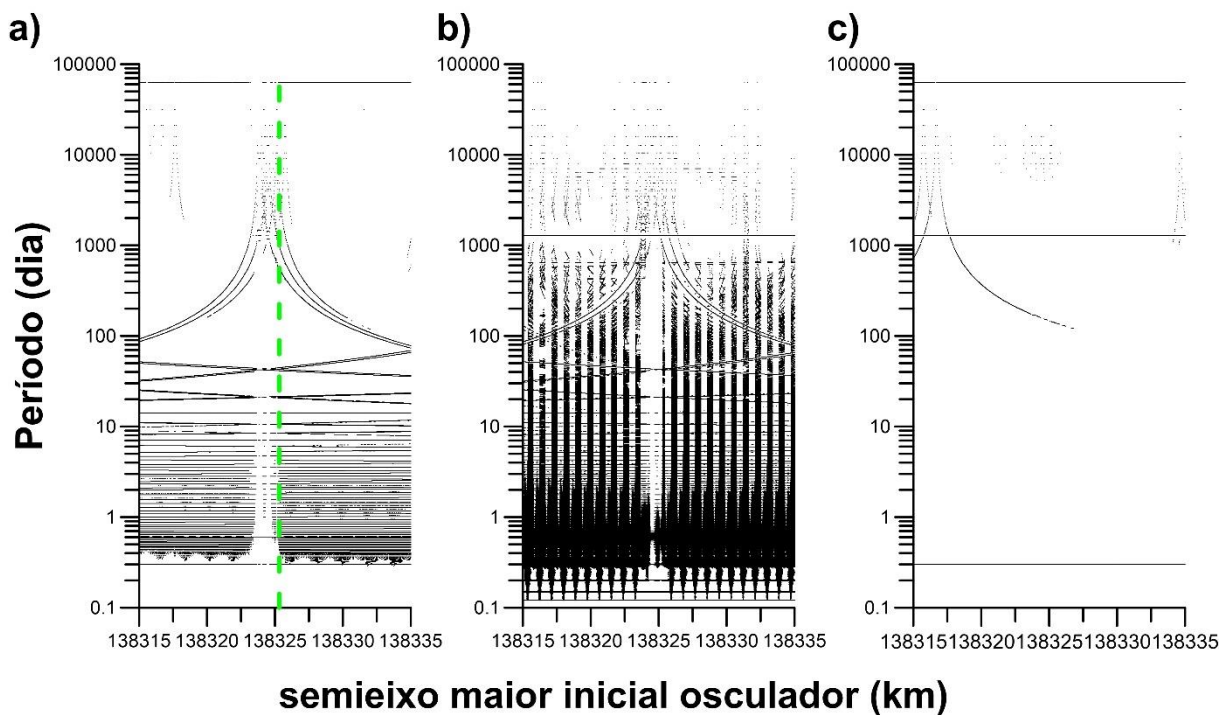


**Figura 5.10:** Variação temporal para os argumentos (a)  $\psi_1$ , (b)  $\psi_2$ , (c)  $\psi_3$  e (d)  $\psi_4$  para um período de 30 mil dias.

Renner *et al.* (2016) assume que as interações com Pandora não contribuem de uma forma significativa na dinâmica orbital de Atlas, mas não apresenta nenhuma figura para ilustrar esse fato. Com a finalidade de avaliarmos essa afirmação, construímos o IPS para o semieixo maior, excentricidade e inclinação osculadora de Atlas, considerando as perturbações de Pandora, dado pela Fig. 5.11 (a-c).

Na Fig. 5.11(a), podemos notar que há poucos picos com períodos maiores que 100 dias. A linha vertical tracejada verde representa o semieixo maior de Atlas em relação à época

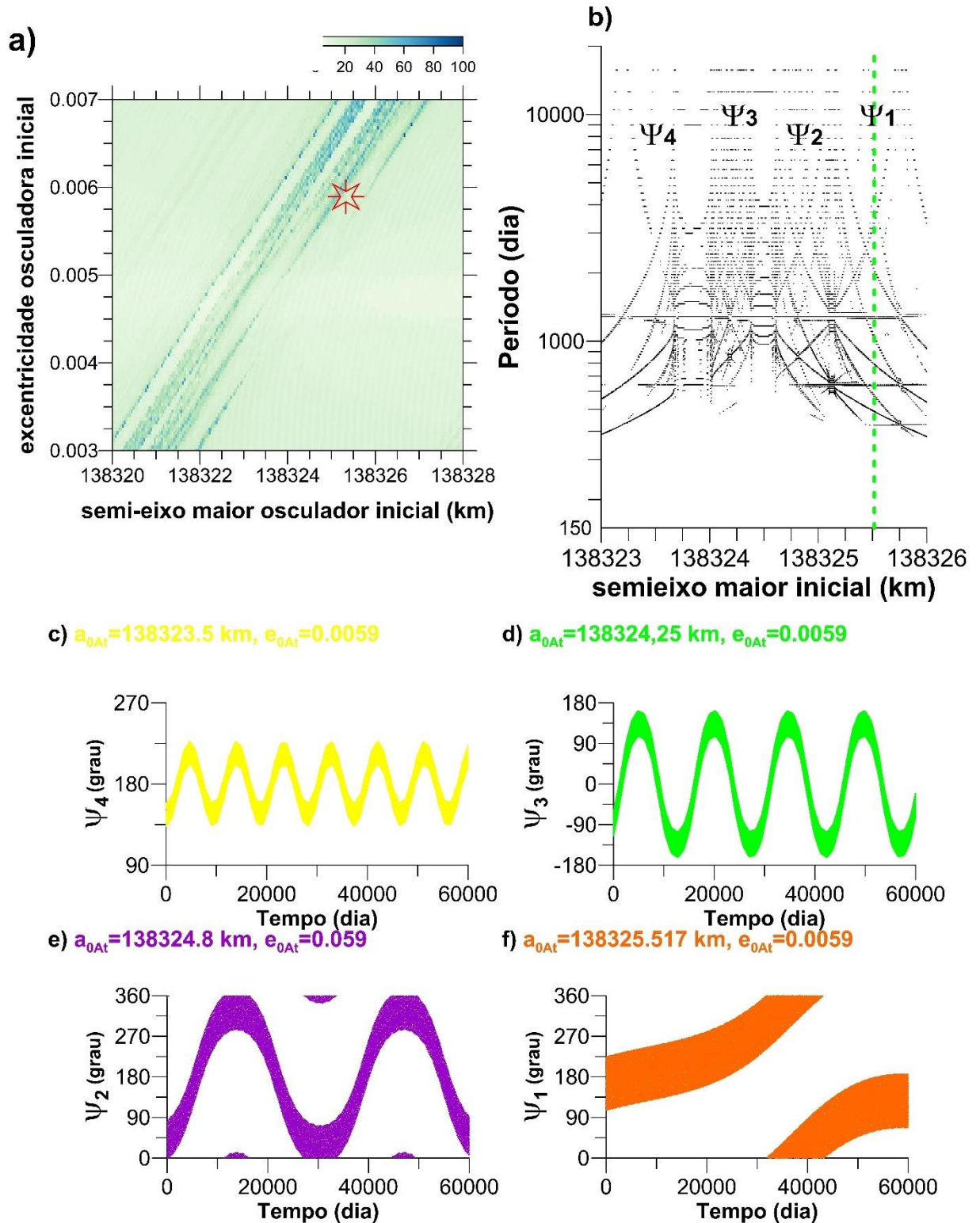
01/01/2000 e assim como na ressonância 54:53 entre Atlas e Prometheus, Atlas encontra-se fora dos períodos relacionados com a ressonância 70:67 com Pandora. Observando a Fig. 5.11 (b) que representa o IPS para a excentricidade de Atlas, vemos que esse IPS representa uma série de curtos períodos e vemos o período secular  $\sim 1280$  dias como uma linha horizontal constante em todo o IPS. A Fig. 5.11(c) representa os espectros da inclinação com um pequeno número de picos, também vemos o período secular  $\sim 1280$  dias como uma linha horizontal constante em todo o IPS e não temos picos relacionados com o curto período neste AR.



**Figura 5.11:** IPS construído considerando a amplitude de referência 1% para o (a) semieixo osculador, (b) excentricidade e (c) inclinação osculadora de Atlas. Consideramos apenas as perturbações com Pandora. A linha vertical tracejada verde representa o semieixo maior de Atlas em relação à época 01/01/2000. Podemos notar em (a) que Atlas se encontra fora dessa ressonância e temos a sobreposição dos multipletos da ressonância 70:67.

O comparativo entre o mapa dinâmico e o IPS pode ser realizado fixando um valor para a excentricidade osculadora inicial  $e$ , em seguida, construindo o IPS para o conjunto de clones de Atlas que possuem o valor para  $e_0$  fixo (Fig. 5.12(a-b)). Na Fig. 5.12(a) que representa uma vista detalhada da Fig. 5.9, podemos observar que há uma série de listras diagonais que cruzam o mapa, sendo a posição orbital de Atlas representada pela estrela vermelha. Na Fig. 5.12(b) temos uma vista detalhada para o IPS dado na Fig. 5.11(a) revelando o domínio para os múltiplos  $\Psi_4$ ,  $\Psi_3$ ,  $\Psi_2$  e  $\Psi_1$  relacionados com a ressonância 70:67. Podemos observar que Atlas está à esquerda do domínio do multipletto  $\Psi_1$ , justificando o comportamento para os argumentos geométricos  $\psi$ 's vistos na Fig. 10. Notamos a sobreposição para os demais  $\Psi$ 's descrita em Renner *et al.* (2016).

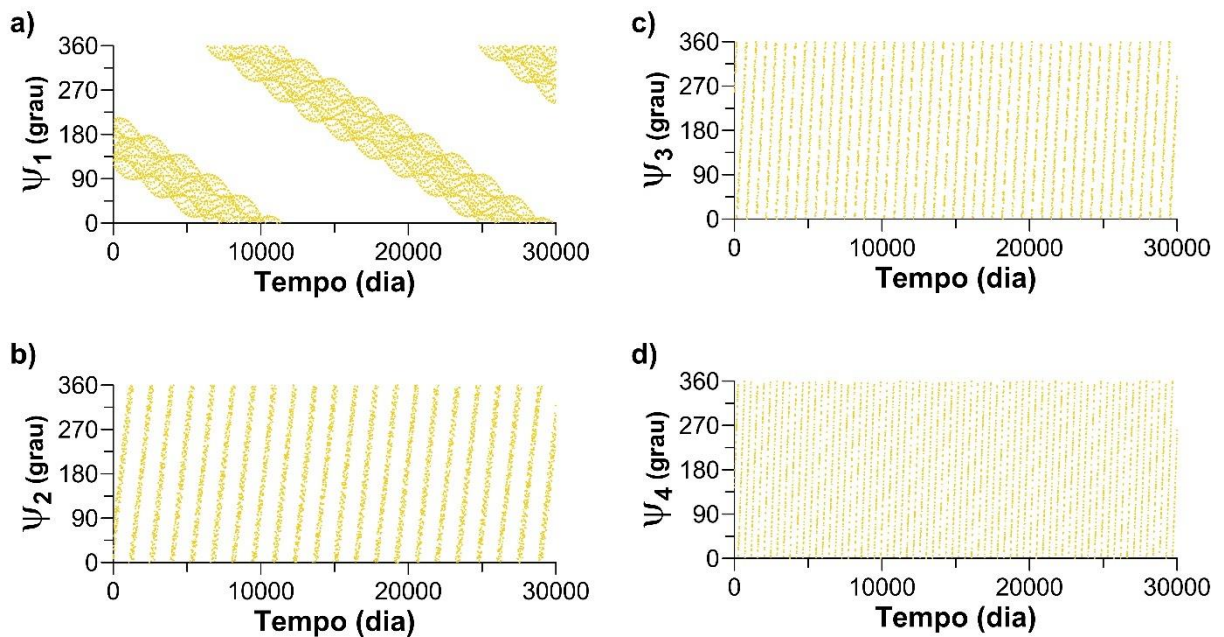
Na Fig. 5.12(c-f) temos a variação temporal para os argumentos geométricos (c)  $\psi_4$ , (d)  $\psi_3$ , (e)  $\psi_2$  e (f)  $\psi_1$  onde consideramos um clone de Atlas com condição inicial ( $a_0, e_0$ ) dada na Fig. 5.12. Vemos a oscilação de  $\psi_4$  e  $\psi_2$  ao redor de  $180^\circ$  e  $0$  respectivamente e a circulação de  $\psi_2$  e  $\psi_1$ .



**Figura 5.12.** (a) Mapa dinâmico no domínio das frequências para a ressonância 70:67 com Pandora. (b) IPS para cerca de 5 mil clones de Atlas. A linha vertical tracejada verde representa o semieixo atual para Atlas em relação à época 01/01/2000, assim como a estrela vermelha representa a posição orbital de Atlas. Em (b) observamos o domínio para os múltiplos  $\Psi_4$ ,  $\Psi_3$ ,  $\Psi_2$  e  $\Psi_1$  relacionados com a ressonância 70:67. Variação temporal para os argumentos geométricos (c)  $\psi_4$ , (d)  $\psi_3$ , (e)  $\psi_2$  e (f)  $\psi_1$ .

Uma análise para os argumentos geométricos  $\psi$ 's, obtidos apenas com Atlas e Pandora, sem a presença de Prometheus, pode ser vista na Fig. 5.13 e um fato interessante acontece: os argumentos  $\psi$ 's passam a circular deixando de oscilar. A Fig. 5.13(a) exibe a variação temporal no sentido prógrado, com período  $\sim 15$  mil dias para  $\psi_1$ . Por outro lado, nas Fig. 5.13(b-d) temos a rápida circulação de curto período para  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  e  $\psi_4$ .

Comparando as Fig. 5.10 e Fig. 5.13 vemos que a presença de Prometheus influencia na variação temporal dos argumentos  $\psi$ 's, levando-os a alternar entre a circulação e oscilação. Resultado observado na Fig. 4.12, em que as perturbações provocadas por Pandora levaram o argumento  $\phi_1$  alterar os períodos entre a circulação e oscilação.



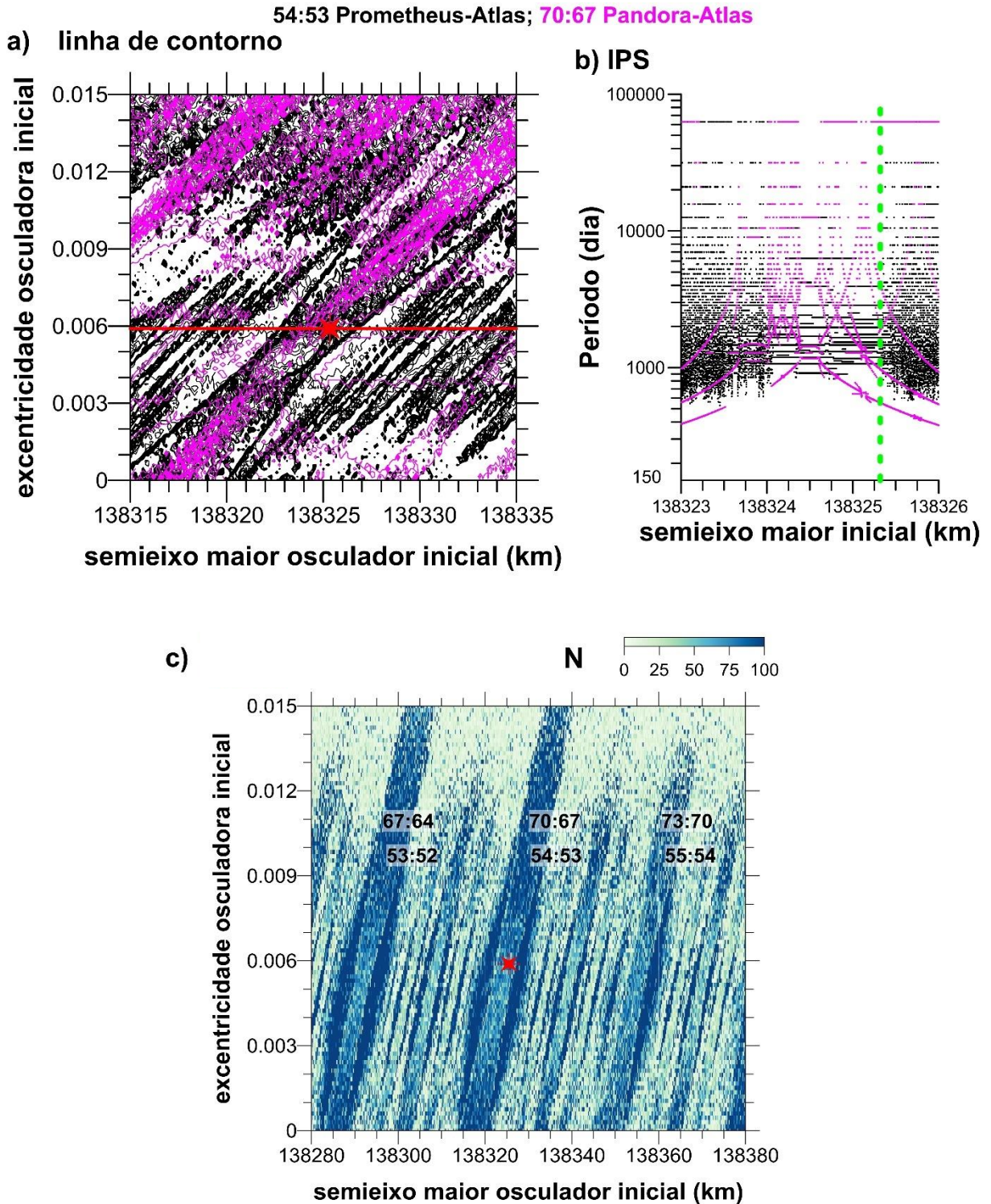
**Figura 5.13:** Argumentos  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  e 4 obtidos para o subsistema Pandora-Atlas sem a presença de Prometheus. Notamos a diferença entre essa representação e a dada na Fig. 4.15 acima.

