

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

**UM ESTUDO DE PAVIMENTAÇÃO DO PLANO
UTILIZANDO CALEIDOSCÓPIOS E O SOFTWARE
CABRI GÉOMÈTRE II**

Sirlei Tauber de Almeida

Orientador: Prof.Dr. Claudemir Murari

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos, para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2003

516 Almeida, Sirlei Tauber de.
A447e Um estudo de pavimentação do plano utilizando
caleidoscópios e o software Cabri Géomètre II / Sirlei Tauber de
Almeida. -- Rio Claro : [s.n.] 2003.
147 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual
Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Claudemir Murari
1. Geometria. 2. Simetria. 3. Progressões Aritméticas.
4. Jogos I. Título

*Dedico esse trabalho e a conquista do Título de Mestre em
Educação Matemática a meu pai, quem considero como meu
herói e sempre me serviu de exemplo.*

Agradeço primeiro a Deus, quem mais me apoiou, me auxiliou e me ouviu durante todo o meu percurso. Os mais sinceros agradecimentos ao meu orientador Claudemir Murari e a sua esposa Lenis por dirigirem essa pesquisa de uma maneira toda especial. Não poderia deixar de agradecer ao meu marido Saulo, quem agüentou minha ira e meus períodos depressivos sempre com palavras amigas, me reanimando nos momentos mais difíceis. Por fim, não menos importante, agradeço à minha família por terem confiado em mim e me dado a oportunidade de escolher meu caminho.

*“So don’t be sad cause I’ll be there.
Don’t be sad at all.
Life’s a gas!”*
(Joey Ramone)

*“Don't know what I want
but I know how to get it!”*
(P. Cooks / S. Jones / G. Matlock / J. Roten)

ÍNDICE

RESUMO	iii
---------------------	-----

ABSTRACT	iv
-----------------------	----

CAPÍTULO I

1	<i>Introdução</i>	01
2	<i>Origem do Problema</i>	03
3	<i>Pesquisa</i>	04
3.1	<i>Resolução de problemas</i>	07
3.2	<i>Jogos</i>	10
3.3	<i>As tecnologias na Educação Matemática</i>	12
3.3.1	<i>O software Cabri Géomètre II</i>	12
3.3.2	<i>As ferramentas do Cabri Géomètre II</i>	14

CAPÍTULO II

1	<i>Introdução</i>	18
2	<i>Simetrias</i>	19
2.1	<i>Simetria reflexional</i>	19
2.2	<i>Simetria rotacional</i>	20
2.3	<i>Simetria translacional</i>	21
3	<i>Caleidoscópios</i>	22
3.1	<i>Espelhos</i>	26
3.1.1	<i>Um espelho</i>	26
3.1.2	<i>Dois espelhos</i>	28
3.1.2.1	<i>Dois espelhos planos verticais e paralelos</i>	28
3.1.2.2	<i>Dois espelhos planos articulados para formação de ângulos</i>	28

3.2	<i>Três espelhos.....</i>	32
3.3	<i>Quatro espelhos.....</i>	33
4	<i>Pavimentações do plano.....</i>	35
4.1	<i>Pavimentação do plano com polígonos regulares.....</i>	36
5	<i>Bases e colorações.....</i>	43
5.1	<i>Bases para pavimentações de configuração 1-uniforme</i>	47
5.1.1	<i>Bases para a pavimentação de configuração (3,4,6,4).....</i>	52
5.1.2	<i>Bases para pavimentação de configuração (3,3,3,4,4).....</i>	54
5.2	<i>Bases para as pavimentações de configuração 2-uniforme.....</i>	56
5.3	<i>Bases transformadas no software Cabri Géomètre II.....</i>	73
6	<i>Relações entre o número de cores.....</i>	79
6.1	<i>Fórmula do número de cores.....</i>	82
6.1.1	<i>Progressões Aritméticas (PA).....</i>	83
6.1.1.1	<i>Aplicando a fórmula do termo geral (PA de segundo grau).....</i>	85
6.1.2	<i>Polinômio de Gregory-Newton.....</i>	86
6.1.2.1	<i>Aplicando a fórmula de Gregory-Newton.....</i>	88
6.1.3	<i>Acréscimo de regiões a serem coloridas.....</i>	90
6.1.3.1	<i>Número de regiões para (3,4,6,4).....</i>	91
6.1.3.2	<i>Número de regiões para (3,6,3,6).....</i>	98
6.1.3.3	<i>Número de regiões para (4,8,8).....</i>	101

CAPÍTULO III

1	<i>Introdução.....</i>	107
2	<i>Ambiente.....</i>	107
3	<i>Algumas atividades.....</i>	109

CAPÍTULO IV

1	<i>Conclusões.....</i>	142
---	------------------------	-----

CAPÍTULO V

1	<i>Bibliografia.....</i>	145
---	--------------------------	-----

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma estratégia de ensino utilizando caleidoscópios, jogos e o software Cabri Géomètre II, para aprendizagem de Geometria. Sob a perspectiva do método Resolução de Problemas, foram elaboradas atividades abordando temas como simetrias (reflexão, rotação e translação), polígonos regulares, construções geométricas, pavimentações do plano, seqüências numéricas, etc. Compilamos neste estudo um referencial teórico matemático detalhado, exemplos de várias atividades e relatos de nossa experiência com alunos do 2º ano do Ensino Médio. A utilização dos caleidoscópios e do software Cabri Géomètre II proporcionou uma interação entre o laboratório de ensino e o de informática, dinamizando o ambiente de aprendizagem.

ABSTRACT

In this scientific paper we present a teaching strategy which uses kaleidoscopes, games and Cabri Géomètre II software for the geometry learning. Under the perspective of the problem-solving method, it was done activities which approach subjects such as symmetry (reflection, rotation and translation), regular polygons, geometric constructions, plan floor, numeric sequences, etc. In this study, it was gleaned a detailed theoretical mathematics reference, examples of many activities and reports of our experience with High School students of the second year. The use of kaleidoscopes and of the Cabri Géomètre II software gave the interaction between the teaching laboratory and the computer one, making the learning atmosphere dynamic.

Capítulo I

1 Introdução

Tratando-se da formação intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da transição da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização, a Geometria apresenta um amplo campo de idéias e métodos de extrema importância. Seu papel no ensino é primordial, visto que a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução compõem o seu cume.

Por décadas, o ensino de Geometria foi desenvolvido com forte ênfase na terminologia correta e na axiomática formal, estruturas dedutivas de geometria (Matemática Moderna). Dessa maneira, o processo indutivo era desprezado.

Porém, com as mudanças que ocorreram no ensino em geral, a necessidade de se adequar o ensino de geometria às novas tendências deu início à busca de novos métodos e materiais.

Percebeu-se, então, que o envolvimento nas investigações e o trabalho com materiais concretos faziam com que conceitos geométricos que estavam obscuros e desinteressantes comesçassem a ter real significado para o aluno. Assim, instrumentos educativos auxiliares passaram a ser muito utilizados por pesquisadores e/ou grupos de trabalho na área de ensino-aprendizagem de matemática das mais diversas linhas.

Dentre os materiais concretos empregados com êxito no ensino de geometria estão os caleidoscópios. Pesquisadores como Jacobs¹, Daffer & Clemens², Ball & Coxeter³, Barbosa⁴ e Murari⁵ obtiveram resultados satisfatórios ao se servirem desse material.

Um caleidoscópio é um conjunto de espelhos planos perpendiculares a um mesmo plano, formando um prisma de base triangular (equilátera, isósceles reto ou escaleno reto) ou quadrangular (retangular ou quadrada). Um dos temas ideais para ser estudado via caleidoscópios é “pavimentação do plano por polígonos regulares”. Sob o caleidoscópio coloca-se o que denominamos “bases substituíveis”, que são figuras triangulares, quadradas ou retangulares, que possuem segmentos de reta adequadamente construídos, para que nas reflexões dos mesmos possa-se obter a visualização da pavimentação desejada.

¹ JACOBS, H.J., *Geometry*, W. H. Freeman and Company, New York, San Francisco, 1974.

² DAFFER, E.R, CLEMENS, R.S., *Geometry: an investigative approach*, Addison-Wesley, M. Park, 1977.

³ BALL, R. and COXETER, M.C.H., *Mathematics recreation and essays*, University of Toronto, 1974, republication by DOVER, N.Y., 1987.

⁴ BARBOSA, R.M., *Descobrimos padrões em mosaicos*, São Paulo, Atual, 1993.

⁵ MURARI, C., *Ensino-aprendizagem de geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópio*, Tese de Doutorado, IGCE-UNESP, Rio Claro, 1999.

Na construção dessas bases são explorados conceitos de perpendicularidade, paralelismo, equidistância, simetria, entre outros. Deste modo, estudos direcionados à descoberta dessas bases e sua construção gráfica constituem-se numa atividade interessante e motivadora.

A introdução das novas tecnologias no ensino-aprendizagem de matemática, apesar de um processo lento, trouxe mudanças positivas para a sala de aula, da mesma forma que para a sociedade de um modo geral, como muitas pesquisas têm demonstrado. Com o desenvolvimento tecnológico, muito se tem investigado sobre a possibilidade de utilização educativa dos computadores.

Particularmente, o software Cabri Géomètre II tem se revelado facilitador no ensino-aprendizagem de geometria, sendo recomendado por Henriques⁶, Barbosa & Lourenço⁷, Lourenço⁸ e outros.

Utilizando paralelamente os caleidoscópios e o software Cabri Géomètre II, buscamos uma atividade interativa realizada em dois ambientes: laboratório de ensino e laboratório de informática. Desenvolvemos fichas de trabalho com problemas-desafio que envolvem, por exemplo, pontos e segmentos simétricos, eixo de simetria de figuras e polígonos, rotação, reflexão, translação e construções geométricas em geral.

Além dos caleidoscópios e do software Cabri Géomètre II, são utilizadas tiras de papel, canudinhos plásticos, kits de polígonos e um jogo (quebra-cabeça), cujas peças são bases geradoras e/ou transformadas dessas bases. Com isso, conceitos geométricos serão reforçados e ainda ocorrerá a integração multidisciplinar com Ciências, Desenho Geométrico, Educação Artística, Informática e Álgebra.

Na sequência, apresentamos alguns fatos que contribuíram para a elaboração deste projeto e também a teoria metodológica que apóia nossa pesquisa, constituindo assim o capítulo I. O referencial teórico matemático, ou seja, detalhes sobre caleidoscópios, pavimentações do plano e suas inter-relações estão no capítulo II. No terceiro e último capítulo está nossa proposta. Além de algumas atividades e suas respectivas descrições, consta um breve relato sobre a experiência que tivemos com alunos de uma turma do 2º ano do Ensino Médio na Escola Estadual Jamil Abrahão Saad em Cordeirópolis – SP, onde utilizamos este material.

⁶ HENRIQUES, A., *Ensino e Aprendizagem da Geometria Métrica: Uma sequência didática com auxílio do software Cabri-Géomètre II*, Dissertação de Mestrado, IGCE-UNESP, Rio Claro, 1999.

⁷ BARBOSA, R.M., LOURENÇO, M.L., Nova investigação de aplicabilidade do Cabri Géomètre II: Geometria Analítica – CO271, vol.II, p.276-727, In: VI Encontro Nacional de Educação Matemática, 1998.

⁸ LOURENÇO, M.L., *Cabri Géomètre II – introdução e atividades*, FAFICA, Catanduva, 2000.

2 *Origem do problema*

A falta do ensino de Geometria nas escolas tem sido revelada por vários autores, entre eles Perez (1991) e Pavanello (1993). Somos testemunhas dessa afirmação, pois quando cursávamos o 1º e 2º graus (atuais ensinos fundamental e médio, respectivamente), esperávamos sempre que Geometria fizesse parte do currículo ou da disciplina Matemática ou Educação Artística, mas nossas expectativas eram sempre frustradas, sendo muito pouco o que se via nestes níveis.

No curso universitário da UNESP – Rio Claro, estudamos dois semestres de Geometria Euclidiana e um de Desenho Geométrico. Apesar de nosso envolvimento e interesse por essas disciplinas, tivemos dificuldades, quando então pudemos avaliar a importância do aluno receber uma boa fundamentação da Geometria nos níveis anteriores ao universitário.

