

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

COMPORTAMENTO DINÂMICO DE SUSPENSÃO ELETROMECAÂNICA:
ANÁLISE DA RESPOSTA DEVIDO AO AMORTECIMENTO E À RIGIDEZ
NÃO-LINEAR

BAURU
2014

ADRIANO CÉSAR MAZOTTI

**COMPORTAMENTO DINÂMICO DE SUSPENSÃO ELETROMECAÂNICA:
ANÁLISE DA RESPOSTA DEVIDO AO AMORTECIMENTO E À RIGIDEZ
NÃO-LINEAR**

Dissertação Apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Bauru, UNESP - Universidade Estadual Paulista, Como Parte dos Requisitos para a Obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Bento Rodrigues de Pontes Junior

Co-orientador: Marcos Silveira

BAURU

2014

Mazotti, Adriano César.

Comportamento dinâmico de suspensão eletromecânica:
análise da resposta devido ao amortecimento e à
rigidez não-linear / Adriano César Mazotti, 2014
102 f.

Orientador: Bento Rodrigues de Pontes Junior
Co-orientador: Marcos Silveira

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2014

1. Absorvedor eletromecânico. 2. Oscilações
não-lineares. 3. Estabilidade dinâmica. I.
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE ADRIANO CÉSAR MAZOTTI, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.

Aos 16 dias do mês de maio do ano de 2014, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação da Faculdade de Engenharia de Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru, Prof. Dr. MARCIO ANTONIO BAZANI do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Prof. Dr. PAULO JOSE PAUPITZ GONCALVES do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de ADRIANO CÉSAR MAZOTTI, intitulado "COMPORTAMENTO DINÂMICO DE SUSPENSÃO ELETROMECAÂNICA: ANÁLISE DO AMORTECIMENTO E DA RESPOSTA DEVIDO A RIGIDEZ NÃO-LINEAR". Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: Aprovado. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR



Prof. Dr. MARCIO ANTONIO BAZANI



Prof. Dr. PAULO JOSE PAUPITZ GONCALVES



Dedico esse trabalho a minha família e amigos que me ajudaram da forma que foram capazes,
entenderam os motivos de minha ausência foram sempre compreensivos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Bento Rodrigues de Pontes Júnior, orientador desse trabalho, por sempre direcionar os meus estudos de forma a deixar as tarefas mais práticas e sempre me receber com muita paciência e tranquilidade.

Agradeço ao Prof. Dr. Marcos Silveira, co-orientador desse trabalho, pela paciência que sempre tinha para ensinar seus conhecimentos e a clareza ao dispor de cada informação.

Agradeço meus pais, Benedito Senafonde Mazotti e Vânia Cristina dos Santos Mazotti por acreditarem em mais uma etapa de minha carreira e pela ajuda nos momentos mais difíceis.

Agradeço a Carolina Frederice que sempre estive do meu lado e sempre me deu forças.

Agradeço também a todos os amigos do programa de pós graduação que ajudaram compartilhando conhecimento em vários momentos desse trabalho.

“A tarefa é, não tanto para ver o que ninguém viu ainda, mas pensar o que ninguém ainda pensou, sobre o que todo mundo vê.”

Erwin Schrödinger

RESUMO

MAZOTTI, A. C., (2014). COMPORTAMENTO DINÂMICO DE SUSPENSÃO ELETROMECHANICA: ANÁLISE DA RESPOSTA DEVIDO AO AMORTECIMENTO E À RIGIDEZ NÃO LINEAR, Bauru, 2014, 102p. Dissertação (Mestrado), FEB - Faculdade de Engenharia de Bauru, UNESP - Universidade Estadual Paulista.

Esse trabalho explora os diferentes tipos de comportamentos dinâmicos, encontrados em sistemas eletromecânicos linear e não-linear análogos, sendo o sistema eletromecânico não-linear constituído de rigidez tipo Duffing. A modelagem matemática dos sistemas físicos hipotéticos é realizada através de técnicas Lagrangeanas, inclusive para a modelagem que aborda componentes eletromagnéticos de um circuito RLC. O transdutor utilizado no acoplamento dos subsistemas é o de bobina móvel e magnetismo permanente e tem suas equações conhecidas na literatura. Os modelos são baseados em absorvedores utilizados no automobilismo, no entanto são abordados de forma simplificada, comparando-se com o modelo completo de uma suspensão de automóvel. No trabalho é investigada a influência dos parâmetros do circuito RLC, que podem ser responsáveis pelo aumento do amortecimento mecânico aparente. É feita a correlação do amortecimento mecânico com os parâmetros de resistência e capacitância elétrica para o modelo linear. É realizada também a análise dos autovalores do modelo linear e lugar natural das raízes. Para o modelo não-linear é realizada a análise do comportamento dinâmico, lavando-se em consideração a variação da capacitância para quatro valores de frequência da força externa ao sistema. Essa análise mostra a diversidade de comportamentos dinâmicos encontrados para esse modelo. As variedades de comportamentos dinâmicos resultantes do modelo não-linear variam entre dinâmicas caóticas, periódicas, quasi-periódicas e multiperiódica. Indica a possibilidade de utilização do parâmetro da capacitância como parâmetro de controle do sistema e mostra que a resistência elétrica dissipa a energia oriunda do domínio mecânico, fato esse que abre a discussão para as possibilidades de geração de energia.

Palavras-Chave: Absorvedor Eletromecânico, Oscilações Não-lineares, Estabilidade Dinâmica.

ABSTRACT

MAZOTTI, A. C., (2014). DYNAMIC BEHAVIOUR OF ELECTROMECHANICAL SUSPENSION: RESPONSE ANÁLYSIS DUE TO THE DAMPING AND THE NONLINEAR STIFFNESS, Bauru, 2014, 102p, Dissertation (Master degree), FEB - Faculty of Engineering of Bauru, UNESP - São Paulo State University

This work investigates the different types of dynamic behaviour, found in linear and nonlinear electromechanical system, which are analogue, being the nonlinear electromechanical system constituted of rigidity type Duffing. The mathematical modelling of the hypothetical physical system is realized with Lagrangian techniques, including for the modelling of the electromagnetic components of the RLC circuit. The transducer utilized in the coupling of the system is a moving coil and permanent magnet transducer, which it have their equations deducted in other studies. The models are based in absorbers utilized in automobiles, however in this investigation it is discussed in a simplified way, if it is compared with a complete model of an automobile suspension. This work investigates the influence of the RLC circuit parameters, which it may be responsible by the increasing of the mechanical damping. It is realized the correlation of the mechanical damping with resistance and capacitance, for the linear model. It is realized the analysis of the eigenvalues and it is found de root locus of the linear model. For the nonlinear model it is realized the analysis of the dynamic behaviour, considering the variation of the capacitance, for each one of the four values of frequency of the external force. This analysis shows the diversity of dynamic behaviours found for the nonlinear model. The variations of dynamic behaviours resulted of the nonlinear model varies around some types of dynamics, which can be, chaotic, periodic, quasi periodic and multi periodic. That's indicate the possibility of utilization of the capacitance as control parameter of the system and shows the dissipation of energy by the resistance, this energy is from the mechanical domain, this fact open the discussion for the energy generation possibilities.

Keywords: Electromechanical Absorber, Nonlinear Oscillations, Dynamic Stability.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Motivação e Justificativa	19
1.2	Objetivos	20
1.3	Revisão Bibliográfica	21
1.4	Estrutura da Dissertação	27
2	MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA ELETROMECAÂNICO	29
2.1	Modelagem Matemática do Sistema Eletromecânico com Linear	30
2.1.1	Dedução das Equações do Domínio Mecânico	30
2.1.2	Dedução das Equações do Domínio Elétrico	32
2.1.3	Equações do Transdutor	34
2.1.4	Forças Externas e Não Conservativas	36
2.1.5	Equações do Sistema Eletromecânico Linear	38
2.2	Modelagem Matemática do Sistema Eletromecânico com Rigidez Duffing	39
2.2.1	Equações do Sistema Eletromecânico com Rigidez Duffing	40
3	PROCEDIMENTO DE DEFINIÇÃO DOS VALORES DOS PARÂMETROS ...	41
3.1	Parâmetros do Domínio Mecânico com Rigidez Linear	41
3.1.1	Parâmetros da fonte de excitação mecânica externa	42
3.2	Parâmetros do Domínio Mecânico com Rigidez Duffing	44
3.3	Parâmetros do Domínio Elétrico	45
3.3.1	Dimensionamento da Bobina do Transdutor	45
4	ESTABILIDADE DO MODELO LINEAR	52
4.1	Crítério Routh-Hurwitz	52
4.2	Condições de Estabilidade do Sistema Eletromecânico	55
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	57
5.1	Análise da Resposta do Modelo Linear	57
5.1.1	Análise da resposta em função da frequência do modelo linear	57
5.1.2	Correlação entre os parâmetros elétricos e o coeficiente de amortecimento mecânico	59
5.1.3	Análise dos autovalores do modelo linear	63
5.2	Análise da resposta do Modelo com Rigidez Não-linear Tipo Duffing	66
5.2.1	Análise da resposta em função da frequência do modelo com rigidez não-linear tipo Duffing	66

5.2.2 Análise exploratória da resposta dinâmica do modelo com rigidez Duffing	68
5.2.2.1 Variação da capacitância e análise da dinâmica com $f_{ex}=1$ Hz	68
5.2.2.2 Variação da capacitância e análise da dinâmica com $f_{ex}=2$ Hz	77
5.2.2.3 Variação da capacitância e análise da dinâmica com $f_{ex}=3$ Hz	84
5.2.2.4 Variação da capacitância e análise da dinâmica com $f_{ex}=4$ Hz	90
6 CONCLUSÕES	94
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	97
APÊNDICE A	101

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 - Exemplo de dispositivo de transdução eletromecânica em equipamento eletrônico móvel	18
Figura 1.2 - Representação de dispositivo eletromecânico exemplificado como absorvedor de vibrações em um veículo de passeio	19
Figura 1.3 - Modelo usado por Abdelkefi, Hajj e Nayfeh (2012)	23
Figura 1.4 - Modelo usado por Tusset e Balthazar (2012)	23
Figura 1.5 - Modelo do Absorvedor Magnetoreológico usado por Tusset e Balthazar (2012)	24
Figura 1.6 - Modelo usado por Bayiroğlu, Alişverişi e Ünal (2012)	24
Figura 1.7 - Modelo usado por Ho e Woo (2011)	25
Figura 1.8 - Modelo usado por Chatterjee e Dey (2012)	25
Figura 1.9 - Modelo usado por Mendrella e Pudlowski (1992)	26
Figura 2.1 - Modelo físico hipotético do sistema eletromecânico linear	29
Figura 2.2 - Representação dos vetores e representação esquemática do transdutor	35
Figura 2.3 - Modelo físico hipotético do sistema eletromecânico com rigidez não-linear	39
Figura 3.1 - Histórico no tempo e plano de fase com seção de Poincaré	44
Figura 3.2 - Comparação das curvas de força elástica e energia potencial elástica entre os modelos linear e não-linear (Duffing)	45
Figura 3.3 - Bobina do transdutor	46
Figura 3.4 - Fio condutor	49
Figura 3.5 - Detalhe da associação dos fios na bobina	49
Figura 5.1 - Análise da resposta em função de frequência do modelo linear	59
Figura 5.2 - Coeficiente de amortecimento em função da resistência do modelo linear	60
Figura 5.3 - Coeficiente de amortecimento em função da capacitância do modelo linear	61
Figura 5.4 - Resposta do modelo linear e curvas de envelope para valores de resistência	63
Figura 5.5 - Parte real e parte imaginária dos auto valores do modelo linear	64
Figura 5.6 - Lugar natural das raízes dos auto valores do modelo linear	64
Figura 5.7 - Comparação das curvas do coeficiente de amortecimento obtidas por decremento logarítmico e curvas da parte real do 3º autovalor em função da do modelo linear	65
Figura 5.8 - Análise da resposta em função de frequência do modelo não-linear	67
Figura 5.9 - Diagrama de bifurcação da capacitância do modelo não-linear para $f_{ex}=1$ Hz. ..	69
Figura 5.10 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=1$ Hz e $C_a=1.400 \mu F$	71
Figura 5.11 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=1$ Hz e $C_b=1.475 \mu F$	72

Figura 5.12 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=1$ Hz e $C_c=1.750$ μ F	73
Figura 5.13 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=1$ Hz e $C_d=2.000$ μ F	74
Figura 5.14 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=1$ Hz e $C_e=2.350$ μ F	75
Figura 5.15 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=1$ Hz e $C_f=2.420$ μ F	76
Figura 5.16 - Diagrama de bifurcação da capacitância do modelo não-linear para $f_{ex}=2$ Hz..	78
Figura 5.17 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=2$ Hz e $C_a=1.400$ μ F	79
Figura 5.18 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=2$ Hz e $C_b=2.000$ μ F	80
Figura 5.19 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=2$ Hz e $C_c=2.200$ μ F	81
Figura 5.20 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=2$ Hz e $C_d=2.250$ μ F	82
Figura 5.21 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=2$ Hz e $C_e=2.400$ μ F	83
Figura 5.22 - Diagrama de bifurcação da capacitância do modelo não-linear para $f_{ex}=3$ Hz..	85
Figura 5.23 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=3$ Hz e $C_a=1.400$ μ F	86
Figura 5.24 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=3$ Hz e $C_b=1.850$ μ F	87
Figura 5.25 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=3$ Hz e $C_c=2.000$ μ F	88
Figura 5.26 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=3$ Hz e $C_d=2.200$ μ F	89
Figura 5.27 - Diagrama de bifurcação da capacitância do modelo não-linear para $f_{ex}=4$ Hz..	91
Figura 5.28 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=4$ Hz e $C_a=1.400$ μ F	92
Figura 5.29 - Respostas do modelo não-linear para $f_{ex}=4$ Hz e $C_b=2.000$ μ F	93

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 - Conversão do símbolo das grandezas físicas	30
Tabela 3.1 - Tempo de integração e condições iniciais para o modelo linear desacoplado	41
Tabela 3.2 - Parâmetros gerais da simulação para o modelo linear desacoplado.....	41
Tabela 3.3 - Frequências e razões de frequências presentes na simulação do modelo linear desacoplado	41
Tabela 3.4 - Valores de rigidez do modelo linear e não-linear.....	45
Tabela 4.1 - Parâmetros gerais usados na análise de estabilidade do modelo linear.....	55
Tabela 5.1 - Parâmetros gerais da simulação do modelo linear	57
Tabela 5.2 - Tempo de integração e condições iniciais para a simulação da resposta em função da frequência para o modelo linear.....	58
Tabela 5.3 - Parâmetros específicos para a simulação do modelo linear	58
Tabela 5.4 - Frequências e razões de frequências do modelo linear	58
Tabela 5.5 - Tempo de integração e condições iniciais para a simulação dos valores de ζ	60
Tabela 5.6 - Parâmetros específicos para a simulação dos valores de ζ em função de R	60
Tabela 5.7 - Frequências e razões de frequências presentes na simulação dos valores de ζ em função de R	60
Tabela 5.8 - Parâmetros específicos para a simulação dos valores de ζ em função de C	61
Tabela 5.9 - Frequências e razões de frequências presentes na simulação dos valores de ζ em função de C	61
Tabela 5.10 - Parâmetros específicos para a simulação das respostas do modelo em oscilação livre e amortecida	62
Tabela 5.11 - Frequências e razões de frequências presentes na simulação das respostas do modelo em oscilação livre e amortecida.....	62
Tabela 5.12 - Parâmetros específicos para a simulação dos autovalores	63
Tabela 5.13 - Parâmetros específicos usados para a comparação	65
Tabela 5.14 - Frequências e razões de frequências presentes na comparação	65
Tabela 5.15 - Parâmetros gerais da simulação do modelo com rigidez não-linear tipo Duffing	66
Tabela 5.16 - Tempo de integração e condições iniciais para a simulação do modelo com rigidez não-linear tipo Duffing	66
Tabela 5.17 - Parâmetros específicos para a simulação da resposta em frequência do modelo não-linear tipo Duffing	67

Tabela 5.18 - Frequências e razões de frequências da resposta em frequência do modelo não-linear tipo Duffing	67
Tabela 5.19 - Tempo de integração e condições iniciais para a geração de diagramas de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing	68
Tabela 5.20 - Parâmetros específicos para a geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=1$ Hz	68
Tabela 5.21 - Frequências e razões de frequências presentes na geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=1$ Hz	69
Tabela 5.22 - Tempo de integração e condições iniciais para histórico no tempo, plano de fase e FFT do modelo com rigidez não-linear tipo Duffing	70
Tabela 5.23 - Tempo de integração e condições iniciais para seção de Poincaré do modelo com rigidez não-linear tipo Duffing	70
Tabela 5.24 - Parâmetros específicos para a simulação com $f_{ex}=1$ Hz.....	70
Tabela 5.25 - Frequências e razões de frequências com $f_{ex}=1$ Hz.....	70
Tabela 5.26 - Parâmetros específicos para a geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=2$ Hz	77
Tabela 5.27 - Frequências e razões de frequências presentes na geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=2$ Hz	77
Tabela 5.28 - Parâmetros específicos para a simulação com $f_{ex}=2$ Hz.....	78
Tabela 5.29 - Frequências e razões de frequências com $f_{ex}=2$ Hz.....	78
Tabela 5.30 - Parâmetros específicos para a geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=3$ Hz	84
Tabela 5.31 - Frequências e razões de frequências presentes na geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=3$ Hz	84
Tabela 5.32 - Parâmetros específicos para a simulação com $f_{ex}=3$ Hz.....	85
Tabela 5.33 - Frequências e razões de frequências com $f_{ex}=3$ Hz.....	85
Tabela 5.34 - Parâmetros específicos para a geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=4$ Hz	90
Tabela 5.35 - Frequências e razões de frequências presentes na geração do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=4$ Hz.....	90
Tabela 5.36 - Parâmetros específicos para a simulação com $f_{ex}=4$ Hz.....	91
Tabela 5.37 - Frequências e razões de frequências com $f_{ex}=4$ Hz.....	91

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AWG – *American wire gauge* (escala americana de bitolas de fios)

EDOs – Equações Diferenciais Ordinárias

DOF – *Degree of freedom* (grau de liberdade)

FFT – *Fast Fourier transform* (transformada rápida de Fourier)

RLC – Circuito que possui resistência (R), indutância (L) e capacitância (C)

S.I. – Sistema internacional (de unidades)

SSRL – *Solid state relay* (relé de estado sólido)

LISTA DE SÍMBOLOS

A_{ex} – Amplitude da força externa $f(t)$

B – Campo indutivo

C – Capacitância elétrica

C_v – Parcela da capacitância elétrica que pode ser alterada

D_b – Diâmetro da bobina

D_f – Diâmetro do fio condutor

d – Constante de amortecimento (do inglês *damping*)

E_e – Somatória das energias elétricas do sistema

E_m – Somatória das energias magnéticas do sistema

Ep_{el} – Energia potencial elástica

F – Força

F_b – Força produzida por uma bobina em campo indutivo sendo percorrida por corrente elétrica

F_d – Força do amortecedor mecânico viscoso

F_{el} – Força elástica

F_{ex} – Força de excitação externa

f_{ex} – Frequência da força externa F_{ex}

f_{nele} – Frequência natural elétrica

f_{nmec} – Frequência natural mecânica

h_b – Altura da bobina

h_{bb} – Altura da bobina, medida em milímetros

i – Corrente elétrica

k – Constante elástica linear

k_1 – Coeficiente não-linear da rigidez

k_t – Constante de rigidez total

L – Indutância elétrica

L_{elc} – Lagrangeano relacionado ao domínio elétrico do sistema

L_{mec} – Lagrangeano relacionado ao domínio mecânico do sistema

l – Comprimento linear

l_b – Comprimento de cada espira da bobina

M – Massa, geralmente utilizada quando é a massa principal do problema

m – Massa, geralmente utilizada quando é a única massa do problema ou é secundária

n – Número de espiras da bobina

Q_1 – Somatória das forças não conservativas referentes a variável de estado x_1

Q_3 – Somatória das forças não conservativas referentes a variável de estado x_3

q – Carga elétrica

$\dot{q}$ – Corrente elétrica

R – Resistência elétrica

R_f – Resistência do fio condutor por cada metro de comprimento

R_v – Parcela de resistência elétrica que pode ser alterada

r – Raio

r_b – Raio da bobina

r_f – Raio do fio condutor

S – Polo sul magnético

S_b – Área da bobina

S_f – Área da seção transversal do fio condutor

T – Somatória das energias cinéticas do sistema

U_b – Tensão que aparece nos terminais de uma bobina que se movendo por um campo indutivo

U_R – Tensão elétrica nos terminais de um resistor

V – Somatória das energias potenciais do sistema

v – Velocidade

x – Deslocamento

x_1, x_2, x_3 e x_4 – Variáveis de estado, (deslocamento, velocidade, carga e corrente)

y – Outro símbolo para deslocamento (usado nessa dissertação)

ω_{ex} – Frequência angular da força externa $f(t)$

ω_{mec} – Frequência angular natural mecânica

θ – Ângulo de rotação

$\dot{\theta}$ – Velocidade de rotação

μ_r – Permeabilidade magnética relativa do material

ζ – Coeficiente de amortecimento adimensional

π – Constante matemática, número irracional, aproximado em cálculos para 3,14

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas eletromecânicos ganham mais espaço em aplicações industriais onde anteriormente eram ocupadas por dispositivos somente mecânicos. A facilidade de controle das grandezas e dos parâmetros elétricos faz esse tipo de dispositivo ser mais interessante para uso nos processos fabris constantemente aprimorados. As utilizações mais exploradas dos dispositivos eletromecânicos são: atuadores, sensores, captadores de energia e dispositivos controladores de vibração.

A vasta gama de dispositivos, equipamentos e aparelhos que são construídos utilizando os princípios apresentados sobre o sistema eletromecânico é o que torna interessante sua pesquisa, discussão e aperfeiçoamento. O problema alvo de estudo dessa pesquisa é, segundo a classificação mais comumente encontrada na literatura, um dispositivo eletromecânico de macro escala, no entanto, o modelo pode sofrer ajustes de forma a ser implementado em sistemas de nano-escala e microescala, visando atender a aplicação de objetivo.

A utilização desses dispositivos é crescente nos equipamentos de vários segmentos, por exemplo, dispositivos eletrônicos móveis sempre usaram mini sistemas eletromecânicos de transdução para a reprodução sonora, são os autofalantes e os microfones. A evolução das tecnologias de telecomunicações buscou sempre a miniaturização desses equipamentos, dispositivos mais finos, menores e mais leves sempre são mais atrativos nesse nicho do mercado. No entanto ao reduzir o tamanho de um dispositivo de transdução, como o autofalante, ocasionalmente tem-se a perda de potência e capacidade sonora, fato esse que compromete a qualidade do equipamento móvel, podendo ser fator decisivo para a compra de um desses dispositivos móveis pelo público consumidor.

No objetivo de miniaturizar os equipamentos eletrônicos móveis sem perder qualidade do áudio, o entendimento minucioso da classe dos dispositivos eletromecânicos responsáveis pelo som dos equipamentos é indispensável. O objetivo dessas indústrias é tornar esses dispositivos mais eficientes, já que estão se tornando menores e a busca por qualidade é decisiva. A Figura 1.1 mostra o detalhe de um microfone de um dispositivo eletrônico móvel, o dispositivo contém ainda outros tipos de dispositivos eletromecânicos, como autofalantes multimídia e autofalante destinados a chamada telefônica.

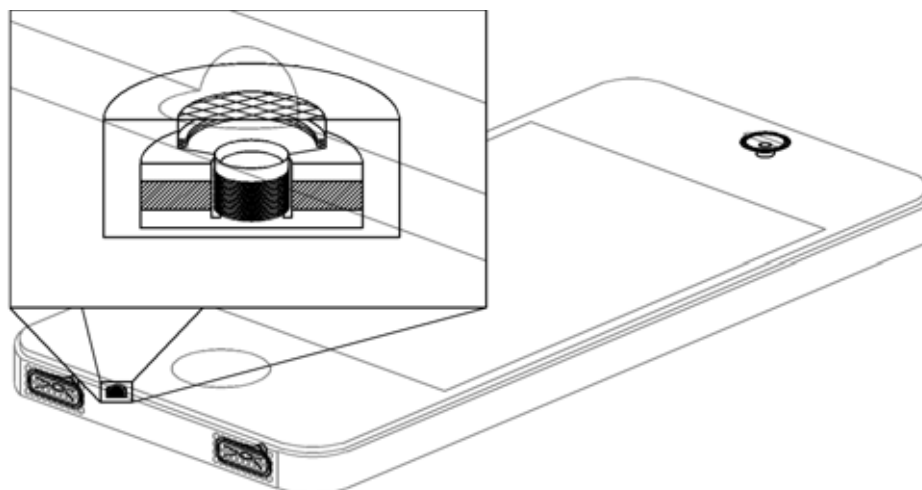


Figura 1.1 – Exemplo de dispositivo de transdução eletromecânica em equipamento eletrônico móvel
(fonte: o próprio autor)

As aplicações no entanto vão além de pequenos autofalantes e microfones, outra utilização dos dispositivos eletromecânicos é para a geração de energia, já que são capazes de converter a energia cinética de vibrações ou movimentos em energia elétrica, podendo alimentar outros tipos de dispositivos. Alguns sistemas embarcados no qual existe a dificuldade de substituição de baterias ou conexão de fonte de energia externa são providos de dispositivos eletromecânicos dessa natureza (SODANO, 2005), possibilitando assim a geração de energia a partir de vibrações ou perturbações mecânicas. O marca-passo é um tipo de dispositivo embarcado e utiliza baterias para seu funcionamento. Outra possibilidade de aplicação dentro do ramo energético é a drenagem de energia do ambiente, conhecido como *energy harvesting* (ERTURK; INMAN, 2008). Esse conceito se expande e o assunto é bastante contemporâneo. *Energy harvesting* é a maneira de gerar energia através das perturbações mecânicas existentes, por exemplo, no andar das pessoas sobre uma calçada equipada com tais dispositivos, no trânsito de automóveis por uma rua ou por uma lombada também equipada com esses dispositivos, ou então as perturbações de meios fluidos como água e ar. Um exemplo de estudo realizado, com aplicações energéticas, é mostrado no trabalho de Brasil, Feitosa e Balthazar (2006), no qual é explorada a influência da excitação não-ideal em geradores eólicos. Os geradores eólicos são dispositivos eletromecânicos, as enormes hélices tem seu eixo acoplado a um gerador elétrico, conseguem usar o movimento de um meio fluido, ar nesse caso, para induzir corrente e tensão elétricas.

A indústria automobilística já se utiliza de dispositivos eletromecânicos em suspensões veiculares. No entanto os dispositivos mais comuns são magnetoreológicos, esses dispositivos são uma espécie de amortecedor viscoso, no qual sua viscosidade e consequentemente sua constante de amortecimento, são alterados dependendo-se da corrente elétrica submetida a esse

equipamento. Um tipo de dispositivo eletromecânico ainda pouco utilizado é o sistema eletromecânico de bobina móvel, no qual o controle, nesse caso pode ser feito de forma passiva e o amortecimento pode variar de acordo com os parâmetros elétricos do circuito. A Figura 1.2 exemplifica o uso de um dispositivo eletromecânico como absorvedor em veículo de passeio.

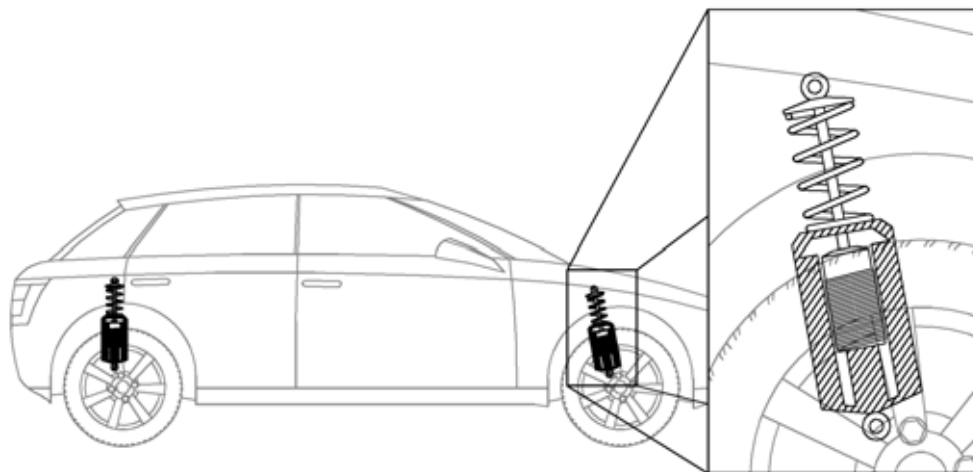


Figura 1.2 – Representação de dispositivo eletromecânico exemplificado como absorvedor de vibrações em veículo de passeio (fonte: o próprio autor)

1.1 Motivação e Justificativa

Dentro das diversas possibilidades de concepção de um dispositivo eletromecânico, estão os absorvedores de vibração e, fazendo parte desse grupo de dispositivos, estão as suspensões veiculares eletromecânicas. Há interesse nessa gama de dispositivos, pois, trazem alguns recursos de suma importância e amplamente discutidos em projetos de engenharia. Como exemplo, a possibilidade de desenvolver controle ativo utilizando esses dispositivos, o subsistema elétrico acoplado possibilita a agilidade e facilidade de controle que ganha cada vez mais recursos com os adventos da eletrônica. Tem-se também, como um dos principais recursos, a possibilidade da restauração de energia, que pode ser utilizada, por exemplo, em um veículo para a alimentação de outros sistemas presentes no automóvel. A obtenção de energia ou reaproveitamento da energia, caminha na mesma direção dos projetos de engenharia da atualidade, que têm sempre em pauta, a preocupação energética e ambiental.

As aplicações contudo não necessariamente são para fins energéticos ou para aumento de eficiência. Algumas das utilizações dos dispositivos eletromecânicos visam obter maior controle do sistema como um todo ou então obter uma funcionalidade que torne o dispositivo mais interessante para a utilização. É o caso do objetivo desse trabalho, tratado na próxima seção.

1.2 Objetivos

Esse trabalho propõe o estudo da estabilidade, da dinâmica, e do comportamento geral de um dispositivo eletromecânico ajustado, parcialmente, para se comportar como um absorvedor de vibrações em um veículo de passeio. Contudo, em um automóvel a excitação é oriunda de baixo, causada pelas imperfeições do solo e o pneu se comporta como um amortecedor. Nesse trabalho não é considerada o pneu e a excitação, que no veículo vem do solo, nesse caso é aplicada à base. Essa alteração, proposital, é realizada justamente para que se possa isolar mecanicamente somente o dispositivo de suspensão eletromecânica, e assim, fazer a exploração do comportamento dinâmico, de modo que possa ser observado sem interferências as características dinâmicas, provenientes do acoplamento eletromecânico. No entanto os parâmetros mecânicos ainda são relativos ao de um veículo de passeio, como a massa e a rigidez.