## 5.6 A influência de Pandora na dinâmica de Atlas

Iremos discutir os principais resultados do acréscimo de Pandora no mapeamento da ressonância 54:53 de movimentos médios entre Atlas e Prometheus.

Quando consideramos a presença de Pandora no mapeamento no domínio das frequências para a ressonância 54:53, entre Prometheus e Atlas (Fig. 5.1(a)), vemos uma mudança brusca nas estruturas que estavam presentes quando se considerava apenas Atlas e

Prometheus. A Fig. 5.14(c) apresenta esse mapeamento. Podemos notar que as regiões **C** e **L** que apresentavam um pequeno valor para o número espectral  $N$ , passaram a ter um valor elevado para esse  $N$ .



**Figura 5.14:** (a) Mapa de linhas de contorno para o número espectral incluindo somente Prometheus (negrito) ou Pandora (magenta) como perturbadores de Atlas. (b) IPS para a excentricidade atual de Atlas indicada pela linha vertical vermelha em (a). (c) O mesmo que a Fig. 5.6(a) incluindo as perturbações de Pandora.

A Fig. 2.11(a) apresentou o IPS construído para o semieixo maior osculador de Atlas, considerando além de Prometheus os efeitos de Pandora. A comparação entre as Fig. 2.10(a) e 5.11(a) sugerem que as frequências relacionadas com a ressonâncias 54:53 Prometheus-Atlas e 70:67 Pandora-Atlas ocupam a mesma região no espaço de fase. Para visualizarmos o *overlap* entre as ressonâncias que afetam Atlas, determinamos o respectivo mapa de linhas de contorno para o número espectral. Na Fig. 5.14(a) a linha de contorno em negrito (magenta) representa a interação entre Prometheus-Atlas (Pandora-Atlas). As estruturas diagonais para as ressonâncias podem ser identificadas com as respectivas regiões internas para as ressonâncias de corrotação e Lindblad associadas com a ressonância 54:53. As linhas de contorno magenta são internas penetrando nas zonas das ressonâncias de corrotação e Lindblad revelando o *overlap* entre as ressonâncias. Resultado similar é dado no IPS da Fig. 5.14(b) que representa uma vista detalhada da união entre os IPS dados pelas Fig 2.10(a) e Fig. 5.11(a).

Fig. 5.6(a) e Fig. 5.9 permitiu identificar as principais regiões no espaço de fase de Atlas associadas com as perturbações ressonantes de Prometheus e Pandora. Fig. 5.14(c) construída como a Fig. 5.6(a) incluindo as perturbações de Pandora representa esse cenário dinâmico. A comparação entre a Fig. 5.14(c) com as Fig. 5.6(a) e Fig. 5.9 mostrou que o domínio relacionado com as ressonâncias de corrotação e Lindblad associadas a ressonância 54:53 com Prometheus, claramente vistos antes nos mapas separados, (Fig. 5.6(a) e Fig. 5.9) agora estão representados por estruturas difusas no espaço de fase típicas de sistemas caóticos.

Concluimos que as perturbações associadas com às ressonâncias 54:53 Prometheus-Atlas e 70:67 Pandora-Atlas estão sobrepostas no espaço de fase, contribuindo para a origem do caos na órbita de Atlas.

Na próxima seção iremos quantificar o caos a partir do cálculo de coeficientes de difusão.

## 5.7 Difusão Caótica

No contexto da dinâmica não-linear, a difusão caótica é mais comumente estudada no domínio das ações. No entanto, Laskar (1990) mostrou que o tamanho das regiões caóticas no Sistema Solar é mais evidente quando analisado no espaço de frequências. Outra vantagem da abordagem frequencial é devida à relação entre a difusão de frequências independentes no espaço de ações com a difusão no domínio temporal. Tal relação foi obtida em Laskar (1993) e tem a forma

$$\nabla^2 f \propto \frac{\partial f}{\partial t} \quad (5.1)$$

definida deste ponto em diante como  $\delta\delta_x f(x, t) \propto \delta_t f(x, t)$ .

A relação obtida prontamente fornece dois coeficientes de difusão baseados na abordagem frequencial: um obtido pela análise do comportamento das frequências independentes no espaço de ações e outra no domínio temporal.

A difusão no espaço (lado esquerdo da Eq. 5.1) pode ser obtida pela segunda derivada da frequência de maior amplitude no IPS (como na Fig. 2.4), o que faz com que este coeficiente tenha as mesmas limitações da construção do IPS, como tempo total de integração e passo de integração.

Já o coeficiente de difusão de frequências no tempo (lado direito da Eq. 5.1) é mais comumente utilizado na literatura. Laskar (1993) e Ferraz-Mello e Wachlin (1998) utilizaram o coeficiente definido como  $\delta_t = |\nu_1 - \nu_2|$ , onde  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são as frequências de maior amplitude para os espectros de potência da órbita na primeira e na segunda metade do intervalo de integração, respectivamente.

O coeficiente se baseia na seguinte premissa: Frequências independentes de órbitas periódicas são constantes no tempo, enquanto aquelas de órbitas caóticas apresenta oscilações não periódicas.

Uma das vantagens da utilização dessa abordagem consiste no fato de que o estudo dos sistemas dinâmicos é independente de transformações de coordenadas no espaço de frequências, fazendo com que as condições iniciais sejam unicamente definidas neste espaço.

### 5.7.1 Ferramentas utilizadas

Laskar (1993) apresentou o método da Análise Numérica das Frequências Fundamentais (NAFF) capaz de estimar a evolução temporal das frequências independentes do sistema. Entretanto, a aplicação desse método depende da escolha prévia da janela temporal na qual a ferramenta vai ser aplicada, fazendo com que a ferramenta não seja sensível aos casos de órbitas fortemente caóticas.

Neste contexto, Michtchenko e Nesvorný (1996) apresentaram a análise de wavelets, que se baseia na aplicação da Transformada de Wavelets Contínua em uma série temporal. A ferramenta permite a identificação das frequências independentes do sistema, com resolução tanto no tempo quanto na frequência. Além disso, a análise de wavelets não necessita da escolha

prévia de uma janela temporal na qual vai ser aplicada, permitindo a clara distinção entre órbitas caóticas fracas e fortes.

De posse da nova ferramenta, o coeficiente de difusão de frequências no domínio temporal pode ser redefinido como  $\delta_t = |\nu'_1 - \nu'_2|$ , onde  $\nu'_1$  e  $\nu'_2$  são análogos ao coeficiente definido anteriormente, mas considerando frequência média na primeira metade do intervalo de integração e a frequência média da segunda metade, respectivamente, de modo a estimar com maior precisão a variação temporal das frequências independentes.

### 5.7.2 Metodologia

Uma vez que o coeficiente de difusão através da variação espacial das frequências compartilha das limitações numéricas da construção do IPS, somente o coeficiente de difusão das frequências no tempo será utilizado, conforme obtido pela aplicação do método de wavelets.

Após a aplicação da ferramenta, definimos que os coeficientes de difusão  $\delta_t \leq 10^{-5}$  são característicos de órbitas regulares, enquanto aqueles  $\delta_t \geq 10^{-1}$  são característicos de órbitas fortemente caóticas (Marzari *et al.* 2003). A partir dessa definição, estipulamos que valores de difusão entre  $10^{-2}$  e  $10^{-4}$  podem ser considerados como fracamente caóticos (estabilidade de longo período) ou quase-periódico.

O coeficiente é calculado para um conjunto de condições iniciais no semieixo maior  $138.322 \text{ km} < a_0 < 138.328 \text{ km}$  que corresponde ao domínio da ressonância de corrotação (Ceccatto *et al.* 2022). A excentricidade foi fixada no valor atual de Atlas  $e_0 = 0,0059$  e as condições iniciais foram integradas em três cenários distintos: (a) Atlas perturbado por Prometheus, (b) Atlas perturbado por Pandora e (c) Atlas perturbado por Prometheus e Pandora. Cada condição inicial em cada cenário foi integrada por 100 anos.

Os resultados podem ser vistos na Fig. 5.15, de cima para baixo, respectivamente. A curva na cor preta corresponde ao coeficiente de difusão calculado pela variação temporal da frequência independente calculada para o semieixo maior, enquanto a curva em vermelho é o análogo calculado a partir da excentricidade de Atlas. A discussão dos resultados pode ser vista nas próximas seções.

### 5.7.3 Atlas Prometheus

O painel superior da Figura 5.15(a) apresenta o comportamento do indicador para a seção do sistema composto por Atlas e Prometheus, na região da ressonância de corrotação.

A análise do coeficiente mostra que a dinâmica de Atlas é dominada por uma difusão lenta ao longo de toda a extensão da região de corrotação. A vizinhança de sua posição nominal ( $a_0 = 183,325.32$  km) é caracterizada por um coeficiente de difusão  $\delta_t \approx 10^{-2}$ , condizente com uma região de difusão lenta, na fronteira entre a ressonância de corrotação e a camada estocástica entre as ressonâncias, região na qual há grande complexidade de fenômenos (Lichtenberg e Lieberman, 1992).

De fato, comparando-se o comportamento do coeficiente de difusão com o IPS na Fig. 2.10(a), percebe-se que, apesar da caracterização da órbita como caótica devido ao grande número de picos de frequências detectados pela ferramenta de detecção de caos, o movimento nesta região é dominado pela evolução secular do sistema, uma vez que os termos de curto período/alta frequência são facilmente identificáveis enquanto a região caótica é confinada à região de longo período/baixa frequência ( $P > 1000$  dias).

O espalhamento confinado das frequências nesta região do espaço de fase pode fornecer um argumento a favor da estabilidade de longo período de Atlas, uma vez que a complexidade desta região do espaço de fase sugere que a localização de Atlas leve à difusão do satélite na camada estocástica entre as ressonâncias, possivelmente confinada nesta região.

#### 5.7.4 Atlas Pandora

No sistema simplificado sem a presença de Prometheus, uma vez que esse é o corpo que apresenta a maior perturbação em Atlas (Spitale *et al.* 2006), o espaço de fase é fortemente modificado, uma vez que a perturbação de Pandora é de baixa intensidade (Figura 5.9).

O comportamento do indicador confirma este fato, uma vez que o coeficiente de difusão é consistentemente uma ordem de magnitude inferior ao calculado no sistema Atlas-Prometheus, frequentemente alcançando valores  $\delta_t \leq 10^{-4}$ , veja a Fig. 5.15(b).

Novamente, o resultado está de acordo com o IPS apresentado na Fig. 5.11(a), na qual termos de longo período ( $P > 1000$  dias) compõem estruturas muito bem definidas e termos de curto período ( $P < 100$  dias) apresentam com valores facilmente identificáveis.

A dinâmica de Atlas nesta configuração é dominada pela dinâmica quase-periódica devido à ressonância 70:67 com Pandora, região na qual há outras estruturas típicas de ressonâncias, indicando que Atlas poderia se manter nesta configuração por longos períodos de tempo.

Estes resultados estão de acordo com Cooper *et al.* (2015), no qual o movimento de Atlas sob influência de Pandora foi investigado com o auxílio do *Fast Lyapunov Indicator* (FLI) levando à categorização da órbita como quase-periódica, ao contrário do caso evidenciado no sistema Atlas-Prometheus.

### 5.7.5 Atlas Prometheus e Pandora

Por fim, o cenário completo composto por Atlas perturbado por Prometheus e Pandora é estudado. Neste cenário, o espaço de fase fica repleto de ressonâncias, ao mesmo tempo em que muitas das estruturas ressonantes são destruídas (Figura 5.14(c)).

Atlas está na vizinhança da ressonância 54:53 com Prometheus, assim como com a ressonância 70:67 com Pandora (Renner *et al.* 2016). O comportamento do coeficiente de difusão caótica pode ser visto no painel inferior da Figura 5.15(c).

Conforme discutido anteriormente, Prometheus é o maior perturbador da órbita de Atlas. No entanto, no cenário completo, a sobreposição (*overlap*) de ressonâncias apresentada no final da seção 5.5 é proposta como explicação para a órbita de Atlas.

Com a adição de Pandora ao sistema Atlas-Prometheus, a região na proximidade da ressonância de corrotação se torna globalmente mais caótica, levando ao desaparecimento desta estrutura. A análise do coeficiente de difusão indica que essencialmente todas as condições iniciais apresentam elevados coeficientes de difusão  $\delta_t > 10^{-3}$ , enquanto a maioria apresenta  $\delta_t \approx 10^{-2}$ .

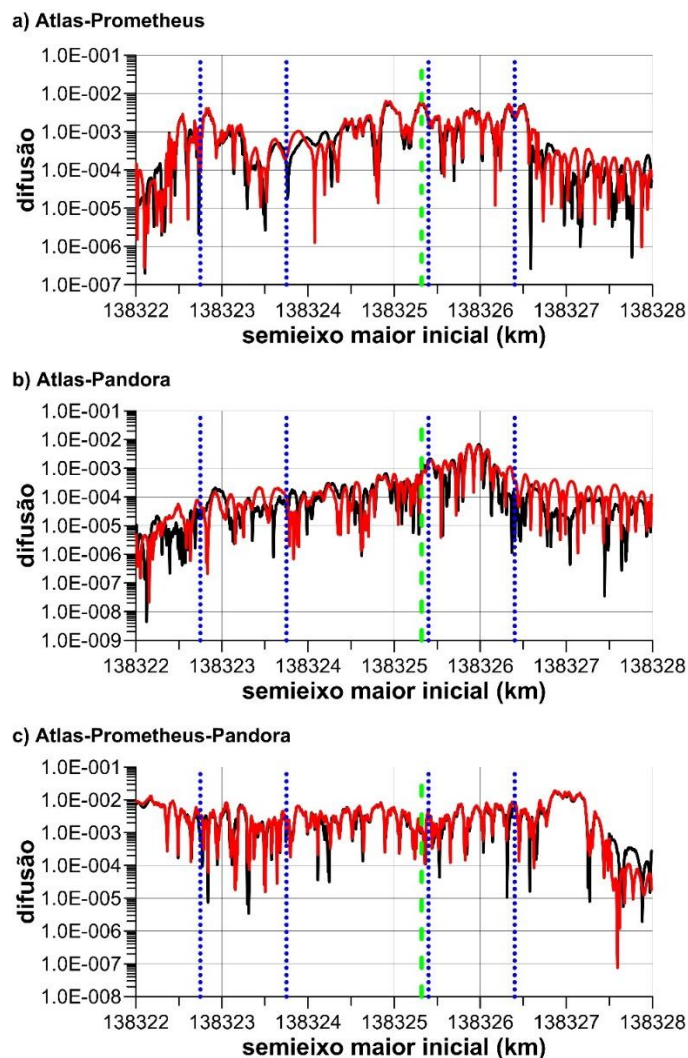
Por outro lado, nenhuma condição inicial apresentou coeficiente condizente com movimentação fortemente caótica ( $\delta_t \geq 10^{-1}$ ) indicando que, apesar da sobreposição das ressonâncias, a camada estocástica entre as ressonâncias de movimento médio e as ressonâncias de corrotação e de Lindblad estão confinadas a regiões de baixa excentricidade.

Este confinamento pode ser capaz de frear o aumento da caoticidade da órbita de Atlas ao limitar a possibilidade de encontros próximos ou colisões entre os satélites enquanto permite que Atlas difunda irregularmente na camada estocástica.

Esta configuração é proposta como mecanismo para justificar a estabilidade de larga escala e longo período ao mesmo tempo em que indica que órbita de Atlas é localmente caótica. Tal conclusão é corroborada por Pereira *et al.* (2024), no qual os autores investigaram a dinâmica caótica de Atlas com o auxílio dos expoentes de Lyapunov, chegando à conclusão de

que a órbita caótica de Atlas é caracterizada como caótica, com curto tempo de Lyapunov, mas radialmente confinada.

Além disso, os resultados estão de acordo com Renner *et al.* (2016) com relação à afirmação de que a sobreposição das ressonâncias entre Atlas-Prometheus e Atlas-Pandora é responsável por tornar o sistema em geral mais caótico. No entanto, os efeitos de tal sobreposição são mais intensos na região da corrotação do que na localização nominal de Atlas, uma vez que o coeficiente de difusão nesta região se modifica marginalmente em comparação com o sistema Atlas-Prometheus. Em ambos os casos a difusão é confinada à camada estocástica referente à separatriz entre as ressonâncias, prevenindo que Atlas difunda para regiões de maior excentricidade e evitando, assim, que encontros próximos e colisões ocorram.



**Figura 5.15:** (a) O Coeficiente de Difusão para o sistema Atlas-Prometheus em torno da vizinhança de Atlas, linha vertical verde tracejada, que representa o valor para o semieixo atual de Atlas, indica uma difusão lenta em sua dinâmica orbital, revelando que não há grandes perturbações que alterem a evolução orbital para o semieixo maior (linha preta) e excentricidade orbital (linha vermelha). (b) Sistema Atlas-Pandora: a curva preta representa a variação temporal para frequências relacionadas ao semieixo maior e a curva vermelha representa a variação temporal para frequências relacionadas à excentricidade orbital. O pequeno valor do coeficiente de difusão está de

acordo com os resultados de Spitale *et al.* 2006. (c) Como (a), mas consideramos o sistema formado por Atlas-Prometheus-Pandora. A adição do Pandora elevou o coeficiente de difusão em uma ordem de grandeza, colaborando com os resultados obtidos com IPS e mapas dinâmicos. As linhas verticais pontilhadas azuis em (a-c) representam as separatrizes da ressonância 54:53 entre Prometheus e Atlas.