A partir daí, questionamentos como os que se seguem começaram a nos inquietar:

- ? Que papel a Geometria deve desempenhar na formação do aluno?
- ? Que lugar deve ter no currículo programático?
- ? A Geometria deve aparecer isolada ou em íntima ligação com outras áreas?
- ? Que papel deve ser reservado para os modelos físicos, os materiais manipuláveis, a informática, etc.?

Durante os anos de 1999 e 2000, enquanto cursávamos Licenciatura em Matemática – UNESP- Rio Claro, tivemos a oportunidade de trabalhar com pesquisas sobre Geometria.

Foram desenvolvidos dois projetos: para Estágio de Iniciação Científica, intitulado “Atividades educacionais de Geometria fazendo uso de 1, 2 e 3 espelhos – Caleidoscópios”, e para Iniciação Científica, “Ensino-aprendizagem de Geometria no ensino fundamental, via caleidoscópio”, ambos orientados pelo Prof. Dr. Claudemir Murari. Fomos contemplados com uma bolsa do Programa de Apoio ao Estudante (PAE) em 1999 e FAPESP* em 2000.

Como fruto destes projetos, alguns trabalhos foram apresentados.

- Em 1999, no XI Congresso de Iniciação Científica da UNESP – Araraquara, realizado nos dias 14 e 15 de outubro de 1999, intitulados:
 - Um teorema sobre o número máximo de espelhos para obtenção de um caleidoscópio;

* Processo nº 99/11053-9.

- Um estudo sobre o processo simultâneo de geração de imagens em caleidoscópios;
 - Um algoritmo para determinação de bases substituíveis de caleidoscópios em pavimentações do plano;
 - Descobrimos bases para o caleidoscópio da pavimentação 2-uniforme de configuração (3,3,4,3,4;3,4,6,4).
- No ano de 2000, apresentamos:
 - “Obtenção de bases substituíveis para caleidoscópio no Cabri Géomètre II”, no Workshop de Informática Aplicada à Educação, realizado em Araraquara, de 10 a 12 de agosto, em promoção conjunta da UNIARA – Centro Universitário de Araraquara e SBEM/SP – Sociedade Brasileira de Educação Matemática / São Paulo.
 - “Tesselações planas e espaciais com padrões caleidoscópicos obtidos através do software Cabri Géomètre II”, no Simpósio de Iniciação Científica do Campus de Rio Claro – UNESP, realizado no período de 12 a 14 de setembro.

Foi também publicado um artigo no BICMAT – Boletim de Iniciação Científica em Matemática, UNESP – Rio Claro, Departamento de Matemática, vol.2, em agosto de 2000, com o título “Pavimentação do plano de configuração (3,3,4,3,4;3,4,6,4) no caleidoscópio equilátero”.

A preocupação com o ensino de Geometria nos ensinos fundamental e médio continuou. Então, nos inscrevemos no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro, com o projeto de pesquisa intitulado “Um estudo de pavimentação do plano utilizando caleidoscópios e o software Cabri Géomètre II”, o qual foi aprovado.

Os trabalhos anteriores apresentados deram-nos o respaldo para a elaboração deste projeto utilizando conjuntamente caleidoscópios e o software Cabri Géomètre II.

3 Pesquisa

Consultas eleitorais ou aquelas pedidas pelos professores aos alunos, os quais acabam simplesmente examinando uma enciclopédia ou mesmo a Internet, vulgarizam cada vez mais o sentido da palavra “pesquisa”.

Segundo Rampazzo⁹, pesquisa é um procedimento reflexivo, sistemático, controlado e crítico que permite descobrir novos fatos ou dados, soluções ou leis, em qualquer área do conhecimento; é uma atividade voltada para a solução de problemas através dos processos do método científico. Ele indica três elementos que caracterizam a pesquisa:

1. o levantamento de algum problema;
2. a solução à qual se chega;
3. os meios escolhidos para chegar a essa solução, a saber, os instrumentos científicos e os procedimentos adequados.

A abordagem que até bem pouco tempo atrás predominou entre as pesquisas educacionais caracterizava-se por acreditar que o sujeito da pesquisa, o pesquisador e seu objetivo de estudo deveriam estar separados e que os fenômenos educacionais podiam ser decompostos em suas variáveis básicas, onde o estudo analítico, e se possível quantitativo, levasse ao conhecimento total desses fenômenos. Esta visão de fazer pesquisa em educação corresponde mais ou menos ao que se convencionou chamar de paradigma positivista¹⁰.

Mas a insatisfação crescente entre pesquisadores, em relação ao método que não levava a resultados satisfatórios, fez com que se procurassem novas formas de trabalho em pesquisa, métodos que buscassem a interpretação em lugar da mensuração, a descoberta em lugar da constatação, valorizando a indução, assumindo que os fatos e valores estão intimamente relacionados, tomando-se inaceitável uma postura neutra do pesquisador¹¹. A nova abordagem (ou também paradigma) de pesquisa, chamada de naturalística por uns ou de qualitativa por outros, utiliza freqüentemente:

- ✓ a observação participante, onde o pesquisador fica diante da realidade estudada;
- ✓ a entrevista, permitindo um maior aprofundamento das informações obtidas e
- ✓ a análise documental, complementando os dados obtidos através da observação e da entrevista e apontando novos aspectos da realidade pesquisada.

⁹ RAMPAZZO, L., *Metodologia científica: para alunos dos cursos de graduação e pós-graduação*, Lorena, SP, Ed. Stiliano; São Paulo; UNISAL, 1998, p.53.

¹⁰ LÜDKE, M., ANDRÊ, M.E.D.A., *Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas*, Ed. Pedagógica e Universitária Ltda., 1986, p.6.

¹¹ ANDRÊ, M.E.D.S., *Etnografia da prática escolar*, Papirus, 1995, p.17.

O ponto de partida de uma pesquisa é, como vimos no começo desta parte, a existência de um problema que se deverá definir, avaliar e analisar criticamente para, em seguida, ser tentada sua solução.

Em nossa pesquisa, buscamos responder o seguinte problema:

“É possível elaborar uma estratégia de ensino em Geometria utilizando caleidoscópios, o software Cabri Géomètre II e jogos, contribuindo para que a aprendizagem se torne interessante e participativa?”

Além dessa pergunta principal, norteadora de nossa pesquisa, temos ainda como alvo verificar se, com essa estratégia, ocorre a aprendizagem (propriamente dita) dos conteúdos matemáticos apresentados. Para tanto, cada nova atividade sempre foi preparada levando em consideração os temas estudados em aulas anteriores.

A dificuldade e/ou facilidade demonstrada na realização das atividades desenvolvidas, foi nosso referencial quantitativo da aprendizagem estabelecida.

O problema que se quer trabalhar é o que determina como fazê-lo. Segundo Goldemberg¹², a escolha do método ou trajetória de pesquisa só acontece quando se sabe aonde se quer chegar. Nossa opção pela abordagem qualitativa de pesquisa se deu quando verificamos que suas cinco características básicas, apresentadas por Bogdan & Biklen¹³, vão ao encontro da classificação de nossa investigação. São elas:

1. a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento;
2. os dados coletados são predominantemente descritivos;
3. a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto;
4. o “significado” que as pessoas dão à sua vida é foco de atenção especial pelo pesquisador;
5. a análise dos dados tende a seguir um processo intuitivo.

¹² GOLDEMBERG, M. *A arte de pesquisar*, Record, Rio de Janeiro, 1999, p.14.

¹³ BOGDAN, R., BIKLEN, S.K. In: LÜDKE, M., ANDRÊ, M.E.D.A. *Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas*, Ed. Pedagógica e Universitária Ltda., 1986, p.11-13.

3.1 Resolução de problemas

Através de exploração e troca de informações com os colegas o aluno vai aperfeiçoando seu conhecimento. As tentativas de solucionar um problema desenvolvem seu raciocínio e o estímulo à dúvida leva à descoberta e à construção do conhecimento.

Segundo Nasser¹⁴, o professor deve “desenvolver o processo ensino-aprendizagem sob a forma de desafios e, em aulas especiais, propor problemas interessantes, que possam ser ‘explorados’ e não apenas resolvidos”.

Onuchic¹⁵ nos diz que “ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática, mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso”.

O ponto central de nosso interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de geometria através da resolução de problemas é baseado na mesma crença de Onuchic¹⁶: “a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática”.

Nossa concepção de o que vem a ser um problema vai ao encontro da definição de Dante¹⁷.

“...qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la.”

Para se resolver um problema, segundo Polya¹⁸, quatro são as etapas principais:

- compreender o problema
- elaborar um plano
- executar o plano
- fazer um retrospecto ou verificação

¹⁴ NASSER, L. In RODRIGUES, V., *Resolução de problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática*, Dissertação de Mestrado, IGCE-UNESP, Rio Claro, 1992, p.31.

¹⁵ ONUCHIC, L.R., *Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*, In Bicudo, M.A.V., *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*, ed. UNESP, São Paulo, 1999, p.207.

¹⁶ Ibid, ONUCHIC, L.R., 1999, p.208.

¹⁷ DANTE, L.R., *Didática da resolução de problemas de matemática: 1ª a 5ª séries*, São Paulo, 1991, p.9.

¹⁸ Ibid., DANTE, L.R., 1991, p.29.

Vários são os tipos de problemas que Dante¹⁹ apresenta:

- Exercícios de reconhecimento
- Exercícios de algoritmos
- Problemas padrão
- Problemas-processo ou heurísticos
- Problemas de aplicação
- Problemas de quebra-cabeça

Em nossa pesquisa, os problemas que utilizaremos são os chamados problemas-processo ou heurísticos, nos quais o aluno precisa pensar, elaborar um plano, tentar uma estratégia de acordo com sua intuição, testar essa estratégia e verificar se chegou à solução correta.

Os principais objetivos da resolução de problemas, de acordo com Dante²⁰, são:

- ❖ Fazer o aluno pensar produtivamente;
- ❖ Desenvolver o raciocínio do aluno;
- ❖ Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- ❖ Dar oportunidade ao aluno de se envolver com as aplicações da matemática;
- ❖ Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras;
- ❖ Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- ❖ Dar uma boa base de matemática às pessoas.

A associação americana “The National Council of Supervisors of Mathematics” (NCSM) recomenda que os conceitos geométricos sejam explorados de modo a envolver resolução de problemas. Diz ainda que, para atuarem efetivamente no mundo tridimensional, os alunos devem compreender alguns conceitos geométricos básicos, como paralelismo, perpendicularidade, congruência, semelhança, simetria, as propriedades básicas das figuras planas e dos corpos sólidos simples. Com exceção dos corpos sólidos, estes conceitos todos são explorados quando se trabalha com o tema pavimentação do plano juntamente com os

¹⁹ Ibid., DANTE, L.R., 1991, p.16-21.

²⁰ Ibid., DANTE, L.R., 1991, p.11-15.

caleidoscópios e o software Cabri Géomètre II, como se pode verificar nos capítulos II e III desta dissertação.

Como professores preocupados com a formação de seus alunos, apoiamos Miskulin²¹ ao afirmar que no contexto de resolução de problemas “evidencia-se a possibilidade de proporcionar a motivação necessária para formar jovens com espírito aberto e não conformistas, jovens que estejam em condições de fazer uso, de uma maneira eficiente, dos mais sofisticados automatismos, jovens que possam sobreviver a um crescente avanço tecnológico, visando sua plena integração na sociedade”.

Sendo a geometria mundialmente reconhecida como um importante assunto para a formação matemática dos alunos, cabe aos professores a responsabilidade de viabilizar esse processo por meio de metodologias alternativas.

Vejam algumas recomendações para o uso do método “ensino de matemática via resolução de problemas”, segundo Onuchic²²:

- ↪ ouvir continuamente os alunos e basear o “ensino” (instrução) no que eles já sabem;
- ↪ ajudar os alunos a fazer conexões entre as várias idéias matemáticas;
- ↪ ajudar os alunos a fazer conexões entre conceitos e procedimentos;
- ↪ ajudar os alunos a ver conexões entre representações manipulativas, pictoriais e abstratas;
- ↪ encorajar os alunos a pensar através de um problema mais do que confiar em procedimentos memorizados;
- ↪ ajudar os alunos a falar uns com os outros sobre matemática;
- ↪ permitir que os alunos relatem conceitos matemáticos de seu próprio modo;
- ↪ encorajar os alunos a fazer comentários sobre o progresso que fazem (mental e escrito) quando resolvem problemas;
- ↪ encorajar os alunos a, continuamente, avaliar seu progresso sobre um problema complexo e, também, considerar caminhos alternativos.