Essa discussão também abrange o estudo de elementos não-lineares que serão implementados no decorrer da discussão acerca do domínio mecânico do modelo. A dedução do modelo é um ponto importante para esse estudo, a partir do modelo, pode-se utilizar o sistema eletromecânico (alvo da modelagem) para diversas aplicações, sendo esse, então um ponto de grande interesse na pesquisa.

Com o modelo matemático obtido, a definição do problema deve passar pela configuração dos parâmetros. São eles que vão apropriar as equações governantes para uma aplicação ou outra. Como a intenção é estudar o comportamento de um dispositivo eletromecânico sendo usado como absorvedor de vibrações de um automóvel (amortecedor eletromecânico), a escolha dos parâmetros desse sistema deve ser deduzida a partir da massa submetida a esse absorvedor, e então os parâmetros restantes são deduzidos de modo que o amortecedor eletromecânico tenha comportamento, principalmente em relação as forças físicas, similar a um absorvedor constituído com amortecedor mecânico viscoso, que é utilizado na grande maioria dos veículos de passeio do mercado.

Para atingirmos esses objetivos principais, algumas etapas serão seguidas:

- Deduzir modelos matemáticos, linear e não-linear, que consigam reproduzir o comportamento geral de um dispositivo de amortecimento eletromecânico.
- Realizar a escolha dos parâmetros, de forma que os modelo não-linear seja análogo ao modelo linear.
- Utilizar os parâmetros que façam com que os modelos possam ter características próximas a de uma suspensão veicular.

- Projetar e parametrizar o subsistema elétrico, de maneira que, no futuro, o dispositivo eletromecânico como um todo, seja passível de prototipagem.
- Fazer o estudo de estabilidade do modelo linear, para conhecer quais condições paramétricas sejam válidas, existentes e estáveis.
- Analisar a resposta em frequência dos modelos, linear e não-linear.
- Realizar a correlação entre os parâmetros elétricos e o amortecimento mecânicos, usando o modelo linear. Tomando como parâmetro elétrico principal a resistência elétrica, responsável pela dissipação de energia no circuito elétrico.
- Fazer a análise dos autovalores do modelo linear, que apontam alteração na dinâmica do sistema.
- Partindo da condição de menor amortecimento, fazer a exploração da resposta do modelo não-linear, sob variação do parâmetro de capacitância.

1.3 Revisão Bibliográfica

O domínio mecânico é a parte do sistema eletromecânico que pode ser compreendida por ramos da física tais como, a cinemática e a dinâmica. Nesse estudo o domínio mecânico será mostrado como um sistema com inércia e rigidez, e é discutido levando-se em consideração as grandezas físicas de deslocamento e suas derivadas. Os parâmetros que modificam a inércia e a rigidez do sistema são simbolizados, respectivamente, pela massa do sistema e pela mola. O componente que é responsável pela não conservação de energia é o amortecimento.

A parte mecânica do sistema já é um sistema amortecido, portanto, o sistema elétrico se comportará como um amortecedor auxiliar, visto que a excitação externa é provocada no sistema mecânico.

O domínio elétrico de um sistema eletromecânico é representado por componentes elétricos que respeitam as leis do eletromagnetismo e da eletrodinâmica. Os parâmetros responsáveis por representar o subsistema elétrico são o indutor, o capacitor e o resistor. Os componentes elétricos desse subsistema são ligados em série, dessa forma a corrente elétrica do circuito é a mesma em cada componente. Ainda não é possível fazer analogias entre o domínio mecânico e o domínio elétrico, no entanto, as primeiras semelhanças já aparecem nos passos iniciais da modelagem por método Lagrangeano. A Figura 2.1 mostra uma representação do sistema eletromecânico alvo do presente estudo.

Transdutor é o nome dado a dispositivos que comutam energia de uma natureza para energia de outra natureza distinta da original. Um microfone é um exemplo de transdutor que converte a pressão das ondas sonoras em impulsos elétricos. Quando as ondas sonoras, que são perturbações mecânicas no meio de propagação, atinge uma membrana, faz com que ela vibre, a membrana está conectada a uma bobina móvel imersa em um campo indutivo que induz tensão e corrente nos terminais da bobina, portanto, as vibrações de origem sonora que a membrana recebe são convertidas em impulsos elétricos. Há também outros tipos de transdutores: Yamapi (2003) usou para estudo de conversão de energia mecânica em energia elétrica os dispositivos piezelétricos. Também já são conhecidos os transdutores eletrostáticos (SINCLAIR, 2001; YAMAPI, 2006). Nesse estudo é utilizado o transdutor de bobina móvel, porém, sem o objetivo de comutar ondas sonoras em eletricidade, mas, com o objetivo de converter as excitações mecânicas oscilatórias em corrente e tensão elétrica e também fazer a transdução de energia de forma a controlar as vibrações mecânicas a partir de valores específicos de corrente e tensão elétrica.

O transdutor, alvo de discussão nesse trabalho, é um dispositivo eletromecânico composto por uma parte móvel acoplada à parte mecânica e à bobina ao mesmo tempo. A bobina é imersa em um campo indutivo produzido por um ímã permanente. O campo indutivo é perpendicular ao eixo central da bobina. O absorvedor eletromecânico aplicado no veículo de passeio, alvo desse trabalho, pode ser considerado um transdutor. Alguns dos parâmetros mecânicos e elétricos são intrínsecos desse equipamento e outras, tais como a quarta parte da massa do automóvel e a capacitância adicionada ao circuito elétrico, não.

Alguns artigos servem de referencial teórico para a investigação acerca do absorvedor eletromecânico. Parte desses trabalhos contribuíram com deduções, outros exemplificando a análise realizada tanto para modelos lineares e modelos não-lineares. Abdelkefi, Hajj e Nayfeh (2012) mostraram a análise dos autovalores, parte real e parte imaginária, no modelo de cilindros livres oscilantes acoplados a dispositivos piezelétricos. A resistência elétrica acoplada ao sistema serve de controle para a dinâmica do cilindro. É estudada a relação do aumento de resistência elétrica com a alteração dos autovalores e, conseqüentemente, da dinâmica do sistema. Os cilindros livre oscilantes, alvo da investigação realizada por Abdelkefi, Hajj e Nayfeh (2012) são usados para gerar energia a partir de meios fluidos, nesse caso, líquido, é um exemplo de aplicação de *energy harvesting*. A Figura 1.3 mostra a representação esquemática do sistema estudado no caso dos cilindros livres oscilantes.

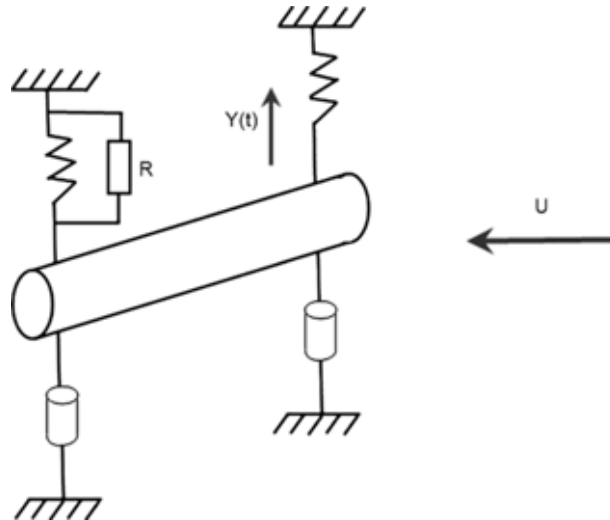


Figura 1.3 – Representação esquemática do sistema eletromecânico de cilindros livres oscilantes imersos em meio fluido acoplados a dispositivos piezelétricos (ABDELKEFI; HAJJ; NAYFEH, 2013)

Alguns modelos de absorvedores eletromecânicos com fonte de excitação não-ideal e outro com amortecedor magnetoreológico foram estudados por Tusset, e Balthazar (2013) e apresentam resultados semelhantes aos resultados encontrados no modelo do absorvedor eletromecânico automotivo não-linear investigado nessa dissertação. O modelo estudado por Tusset, e Balthazar (2013), contém fonte de excitação não-ideal resultante de um eixo desbalanceado acoplado a um motor elétrico de potência limitada. A Figura 1.4 mostra o sistema estudado com fonte de excitação não-ideal. O absorvedor magnetoreológico é acoplado posteriormente com objetivo de suprimir o comportamento caótico. A representação do absorvedor magnetoreológico é mostrada na Figura 1.5.

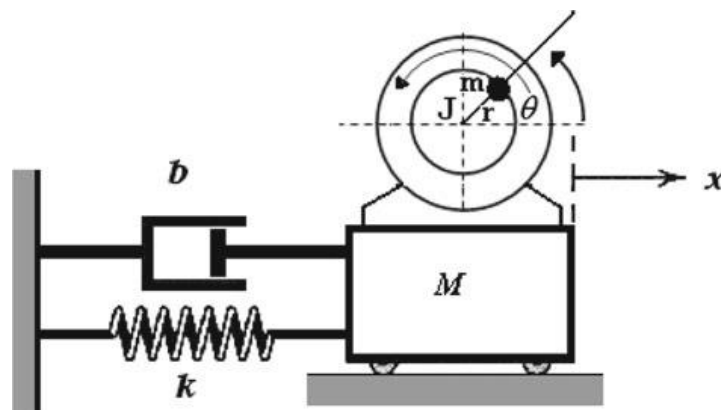


Figura 1.4 – Representação do sistema mecânico oscilatório não-ideal (TUSSET; BALTHAZAR, 2013)

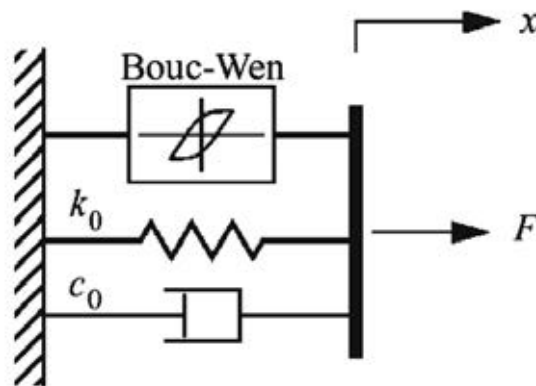


Figura 1.5 – Representação do absorvedor magnetoreológico (TUSSET; BALTHAZAR, 2013)

Embora puramente mecânico, o modelo estudado por Bayiroğlu, Alişverişi e Ünal (2012) usam rigidez não-linear, e as excitações externas, de acordo com a disposição geométrica dos eixos desbalanceados Pode se comportar de forma harmônica ou de forma não-ideal. O foco da investigação realizada por Bayiroğlu, Alişverişi e Ünal (2012) é a análise de estabilidade e estudo dos casos onde aparecem ressonância superharmônica e subharmônica. A Figura 1.6 mostra a representação esquemática do sistema investigado por Bayiroğlu, Alişverişi e Ünal (2012).

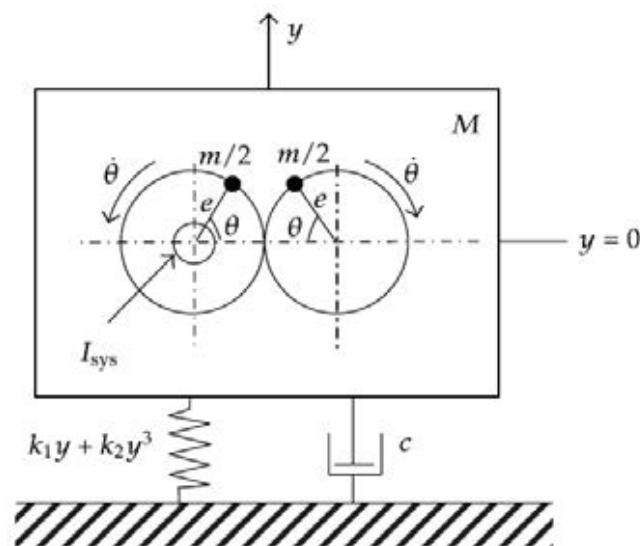


Figura 1.6– Representação esquemática do sistema mecânico com rigidez não-linear (BAYIROĞLU; ALIŞVERİŞÇİ; ÜNAL, 2012)

Ho e Woo (2011) e Ho, Nguyen e Woo (2011), usam em sua investigação, um exemplo de dispositivo eletromecânico. No domínio mecânico, estão presentes a massa e a rigidez, no domínio elétrico está presente um circuito RLC em série. Ainda em série com o circuito elétrico estão uma fonte de tensão senoidal e um SSR. A fonte de excitação externa nesse caso é dada pela fonte de tensão elétrica. Portanto, a energia cinética da massa é proveniente da transdução

de energia que ocorre pela indução magnética da bobina do indutor e sua ação no núcleo do mesmo que representa a massa. A Figura 1.7 mostra a representação esquemática simplificada do sistema eletromecânico. São estudados os casos de ressonância e a resposta analítica aproximada foi obtida.

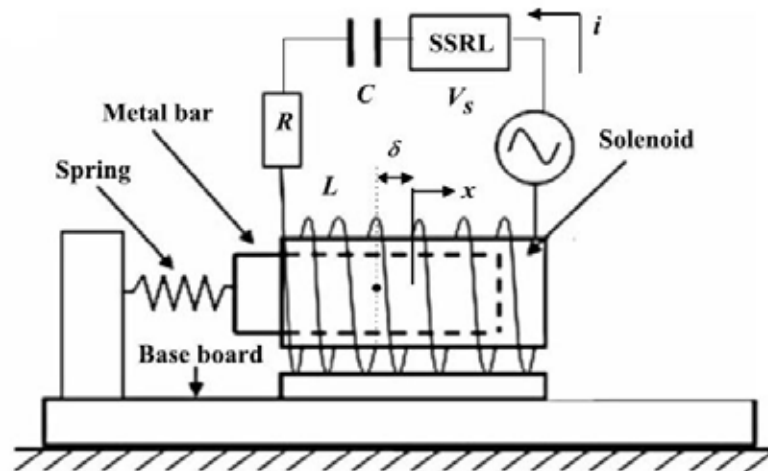


Figura 1.7– Representação esquemática simplificada do sistema eletromecânico (HO; WOO, 2011)

Moraes et. Al (2013), mostra a análise da dinâmica de osciladores mecânicos acoplados, com vibra-impacto. Primeiramente é mostrada a dinâmica desses osciladores sob excitação ideal, posteriormente os osciladores são submetidos a excitação não-ideal. Ainda que os osciladores acoplados sejam ambos mecânicos, o estudo contribui para o conhecimento da dinâmica exercida de osciladores acoplados.

Outro trabalho que trouxe contribuição a essa pesquisa, é o estudo dos fenômenos que aparecem em osciladores harmônicos mecânicos acoplados, mostrado por Chatterjee e Dey (2013). O comportamento foi estudado nos casos de excitação autônoma e não autônoma, o estudo abrange ainda diferentes formas de acoplamento entre os dois osciladores. A Figura 1.8 mostra a representação mecânica do modelo em questão.

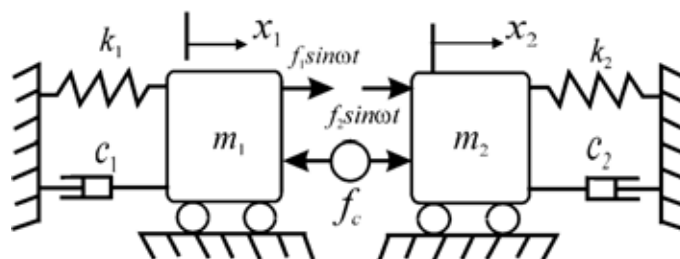


Figura 1.8 – Representação esquemática do modelo de osciladores harmônicos acoplados (CHATTERJEE; DEY, 2013)

Mendrela e Pudlowski (1992) e mostram o comportamento de um motor de relutância linear no estado estacionário. A modelagem e os resultados obtidos pelos autores foram parcialmente reproduzidos, pois, o sistema, assemelha-se com o dispositivo hipotético utilizado nessa dissertação. Trata-se de um motor linear, que usa a indução magnética de uma bobina para movimentar um corpo cilíndrico e metálico, de acordo como é mostrado na Figura 1.9. Ainda, Mendrela (1999) comparou a aplicação de corrente contínua ou direta com corrente alternada, no funcionamento de seu dispositivo. O motor de relutância linear, diferentemente do absorvedor eletromecânico (dispositivo proposto na dissertação), age convertendo energia elétrica em energia mecânica, ou seja, a excitação pode vir tanto do subsistema mecânico como do subsistema elétrico. Observado o subsistema mecânico, é visível que este pode se comportar como absorvedor, ou como atuador. E observando o subsistema elétrico, é visto que este pode se comportar como fonte de energia ou dispositivo captador de energia.

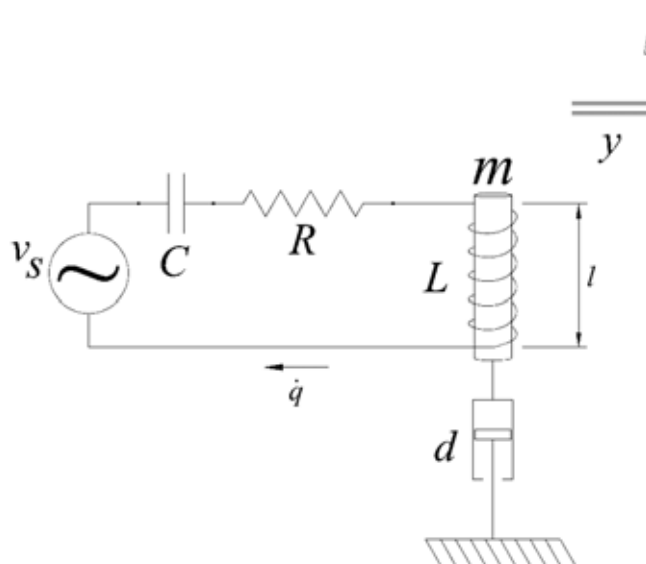


Figura 1.9 – Representação esquemática do motor de relutância linear.
Adaptado de (MENDRELA; PUDLOWSKI, 1992)

O dispositivo de Mendrela e Pudlowski (1992) é modelado com dois graus de liberdade (DOF), o primeiro relacionado ao domínio mecânico e o segundo ao domínio elétrico

1.4 Estrutura da Dissertação

No capítulo 2, estão descritos os modelos físicos hipotéticos (modelos sistêmicos hipotéticos), utilizados para a investigação e os métodos de obtenção dos modelos matemáticos a partir das deduções com base nesses modelos físicos. A dedução é demonstrada passo a passo de acordo com os itens seguintes:

- Dedução das equações do subsistema mecânico do modelo com rigidez linear;
- Dedução das equações do subsistema elétrico que serão utilizadas nos modelos com rigidez linear e não-linear;
- Equacionamento do transdutor que será utilizado nos modelos com rigidez linear e não-linear;
- Dedução das equações do subsistema mecânico do modelo com rigidez não-linear;

No capítulo 3, estão descritos os métodos de definição dos parâmetros gerais do modelo, isso inclui o modelo com rigidez linear e com rigidez não-linear:

- Definição dos parâmetro do subsistema mecânico com rigidez linear;
- Definição dos parâmetros da fonte de excitação externa harmônica;
- Definição dos parâmetros do subsistema mecânico com rigidez não-linear;
- Definição dos parâmetros do subsistema elétrico, incluindo-se o dimensionamento da bobina do transdutor;

No capítulo 4, é realizada a análise da estabilidade do modelo com rigidez linear, englobando:

- A estabilidade do modelo com rigidez linear segundo o critério Routh-Hurwitz;
- Dedução das condições de estabilidade para o modelo eletromecânico com rigidez linear;

No capítulo 5, de resultados, são analisadas as respostas de ambos os modelos com rigidez linear e com rigidez não-linear, é mostrada:

- Análise da resposta em função da frequência do modelo com rigidez linear;
- A correlação entre as variáveis elétricas e o coeficiente de amortecimento mecânico do modelo com rigidez linear;

- Análise dos autovalores do modelo com rigidez linear;
- Análise da resposta em função da frequência do modelo com rigidez não-linear;
- Análise exploratória da resposta dinâmica do modelo com rigidez não-linear para frequências de excitação externa de 1, 2, 3 e 4 Hz;

O capítulo 6 apresenta as conclusões obtidas das análises, as contribuições trazidas pelo trabalho e os passos futuros dessa pesquisa. Em seguida, as referências utilizadas no trabalho.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA ELETROMECHANICO

Inicialmente é definido o sistema alvo da modelagem, que é classificado como multi-domínio e pode ser dividido em três subsistemas: o conjunto de componentes mecânicos, o conjunto de componentes elétricos e o transdutor. A excitação externa é harmônica e é aplicada no conjunto mecânico. Trata-se, portanto, de uma força de excitação mecânica. O fato da excitação externa ser aplicada no conjunto mecânico faz com que o transdutor conectado ao circuito elétrico se comporte como um amortecedor. A Figura 2.1 mostra a representação do sistema. Trata-se um corpo com massa acoplado ao amortecedor viscoso, à mola linear e ao transdutor de bobina móvel em paralelo. Os terminais da bobina do transdutor são conectados a um circuito contendo um indutor, um capacitor e um resistor ligados em série.

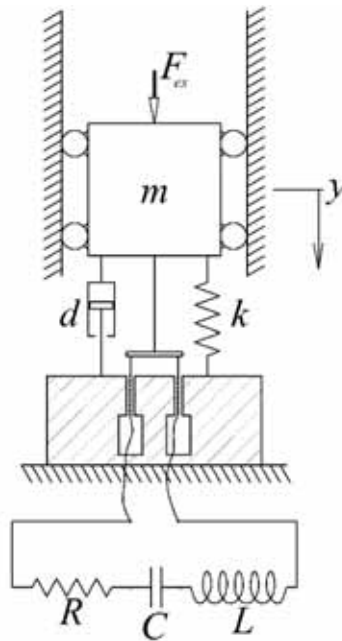


Figura 2.1 – Modelo físico hipotético do sistema eletromecânico linear (fonte: o próprio autor)

Sendo:

m é a massa do corpo [kg];

d é a constante de amortecimento viscoso [N.s/m];

k é a constante elástica da mola [N/m];

F_{ex} é a força de excitação harmônica externa aplicada diretamente sobre o corpo [N];

L é o valor da indutância [H];

R é o valor da resistência [Ω];

C é o valor da capacitância [F].

2.1 Modelagem Matemática do Sistema Eletromecânico Linear

As grandezas físicas presentes no sistema eletromecânico são divididas em dois domínios diferentes. As grandezas passam por mudança de símbolo, pois deixa as equações melhores formatadas para uso em cálculo computacional e essa representação também é utilizada para as equações em espaço de estado. A Tabela 2.1 mostra a generalização das coordenadas de forma mais simplificada.

Tabela 2.1 – Conversão do símbolos das grandezas físicas

Grandeza Física	Símbolo convencional	Símbolo usado nesse trabalho
Deslocamento	y	x_1
Velocidade	$\dot{y}$ ou v	x_2
Carga Elétrica	q	x_3
Corrente Elétrica	$\dot{q}$ ou i	x_4

De acordo com essa simbologia adotada, são escritas duas relações algébricas que no decorrer do desenvolvimento dos cálculos, servem como duas das quatro equações diferenciais necessárias para o estudo e análise do sistema. A manipulação algébrica permite a obtenção das equações que descrevem o movimento de forma mais simplificada. A princípio, as equações governantes formam um sistema de equações diferenciais com duas equações diferenciais de segunda ordem. Usando as coordenadas generalizadas é possível escrever esse sistema com quatro equações diferenciais de primeira ordem. As relações, que correspondem a primeira e a terceira equação do sistema são mostradas na Equação (2.1) referente ao domínio mecânico e na Equação (2.2) referente ao domínio elétrico.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (2.2)$$

2.1.1 Dedução das Equações do Domínio Mecânico

Primeiramente, a técnica de modelagem é aplicada ao domínio mecânico. Para a modelagem usando as técnicas de Lagrange, é necessário saber o Lagrangeano, nesse caso do sistema mecânico. As técnicas de modelagem Lagrangeanas não necessitam de análises vetoriais, como acontece na técnica Newtoniana. O Lagrangeano do sistema mecânico é chamado de L_{mec} e, é igual à diferença entre a somatória das energias cinéticas e a somatória

das energias potenciais do sistema mecânico (MEIROVITCH, 1970). O Lagrangeano pode ser escrito de acordo com a Equação (2.3).

$$L_{mec} = T - V \quad (2.3)$$

T é a somatória das energias cinéticas do sistema;

V é a somatória das energias potenciais do sistema;

A energia cinética de um sistema mecânico está relacionada com a massa em movimento. A energia potencial, nesse caso elástica, é armazenada na mola. Conforme mostram as Equação (2.4) e Equação (2.5), respectivamente.

$$T = \frac{1}{2} m x_2^2 \quad (2.4)$$

$$V = \frac{1}{2} k x_1^2 \quad (2.5)$$

Portanto, o Lagrangeano resulta como mostrado na Equação (2.6).

$$L_{mec} = T - V = \frac{1}{2} m x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 \quad (2.6)$$

Com o Lagrangeano obtido, é feito o uso da equação de Lagrange, mostrada na Equação (2.7).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \quad (2.7)$$

A equação de Lagrange usa o sistema de coordenadas generalizadas que já foi obtido anteriormente. Dessa forma o Lagrangeano já pode ser substituído na equação. Q_1 é a somatória de forças não conservativas do subsistema mecânico e externas ao sistema, mas aplicadas no subsistema mecânico. A equação pode ser escrita para o domínio mecânico como é mostrado na Equação (2.8).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = Q_1 \quad (2.8)$$

Considerando a Equação (2.1), a equação de Lagrange é reescrita como mostra a Equação (2.9):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = Q_2 \quad (2.9)$$

Substituindo o Lagrangeano L pelo L_{mec} tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{mec}}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L_{mec}}{\partial x_2} = Q_2$$

$$m \ddot{x}_2 + k x_2 = Q_2 \quad (2.10)$$

Isolando o termo que apresenta a primeira derivada do deslocamento em relação ao tempo, a Equação (2.10) é escrita como é mostrado na Equação (2.11).

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{m} (Q_2 - k x_2) \quad (2.11)$$

Essa equação diferencial é a terceira das quatro que devem ser obtidas para o sistema de equações ficar completo para manipulação computacional. O termo Q_2 é substituído após as considerações feitas sobre o transdutor e sobre as forças não conservativas do sistema.

2.1.2 Dedução das Equações do Domínio Elétrico

Os passos executados na modelagem do subsistema mecânico são agora aplicados ao subsistema elétrico. O Lagrangeano do sistema elétrico é chamado de L_{elc} , da mesma forma que o Lagrangeano mecânico, o Lagrangeano elétrico também é a diferença entre a somatória das energias. No entanto, entre a somatória da energia magnética e a somatória da energia elétrica (PREUMONT, 2006). O Lagrangeano elétrico é escrito na Equação (2.12).

$$L_{elc} = E_m - E_e \quad (2.12)$$

E_m é a somatória das energias magnéticas do sistema;

E_e é a somatória das energias elétricas do sistema.

Agora é mais evidente a analogia entre os dois domínios. A energia magnética do subsistema elétrico está relacionada com a passagem de corrente elétrica pelo indutor e a energia elétrica armazenada no capacitor. Conforme mostra Equação (2.13) e a Equação (2.14), respectivamente.

$$E_m = \frac{1}{2} L x_4^2 \quad (2.13)$$

$$E_e = \frac{1}{2} C^{-1} x_3^2 \quad (2.14)$$

Portanto, o Lagrangeano elétrico é escrito como mostrado na Equação (2.15).

$$L_{elc} = E_m - E_e = \frac{1}{2} L x_4^2 - \frac{1}{2} C^{-1} x_3^2 \quad (2.15)$$

Com o Lagrangeano obtido, é possível usar a equação de Lagrange já mostrada anteriormente na Equação (2.7). A equação de Lagrange é a mesma para o sistema elétrico:

A equação de Lagrange usa o sistema de coordenadas generalizadas já obtido anteriormente, dessa forma o Lagrangeano elétrico pode ser substituído na equação. Q_3 , nesse caso, é a somatória de forças não conservativas do subsistema elétrico e externas ao sistema. A equação é escrita para o domínio elétrico como mostrado na Equação (2.16).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} = Q_3 \quad (2.16)$$

Levando em consideração a Equação (2.2), a equação de Lagrange fica como apresentada na Equação (2.17).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_4} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_4} = Q_4 \quad (2.17)$$

Substituindo o Lagrangeano L pelo L_{elc} teremos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{elc}}{\partial \dot{x}_4} \right) - \frac{\partial L_{elc}}{\partial x_3} = Q_3$$

$$L \dot{x}_4 + C^{-1} x_3 = Q_3 \quad (2.18)$$

Isolando o termo que apresenta a primeira derivada da corrente elétrica em relação ao tempo, a Equação (2.18) é escrita como é mostrado na Equação (2.19).

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{L} (Q_3 - C^{-1} x_3) \quad (2.19)$$

Essa equação diferencial é a quarta das quatro equações que devem ser obtidas para o sistema ficar completo para manipulação computacional. O termo Q_3 também é substituído após as considerações feitas sobre o transdutor e os elementos não conservativos do sistema elétrico. O sistema de equações está parcialmente completo, fazendo-se necessários somente os termos Q_1 e Q_3 das equações dos domínios mecânico e elétrico, respectivamente. O sistema é escrito conforme a Equação (2.20).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m} (Q_1 - k x_1) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{L} (Q_3 - C^{-1} x_3) \end{cases} \quad (2.20)$$

2.1.3 Equações do Transdutor

Respeitando a geometria, a disposição e o funcionamento do transdutor, e de acordo com a representação vetorial mostrada na Figura 2.2, as equações que relacionam excitação mecânica com a energia elétrica são escritas como relações lineares.