## Capítulo 6

### O passado dinâmico de Atlas

Durante a expansão por maré da órbita de um satélite massivo, pequenos satélites podem ser capturados em uma ressonância com esse satélite massivo e vir a migrar para o interior ou exterior do sistema de Saturno. Vários autores vêm testando essa hipótese (Giuppone *et al.* 2022) e analisando a probabilidade de captura em ressonância de movimentos médios. Diante desse cenário, iremos investigar como a migração por efeito de maré de Prometheus contribuiu para a evolução orbital de Atlas.

#### 6.1 A dissipação em Prometheus e sua migração: o passado da dinâmica orbital de Atlas

As variações do semieixo maior e da excentricidade de Prometheus são resultados pelos efeitos das marés em Saturno e em Prometheus. Como estamos trabalhando com um gigante gasoso e um satélite gelado, a modelagem da evolução das marés será diferente para cada corpo. Seja um sistema formado por Saturno e Prometheus. Os modelos utilizados para calcular as variações dos dois parâmetros orbitais mencionados são descritos a seguir.

##### 6.1.1 A dissipação em Saturno

Seja Saturno um corpo de duas camadas formado por um núcleo viscoelástico envolto por um envelope gasoso. Cada camada contribui para a dissipação das marés separadamente. Ferraz-Mello *et al.* (2008), apresentam as equações (modelo de Darwin) para a maré no planeta:

$$\dot{a}_{Saturno} = \frac{2a}{3n} \frac{9n^2 M_P R_S^5 k_2}{2M_S a^5} \frac{1}{Q} \left(1 + \frac{51}{4} e^2\right), \quad (6.1)$$

$$\dot{e}_{Saturno} = \frac{57neM_P k_2}{8M_S a^5} \frac{1}{Q}, \quad (6.2)$$

onde  $M_P$  é a massa de Prometheus,  $M_S$  e  $R_S$  são a massa e o raio de Saturno e,  $a$ ,  $e$ ,  $n$  são a excentricidade, semieixo maior e velocidade angular média do satélite, respectivamente. A razão  $k_2/Q$  é dada pelo número de Love de segunda ordem  $k_2$  e pela função de dissipação  $Q$ . Nas subseções seguintes descrevemos a dissipação de maré no núcleo e no envelope do gás.

### 6.1.2 A dissipação no núcleo de Saturno

Consideramos a *reologia*<sup>7</sup> de Maxwell para descrever a dissipação de energia no núcleo viscoelástico do planeta. Sejam as equações de Shoji & Hussmann (2017); Remus *et al.* (2015)

$$\tilde{k}_{2S} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\epsilon} + \frac{2}{3}\beta}{\alpha\tilde{\epsilon} - \beta}, \quad (6.3)$$

$$\alpha = 1 + \frac{5}{2} \left( \frac{\rho_c}{\rho_0} - 1 \right) \left( \frac{R_c}{R_S} \right)^3, \quad (6.4)$$

$$\beta = \frac{3}{5} \left( \frac{R_c}{R_S} \right)^2 (\alpha - 1), \quad (6.5)$$

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\frac{19\tilde{\mu}_c}{2\rho_c g_c R_c} + \frac{\rho_0}{\rho_c} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_c}\right) \left(\beta + \frac{3}{2}\right) + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_c}\right)}{\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right) \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_c}\right)}, \quad (6.6)$$

sendo  $Q = |\tilde{k}_{2S}|/Im[\tilde{k}_{2S}]$ ,  $Im[\tilde{k}_{2S}] = k_{2S}/Q$ , com  $k_2 = \tilde{k}_{2S}$ . Os parâmetros  $g_c$ ,  $R_c$ ,  $\rho_c$  são a aceleração gravitacional na superfície do núcleo, o raio do núcleo e sua densidade.  $\rho_0$  é a densidade do envelope e as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  dependem dos parâmetros físicos do planeta. O complexo da frequência de Maxwell (Remus *et al.* 2012) é dado por

$$\tilde{\mu}_c = \frac{w_f \mu_c \eta_c}{w_f \eta_c + i \mu_c}, \quad (6.7)$$

em que  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\mu_c$  e  $\eta_c$  são a rigidez e viscosidade do núcleo e  $w_f = 2(\Omega - n)$  é a frequência associada à velocidade de rotação do planeta,  $\Omega$ . A Tabela 6.1 apresenta valores para os parâmetros do núcleo e do envelope de Saturno. Os demais parâmetros foram calculados.

**Tabela 6.1** Valores dos parâmetros para o núcleo e envelope de Saturno. A massa da Terra é dada por  $M_\oplus = 5.9736 \times 10^{24}$  kg (Remus et al., 2014; Shoji & Hussmann, 2017).

Parâmetro	Símbolo	Valor
Massa do núcleo de Saturno	$M_c$ (kg)	$18.65M_\oplus$
Raio do núcleo de Saturno	$R_c$ (kg)	$0.219R_S$
Densidade do núcleo de Saturno	$\rho_c$ (kg/m <sup>3</sup> )	1156.3
Densidade do envelope de Saturno	$\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> )	503.587
Taxa de rotação de Saturno	$\Omega$ (rad s <sup>-1</sup> )	$1.64 \times 10^{-4}$

<sup>7</sup> Reologia é a ciência que estuda o fluxo e a deformação da matéria por meio da análise, entre outras, das respostas (na forma de deformações ou tensões) de um material à aplicação de uma tensão ou de uma deformação. A matéria pode estar no estado líquido, sólido ou gasoso.

### 6.1.3 A dissipação no envelope de gás de Saturno

Analizamos a dissipação das marés no envoltório do planeta devido ao mecanismo conhecido como bloqueio de ressonância (RL) proposto por Witte & Savonije (1999, 2001).

Planetas como Júpiter e Saturno apresentam um envelope convectivo, no qual o fluido oscilante gera ondas inerciais (Greenspan *et al.*, 1968). Essas ondas inerciais são consideradas atratores para dissipação de energia das marés (Fuller *et al.* 2016). À medida que a estrutura interna do planeta evolui, um satélite pode ficar preso perto de uma ressonância e migrar. Esse é o mecanismo RL. Para descrever esse mecanismo utilizamos o trabalho de Lainey *et al.* (2020) no qual a razão dissipativa é dada por

$$\frac{k_2}{Q(t)} = \frac{B}{3} \frac{M_S^{\frac{1}{2}} a_0^{\frac{1}{B}}}{G^{\frac{1}{2}} M_P R_S^5 t_0} a(t)^{\left(\frac{13}{2} + \frac{1}{B}\right)}, \quad (6.8)$$

em que  $M_S$  e  $R_S$  são a massa e o raio de Saturno,  $M_P$  é a massa de Prometheus. Os parâmetros  $a_0$  e  $t_0$  são o semieixo maior atual do satélite e a idade do planeta, enquanto  $B$  é uma constante associada ao movimento do gás no envelope do planeta.

### 6.1.4 A dissipação de maré em Prometheus

Para descrever a dissipação de maré no satélite, utilizamos a teoria da fluência, que é semelhante ao modelo de Maxwell em reologia isso devido à viscosidade ser o parâmetro fundamental em ambos (Ferraz-Mello, 2013, 2015). Vale ressaltar que modelamos Prometheus como um satélite homogêneo que está em rotação síncrona com Saturno. Considerando Folonier & Ferraz-Mello (2017) temos

$$\gamma = \frac{3gM_P}{8\pi R_S^2 \eta_P}, \quad (6.9)$$

$$\bar{\epsilon}_P = \frac{15}{4} \frac{M_P}{M_S} \left(\frac{R_P}{a}\right)^3, \quad (6.10)$$

e

$$\dot{a}_{Prometheus} = \frac{42R_S^2 \bar{\epsilon}_P e^2}{5a} \frac{n^2 \gamma}{n^2 + \gamma^2}, \quad (6.11)$$

$$\dot{e}_{Prometheus} = \frac{21R_S^2 \bar{\epsilon}_P e(1-e^2)}{5a^2} \frac{n^2 \gamma}{n^2 + \gamma^2}, \quad (6.12)$$

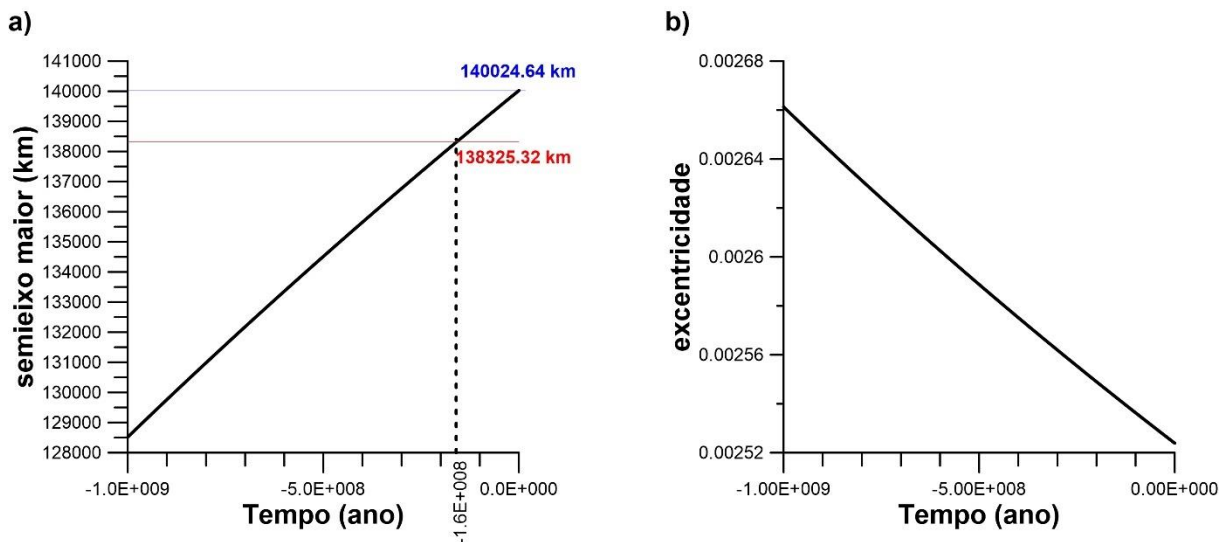
o parâmetro  $\gamma$  é o fator de relaxação e é inversamente proporcional à viscosidade do satélite. Para Prometheus assumimos  $\gamma = 10^{-11} \text{ s}^{-1}$  (ver Tabela 1 de Ferraz-Mello (2013)).

### 6.1.5 A variação temporal para os parâmetros orbitais

A partir das razões entre a Eq. (6.1) e Eq. (6.11) e Eq. (6.2) e Eq. (6.12), concluímos que  $\dot{a}_{Saturno} \gg \dot{a}_{Prometheus}$  e que  $\dot{e}_{Saturno} \ll \dot{e}_{Prometheus}$ . Portanto, a maré no planeta determina a variação temporal do semieixo maior do satélite enquanto a maré no satélite determina a variação de sua excentricidade no tempo.

Rossignoli *et al.* (2019) estimaram a idade para a superfície dos pequenos satélites de Saturno em função do número de crateras. Os autores obtiveram estimativas para a idade de Atlas ( $\tau_{At}$ )  $\sim 4.27 \times 10^9$  ano e Prometheus ( $\tau_{Pro}$ )  $\sim 1 \times 10^9$  ano.

Para construir a Figura 6.1, tomamos as relações dissipativas referentes a cada camada na Eq. (5.1) e integramos junto com a Eq. (5.12) por  $10^9$  anos. Assumimos  $\eta_c = 10^{14}$  Pa s,  $\mu_c = 10^{11}$  Pa,  $\gamma = 10^{-11} s^{-1}$  e  $B = 1/3$ .



**Figura 6.1:** Variação para o (a) semieixo maior de Prometheus e (b) excentricidade de Prometheus, considerando a viscosidade do núcleo de Prometheus  $\eta_c = 10^{14}$  Pa s e o fator de relaxamento  $\gamma = 10^{-11}$  Pa s possibilitando uma lenta variação na excentricidade de Prometheus. Os valores para o semieixo maior atual de Atlas e Prometheus são representados pelas linhas horizontais vermelha e azul respectivamente. Estimamos que Prometheus esteve próximo de Atlas acerca de  $-1.0 \times 10^8$  ano.

### 6.2 A dinâmica de Atlas na evolução por maré de Prometheus

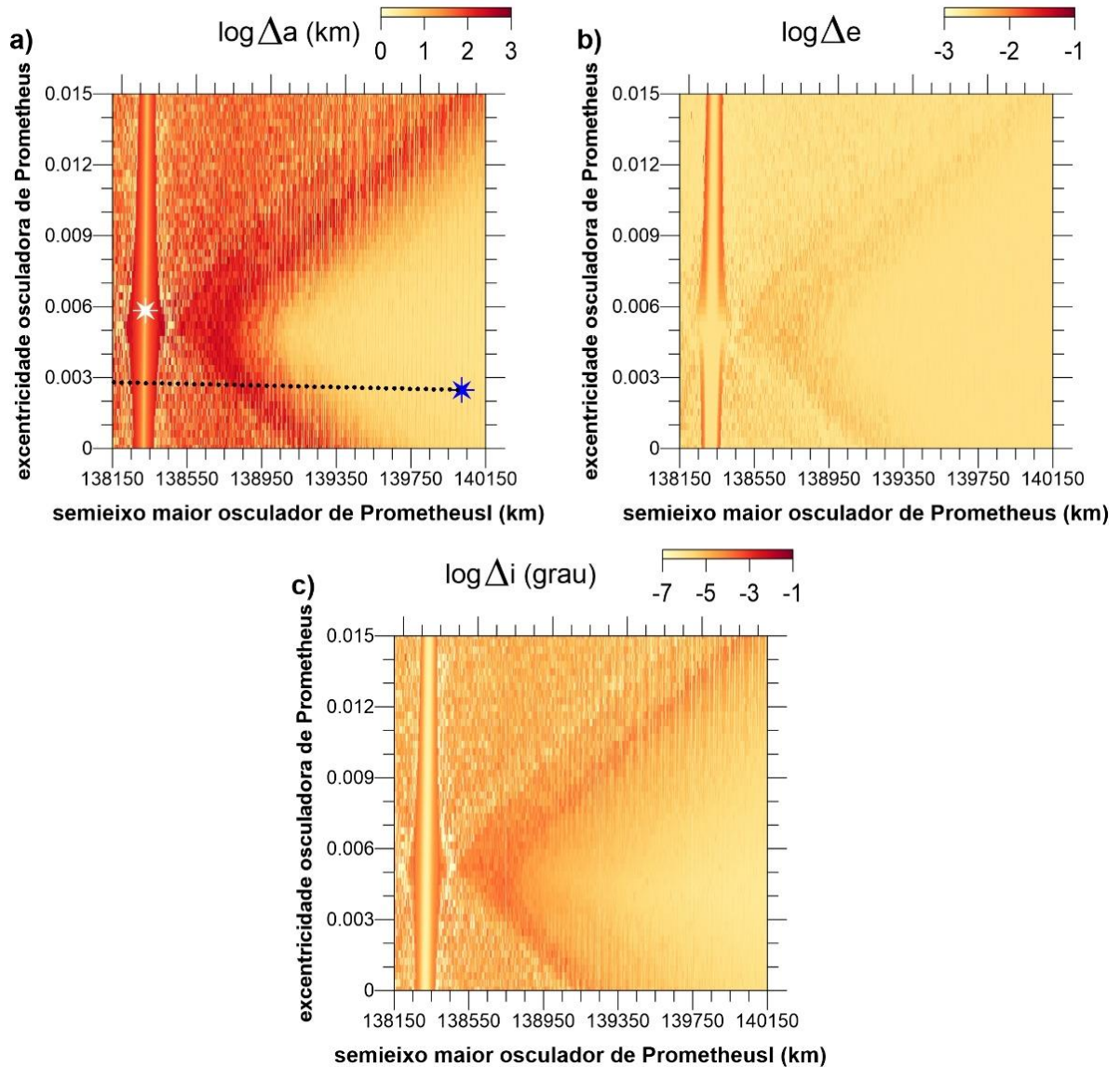
Investigamos a dinâmica de Atlas localizada em sua atual posição durante a expansão por maré da órbita de Prometheus, considerando que os elementos osculadores orbitais semieixo maior e excentricidade de Prometheus variem durante a sua migração, assim mapeamos a vizinhança de Atlas em uma grade para diferentes valores de semieixo maior e excentricidade orbital, visualizando dessa forma o comportamento dinâmico de Atlas em diferentes combinações para  $(a_{Pro}, e_{Pro})$  no passado. Para cada condição inicial, resolvemos

numericamente as equações exatas de movimento usando o pacote MERCURY (Chambers 1999) escolhendo o algoritmo RA 15 (Everhart, 1985) e calculamos o logaritmo das variações máximas para o semieixo maior de Atlas ( $\Delta a$ ), excentricidade de Atlas ( $\Delta e$ ) e inclinação ( $\Delta i$ ) seguindo Guippone *et al.* (2022). Os elementos orbitais iniciais para Atlas são os mesmos da Tabela 2.2. Além disso, os elementos orbitais iniciais para Prometheus, exceto semieixo maior e excentricidade, são considerados na Tabela 2.2.