A resolução de problemas é uma importante técnica de ensino. Com ela os alunos aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo

²¹ MISKULIN, R.G.S., *Concepções teórico-metodológicas baseadas em Logo e em Resolução de problemas para o processo Ensino /Aprendizagem da Geometria*, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, 1994, p.36.

²² ONUCHIC, L.R. In AZEVEDO, L.L., *Uma proposta de mudança na Licenciatura em matemática do ICMLA, apoiada na metodologia de “Ensino de Matemática via Resolução de problemas”*, Dissertação de Mestrado, IGCE-UNESP, Rio Claro, 1998, p.91.

relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas. Adquirem, ainda, autoconfiança, sentido de responsabilidade e espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio e finalmente ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e argumentação (PCN de Matemática).

Estes aspectos todos são de muita importância para a formação dos alunos e também são desenvolvidos com a prática de outros procedimentos didáticos, como, por exemplo, jogos educativos. Por isso, jogos representam o tema de nosso próximo assunto.

3.2 Jogos

Os jogos sempre constituíram uma forma de atividade natural, tanto para recrear como para educar. Egípcios, gregos, romanos, maias e também indígenas utilizavam-se de jogos como meio para a geração mais jovem aprender com os mais velhos seus conhecimentos físicos, sociais e culturais.

Devido à ascensão do cristianismo, os jogos perderam o seu valor, sendo então considerados profanos e imorais, desprovidos de qualquer significação funcional.

Mas os humanistas, a partir do século XVI, começaram a perceber o valor educativo dos jogos, sendo que os primeiros a recolocá-los em prática foram os jesuítas.

Muitos teóricos, precursores dos novos métodos ativos da educação, como por exemplo, Montaigne (1533-1592), Comênio (1592-1671), Jean-Jacques Rousseau (1712-1778), Pestalozzi (1746-1827), Froebel (1782-1852), frisaram a importância do processo lúdico na educação²³. A teoria froebiana de que a melhor forma de conduzir a criança à atividade, à auto-expressão e à socialização seria através dos jogos, foi que realmente determinou os jogos como fatores decisivos na educação²⁴.

Em relação ao ensino de matemática, a utilização do jogo recebe as contribuições de teóricos como Piaget, Vygotsky, Leontiev, entre outros. Para Piaget, os jogos não são apenas uma forma de desafogo ou entretenimento para gastar energia das crianças, mas meios que contribuem e enriquecem o desenvolvimento intelectual.

²³ Veja ALMEIDA, P.N., *Educação Lúdica – técnicas e jogos pedagógicos*, São Paulo, Loyola, p16-19.

²⁴ Froebel apresenta, em *Educação do Homem*, uma concepção do jogo como o produto mais puro e mais espiritual do homem nessa idade, que, por sinal, revela a atividade espiritual do homem de amanhã.

Analisando concepções de Piaget e Vygotsky sobre jogos, Moura²⁵ chega à conclusão de que o jogo é “um comportamento social que tem sua origem na ação espontânea, porém orientada culturalmente. Ele é de caráter simbólico e regrado, implicando sempre na representação de algo. Evolui com o desenvolvimento cognitivo e envolve a personalidade completa da criança e sua forma de entender o mundo”. Ainda defende²⁶ que o jogo aproxima-se da matemática via desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas por possibilitar ao aluno a oportunidade de estabelecer planos de ação para atingir determinados objetivos, executar jogadas segundo este plano e avaliar sua eficácia nos resultados obtidos.

Podemos constatar outra semelhança que faz com que jogos e resolução de problemas se aproximem muito enquanto estratégias de ensino, além da descrita acima. Ela encontra-se no sujeito que executa a ação. Para ele só haverá jogo se nele se instalar a vontade de jogar, se ele entrar na brincadeira. Da mesma maneira, o problema só é problema se ele é do indivíduo.

Realmente, estudar é um trabalho difícil. Exige disciplina intelectual que não se ganha se não praticando. Paulo Freire²⁷, um dos maiores pensadores da educação como prática de liberdade, dá ao trabalho (ato de estudar) a significação lúdica, pois ninguém se atiraria a uma atividade eminentemente séria, penosa, se não tivesse o mínimo de prazer, satisfação e predisposição para isso.

Podemos dizer que a educação lúdica integra na sua essência uma concepção teórica profunda e uma concepção prática atuante e concreta; tem como objetivos a estimulação das relações cognitivas, afetivas, verbais, psicomotoras, sociais, a mediação socializadora do conhecimento e a provocação para uma recreação ativa, crítica, criativa dos alunos.

Como promotor da aprendizagem e do desenvolvimento, o jogo, na educação matemática, passa a ter o caráter de material de ensino. Diante de situações lúdicas, o aluno aprende a estrutura lógica da brincadeira e, deste modo, aprende também a estrutura matemática presente.

A possibilidade de explorar conceitos colocando-os para o aluno de forma lúdica nos levou a desenvolver um quebra-cabeça. Suas peças são bases geradoras e/ou transformadas (triangulares, retangulares ou quadradas) de uma mesma pavimentação. Pode-se montar, com as peças, tanto uma porção da pavimentação como bases transformadas a partir da base

²⁵ MOURA, M. O., *A construção do signo numérico em situação de ensino*, Tese de Doutorado, Faculdade de Educação Universitária de São Paulo, São Paulo, 1992, p.48.

²⁶ Ibid., MOURA, M.O., p.81.

²⁷ FREIRE, P., *Ação cultural como prática da liberdade*, Paz e Terra, Rio de Janeiro, 1977, p.9.

geradora. Dentre outras coisas, durante o jogo os alunos verificam que pavimentações possuem diversas bases, trabalham simetria reflexional, e também contam o número de regiões a serem coloridas. Maiores detalhes serão fornecidos no capítulo III.

3.3 As tecnologias na Educação Matemática

Preocupados com a formação, no nosso caso formação matemática, devemos estar sempre buscando métodos alternativos que contribuam para uma melhoria na qualidade deste processo. Muitas pesquisas nos mostram que as novas tecnologias fornecem recursos eficazes para tal melhoria.

Ponte²⁸ afirma que “o papel fundamental da escola passa a ser o de preparar a totalidade dos jovens para se inserirem de modo crítico e interveniente numa sociedade cada vez mais complexa, em que a capacidade de descortinar oportunidades, a flexibilidade de raciocinar, a adaptação a novas situações, a persistência a capacidade de interagir e cooperar são qualidades fundamentais”.

O avanço tecnológico tanto em software quanto em hardware proporciona aos profissionais do ensino, como diz Henriques²⁹, grande variedade de meios e recursos no sentido de auxiliá-los em seus trabalhos didáticos, freqüentemente em sala de aula.

No Brasil, muitas escolas já estão equipadas com computadores. É de fundamental importância que os professores compreendam que a utilização dos recursos tecnológicos é necessária e que não irá substituí-los, e sim auxiliá-los.

3.3.1 O software Cabri Géomètre II

Em atividades onde construções geométricas são necessárias, sua realização no papel exige o uso de régua e compasso, além de lápis e borracha. O micro-mundo utilizado neste trabalho, a saber, software Cabri Géomètre II, vem preparado com essas ferramentas. O nome

²⁸PONTE, J. P., O ensino de Matemática na sociedade da informática, In: *Revista Educação e Matemática*, RAPM, nº45, 1997, p.1-2.

²⁹HENRIQUES, A., *Ensino Aprendizagem de Geometria Métrica: uma sequência didática com o auxílio do software Cabri Géomètre II*, Dissertação de Mestrado, IGCE-UNESP. Rio Claro, 1999, p.48.

origina-se da abreviatura de Cahier Brouillon Interactif, que significa Caderno de Rascunho Interativo.

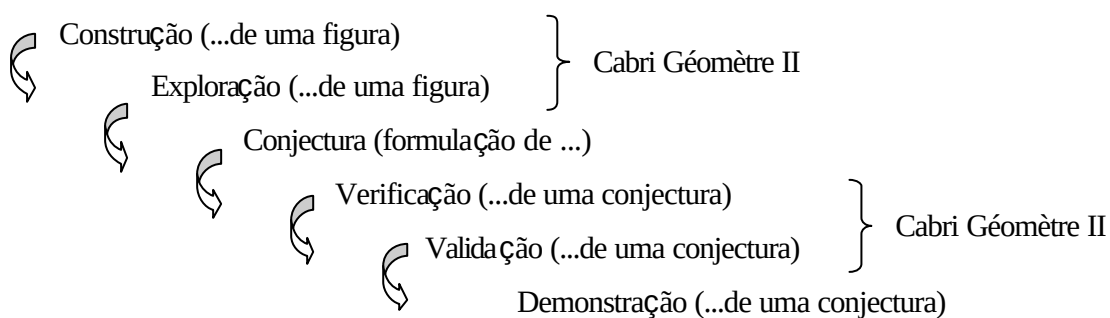
Esse software didático foi desenvolvido por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain no laboratório do Instituto de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Joseph Fourier de Grenoble, França, em colaboração com o Centro Nacional de Pesquisas Científicas e Texas Instrumentos. O Cabri Géomètre é representado no Brasil desde 1992 pela PROEM, na PUC-SP.

O software Cabri Géomètre II é um programa que, além da possível construção dos objetos do universo da Geometria Elementar em uma linguagem muito próxima à do universo “papel-e-lápis”, da exploração de forma interativa e da manipulação dinâmica e rápida das figuras, possui outros aspectos importantes: permite visualizar lugares geométricos, como também medir distâncias, ângulos e observar a evolução em tempo real durante as modificações das figuras.

Foi escolhido o software Cabri Géomètre II principalmente porque, além dos recursos inerentes à construção de bases substituíveis para caleidoscópios, permite criar a imagem de um objeto refletido em relação a uma reta, semi-reta, segmento ou lado de um polígono, com a ferramenta simetria axial. Com esta ferramenta, podemos construir, de modo mais ágil, bases transformadas com quantidade muito maior de regiões a serem coloridas.

Resolver problemas em Geometria é uma atividade composta de duas fases: o *raciocínio* e a *demonstração*³⁰, que são sucessivas ou alternadas. O *raciocínio* manipula fatos conhecidos (objetos e relações) e a *demonstração* implementa a rede do problema em questão.

Henriques³¹ nos explica que nas atividades com o intuito de solucionar um problema utilizando o Cabri Géomètre II, ocorrem sucessivamente os níveis tais como esquematizados abaixo. O Cabri Géomètre II intervém em dois deles.



³⁰ Veja HENRIQUES, A., 1999, p.54.

³¹ Ibid., HENRIQUES, A., 1999, p.54.

Efetivada a construção, a exploração da figura acontece, levando à formulação de uma conjectura, que se procura verificar e depois validar, e, enfim, demonstrar formalmente.

Na tabela 1 estão as principais características pedagógicas do Cabri Géomètre II em relação ao universo clássico papel-e-lápis³².

Características	Universo	
	Cabri Géomètre II	Papel-e-lápis
construção de figuras	permite...rapidamente	permite
redefinição de um objeto	permite...rapidamente	não é possível
deformação de uma figura	permite	não é possível
visualização de lugar geométrico	permite	não existe (ou limitada)
movimentação da figura	permite...rapidamente	impossível
validação de propriedades	existe	não existe (ou limitada)
leitura de áreas de figuras	permite (e limitada)	analógica

tabela 1

3.3.2 As ferramentas do Cabri Géomètre II

Na parte superior da tela, encontra-se a barra de menus que contém as seguintes opções, devidamente expostas com seus comandos:

- ⌘ **Arquivo:** com os comandos *Novo, Abrir, Salvar, Salvar como, Recuperar, Mostrar página, Formato da impressão, Imprimir, Sair.*
- ⌘ **Editar:** com os comandos *Desfazer, Recortar, Copiar, Colar, Apagar, Seleccionar tudo, Rever construção, Redesenhar.*
- ⌘ **Opções:** com os comandos *Ocultar/Mostrar atributos, Preferências, Configurações.*
- ⌘ **Ajuda:** com os comandos *Ajuda, Acerca do Cabri II.*

³² Ibid., HENRIQUES, A., 1999, p.55.