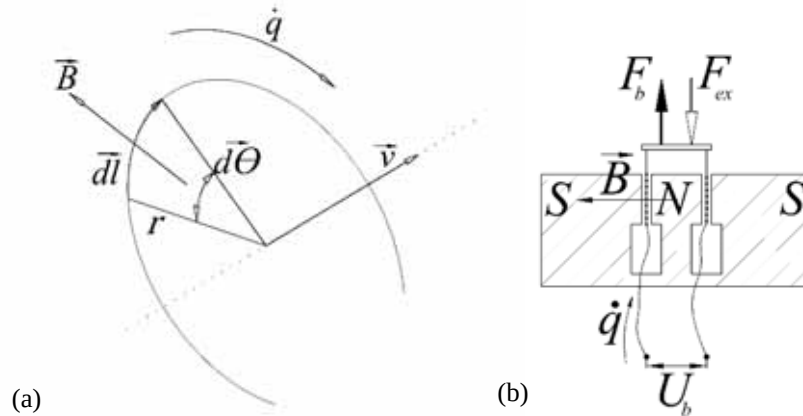


Figura 2.2 – Representação dos vetores do transdutor (a). Representação esquemática do transdutor (b).
Adaptado de (PREUMONT, 2006)

Onde:

B é a indução magnética, ou campo indutivo, ou ainda, densidade de fluxo magnético do ímã permanente do transdutor [T] (LIDE, 2009);

dl é o incremento diferencial de comprimento da bobina;

v é a velocidade com que a bobina se move perpendicularmente em relação ao campo de indução magnética [m/s];

$\dot{q}$ ou i é a corrente elétrica que passa pelo filamento da bobina medido em Ampère [A].

O transdutor objeto de estudo é composto de ímã permanente radial com o polo norte no centro e bobina móvel. De acordo com Preumont (2006) as relações constitutivas do transdutor de bobina móvel são mostradas na Equação (2.21) e Equação (2.22).

$$\overrightarrow{dU_b} = \vec{v} \times \vec{B} \, d\vec{l} \quad (2.21)$$

$$\overrightarrow{dF_b} = i \, d\vec{l} \times \vec{B} \quad (2.22)$$

Na Equação (2.21), dE_b é um incremento de tensão produzido por cada parcela do comprimento $d\vec{l}$ da bobina se deslocando com velocidade $\vec{v}$ por um campo de indução magnética $\vec{B}$. Considerando o campo indutivo B perpendicular ao eixo da bobina com comprimento l e, perpendicular à velocidade v proveniente das excitações do sistema mecânico. A relação vetorial é traduzida para a relação linear mostrada na Equação (2.23), que expressa a tensão contra eletromotriz (usualmente chamada tensão de Lenz) (PREUMONT, 2006).

$$U_b = -B l v \quad (2.23)$$

U_b é a tensão elétrica encontrada nos terminais da bobina em movimento [V];

l é o comprimento do fio da bobina [m];

v é a velocidade da bobina [m/s];

O equacionamento da força de Laplace acompanha dedução análoga (PREMOUNT, 2006).

$$\overrightarrow{dF_b} = i \overrightarrow{dl} \times \vec{B} \quad (2.24)$$

Da Equação (2.24), $\overrightarrow{dF_b}$ é o incremento de força produzido por um diferencial do comprimento $\overrightarrow{dl}$ da bobina conduzindo a corrente i pelo campo $\vec{B}$. A corrente i que percorre a bobina é perpendicular ao campo B e a força resultante da indução magnética, força de Laplace, é perpendicular à corrente e ao campo de indução magnética, dessa forma é escrita a Equação (2.25).

$$F_b = B l i \quad (2.25)$$

F_b é a força mecânica que a bobina exerce quando submetida a corrente elétrica [N];

i é a corrente elétrica [A];

2.1.4 Forças Externas e Não Conservativas

Este passo da modelagem consiste em relacionar a equação de cada força não conservativa ou externa, fazer a somatória e substituir nas equações do sistema. Duas forças generalizadas externas já são conhecidas, trata-se da tensão E_b que aparece na bobina do transdutor mostrada pela Equação (2.23) e da força contra eletromotriz F_b mostrada pela Equação (2.25), que interfere na dinâmica do mecanismo, as outras são calculadas a seguir.

No domínio físico mecânico, a primeira força é F_b (força de Laplace). Existe também uma força não conservativa oriunda do amortecimento que é chamada de F_d , mostrada na Equação (2.26).

$$F_d = -d x_2 \quad (2.26)$$

d é a constante de amortecimento viscoso [N.s/m];

Está presente também a força de excitação harmônica externa atuando sobre o corpo de massa m , essa força é F_{ex} , como mostra a Equação (2.27).

$$F_{ex} = A_{ex} \cos(\omega_{ex} t) \quad (2.27)$$

F_{ex} é a força harmônica externa [N];

A_{ex} é a amplitude de movimento da fonte de excitação mecânica [N];

ω_{ex} é a frequência angular de oscilação da fonte [rad/s].

Utilizando a notação da Tabela 2.1, a Equação (2.25) fica como mostra a Equação (2.18).

$$F_b = B l x_4 \quad (2.28)$$

Assim é possível calcular o termo Q_1 , que é a somatória das forças mostradas pelas Equações (2.26), (2.27) e (2.28), a somatória pode ser escrita como mostra a Equação (2.29).

$$Q_1 = F_d + F_b + F_{ex} \quad (2.29)$$

Então:

$$Q_1 = -d x_2 + B l x_4 + A_{ex} \cos(\omega_{ex} t)$$

No domínio físico elétrico já é conhecida uma força generalizada, embora chamada de força, o que vamos listar relacionado às forças não conservativas e externas do sistema elétrico, Q_3 , são na verdade tensões elétricas. Portanto, a tensão que já é conhecida é U_b , que é a tensão gerada nos terminais da bobina móvel, há também a tensão no resistor que será chamada de U_R , como mostrada na Equação (2.30).

$$U_R = -R x_4 \quad (2.30)$$

Fazendo a troca de variáveis na Equação (2.23) da tensão do transdutor, temos a Equação (2.31).

$$U_b = -B l x_2 \quad (2.31)$$

O termo Q_3 é a somatória das tensões mostradas pelas Equações (2.30) e (2.31). Então Q_3 pode ser escrita como mostra a Equação (2.32).

$$Q_3 = U_R + U_b \quad (2.32)$$

Portanto:

$$Q_3 = -R x_4 - B l x_2$$

2.1.5 Equações do Sistema Eletromecânico Linear

Os valores de Q_1 e Q_3 conhecidos são substituídos no sistema de Equações (2.20). O sistema de equações diferenciais completo é mostrado na Equação (2.33).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m} [-k x_1 - d x_2 + B l x_4 + A_{ex} \cos(\omega_{ex} t)] \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{L} (-C^{-1} x_3 - R x_4 - B l x_2) \end{cases} \quad (2.33)$$

Escrevendo o sistema de equações na forma vetorial, tem-se a representação mostrada na Equação (2.34)

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} & 0 & \frac{B l}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B l}{L} & -\frac{C^{-1}}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{ex} \cos(\omega_{ex} t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

2.2 Modelagem Matemática do Sistema Eletromecânico com Rigidez Duffing

Partindo do sistema eletromecânico descrito na seção 2.1, o sistema que tem suas equações governantes apresentadas a seguir, tem acrescentado em seu domínio mecânico rigidez não-linear. O novo sistema eletromecânico com rigidez não-linear é representado pelo esquema mostrado na Figura 2.3.

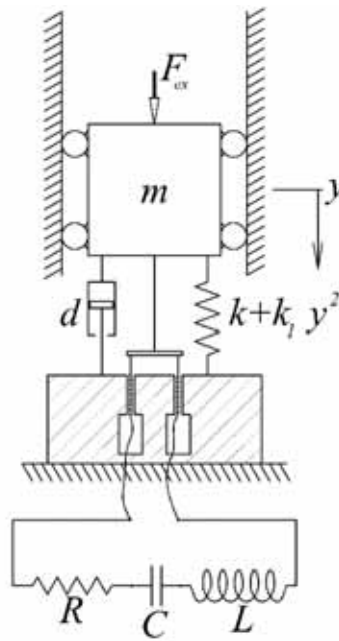


Figura 2.3 – Modelo físico hipotético do sistema eletromecânico com rigidez não-linear (fonte: o próprio autor)

Dentre os vários tipos de não-linearidades conhecidas para a rigidez mecânica, usaremos a do tipo Duffing, que descreve a força elástica como sendo um termo linear associada ao deslocamento e um termo associado ao cubo do deslocamento, como mostram as equações (2.35) e (2.36), que já apresentam a simbologia convencional, mostrada na Tabela 2.1.

$$k_t = k + k_1 x_1^2 \quad (2.35)$$

$$F_{el} = k x_1 + k_1 x_1^3 \quad (2.36)$$

k_t é a rigidez total;

k é o coeficiente linear da rigidez [N/m];

k_1 é o coeficiente não-linear da rigidez [N/m³];

x_1 é o deslocamento da massa [m];

F_{el} é a força elástica [N];

A energia potencial elástica da rigidez é escrita de acordo com a Equação (2.37).

$$Ep_{el} = \frac{1}{2}k x_1^2 + \frac{1}{4}k_1 x_1^4 \quad (2.37)$$

Ep_{el} sendo a energia potencial elástica não-linear [J]:

2.2.1 Equações do Sistema Eletromecânico com Rigidez Duffing

Então o sistema de equações governantes do movimento para o sistema eletromecânico com Rigidez Duffing ficará como mostrado na Equação (2.38)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}[-k x_1 - k_1 x_1^3 - d x_2 + B l x_4 + A_{ex} \cos(\omega_{ex} t)] \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{L}(-C^{-1} x_3 - R x_4 - B l x_2) \end{cases} \quad (2.38)$$

3 PROCEDIMENTO DE DEFINIÇÃO DOS VALORES DOS PARÂMETROS

Para o entendimento claro e objetivo do sistema eletromecânico que é estudado, é importante a definição dos parâmetros que discriminam os elementos de cada domínio, primeiramente, é necessário definir dos parâmetros do domínio mecânico. A escolha dos parâmetros do domínio elétrico será feita posteriormente. O sistema, é um modelo em macro escala e é baseado na aplicação como absorvedor eletromecânico automotivo. Deve ser capaz de absorver vibrações de baixa frequência na faixa de 2,0 Hz a 10,0 Hz. Para o estudo ficar relacionado com a aplicação desejada, supõe-se a modelagem de uma suspensão simplificada de automóvel e suas variáveis ficarão, portanto, restritas à ordem de grandeza adequada a essa situação.

3.1 Parâmetros do Domínio Mecânico Com Rigidez Linear

Baseando a escolha dos parâmetros no objetivo de projetar uma suspensão automotiva simplificada, assume-se o valor da massa m em 250,0 kg, que é a ordem de grandeza aproximada da quarta parte de um veículo. Assim, é possível definir os outros parâmetros em função da massa. A constante elástica da mola k em [N/m] pode ser definida calculando-se o deslocamento responsável pela força peso da massa, sendo sustentado somente pela mola e sem a presença do circuito elétrico. O valor desse deslocamento, que é escolhido levando-se em consideração o curso aproximado de uma suspensão automotiva, não deve ultrapassar a ordem de 0,1 m. No entanto, o valor da rigidez k é aproximado tendo como referência a frequência natural mecânica f_{nec} definida próxima a 2,0 Hz, este valor de f_{nec} não chega perto dos valores de frequência natural elétrica utilizados no estudo, pois, não tem-se como objetivo analisar o sistema nas condições que possam apresentar ressonância entre os dois subsistemas. Dessa maneira tem-se na Equação (3.1).

$$\omega_{nec} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f_{nec} \quad (3.1)$$

f_{nec} a frequência natural mecânica [Hz];

ω_{nec} a frequência natural mecânica [rad/s];

m a massa [Kg];

Então:

$$k = 39.478,0 \text{ N/m}$$

Conhecendo a melhor faixa de valores para k , assume-se o valor da constante elástica k como 40.000,0 N/m. Para esses valores de massa e rigidez a frequência natural mecânica f_{nec} tem valor muito próximo de 2,0 Hz. Substituindo o valor de k e m na Equação (3.1):

$$\omega_{nec} = 12,64 \text{ rad/s}$$

Substituindo a frequência natural ω_{nec} em [rad/s] na Equação (3.2) encontra-se o valor de frequência natural mecânica f_{nec} [Hz]:

$$f_{nec} = 2,01 \text{ Hz}$$

O parâmetro que define a constante de amortecimento d por enquanto terá valor igual a zero, pois, o interesse é explorar o comportamento dinâmico do sistema usando apenas o amortecimento eletromecânico. Dessa forma os parâmetros do domínio mecânico são:

$$m = 250,0 \text{ Kg}$$

$$k = 40.000,0 \text{ N/m}$$

$$d = 0 \text{ N.s/m}$$

3.1.1 Parâmetros da Fonte de Excitação Mecânica Externa

A fonte de excitação externa é uma força que ocorre no domínio mecânico. É uma função pela qual é possível simular as condições que são submetidas o sistema estudado. Tratando-se de uma suspensão automotiva simplificada, os parâmetros que definem essa função são ajustados conforme necessário para criar as condições que torne possível a exploração da natureza eletromecânica do absorvedor.

Retomando a Equação (2.27), do excitador mecânico:

$$F_{ex} = A_{ex} \cos(\omega_{ex} t)$$

Sendo:

F_{ex} é a força harmônica externa [N];

A_{ex} é a amplitude de movimento da fonte [N];

ω_{ex} é a frequência angular de oscilação da fonte [rad/s].

Afim de ajustar a função ao objetivo da modelagem usamos valores de frequência de excitação da ordem de 10,0 Hz, é usada a Equação (3.2). Então tem-se:

$$\omega_{ex} = 20\pi \text{ rad/s}$$

A amplitude da excitação A_{ex} [N] deve ser obtida de forma que a massa m , de 250,0 kg, movimente-se com amplitude da ordem de aproximadamente 0,01 m. Usando a simulação numérica e analisando vários valores, notamos que valor de A_{ex} sendo 5.000,0 N resulta em uma amplitude de movimento de aproximadamente 0,01 m, como pode ser visto na Figura 3.1. A simulação foi feita usando somente os valores de parâmetros do domínio mecânico. Então, o resultado consiste na movimentação da massa m sendo segurada somente pela mola k sem amortecimento de qualquer natureza, sendo excitado pela força externa com condições iniciais nulas. Considerando a Tabela 3.1, a Tabela 3.2 e a Tabela 3.3, com os parâmetros da simulação.

Tabela 3.1 – Tempo de integração e condições iniciais para o modelo linear desacoplado

Tempo de Integração			
t	[s]	Intervalo de Tempo	0 a 100
t	[s]	Intervalo sem Transiente	(84%) 84 a 100
Condições Iniciais			
$x0_1$	[m]	Posição	0,00
$x0_2$	[m/s]	Velocidade	0,00
$x0_3$	[C]	Carga Elétrica	0,00
$x0_4$	[A]	Corrente Elétrica	0,00

Tabela 3.2 – Parâmetros gerais da simulação para o modelo linear desacoplado

Parâmetros			
m	[Kg]	Massa	250,00
d	[N.s/m]	Amortecimento	0,00
k	[N/m]	Rigidez	40000,00
A_{ex}	[N]	Amplitude da Força	5000,00
f_{ex}	[Hz]	Frequência Externa	10

Tabela 3.3 – Frequências e razões de frequências presentes na simulação do modelo linear desacoplado

Frequências e Razões de Frequências			
f_{ex}	[Hz]	Freq. excitação externa	10,0000
f_{nmec}	[Hz]	Freq. natural mecânica	2,0132
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	4,9673

A simulação foi feita para o tempo de integração de 0 a 100 segundos com 58% de transiente retirado. Todas as respostas oriundas das soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias presentes nesse trabalho, como é o caso da Figura 3.1, utiliza o método de Runge-Kutta, que será comentado com mais detalhes no capítulo 5. A curva do histórico no tempo vista na Figura 3.1 é exibida em intervalo de tempo suficiente para mostrar com mais detalhamentos a forma de onda, como o sistema é forçado e não amortecido, o período de tempo usado é suficiente para mostrar a amplitude de movimento mostrado na Figura 3.1, do histórico no tempo e plano de fase.

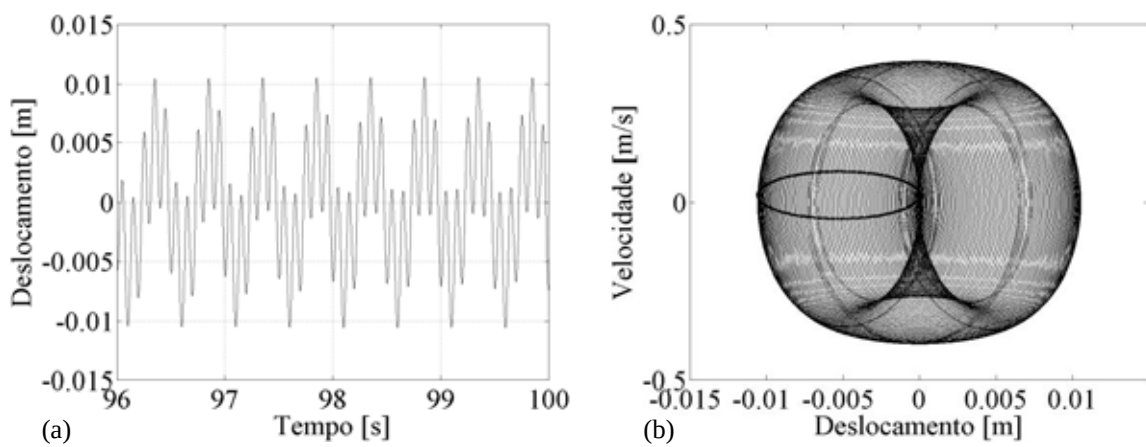


Figura 3.1 – Histórico no tempo (a) e plano de fase com seção de Poincaré (b)

Portanto os parâmetros que definem inicialmente a função da fonte de excitação mecânica externa são:

$$A_{ex} = 5.000,0 \text{ N}$$

$$f_{ex} = 10,0 \text{ Hz}$$

3.2 Parâmetros do Domínio Mecânico Com Rigidez Duffing

O modelo do sistema eletromecânico com rigidez Duffing tem valores de m , d , A_{ex} e f_{ex} iguais aos usados no modelo com rigidez linear, no entanto os parâmetros de rigidez usados para a configuração Duffing serão diferentes. Os novos parâmetros de rigidez serão ajustados de forma que as curvas de força elástica e energia potência elástica da rigidez Duffing, mostradas na Figura 3.2, sejam aproximadas às mesmas curvas da rigidez linear. Os valores de rigidez são mostrados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Valores de rigidez do modelo linear e não-linear

Tipo de Mola	Rigidez Linear “ k ” [N/m ³]	Rigidez Não-Linear “ k_1 ” [N/m]
Mola Linear	4.10^4	0
Mola Duffing	-4.10^4	4.10^7

Na Figura 3.2, são mostradas as curvas de força elástica F_{el} em função do deslocamento x_1 e energia potencial elástica Ep_{el} em função do deslocamento x_1 para diferentes valores de k e k_1 , de acordo com os valores da Tabela 3.4. As curvas resultam das Equações (3.1) e (3.2).

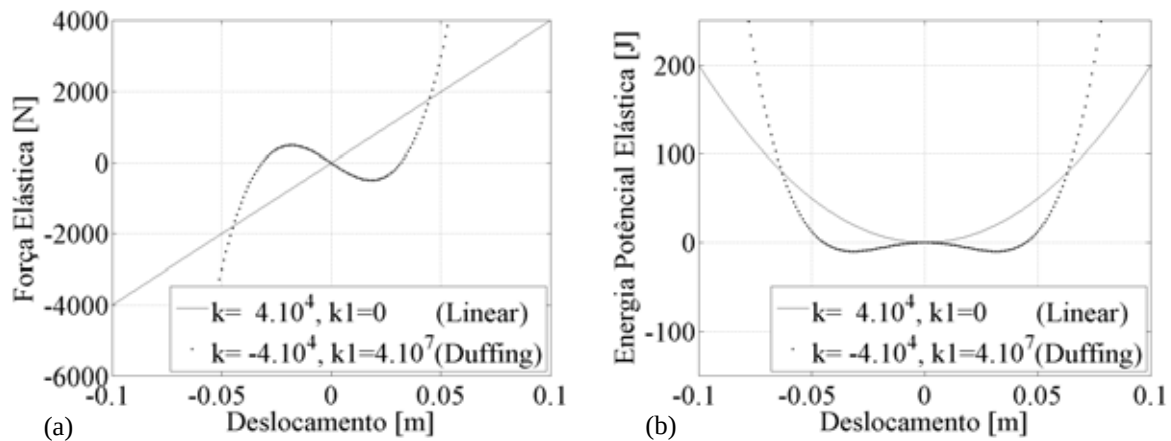


Figura 3.2 – Comparação das curvas de força elástica (a) e energia potencial elástica (b) entre os modelos linear e não-linear (Duffing)

3.3 Parâmetros do Domínio Elétrico

Outros parâmetros importantes são os relacionados ao domínio elétrico pois, são os parâmetros utilizados para obtenção do controle. No entanto, os valores de indutância L e resistência R devem assumir valores mínimos que representam a indutância e a resistência intrínseca da bobina do transdutor. O valor da capacitância C , no entanto, é arbitrário, sua contribuição para a dinâmica do sistema é avaliada juntamente com variações dos valores de indutância e resistência.

3.3.1 Dimensionamento da bobina do transdutor

Para a realização do dimensionamento da bobina, é necessário calcular os valores de indutância L , resistência R e o valor do comprimento do fio condutor l . Para isso é preciso saber qual a força que o amortecedor eletromagnético deve ser capaz de suportar. Visando atender a dedução dos parâmetros do sistema mecânico que supõe o projeto de um absorvedor automotivo simplificado, a força de amortecimento deve ser da ordem de dez vezes a força peso. Para

suportar picos de amplitude da força e deslocamento que normalmente ocorrem em suspensões veiculares, essa ordem de valor para a força de amortecimento é amplamente usada na indústria automotiva. Essa força de amortecimento eletromecânico pode ser vista na Equação (2.28), que também é conhecida como força de Laplace.

Sabendo que essa força de ser da ordem de dez vezes a força peso, a força F_b deve valer então 24.525,0 N. Através da força de amortecimento eletromecânico, é definida a corrente de operação da bobina. Assumindo que o produto $B l$ da Equação (2.28), mostrado também na Equação (2.31), é da ordem de 500,0.

O campo de indução magnética B pode ser encontrado em compostos magnéticos, respeitando condições de temperatura próximas ao zero absoluto, com valores que superam 17,0 T (TOMITA; MURAKAMI, 2003). Entretanto, o campo de indução magnética é mais comum de ser conseguido, em materiais ferromagnéticos à temperatura ambiente, com valores próximos de 2,0 T, ou menores (LIDE, 2009). Estimando o valor de B como sendo 2,0 T, pode ser calculado, também o valor de l . Usando a Equação (2.28), o valor de F_b e o produto $B l$. O valor da corrente x_4 encontrado é de 49,05 A.

Essa deve ser a ordem de valores da corrente elétrica na bobina. Dado o valor do produto $B l$ percebe-se que o valor do comprimento l está na ordem de 250,0 m.

Com base nos valores de indução magnética B , que é de 2,0 T, é realizado o cálculo do número de espiras que deve possuir a bobina, dessa forma o dimensionamento da mesma será mais preciso. A Figura 3.3 mostra o esquema geral de uma bobina feita de fio condutor.

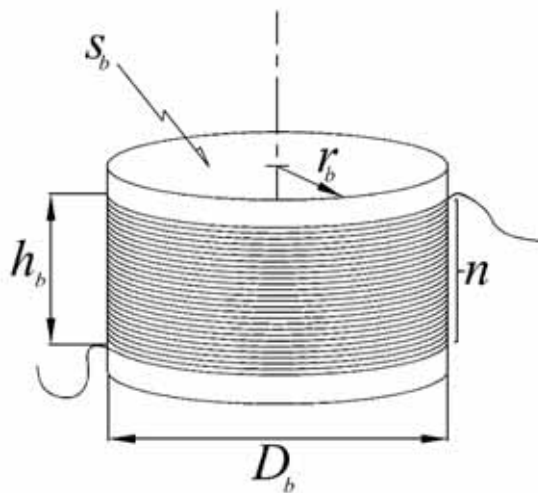


Figura 3.3 – Bobina do transdutor

De acordo com a Figura 3.3:

S_b é a área da bobina [m^2];

r_b é o raio da bobina [m];

D_b é o diâmetro da bobina [m];

n é o número de espiras da bobina;

h_b é a altura da bobina [m];

O número de espiras da bobina, por sua vez, é calculado de acordo com a Equação (3.10).

$$l = l_b n \quad (3.10)$$

l_b é o comprimento de cada espira da bobina [m];

O comprimento l_b de cada espira da bobina, por sua vez, é calculado com base no diâmetro da bobina como é mostrado na Equação (3.11).

$$l_b = \pi D_b \quad (3.11)$$

Substituindo a Equação (3.11) na Equação (3.10), é obtida a Equação (3.12):

$$l = \pi D_b n \quad (3.12)$$

Fazendo n em função de l , tem-se a Equação (3.13):

$$n = \frac{l}{\pi D_b} \quad (3.13)$$

Assumindo o diâmetro da bobina D_b como 0,1 m e o comprimento do fio condutor l da ordem de 250,0 m, obtém-se o número de espiras da bobina, que é da ordem de 795. Arredondando esse valor para 800, é calculado, usando Equação (3.12), o valor exato de l , usando n e D_b , esse valor de l é de 251,3 m.

O valor de l , por se tratar do tamanho do filamento da bobina, traz consigo uma relação diretamente proporcional ao valor de resistência da bobina, de acordo com Halliday (2007). O fio de comprimento l que é enrolado na forma de solenóide é responsável pelas características físicas da bobina que possui, como comentado anteriormente, valores próprios de indutância L

e resistência R que estão relacionados com o valor de l . A indutância é calculada de acordo com a Equação (3.14) (HALLIDAY, 2007).

$$L = \frac{4 \pi S_b \mu_r n^2}{h_b 10^7} \quad (3.14)$$

L é a indutância [H];

μ_r é o valor de permeabilidade magnética relativa do material do núcleo da bobina, sendo esse um valor adimensional;

A Equação (3.14) é uma das equações que podem ser usadas para a determinação do valor intrínseco da indutância da bobina. Para facilitar o projeto da bobina, sua área circular S_b será escrita em função de seu diâmetro D_b . O diâmetro é uma medida mais fácil de se adequar a desenhos e projetos de engenharia.

$$S_b = \pi \frac{D_b^2}{4} \quad (3.15)$$

Substituindo a Equação (3.15) na Equação (3.14), temos a indutância em função do diâmetro da bobina D_b , em função no número de espiras n , da permeabilidade magnética relativa μ_r e em função da altura da bobina h_b . Entretanto, o projeto da bobina é não-ideal e considera a dimensão dos fios condutores, dessa forma a altura da bobina h_b pode ainda ser escrita em função da área de seção transversal do fio S_f . A escolha da medida da área de seção do fio para ser usada no cálculo da indutância é baseada nos padrões da indústria, já que os fios condutores são descritos e comercializados utilizando essa medida como referência. A Tabela A.1 relacionando os valores de área de seção transversal do condutor S_f , a resistência do condutor por unidade de comprimento R_f e a corrente máxima suportada é mostrada no Apêndice A.

A Figura 3.4 mostra a seção transversal de um fio condutor. Como o diâmetro do fio conhecido, é possível calcular a altura da bobina, já que a mesma possui apenas uma camada de enrolamento e a distância entre duas espiras é desprezível, como mostra a Figura 3.5.

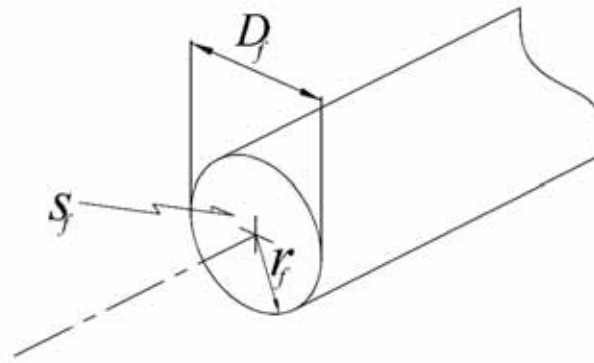


Figura 3.4 – Fio condutor

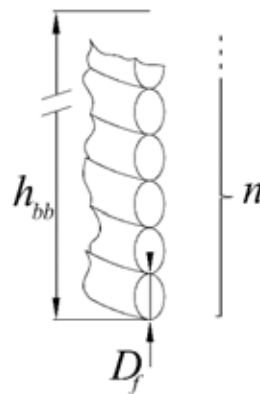


Figura 3.5 – Detalhe da associação dos fios na bobina

Sendo:

h_{bb} é a altura do bobina [mm];

S_f é a área da seção transversal do fio [mm];

D_f é o diâmetro do fio [mm];

r_f é o raio do fio [mm];

Então, a altura da bobina [mm] é mostrada na Equação (3.16).

$$h_{bb} = 2 n \sqrt{\frac{S_f}{\pi}} \quad (3.16)$$

A medida h_{bb} é a altura da bobina, o uso dessa unidade facilita os cálculos e o dimensionamento da bobina, entretanto a unidade de entrada da Equação (3.14) para a medida h_b é dada em metros, então é feita a conversão de medidas para o ajuste das equações. De acordo com a Equação (3.17).

$$h_b = h_{bb} 10^{-3} \quad (3.17)$$

Substituindo a Equação (3.16) na Equação (3.17). tem-se a Equação (3.18). A Equação (3.18) mostra a altura da bobina h_b , em função da área de seção transversal do fio S_f .e em função do número de espiras n .

$$h_b = 2 n 10^{-3} \sqrt{\frac{S_f}{\pi}} \quad (3.18)$$

Substitui-se a Equação (3.15) e a Equação (3.18) na Equação (3.14), de cálculo da indutância, assim, é obtida a indutância L em função da área S_f [mm], do diâmetro do bobina D_b , do número de espiras n e da permeabilidade relativa do núcleo μ_r . Então é obtida a Equação (3.19)

$$L = \frac{\pi^2 D_b^2 \mu_r n}{2 \sqrt{\frac{S_f}{\pi}} 10^4} \quad (3.19)$$

Dessa forma, é possível prever a bobina do transdutor e saber o valor de indutância L que a bobina pode possuir a partir da fixação do número de espiras da solenoide, do tipo de fio condutor e do diâmetro da bobina. É assumido que o condutor, com base na Tabela A.1 do Apêndice A, com capacidade de até 55,0 A, deve ter S_f de 5,26 mm². Visto que a bobina deve ser capaz de suportar a corrente elétrica, calculada anteriormente, de 49,05 A. A bobina tem diâmetro D_b de 0,1 m, com 800 espiras e prevendo núcleo ferroso, com propriedades ferromagnéticas e permeabilidade magnética relativa μ_r , que podem ser encontradas com valore de 250,0 (LIDE, 2009). Tem-se então, da Equação (3.19) a indutância da bobina:

$$L = 0,762749 \text{ H}$$

A resistência da bobina é calculada para um fio capaz de suportar a corrente anteriormente obtida de 49,05 A. Usando o valor da Tabela A.1 do Apêndice A, o fio capaz de suportar corrente igual ou superior que 49,05 A é o fio AWG10. No entanto, suporta correntes elétricas de 55,0 A. A resistência por unidade de comprimento obtida pela Tabela A.1 do

Apêndice A é chamada de R_f e multiplicado ao valor de l , é obtida a resistência total do fio da bobina, como mostra a Equação (3.20).

$$R = R_f l \quad (3.20)$$

Então, tem-se:

$$R = 0,824354 \, \Omega$$

Portanto os valores de indutância, comprimento e resistência da bobina são:

$$L = 0,762749 \, \text{H}$$

$$l = 251,3 \, \text{m}$$

$$R = 0,824354 \, \Omega$$

Os valores de resistência R e indutância L obtidos são utilizados como valores mínimos quando o modelo é submetido à simulações numéricas. O valor da capacitância C não é definido, pois, é um dos parâmetros de interesse juntamente com o valor de resistência.