A Fig. 6.2(a-c) mostra o resultado obtido com esse mapeamento na grade  $(a, e)$ . As estrelas branca e azul representam as posições orbitais atuais de Atlas e Prometheus respectivamente e a linha pontilhada representa a evolução da excentricidade de Prometheus sobre os efeitos da expansão de maré de Saturno.

Vamos agora investigar o comportamento de Atlas correspondendo com a posição orbital de Prometheus em algum momento do passado. Na verdade, para cada posição do clone de Prometheus no plano  $(a, e)$ , o comportamento dinâmico de Atlas é identificado graficamente pela quantidade  $\log \Delta a$  com uma determinada escala de cor, distinguindo assim, o comportamento estável (branco/amarelo) do instável (vermelho). A estabilidade do movimento é claramente relacionada com a ressonância de movimentos médios. Pela Fig. 6.2(a), podemos notar que a faixa entre [138.150 km, 138.250 km] representa a região para o movimento coorbital; para valores de semieixo entre [138.250 km, 138.3880 km], não há ressonâncias; para valores de semieixo maiores que 138.880 km, temos o início das ressonâncias orbitais.

Notamos que a excentricidade e a inclinação orbital de Atlas são perturbadas em menor intensidade (veja as escalas de cor acima das Fig. 6.2(b-c)), mas ambas são perturbadas nas regiões que separam o movimento coorbital com o espaço de fase das demais ressonâncias. A Fig. 6.2(a) revela que o semieixo maior de Atlas é o elemento orbital que mais sofre perturbações com a expansão da partícula Prometheus, sofrendo com variações da ordem de  $10^3$  km, como pode ser observado na escala de cor.



**Figura 6.2:** Mapa dinâmico de clones de Atlas no plano de condições iniciais ( $a, e$ ) de Prometheus. As regiões amarelas/brancas representam regiões de movimento regular, enquanto as regiões com tonalidade avermelhada correspondem ao movimento irregular. A estrela branca representa a órbita de Atlas e a estrela azul representa a órbita de Prometheus atualmente. As barras de cores em cada um dos mapas correspondem ao logaritmo das quantidades  $\Delta a$ ,  $\Delta e$  ou  $\Delta i$ . (a) Mapa para o semieixo maior, (b) excentricidade e (c) inclinação orbital de Atlas. A linha pontilhada representa a expansão por maré para a excentricidade de Prometheus

### 6.2.1 O caso coorbital

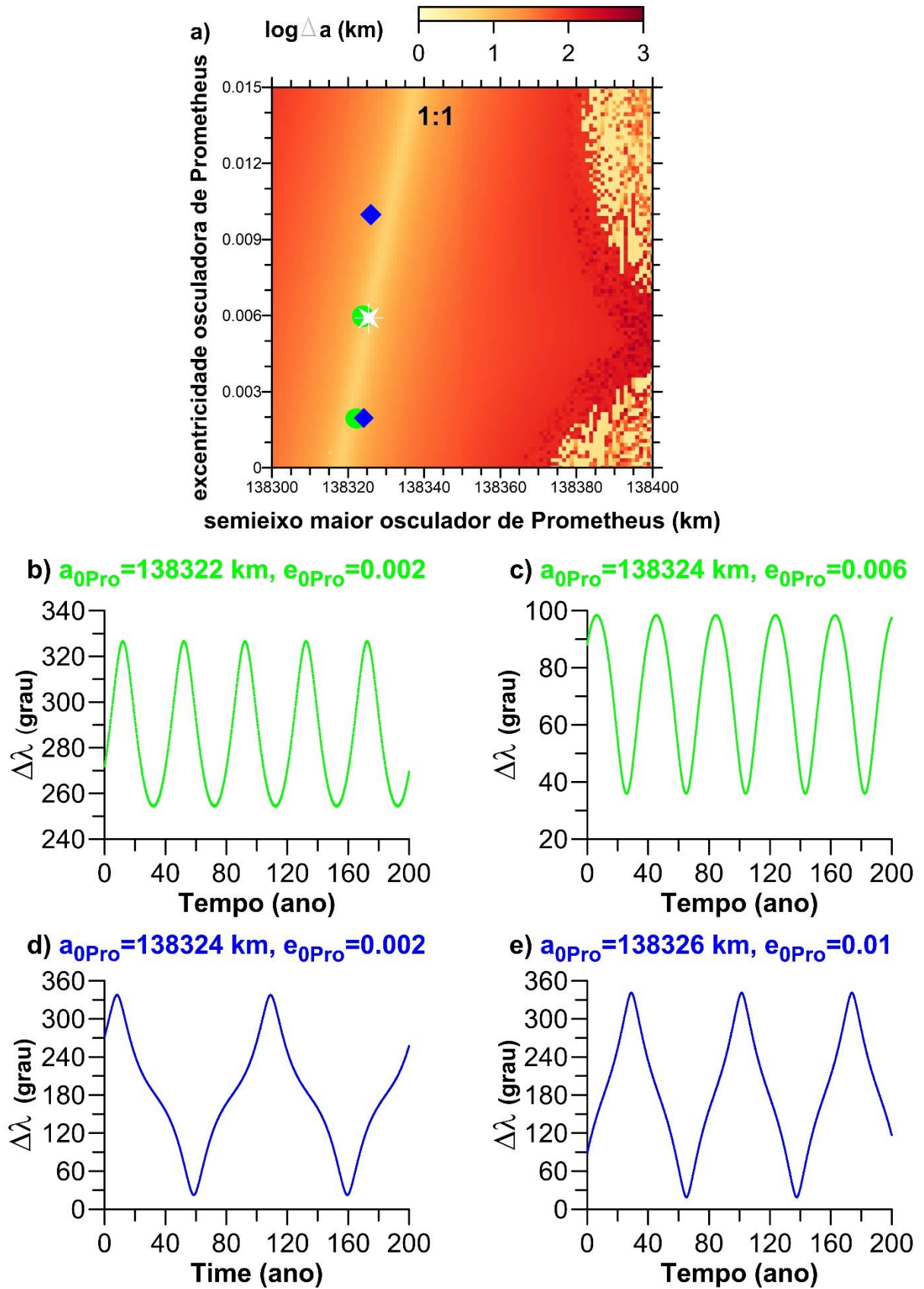
No caso do problema de três corpos, o movimento coorbital, ou ressonância 1:1 de movimentos médios apresenta dois regimes distintos para a libração do argumento ressonante, definido pela diferença entre as longitudes médias ( $\Delta \lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ ). Quando  $\Delta \lambda$  libra ao redor de  $60^\circ$  ou  $300^\circ$ , temos o regime de movimento denominado de “girino” e quando a libração de  $\Delta \lambda$  ocorre ao redor de  $180^\circ$ , com alta amplitude, o regime é conhecido como movimento “ferradura” (Rodríguez *et al.* 2019). No espaço de fase da ressonância 1:1 de movimentos

médios há duas separatrizes para o movimento de libração: uma separa a órbita girino da ferradura e a outra, separa a órbita ferradura da circulação de  $\Delta\lambda$ .

As órbitas girinos são comuns no sistema solar e, em particular, no sistema de satélites de Saturno. Por exemplo, Tethys possui dois pequenos satélites coorbitais, Telesto e Calypso, enquanto Dione possui Helene e Polydeuces. Contrariamente, as órbitas ferraduras são mais raras, somente Janus e Epimetheus são encontrados em um regime mútuo de movimento ferradura (Rodríguez *et al.* 2019). Provavelmente, em algum momento na história, o cenário para o regime de movimento orbital do par Prometheus-Atlas compartilhou a ressonância 1:1 de movimentos médios (Fig. 6.3).

Para uma região entre [138.300 km, 138.400 km] podemos observar o domínio do movimento coorbital entre o par Prometheus-Atlas (Fig. 6.3(a)). Nessa região podemos destacar algumas órbitas individuais e avaliarmos o comportamento temporal para o argumento  $\Delta\lambda$ , relacionado com a ressonância 1:1 de movimentos médios.

As Fig. 6.3(b-c) representam órbitas em regime de movimento girino (círculos verde) com destaque para a libração ao redor de  $300^\circ$  (Fig. 6.3(b)) e  $60^\circ$  (Fig. 6.3(c)) e as Fig. 6.3(d-e) representam as órbitas ferraduras (losango azul), com sua libração ao redor de  $180^\circ$ . Podemos observar que essa região está entre bordas de movimento irregular e que ao redor dessa borda há pequenas regiões que apresentam um baixo valor para  $\log \Delta a$ , provavelmente regiões para órbitas estáveis. Notamos a estreita faixa branca ( $\sim 5$  km) centrada ao redor da posição orbital de Atlas. Para Prometheus próximo a Atlas, (Fig. 6.2(c)), o movimento orbital obedece ao regime girino e para órbitas que estão próximas à borda, região branca, o movimento obedece ao regime ferradura.



**Figura 6.3.** (a) Mapa dinâmico para a variação do semieixo maior de clones de Atlas na região [138300 km,138400 km] Argumentos ressonantes ( $\Delta\lambda$ ) para as órbitas (b-c) girino (círculos verdes) e (d-e) ferradura (losangos azuis). A estrela branca representa a órbita de Atlas. Observamos que a ressonância 1:1 está envolta por regiões de movimento irregular.

### 6.2.2 As vizinhanças próximas à órbita atual de Prometheus

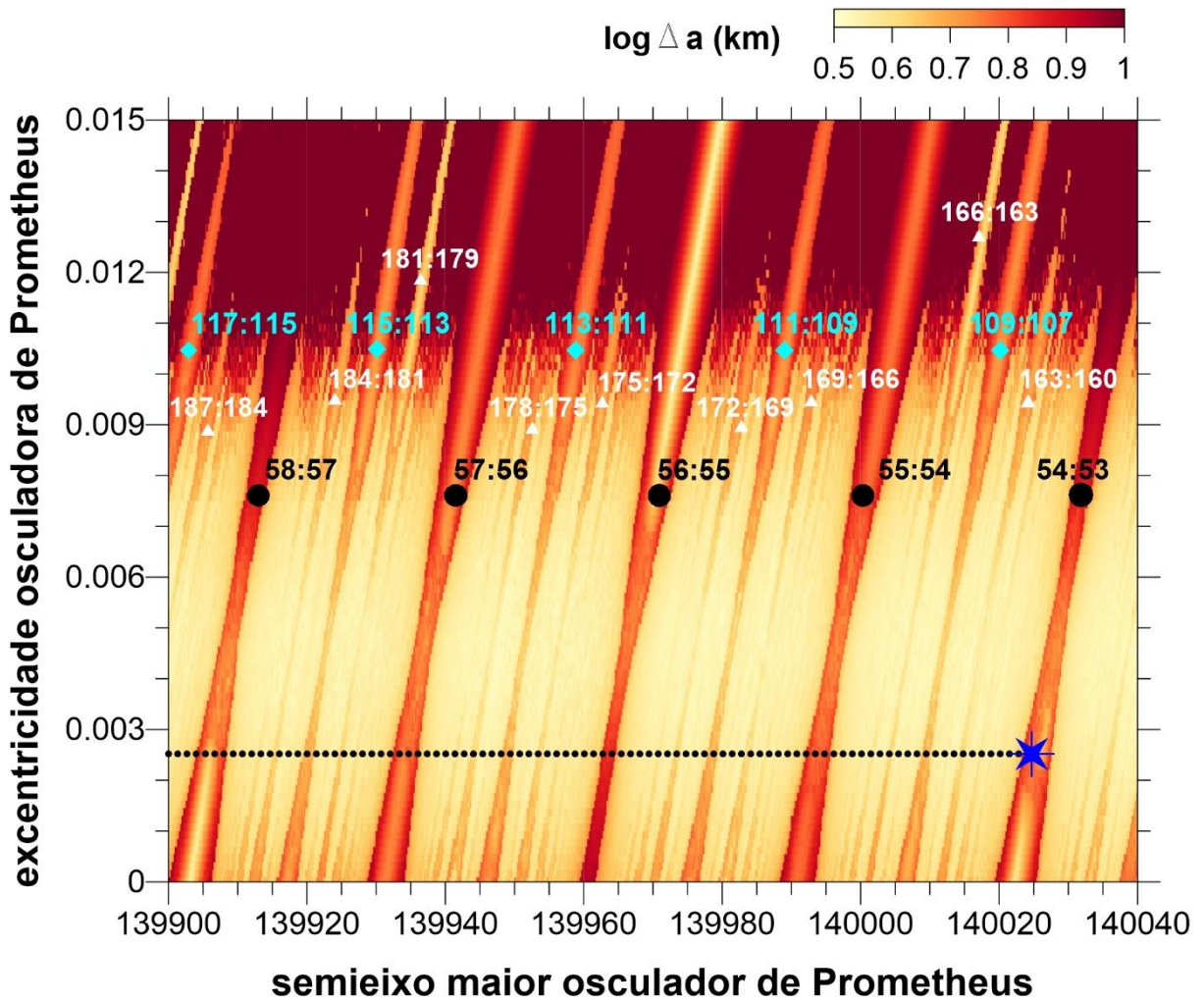
Nessa subseção mapeamos a vizinhança próxima à órbita atual de Prometheus. Para isso, na Fig. 6.2(a) consideramos os valores para semieixo compreendidos entre [139.900 km, 140.040 km] e procuramos identificar as ressonâncias presentes nesse intervalo. O resultado pode ser observado na Fig. 6.4. A estrela azul representa a posição orbital atual de Prometheus e a linha pontilhada a evolução da excentricidade de Prometheus pelo efeito de maré de Saturno. Ao seu redor identificamos ressonâncias de 1ª (círculo preto), 2ª (losango azul) e 3ª (triângulo branco) ordem. Observamos que as ressonâncias apresentam o formato “relógio de areia” e as de primeira ordem se estendem por um pequeno intervalo aproximado de 5 km ao longo do semieixo maior. É interessante notar as estruturas internas a essa ressonância que apresentam um pequeno valor para a quantidade  $\log \Delta a$ . Esse pequeno valor está associado ao movimento regular visto para as órbitas internas nessas regiões.

Para condições iniciais  $(a_{0Pro}, e_{0Pro})$  internas a essas regiões, o argumento  $\phi_1^{m+1:m} = (m+1)\lambda - m\lambda_{At} - \varpi$ , em que  $m$  é um inteiro positivo e as variáveis  $\lambda$ ,  $\lambda_{At}$  e  $\varpi$  representam a longitude média do clone de Prometheus, a longitude média de Atlas e o a longitude do pericentro de Prometheus, respectivamente, apresenta seu comportamento temporal oscilando ao redor de  $180^\circ$ , revelando que as conjunções ocorreram próximas a uma linha que passa pelo apocentro da partícula Prometheus. Em relação às ressonâncias de 2ª ordem, também notamos as estruturas mais claras indicando o domínio dessas ressonâncias nesse espaço de fase. No caso das ressonâncias de 3ª ordem, esse resultado não se aplica a todas, tornando difícil a identificação de seus centros.

El Moutamid *et al.* (2016) fornecem expressões analíticas aproximadas para determinar a probabilidade de captura em ressonâncias de movimentos médios de primeira ordem no cenário onde um satélite em migração está perturbando uma partícula que não está migrando. Seja a largura da ressonância dada por

$$W_{CER} = 8a_0 \sqrt{\left(\frac{3m^2 m_S}{M_C}\right) \left(\frac{a_0}{a_S}\right) 0,8 m e_S}, \quad (6.13)$$

onde  $m_S$ ,  $a_S$ ,  $e_S$  representam a massa, o semieixo maior e a excentricidade do satélite em expansão (nesse caso Prometheus),  $M_C$  representa a massa do corpo central,  $m$  o valor para a ressonância e  $a_0$  é o centro da ressonância cruzada. A probabilidade é dada por  $P = W_{CER}/\pi a_0$  (Eq. (22) de El Moutamid *et al.* 2016).



**Figura 6.4:** Mapeamento da vizinhança de Prometheus, mas considerando as variáveis de  $\Delta a$  em Atlas. As estruturas relacionadas com as ressonâncias assumem o formato “relógio de areia”. Identificamos ressonâncias de 1ª, 2ª e 3ª ordem. A estrela azul representa a posição orbital atual de Prometheus. Outras estruturas relacionadas com ressonâncias de ordem mais elevada podem ser notadas.

A Tabela 6.2 ilustra algumas dessas probabilidades determinadas com a  $e_s = 0.002$  e  $a_0$  estimamos como o valor aproximado para o ponto médio do intervalo na grade que contém cada uma das ressonâncias (Fig. 6.4).

**Tabela 6.2:** Probabilidade de captura de Atlas pela partícula Prometheus em uma dada ressonância.

Ressonância	$a_s$ (km)	$W_{CER}$ (km)	Probabilidade (%)
58:57	139900.00	3.630	0.00084
57:56	139934.00	3.599	0.00083
56:55	139971.00	3.567	0.00082
55:54	139900.00	3.534	0.00081
54:53	140024.65	3.515	0.00080

A verificação dos resultados apresentados na Tabela 6.2 revela que, no caso da órbita do perturbador ser externa (interna) ao corpo perturbado, encontraremos um aumento (diminuição) na probabilidade de captura em função do semieixo maior de Prometheus. O mesmo ocorre com a largura de  $W_{CER}$ , mostrando que quanto maior o domínio de corrotação, maior será a captura de aprisionamento em uma determinada ressonância.

## Capítulo 7

### Conclusões finais

Para o sistema de Saturno, os pequenos satélites sofrem com perturbações seculares e ressonantes provocadas pelos satélites maiores que afetam as variáveis de seus semieixos maiores, suas excentricidades e inclinações orbital, respectivamente. No caso das perturbações ressonantes, o conhecimento da dinâmica orbital para um pequeno satélite é fundamental. Inicialmente reproduzimos resultados previamente obtidos para Aegaeon, Methone e Anthe o que contribuiu para o melhor entendimento desses fenômenos servindo como base para aplicá-los ao satélite Atlas.