A figura 1 mostra os 11 ícones da barra de ferramentas do software Cabri Géomètre II, com seus respectivos nomes.

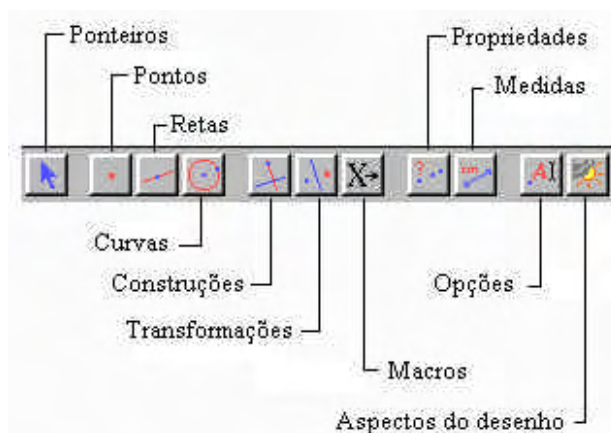


figura 1

Cada um desses ícones aciona um sub-menu, onde se pode escolher a ferramenta desejada.

Ponteiros:

-  - Ponteiro
-  - Giro
-  - Rodar e Dilatar
-  - Dilatar/Reduzir

Pontos:

-  - Ponto
-  - Ponto sobre objetos
-  - Ponto de interseção

Curvas:

-  - Circunferência
-  - Arco
-  - Cônica

Retas:

-  - Reta
-  - Segmento
-  - Semi-reta
-  - Vetor
-  - Triângulo
-  - Polígono
-  - Polígono regular

Construções:

-  - Reta perpendicular
-  - Reta paralela
-  - Ponto médio
-  - Mediatriz
-  - Bissetriz
-  - Soma de vetores
-  - Compasso
-  - Transferência de medidas
-  - Lugar geométrico
-  - Redefinir objeto

Transformações:

-  - Simetria axial
-  - Simetria
-  - Translação
-  - Rotação
-  - Homotetia
-  - Inversão

Macros:

-  - Objetos iniciais
-  - Objetos finais
-  - Definir macro

Propriedades:

-  - Alinhado
-  - Paralelo
-  - Perpendicular
-  - Equidistante
-  - Pertence

Medidas:

-  - Distância e Comprimento
-  - Área
-  - Declive
-  - Medida de ângulo
-  - Coordenada e Equação
-  - Calculadora
-  - Tabela

Opções:

-  - Nomear
-  - Comentários
-  - Edição numérica
-  - Marcar ângulo
-  - Bloquear/desbloquear
-  - Traço de um objeto
-  - Animação
-  - Animação múltipla

Aspectos do desenho:

-  - Ocultar/Mostrar
-  - Colorir
-  - Preencher
-  - Espessura de traço
-  - Pontilhar
-  - Modificar aparência
-  - Sistema de eixos
-  - Novos eixos
-  - Grade

Capítulo II

1 Introdução

Em nosso estudo, visamos uma atividade interativa, realizada paralelamente em dois ambientes: laboratório de ensino e laboratório de informática, tendo, respectivamente, os caleidoscópios e o computador, especificamente o software Cabri Géomètre II, como recursos materiais educacionais mais importantes.

Um dos temas ideais para ser estudado via caleidoscópios, dentro do ensino-aprendizagem de Geometria, tem sido pavimentação do plano por polígonos regulares.

Para que o estudo se realize, é fundamental a construção de padrões, os quais denominamos “bases substituíveis”, conforme figura 2. Nessas bases, segmentos são construídos adequadamente para que suas reflexões, quando colocadas sob o caleidoscópio, gerem os polígonos que formarão a pavimentação desejada.



figura 2

As bases substituíveis que não contêm propriamente nenhuma outra são chamadas bases geradoras; quando uma base provém de uma geradora, recebe o nome de base transformada.

Para a construção dessas bases são necessários conhecimentos sobre algumas figuras geométricas e de alguns conceitos geométricos, como por exemplo, ponto médio, bissetriz, perpendicular, etc. Porém, a construção de alguns desses padrões através de régua e compasso pode tornar-se uma tarefa extenuante e com resultados sujeitos às imprecisões. Isto nos leva a buscar novas tecnologias capazes de oferecer recursos que nos auxiliem na importante tarefa de ensinar/aprender.

Dessa maneira, promovemos o reforço de alguns conceitos geométricos (pois na construção gráfica das bases recorre-se às construções geométricas) e a integração multidisciplinar com Ciências, Desenho Geométrico, Educação Artística, Informática, Álgebra e Aritmética.

Nesse capítulo, estudaremos as simetrias, as reflexões em espelhos e também os tipos de caleidoscópios com suas respectivas construções. Apresentaremos quais as pavimentações podem ser visualizadas em caleidoscópios, faremos um estudo detalhado para a obtenção de bases geradoras e transformadas, incluindo a construção e justificativa de algumas delas e mostraremos ainda que, para algumas pavimentações, é possível encontrar a lei de formação do número de regiões a serem coloridas nas bases transformadas.

2 Simetrias

2.1 Simetria reflexional

Sejam dados uma reta r qualquer e um ponto P não pertencente a r . Se o ponto P' é tal que $PP' \perp r$ e $\overline{PM} = \overline{MP'}$ ($M = r \cap PP'$), então P' é dito *simétrico* de P em relação à reta r . Essa simetria é chamada *reflexional* ou *reflexão* e a reta r recebe o nome de *eixo de simetria reflexional*.

Observe que se um ponto Q pertence à reta, então coincide com seu simétrico Q' (figura 3).

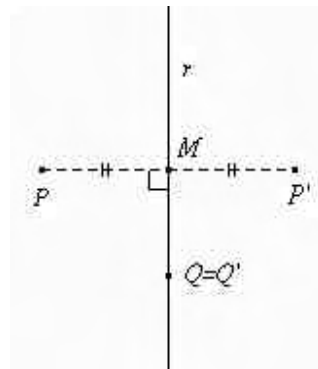


figura 3

Dado agora um segmento AB , sejam A' e B' os simétricos de A e B , respectivamente, em relação a um eixo r . Então, como vimos acima, temos:

- $\overline{AM} = \overline{MA'}$ ($M = r \cap AA'$)
- $\widehat{AMN} = \widehat{A'MN} = 90^\circ$
- $\overline{BN} = \overline{NB'}$ ($N = r \cap BB'$)
- $\widehat{BNM} = \widehat{B'NM} = 90^\circ$

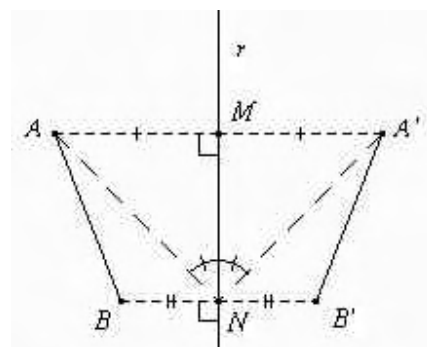


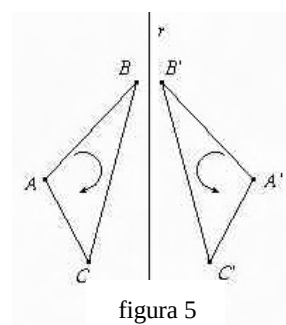
figura 4

Assim, por *lado-ângulo-lado*, os triângulos $\triangle AMN$ e $\triangle A'MN$ são congruentes, dando-nos $\overline{NA} = \overline{NA'}$ e $\widehat{ANM} = \widehat{A'NM}$. Como $\widehat{BNM} = \widehat{B'NA} + \widehat{ANM}$ e $\widehat{B'NM} = \widehat{B'NA'} + \widehat{A'NM}$, segue que $\widehat{B'NA} = \widehat{B'NA'}$. Portanto, por *lado-ângulo-lado*, os triângulos $\triangle BNA$ e $\triangle B'NA'$ são congruentes, donde tiramos que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ (figura 4).

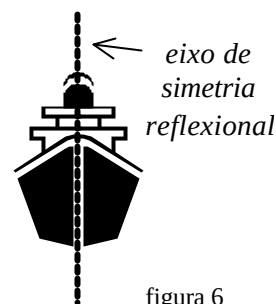
Com isso, temos que a simetria reflexional conserva as distâncias e também os ângulos. Por isso, dizemos que a reflexão é uma isometria.

O segmento $A'B'$ é dito *segmento simétrico* de AB em relação à reta r . Se todos os pontos de uma figura têm seu simétrico em relação a uma reta r , então a figura formada pelos simétricos é denominada *figura simétrica* da original em relação à reta r .

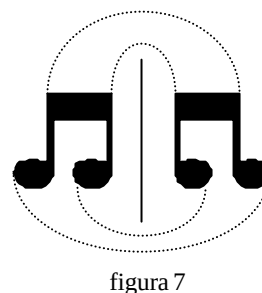
A simetria reflexional não preserva os sentidos. Observe na figura 5 que ao fixarmos a leitura dos vértices do triângulo, por exemplo, na ordem alfabética, temos A , B e C no sentido horário, mas no triângulo simétrico a leitura dos vértices A' , B' e C' tem sentido anti-horário.



Se numa figura qualquer for possível traçar um eixo de simetria reflexional, dizemos que a figura dada possui *estrutura simétrica reflexional* (figura 6). Toda figura com essa propriedade, quando deslocada no plano, coincide com sua simétrica.



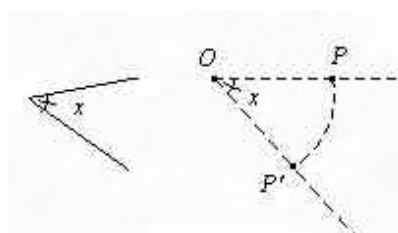
Nos casos em que não é possível determinar tal eixo, dizemos que a figura apresenta estrutura assimétrica (figura 7). Por essa razão, dado que a reflexão inverte os sentidos, é impossível fazer uma figura que não possui eixo de simetria reflexional coincidir com sua simétrica em relação a uma reta r sem retirá-la do plano. Dizemos que a figura e a sua simétrica possuem *isometrias opostas*, ou ainda que são *inversamente congruentes* ou *enantiomorfas**.



2.2 Simetria rotacional

Sejam dados um ponto fixo O , um ponto $P \neq O$ e um ângulo x qualquer, desde que $0 < x < 360^\circ$.

Se P' é tal que $\overline{OP} = \overline{OP'}$ e $\angle POP' = x$, dizemos que P' é simétrico de P por *simetria rotacional* de ângulo x ao redor de O (figura 8).



O ponto O é chamado de *centro de rotação* ou *rotocentro* e x de *ângulo de rotação* ou *giro*.

* Do grego: *enantios*= “contrário”; *morfe*= “forma”.

Dado agora um segmento AB qualquer, sejam A' e B' os simétricos de A e B , respectivamente, por rotação de ângulo x ao redor de um ponto O .

Com isso temos que:

- $\overline{OA} = \overline{OA'}$
- $\overline{OB} = \overline{OB'}$
- $x = \widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$

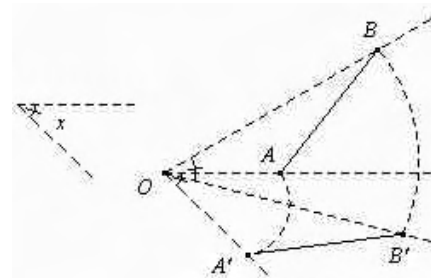


figura 9

Mas sabemos que $\widehat{AOA'} = \widehat{AOB'} + \widehat{B'OA'}$ e $\widehat{BOB'} = \widehat{BOA} + \widehat{AOB'}$. Assim, $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$.

Logo, pelo caso *lado-ângulo-lado*, os triângulos $\triangle AOB$ e $\triangle A'OB'$ são congruentes.

Portanto, temos que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ (figura 9).

Desse modo, averiguamos ser a simetria rotacional uma isometria que, diferentemente da simetria reflexional, preserva a orientação (figura 10).