4 ESTABILIDADE DO MODELO LINEAR

O estudo de estabilidade tem objetivo de encontrar as condições em que o sistema se torna estável. Fixando alguns parâmetros, é possível usar as condições para determinar uma ou mais faixas onde os parâmetros que podem sofrer alteração de valor, como por exemplo, a resistência, a capacitância e possivelmente a indutância, fazem com que o comportamento dinâmico do sistema eletromecânico seja estável e, da mesma maneira, pode-se evitar a faixa de parâmetros onde o sistema é instável. A análise da estabilidade é indispensável nos projetos de sistemas. É utilizado para essa análise o critério de Routh-Hurwitz (OGATA, 2000; DORF, 2001), essa ferramenta permite realizar a verificação e identificação de condições em que o sistema se comporta de forma estável, levando em consideração o sinal dos autovalores da matriz de estados do modelo matemático e será apresentado em sequência.

4.1 Critério de Routh-Hurwitz

O método de análise de estabilidade usando o critério de Routh-Hurwitz exige algumas operações matriciais, demonstradas a seguir. Para o cálculo das condições de estabilidade, as equações encontradas são submetidas a rotinas computacionais para criação de mapas onde será possível verificar a região onde os parâmetros de interesse são estáveis. Retomando o sistema dinâmico mostrado na Equação (2.34). Onde é mostrada a matriz de estados A , segue a Equação (4.1).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} & 0 & \frac{B l}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B l}{L} & -\frac{C^{-1}}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Para calcular a equação característica da matriz A , operação a seguir deve ser feita, onde I é a matriz identidade e λ é um escalar. Considerando a solução trivial onde $x=0$.

$$(A - \lambda I) x = 0 \quad (4.2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} & 0 & \frac{B l}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B l}{L} & -\frac{C^{-1}}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\lambda - \frac{d}{m} & 0 & \frac{B l}{m} \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\frac{B l}{L} & -\frac{C^{-1}}{L} & -\lambda - \frac{R}{L} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

Calculando o determinante da matriz mostrada na Equação (4.4), obtém-se a equação característica que é mostrada na Equação (4.5).

$$\lambda^4 + \left(\frac{d}{m} + \frac{R}{L}\right)\lambda^3 + \left(\frac{1}{C} + \frac{R d}{L m} + \frac{k}{m} + \frac{B^2 l^2}{L m}\right)\lambda^2 + \left(\frac{d}{C L m} + \frac{R k}{L m}\right)\lambda + \frac{k}{C L m} = 0 \quad (4.5)$$

Calculando as raízes da equação característica mostrada na Equação (4.5), é possível encontrar os autovalores da matriz A , no entanto, segundo o critério Routh-Hurwitz a análise da estabilidade pode ser feita sem saber os autovalores, mas, é necessário saber o sinal dos mesmo para gerar condições de estabilidade. Considerando a Equação (4.5) é igual a Equação (4.6).

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (4.6)$$

Com $a_0 > 0$, o critério Routh-Hurwitz mostra que se os determinantes, mostrados na Equação (4.7), na Equação (4.8), na Equação (4.9) e na Equação (4.10), resultarem em valores maiores que zero, os autovalores terão parte real negativa então, o sistema é estável.

$$\Delta_1 = |a_1| \quad (4.7)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \quad (4.10)$$

Para obter a estabilidade do sistema, os determinantes devem respeitar as seguintes condições: $\Delta_1 > 0$; $\Delta_2 > 0$; $\Delta_3 > 0$ e $\Delta_4 > 0$.

Calculando os quatro determinantes teremos as condições gerais de estabilidade, mostradas nas Equações (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14).

$$\Delta_1 = \frac{R}{L} + \frac{d}{m} \quad (4.11)$$

$$\Delta_2 = \frac{R}{C L^2} + \frac{R(B^2 l^2 + R d)}{L^2 m} + \frac{d(B^2 l^2 + R d + L k)}{L m^2} \quad (4.12)$$

$$\Delta_3 = \frac{L(kB^2 R d l^2 + kR^2 d^2) + m(kB^2 R^2 l^2 + dkR^3) + L^2 R d k^2}{L^3 m^3} + \frac{C[m(B^2 R d l^2 + R^2 d^2) + L(B^2 d^2 l^2 + R d^3 - 2Rkmd)] + R d m^2}{C^2 L^3 m^3} \quad (4.13)$$

$$\Delta_4 = \frac{C\{L[k(B^2 d^2 l^2 + R d^3) - 2R d k^2 m] + km(B^2 R d l^2 + R^2 d^2)\}}{C^3 L^4 m^4} + \frac{C^2[km(kB^2 R^2 l^2 + dkR^3) + Lk(kB^2 R d l^2 + kR^2 d^2) + L^2 R d k^3]}{C^3 L^4 m^4} + \frac{R d k m^2}{C^3 L^4 m^4} \quad (4.14)$$

4.2 Condições de Estabilidade do Sistema Eletromecânico

Aplicando os valores dos parâmetros, mostrados na Tabela 4.1, para cada uma das equações encontradas no item anterior, encontraremos a faixa de valores para os parâmetros de resistência R e capacitância C , os quais temos interesse no controle do sistema.

Tabela 4.1 – Parâmetros gerais usados na análise de estabilidade do modelo linear

Parâmetros			
m	[Kg]	Massa	250,00
d	[N.s/m]	Amortecimento	0,00
k	[N/m]	Rigidez Linear	$4 \cdot 10^4$
L	[H]	Indutância	0,762749
Bl	[T.m]	Variável de Acoplamento	502,6548

Substituindo os valores dos parâmetros, mostrados na Tabela 4.1, na Equação (4.11), tem-se o intervalo de R para que a Equação (4.11) seja satisfeita.

$$R > 0$$

Substituindo os valores dos parâmetros da Tabela 4.1 na Equação (4.12), tem-se o intervalo de C para que a Equação (4.12) seja satisfeita. Considerando que, $R > 0$.

$$C > 0$$

Da Equação (4.13), usando os valores da Tabela 4.1, tem-se que:

$$\forall R$$

Substituindo os valores da Tabela 4.1 na Equação (4.14), é obtido:

$$C > 0$$

Fazendo a união das quatro condições chegamos nos intervalos mostrados a seguir para a estabilidade;

$$R > 0$$

E;

$$C > 0$$

Contudo, respeitando a construção da bobina, a qual possui resistência intrínseca de $0,824354 \Omega$, o valor mínimo de R e C é limitado por esse fator construtivo, como é mostrado na Equação (4.15) e na Equação (4.16).

$$R = 0,824354 + R_v \quad (4.15)$$

$$C = C_v \quad (4.16)$$

Onde:

R é a resistência total do circuito RLC [Ω];

C é a capacitância total do circuito RLC [μF];

R_v é a parcela de resistência que se pode acrescentar no circuito [Ω] e;

C_v é a parcela de capacitância que se pode acrescentar no circuito em [μF].

Como na bobina somente é considerado o valor intrínseco de resistência, o valor de capacitância que podemos acrescentar ao circuito é igual ao valor total de capacitância do circuito RLC. Então a resistência deve ter valor:

$$R \geq 0,824354 \Omega$$

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O capítulo de resultados compreende as respostas dinâmicas obtidas dos modelos estudados para o sistema eletromecânico. As simulações da dinâmica foram realizadas para o modelo com rigidez linear e para o modelo com rigidez não-linear. É utilizado um software de cálculo numérico para a obtenção das respostas e geração das figuras que exibem gráficos ou diagramas. As respostas oriundas de soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias são obtidas pelo método Dormand-Prince que pertence à famílias de métodos numéricos Runge-Kutta para a solução de EDOs. O método Dormand-Prince também é conhecido como Runge-Kutta de quarta e quinta ordem, pois calcula a solução de quarta e quinta ordem, considerando o erro entre essas soluções como o erro numérico da solução, o erro da solução, então, é de quarta ordem. Seu uso em análise de respostas dinâmicas é sedimentado e é de ampla utilização na comunidade científica (CHAPRA, 2012).

5.1 Análise da Resposta do Modelo Linear

Para iniciarmos a análise do modelo linear, usaremos um grupo de parâmetros fixos e deixaremos alguns livres para a exploração do modelo, mostrados na Tabela 5.1. Esse grupo de valores foram escolhidos de acordo com os critérios já mostrados anteriormente, que levam em consideração a faixa de valores de parâmetros encontrados em um projetos de suspensão de carros de passeio.

Tabela 5.1 – Parâmetros gerais da simulação do modelo linear

Parâmetros			
m	[Kg]	Massa	250,00
d	[N.s/m]	Amortecimento	0,00
k	[N/m]	Rigidez Linear	4.10^4
L	[H]	Indutância	0,762749
R	[Ω]	Resistência	Variável
C	[μ F]	Capacitância	Variável
A_{ex}	[N]	Amplitude da Força	5000,00
f_{ex}	[Hz]	Frequência Externa	Variável
Bl	[T.m]	Variável de Acoplamento	502,6548

5.1.1 Análise da resposta em função da frequência do modelo linear

Com a fixação dos parâmetros básicos, é feita uma análise da resposta do sistema em função da frequência de excitação para quatro valores de R e para $C=1.400 \mu$ F. A análise da

resposta em função da frequência, também chamada de análise em frequência, tem grande importância na investigação dos modelos matemáticos pois mostra regiões de frequência onde o sistema pode entrar em ressonância ou comportamento indesejado. Ainda é possível identificar valores de resistência que diminuam esses efeitos. De acordo com os valores das Tabelas 5.2, 5.3 e 5.4.

Tabela 5.2 – Tempo de integração e condições iniciais para a simulação da resposta em função da frequência para o modelo linear

Tempo de Integração			
t	[s]	Intervalo de Tempo	0 a 100
t	[s]	Intervalo sem Transiente	(58%) 58 a 100
Condições Iniciais			
x_{0_1}	[m]	Posição	0,00
x_{0_2}	[m/s]	Velocidade	0,00
x_{0_3}	[C]	Carga Elétrica	0,00
x_{0_4}	[A]	Corrente Elétrica	0,00

Tabela 5.3 – Parâmetros específicos para a simulação do modelo linear

Parâmetros			
R	[Ω]	Resistência	0,824354; 50; 100 e 150
C	[μ F]	Capacitância	1.400
f_{ex}	[Hz]	Frequência Externa	0 até 20

Tabela 5.4 – Frequências e razões de frequências do modelo linear

Frequências e Razões de Frequências			
f_{ex}	[Hz]	Freq. excitação externa	0 até 20
f_{nmec}	[Hz]	Freq. natural mecânica	2,0132
f_{nele}	[Hz]	Freq. natural elétrica	4,8704
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	0 até 9,9346
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,4133

A Figura 5.1, obtida com base nos parâmetros mostrados nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, mostra os valores máximos de deslocamento em função da frequência de excitação externa. Na Figura 5.1 (a), que mostra a análise em frequência para $R=0,824354 \Omega$ os picos máximos de deslocamento estão em aproximadamente 1,25 Hz e 7,72 Hz, para os demais valores de R , 50 Ω , 100 Ω e 150 Ω o único pico máximo de deslocamento aparece em aproximadamente 1,25 Hz, 1,44 Hz e 1,68 Hz respectivamente. Pode ser visto ainda na Figura 5.1 (c), que parâmetro R causa maior diminuição do deslocamento máximo para o valor de 100 Ω , onde esse deslocamento é na faixa de 0,28 m.

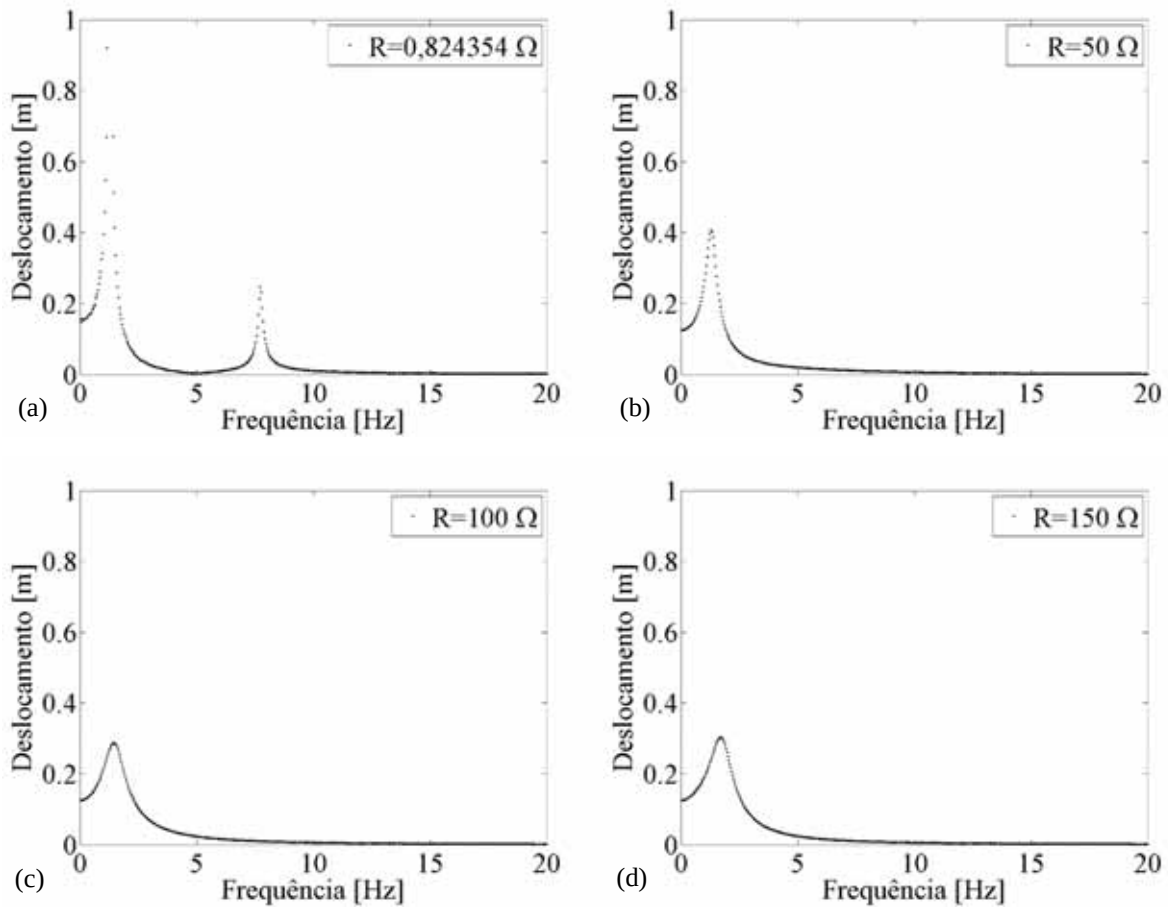


Figura 5.1 – Análise da resposta do modelo linear em função da frequência para diferentes valores de resistência

5.1.2 Correlação entre os parâmetros elétricos e o coeficiente de amortecimento mecânico

É possível determinar o coeficiente de amortecimento ζ no sistema mecânico relativo ao amortecimento do subsistema elétrico que atua como amortecedor. De acordo com os dados das Tabelas 5.5 e 5.6, a curva de ζ foi obtida em função da variação da resistência e para três valores diferentes de capacitância. O modelo foi simulado para condições iniciais não nulas e sem excitação harmônica. Com a aplicação do decremento logarítmico foi possível determinar a curva dos valores de ζ . O decremento logarítmico é um método usado para determinação do amortecimento mecânico, leva em consideração o período da resposta livre do sistema com condições iniciais não nulas e os picos de deslocamento encontrados a cada período de tempo.

Tabela 5.5 – Tempo de integração e condições iniciais para a simulação dos valores de ζ

Tempo de Integração			
t	[s]	Intervalo de Tempo	0 a 5
Condições Iniciais			
x_{01}	[m]	Posição	0,10
x_{02}	[m/s]	Velocidade	0,00
x_{03}	[C]	Carga Elétrica	0,00
x_{04}	[A]	Corrente Elétrica	0,00

Tabela 5.6 – Parâmetros específicos para a simulação dos valores de ζ em função de R

Parâmetros			
R	[Ω]	Resistência	0,824354 até 200
C	[μF]	Capacitância	1.400; 1.700 e 2.000
f_{ex}	[Hz]	Frequência Externa	0

Tabela 5.7 – Frequências e razões de frequências presentes na simulação dos valores de ζ em função de R

Frequências e Razões de Frequências			
f_{ex}	[Hz]	Freq. excitação externa	0,0000
f_{nmec}	[Hz]	Freq. natural mecânica	2,0132
f_{nele}	[Hz]	Freq. natural elétrica	4,8704; 4,4198 e 4,0749
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	0
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,4133; 0,4555 e 0,4940

De acordo com a Figura 5.2 com as curvas geradas para cada valor de R para os três valores da C , podemos perceber a influência das duas grandezas elétricas na mudança do coeficiente de amortecimento ζ . A faixa de valores de R possui um valor de máximo amortecimento para cada valor diferente de C . Como ainda pode ser visto na Figura 5.2, a região de valores de R onde é observado o maior amortecimento mecânico é próximo ao valor de 100 Ω , convergindo com as informações mostradas na Figura 5.1.

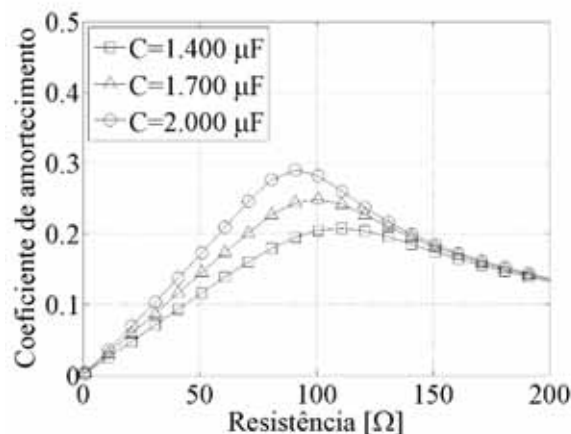


Figura 5.2 – Coeficiente de amortecimento em função da resistência para os três valores de capacitância

Para verificar a contribuição da capacitância na alteração dos valores do coeficiente de amortecimento ζ , o sistema foi posto a simulação para o intervalo de C e os valores de R

mostrados na Tabela 5.8, entretanto o intervalo de tempo utilizado e condições iniciais não foram alterados.

Tabela 5.8 – Parâmetros específicos para a simulação dos valores de ζ em função de C

Parâmetros			
R	[Ω]	Resistência	0,824354; 50; 100 e 150
C	[μF]	Capacitância	1.300 até 2.200
f_{ex}	[Hz]	Frequência Externa	0

Tabela 5.9 – Frequências e razões de frequências presentes na simulação dos valores de ζ em função de C

Frequências e Razões de Frequências			
f_{ex}	[Hz]	Freq. excitação externa	0,0000
f_{nmec}	[Hz]	Freq. natural mecânica	2,0131
f_{nele}	[Hz]	Freq. natural elétrica	5,0543 até 3,8852
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	0,9935
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,3983 até 0,5182

É mostrado na Figura 5.3 que o valor de C pode alterar a influência da R no aumento de amortecimento, fazendo com que o valor de ζ seja praticamente igual para valores próximos de $C=2.200 \mu\text{F}$ para os valores de $R=50 \Omega$ e $R=150 \Omega$. No entanto, os maiores valores de ζ ainda são atribuídos para valores de $R=100 \Omega$.

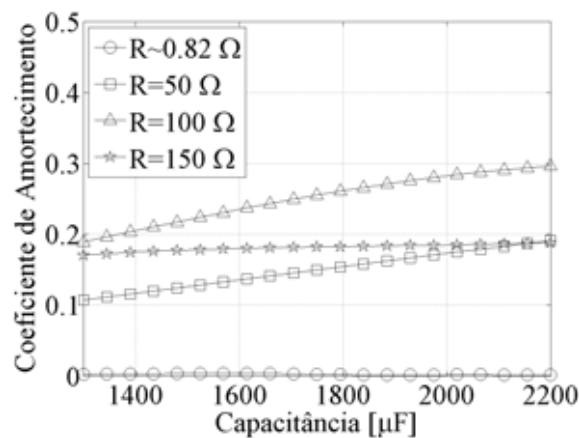


Figura 5.3 – Coeficiente de amortecimento em função da capacitância para os quatro valores de resistência

Considerando os valores das Tabelas 5.10 e 5.11, são geradas respostas do sistema para o mesmo tempo de integração mostrado na Tabela 5.5 usado para as curvas das Figuras 5.1 e 5.2. Juntamente com a resposta, são simuladas as curvas de envelope ou curvas exponenciais a partir dos valores de ζ obtidos por decremento logarítmico (RAO, 2009).

Tabela 5.10 – Parâmetros específicos para a simulação das respostas do modelo em oscilação livre e amortecida

Parâmetros			
R	$[\Omega]$	Resistência	0,824354; 50; 100 e 150
C	$[\mu F]$	Capacitância	1.400
f_{ex}	$[Hz]$	Frequência Externa	0

Tabela 5.11 – Frequências e razões de frequências presentes na simulação das respostas do modelo em oscilação livre e amortecida

Frequências e Razões de Frequências			
f_{ex}	$[Hz]$	Freq. excitação externa	0,0000
f_{nmec}	$[Hz]$	Freq. natural mecânica	2,0132
f_{nele}	$[Hz]$	Freq. natural elétrica	4,8704
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	0,0000
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,4133

As curvas da Figura 5.4 mostram a resposta simulando a vibração livre amortecida do sistema usada para a obtenção do coeficiente de amortecimento mecânico ζ e a curva de envelope gerada com o ζ obtido. Nota-se que a curva de envelope não coincide perfeitamente com todos os picos de deslocamentos existentes na resposta do modelo. Isso se deve ao fato de que o método de obtenção do ζ por decremento logarítmico é uma aproximação usada empiricamente em sistemas mecânicos com presença de amortecimento. O amortecimento presente no sistema eletromecânico é oriundo da força de Laplace resultante da ação aplicada sobre o transdutor conectado eletricamente a um circuito RLC que, tem frequência de oscilação natural. Portanto, o sistema eletromecânico tem dinâmica aproximada ao sistema mecânico viscoso.

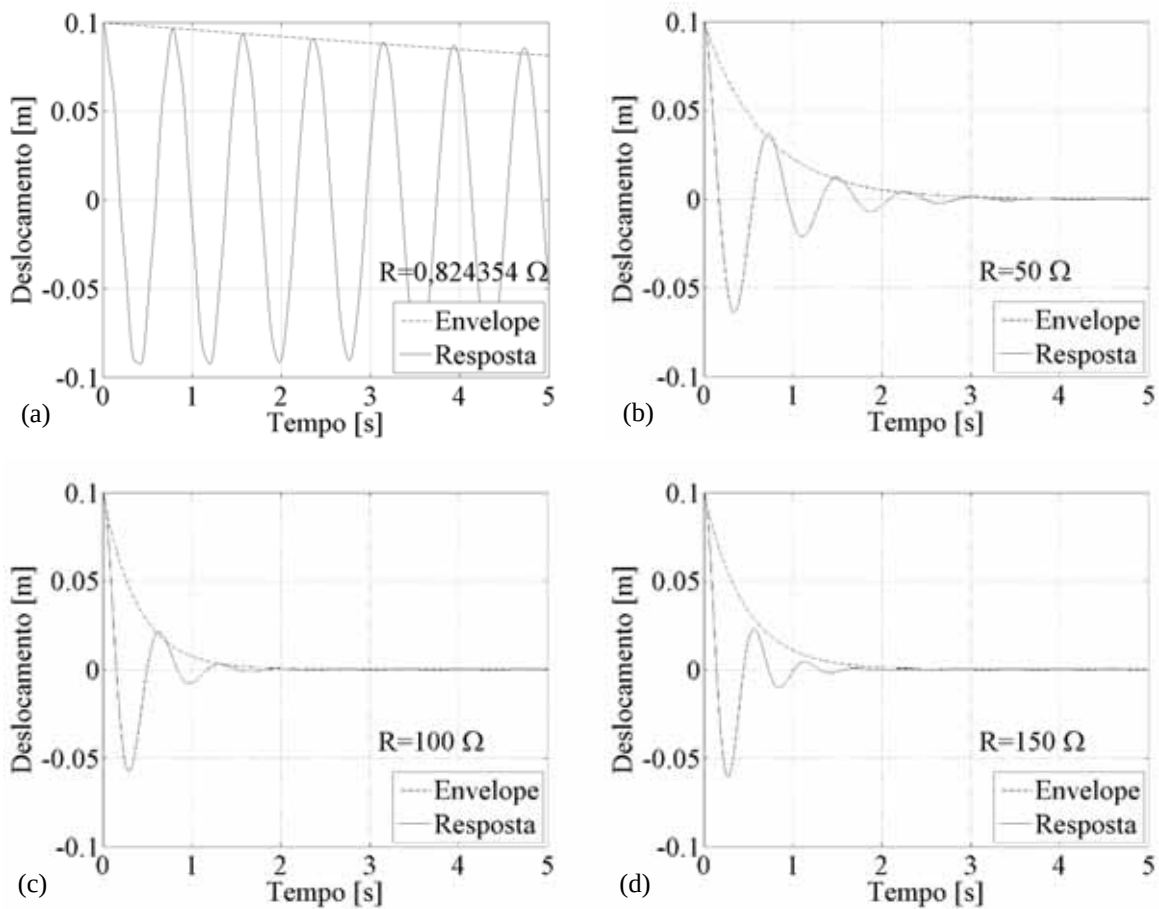


Figura 5.4 – Resposta do sistema em oscilação livre e amortecida junto com a curva de envelope para cada valor de resistência

5.1.3 Análise dos autovalores do modelo linear

É realizada ainda a análise dos autovalores raízes da Equação (4.6) obtida da matriz de estados do modelo linear. A simulação é feita usando o intervalo de R e os valores de C mostrados na Tabela 5.12. Os parâmetros gerais da simulação são mostrados na Tabela 5.1.

Tabela 5.12 – Parâmetros específicos para a simulação dos autovalores

Parâmetros			
R	[Ω]	Resistência	0,824354 até 200
C	[μF]	Capacitância	1.400

A análise dos autovalores, mostrada na Figura 5.5, indica alteração da dinâmica conforme ocorre a variação do parâmetro R . Nota-se que nas proximidades de $R=70 \Omega$ ocorre alteração na curva dos autovalores indicando mudança na dinâmica do sistema, a mudança na dinâmica do sistema, que pode ser observada na Figura 5.2, trata-se da inflexão da curva de ζ

nessa mesma região, onde $R=70\ \Omega$. A Figura 5.6 mostra o lugar natural das raízes, todas as raízes estão no semiplano esquerdo, sendo esse um sistema estável.

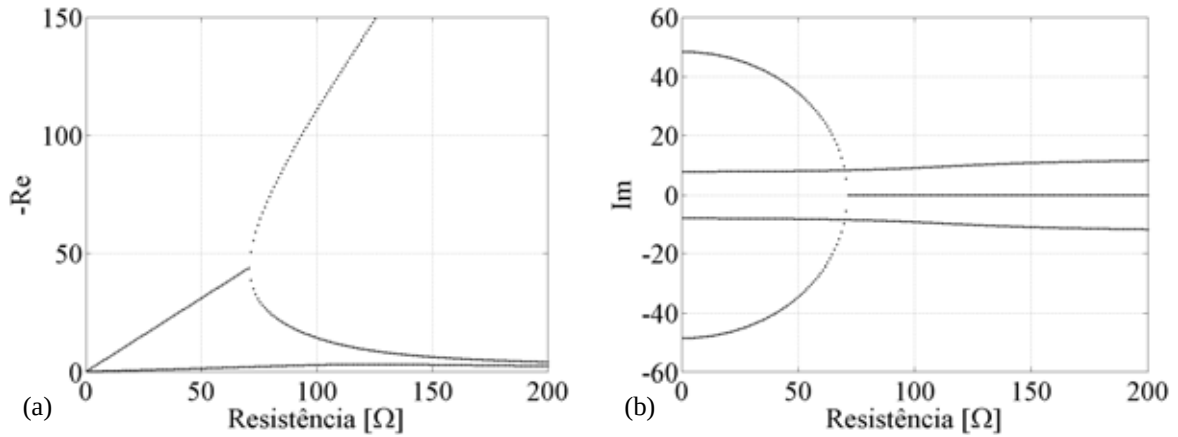


Figura 5.5 – Parte real (a) e parte imaginária (b) dos autovalores gerados com base no parâmetros da Tabela 5.12

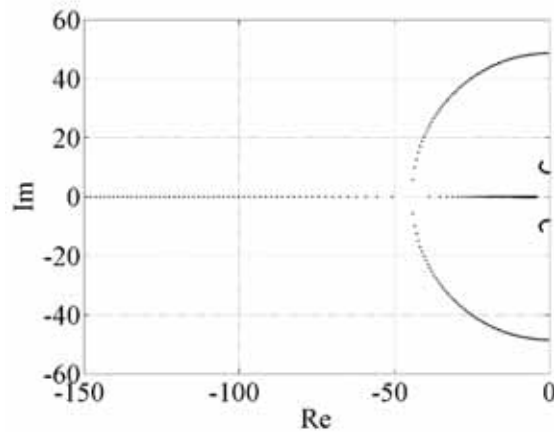


Figura 5.6 – Lugar natural das raízes dos autovalores gerados com base no parâmetros da Tabela 5.12

Na Figura 5.7 são comparadas as curvas do coeficiente de amortecimento ζ e as curvas dos valores da parte real do terceiro autovalor no mesmo intervalo de R . Os valores das simulações são mostrados nas Tabelas 5.13 e 5.14.:

Tabela 5.13– Parâmetros específicos usados para a comparação

Parâmetros			
R	$[\Omega]$	Resistência	0,824354 até 200
C	$[\mu F]$	Capacitância	1.400; 1.700 e 2.000
f_{ex}	$[Hz]$	Frequência Externa	0

Tabela 5.14 – Frequências e razões de frequências presentes na comparação

Frequências e Razões de Frequências			
f_{ex}	$[Hz]$	Freq. excitação externa	0
f_{nmec}	$[Hz]$	Freq. natural mecânica	2,0132
f_{nele}	$[Hz]$	Freq. natural elétrica	4,8704; 4,4198 e 4,0749
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	0
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,4133; 0,4555 e 0,4940

A Figura 5.7 mostra a comparação das curvas do ζ com as curvas da parte real do terceiro autovalor obtido pelo cálculo da raiz das equações características.