Primeiramente, vimos que a excentricidade orbital de Atlas é perturbada por Prometheus com período  $\sim 3$  mil dias e por Pandora com período  $\sim 1$  mil dias. Ambas perturbações contribuem com pequenas amplitudes e o mesmo efeito ocorre com a inclinação orbital. Diferente do observado em Methone e Anthe, cujas excentricidades contém o termo forçado devido à perturbação secular com Mimas, a excentricidade de Atlas não contém o termo forçado devido às perturbações de Prometheus e Pandora.

O mapeamento do espaço de fase, para a ressonância 54:53 de movimentos médios com Prometheus revelou que Atlas se encontra na borda as separatrizes com a ressonância de corotação e que essa localização é responsável pelo comportamento dos argumentos geométricos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , visto em Cooper *et al.* (2015) e Renner *et al.* (2016). Seguindo o mesmo raciocínio, realizamos o mapeamento para a ressonância 70:67 de movimentos médios com Pandora revelando que Atlas também possui sua localização orbital fora dessa ressonância, além de apresentar pequenos valores para o número espectral  $N$ . Os domínios para as ressonâncias 54:53 e 70:67, no espaço das frequências possuem larguras aproximadas de 4 km e 2 km, respectivamente, resultando em uma probabilidade de captura muito pequena.

O comportamento temporal para os quatro argumentos geométricos  $\psi$ 's da ressonância 70:67 é irregular isso ocorre devido a posição orbital de Atlas que está à esquerda do multiplete  $\Psi_1$  e adicionalmente observamos que quando simulamos o comportamento desses argumentos geométricos, sem a presença de Prometheus, passamos a ter uma nova variação temporal, seguindo uma circulação para os quatro argumentos. Esse comportamento sugere que Prometheus contribui com perturbações na ressonância 70:67 de movimentos médios entre Pandora-Atlas.

Mapeando a ressonância 54:53, conseguimos identificar as regiões em que temos o domínio das ressonâncias de corrotação e Lindbald. A região de corrotação está limitada para valores de excentricidade orbital entre  $0.003 < e_0 < 0.006$  e ocupa uma faixa bem estreita no espaço de fase  $\sim 4$  km, dentro do intervalo para o semieixo maior  $138321 \text{ km} < a_0 < 138325 \text{ km}$ . Para as partículas com órbitas internas a essa região, o seu argumento geométrico  $\phi_1 = 54\lambda_{pro} - 53\lambda - \varpi_{pro}$  apresenta a oscilação ao redor de  $180^\circ$ . Fisicamente isso significa que a conjunção entre o par Prometheus-Atlas oscila ao redor de uma linha que passa pelo apocentro de Prometheus.

Para valores de excentricidade iniciais  $e_0 > 0.01$  e com semieixo maior inicial  $a_0 > 13827 \text{ km}$  inicia-se o domínio da ressonância de Lindbald. Para as partículas interiores a essa região, o argumento geométrico  $\phi_2 = 54\lambda_{pro} - 53\lambda - \varpi$  apresenta a sua oscilação ao redor 0.

Nosso mapeamento revelou que ambas as ressonâncias estão separadas por cerca de 2 km e estão relacionadas com os valores para a excentricidade da partícula Atlas, assim como observado por Callegari e Yokoyama (2020).

Expandindo o intervalo para o mapeamento dado por Ceccatto *et al.* (2022), identificamos duas ressonâncias de 1ª ordem, 53:52 à esquerda e a 55:54 à direita da órbita atual de Atlas e, para cada uma dessas novas regiões, identificamos condições iniciais  $(a_0, e_0)$  para clones de Atlas onde há a oscilação dos argumentos relacionados com essas outras ressonâncias.

Uma condição proposta por Renner *et al.* (2016) para que ocorra a libração do argumento geométrico  $\phi_1$  seria de que a excentricidade orbital de Prometheus fosse próxima a zero. A fim de ilustrar esse fato, nosso mapeamento para um clone de Prometheus com excentricidade orbital próximas a zero revelou o aumento na região de corrotação e o estreitamento para a região de Lindbald e para valores de excentricidade próximos aos atuais a região de corrotação é preenchida com as separatrizes dessa ressonância.

A análise combinada entre os IPS para as ressonâncias 54:53 e 70:67 revelou a sobreposição de ambas ressonâncias e, essa sobreposição contribui para o movimento irregular de Atlas observado em Spitale *et al.* (2006). Entretanto, esta sobreposição não altera substancialmente a estabilidade da região na qual Atlas se encontra, mantendo a órbita confinada na região das separatrizes entre as ressonâncias em regiões de baixa excentricidade. A descoberta de que a órbita de Atlas é fracamente caótica (ou caótica confinada) está de acordo com Pereira *et al.* (2024), no qual os autores estimaram, com o uso dos expoentes de Lyapunov,

que apesar da órbita de Atlas ser caótica, ela não apresenta grandes variações radiais, podendo ser considerada estável.

O estudo do passado dinâmico de Atlas revelou que durante a migração de Prometheus pelo efeito de maré, Atlas e Prometheus compartilharam a dinâmica coorbital em seu passado. A análise desse mapeamento revelou condições nas quais teríamos o movimento ferradura ou girino. Continuando nosso estudo na vizinhança orbital de Atlas, identificamos as ressonâncias de 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> ordem, que foram cruzadas no passado, sendo as de 1<sup>a</sup> ordem as mais fortes, com larguras aproximadas de 5 km. As estruturas ressonantes para o sistema Prometheus-Atlas possuem a forma de “relógio de areia”, sendo o centro ocupado pelo domínio da ressonância de corrotação e a parte superior pela a ressonância de Lindblad. Porém, a probabilidade captura para essas ressonâncias de 1<sup>a</sup> ordem são pequenas, da ordem de  $10^{-6}$ .

Os resultados originais apresentados neste trabalho estão no manuscrito Ceccatto *et al.* 2024, submetido para publicação no periódico Planetary and Space Science.

### Referências Bibliográficas

- BROUWER, D. and CLEMENCE, G.M. **Methods of Celestial Mechanics** (Academic Press, New York) (1961).
- CALLEGARI, N., YOKOYAMA, T. Dynamics of Two Satellites in the 2:1 Mean-Motion Resonance: application to the case of Enceladus and Dione. **Celest. Mech. Dyn. Astr.** 98, 5-30 (2007).
- CALLEGARI, N., YOKOYAMA, T. Dynamics of Enceladus and Dione inside the 2/1 Mean-Motion Resonance under tidal dissipation. **Celest. Mech. Dyn. Astr.**, 102, 273-296 (2008).
- CALLEGARI, N., YOKOYAMA, T. Numerical exploration of resonant dynamics in the system of Saturnian inner Satellites. **Planetary and Space Science** 58, 1906-1921 (2010a).
- CALLEGARI, N., YOKOYAMA, T. Long-term dynamics of Methone, Anthe and Pallene. Icy Bodies of the Solar System, **Proceedings of the International Astronomical Union, IAU Symposium**, 263, 161-166 (2010b).
- CALLEGARI, N., YOKOYAMA, T. Dynamics of the 11:10 Corotation and Lindblad Resonances with Mimas, and Application to Anthe, **Icarus**, 348, 113820 (2020).
- CALLEGARI, N., RODRÍGUEZ, A., CECCATTO, D. T. The current orbit of Methone (S/2004 S 1). **Celest. Mech. Dyn. Astr.** 133, 49pp. (2021).
- CALLEGARI, N., RODRÍGUEZ, A. The orbit of Aegaeon and the 7:6 Mimas-Aegaeon resonance. **Celest. Mech. Dyn. Astr.** 135, 21 (2023).
- CECCATTO, D. T., CALLEGARI, N., RODRÍGUEZ, A. The current orbit of Atlas (S XV). **Proceedings of International Astronomical Union, IAU Symposium**, 364, 120-127 (2022).
- CECCATTO, D. T., CALLEGARI, N., GUIMARÃES G., GIMENEZ K. Ressonant Dynamic of Atlas (S XV), submetido no Planetary and Space Science. (2024)
- CHAMBERS, J. E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. **Montly Notices of the Royal Astron. Society** 304, 793-799 (1999).

COLWELL, J.E., NICHOLSON, P.D., TISCARENO, M.S., MURRAY, C.D., FRENCH, R.G., MAROUF, E.A. (2009). **The Structure of Saturn's Rings**. In: Dougherty, M.K., Esposito, L.W., Krimigis, S.M. (eds) *Saturn from Cassini-Huygens*. Springer, Dordrecht.

COOPER N. J.; RENNER S.; MURRAY C. D.; EVANS M. W. Saturn's inner satellites orbits, and the chaotic motion of Atlas from new Cassini imaging observations. **The Astronomical Journal** 149, 27-45, (2015).

DANBY, J. M. A. **Fundamentals of celestial mechanics**. Willmann-Bell, Inc. (1988).

EL MOUTAMID, M.; RENNER, S.; SICARDY, B. Coupling between corotation and Lindblad resonances in the elliptic planar three-body problem. **Celest. Mech. Dyn. Astr.**, 118, 235-252 (2014).

EVERHART, E. An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In: **IAU Colloquium** 83, 185-202 (1985).

FERRAZ-MELLO, S. 2013, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 116, 109

FERRAZ-MELLO, S. 2015, *A&A*, 579, A97

FERRAZ-MELLO, S., RODRÍGUEZ, A., & HUSSMANN, H. 2008, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101, 171

FERRAZ-MELLO, S. Estimation of periods from unequally spaced observations. **The Astronomical Journal**, 36, 619-624 (1981).

FERRAZ-MELLO, S. First-order resonances in satellites orbits. In: S. Ferraz-Mello and W. Sessin (eds) **Resonances in the Motion of the Planets, Satellites and Asteroids**, IAG/USP, São Paulo, 37-52 (1985).

FOLONIER, H. A., & FERRAZ-MELLO, S. 2017, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 129, 359

FULLER, J., LUAN, J., & QUATAERT, E. 2016, in *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts*, Vol. 48, *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #48*, 401.01

GALLARDO, T. Three-dimensional structure of mean motion resonances beyond Neptune. *Celest Mech Dyn Astr* 132, 9 (2020).

GIORGINI, J. D., YEOMANS, D. K., CHAMBERLIN, A. B., CHODAS, P. W., JACOBSON, R. A., KEESEY, M. S., LIESKE, J. H., OSTRO, S. J., STANDISH, E. M., WIMBERLY, R. N. JPL's On-Line Solar System Data Service. **American Astronomical Society**, DPS meeting #28, id.25.04; Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 28, p.1158 (1996).

GREENSPAN, H., BATCHELOR, C., & Iserles, U. 1968, The Theory of Rotating Fluids, Cambridge Monographs on Mechanics (Cambridge University Press). <https://books.google.com.br/books?id=2R47AAAAIAAJ>

[//books.google.com.br/books?id=2R47AAAAIAAJ](https://books.google.com.br/books?id=2R47AAAAIAAJ)

GIUPPONE, C. A., BEAUGÉ, C. MICHTCHENKO, T. A. S. FERRAZ-MELLO, Dynamics of two planets in coorbital motion, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Volume 407, Issue 1, September 2010, Pages 390–398

GIUPPONE, C. A., RODRÍGUEZ, A. MICHTCHENKO, T. A., ALMEIDA, A. A. Past and present of the Circumbinary moons in the Pluto-Charon system. **Astronomy e Astrophysics**, 658, 18 pp. (2022).

GOLDREICH, P., RAPPAPORT, N. Origin of chaos in the Prometheus-Pandora system. **Icarus**, 166, 320-327 (2003).

GOLDREICH, P., RAPPAPORT, N. Chaotic motions of Prometheus and Pandora. **Icarus**, 166, 391-399 (2003).

GREENBERG, R. Apsidal Precession of Orbits about an Oblate Planet. **The Astronomical Journal** 86, 912-914 (1981).

HEDMAN, M. M., MURRAY, C. D., COOPER, N. J., TISCARENO, M. S., BEURLE, K., EVANS, M. W., BURNS, J. A. Three tenous rings/arcs for three tiny moons. **Icarus** 199, 378-386 (2009).

HEDMAN, M. M., COOPER, N. J., MURRAY, C. D., BEURLE, K., EVANS, M. W., TISCARENO, M. S., BURNS, J. A. Aegaeon (Saturn LIII), a G-ring object. **Icarus** 207, 433-447 (2010).

JACOBSON, R. A., SPITALE, J., PORCO C. C., OWEN JR., W. M. The GM values of Mimas and Tethys and the libration of Methone. **The Astronomical Journal** 132, 711-713 (2006a).

JACOBSON, R. A., ANTREASIAN, P. G., BORDI, J. J., CRIDDLE, K. E., IONASESCU, R., JONES, J. B., MACKENZIE, R. A., MEEK, M. C., PARCHER, D., PELLETIER, F. J., OWEN

- JR., W. M., ROTH, D. C., ROUNDHILL, I. M., STAUCH, J. R. The Gravity Field of the Saturnian System from satellite observations and spacecraft tracking data. **The Astronomical Journal** 132, 2520-2526 (2006b).
- JACOBSON, R. A., SPITALE, J., PORCO C. C., BEUELE, K., COOPER, N. J., EVANS, M. W., MURRAY, C. D. Revised orbits of Saturn's inner satellites. **The Astronomical Journal** 135, 261-263 (2008).
- LICHTENBERG A. J., LIEBERMAN M., Regular and Chaotic Dynamics. Springer, 1992, p. 714.
- LAINÉY, V., CASAJUS, L. G., Fuller, J., et al. 2020, Nature Astronomy, 4, 1053
- MARTÍ J. G., CINCOTTA P. M., BEAUGÉ C., Chaotic diffusion in the Gliese-876 planetary system, MNRAS, 2016, vol. 460, p. 1094.
- MICHTCHENKO, T. A., FERRAZ-MELLO, S. Modeling the 5:2 Mean-Motion Resonance in the Jupiter-Saturn Planetary System. **Icarus** 149, 357-374 (2001a).
- MICHTCHENKO, T. A., FERRAZ-MELLO, S. Resonant Structure of the outer solar system in the neighborhood of the planets. **The Astronomical Journal** 122, 474-481 (2001b).
- MICHTCHENKO T. A., NESVORNÝ D., Wavelet analysis of the asteroidal resonant motion, Astronomy and Astrophysics, 1996, vol. 313, p. 674.
- MILANI A., NOBILI A. M., An example of stable chaos in the Solar System, Nature, 1992, vol. 357, p. 569.
- MUNÓZ-GUTIÉRREZ, M. A.; GIULIATTI WINTER, S. Long-term evolution and stability of Saturnian small satellites: Aegaeon, Methone, Anthe and Pallene. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society** 470, 3750-3764 (2017).
- MURRAY, C. D, DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**, Cambridge University Press (1999).
- PEALE, S. J. Origin and Evolution of the Natural Satellites. **Annual Review of Astron. and Astrophys.** 37, 533-602 (1999).

**PEREIRA L. S., MOURÃO D. C., WINTER O. C.**, Confined chaos and the chaotic angular motion of atlas, a Saturn's inner satellite, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, (2024).

PORCO, C. C., BAKER, E., BARBARA, J., BEURLE, K., BRAHIC, A., BURNS, J. A., CHARNOZ, S., COOPER, N., DAWSON, D. D., DEL GENIO, A. D., DENK, T., DONES, L., DYUDINA, U., EVANS, M. W., GIESE, B., GRAZIER, K., HELFENSTEIN, P., INGERSOLL, A. P., JACOBSON, R. A., JOHNSON, T. V., MCEWEN, A., MURRAY, C. D., NEUKUM, G., OWEN, W. M., PERRY, J., ROATSCH, T., SPITALE, J., SQUYRES, S., THOMAS, P., TISCARENO, M., TURTLE, E., VASAVADA, A. R., VEVERKA, J., WAGNER, R., WEST, R.. Cassini Imaging Science: Initial Results on Saturn's Rings and Small Satellites. *Science* 307 1226-1236 (2005).

PORCO, C. C. S/2004 S 1 and S/2004 S 2. *IAU Circ.* 8401 (2004 August 16) (2004).

PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., B. P. FLANNERY. **Numerical Recipes in Fortran 77**. Cambridge University Press (1996).

RENNER, S., SICARDY, B. Use of the Geometric Elements in Numerical Simulations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 94, 237-248 (2006).

RENNER S.; COOPER J, N.; EL MOUTMAID M.; SICARDY B.; VIENNE A.; MORRAY C. D.; SARLENFEST M. Origin of the chaotic motion of the Saturnian satellite Atlas. *The Astronomical Journal*, 151, 9pp. (2016).

REMUS, F., MATHIS, S., ZAHN, J. P., & LAINEY, V. 2012, *A&A*, 541, A165, doi: 10.1051/0004-6361/201118595

REMUS, F., MATHIS, S., ZAHN, J.-P., & LAINEY, V. 2014, in -, Vol. 293, Formation, Detection, and Characterization of Extrasolar Habitable Planets, ed. N. Haghighipour, 362–368, doi: 10.1017/S1743921313013161

REMUS, F., MATHIS, S., ZAHN, J. P., & LAINEY, V. 2015, *AAP*, 573, A23, doi: 10.1051/0004-6361/201424472

RODRÍGUEZ A., CORREA-OTTO J. A., MICHTCHENKO T. A. Primordial migration of coorbital satellites as a mechanism for the horseshoe orbit of Janus–Epimetheus, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 487, Issue 2, August 2019, Pages 1973–1979

RODRÍGUEZ, A., CALLEGARI, N. Dynamical stability in the vicinity of Saturnian small moons. The cases of Aegaeon, Methone, Anthe and Pallene. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society** 506, 5093-5107 (2021).