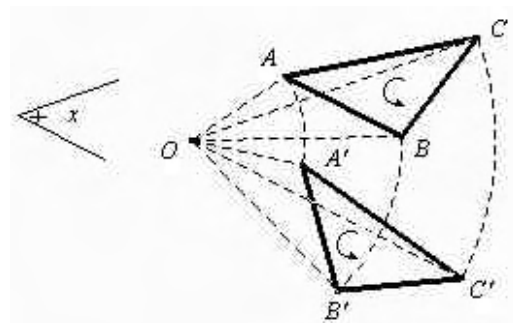


figura 10

2.3 Simetria translacional

Sejam dados uma reta r (direção), um segmento AB de comprimento a e um ponto P qualquer do plano.

Se P' é tal que $PP' \parallel r$ e $\overline{PP'} = \overline{AB}$, dizemos que P' é *simétrico* de P por *simetria translacional* na direção r e módulo a e a reta r é chamada *reta de translação* (figura 11).

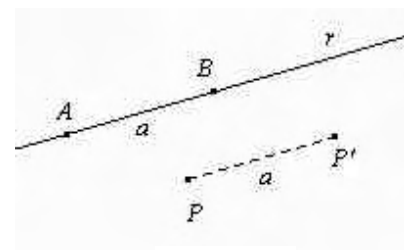


figura 11

Dado um segmento PQ qualquer, sendo P' e Q' os simétricos de P e Q , respectivamente, por simetria translacional na direção de r e no módulo a , temos que $PP' \parallel r$, $QQ' \parallel r$ e $a = \overline{PP'} = \overline{QQ'}$. Com isso, $\angle P'PQ = \angle Q'QP'$ (alternos internos). Logo, pelo caso *lado-ângulo-lado*, os triângulos $\triangle PP'Q$ e $\triangle Q'QP'$ são congruentes, dando-nos $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ (figura 12).

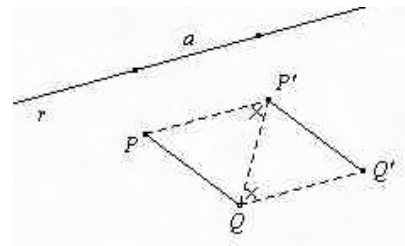


figura 12

Portanto, a simetria translacional é uma isometria. Da mesma maneira que a rotação, a translação conserva os sentidos (figura 13).

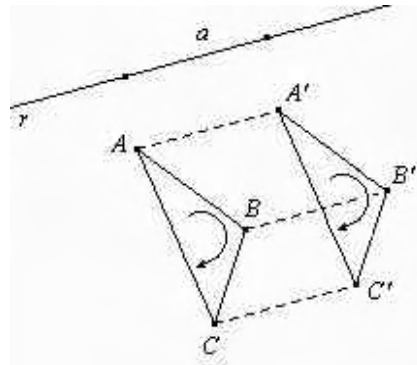


figura 13

3 Caleidoscópios

A primeira publicação sobre caleidoscópios é devida a Kircher, datada de 1646, mas sua denominação, dada por Sir David Brewster, só foi utilizada em 1819 em seu livro “A Treatise on the Kaleidoscope”, palavra que se origina etimologicamente da junção das três palavras gregas Kalos=Belo, Eidos=Formas, Skopein=Ver, isto é, ver coisas belas.

Inicialmente, tanto no Brasil como em outros países, os caleidoscópios surgiram em obras de Física ou Ciências. Mas, foi na década de 50-60 que apareceram como material didático, num livro de M.J.S. Ormastroni, de apenas 12 páginas, com o título “Brincando com Espelhos”. Nas décadas de 70, 80 e 90, temos obras como as de Jacobs (1974), O’Daffer & Clemens (1977), Ball & Coxeter (1987), Barbosa (1993) e Murari (1999), que envolvem o caleidoscópio em atividades educacionais de Matemática.

Um caleidoscópio nada mais é que um conjunto de dois ou mais espelhos planos perpendiculares a um mesmo plano que, quando algum objeto é colocado entre os espelhos, múltiplas imagens se formam.

Ao utilizarmos dois espelhos, interessantes e belas figuras são obtidas por reflexões. Usando três ou quatro espelhos, obtemos sempre novas reflexões, que se estendem por todo o plano. Muitas vezes, as imagens sucessivas acabam se localizando atrás do espelho, não mais produzindo nova imagem. A variação do ângulo formado entre os espelhos é que determina a quantidade e a perfeição das imagens (veja item 3.3.2).

A fim de que a repetição de imagens seja perfeita, só existem três tipos de caleidoscópios com bases triangulares: eqüilátero, isósceles retângulo e escaleno retângulo (veja item 3.4).

No comércio existe o *caleidoscópio popular* do tipo eqüilátero, com tampas para as bases. Numa delas há um orifício para observação e na outra, que é provida de movimento rotatório, há pequenos fragmentos coloridos que produzem belas imagens nas reflexões nos espelhos, e que são imprevisíveis (figura 14).



figura 14

Nos *caleidoscópios educacionais individuais* dos tipos triangulares (figura 15), uma de suas bases também possui um orifício para observação e a outra é aberta para a colocação de desenhos (bases substituíveis) que, diferentemente do caleidoscópio popular, produzirão nos espelhos, através das reflexões, um visual previsível.



figura 15

Murari³³ propõe uma fusão do caleidoscópio de dois espelhos com o de três, possibilitando uma boa visualização por parte dos alunos. Esse recebeu o nome de *caleidoscópio modificado* (figura 16).

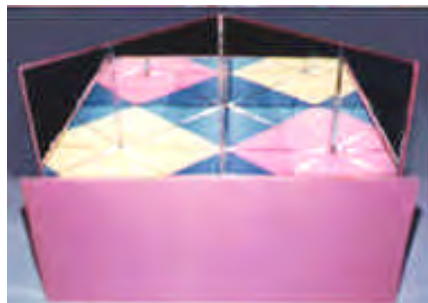


figura 16

Seguem abaixo as construções dos caleidoscópios individuais (triangulares) e do modificado, segundo Murari³⁴.

Caleidoscópios individuais (triangulares)

Material: 9 lâminas de espelhos retangulares com as seguintes medidas:

- 5 lâminas de 30 cm por 6 cm
- 1 lâmina de 30 cm por 8,48 cm
- 1 lâmina de 30 cm por 8 cm
- 1 lâmina de 30 cm por 4 cm
- 1 lâmina de 30 cm por 6,92 cm

Montar os três caleidoscópios fixando as lâminas com fita gomada, durex ou esparadrapo, com as faces espelhadas voltadas para o interior. Deixe entre as lâminas um espaço um pouco maior que o correspondente à espessura dos espelhos, para se ajustarem melhor e possibilitarem a formação dos ângulos.

Os espelhos deverão formar ângulos de $(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$, $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$ e $(45^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$ gerando, respectivamente, os caleidoscópios equilátero, isósceles retângulo e escaleno retângulo.

³³ MURARI, C., Um caleidoscópio educacional modificado para trabalho em grupo, *Revista de Educação Matemática*, SBEM, Ano 3, nº2, 1995, p.13.

³⁴ MURARI, C., *Ensino-aprendizagem de geometria nas 7ª. e 8ª. séries, via caleidoscópio*, Tese de Doutorado, IGCE-UNESP, Rio Claro, 1999, p.103-104.

Em seguida, envolva-os com papel adesivo, tipo Contact, servindo para evitar que luminosidade entre pelos vãos laterais.

Construa três bases superiores com papel cartão ou cartolina, contendo um pequeno orifício. As bases inferiores ficarão provisoriamente abertas para a substituição de padrões.

Caleidoscópio modificado

Material: 3 espelhos planos retangulares com as seguintes medidas:

- 2 lâminas de 25 cm por 22 cm
- 1 lâmina de 35 cm por 15 cm

Cortar dois pedaços de papelão: um medindo 35 cm por 15 cm e o outro deve conter a medida de aproximadamente 51 cm por 22 cm, pois irá revestir os outros dois espelhos na forma de um livro.

Fixar com cola os espelhos nos respectivos papelões (os dois espelhos iguais deverão ser colados nas extremidades do papelão, deixando uma distância entre eles a fim de possibilitar sua articulação para obtenção de ângulos).

O caleidoscópio modificado pode ser utilizado no formato equilátero, isósceles ou escaleno, dependendo da abertura dos ângulos.

Devido ao seu tamanho, esse caleidoscópio pode ser utilizado por um grupo de alunos, simultaneamente. Seus observadores podem variar o seu posicionamento para visualização e a confecção das bases substituíveis fica também facilitada podendo ser detalhada, inclusive, no caso de colorações múltiplas³⁵.

Utilizando dois espelhos (35 cm por 15 cm) e dois articulados (25 cm por 22 cm) da construção acima, podemos construir o caleidoscópio com quatro espelhos tanto do tipo retangular como do quadrado (figura 17).

Como nossa pesquisa envolve visualização em caleidoscópios, na sequência faremos um estudo sobre espelhos e reflexões.

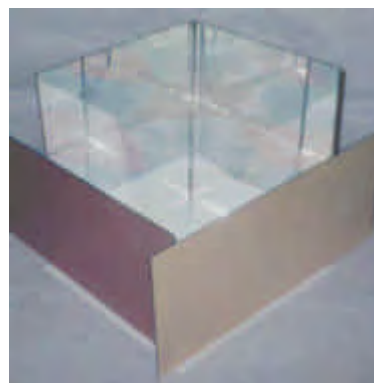


figura 17

³⁵ MURARI, C., Um caleidoscópio educacional modificado para trabalho em grupo, *Revista de Educação Matemática*, SBEM, 1995, p.14.

3.1 Espelhos

Os espelhos são produzidos por superfícies metálicas polidas. Nos espelhos comuns é a camada metálica (prata ou alumínio, por exemplo) que funciona como espelho, sendo em geral o vidro apenas um suporte e protetor (Murari, 1999, p.88). Conforme a natureza da superfície refletora, os espelhos podem ser classificados em: planos; esféricos; parabólicos; elípticos; cilíndricos; etc.

As atividades elaboradas em nossa pesquisa utilizam 1, 2, 3 ou 4 espelhos planos. Em vista disto, na seqüência trataremos de reflexões, mostrando quando um caleidoscópio fornece repetição perfeita de imagens e também algumas sugestões de trabalho com espelhos planos.

3.2 Um espelho

É por nós conhecido que o fenômeno reflexão obedece a duas leis fundamentais da Ótica Geométrica, denominadas *leis da reflexão*, a saber:

- 1º. O raio incidente (PI), a reta normal no ponto de incidência (NI) e o raio refletido ($P'I$) pertencem ao mesmo plano (denominado plano de incidência)
- 2º. O ângulo de reflexão (r) é igual ao ângulo de incidência (i).

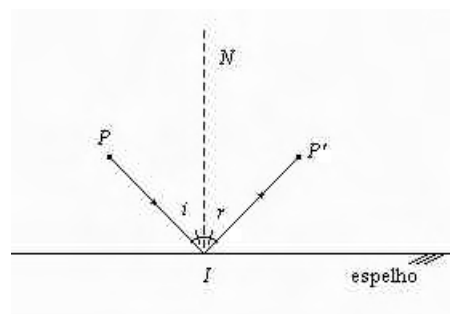


figura 18

Um ponto objeto P em frente a um espelho plano, sendo visto por um observador O , através do espelho, parece ao observador estar em P' , atrás do espelho (sua imagem virtual). Esta impressão é causada pelo fato de O receber o raio luminoso refletido e que, vindo de P , incide no espelho e, segundo as duas leis dadas, reflete-se atingindo O (Barbosa, 1993, p.38).

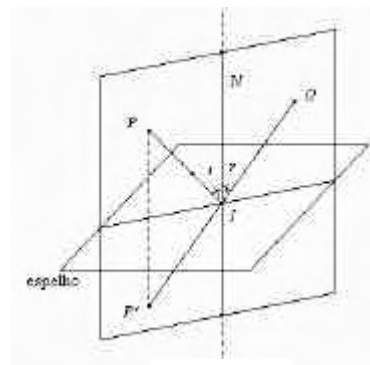


figura 19

Da primeira lei, temos que os pontos P , I , O e P' estão num mesmo plano. Em razão da segunda, resulta que P' é o *simétrico* de P em relação à reta de interseção desse plano com o espelho.

Dessa maneira, dada qualquer figura num plano, obtemos a sua simétrica em relação a uma reta r colocando um espelho plano perpendicularmente ao plano sobre a reta r .