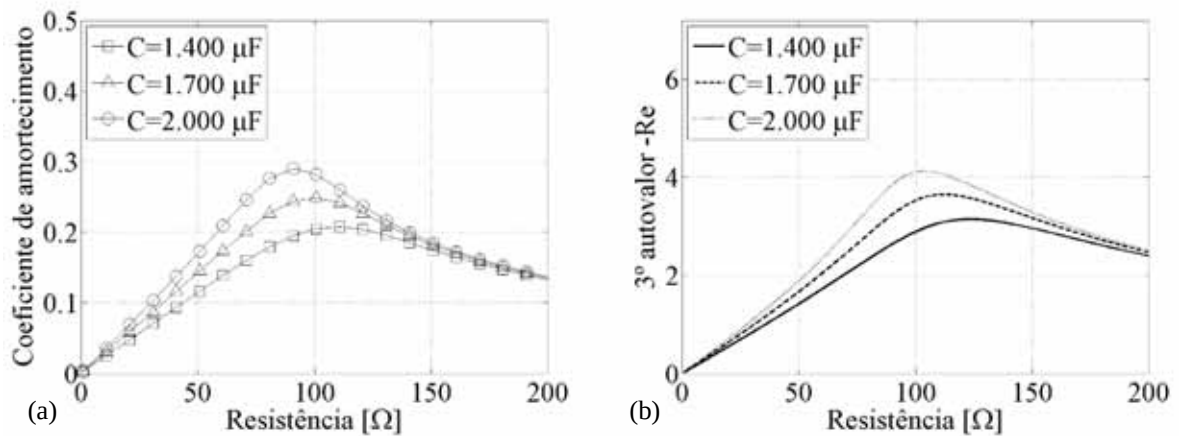


Figura 5.7 – Comparação das curvas do coeficiente de amortecimento obtidas por decremento logarítmico (a), com as curvas da parte real do terceiro autovalor, em função da resistência elétrica (b), para os mesmos três valores de capacitância

5.2 Análise da Resposta do Modelo com Rigidez Não-linear Tipo Duffing

A análise do modelo não-linear, mostra faixas de parâmetros as quais a dinâmica pode ter comportamento caótico. Saber quais são essas faixas é importante para projetos de engenharia, pois, é possível evitar valores que resultem em instabilidade. A Tabela 5.15, mostra os parâmetros base para as simulações do modelo não-linear. Os valores são iguais aos valores base usados nas simulações do modelo linear com exceção dos parâmetros de rigidez k e k_1 da mola Duffing.

Tabela 5.15 – Parâmetros gerais da simulação do modelo com rigidez não-linear tipo Duffing

Parâmetros			
m	[Kg]	Massa	250,00
d	[N.s/m]	Amortecimento	0,00
k	[N/m]	Rigidez Linear	-4.10^4
k_1	[N/m ³]	Rigidez Não-linear	4.10^7
L	[H]	Indutância	0,762749
R	[Ω]	Resistência	Variável
C	[μ F]	Capacitância	Variável
A_{ex}	[N]	Amplitude da Força	5000,00
f_{ex}	[Hz]	Frequência Externa	Variável
Bl	[T.m]	Variável de Acoplamento	502,6548

5.2.1 Análise da resposta em função da frequência do modelo com rigidez não-linear tipo Duffing

A análise da resposta em frequência é importante para conhecer melhor o comportamento do sistema para cada valor da frequência harmônica externa aplicada ao sistema eletromecânico. Os valores de tempo de simulação e condições iniciais são mostrados na Tabela 5.16. Na Tabela 5.17, são mostrados os valores dos parâmetros usados para a próxima simulação e na Tabela 5.18 são mostradas as frequências e razões de frequências presentes na simulação.

Tabela 5.16 – Tempo de integração e condições iniciais para a simulação do modelo com rigidez não-linear tipo Duffing

Tempo de Integração			
t	[s]	Intervalo de Tempo	0 a 100
t	[s]	Intervalo sem Transiente	(58%) 58 a 100
Condições Iniciais			
x_{01}	[m]	Posição	0,00
x_{02}	[m/s]	Velocidade	0,00
x_{03}	[C]	Carga Elétrica	0,00
x_{04}	[A]	Corrente Elétrica	0,00

Tabela 5.17 – Parâmetros específicos para a simulação da resposta em frequência do modelo não-linear tipo Duffing

Parâmetros			
R	$[\Omega]$	Resistência	0,824354; 50; 100 e 150
C	$[\mu F]$	Capacitância	1.400
f_{ex}	$[Hz]$	Frequência Externa	0 até 20

Tabela 5.18 – Frequências e razões de frequências da resposta em frequência do modelo não-linear tipo Duffing

Frequências e Razões de Frequências			
f_{ex}	$[Hz]$	Freq. excitação externa	0 até 20
f_{nmec}	$[Hz]$	Freq. natural mec. referência do modelo Linear	2,0132
f_{nele}	$[Hz]$	Freq. natural elétrica	4,8704
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	0 até 9,9346
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,4133

A análise em frequência mostra os picos no deslocamento para cada frequência simulada. É possível notar que mesmo nas respostas onde o amortecimento mecânico é maior, existe um salto nesses valores máximos de deslocamento em faixas aproximadas de valores de frequência, exceto para a resposta com menor amortecimento, onde se nota esse comportamento para outras faixas de frequência.

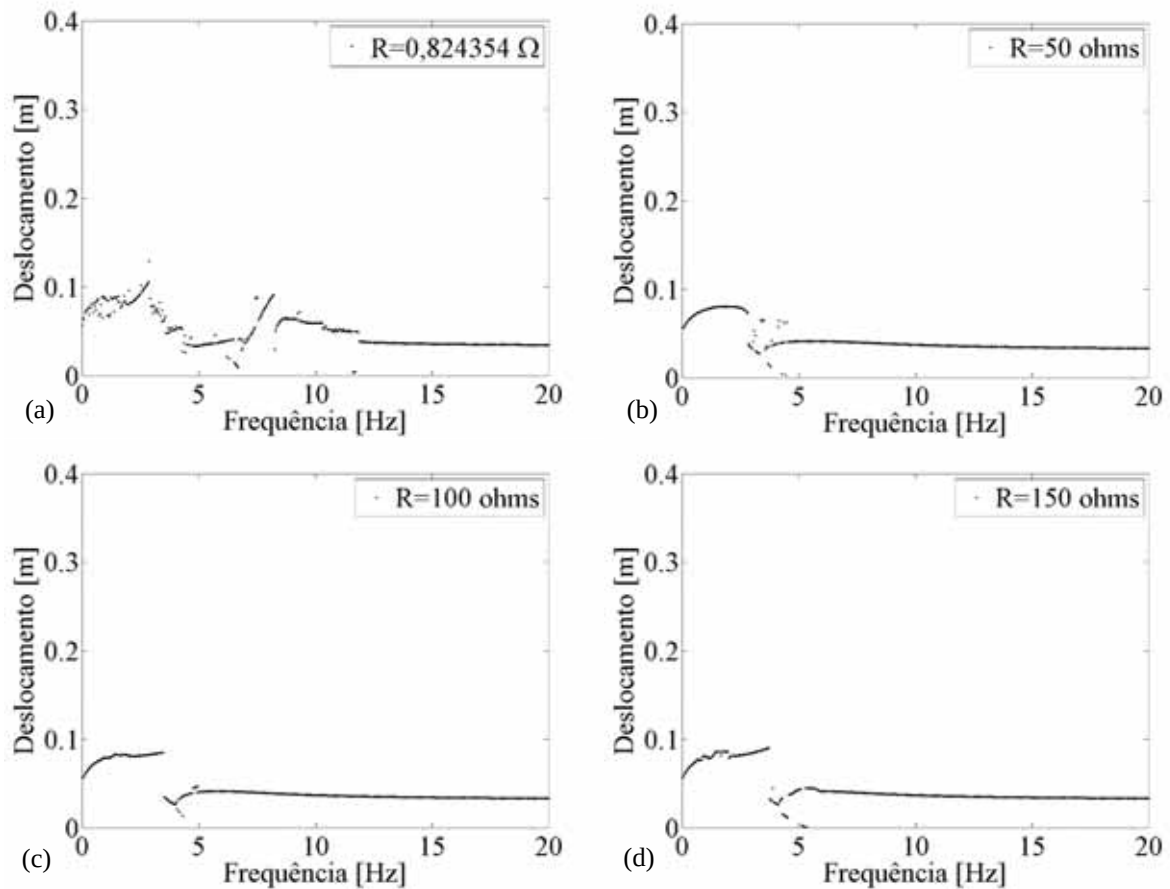


Figura 5.8 – Análise da resposta em função de frequência do modelo com rigidez não-linear tipo Duffing

5.2.2 Análise exploratória da resposta dinâmica do modelo com rigidez Duffing

Para aprofundar a análise do comportamento dinâmico do sistema, foram realizados diagramas de bifurcação do modelo matemático, variando-se o parâmetro de bifurcação C , para cada um dos 4 valores de frequência f_{ex} compreendidos de 1 Hz até 4 Hz. Contudo, para obter melhor entendimento da influência das faixas de valores e obter melhor correlação desse parâmetro com a dinâmica, foi preciso simular as respostas do modelo, atribuindo o valor ao parâmetro R de forma que ocorra menor amortecimento mecânico. Assim, as respostas do modelo para a situação em que existem maior possibilidade de ocorrer dinâmica caótica ou dinâmica que não seja periódica são analisadas. Os valores da Tabela 5.15 mostram os parâmetros gerais da simulação. Os valores da Tabela 5.19 mostram o intervalo de tempo e intervalo de remoção de transiente para esse e os demais diagramas de bifurcação que serão exibidos.

Tabela 5.19 – Tempo de integração e condições iniciais para a geração de diagramas de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing

Tempo de Integração			
t	[s]	Intervalo de Tempo	0 a 1000
t	[s]	Intervalo sem Transiente	(58%) 580 a 1000
Condições Iniciais			
$x0_1$	[m]	Posição	0,00
$x0_2$	[m/s]	Velocidade	0,00
$x0_3$	[C]	Carga Elétrica	0,00
$x0_4$	[A]	Corrente Elétrica	0,00

5.2.2.1 Variação da capacitância e análise da dinâmica com $f_{ex}=1$ Hz

As Tabelas 5.20 e 5.21 mostram os valores dos parâmetros específicos para essa simulação e os valores das frequências e razões de frequências presentes no sistema respectivamente.

Tabela 5.20 – Parâmetros específicos para a geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=1$ Hz

Parâmetros			
R	[Ω]	Resistência	0,824354
C	[μ F]	Capacitância	1.250 até 2.500
f_{ex}	[Hz]	Frequência Externa	1

Tabela 5.21 – Frequências e razões de frequências presentes na geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=1$ Hz

Frequências e Razões de Frequências			
f_{ex}	[Hz]	Freq. excitação externa	1,0000
f_{nmec}	[Hz]	Freq. natural mecânica	2,0132
f_{nele}	[Hz]	Freq. natural elétrica	5,1544 até 3,6447
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	0,4967
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,3906 até 0,5524

O diagrama de bifurcação mostrado na Figura 5.9, é gerado a partir dos parâmetros das Tabelas 5.19, 5.20 e 5.21, mostra os picos máximos de deslocamento do período onde não há transiente do histórico no tempo para cada valor de C . Assim, é possível associar o comportamento dinâmico do sistema eletromecânico para algumas faixas de valores de C . Os indicadores ordenados alfabeticamente de “a” até “f” na Figura 5.9, mostram valores de C utilizados na realização de simulações do modelo para o histórico no tempo, plano de fase, seção de Poincaré e FFT, os quais serão mostrados em sequência. As retas indicam os valores de C onde se obteve alguns dos comportamentos dinâmicos mais significativos encontrados na exploração desse modelo para a frequência externa de 1 Hz.

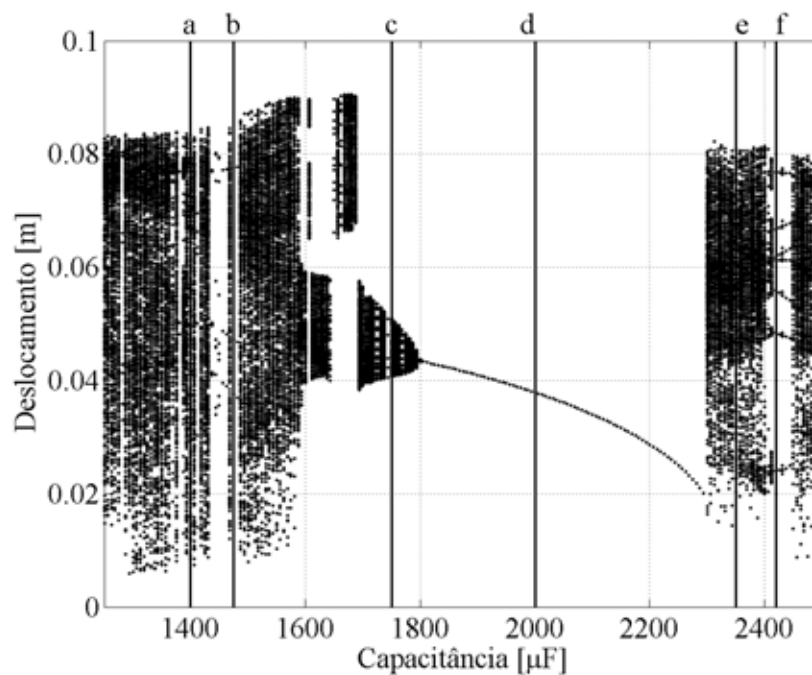


Figura 5.9 – Diagrama de bifurcação de capacitância para $f_{ex}=1$ Hz. Valores indicados: $C_a=1.400$ μF , $C_b=1.475$ μF , $C_c=1.750$ μF , $C_d=2.000$ μF , $C_e=2.350$ μF e $C_f=2.420$ μF

A exploração toma como base os valores da Tabela 5.22 que mostra os períodos de tempo total e tempo sem transiente juntamente com as condições iniciais usados para as simulações de histórico no tempo, plano de fase e FFT e, os valores da Tabela 5.23 que mostra

os períodos de tempo total e tempo sem transiente juntamente com as condições iniciais usados para as simulações da seção de Poincaré. Esses valores serão iguais para a mesma classe de resultados.

Tabela 5.22 – Tempo de integração e condições iniciais para histórico no tempo, plano de fase e FFT do modelo com rigidez não-linear tipo Duffing

Tempo de Integração			
t	[s]	Intervalo de Tempo	0 a 1000
t	[s]	Intervalo sem Transiente	(90%) 900 a 1000
Condições Iniciais			
x_{0_1}	[m]	Posição	0,00
x_{0_2}	[m/s]	Velocidade	0,00
x_{0_3}	[C]	Carga Elétrica	0,00
x_{0_4}	[A]	Corrente Elétrica	0,00

Tabela 5.23 – Tempo de integração e condições iniciais para seção de Poincaré do modelo com rigidez não-linear tipo Duffing

Tempo de Integração			
t	[s]	Intervalo de Tempo	0 a 25000
t	[s]	Intervalo sem Transiente	(20%) 5000 a 25000
Condições Iniciais			
x_{0_1}	[m]	Posição	0,00
x_{0_2}	[m/s]	Velocidade	0,00
x_{0_3}	[C]	Carga Elétrica	0,00
x_{0_4}	[A]	Corrente Elétrica	0,00

As Tabelas 5.24 e 5.25 mostram os valores dos parâmetros específicos usados e as frequências e razões de frequências presentes nas simulações do histórico no tempo, plano de fase, seção de Poincaré e FFT para os valores de C marcados de “a” até “f” indicados na Figura 5.9.

Tabela 5.24 – Parâmetros específicos para a simulação com $f_{ex}=1$ Hz

Parâmetros			Valor (valores de C indicados na Figura 5.9)					
			a	b	c	d	E	F
R	[Ω]	Resistência	0,824354					
C	[μ F]	Capacitância	1.400	1.475	1.750	2.000	2.350	2.420
f_{ex}	[Hz]	Frequência Externa	1					

Tabela 5.25– Frequências e razões de frequências com $f_{ex}=1$ Hz

Frequências e Razões de Frequências			Valor (valores de C indicados na Figura 5.9)					
			a	b	c	d	e	f
f_{ex}	[Hz]	Freq. excitação externa	1,0000					
f_{nmec}	[Hz]	Freq. natural mecânica	2,0132					
f_{nele}	[Hz]	Freq. natural elétrica	4,8704	4,7450	4,3562	4,0749	3,7592	3,7044
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	0,4967					
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,4133	0,4234	0,4621	0,4940	0,5355	0,5434

Valor (a), $C_a=1.400 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=1 \text{ Hz}$

A resposta do modelo para o valor $C_a=1.400 \mu\text{F}$, mostra indícios de comportamento caótico que pode ser observado desde o valor inicial de $C=1.250 \mu\text{F}$ até perto de $C=1.430 \mu\text{F}$ e aparece novamente de aproximadamente $C=1.480 \mu\text{F}$ até próximo a $C=1.600 \mu\text{F}$ de forma similar.

A Figura 5.10 mostra a resposta simulada para o valor C_a , essas respostas apontam dinâmica considerada caótica, notada pela seção de Poincaré característica para esse tipo de comportamento. O plano de fase evidencia a ausência de períodos definidos e a FFT mostra o espectro de frequência espalhado ainda que haja um pico bem definido perto da frequência de excitação externa de 1 Hz e outro pico menos evidente perto da frequência natural mecânica, que por base no sistema linear, fica próximo de 2 Hz.

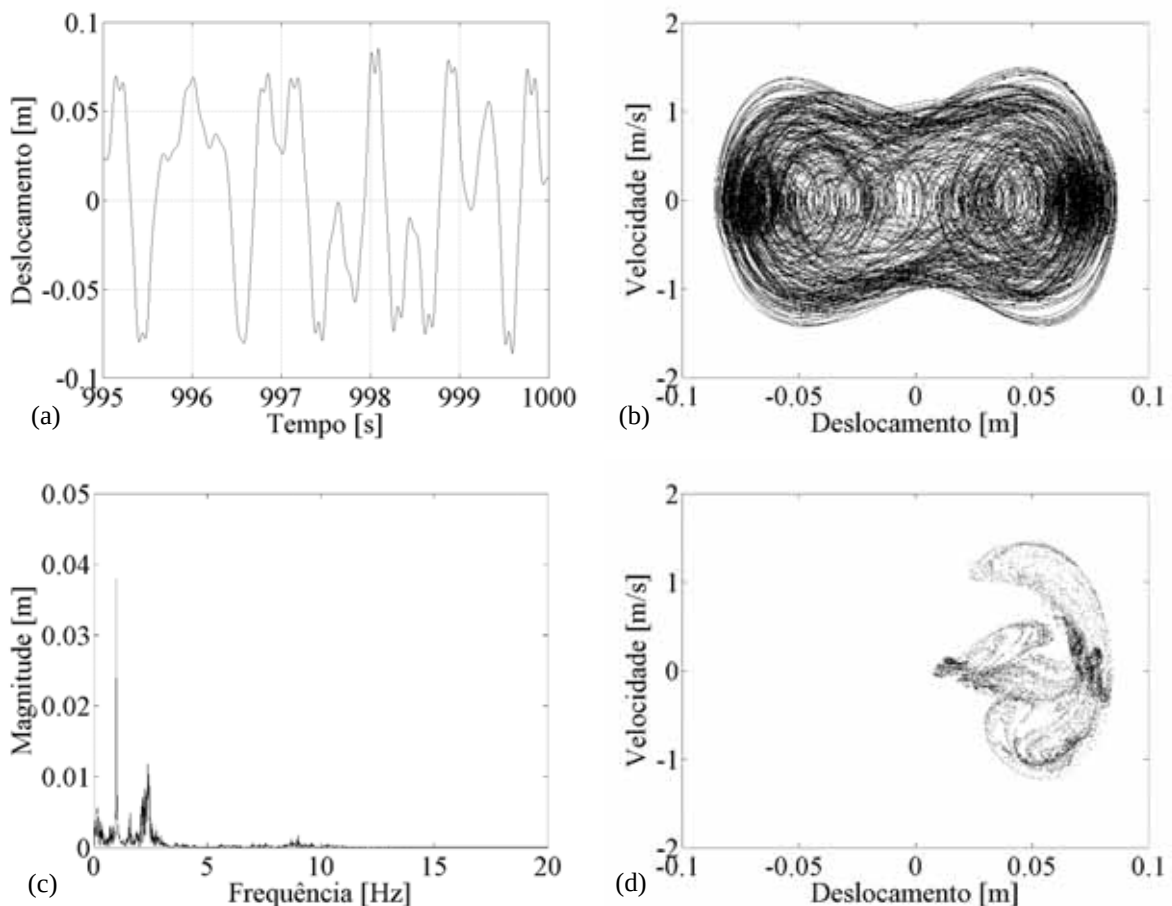


Figura 5.10 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=1 \text{ Hz}$ e $C_a=1.400 \mu\text{F}$

Valor (b), $C_b=1.475 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=1 \text{ Hz}$

O próximo valor de C é mostrado Tabelas 5.24 e 5.25. A resposta mostrada na Figura 5.11 representa a dinâmica encontrada de forma predominante no pequeno intervalo entre $C=1.430 \mu\text{F}$ e $C=1.480 \mu\text{F}$ aproximadamente. Essa resposta é mostrada para o valor C_b que apresenta predominância de comportamento multiperifódico com três períodos, mostrado pelo plano de fase e seção e Poincaré. A dinâmica se mostra multiperifódica.

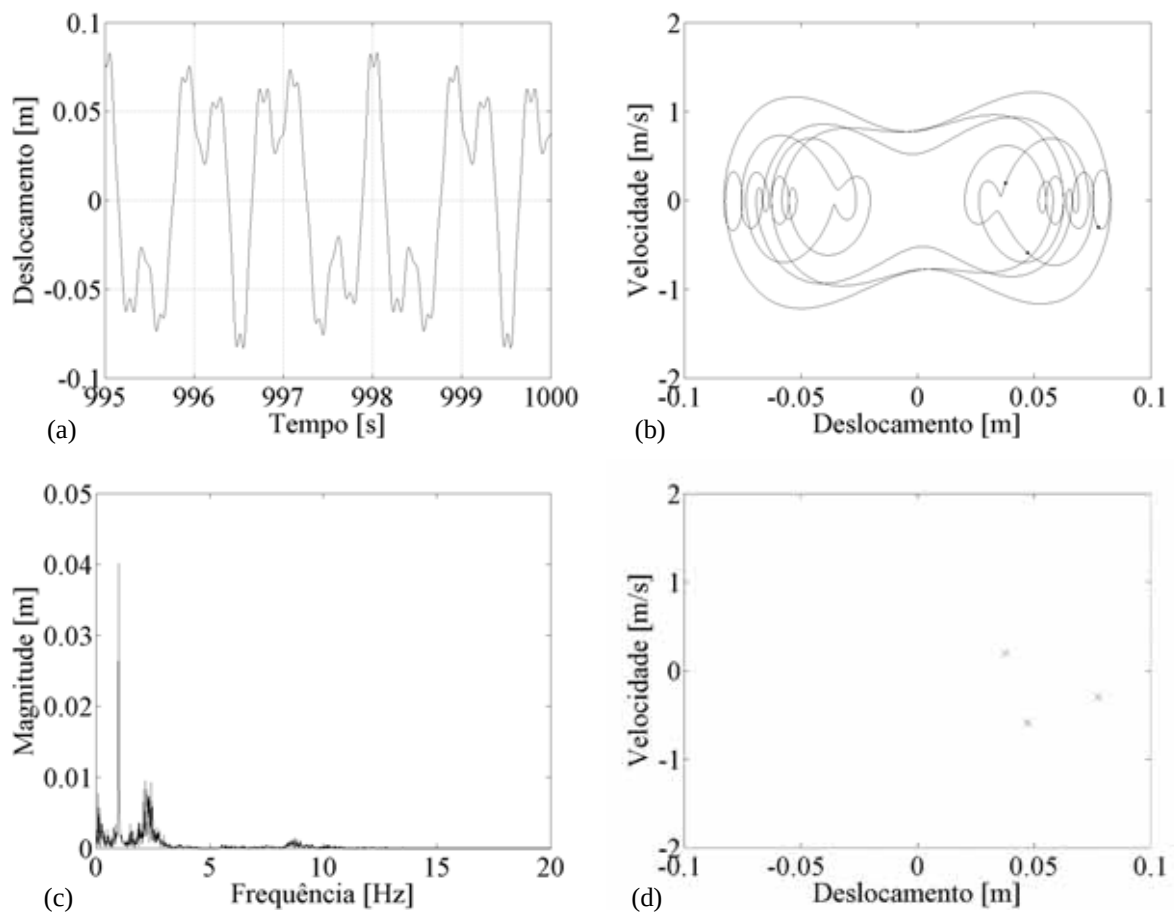


Figura 5.11 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=1 \text{ Hz}$ e $C_b=1.475 \mu\text{F}$

Valor (c), $C_c=1.750 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=1 \text{ Hz}$

O terceiro valor de C mostrado no diagrama de bifurcação da figura 5.9 e valor que está indicado pela reta com a letra “c”, tem seus resultados de histórico no tempo, plano de fase, seção de Poincaré e FFT mostrados com base nos valores específicos de parâmetros para o valor de C_c presentes nas Tabelas 5.24 e 5.25.

Os resultados mostrados na Figura 5.12, apresentam a resposta dinâmica do sistema para o valor de C_c , no entanto, representa a dinâmica predominante encontrada no intervalo de aproximadamente $C=1.600 \mu\text{F}$ até $C=1.800 \mu\text{F}$. Essa resposta apresenta dinâmica quase-periódica onde são encontrados múltiplos períodos. No entanto, o mesmo período pode se repetir, esse comportamento é oriundo do acoplamento eletromecânico.

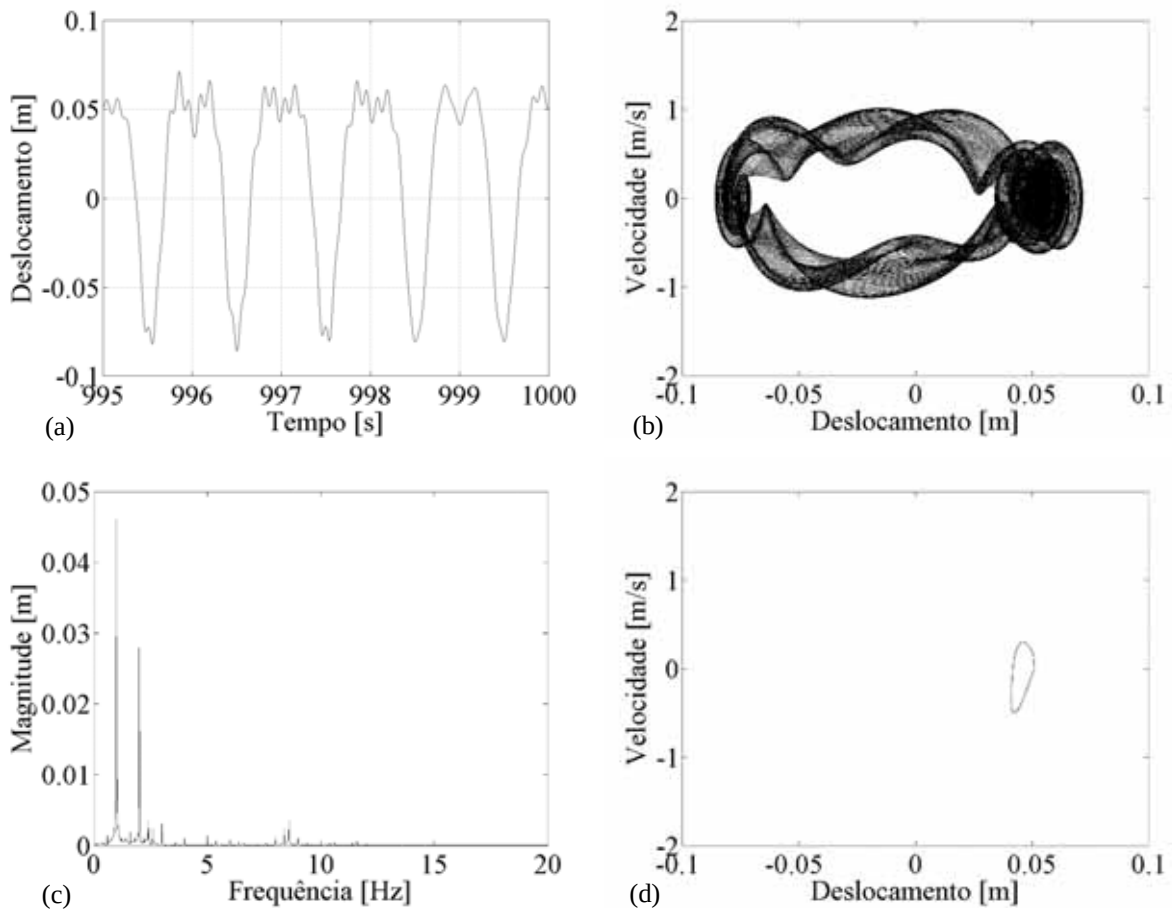


Figura 5.12 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=1 \text{ Hz}$ e $C_c=1.750 \mu\text{F}$

Valor (d), $C_d=2.000 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=1 \text{ Hz}$

O valor de C mostrado no diagrama de bifurcação da Figura 5.9 e, que está indicado pela letra “d”, tem seus resultados de histórico no tempo, plano de fase, seção de Poincaré e FFT mostrados na Figura 5.13 com base nos valores específicos de parâmetros para o valor de C_d presentes nas Tabelas 5.24 e 5.25.