ROSSIGNOLI N. L., Di SISTO R. P., ZANARDI M., DUGARO A. Cratering and age of the small Saturnian satellites, *A&A*, 627, A12, 2019.

SHOJI, D., & HUSSMANN, H. 2017, *AAP*, 599, L10

SIQUEIRA, P. B. Adaptação do integrador Rebound para o estudo de anéis planetários. 116 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2019.

SPITALE, J. N., JACOBSON, R. A., PORCO, C. C., OWEN, JR, W. M. The Orbits of Saturn's Small Satellites Derived from Combined Historic and Cassini Imaging Observations. **The Astronomical Journal** 132, 792-810 (2006).

THOMAS, P.C., BURNS, J.A., HEDMAN, M., HELFENSTEIN, P., MORRISON, S., TISCARENO, M.S., VEVERKA, J. The inner small satellites of Saturn: a variety of worlds. **Icarus** 226, 999–1019 (2013).

THOMAS, P. C., HELFENSTEIN, P. The small inner satellites of Saturn: Shapes, structures and some implications. **Icarus** 344, 113355 (2020).

WITTE, M. G., & SAVONIJE, G. J. 1999, *A&A*, 350, 129. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9909073>

WITTE, M. G., & SAVONIJE, G. J. 2001, *A&A*, 366, 840.

## Apêndice A

### A.1 As ressonâncias orbitais entre os satélites naturais de Saturno

Mesmo antes das descobertas realizadas pela sonda *Cassini*, o sistema de Saturno era conhecido por fornecer uma variedade de exemplos em estruturas ressonantes. Os pares de satélites Mimas-Tethys, Enceladus-Dione e Titan-Hyperion mostraram como a comensurabilidade (ressonância) entre os seus períodos orbitais podem vir a realçar os efeitos gravitacionais mútuos (Peale 1999).

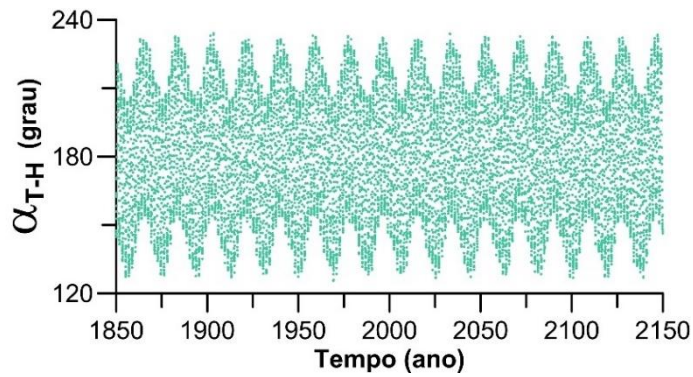
Neste apêndice, apresentamos a variação temporal para o argumento crítico associado a cada uma dessas ressonâncias. As condições iniciais para cada um dos satélites foram obtidas do sistema efemérides e podem ser vistas na Tabela A.1.

**Tabela A1.** Vetores de estado (UA/dia) relativos à época 01 de janeiro de 1850, obtidos por meio da efemérides, utilizamos um intervalo de 10 dias. Acesso em 20 de março de 2022.

Satélite	$x \times 10^{-4}$	$y \times 10^{-3}$	$z \times 10^{-5}$	$v_x \times 10^{-3}$	$v_y \times 10^{-3}$	$v_z \times 10^{-5}$
Mimas	5,9909	-1,0849	3,3978	7,1621	4,1384	71,548
Enceladus	-2,599	-1,5728	148,507	7,1904	-1,1569	-111,718
Tethys	5,0575	1,9039	2,6052	-6,3342	1,6841	-8,9745
Dione	0,1887	-1,6684	12,52	3,8486	4,3406	-11,3307
Titan	0,51254	6,2808	-4,3332	-2,5686	1,9787	-2,3196
Hyperion	58,554	-9,2577	19,671	2,3044	1,2582	1,5489

### A.2 Titan-Hyperion

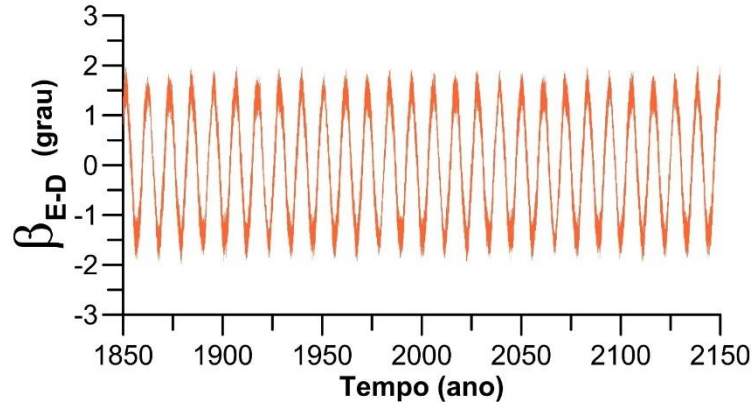
O argumento para essa ressonância é dado por  $\alpha_{T-H} = 4\lambda_H - 3\lambda_T - \varpi_H$  (Fig. A1) e as conjunções entre esses dois satélites ocorrem no apocentro de Hyperion com período aproximado de 2 anos e uma amplitude aproximada de  $36^\circ$ , (Callegari e Yokoyama 2010).



**Figura A.1:** (a) Regressão de  $\sim 20^\circ$  no pericentro de Hyperion; (b) Argumento para a ressonância 4:3 entre Titan-Hyperion. Nota-se a libração ao redor de  $180^\circ$ .

### A.3 Enceladus-Dione

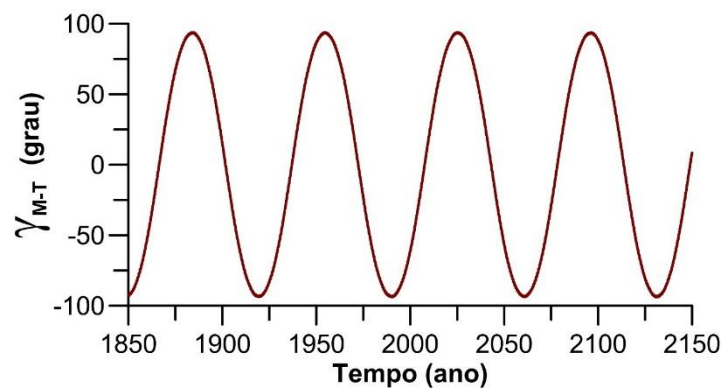
A ressonância entre Enceladus e Dione pode ser representada pela variação temporal do argumento ressonante dado por  $\beta_{D-E} = 2\lambda_D - \lambda_E - \varpi_E$  (Fig. A2) e a libração ocorre sobre o pericentro de Enceladus, com período de 11,2 anos e amplitude muito pequena (Callegari e Yokoyama, 2010).



**Figura A.2:** Representação para libração do argumento relacionado à ressonância 2:1 Enceladus-Dione.

### A.4 Mimas-Tethys

O argumento para essa ressonância é dado por  $\gamma_{M-T} = 4\lambda_T - 2\lambda_M - \Omega_T - \Omega_M$  (Fig. A3). Essa é uma ressonância vertical análoga à uma ressonância interna de Lindblad sobre Mimas e de uma ressonância externa de Lindblad sobre Tethys. Este tipo de ressonância é denominado de ressonância do tipo inclinação, sendo o único exemplo conhecido entre os satélites de Saturno.



**Figura A.3:** A ressonância Mimas-Tethys atua nos pequenos satélites Methone (Callegari, Rodríguez e Ceccatto 2021). Aqui podemos ver a estabilidade para o argumento relacionado a essa ressonância.

## Apêndice B

### B.1 A Perturbação Secular Para Dois Corpos

Consideramos dois planetas de massas  $m_1$  e  $m_2$  orbitando um planeta central de massa  $m_c$ , na qual  $m_1 \ll m_c$  e  $m_2 \ll m_c$  e os satélites 1 e 2 sejam o interno e o externo, respectivamente. Sejam  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  as funções perturbadoras que descrevem as perturbações nas órbitas de  $m_1$  e  $m_2$ , em termos dos elementos orbitais, respectivamente. As perturbações para estes elementos são dadas pelas equações de Lagrange

$$\frac{da_j}{dt} = \frac{2}{n_j a_j} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \epsilon_j}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{de_j}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e_j^2}}{na_j^2 e_j} \left[ \left( 1 - \sqrt{1-e_j^2} \right) \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \epsilon_j} - \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \varpi_j} \right], \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d\epsilon_i}{dt} = \frac{2}{n_j a_j} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial a_j} - \frac{\sqrt{1-e_j^2} (1 - \sqrt{1-e_j^2})}{n_j a_j^2 e_j} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial e_j} + \frac{\tan \frac{1}{2} I_j}{n_i a_i^2 \sqrt{1-e_j^2}} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \varpi_j}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{d\Omega_j}{dt} = \frac{1}{ja_j^2 \sqrt{1-e_j^2} \sin I_i} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial I_j}, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d\varpi_j}{dt} = \frac{\sqrt{1-e_j^2}}{na_j^2 e_j} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial e_j}, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{dI_j}{dt} = -\frac{\tan \frac{1}{2} I_i}{n_j a_j^2 \sqrt{1-e_j^2}} \left( \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \epsilon_j} + \frac{\partial j}{\partial \varpi_j} \right) - \frac{1}{n_j a_j^2 \sqrt{1-e_j^2} \sin I_j} \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial \Omega_j}. \quad (\text{B.6})$$

nas quais o subíndice  $j$  refere-se ao planeta ( $j = 1$  ou  $2$ , respectivamente) e introduzimos uma nova variável angular  $\epsilon$ , denominada *longitude média na época*, que representa a longitude média para o  $j$ -ésimo planeta no momento exato em que o tempo é determinado. Se escrevermos a longitude média,  $\lambda_j = M_j + \varpi_j = n_j(t - \tau_j) + \varpi_j = n_j t - n_j \tau_j + \varpi_j$ , temos então que  $\epsilon_j = \varpi_j - n_i \tau_j$ .

Os termos seculares serão obtidos ao isolar na função perturbadora os termos que são independentes da longitude média. Para a expansão em segunda ordem na excentricidade e inclinação e, em primeira ordem para a massa, somente os termos na expansão da função perturbadora que não contém a longitude média são considerados. Logo a parte direta para função perturbadora secular será

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D^{\text{sec}} = & \frac{1}{8} [2\alpha_{12}D + \alpha_{12}^2 D^2] b_{1/2}^{(0)} (e_1^2 + e_2^2) - \frac{1}{2} \alpha_{12} b_{1/2}^{(0)} (s_1^2 + s_2^2) + \frac{1}{4} [2 + 2\alpha_{12}D - \\ & - \alpha_{12}^2 D^2] b_{1/2}^{(1)} e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) + \alpha_{12} b_{3/2}^{(1)} s_1 s_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde, os índices 1 e 2 referem-se aos corpos interno e externo, respectivamente e a razão  $\alpha_{12} = a_1/a_2$ , com  $a_1 < a_2$ .

Podemos obter as funções perturbadoras para  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ , a partir de (B.7). Considerando que  $\mathcal{R}_1$  ocorre devido a perturbação externa causada por  $m_2$  e que  $\mathcal{R}_2$  é causada pela perturbação interna de  $m_1$ , assim temos

$$\mathcal{R}_1 = G \frac{m_2}{a_2} \mathcal{R}_D^{\text{sec}} = G \frac{m_2 a_1}{a_2 a_1} \mathcal{R}_D^{\text{sec}} = G \frac{m_2}{a_1} \alpha_{12} \mathcal{R}_D^{\text{sec}}, \quad (\text{B.8})$$

$$\mathcal{R}_2 = G \frac{m_1}{a_1} \alpha_{12} \mathcal{R}_D^{\text{sec}} = G \frac{m_1 a_1}{a_2 a_2} \mathcal{R}_D^{\text{sec}} = G \frac{m_1}{a_2} \mathcal{R}_D^{\text{sec}}. \quad (\text{B.9})$$

Usando a relação entre os coeficientes de Laplace e suas derivadas (Murray e Dermott 1999),

$$2\alpha \frac{db_{1/2}^{(0)}}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^2} = \alpha b_{3/2}^{(1)}, \quad (\text{B.10})$$

$$2b_{1/2}^{(1)} - 2\alpha \frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^2} = -\alpha b_{3/2}^{(2)}. \quad (\text{B.11})$$

podemos reescrever (B.7) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D^{\text{sec}} = & \frac{1}{8} \alpha_{12} b_{3/2}^{(1)} (e_1^2 + e_2^2) - \frac{1}{2} \alpha_{12} b_{3/2}^{(1)} (s_1^2 + s_2^2) - \frac{1}{4} b_{3/2}^{(2)} e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) + \\ & + \alpha_{12} b_{3/2}^{(1)} s_1 s_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Substituindo (B.12) em (B.8) e (B.9) e usando as aproximações  $G(m_c + m_1) = n_1^2 a_1^3$  e  $G(m_c + m_2) = n_2^2 a_2^3$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 = & n_1^2 a_1^2 \frac{m_2}{m_c + m_1} \alpha_{12} \left[ \frac{1}{8} \alpha_{12} b_{3/2}^{(1)} e_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_{12} b_{3/2}^{(1)} I_1^2 - \frac{1}{4} b_{3/2}^{(2)} e_1 e_2 \cos(\varpi_1 + \varpi_2) + \right. \\ & \left. \alpha_{12} b_{3/2}^{(1)} I_1 I_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 = & \frac{n_2^2 a_2^3}{m_c + m_2} \frac{m_1}{a_2} \alpha_{12} \left[ \frac{1}{8} \alpha_{12} b_{3/2}^{(1)} e_2^2 - \frac{1}{2} \alpha_{12} b_{3/2}^{(1)} I_2^2 - \frac{1}{4} b_{3/2}^{(2)} e_1 e_2 \cos(\varpi_1 + \varpi_2) + \right. \\ & \left. \alpha_{12} b_{3/2}^{(1)} I_1 I_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

supondo que as aproximações  $s_1 = \sin \frac{1}{2} I_1 \approx \frac{1}{2} I_1$  e  $s_2 = \sin \frac{1}{2} I_2 \approx \frac{1}{2} I_2$  são válidas para  $\sin I_1, \sin I_2 \ll 1$ .

Logo, as equações de  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  podem ser generalizadas da seguinte forma

$$\mathcal{R}_j = n_j \alpha_j^2 \left[ \frac{1}{2} A_{jj} e_j^2 + A_{jk} e_j e_k \cos(\varpi_j - \varpi_k) + \frac{1}{2} B_{jj} I_j^2 + B_{jk} I_j I_k \cos(\Omega_j - \Omega_k) \right], \quad (\text{B.15})$$

onde,  $j = 1, 2, k = 2, 1, j \neq k$  e os coeficientes

$$A_{jj} = \frac{1}{4} n_j \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{jk} \bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{jk}), \quad (\text{B.16})$$

$$A_{jk} = -\frac{1}{4} n_j \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{jk} \bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{jk}), \quad (\text{B.17})$$

$$B_{jj} = -\frac{1}{4} n_j \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{jk} \bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{jk}), \quad (\text{B.18})$$

$$B_{jk} = \frac{1}{4} n_j \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{jk} \bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{jk}), \quad (\text{B.19})$$

sendo que,  $\bar{\alpha}_{jk} = \alpha_{jk}$ , se  $j = 1$  (perturbação interna) e  $\bar{\alpha}_{jk} = 1$ , se  $j = 2$  (perturbação externa).

Em (B.15) os termos que contém  $e_j^2$  e  $I_j^2$  são denominados termos seculares e, os termos que contém  $\cos(\varpi_j - \varpi_k)$  e  $\cos(\Omega_j - \Omega_k)$  são ditos de longo período.

Desde que  $\alpha_{12} < 1$ , podemos utilizar a definição integral dos coeficientes de Laplace

$$b_{3/2}^{(1)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\psi)}{(1 - 2\alpha \cos(\psi) + \alpha^2)^{3/2}} d\psi, \quad (\text{B.20})$$

$$b_{3/2}^{(2)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\psi)}{(1 - 2\alpha \cos(\psi) + \alpha^2)^{3/2}} d\psi. \quad (\text{B.21})$$

Os coeficientes  $A_{jj}$ ,  $A_{jk}$ ,  $B_{jj}$  e  $B_{jk}$  podem ser definidos como elementos constantes de duas matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.22})$$

Observamos que, os elementos dessas matrizes são funções das massas,  $m_1$  e  $m_2$ , e dos semieixos maiores,  $a_1$  e  $a_2$ , e que as linhas ou colunas de  $\mathbf{B}$  não são linearmente independentes, pois  $B_{11} = -B_{12}$  e  $B_{21} = -B_{22}$ .