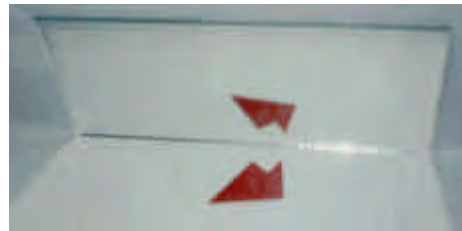


figura 20

Quando utilizamos um espelho, promovemos, de maneira informal, situações de aprendizagem interessantes, onde os alunos estabelecem suas idéias explorando todas as possibilidades de colocação do espelho.

Por exemplo, podemos explorar simetria reflexional de pontos e de figuras, utilizando uma atividade como a descrita na figura 21:

Desenhe as figuras simétricas em relação à reta, utilizando primeiramente o espelho para visualizá-las.

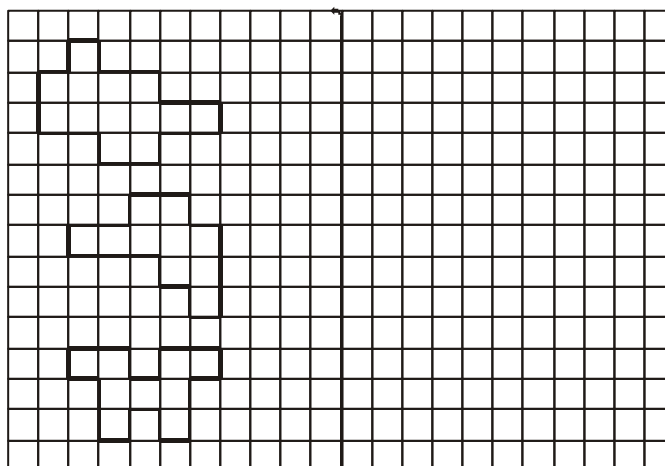


figura 21

Outros assuntos como eixo de simetria, estrutura simétrica reflexional, congruência e orientação, também podem ser trabalhados servindo-se de um espelho.

3.3 Dois espelhos

Quando empregamos dois espelhos, temos duas situações de aprendizagem:

- dois espelhos planos verticais e paralelos;
- dois espelhos planos articulados para formação de ângulos.

Vejamos cada um deles.

3.3.1 Dois espelhos planos verticais e paralelos

Quando um objeto qualquer é colocado entre dois espelhos planos paralelos (E e F), temos um número infinito de imagens nos dois espelhos (figura 22).

Além da reflexão, podemos abordar conceitos de orientação e translação em atividades que utilizam dois espelhos paralelos.

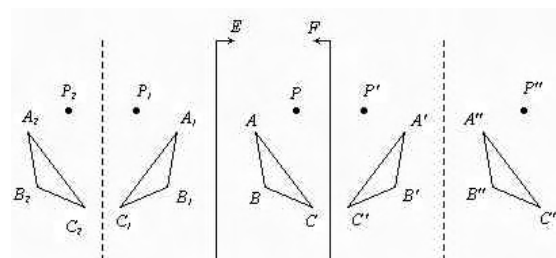


figura 22

3.3.2 Dois espelhos planos articulados para formação de ângulos

Sendo E e F dois espelhos planos articulados formando um ângulo $\hat{z}$ qualquer e P um ponto objeto entre os espelhos, temos que a reflexão desse ponto em E é P' , PP' é perpendicular a E e $\overline{PM} = \overline{MP'}$, onde M é a interseção de PP' com E . Analogamente, em relação ao espelho F , obtemos P'' tal que $\overline{PN} = \overline{NP''}$ (figura 23).

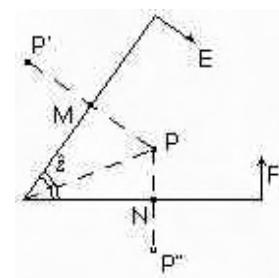


figura 23

Seja O o ponto de interseção entre os espelhos E e F . Pelo caso de congruência *lado-ângulo-lado*, temos que $\triangle OMP = \triangle OMP'$ e $\triangle ONP = \triangle ONP''$. Assim, os segmentos OP , OP' e OP'' são congruentes. Logo, os pontos P , P' e P'' pertencem a uma circunferência cujo centro é O e o raio, OP (figura 24). Essa circunferência determina os pontos A e B nos espelhos E e F , respectivamente.

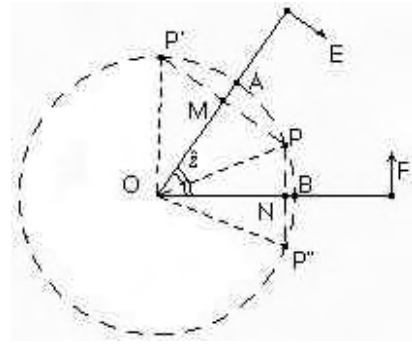


figura 24

Por causa das reflexões nos espelhos, os pontos imagens de P são distribuídos na circunferência marcando-se alternadamente $2\hat{x}$ e $2\hat{y}$ num sentido e $2\hat{y}$ e $2\hat{x}$ no outro, sendo $\hat{x}$ o ângulo $P\hat{O}A$ e $\hat{y}$ o ângulo $P\hat{O}B$, tais que $\hat{x} + \hat{y} = \hat{z}$ (figura 25).

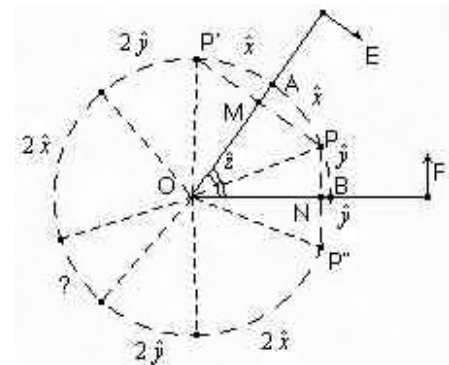


figura 25

Segue que cada vez que marcamos $2\hat{x} + 2\hat{y} = 2(\hat{x} + \hat{y}) = 2\hat{z}$, obtemos duas imagens.

Haverá ocasião em que as imagens se tornam improdutivas, pois se localizam atrás dos espelhos, não produzindo mais novas imagens, ou seja, não se pode mais continuar marcando $2\hat{x}$ e $2\hat{y}$, exceto se $2\hat{z}$ é divisor de $2p$ radianos ou, em graus, divisor de 360° .

Portanto, para se obter repetição perfeita de imagens é preciso que $\frac{2p}{2\hat{z}} = a \in \mathbf{IN}$, isto é, que o dobro do ângulo entre os espelhos divida 360° .

O número de imagens que se obtém quando um objeto é colocado entre dois espelhos, segundo Barbosa³⁶, é dado pela fórmula:

$$n = \frac{(360^\circ - R)}{\hat{z}} + n'$$

onde R é o resto da divisão de 360° por $2\hat{z}$, e

$$\begin{cases} R = 0 \Rightarrow n' = -1; \\ 0 < R \leq 2\hat{x} \Rightarrow n' = 0; \\ 2\hat{x} < R \leq 2\hat{y} \Rightarrow n' = 1 \text{ ou} \\ 2\hat{y} < R \leq 2\hat{z} \Rightarrow n' = 2. \end{cases}$$

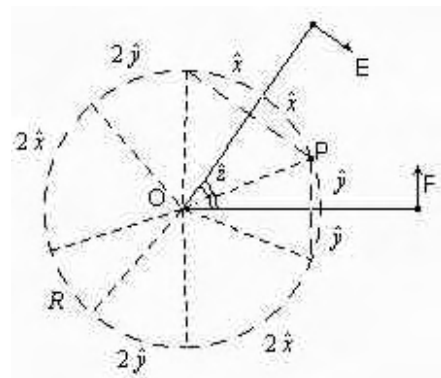


figura 26

³⁶ BARBOSA, R.M, *Descobrendo padrões em mosaicos*, São Paulo, Atual, 1993, p.42.

Vejamos um exemplo.

Para o caso em que $z = 90^\circ$ (figura 27), temos que $R=0$, já que $\frac{360^\circ}{180^\circ} = 2$. Com isso, temos que $n'=-1$, resultando $n = \frac{360^\circ}{90^\circ} - 1 = 4 - 1 = 3$.

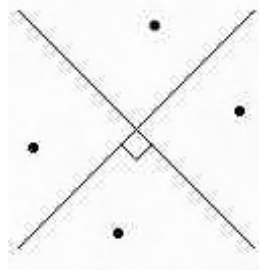


figura 27

Através do caleidoscópio com dois espelhos, podemos apresentar noções de polivértices e de polígonos.

- **Polivértices**

Quando um ponto objeto é colocado entre dois espelhos, obtemos um polivértice (vértices que ligados fornecem polígonos).

Por exemplo, no caso de o ângulo ser de 90° , como vimos na figura 27, temos um total de 4 vértices. Se o ponto não pertence à bissetriz do ângulo, então gera um quadrivértice retangular (figura 28); caso pertença, gera um quadrivértice regular (figura 29).

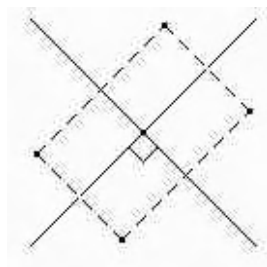


figura 28

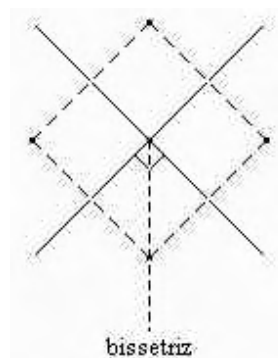


figura 29

- **Polígonos**

Se um objeto (régua, fita de papel ou canudinho) for colocado entre dois espelhos de maneira que o objeto e os espelhos formem um triângulo isósceles, observamos que polígonos regulares podem ser obtidos nas reflexões, os quais possuirão maior número de lados quanto menor for o ângulo (figura 30).

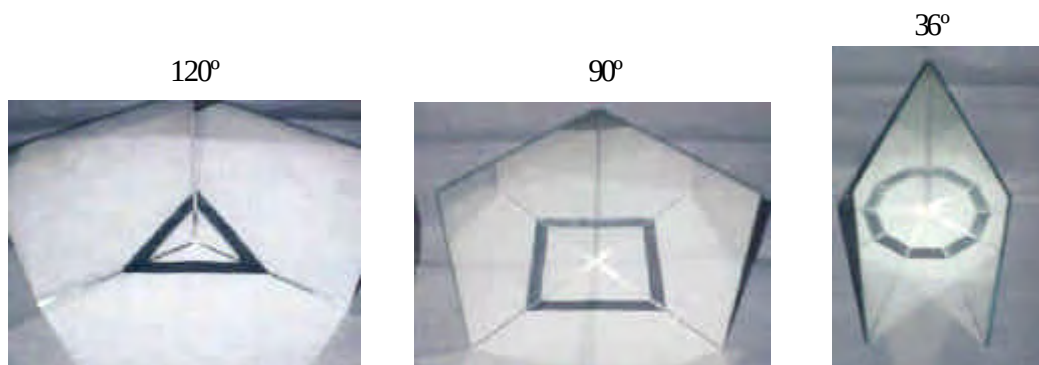


figura 30

A tabela 2, a seguir, fornece algumas figuras geométricas que podem ser obtidas em função da variação do ângulo.

ângulos	i =imagens	possibilidades de construção
180°	2	linhas paralelas, círculos
120°	3	triângulos, círculos
90°	4	quadrados, paralelogramos, linhas paralelas, círculos
72°	5	pentágonos, círculos
60°	6	hexágonos, triângulos, círculos
$51^\circ \frac{3}{7}$	7	heptágonos, círculos
45°	8	octógonos, quadrados, círculos
40°	9	eneágonos, círculos
36	10	dodecágonos, pentágonos, círculos

tabela 2

Fonte: Alsbaugh, C.A., Kaleidoscope Geometry,
Arithmetic Teacher 17, (1976), p.117.