A dinâmica encontrada nas respostas do modelo, vista na Figura 5.13 apresenta a maior faixa contínua com o mesmo comportamento visto na Figura 5.9, do diagrama de bifurcação. As simulações do modelo com o valor C_d exibem dinâmica de um período apenas, os picos na curva da FFT mostra com destaque a frequência de 1 Hz da força harmônica e a frequência de aproximadamente 2 Hz que remete à frequência natural mecânica. A resposta predomina de $C=1.800 \mu\text{F}$ até $C=2.300 \mu\text{F}$.

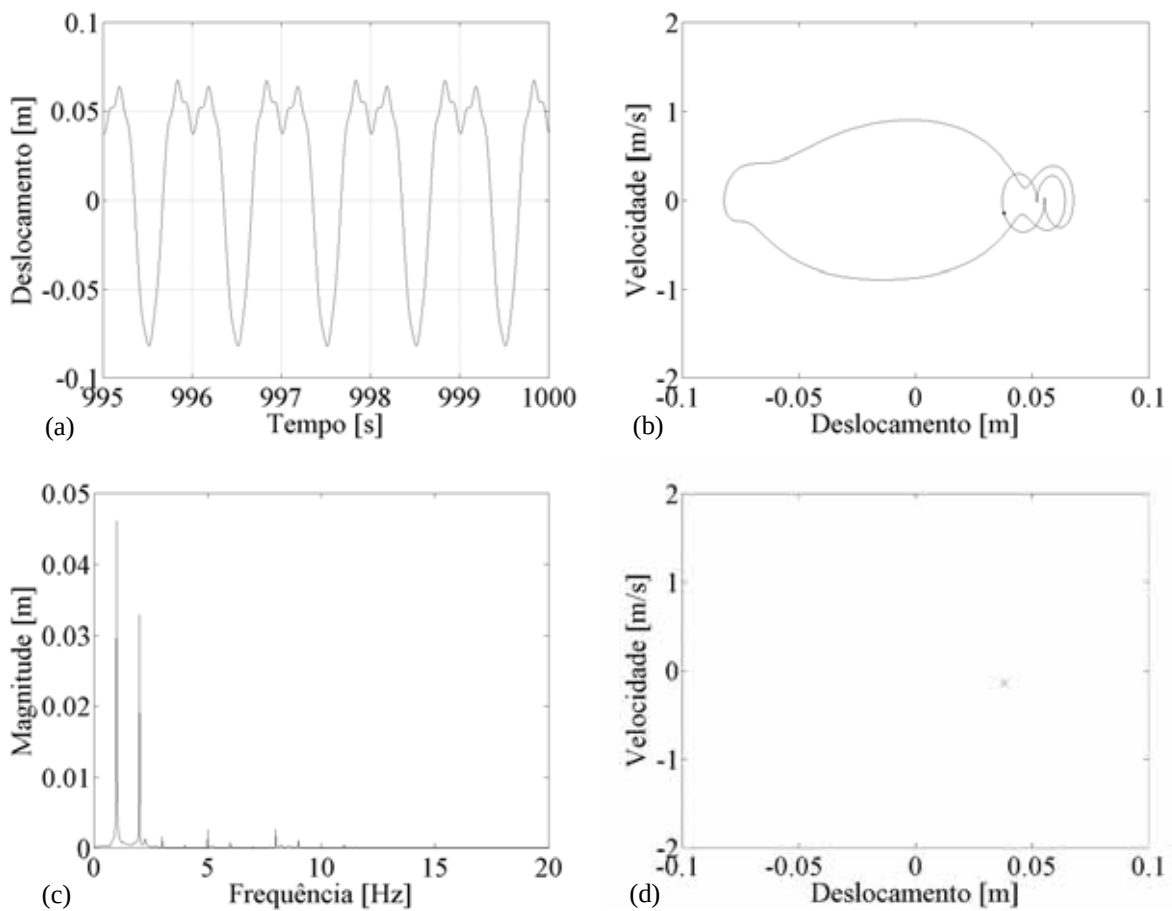


Figura 5.13 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=1 \text{ Hz}$ e $C_d=2000 \mu\text{F}$

Valor (e), $C_e=2.350 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=1 \text{ Hz}$

O penúltimo valor de C , ou C_e , da Tabela 5.24 e as frequências e razões de frequências mostrados da Tabela 5.25 foram usados para as simulações do histórico no tempo, plano de fase, seção de Poincaré e FFT da Figura 5.14

O valor C_e faz com que as respostas do modelo sejam caóticas. C_e representa o comportamento da faixa que vai de $C=2.300 \mu\text{F}$ aproximadamente, até perto de $C=2.400 \mu\text{F}$. A seção de Poincaré da Figura 5.14 evidencia com clareza indícios de natureza caótica da dinâmica. Ainda assim, a força externa domina a frequência de oscilação, como pode ser notado no diagrama da FFT da Figura 5.14 que continua mostrando o maior pico em 1 Hz. O histórico no tempo e o plano de fase mostram os indicadores do tipo de dinâmica encontrada nessas simulações.

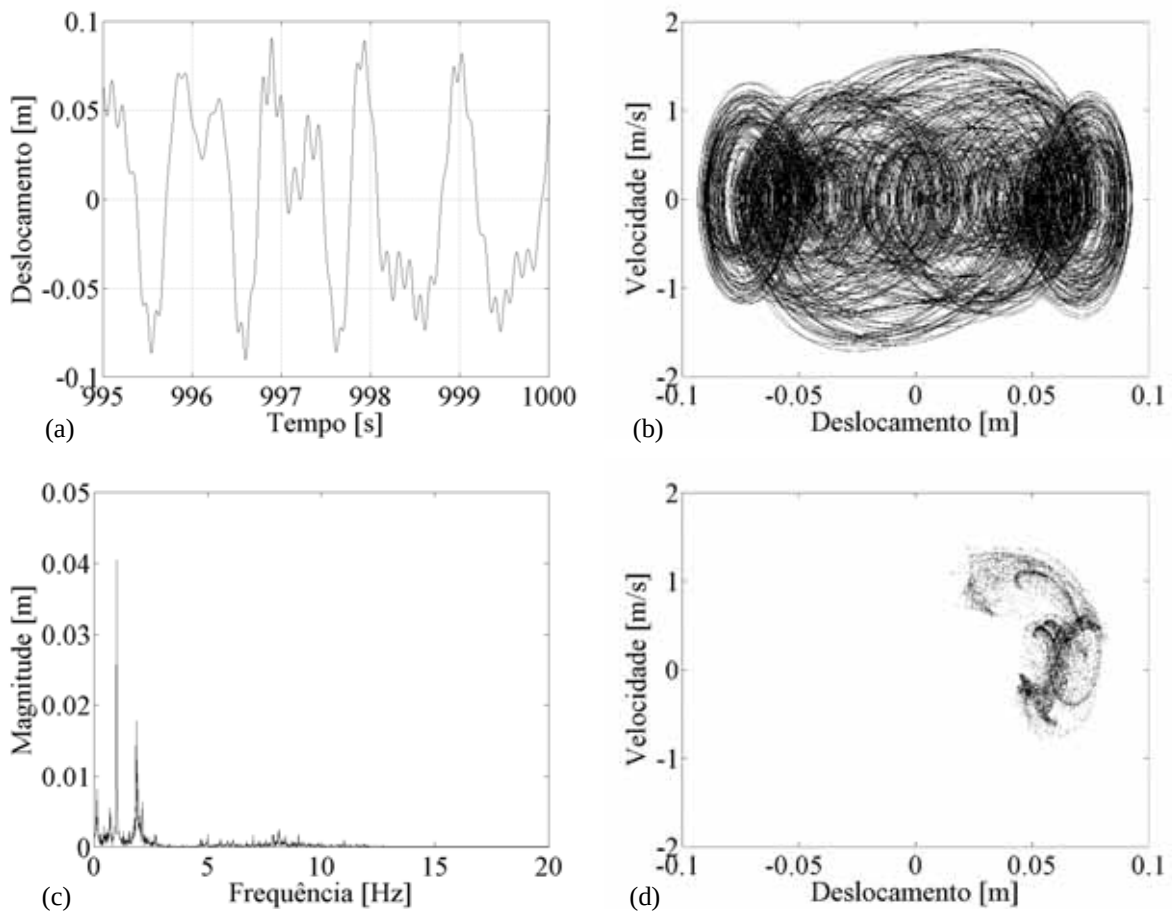


Figura 5.14 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=1 \text{ Hz}$ e $C_e=2350 \mu\text{F}$

Valor (f), $C_f=2.420 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=1 \text{ Hz}$

As Tabelas 5.24 e 5.25 mostram os valores dos parâmetros específicos usados e a frequências e razões de frequências presentes nas simulações do histórico no tempo, plano de fase, seção de Poincaré e FFT para o último valor de C .

A Figura 5.15 mostra a resposta para o valor C_f , é possível ver na seção de Poincaré os indicadores característicos de dinâmica multi-periódica, com sete períodos bem definidos que também aparecem no plano de fase. Esse comportamento aparece em uma pequena faixa que se inicia em aproximadamente $C=2.400 \mu\text{F}$ e chega até aproximadamente $C=2.450 \mu\text{F}$. Após esse intervalo o comportamento dinâmico volta a ser semelhante ao mostrado para C_e na Figura 5.14.

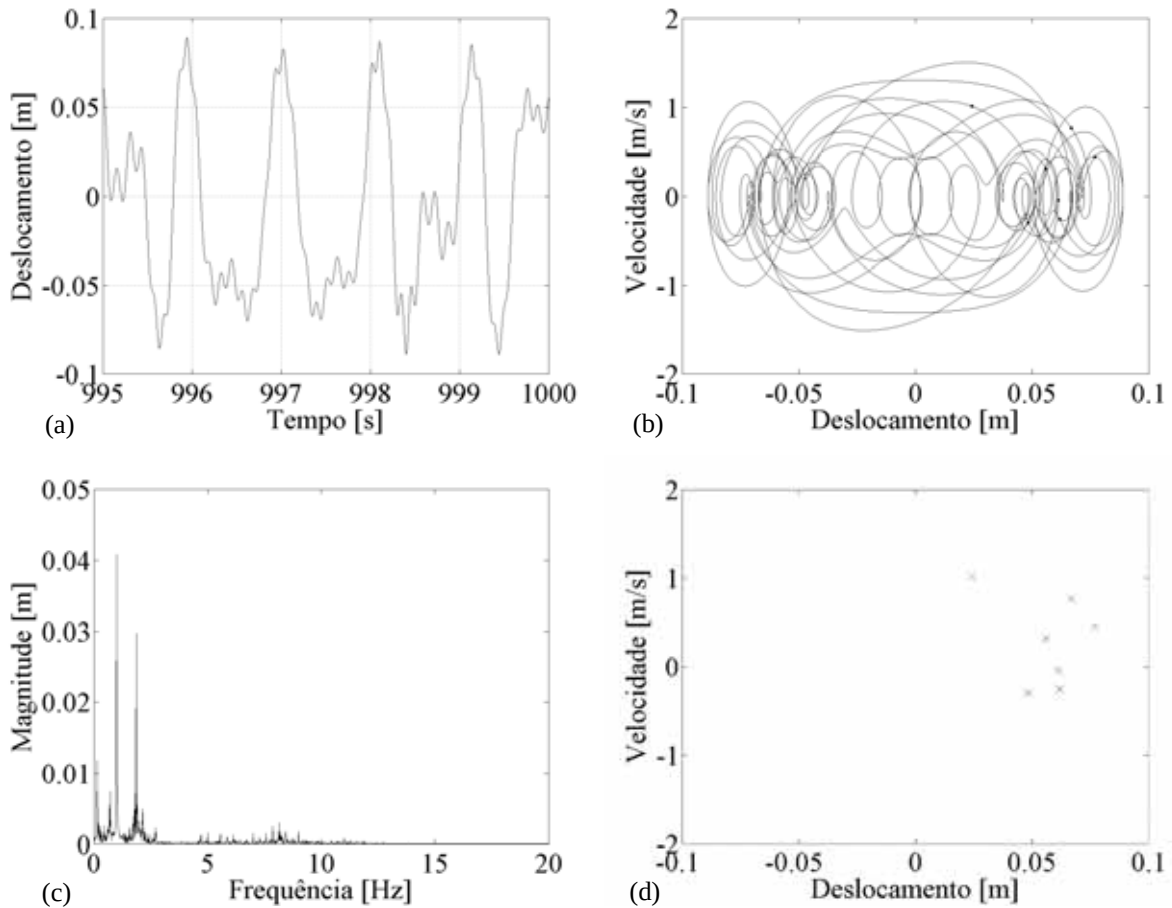


Figura 5.15 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=1 \text{ Hz}$ e $C_f=2420 \mu\text{F}$

Esses resultados foram obtidos para frequência harmônica externa de 1 Hz, no objetivo de mostrar a mesma coleção de resultados para cada frequência que mostrou respostas significativas passamos agora para as simulações com $f_{ex}=2 \text{ Hz}$.

5.2.2.2 Bifurcação da capacitância e análise da dinâmica com $f_{ex}=2$ Hz

Considerando os valores da Tabela 5.15, mostrada no início da subseção 5.2, que apresenta os parâmetros gerais da simulação e os valores da Tabela 5.19 que mostra o intervalo de tempo e intervalo de remoção de transiente para os diagramas de bifurcação, deve-se considerar também os valores mostrados nas Tabelas 5.26 e 5.27, que apresentam os valores específicos para a geração do diagrama da Figura 5.16.

Tabela 5.26 – Parâmetros específicos para a geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=2$ Hz

Parâmetros			
R	[Ω]	Resistência	0,824354
C	[μ F]	Capacitância	1.250 até 2.500
f_{ex}	[Hz]	Frequência Externa	2

Tabela 5.27 – Frequências e razões de frequências presentes na geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=2$ Hz

Frequências e Razões de Frequências			
f_{ex}	[Hz]	Freq. excitação externa	2,0000
f_{nmec}	[Hz]	Freq. natural mecânica	2,0131
f_{nele}	[Hz]	Freq. natural elétrica	5,1544 até 3,6447
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	0,9935
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,3906 até 0,5524

O segundo diagrama de bifurcação mostrado na Figura 5.16, é gerado de forma semelhante ao primeiro da Figura 5.9. A partir dos parâmetros das Tabelas 5.19, 5.26 e 5.27, o diagrama mostra os picos máximos de deslocamento do período onde não há transiente do histórico no tempo para cada valor de C . Os indicadores ordenados alfabeticamente de “a” até “d” na Figura 5.16, mostram valores de C utilizados na realização de simulações do modelo para o histórico no tempo, plano de fase, seção de Poincaré e FFT, os quais serão mostrados em sequência da Figura 5.16. As retas indicam os valores de C onde se obteve alguns dos comportamentos dinâmicos mais significativos encontrados na exploração desse modelo para o segundo valor de frequência que vale 2 Hz.

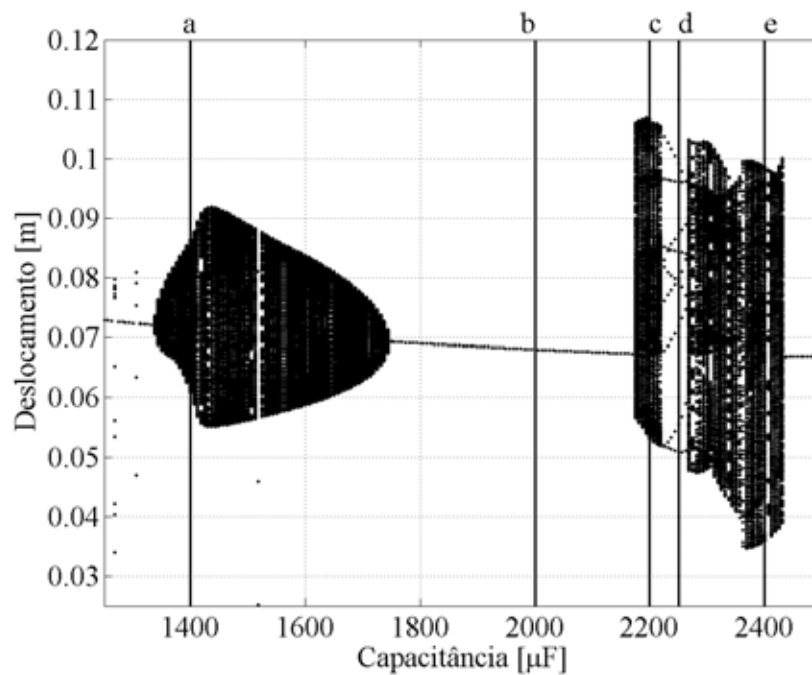


Figura 5.16 – Diagrama de bifurcação de capacitância para $f_{ex}=2$ Hz. Valores indicados: $C_a=1.400 \mu F$, $C_b=2.000 \mu F$, $C_c=2.200 \mu F$, $C_d=2.250 \mu F$ e $C_e=2.400 \mu F$

A exploração usa os valores já mostrados na Tabela 5.22 para os períodos de tempo total e tempo sem transiente juntamente com as condições iniciais usadas para as simulações de histórico no tempo, plano de fase e FFT e os valores da Tabela 5.23, para os períodos de tempo total e tempo sem transiente com as condições iniciais usadas para as simulações da seção de Poincaré.

As Tabelas 5.28 e 5.29 apresentam os valores dos parâmetros específicos usados nas simulações para as respostas encontradas para os valor de C indicados na Figura 5.16, com $f_{ex}=2$ Hz.

Tabela 5.28 – Parâmetros específicos para a simulação com $f_{ex}=2$ Hz

Parâmetros			Valor (valores de C indicados na Figura 5.16)				
			a	b	c	d	e
R	$[\Omega]$	Resistência	0,824354				
C	$[\mu F]$	Capacitância	1.400	2.000	2.200	2.250	2.400
f_{ex}	$[Hz]$	Frequência Externa	2				

Tabela 5.29– Frequências e razões de frequências com $f_{ex}=2$ Hz

Frequências e Razões de Frequências			Valor (valores de C indicados na Figura 5.16)				
			a	b	c	d	e
f_{ex}	$[Hz]$	Freq. excitação externa	2,0000				
f_{nmec}	$[Hz]$	Freq. natural mecânica	2,0132				
f_{nele}	$[Hz]$	Freq. natural elétrica	4,8704	4,0749	3,8852	3,8418	3,7198
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	0,9935				
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,4133	0,4940	0,5182	0,5240	0,5412

Valor (a), $Ca=1.400 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=2 \text{ Hz}$

A resposta da Figura 5.17 para o valor $Ca=1.400 \mu\text{F}$, mostra um comportamento dinâmico já encontrado anteriormente. No entanto, os valores de frequência e capacitância eram: $f_{ex}=1 \text{ Hz}$ e $C=1.750 \mu\text{F}$. Essa resposta é considerada, em virtude dos indicadores, como quase-periódica. São encontrados infinitos períodos que se repetem em determinado valor do tempo. Fato esse, que não condiz com a dinâmica caótica. Todo o intervalo de capacitância que está compreendido entre aproximadamente $C=1.300 \mu\text{F}$ e $C=1.750 \mu\text{F}$, região na Figura 5.16 com aparência de uma noz, apresenta comportamento de mesma natureza.

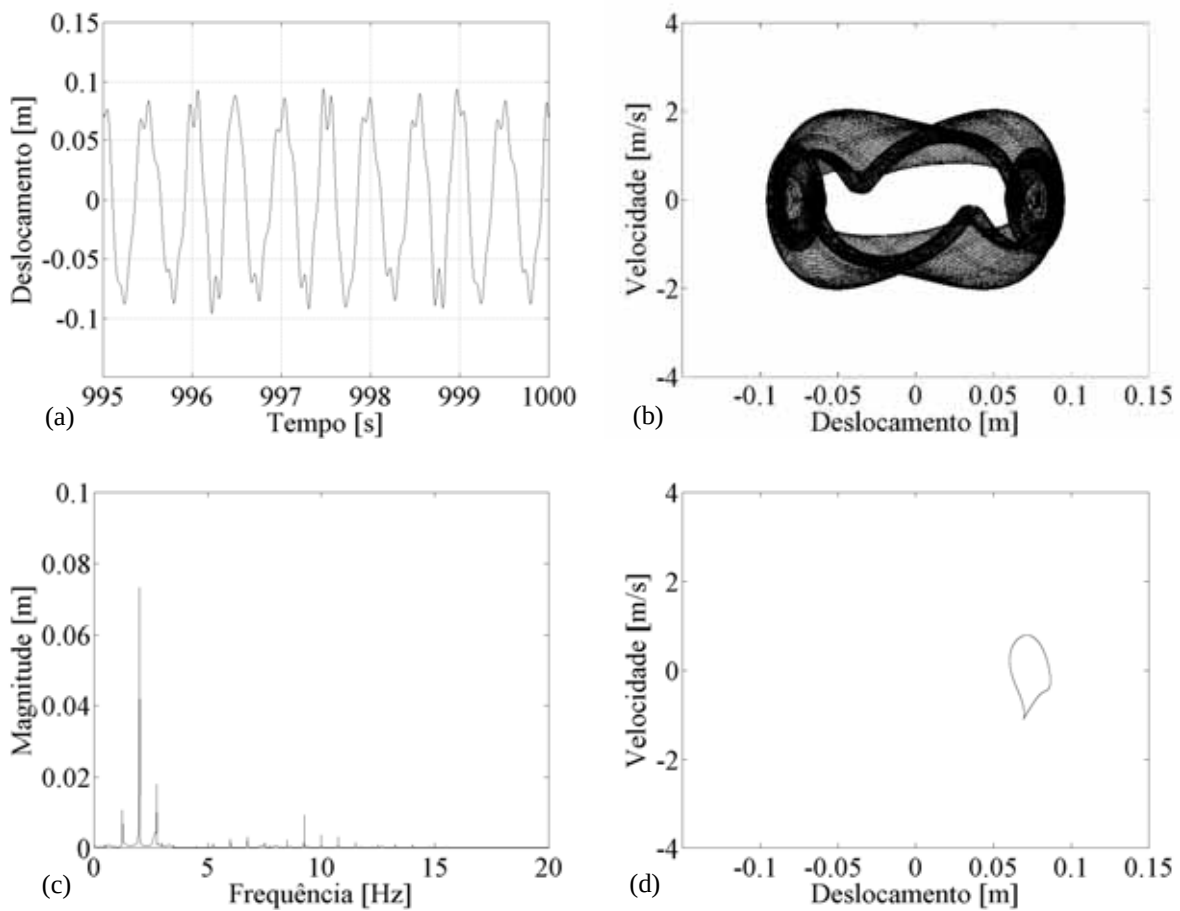


Figura 5.17 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de Fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=2 \text{ Hz}$ e $Ca=1.400 \mu\text{F}$

Valor (b), $C_b=2.000 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=2 \text{ Hz}$

O valor de C mostrado no diagrama de bifurcação da Figura 5.16 e, que está indicado pela letra “b”, tem seus resultados de histórico no tempo, plano de fase, seção de Poincaré e FFT mostrados a seguir com base nos valores específicos de parâmetro para o valor de C_b presentes nas Tabelas 5.28 e 5.29.

As respostas do modelo para esse valor de C são periódicas. Essa resposta se repete em um intervalo aproximado de $C=1.750 \mu\text{F}$ até $C=2.195 \mu\text{F}$. Fica evidente a dinâmica periódica na seção de Poincaré e FFT evidencia com clareza a predominância da força externa sobre o sistema. O comportamento periódico é visto para o mesmo valor de C nessa frequência externa de 2 Hz e na frequência explorada anteriormente de 1 Hz.

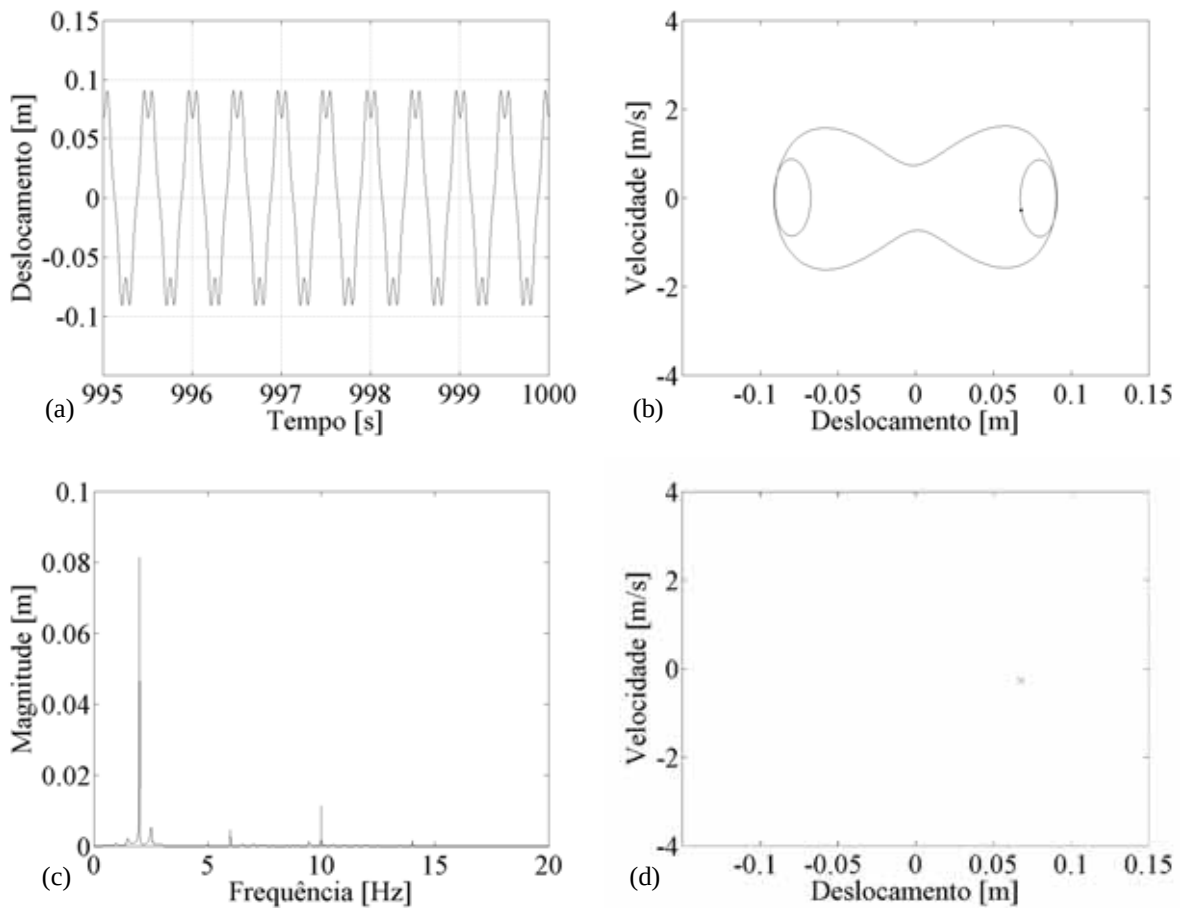


Figura 5.18 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=2 \text{ Hz}$ e $C_b=2.000 \mu\text{F}$

Valor (c), $C_c=2.200 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=2 \text{ Hz}$

O terceiro valor de capacitância, C_c mostrado no diagrama de bifurcação da Figura 5.16 é mostrado na Tabela 5.28 e as frequências e razões de frequências que se alteram junto com o valor de capacitância são mostrados na Tabela 5.29.

A dinâmica apresentada na Figura 5.19 com base nos valores de C da Tabela 5.28 apresenta um comportamento incomum em relação às demais dinâmicas mostradas anteriormente. Considerando a seção de Poincaré da Figura 5.19, a dinâmica se assemelha à encontrada na Figura 5.17 onde $C_a=1.400 \mu\text{F}$ e a dinâmica é quase-periódica, o plano de fase e a FFT também apresentam indicadores de comportamento quase-periódico. Portanto, a dinâmica encontrada para $C_c=2.200 \mu\text{F}$ é considerada quase-periódica.

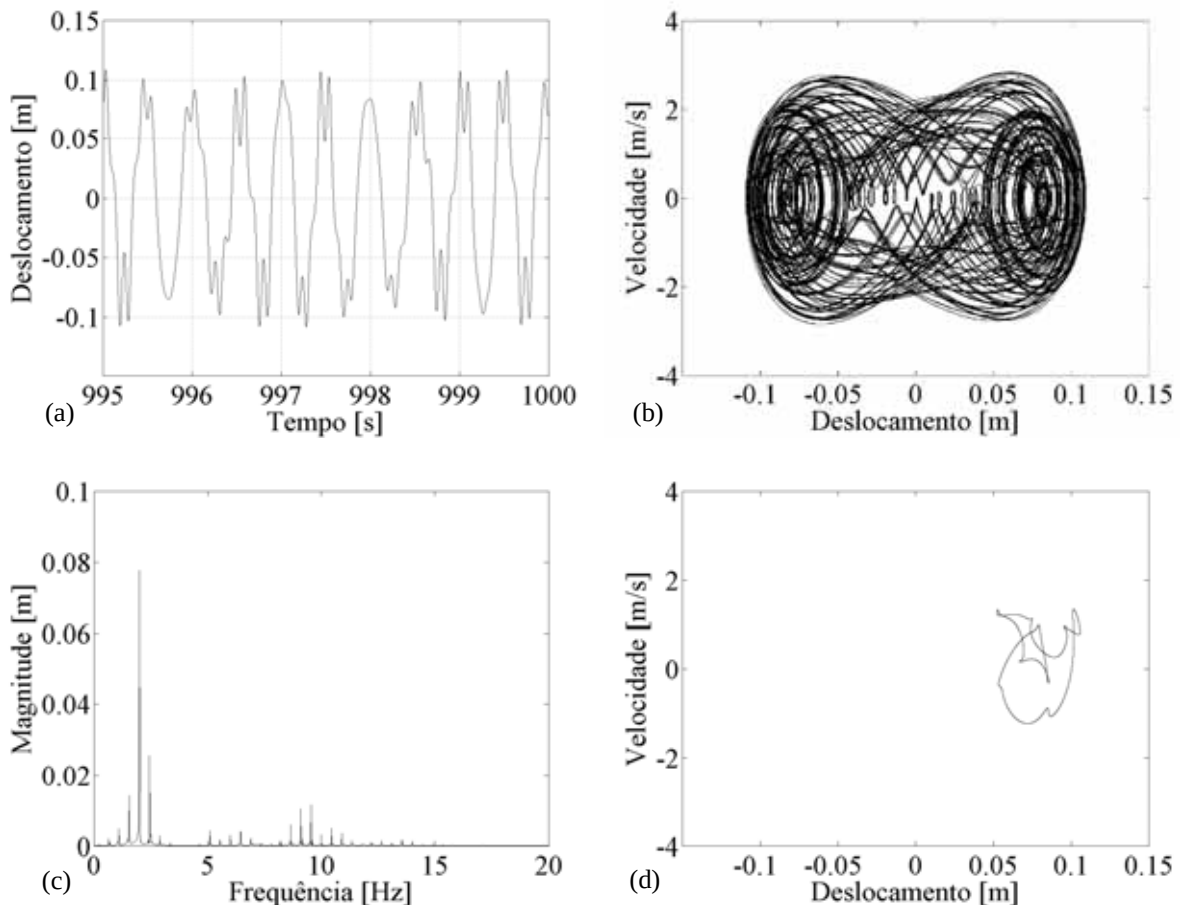


Figura 5.19 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=2 \text{ Hz}$ e $C_c=2.200 \mu\text{F}$

Valor (d), $C_d=2.250 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=2 \text{ Hz}$

O valor de C_d é mostrado na Tabela 5.28, os valores de frequência alterados e razões de frequência que aparecem no sistema são mostrados na Tabela 5.29.