Considerando os termos de ordem mais baixa para a excentricidade e inclinação (Murray e Dermott, 1999), escrevemos, a partir das equações de Lagrange, as variações temporais para os elementos orbitais da seguinte maneira

$$\dot{e}_j = -\frac{1}{n_j a_j^2 e_j} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \varpi_j}, \quad \dot{\varpi}_j = \frac{1}{n_j a_j^2 e_j} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial e_j}. \quad (\text{B.23})$$

$$\dot{I}_j = -\frac{1}{n_j a_j^2 I_j} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \Omega_j}, \quad \dot{\Omega}_j = \frac{1}{n_j a_j^2 I_j} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial I_j}. \quad (\text{B.24})$$

Mas, vemos que, para valores muito pequenos de  $e_j$  e  $I_j$ , as derivadas acima possuem pontos de singularidade, porém, se definirmos as componentes horizontais e verticais para a excentricidade e inclinação (Murray e Dermott, 1999), temos

$$\begin{aligned} h_j &= e_j \sin(\varpi_j), & k_j &= e_j \cos(\varpi_j), \\ p_j &= \sin(I_j) \sin(\Omega_j) \approx I_j \sin(\Omega_j), & q_j &= \sin(I_j) \cos(\Omega_j) \approx I_j \cos(\Omega_j). \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Estas variáveis possuem a vantagem de remover eventuais singularidades que podem vir a ocorrer em (B.23) e (B.24). Assim, podemos reescrever a equação (3.15) em termos de  $h_j$ ,  $k_j$ ,  $p_j$  e  $q_j$

$$\mathcal{R}_j = n_j \alpha_j^2 \left[ \frac{1}{2} A_{jj} (h_j^2 + k_j^2) + A_{jk} (h_j h_k + k_j k_k) + \frac{1}{2} B_{jj} (p_j^2 + q_j^2) + B_{jk} (p_j p_k + q_j q_k) \right]. \quad (\text{B.27})$$

De fato, considerando (B.26) vemos que

$$h_j^2 + k_j^2 = e_j^2 (\sin^2(\varpi_j) + \cos^2(\varpi_j)) = e_j^2,$$

$$h_j \cdot h_k + k_j \cdot k_k = e_j e_k (\cos(\varpi_j) \cos(\varpi_k) + \sin(\varpi_j) \sin(\varpi_k)) = e_j e_k \cos(\varpi_j - \varpi_k),$$

$$p_j^2 + q_j^2 = I_j^2 (\sin^2(\Omega_j) + \cos^2(\Omega_j)) = I_j^2,$$

$$p_j \cdot p_k + q_j \cdot q_k = I_j I_k (\cos(\Omega_j) \cos(\Omega_k) + \sin(\Omega_j) \sin(\Omega_k)) = I_j I_k \cos(\Omega_j - \Omega_k).$$

Note que o índice  $k$  denota o corpo interno (1) ou o externo (2), porém esta escolha não pode ser confundida com o uso da componente  $k$  para o vetor excentricidade.

Como as componentes  $h_j$  e  $k_j$  são funções de  $e_j$  e  $\varpi_j$  e as componentes  $p_j$  e  $q_j$  são funções de  $I_j$  e  $\Omega_j$ , as derivadas em relação ao tempo são obtidas da seguinte maneira

$$\dot{h}_j = \frac{\partial h_j}{\partial e_j} \dot{e}_j + \frac{\partial h_j}{\partial \varpi_j} \dot{\varpi}_j, \quad \dot{k}_j = \frac{\partial k_j}{\partial e_j} \dot{e}_j + \frac{\partial k_j}{\partial \varpi_j} \dot{\varpi}_j, \quad (\text{B.28})$$

$$\dot{p}_j = \frac{\partial p_j}{\partial I_j} \dot{I}_j + \frac{\partial p_j}{\partial \Omega_j} \dot{\Omega}_j, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial I_j} \dot{I}_j + \frac{\partial q_j}{\partial \Omega_j} \dot{\Omega}_j. \quad (\text{B.29})$$

Mas, para as derivadas parciais das componentes da excentricidade e inclinação temos as seguintes relações

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_j}{\partial e_j} &= \sin(\varpi_j) = \frac{h_j}{e_j}, & \frac{\partial k_j}{\partial e_j} &= \cos(\varpi_j) = \frac{k_j}{e_j}, \\ \frac{\partial h_j}{\partial \varpi_j} &= k_j, & \frac{\partial k_j}{\partial \varpi_j} &= -h_j,\end{aligned}\tag{B.30}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_j}{\partial I_j} &= \sin(\Omega_j) = \frac{p_j}{I_j}, & \frac{\partial q_j}{\partial I_j} &= \cos(\Omega_j) = \frac{q_j}{I_j}, \\ \frac{\partial p_j}{\partial \Omega_j} &= q_j, & \frac{\partial q_j}{\partial \Omega_j} &= -p_j.\end{aligned}\tag{B.31}$$

Substituindo as equações (B.23), (B.24), (B.30) e (B.31) em (B.29) e (B.30) temos que

$$\begin{aligned}\dot{h}_j &= \frac{1}{n_j a_j^2 e_j} \left( k_j \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial e_j} - \frac{h_j}{e_j} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \varpi_j} \right), \\ \dot{k}_j &= -\frac{1}{n_j a_j^2 e_j} \left( h_j \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial e_j} + \frac{k_j}{e_j} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \varpi_j} \right),\end{aligned}\tag{B.32}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_j &= \frac{1}{n_j a_j^2 I_j} \left( q_i \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial I_j} - \frac{p_i}{I_j} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \Omega_j} \right), \\ \dot{q}_j &= -\frac{1}{n_j a_j^2 I_j} \left( p_i \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial I_j} + \frac{q_i}{I_j} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \Omega_j} \right).\end{aligned}\tag{B.33}$$

Obtendo as derivadas parciais de  $\mathcal{R}_j$  dada por (B.15)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial e_j} &= n_j a_j^2 [A_{jj} e_j + A_{jk} e_k \cos(\varpi_j - \varpi_k)], \\ \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \varpi_j} &= -n_j a_j^2 [A_{jk} e_j e_k \sin(\varpi_j - \varpi_k)],\end{aligned}\tag{B.34}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial I_j} &= n_j a_j^2 [B_{jj} e_j + B_{jk} I_k \cos(\Omega_j - \Omega_k)], \\ \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \Omega_j} &= -n_j a_j^2 [B_{jk} I_k \sin(\Omega_j - \Omega_k)].\end{aligned}\tag{B.35}$$

Derivando parcialmente a equação (B.27) só que desta vez, em relação as variáveis  $h_j$ ,  $k_j$ ,  $p_j$  e  $q_j$  temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial h_j} &= n_j a_j^2 [A_{jj} h_j + A_{jk} h_k], \\ \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial k_j} &= n_j a_j^2 [A_{jj} k_j + A_{jk} k_k],\end{aligned}\tag{B.36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial p_j} &= n_j a_j^2 [B_{jj} p_j + B_{jk} p_k], \\ \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial \Omega_j} &= n_j a_j^2 [B_{jj} q_j + B_{jk} q_k].\end{aligned}\tag{B.37}$$

Substituindo as equações (B.34) e (B.36) em (B.32) e as equações (B.35) e (B.37) em (B.33), realizando as devidas simplificações teremos as relações

$$\dot{h}_j = [A_{jj} k_j + A_{jk} k_k], \quad \dot{k}_j = -[A_{jj} h_j + A_{jk} h_k],\tag{B.38}$$

$$\dot{p}_j = [B_{jj} q_j + B_{jk} q_k], \quad \dot{q}_j = -[B_{jj} p_j + B_{jk} p_k].\tag{B.39}$$

Assim, as equações para as variações temporais de  $h_j$ ,  $k_j$ ,  $p_j$  e  $q_j$  se tornam

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= A_{11} k_1 + A_{12} k_2, & \dot{k}_1 &= -A_{11} h_1 - A_{12} h_2, \\ \dot{h}_2 &= A_{21} k_1 + A_{22} k_2, & \dot{k}_2 &= -A_{21} h_1 - A_{22} h_2,\end{aligned}\tag{B.40}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= B_{11} q_1 + B_{12} q_2, & \dot{q}_1 &= -B_{11} p_1 - B_{12} p_2, \\ \dot{p}_2 &= B_{21} q_1 + B_{22} q_2, & \dot{q}_2 &= -B_{21} p_1 - B_{22} p_2.\end{aligned}\tag{B.41}$$

Portanto, para a ordem mais baixa, as equações (B.40) estão desacopladas com (B.41), além disso, essas são equações diferenciais lineares, encontramos assim, uma solução analítica como desejado e o problema se reduziu a encontrar 2 autovalores para cada conjunto de equações, cuja as soluções são

$$h_j = \sum_{i=1}^2 e_{ij} \sin(g_i t + \beta_i), \quad k_j = \sum_{i=1}^2 e_{ij} \cos(g_i t + \beta_i),\tag{B.42}$$

$$p_j = \sum_{i=1}^2 I_{ij} \sin(f_i t + \gamma_i), \quad q_j = \sum_{i=1}^2 I_{ij} \cos(f_i t + \gamma_i),\tag{B.43}$$

sendo as frequências  $g_i$  ( $i = 1, 2$ ) dois autovalores para a matriz  $\mathbf{A}$ , com  $e_{ij}$  a componente dos autovetores e  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) os autovalores para a matriz  $\mathbf{B}$ , com  $I_{ij}$  a componente dos autovetores. As fases  $\beta_i$  e  $\gamma_i$  são as amplitudes dos autovetores e são determinadas pelas condições de contorno.

A solução descrita pelas equações (B.40) e (B.41) é conhecida como a *solução secular clássica de Laplace-Lagrange*.

## B.2 Perturbações Seculares Generalizadas

Iremos considerar um caso mais geral da teoria secular aplicada a órbita de  $N$ -corpos que estão orbitando uma massa central não esférica, ou seja, podemos considerar os efeitos provocados pela não esfericidade da massa central no potencial perturbado de uma massa  $m_j$

pela adição dos harmônicos gravitacionais,  $J_2$  e  $J_4$  (Murray e Dermott, 1999) e esta, será a metodologia utilizada em nossas análises.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_j^{oblato} \rangle &= \frac{1}{2} n_j^2 a_j^2 \left[ \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_c}{a_j} \right)^2 - \frac{9}{8} J_2^2 \left( \frac{R_c}{a_j} \right)^4 - \frac{15}{4} J_4 \left( \frac{R_c}{a_j} \right)^4 \right] e_j^2 - \\ &- \frac{1}{2} n_j a_j^2 n_j \left[ \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_c}{a_j} \right)^2 - \frac{27}{8} J_2^2 \left( \frac{R_c}{a_j} \right)^4 - \frac{15}{4} J_4 \left( \frac{R_c}{a_j} \right)^4 \right] I_j^2. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

As massas ao redor do corpo central irão experimentar a perturbação secular provocada pela presença dos demais corpos.

Consideramos o efeito secular que a massa  $m_k$  provoca na massa  $m_j$ . Escrevendo a parte direta da função perturbadora, (B.12)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_D(\alpha_{jk}) \rangle &= \frac{1}{8} \alpha_{jk} b_{3/2}^{(1)} e_j^2 - \frac{1}{4} \alpha_{jk} b_{3/2}^{(2)} e_j e_k \cos(\varpi_j - \varpi_k) - \frac{1}{8} \alpha_{jk} b_{3/2}^{(1)} I_j^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \alpha_{jk} b_{3/2}^{(1)} I_j I_k \cos(\Omega_j - \Omega_k), \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

onde  $\alpha_{jk}$  é a razão entre os semieixos maiores,  $a_j$  e  $a_k$ , dos corpos.

Para uma perturbação externa,  $a_j < a_k$  temos

$$\langle \mathcal{R}_j^{sec} \rangle = G \frac{m_k}{a_k} \langle \mathcal{R}_D \left( \frac{a_j}{a_k} \right) \rangle, \quad (\text{B.46})$$

e para a perturbação interna,  $a_k < a_j$ , temos

$$\langle \mathcal{R}_j^{sec} \rangle = G \frac{m_k a_k}{a_k a_j} \langle \mathcal{R}_D \left( \frac{a_k}{a_j} \right) \rangle. \quad (\text{B.47})$$

Se especificarmos se a perturbação é interna ou externa, definimos as quantidades  $\alpha_{jk}$  e  $\bar{\alpha}_{jk}$  dados por:

$$\alpha_{jk} = \begin{cases} \frac{a_k}{a_j}, & a_k < a_j \text{ (perturbação interna)} \\ \frac{a_j}{a_k}, & a_j < a_k \text{ (perturbação externa)} \end{cases}, \quad (\text{B.48})$$

$$\bar{\alpha}_{jk} = \begin{cases} 1, & a_k < a_j \text{ (perturbação interna)} \\ \frac{a_j}{a_k}, & a_j < a_k \text{ (perturbação externa)} \end{cases}. \quad (\text{B.49})$$

Podemos escrever a parte secular da função perturbadora (B.13) experimentada pela massa  $m_j$  devido a todas as outras  $N - 1$  massas,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_j^{sec} \rangle &= n_j^2 a_j^2 \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{m_k}{m_c + m_j} \left[ \frac{1}{8} \alpha_{jk} \bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)} e_j^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{8} \alpha_{jk} \bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)} I_j^2 - \frac{1}{4} \alpha_{jk} \bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(2)} e_j e_k \cos(\varpi_j - \varpi_k) + \frac{1}{4} \alpha_{jk} \bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)} I_j I_k \cos(\Omega_j - \Omega_k) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Combinado as expressões (B.50) e (B.44) iremos escrevermos uma expressão para a função perturbadora de  $m_j$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D &= n_j^2 a_j^2 \left[ \frac{1}{2} A_{jj} e_j^2 + \frac{1}{2} B_{jj} I_j^2 + \sum_{k=1, k \neq j}^N A_{jk} e_j e_k \cos(\varpi_j - \varpi_k) + \right. \\ &\left. \sum_{k=1, k \neq j}^N B_{jk} I_j I_k \cos(\Omega_j - \Omega_k) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

sendo os coeficientes

$$\begin{aligned} A_{jj} &= n_j \left[ \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_c}{a_j} \right)^2 - \frac{9}{8} J_2^2 \left( \frac{R_c}{a_j} \right)^4 - \frac{15}{4} J_4 \left( \frac{R_c}{a_j} \right)^4 + \right. \\ &\left. \frac{1}{4} \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{jk} \bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{jk}) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

$$A_{jk} = -\frac{1}{4} n_j \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{jk} \bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{jk}), j \neq k, \quad (\text{B.53})$$

$$\begin{aligned} B_{jj} &= -n_j \left[ \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_c}{a_j} \right)^2 - \frac{27}{8} J_2^2 \left( \frac{R_c}{a_j} \right)^4 - \frac{15}{4} J_4 \left( \frac{R_c}{a_j} \right)^4 + \right. \\ &\left. \frac{1}{4} \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{jk} \bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{jk}) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

$$B_{jk} = \frac{1}{4} n_j \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{jk} \bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{jk}), j \neq k. \quad (\text{B.55})$$

As quantidades  $A_{jj}$ ,  $A_{jk}$ ,  $B_{jj}$  e  $B_{jk}$ , podem ser vistas como elementos constantes de duas matrizes  $N \times N$ ,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , respectivamente.

Com raciocínio análogo, realizamos as mudanças de variáveis  $h_j$ ,  $k_j$ ,  $p_j$  e  $q_j$ , dadas por (B.26), obtendo a forma generalizada para (B.44).

As equações resultantes para o movimento são dadas por

$$\dot{h}_j = \frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial k_j}, \quad \dot{k}_j = -\frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial h_j}, \quad (\text{B.56})$$

$$\dot{p}_j = \frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = -\frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial p_j}. \quad (\text{B.57})$$

e sua solução é

$$h_j = \sum_{i=1}^N e_{ji} \sin(g_i t + \beta_i), \quad k_j = \sum_{i=1}^N e_{ji} \cos(g_i t + \beta_i), \quad (\text{B.58})$$

e

$$p_j = \sum_{i=1}^N I_{ji} \sin(f_i t + \gamma_i), \quad q_j = \sum_{i=1}^N I_{ji} \cos(f_i t + \gamma_i), \quad (\text{B.59})$$

onde  $g_i$  e  $f_i$  são os dois conjuntos de autovalores para as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , e as fases  $\beta_i$  e  $\gamma_i$ , são as magnitudes dos autovetores  $e_{ij}$  e  $I_{ij}$ , determinadas a partir das condições de contorno. Para um dado tempo  $t$ , os quadrados da excentricidade e inclinação para a massa  $m_j$  são dados por

$$e_{ij}^2 = \left[ \sum_{i=1}^N e_{ij} \sin(g_i t + \beta_i) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^N e_{ij} \cos(g_i t + \beta_i) \right]^2, \quad (\text{B.60})$$

$$I_{ij}^2 = \left[ \sum_{i=1}^N I_{ij} \sin(f_i t + \gamma_i) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^N I_{ij} \cos(f_i t + \gamma_i) \right]^2. \quad (\text{B.61})$$

### B.3 O Achatamento Planetário

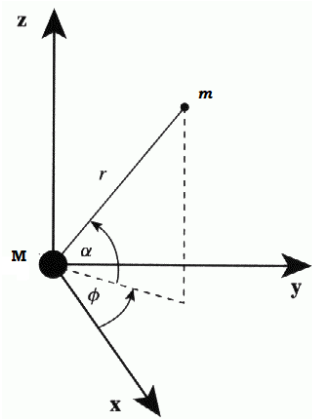
Em alguns casos planetários, nem sempre podemos encontrar o corpo central esférico, mas sim ligeiramente deformado em seu equador. Nesse caso, devemos considerar o efeito do achatamento nos corpos secundários.

Considere um satélite natural orbitando um planeta de massa  $M$  e raio médio  $R$ . Se as coordenadas para o satélite em um dado instante de tempo são  $(r, \phi, \alpha)$  para um sistema de coordenadas centrado no planeta, onde  $r$  é a distância radial,  $\phi$  é a longitude e  $\alpha$  representa a latitude do satélite (Fig. B.1).