3.4 Três espelhos

Quando utilizamos três espelhos, as imagens obtidas nas reflexões serão perfeitas somente se for satisfeita a mesma condição mostrada no item 3.3.2, isto é, o dobro de cada um dos três ângulos deve ser divisor de 360° . Portanto, sendo $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ os ângulos entre os espelhos, devemos ter:

$$\frac{360^\circ}{2\hat{a}} = \frac{180^\circ}{\hat{a}} = a, \quad \frac{360^\circ}{2\hat{b}} = \frac{180^\circ}{\hat{b}} = b, \quad \frac{360^\circ}{2\hat{c}} = \frac{180^\circ}{\hat{c}} = d,$$

onde $a, b, d \in \mathbf{IN}$.

Como $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$, temos então:

$$\frac{180^\circ}{a} + \frac{180^\circ}{b} + \frac{180^\circ}{d} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} = 1$$

Supondo que $a \leq b \leq d$ e $a \geq 2$ para que exista triângulo, e substituindo b e d por a , temos:

$$\frac{3}{a} \geq 1 \Leftrightarrow a \leq 3 \Rightarrow a = 2 \text{ ou } a = 3.$$

✓ Se $a = 2$, ao substituímos d por b , obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{b} \geq 1 \Leftrightarrow b + 4 \geq 2 \cdot b \Leftrightarrow b \leq 4$$

Mas $b \geq a = 2$, porém, não pode ser igual a 2, pois teríamos dois ângulos retos no triângulo. Logo $b = 3$ ou $b = 4$.

Então,

$$a = 2 \text{ e } b = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{d} = 1 \Rightarrow d = 6$$

e

$$a = 2 \text{ e } b = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{d} = 1 \Rightarrow d = 4$$

✓ Se $a = 3$, temos:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{b} \geq 1 \Leftrightarrow b + 6 \geq 3 \cdot b \Leftrightarrow 2 \cdot b \leq 6 \Leftrightarrow b \leq 3$$

Mas $a \leq b$, então $b = 3$. Logo $d = 3$.

Temos, portanto, as três ternas possíveis:

$$(3,3,3), (2,4,4), (2,3,6),$$

que correspondem às três seguintes formas triangulares para caleidoscópios, fornecendo imagens coincidentes sem repetição:

$$(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ), (90^\circ, 45^\circ, 45^\circ), (90^\circ, 60^\circ, 30^\circ).$$

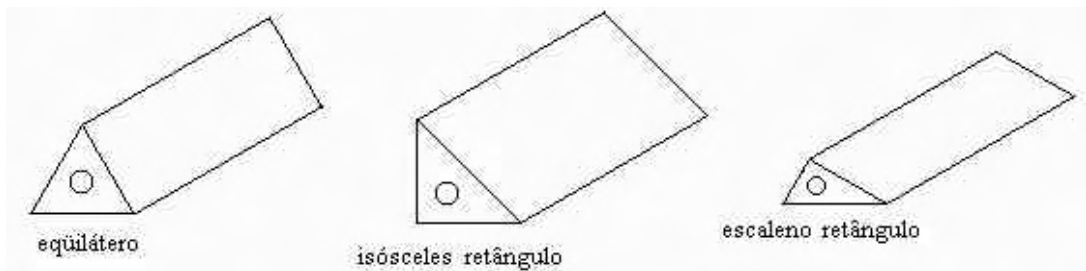


figura 31

3.5 Quatro espelhos

Novamente usando o fato de que para se obter repetição perfeita de imagens devemos ter o dobro de cada ângulo dividindo 360° e ainda que a soma dos ângulos internos $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$ de um polígono quadrangular é igual a 360° , obtemos:

$$\frac{180^\circ}{a} + \frac{180^\circ}{b} + \frac{180^\circ}{d} + \frac{180^\circ}{l} = 360^\circ.$$

Segue que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} + \frac{1}{l} = 2.$$

Supondo que $a \leq b \leq d \leq l$ e substituindo, temos $\frac{4}{a} \geq 2 \Rightarrow a \leq 2$

Mas a não pode ser 1. Portanto $a = 2$.

Fazendo $a = 2$, e substituindo d e l por b , conseguimos:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{b} \geq 2 \Leftrightarrow b + 6 \geq 4 \cdot b \Rightarrow 6 \geq 3 \cdot b \Rightarrow b \leq 2.$$

Como $b \geq a = 2$, temos $b = 2$.

Agora, se fizermos $a = b = 2$ e trocarmos l por d , teremos:

$$1 + \frac{2}{d} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2}{d} \geq 1 \Leftrightarrow d \leq 2.$$

Também $2 = a = b \leq d \Rightarrow d = 2$, o que nos dá $l = 2$.

Portanto, $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{d} = 90^\circ$, formando um caleidoscópio quadrangular ou retangular (figura 32).

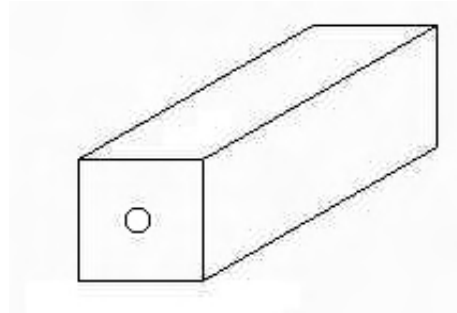


figura 32

Analogamente, para n espelhos temos:

$$1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + \dots + 1/\alpha_n = n - 2.$$

O estudo dessa equação nos conduz à desigualdade $n/\alpha_i \geq n - 2$ e como $\alpha_i \geq 2$ ($i=1,2,\dots,n$), resulta:

$$n \geq 2n - 4 \Rightarrow 4 \geq 2n - n \Rightarrow n \leq 4.$$

Ou seja, o número máximo de espelhos para se formar um caleidoscópio, sem que as imagens se remontem, é 4.

Os caleidoscópios podem ser particularmente utilizados como instrumentos facilitadores no estudo de pavimentações do plano. Por esse motivo, os itens a seguir tratam de pavimentações e de obtenções de bases para possível visualização em caleidoscópios.

4 Pavimentações do plano

Um conjunto de polígonos é uma pavimentação do plano se, e somente se, cobrir o plano sem lacunas ou cruzamento. Os vértices dos polígonos são chamados de nós da pavimentação. Os segmentos de retas que têm por extremos dois nós consecutivos de um mesmo lado do polígono são chamados de arestas.

Uma pavimentação é lado-lado se, e somente se, toda aresta é lado comum a dois polígonos. Isto significa que, quando pavimentamos, um novo polígono será acrescentado somente se os lados em contato forem respectivamente congruentes (figura 33).

Uma pavimentação é chamada de Arquimediana quando todos os nós possuem o mesmo número de arestas concorrentes (figura 34).

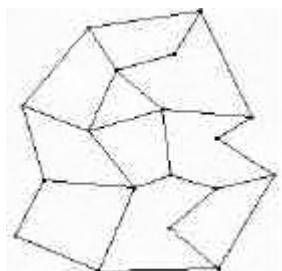


figura 33

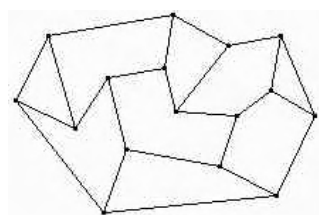


figura 34

Quando a pavimentação for lado-lado, Arquimediana, e todos os polígonos possuírem o mesmo número de lados, então ela será chamada de Platônica (figura 35).

Se a pavimentação for lado-lado, Arquimediana, e ainda os polígonos ao redor de um nó forem sempre os mesmos e na mesma disposição, então a chamamos de Uniforme (figura 36).

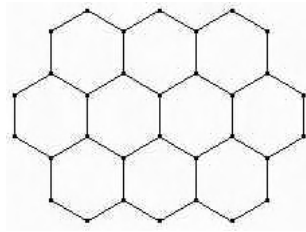


figura 35

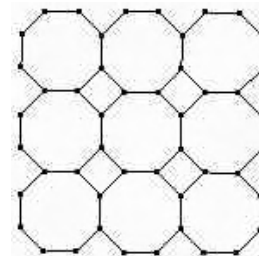


figura 36

Em nossa pesquisa, utilizamos pavimentações do plano por polígonos regulares. Na seqüência veremos como e quais são estas pavimentações.

4.1 *Pavimentação do plano com polígonos regulares*

Sendo k o número de polígonos regulares a serem dispostos ao redor de um nó, sabemos que $k \geq 3$, porque não faz sentido colocar 1 ou 2 polígonos. Sabemos também que o ângulo central de um polígono regular de n lados é $\hat{\chi} = \frac{360^\circ}{n}$. Com isso, o ângulo interno $\hat{i}$ será dado por $\hat{i} = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.

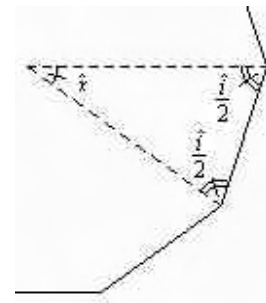


figura 37

Como $n \geq 3$, já que não há polígonos de 1 ou 2 lados, temos que o menor ângulo interno de um polígono regular é 60° (triângulo equilátero). Assim, 6 é o maior valor dado a k (6 triângulos equiláteros ao redor de um ponto). Portanto, o intervalo de restrição do inteiro k é $3 \leq k \leq 6$. Verifiquemos caso a caso.

caso 1: $k = 3$

Sejam a , b e c os números de lados dos três polígonos regulares, respectivamente. Logo, a soma dos ângulos internos ao redor de um ponto nos leva à equação:

$$\frac{(a-2) \cdot 180^\circ}{a} + \frac{(b-2) \cdot 180^\circ}{b} + \frac{(c-2) \cdot 180^\circ}{c} = 360^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{a-2}{a} + \frac{b-2}{b} + \frac{c-2}{c} = 2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \quad (\text{I})$$

Suponhamos que $a \leq b \leq c$. Ao substituirmos b e c por a em (I), temos:

$$\frac{3}{a} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow a \leq 6$$

O que nos leva à conclusão de que $3 \leq a \leq 6$, pois o menor valor se verifica para triângulo equilátero.

A equação (I) também nos diz que $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{(a-2)}{2 \cdot a}$ (II).

Se substituirmos c por b , obteremos: $b \leq \frac{4 \cdot a}{(a-2)}$.

Estudando cada subcaso, temos o seguinte resultado para a quantidade de lados dos polígonos regulares, que podem, em conjunto, ser dispostos ao redor de um ponto.

a	b	c
3	7	42
3	8	24
3	9	18
3	10	15
3	12	12
4	5	20
4	6	12
4	8	8
5	5	10
6	6	6

tabela 3

caso 2: $k = 4$

Com pensamento análogo, temos que $a = 3$ e $a = 4$, nos fornecendo os valores:

a	b	c	d
3	3	4	12^*
3	3	6	6^*
3	4	4	6^*
4	4	4	4

tabela 4

caso 3: $k = 5$

Para este caso encontramos a tabela 4:

a	b	c	d	e
3	3	3	3	6
3	3	3	4	4^*

tabela 5

caso 4: $k = 6$

Nesta situação, temos como resposta a possibilidade de dispor 6 triângulos equiláteros rodeando um ponto.

A figura 38 mostra todos os possíveis arranjos ao redor de um ponto, estudados nas tabelas anteriores. Note que cada combinação recebe uma notação, chamada de *configuração*, que indica quais polígonos estão ajustados ao redor de um ponto e que aparecerão rigorosamente na mesma ordem em toda a pavimentação. Os números da notação, separados por vírgulas, correspondem sempre ao número de lados dos polígonos utilizados na combinação. Por exemplo, na configuração (4,6,12) temos ajustados um quadrado, um hexágono regular e um dodecágono regular.

* Permutando-se os polígonos, cada um destes casos pode ser arranjado de duas maneiras diferentes: (3,3,4,12) ou (3,4,3,12); (3,6,3,6) ou (3,3,6,6); (3,4,6,4) ou (3,4,4,6); (3,3,3,4,4) ou (3,3,4,3,4).