O valor $C_d=2.250 \mu\text{F}$ representa um pequeno intervalo no diagrama de bifurcação da Figura 5.16 onde o sistema tem vários períodos. Pela seção de Poincaré mostrada na Figura 5.20, é possível encontrar a presença de nove períodos e o plano de fase contido também na Figura 5.20 tem indicadores de comportamento multiperiódico. Essa variação de comportamento é vista no curto intervalo de capacitância que vai de aproximadamente $C=2.220 \mu\text{F}$ até $C=2.265 \mu\text{F}$.

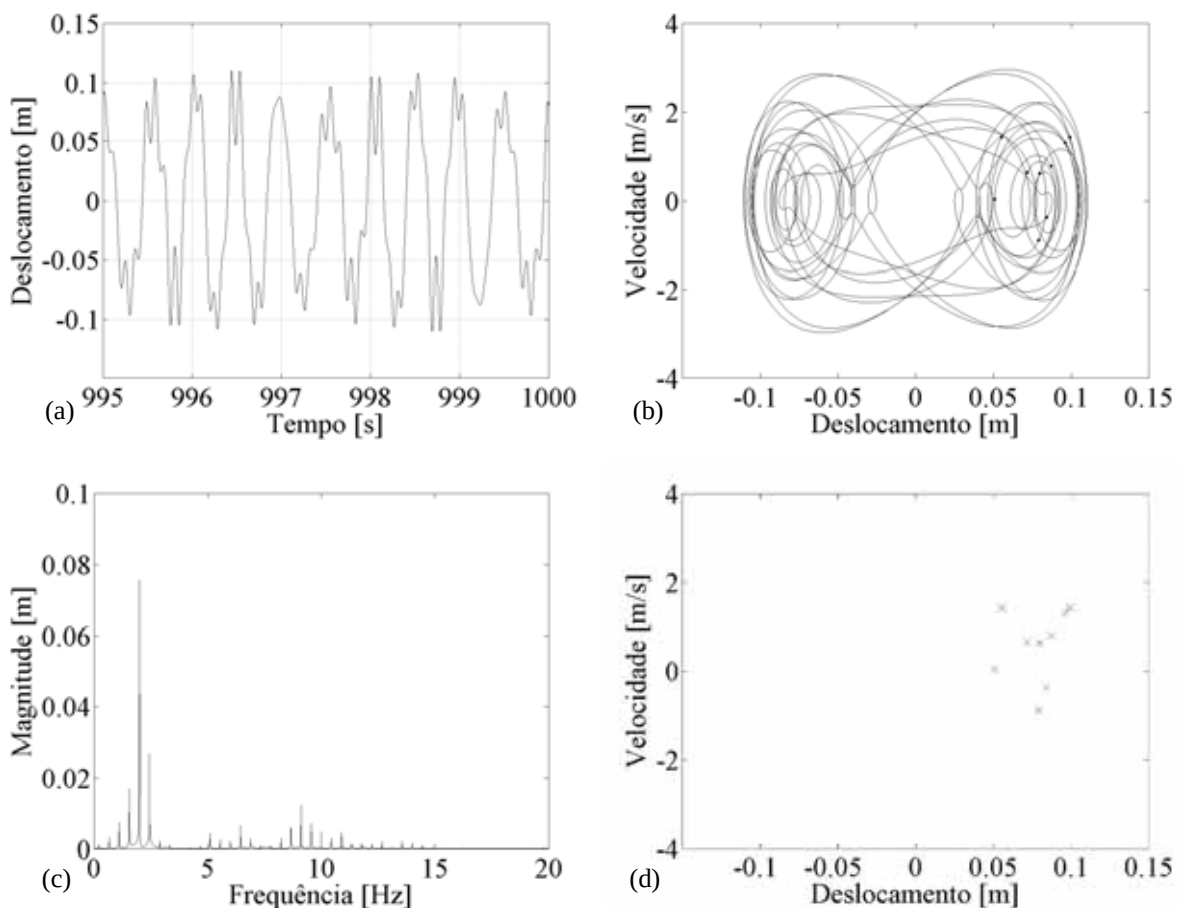


Figura 5.20 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=2 \text{ Hz}$ e $C_d=2.250 \mu\text{F}$

Valor (e), $C_e=2.400 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=2 \text{ Hz}$

O quinto e último valor de capacitância marcado no diagrama de bifurcação da Figura 5.16 como “e” é mostrado na Tabela 5.28. As frequências e razões de frequências relacionadas ao valor $C_e=2.400 \mu\text{F}$ aparecem na Tabela 5.29.

O valor C_e da capacitância faz com que o sistema resulte na dinâmica mostrada na Figura 5.21. Esse comportamento dinâmico apresenta a mesma característica mostrada na Figura 5.19 gerada para o valor $C_c=2.200 \mu\text{F}$. O plano de fase da Figura 5.21 é indicador de quase-periodicidade. Esse comportamento dinâmico ocorre para valores de aproximadamente $C=2.265 \mu\text{F}$ até $C=2.430 \mu\text{F}$. Após esse intervalo, o sistema volta a se comportar periodicamente.

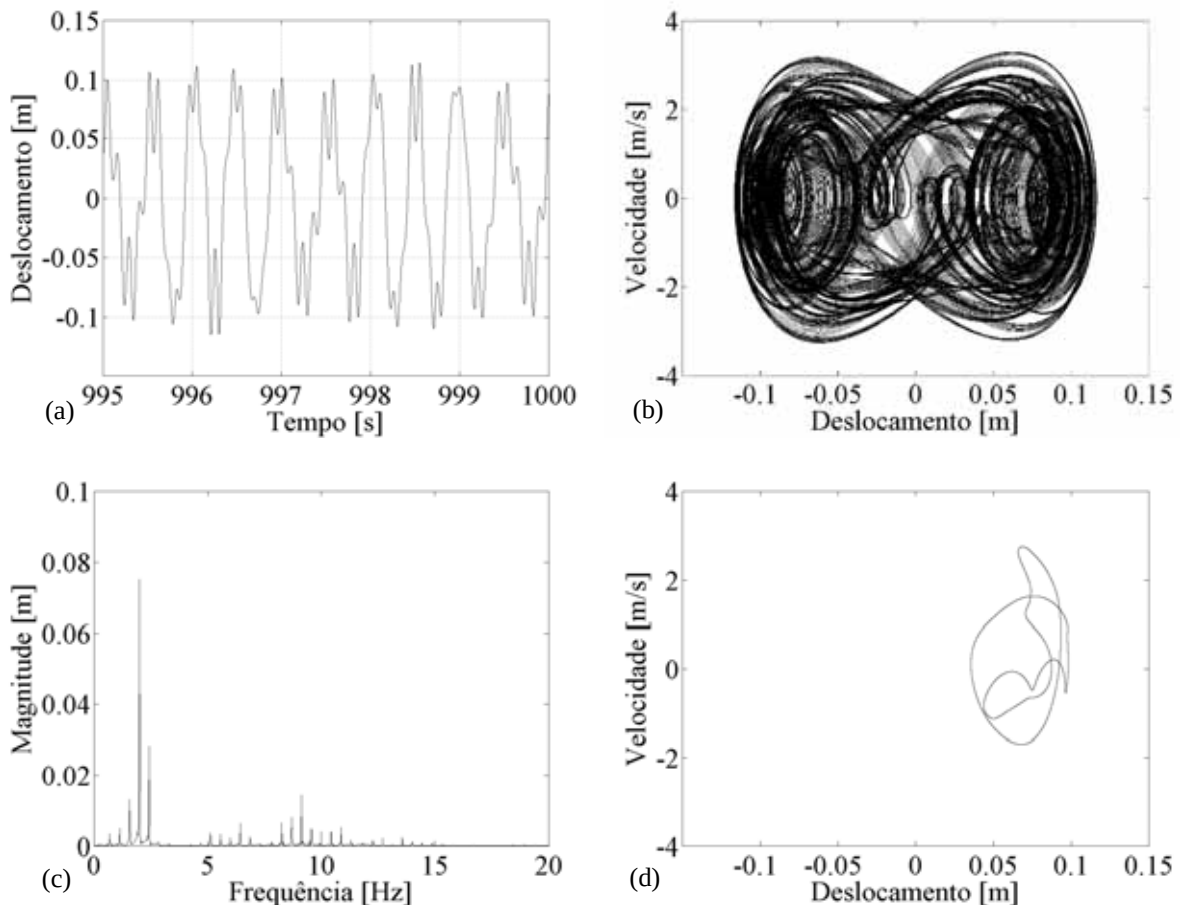


Figura 5.21 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=2 \text{ Hz}$ e $C_e=2.400 \mu\text{F}$

A Figura 5.21 encerra a parcela de resultados gerados para a $f_{ex}=2 \text{ Hz}$. Seguindo a proposta inicial de mostrar os resultados significativos para alguns valores de f_{ex} , chegamos ao próximo valor, de 3 Hz.

5.2.2.3 Bifurcação da capacitância e análise da dinâmica com $f_{ex}=3$ Hz

Considerando os valores da Tabela 5.15 do início da subseção 5.2, com os parâmetros gerais da simulação e os valores da Tabela 5.19 que contêm os intervalos de tempo e remoção de transiente para todos os diagramas de bifurcação, obtém-se o diagrama de bifurcação mostrado na Figura 5.22. Além dos valores das Tabelas 5.15 e 5.19 o diagrama de bifurcação é gerado levando-se em consideração os parâmetros das Tabelas 5.30 e 5.31.

Tabela 5.30 – Parâmetros específicos para a geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=3$ Hz

Parâmetros			
R	[Ω]	Resistência	0,824354
C	[μ F]	Capacitância	1.250 até 2.500
f_{ex}	[Hz]	Frequência Externa	3

Tabela 5.31 – Frequências e razões de frequências presentes na geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=3$ Hz

Frequências e Razões de Frequências			
f_{ex}	[Hz]	Freq. excitação externa	3,0000
f_{nmec}	[Hz]	Freq. natural mecânica	2,0131
f_{nele}	[Hz]	Freq. natural elétrica	5,1544 até 3,6447
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	1,4902
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,3906 até 0,5524

O diagrama de bifurcação da Figura 5.22, é gerado de maneira semelhante aos outros dois apresentados anteriormente nas Figura 5.9 e 5.16. Respeitando os parâmetros das Tabelas 5.19, 5.30 e 5.31, o diagrama de bifurcação exibe os picos máximos de deslocamento amostrados de acordo com o período da excitação externa. O intervalo transiente é desconsiderado. Na Figura 5.22 são vistas quatro marcações indicadas por letras de “a” até “d”. As indicações evidenciam o valor de C no diagrama que resulta em comportamentos dinâmicos significativos para exploração, essas dinâmicas são vistas nas simulações do histórico do tempo, plano de fase, seção de Poincaré e FFT que, são mostrados na Figura 5.22.

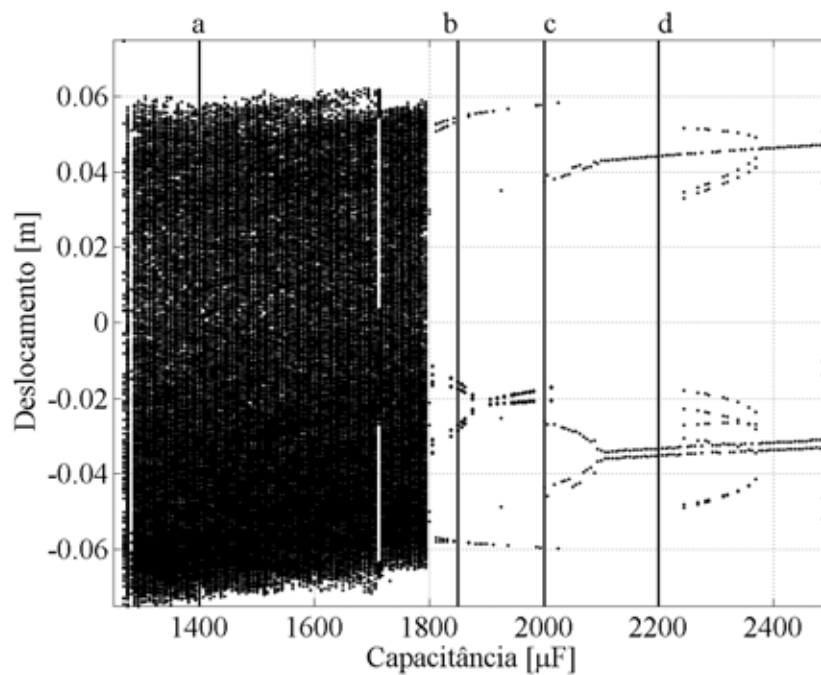


Figura 5.22 – Diagrama de bifurcação de capacitância para $f_{ex}=3$ Hz. Valores indicados: $C_a=1.400$ μF , $C_b=1.850$ μF , $C_c=2.000$ μF e $C_d=2.200$ μF

Os resultados a seguir usam os valores já informados da Tabela 5.22 que exhibe os períodos de tempo total e tempo sem transiente, com as condições iniciais usadas para as simulações de histórico no tempo, plano de fase e FFT. A Tabela 5.23, mostra os valores para os períodos de tempo total, tempo sem transiente para as simulações da seção de Poincaré com as condições iniciais.

Na Tabelas 5.32, são mostrados os valores dos parâmetros específicos para as simulações e na Tabela 5.33 são mostradas as frequências e as razões de frequência presentes nas respostas encontradas para os valores C indicados na Figura 5.22, com $f_{ex}=3$ Hz.

Tabela 5.32 – Parâmetros específicos para a simulação com $f_{ex}=3$ Hz

Parâmetros			Valor (valores de C indicados na Figura 5.22)			
			a	b	c	d
R	[Ω]	Resistência	0,824354			
C	[μF]	Capacitância	1.400	1.850	2.000	2.200
f_{ex}	[Hz]	Frequência Externa	3			

Tabela 5.33– Frequências e razões de frequências com $f_{ex}=3$ Hz

Frequências e Razões de Frequências			Valor (valores de C indicados na Figura 5.22)			
			a	b	c	d
f_{ex}	[Hz]	Freq. excitação externa	3,0000			
f_{nmec}	[Hz]	Freq. natural mecânica	2,0132			
f_{nele}	[Hz]	Freq. natural elétrica	4,8704	4,2369	4,0749	3,8852
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	1,4902			
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,4133	0,4752	0,4940	0,5182

Valor (a), $Ca=1.400 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=3 \text{ Hz}$

A resposta gerada e mostrada na Figura 5.23 para o valor Ca da Tabela 5.32 exibe o comportamento dinâmico simulada para o modelo. A seção de Poincaré mostra claros indicadores de caos confirmados pelo espalhamento da FFT e plano de fase. A dinâmica que aparece para o valor Ca é representativa da dinâmica que ocorre em todo o intervalo de aproximadamente $C=1.275 \mu\text{F}$ até $C=1.800 \mu\text{F}$.

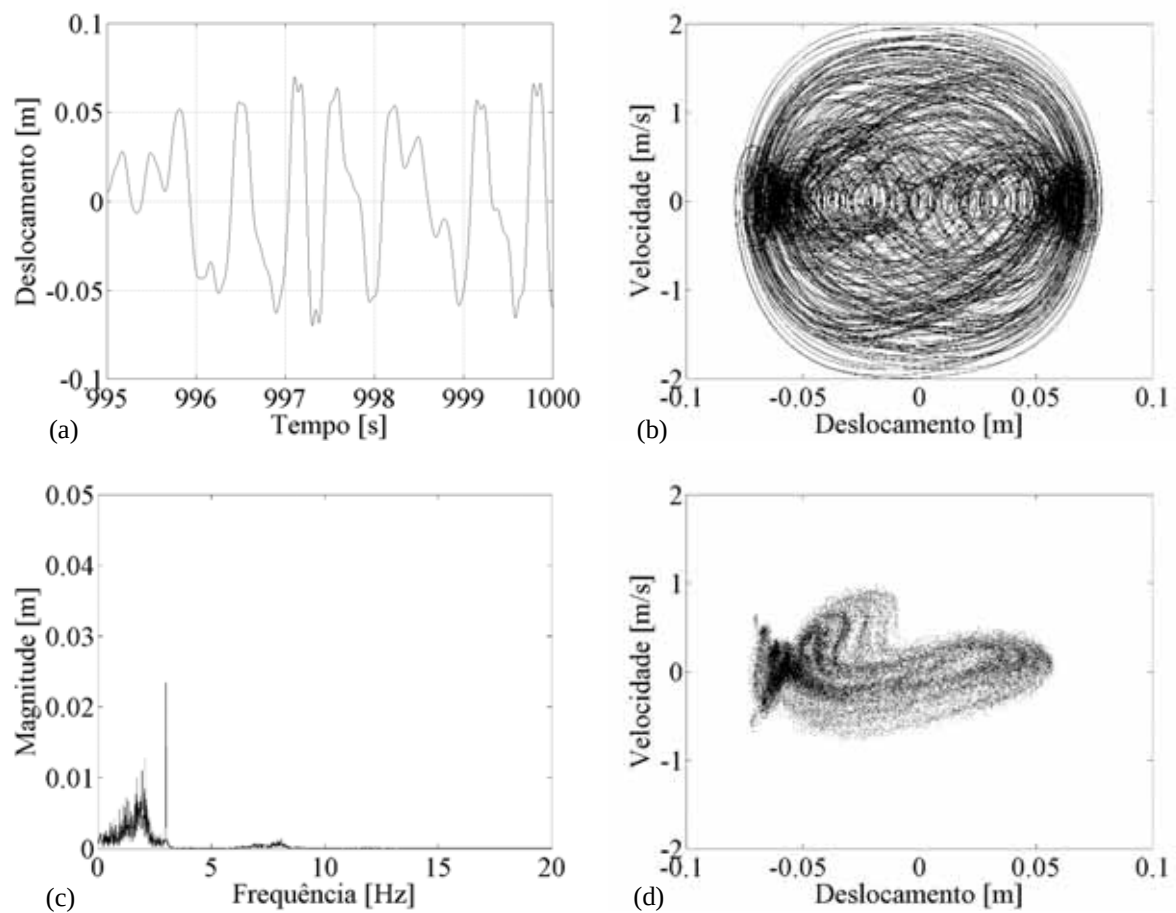


Figura 5.23 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=3 \text{ Hz}$ e $Ca=1.400 \mu\text{F}$

Valor (b), $C_b=1.850 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=3 \text{ Hz}$

A Tabela 5.32 mostra o segundo valor de C explorado junto com $f_{ex}=3 \text{ Hz}$, no diagrama de bifurcação da Figura 5.22 esse valor está de marcado por “b”, portanto, C_b . As frequências e razões de frequências são mostradas na Tabela 5.33.

O valor $C_b=1.850 \mu\text{F}$ do parâmetro C altera a dinâmica do sistema de forma que as respostas acabem sendo periódicas, com 4 períodos facilmente identificados na seção de Poincaré e no restante das figuras apresentados na Figura 5.24. A dinâmica periódica começa em valores aproximados de $C=1.800 \mu\text{F}$ e prevalece até o final do intervalo do diagrama de bifurcação, no entanto o número de períodos é alterado conforme C varia.

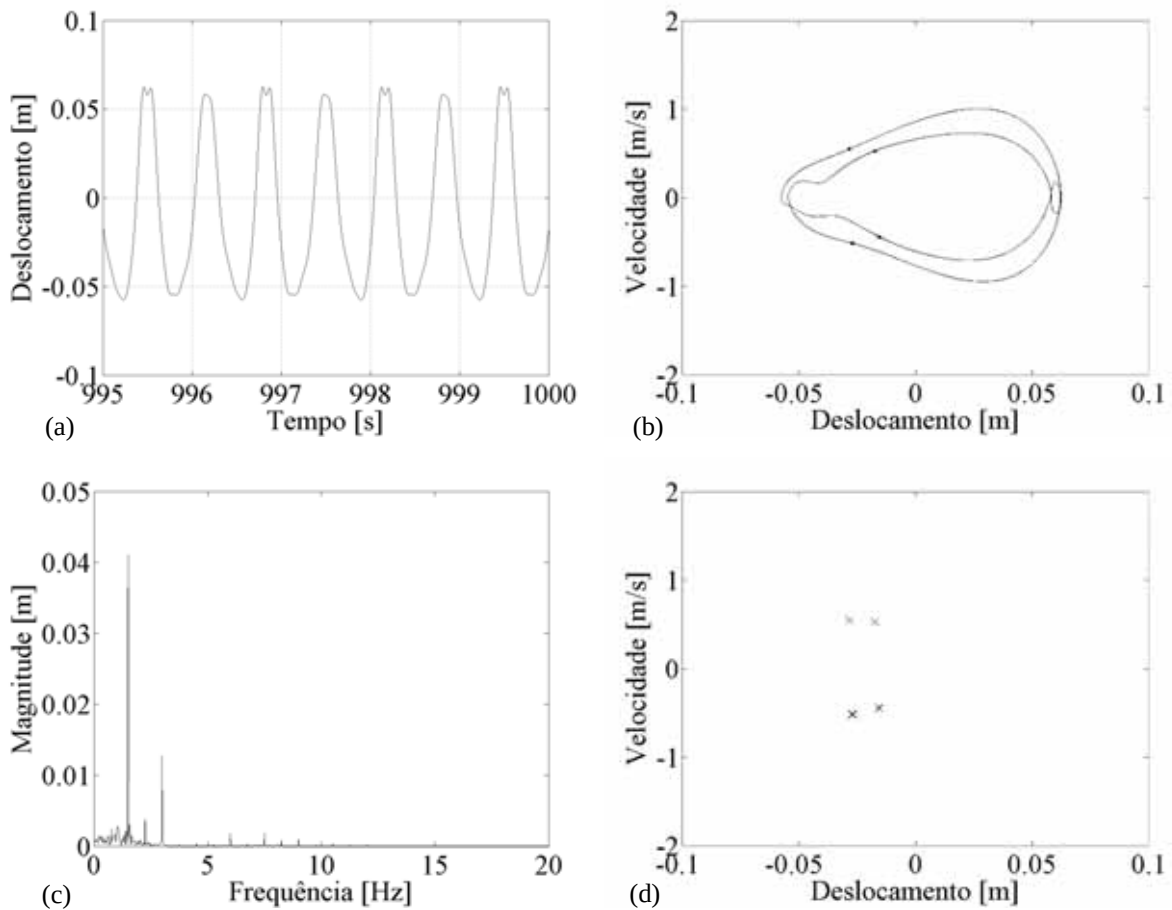


Figura 5.24 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=3 \text{ Hz}$ e $C_b=1.850 \mu\text{F}$

Valor (c), $C_c=2.000 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=3 \text{ Hz}$

O valor indicado com a letra “c” no diagrama de bifurcação da Figura 5.22 é mostrado na Tabela 5.32, a Tabela 5.33 exibe as frequências presentes no sistema bem como as razões de frequência calculas.

A dinâmica encontrada para o valor $C_c=2.000 \mu\text{F}$, como esperado, é periódica. No entanto, apresenta apenas dois períodos. Considerando o plano de fase e a seção de Poincaré da Figura 5.25, aparece bem destacada a natureza periódica da resposta.

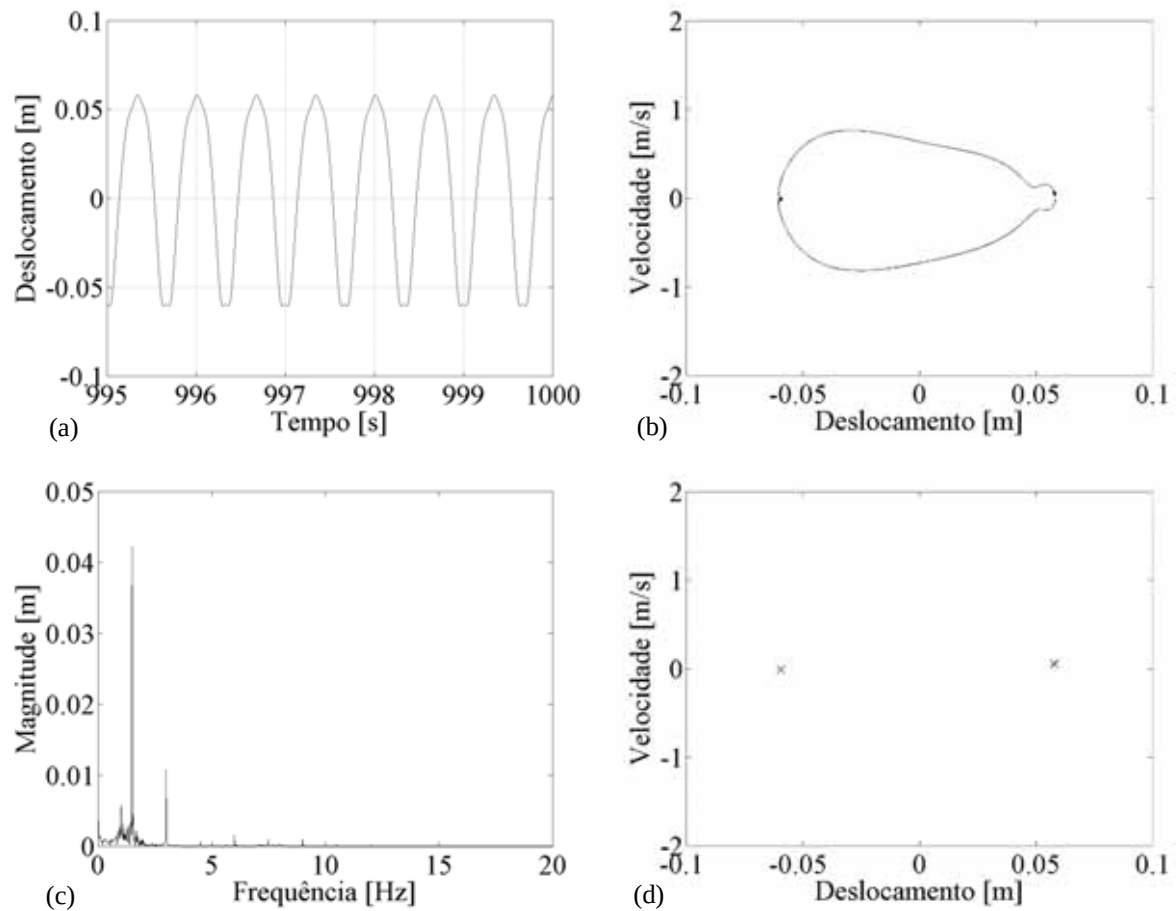


Figura 5.25 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=3 \text{ Hz}$ e $C_c=2.000 \mu\text{F}$

Valor (d), $C_d=2.200 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=3 \text{ Hz}$

O último valor de C mostrado no diagrama de bifurcação da Figura 5.22 pela letra “d”, representa mais um exemplo do comportamento periódico para as simulações com $f_{ex}=3 \text{ Hz}$, o valor de C correspondente ao marco “d” está exibido na Tabela 5.32. Os valores das frequências presentes no sistema e suas razões calculadas aparecem na Tabela 5.33.

O parâmetro $C_d=2.200 \mu\text{F}$ mostra outro exemplo de comportamento periódico no intervalo de aproximadamente $C=1.800 \mu\text{F}$ até $C=2.500 \mu\text{F}$. A natureza da dinâmica periódica pode ser vista nos figuras de plano de fase e seção de Poincaré da Figura 5.26 de forma evidente, contando três períodos.

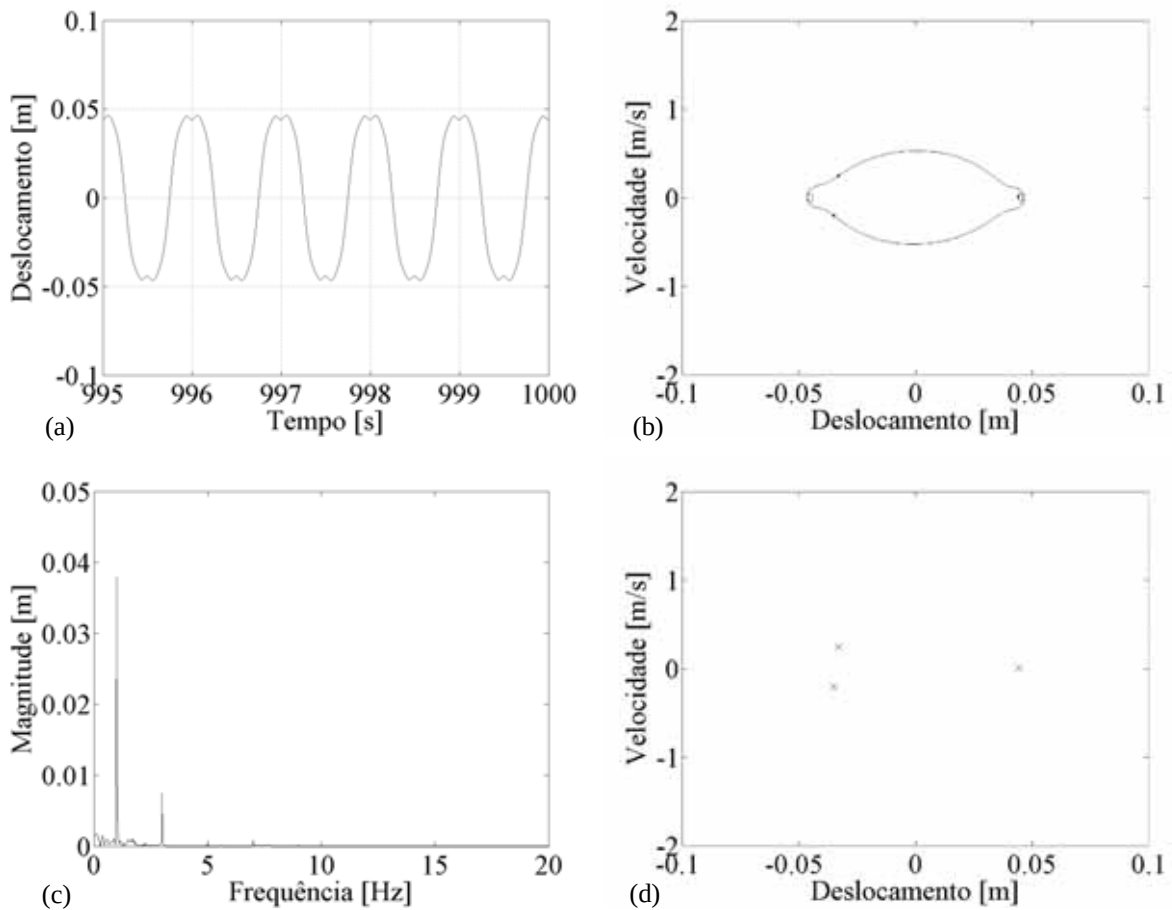


Figura 5.26 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=3 \text{ Hz}$ e $C_d=2.200 \mu\text{F}$

5.2.2.4 Bifurcação da capacitância e análise da dinâmica com $f_{ex}=4$ Hz

A Figura 5.26 finaliza a coleção de resultados significantes para a $f_{ex}=3$ Hz. A nova frequência externa a ser explorada é de 4 Hz. A Tabela 5.15 no início da seção 5.2 mostra os parâmetros gerais da simulação e a Tabela 5.19 mostra o intervalo de tempo e intervalo de remoção de transiente para os diagramas de bifurcação. As Tabelas 5.34 e 5.35 apresentam os valores específicos para a simulação mostrada no diagrama de bifurcação da Figura 5.27.