Quando  $\alpha = 0$ , o satélite está no plano equatorial e  $\phi = 0$  representa a posição na longitude 0 (primeiro meridiano) do planeta. Podemos escrever que o potencial gravitacional experimentado pelo satélite como

$$V(r) = -\frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{i=2}^{\infty} J_i \left( \frac{R}{r} \right)^i P_i(\sin \alpha) \right]. \quad (\text{B.62})$$

sendo  $P_i(\sin \alpha)$  o Polinômio de Legendre de grau  $i$  em  $\sin \alpha$  e  $J_i$  é chamado de coeficientes harmônicos zonal.



**Figura B.1:** Relação entre a distância radial  $r$ , longitude  $\phi$  e a latitude  $\alpha$  e o sistema de coordenadas cartesianas para um satélite orbitando um corpo central de massa  $M$  (Adaptado de Murray e Dermott (1999)).

A partir de (B.62), podemos determinar a força que o satélite irá experimentar devido ao potencial, para isso lembramos que a força gravitacional dada pelo gradiente de potencial

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}). \quad (\text{B.63})$$

Podemos então, encontrar cada uma das componentes de força,  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  da seguinte maneira

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{i=2}^{\infty} J_i \left( \frac{R}{r} \right)^i P_i(\sin \alpha) \right] \right), \quad (\text{B.64})$$

$$F_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{i=2}^{\infty} J_i \left( \frac{R}{r} \right)^i P_i(\sin \alpha) \right] \right), \quad (\text{B.65})$$

$$F_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{i=2}^{\infty} J_i \left( \frac{R}{r} \right)^i P_i(\sin \alpha) \right] \right). \quad (\text{B.66})$$

Considerando o corpo central como o planeta Saturno, podemos desenvolver o somatório em (B.61) até a sexta ordem, pois os termos  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$  são conhecidos para Saturno e os termos de ordem ímpar são nulos.

Pela Fig. B.1, podemos ver que  $\sin \alpha = \frac{z}{r}$ , assim podemos escrever os Polinômios de Legendre de ordem  $i = 2, 4$  e  $6$  da seguinte maneira

$$P_2 \left( \frac{z}{r} \right) = \frac{1}{2} \left( 3 \left( \frac{z}{r} \right)^2 - 1 \right), \quad (\text{B.67})$$

$$P_4 \left( \frac{z}{r} \right) = \frac{1}{8} \left( 35 \left( \frac{z}{r} \right)^4 - 30 \left( \frac{z}{r} \right)^2 + 3 \right), \quad (\text{B.68})$$

$$P_6 \left( \frac{z}{r} \right) = \frac{1}{16} \left( 231 \left( \frac{z}{r} \right)^6 - 315 \left( \frac{z}{r} \right)^4 + 105 \left( \frac{z}{r} \right)^2 - 5 \right). \quad (\text{B.69})$$

Ao realizarmos as derivadas parciais, iremos calcular derivadas da forma  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r^n} \right) = n \frac{x}{|r|^{n+2}}$ , pois  $|r| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ . De modo análogo,  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r^n} \right) = n \frac{y}{|r|^{n+2}}$ . Porém, teremos que derivar expressões do tipo  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z^m}{r^n} \right) = \frac{mz^{m-1}}{|r|^n} - z \cdot \left( n \frac{z}{|r|^{n+2}} \right)$ , onde  $n$  e  $m$  são interiores.

Logo, realizando as derivadas parciais dadas em (B.67), (B.68) e (B.69) encontramos as componentes de forças provocadas pelo achatamento planetário

$$F_x = -\frac{GM}{r^3} \left( \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{R^2}{r^2} \left( 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{15}{8} J_4 \frac{R^4}{r^4} \left( 1 - 14 \frac{z^2}{r^2} + 21 \frac{z^4}{r^4} \right) + \frac{105}{16} J_6 \frac{R^6}{r^6} \left( \frac{1}{3} + 9 \frac{z^2}{r^2} - 33 \frac{z^4}{r^4} + \frac{143}{5} \frac{z^6}{r^6} \right) \right] x \right), \quad (\text{B.70})$$

$$\begin{aligned}
F_y = -\frac{GM}{r^3} & \left( \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{R^2}{r^2} \left( 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{15}{8} J_4 \frac{R^4}{r^4} \left( 1 - 14 \frac{z^2}{r^2} + 21 \frac{z^4}{r^4} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{105}{16} J_6 \frac{R^6}{r^6} \left( \frac{1}{3} + 9 \frac{z^2}{r^2} - 33 \frac{z^4}{r^4} + \frac{143}{5} \frac{z^6}{r^6} \right) \right] y \right), \tag{B.71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_z = -\frac{GM}{r^3} & \left( \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{R^2}{r^2} \left( 3 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{5}{8} J_4 \frac{R^4}{r^4} \left( 25 - 70 \frac{z^2}{r^2} + 63 \frac{z^4}{r^4} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{105}{16} J_6 \frac{R^6}{r^6} \left( \frac{7}{3} + 21 \frac{z^2}{r^2} - \frac{231}{5} \frac{z^4}{r^4} + \frac{143}{5} \frac{z^6}{r^6} \right) \right] z \right). \tag{B.72}
\end{aligned}$$

## Apêndice C

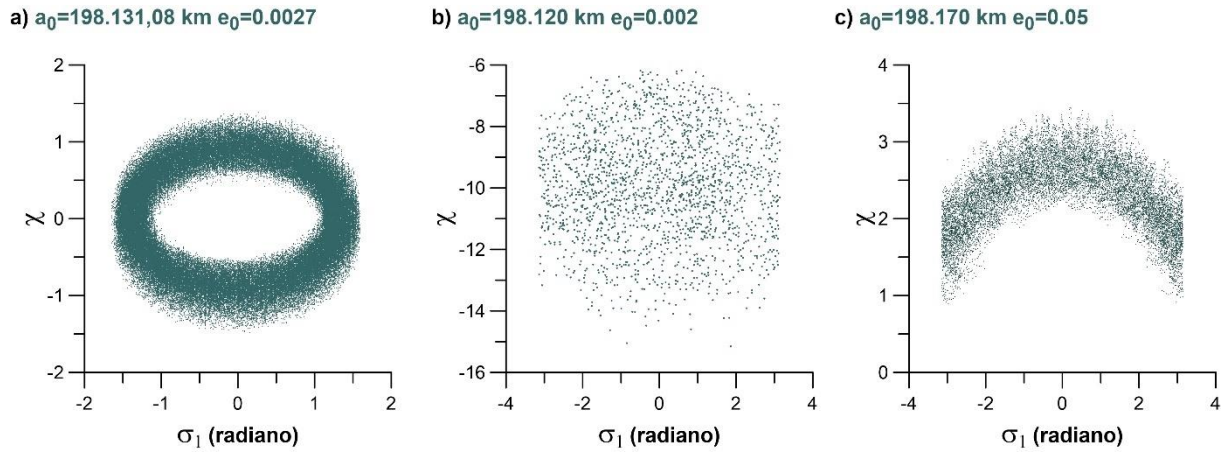
### C.1 O modelo CoraLin

Com o objetivo de explorar a dinâmica de uma partícula próxima a uma ressonância de movimentos médios El Moutamid *et al.* (2014) elaboraram um modelo analítico simplificado, denominado de CoraLin, que é uma simplificação do hamiltoniano para o caso restrito do problema de três corpos no qual a órbita do satélite perturbado é excêntrica e o menor satélite está próximo a ressonância de movimentos médios da forma  $(p + 1): p$ , onde  $p$  é um inteiro. Esse modelo depende apenas de dois parâmetros livres, a saber, o primeiro,  $D$  representa a distância de separação entre os centros das ressonâncias de corrotação e Lindbald, enquanto o segundo parâmetro  $\epsilon_L$  representa a relação entre a massa e excentricidade do satélite perturbador. (veja a Tabela 1 de El Moutamid *et al.* (2014) para a definição desses parâmetros).

Temos três casos a considerar no modelo CoraLin: i) se  $D = 0$  significa que ambas as ressonâncias de corrotação e Lindbald estão na mesma posição e o hamiltoniano é integrável nesse caso; ii) Para  $D > 2$ , ambas as ressonâncias estão separadas e o hamiltoniano é “quase integrável” e o caso intermediário iii)  $0 < D < 2$  sugere um forte acoplamento entre as ressonâncias que pode levar a uma evolução caótica da órbita do satélite de teste (Muñoz-Gutiérrez e Giulliatto Winter 2017).

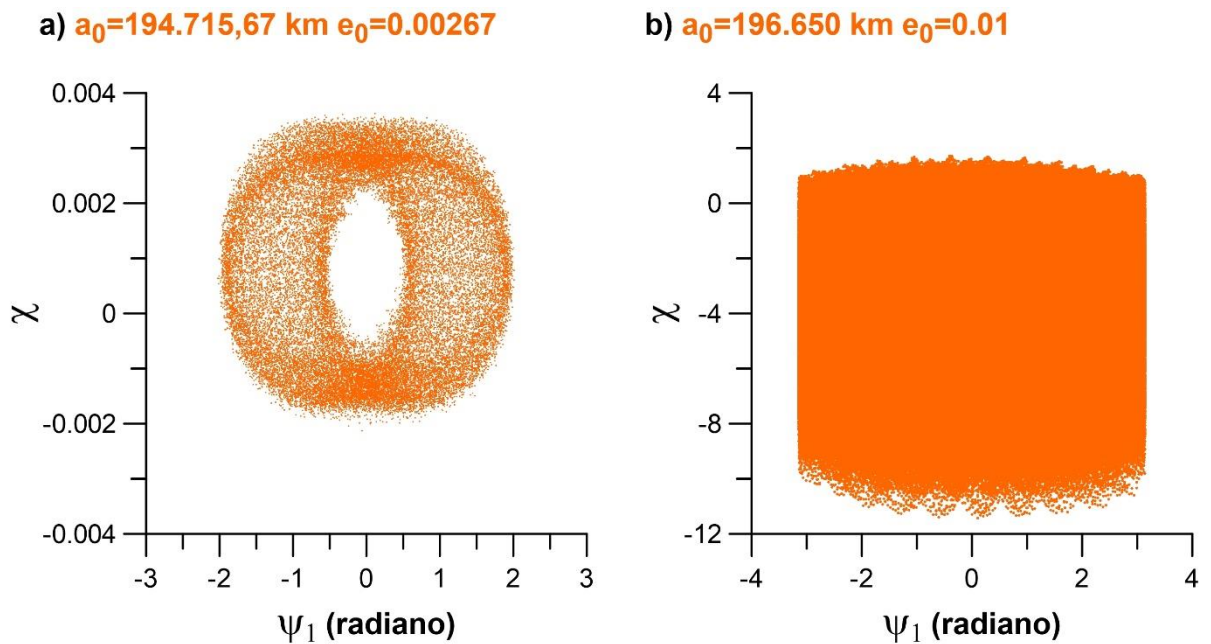
Usando o modelo CoraLin, El Moutamid *et al.* (2014) mapearam pela primeira vez o domínio das ressonâncias 11:10 Anthe-Mimas e 15:14 Methone-Mimas utilizando a técnica de superfície de seção com dois graus de liberdade. Para comparar os resultados aplicamos o seu modelo para alguns clones de Anthe e Methone e investigarmos o comportamento no plano  $\chi \times \sigma_1$  e  $\chi \times \psi_1$ , onde  $\chi = J_C - J_L$ , veja a Tabela 1 de El Moutamid *et al.* (2014) que contém a definição das variáveis  $J_C$  e  $J_L$ . com diferentes condições iniciais como pode ser visto nas Fig. C1 e Fig. C2, determinadas por nós.

Fig. C1 representa três condições iniciais para o semieixo maior e excentricidade de clones de Anthe (valores a cima de cada Figura). Em (a) temos a órbita de Anthe em relação à época 01/01/2016. Em (b) temos a órbita de um clone de Anthe interno a uma zona caótica. Em (c) podemos ver a condição inicial de um clone que está próximo a ressonância de Lindblad.



**Figura C1:** Representação do modelo CoraLin para três diferentes clones de Anthe no plano  $\chi \times \sigma_1$ : a) Órbita dada pelo Horizons. b) Órbita interna a região de caos e em c) órbita próxima a região de Lindbald.

A Fig. C2 representa duas condições iniciais para clones de Methone: (a) em relação a época 01/01/2016, uma órbita interna a ressonância 15:14 de corotação e em (b) uma órbita interna a uma região caótica.



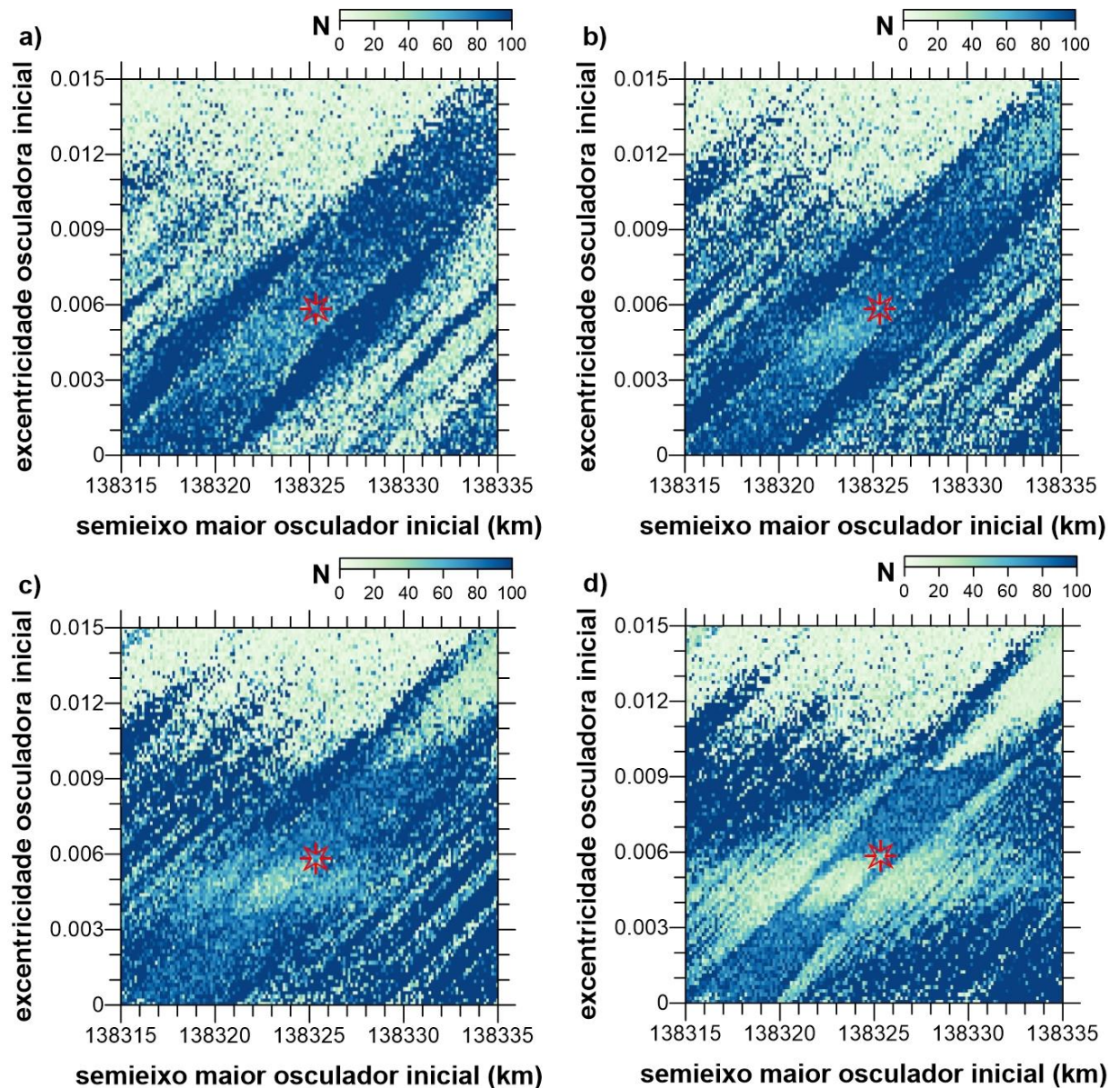
**Figura C1:** Representação do modelo CoraLin para dois diferentes clones de Methone no plano  $\chi \times \psi_1$ : a) órbita dada pelo Horizons e em b) órbita interna a uma região caótica.

## Apêndice D

### D.1 A influência da massa de Pandora na dinâmica orbital de Atlas

Embora Pandora não contribua com perturbações significativas na dinâmica orbital de Atlas, os efeitos combinados entre o par Prometheus-Pandora (sobreposição entre as ressonâncias, Seção 5.6) contribuem para o surgimento de um caos estável em sua órbita.

Para analisar como esses efeitos alteram o espaço de fase, realizamos diversos mapeamentos considerando, além de Prometheus, os efeitos de um clone de Pandora variando sua massa e o resultado pode ser visto em Fig. D1.



**Figura D1:** Mapeamento para o espaço de fase considerando os efeitos da perturbação provocada por clones de Pandora que variam as suas massas: (a)  $M_{Pandora}$ , (b)  $0,5M_{Pandora}$ , (c)  $0,2M_{Pandora}$  e (d)  $0,1M_{Pandora}$ .

Em Fig. D1(a) temos um zoom da Fig. 5.14(c), em (b) consideramos um clone de Pandora com massa equivalente a  $0,5M_{Pandora}$ , em (c) um clone de Pandora com massa equivalente a  $0,25M_{Pandora}$  e em (d) um clone de Pandora com massa equivalente a  $0,1M_{Pandora}$ .

Podemos observar que com a diminuição das massas, os domínios relacionados às ressonâncias de corrotação e Lindblad tornam-se mais evidentes no espaço de fase.