Tabela 5.34 – Parâmetros específicos para a geração do diagrama de bifurcação do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=4$ Hz

Parâmetros			
R	[Ω]	Resistência	0,824354
C	[μF]	Capacitância	1.250 até 2.500
f_{ex}	[Hz]	Frequência Externa	4

Tabela 5.35 – Frequências e razões de frequências presentes na geração do modelo não-linear tipo Duffing com $f_{ex}=4$ Hz

Frequências e Razões de Frequências			
f_{ex}	[Hz]	Freq. excitação externa	4,0000
f_{nmec}	[Hz]	Freq. natural mecânica	2,0131
f_{nele}	[Hz]	Freq. natural elétrica	5,1544 até 3,6447
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	1,9869
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,3906 até 0,5524

O diagrama de bifurcação da Figura 5.27 é gerado a partir dos parâmetros das Tabelas 5.19, 5.56 e 5.57. No diagrama de bifurcação um ponto é marcado na frequência da f_{ex} . A simulação é realizada fora do intervalo transiente varrendo o valor de C . Os indicadores mostrados no diagrama indicados alfabeticamente por “a” e “b” mostram valores de C onde são feitas simulações de histórico no tempo, plano de fase, seção de Poincaré e FFT mostrados nas Figuras 5.28 e 5.29, também na frequência externa de 4 Hz.

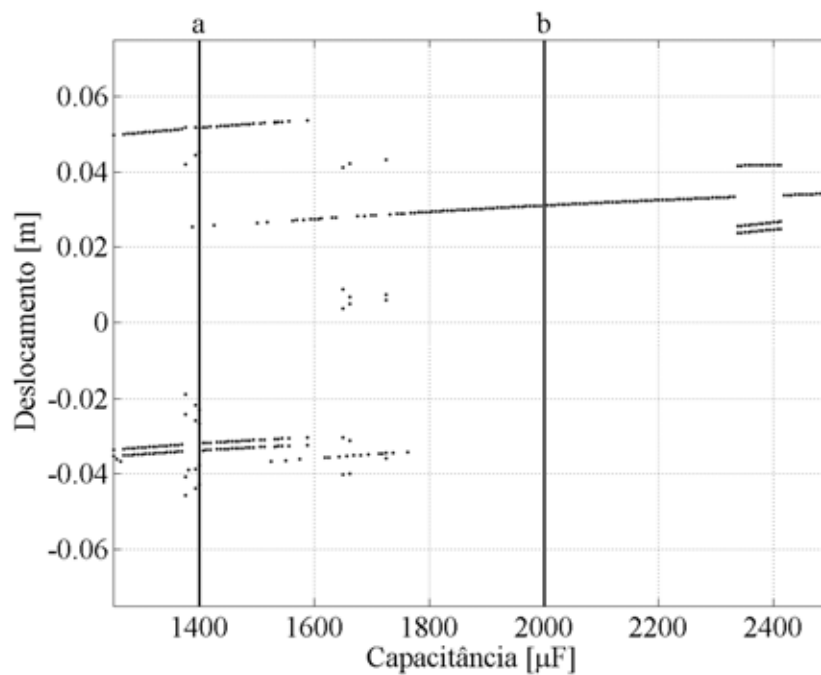


Figura 5.27 – Diagrama de bifurcação de capacitância para $f_{ex}=4$ Hz. Valores indicados: $C_a=1.400 \mu F$ e $C_b=2.000 \mu F$

As Tabelas 5.36 e 5.37 mostram os valores específicos dos parâmetros para a simulação das Figuras 5.28 e 5.29 que estão marcados na Figura 5.27.

Tabela 5.36 – Parâmetros específicos para a simulação com $f_{ex}=4$ Hz

Parâmetros			Valor (valores de C indicados na Figura 5.27)	
			a	d
R	$[\Omega]$	Resistência	0,824354	
C	$[\mu F]$	Capacitância	1.400	2.000
f_{ex}	$[Hz]$	Frequência Externa	4	

Tabela 5.37– Frequências e razões de frequências com $f_{ex}=4$ Hz

Frequências e Razões de Frequências			Valor (valores de C indicados na Figura 5.27)	
			a	d
f_{ex}	$[Hz]$	Freq. excitação externa	4,0000	
f_{nmec}	$[Hz]$	Freq. natural mecânica	2,0132	
f_{nele}	$[Hz]$	Freq. natural elétrica	4,8704	4,0749
f_{ex}/f_{nmec}	---	Razão de frequência	1,9869	
f_{nmec}/f_{nele}	---	Razão de frequência	0,4133	0,4940

Valor (a), $C_a=1.400 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=4 \text{ Hz}$

A marca “a” representa o valor $C_a=1.400 \mu\text{F}$ simulado com $f_{ex}=4 \text{ Hz}$, os valores estão nas Tabelas 5.36 e 5.37, abaixo que mostram também as frequências presentes no sistema e suas razões.

A Figura 5.28 mostra os resultados do histórico no tempo, plano de fase, seção de Poincaré e FFT para a simulação do modelo feita com $f_{ex}=4 \text{ Hz}$ e $C=1.400 \mu\text{F}$. A resposta considerada multiperiódica com três períodos e prevalece até valores próximos de $C=1.550 \mu\text{F}$. As características desse comportamento dinâmico são indicadas principalmente na seção de Poincaré, onde são mostrados três pontos bem definidos.

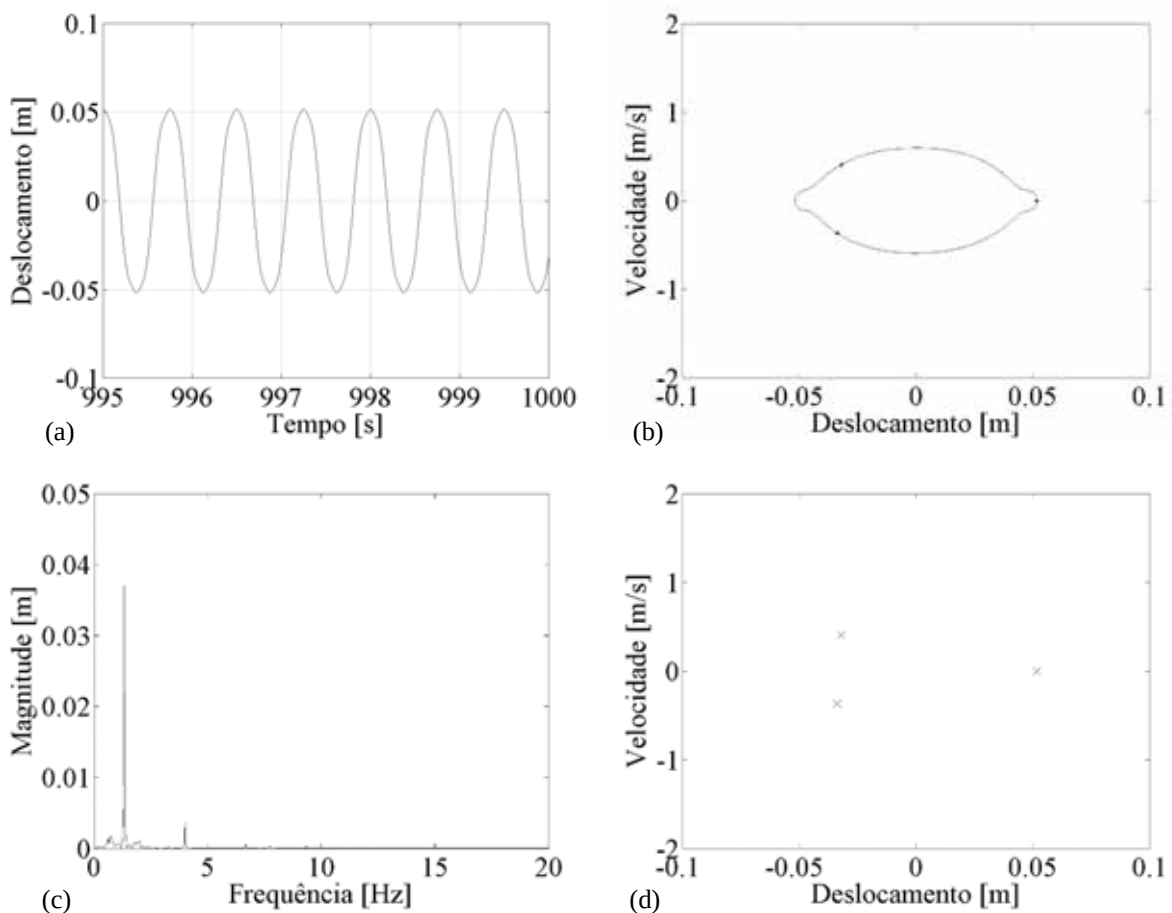


Figura 5.28 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=4 \text{ Hz}$ e $C_a=1.400 \mu\text{F}$

Valor (b), $C_b=2.000 \mu\text{F}$ com $f_{ex}=4 \text{ Hz}$

O segundo e também último valor de C para as simulações com $f_{ex}=4 \text{ Hz}$ é mostrado na Tabela 5.36. As frequências presentes no sistema e as razões de frequência presentes no sistema estão na Tabela 5.37.

A Figura 5.29 mostra a resposta do sistema para $C_b=2.000 \mu\text{F}$ e $f_{ex}=4 \text{ Hz}$. Na figura, é possível perceber a dinâmica de apenas um período. Qualquer uma das figuras mostrados na Figura 5.29 indica comportamento periódico, esse comportamento se mantém do valor $C=1.550 \mu\text{F}$ até o final do intervalo, onde $C=2.500 \mu\text{F}$. Os resultados mostrados para $f_{ex}=4 \text{ Hz}$, são representativos também para os valores seguintes de frequência de excitação externa, onde são vistos comportamentos dinâmicos periódicos em grande parte das explorações feitas.

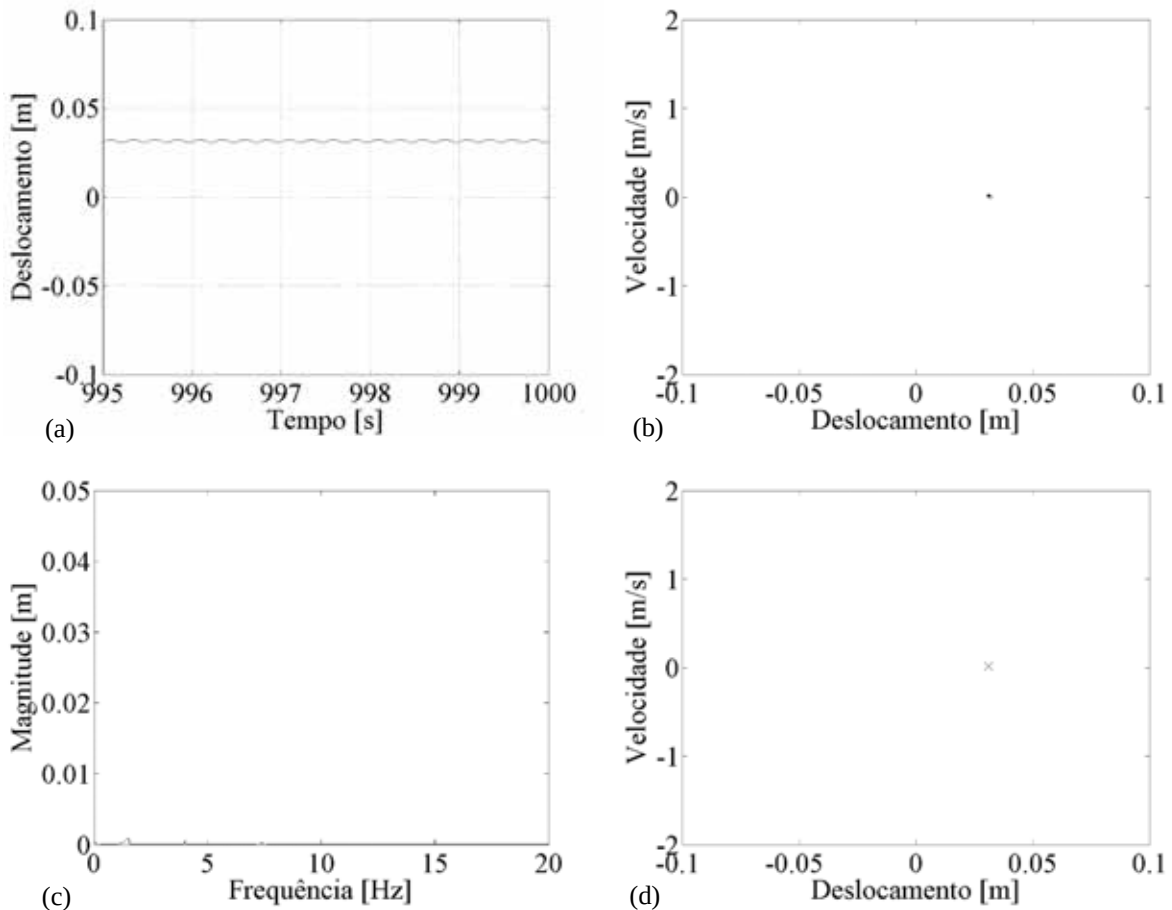


Figura 5.29 – Trecho entre 995 s e 1000 s do histórico no tempo (a), plano de Fase (b), FFT (c) e seção de Poincaré (d) para $f_{ex}=4 \text{ Hz}$ e $C_b=2.000 \mu\text{F}$

6 CONCLUSÕES

Nesse trabalho são exploradas algumas das diversas configurações de parâmetros possíveis em um sistema com amortecimento eletromecânico. São testados dois modelos que possuem grandezas e parâmetros análogos, o modelo linear e o modelo não-linear.

A modelagem matemática do dispositivo eletromecânico iniciada no capítulo 2, considera um sistema com dois subsistemas acoplados, um mecânico e um elétrico. A excitação é aplicada no subsistema mecânico. Isso faz com que o subsistema elétrico acoplado via transdutor seja um dos responsáveis pela dissipação de energia, causando amortecimento no subsistema mecânico. As equações obtidas para o domínio elétrico (subsistema elétrico) são as mesmas em ambos os modelos, linear e não-linear. A diferença desses dois modelos está no domínio mecânico (subsistema mecânico) onde, no modelo não-linear é adicionada o termo de constante elástica cúbico que muda o comportamento da dinâmica geral do dispositivo.

No capítulo 3, é realizada a definição dos parâmetros. Todos os parâmetros são obtidos com base na massa do sistema mecânico, que foi definida por um quarto da massa total de um veículo de passeio. Ainda que o modelo não represente uma suspensão eletromecânica automotiva, os resultados servem para o entendimento do comportamento geral proveniente do amortecimento eletromecânico. A constante de amortecimento viscoso é nula para que o amortecimento total fosse oriundo somente do acoplamento eletromecânico. Os parâmetros elétricos são obtidos com base em uma bobina de transdutor, que consiga exercer forças de mesma grandeza, quando se comparado ao amortecedor veicular convencional. A definição dos parâmetros elétricos conseguiu fornecer valores mínimos de resistência e indutância elétrica, de forma que o projeto da bobina e do transdutor sejam possíveis de serem executados.

É realizada ainda, no capítulo 4 a análise das condições de estabilidade do modelo linear, levando-se em consideração que somente os parâmetros de capacitância e resistência são passíveis de variação. Então, esses parâmetros são também os alvos da análise. Nessa análise é obtido que, para o sistema linear se comportar de forma estável, os parâmetros citados anteriormente devem ser maiores que zero, ou seja, devem existir.

As explorações obtidas para o modelo linear, no capítulo 5, mostram o comportamento da dinâmica em função da frequência. Nesses resultados, é possível distinguir faixas, onde a amplitude de movimento é elevada e pode fazer com que o sistema entre em ressonância. Esses resultados são importantes pois, como o subsistema mecânico é acoplado ao subsistema elétrico, as regiões de ressonância não são triviais como acontece em sistemas puramente mecânicos.

Ainda no capítulo 5, é mostrada a curva de amortecimento mecânico em função do parâmetro de resistência elétrica. Com a análise dessa curva, consegue-se determinar a faixa de valores de resistência elétrica onde, ocorre o maior amortecimento mecânico e responde uma das questões propostas como objetivo do trabalho. Não se sabia ao certo quais valores de resistência elétrica provocaria o maior efeito de amortecimento. Se eram os valores de resistência elétrica próximos a zero, que caracteriza um circuito próximo ao curto-circuito, ou se eram valores tendendo ao infinito, que caracterizam um circuito aberto. É concluído, com base nos resultados obtidos do modelo linear, que a faixa de resistência elétrica que causa o maior efeito de amortecimento (medido pelo coeficiente de amortecimento adimensional mecânico ζ), são os valores próximos a 100Ω . Ainda que o amortecimento se acentue em valores de resistência próximos a 100Ω , o pico máximo de amortecimento varia sutilmente em função da capacitância elétrica.

O estudo da curva de amortecimento é realizado também com o parâmetro de capacitância elétrica. Os mesmos passos realizados para a resistência são feitos para essa análise. No entanto, não é notado alteração significativa de amortecimento em função da capacitância, nesse intervalo, quando se comparado com as alterações que aparecem em função da resistência.

É realizada também, a comparação entre a curva de amortecimento em função da resistência e, a curva do terceiro autovalor em função da resistência. Onde se nota o mesmo padrão de comportamento em função da resistência. Ou seja os resultados, em relação a faixa de valores de resistência são convergentes, indicam a mesma faixa onde o amortecimento é maior.

No capítulo 5, encontram-se também, os resultados obtidos com modelo não-linear. A análise da resposta em frequência, realizada para o modelo linear, é repetida para o modelo não-linear, utilizando-se os mesmos procedimentos. A resposta em frequência do modelo não-linear, ainda mostra alterações de comportamento dinâmico nos mesmos intervalos de frequência. Ainda que não existam mais os picos evidentes nos resultados do modelo linear, a análise é importante por mostrar analogia entre os dois modelos abordados no trabalho. A análise em frequência do modelo não-linear, dá indicação de caos no sistema eletromecânico.

Quatro valores de frequência de excitação externa são usados para a realização das simulações, que, mostram o comportamento da dinâmica do sistema em função da variação do parâmetro de capacitância. Os valores de frequência escolhidos são valores baixos, se comparados a gama de valores aos quais um sistema como esse pode ser submetido. Isso porque

esses valores (baixos) mostram dinâmicas e comportamentos que aparecem somente nessa faixa de frequência de excitação externa.

A conclusão geral obtida pelo estudo, mostra que, a dinâmica de um sistema eletromecânico sofre influência, em relação aos parâmetros de resistência e capacitância do subsistema elétrico. A resistência apresenta maior influência no amortecimento mecânico aparente, observado pela correlação realizada entre esse parâmetro com o coeficiente de amortecimento adimensional mecânico, ζ . Considerando cada curva de capacitância, o amortecimento se acentua em valores de resistência próximos a 100Ω . Entretanto o pico de ζ se altera conforme a capacitância muda. Os resultados no diagrama de bifurcação, no qual mostraram a variação do parâmetro de capacitância, obtidos para o modelo com rigidez Duffing, mostram que o parâmetro bifurcado pode ser utilizado como parâmetro de controle, evitando regiões onde há possibilidade de ocorrer caos, quando esse for o objetivo. No entanto, em algumas aplicações, principalmente industriais que envolvem a vibração mecânica, o caos é interessante para o correto funcionamento do equipamento, dessa forma o parâmetro de controle da capacitância pode ser utilizado para colocar o sistema em diferentes regimes dinâmicos.

A proposta apresentada nesse trabalho, ainda carece de explorações acerca do subsistema elétrico. O comportamento da corrente e tensão elétrica, também pode se mostrar interessante para as aplicações mais atuais. Entre uma das aplicações que são discutidas atualmente, está, a possibilidade de converter energia cinética em mecânica, oriunda de oscilações ou perturbações, esse conceito também é conhecido como *energy harvesting*. O estudo relacionado às aplicações energéticas, é alvo de trabalhos, pesquisas e explorações futuros. A construção de um modelo experimental (protótipo) também é objeto para os próximos trabalhos. O protótipo tem como principal função, validar os resultados numéricos e mostrar as imperfeições do modelo matemático e o ajuste onde for possível.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDELKEFI, A.; HAJJ, M. R.; NAYFEH, A. H.. Phenomena and modeling of piezoelectric energy harvesting from freely oscillating cylinders. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 80, p.1377-1388, 10 jan. 2012. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/s11071-012-0540-x>>.

BAYIROĞLU, H., ALIŞVERİŞÇİ, G. F. AND ÜNAL, G.. Nonlinear Response of Vibrational Conveyers with Nonideal Vibration Exciter: Superharmonic and Subharmonic Resonance. **Mathematical Problems In Engineering**, Cairo, v. 2012, p.1-12, 24 nov. 2011. Article ID 717543, 12 pages. Disponível em: <<http://www.hindawi.com/journals/mpe/2012/717543/>>.

BRASIL, R. M. L. R. F.; FEITOSA, L. C. S.; BALTHAZAR, J. M.. A Nonlinear and Non-Ideal Wind Generator Supporting Structure. **Material Science And Engineering: Applied Mechanics and Materials**, Dürnten, v. 5-6, p.433-442, 2006. 80-100 Volumes Per Year. Disponível em: <<http://www.scientific.net/AMM.5-6.433>>.

CHAPRA, Steven C.. **Applied Numerical Methods: With MATLAB for Engineers and Scientists**. 3. ed. New York: Mcgraw-hill, 2012. 653 p.

CHATTERJEE, S.; DEY, Somnath. Nonlinear dynamics of two harmonic oscillators coupled by Rayleigh type self-exciting force. **Nonlinear Dynamics**, Dürnten, v. 72, n. 1-2, p.113-128, 01 abr. 2013. DOI 10.1007/s11071-012-0696-4, Print ISSN 0924-090X, Online ISSN 1573-269X. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/s11071-012-0696-4>>.

DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H.. **Sistemas de Controle Moderno**. 8. ed. Rio de Janeiro, Rj: Ltc, 2001. 658 p. Tradução de: Prof. Bernardo Severo da Silva Filho.

ERTURK, A.; INMAN, D. J.. On Mechanical Modeling of Cantilevered Piezoelectric Vibration Energy Harvesters. **Journal Of Intelligent Material Systems And Structures**, New York, n. 19, p.1311-1325, 01 jan. 2008. Disponível em: <http://www.ssdsl.gatech.edu/wp-content/uploads/2012/11/JIMSS_2008.pdf>.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jean. **Fundamentos de Física: Eletromagnetismo**. 8. ed. Rio de Janeiro, Rj: Ltc, 2009. 395 p. Tradução e revisão técnica: Ph.D. Ronaldo Sérgio de Biasi.

HO, Jee-hou; NGUYEN, Van-du; WOO, Ko-choong. Nonlinear dynamics of a new electro-vibro-impact system. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 63, n. 1-2, p.35-49, 01 jan. 2011. 10.1007/s11071-010-9783-6, Print ISSN 0924-090X, Online ISSN 1573-269X. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/s11071-010-9783-6>>.

HO, Jee-hou; WOO, Ko-choong. Approximate analytical solution to oscillations of a conductor in a magnetic field. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 64, n. 4, p.315-330, 06 jan. 2011. DOI 10.1007/s11071-010-9863-7, Print ISSN 0924-090X, Online ISSN 1573-269X. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/s11071-010-9863-7>>.

LIDE, David R. et al. **CRC Handbook of Chemistry and Physics**. 89. ed. Boca Raton: Crc Press/taylor And Francis, 2009.

MEIROVITCH, Leonard. **Methods of Analytical Dynamics**. San Francisco: Mcgraw Hill, 1970. 524 p.

MENDRELA, E. A.. Comparison of the performance of a linear reluctance oscillating motor operating under AC supply wit. **Energy Conversion, Ieee Transactions**, Vancouver, v. 14, n. 3, p.328-332, 01 set. 1999. DOI 10.1109/60.790878, ISSN 0885-8969. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?tp=&arnumber=790878>>.

MENDRELA, E. A.; PUDLOWSKI, Z. J.. Transients and dynamics in a linear reluctance self-oscillating motor. **Energy Conversion, Ieee Transactions**, Vancouver, v. 7, n. 1, p.183-191, 01 mar. 1992. DOI 10.1109/60.124559, ISSN 0885-8969. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=124559&tag=1>.

MORAES, Fernando de Haro et al. Influence of ideal and non-ideal excitation sources on the dynamics of a nonlinear vibro-impact syst. **Journal Of Theoretical And Applied Mechanics**, Varsóvia, v. 51, n. 3, p.763-774, 21 jan. 2013. ISSN 1429-2955. Disponível em:

<<http://yadda.icm.edu.pl/yadda/element/bwmeta1.element.baztech-cb0d9bfd-fbf7-49a5-95ce-90fbc14f305e>>.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. 3. ed. Rio de Janeiro, RJ: Ltc, 2000. 808 p. Tradução de: Prof. Bernardo Severo.

PREUMONT, A.. **Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectrics Systems**. Dordrecht: Springer, 2006. 207 p.

RAO, Singiresu. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2009. 295 p. Tradução de: Arlete Simille Marques.

SINCLAIR, Ian R.. **Sensors and Transducers**. 3. ed. Oxford: Newnes, 2001. 306 p. Disponível em: <<http://pt.slideshare.net/asmaaaq98/sensors-and-transducersthirdeditionianrsinclair>>.

SODANO, Henry A.; INMAN, Daniel J.; PARK, Gyuhae. Comparison of Piezoelectric Energy Harvesting Devices for Recharging Batteries. **Journal Of Intelligent Material Systems And Structures**, [s. L.], v. 16, n. 10, p.799-807, 01 out. 2005. DOI: 10.1177/1045389X05056681. Disponível em: <<http://jim.sagepub.com/content/16/10/799.full.pdf+html>>.

TOMITA, Masaru; MURAKAMI, Masato. High-temperature superconductor bulk magnets that can trap magnetic fields of over 17 tesla at 29 K. **Nature: International weekly journal of science**, [s. L.], v. 1, n. 421, p.517-520, 30 jan. 2003. Semanal. DOI:10.1038/nature01350. Disponível em: <<http://www.nature.com/nature/journal/v421/n6922/full/nature01350.html>>.

TUSSET, A. M.; BALTHAZAR, J. M.. On the Chaotic Suppression of Both Ideal and Non-ideal Duffing Based Vibrating Systems, Using a Magn. **Differential Equations And Dynamical Systems: International Journal for Theory, Real World Modelling and Simulations**, Dürnten, v. 1-2, n. 21, p.105-121, 01 jan. 2013. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/s12591-012-0128-4>>.

YAMAPI, René. **Dynamics and synchronization of electromechanical devices with a Duffing nonlinearity**. 2003. 112 f. Tese (Doutorado) - Curso de Física, Departamento de

Instituto de Matemática e Física, Universidade de Abomey-calavi, Porto Novo Benim, 2003.
Disponível em: <<http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/04/57/52/PDF/tel-00003770.pdf>>.

YAMAPI, René. Dynamics of an electromechanical damping device with magnetic coupling. **Communications In Nonlinear Science And Numerical Simulation**, Marseille, v. 11, n. 8, p.907-921, 01 dez. 2006. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570405000377>>.

APÊNDICE A

Tabela A.1 – Conversão AWG e milímetros

AWG	Diâmetro	Área	Resistência do fio de cobre a 20 °C	Corrente Máxima
	[mm]	[mm ²]	[Ω/m]	[A]
0000	11.7	107	0.000161	380
000	10.4	85.0	0.000203	328
00	9.26	67.4	0.000256	283
0	8.25	53.5	0.000323	245
1	7.35	42.4	0.000407	211
2	6.54	33.6	0.000513	181
3	5.83	26.7	0.000647	158
4	5.19	21.1	0.000815	135
5	4.62	16.8	0.00103	118
6	4.11	13.3	0.00130	101
7	3.66	10.5	0.00163	89
8	3.26	8.36	0.00206	73
9	2.91	6.63	0.00260	64
10	2.59	5.26	0.00328	55
11	2.30	4.17	0.00413	47
12	2.05	3.31	0.00521	41
13	1.83	2.62	0.00657	35
14	1.63	2.08	0.00829	32
15	1.45	1.65	0.0104	28
16	1.29	1.31	0.0132	22
17	1.15	1.04	0.0166	19
18	1.02	0.823	0.0210	16
19	0.912	0.653	0.0264	14
20	0.812	0.518	0.0333	11
21	0.723	0.410	0.0420	9
22	0.644	0.326	0.0530	7
23	0.573	0.258	0.0668	4.7
24	0.511	0.205	0.0842	3.5
25	0.455	0.162	0.106	2.7
26	0.405	0.129	0.134	2.2
27	0.361	0.102	0.169	1.7
28	0.321	0.0810	0.213	1.4
29	0.286	0.0642	0.268	1.2
30	0.255	0.0509	0.339	0.86
31	0.227	0.0404	0.427	0.7
32	0.202	0.0320	0.538	0.53
33	0.180	0.0254	0.679	0.43

34	0.160	0.0201	0.856	0.33
35	0.143	0.0160	1.08	0.27
36	0.127	0.0127	1.36	0.21
37	0.113	0.0100	1.72	0.17
38	0.101	0.00797	2.16	0.13
39	0.0897	0.00632	2.73	0.11
40	0.0799	0.00501	3.44	0.09