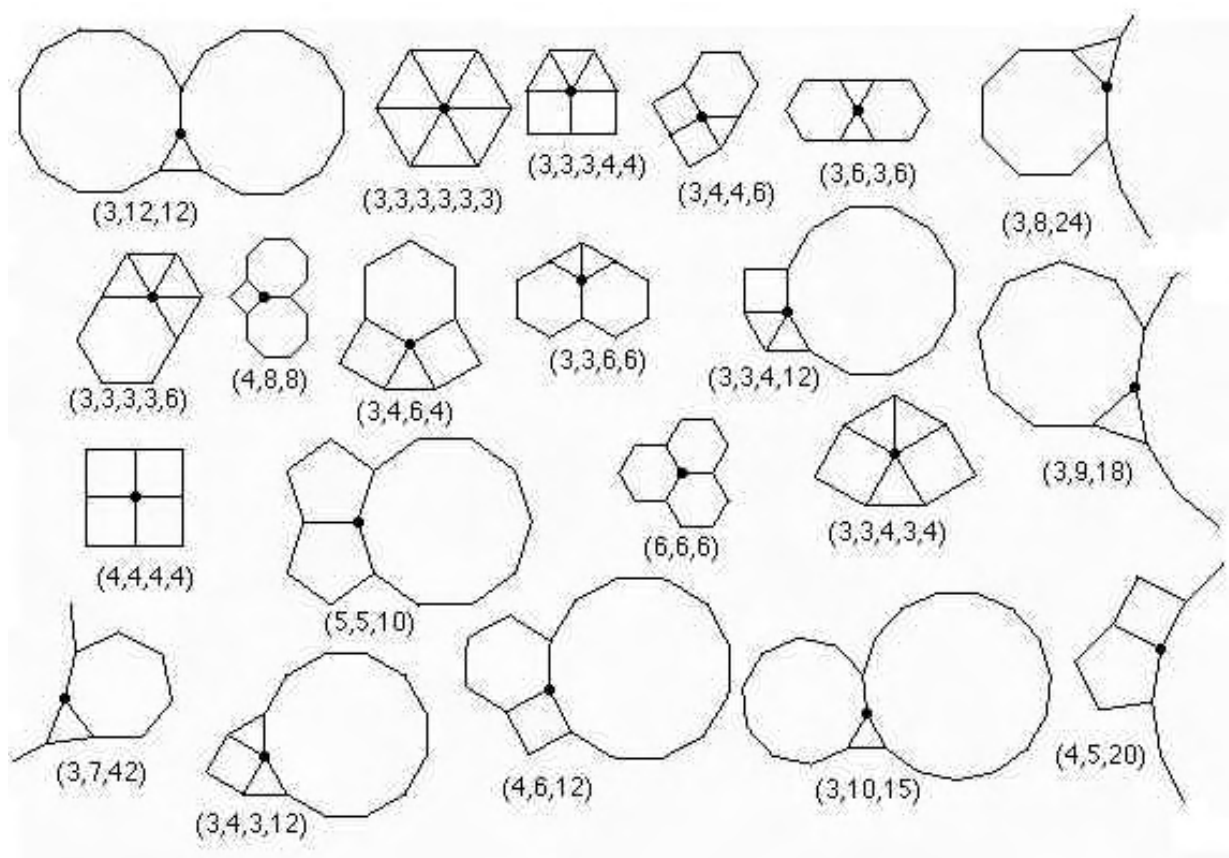


figura 38

Utilizando esses 21 conjuntos, é possível pavimentar o plano de várias maneiras.

Chamaremos de 1-uniforme as pavimentações cujos vértices são rodeados pelo mesmo conjunto de polígonos (não necessariamente idênticos). Pavimentações onde há combinação de dois diferentes conjuntos de polígonos são chamadas de 2-uniforme. Combinando k distintos conjuntos de polígonos, teremos uma pavimentação nomeada k -uniforme (onde $8 > k \in \mathbf{IN}$)³⁷.

Alguns desses conjuntos acima não podem ser estendidos de maneira a formar uma pavimentação 1-uniforme. São elas: (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15), (4,5,20), (5,5,10), (3,4,4,6), (3,3,4,12), (3,4,3,12) e (3,3,6,6). A verificação é bem simples.

As quatro primeiras configurações possuem um triângulo equilátero e outros dois polígonos, distintos entre si; portanto, sendo os dois números de lados dos polígonos, b e c , diferentes, teremos a situação da figura 39, que é absurda.

³⁷ GRUNBAUM, B., SHEPHARD, G.C., Tillings by Regular Polygons, *Mathematics Magazine*, 1977, vol.50, nº 5, p.236.

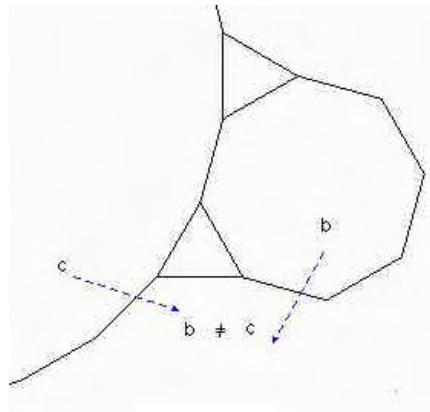


figura 39

As configurações (4,5,20) e (5,5,10) provocam as disposições das figuras 40 e 41, respectivamente. Estas duas são eliminadas, porque 72° e 36° não são, respectivamente, os ângulos internos dos polígonos correspondentes.

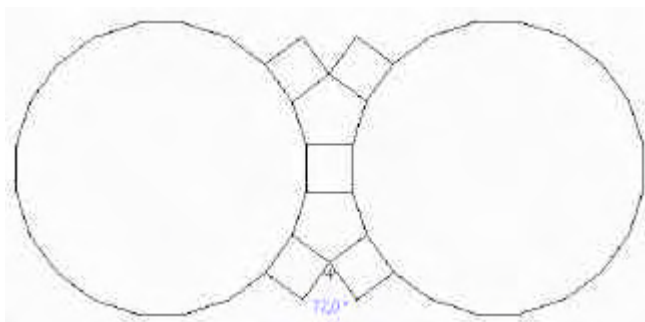


figura 40

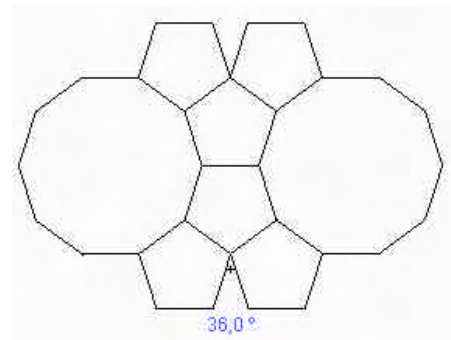


figura 41

As configurações (3,4,4,6), (3,3,4,12), (3,4,3,12) e (3,3,6,6) não pavimentam o plano sem se combinarem com outras, formando assim pavimentações 2-uniforme. No primeiro caso, é necessário que se ajuste a configuração (3,4,6,4), conforme figura 42. Para a configuração (3,3,4,12) deve-se associar a configuração (3,3,3,3,3,3), como mostra a figura 43.

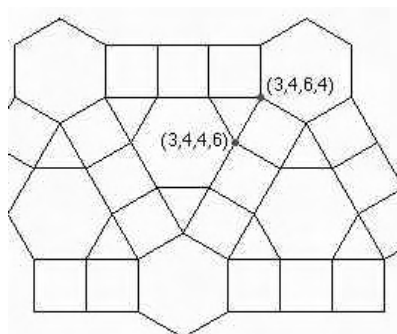


figura 42

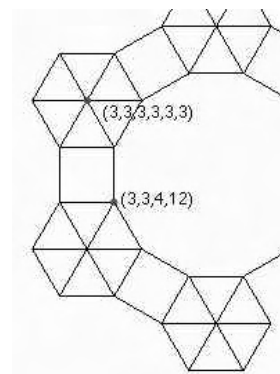


figura 43

A configuração $(3,4,3,12)$ precisa se unir à $(3,12,12)$ para que possa pavimentar o plano (figura 44). E por fim, $(3,3,6,6)$ pode-se unir tanto com a configuração $(3,3,3,3,3,3)$ como com a $(3,6,3,6)$, conforme figuras 45 e 46, respectivamente.

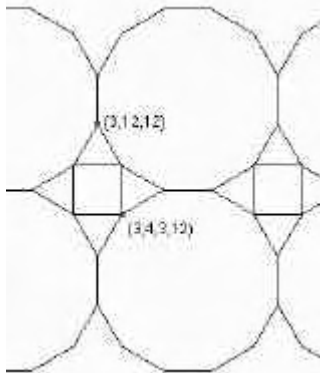


figura 44

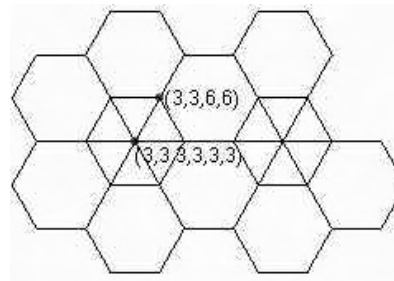


figura 45

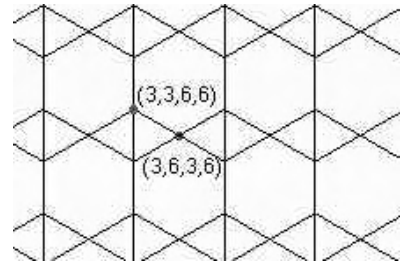
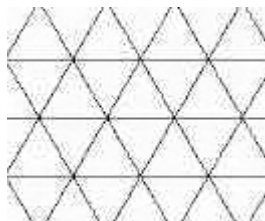
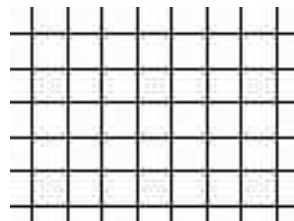


figura 46

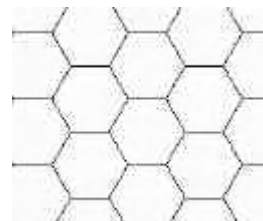
Assim, existem apenas 11 conjuntos de polígonos que pavimentam o plano de maneira 1-uniforme. Vejamos as porções destas pavimentações (figura 47).



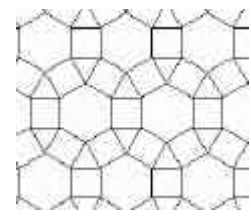
$(3,3,3,3,3,3)$



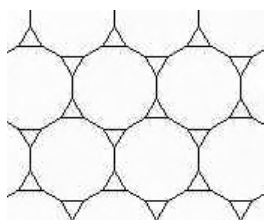
$(4,4,4,4)$



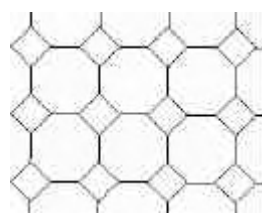
$(6,6,6)$



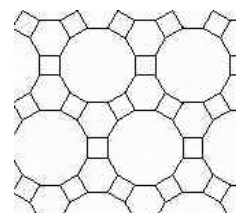
$(3,4,6,4)$



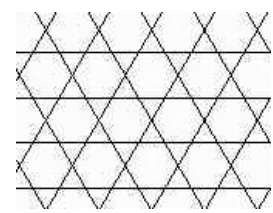
$(3,12,12)$



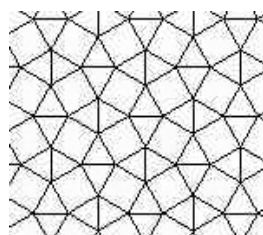
$(4,8,8)$



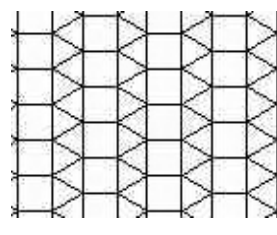
$(4,6,12)$



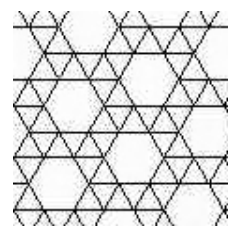
$(3,6,3,6)$



$(3,3,4,3,4)$



$(3,3,3,4,4)$



$(3,3,3,3,6)$

figura 47

Temos registrado em Grunbaum and Shephard³⁸ que são 20 as possibilidades de combinar dois diferentes conjuntos de polígonos para formar uma pavimentação, que no caso é chamada de 2-uniforme. Já foram encontradas 61 pavimentações 3-uniforme, e para $k \geq 4$ ainda não são conhecidas todas as pavimentações k -uniforme possíveis. Nosso estudo se restringe às pavimentações 1 e 2 uniforme. Na figura 48 estão as pavimentações de configuração 2-uniforme:

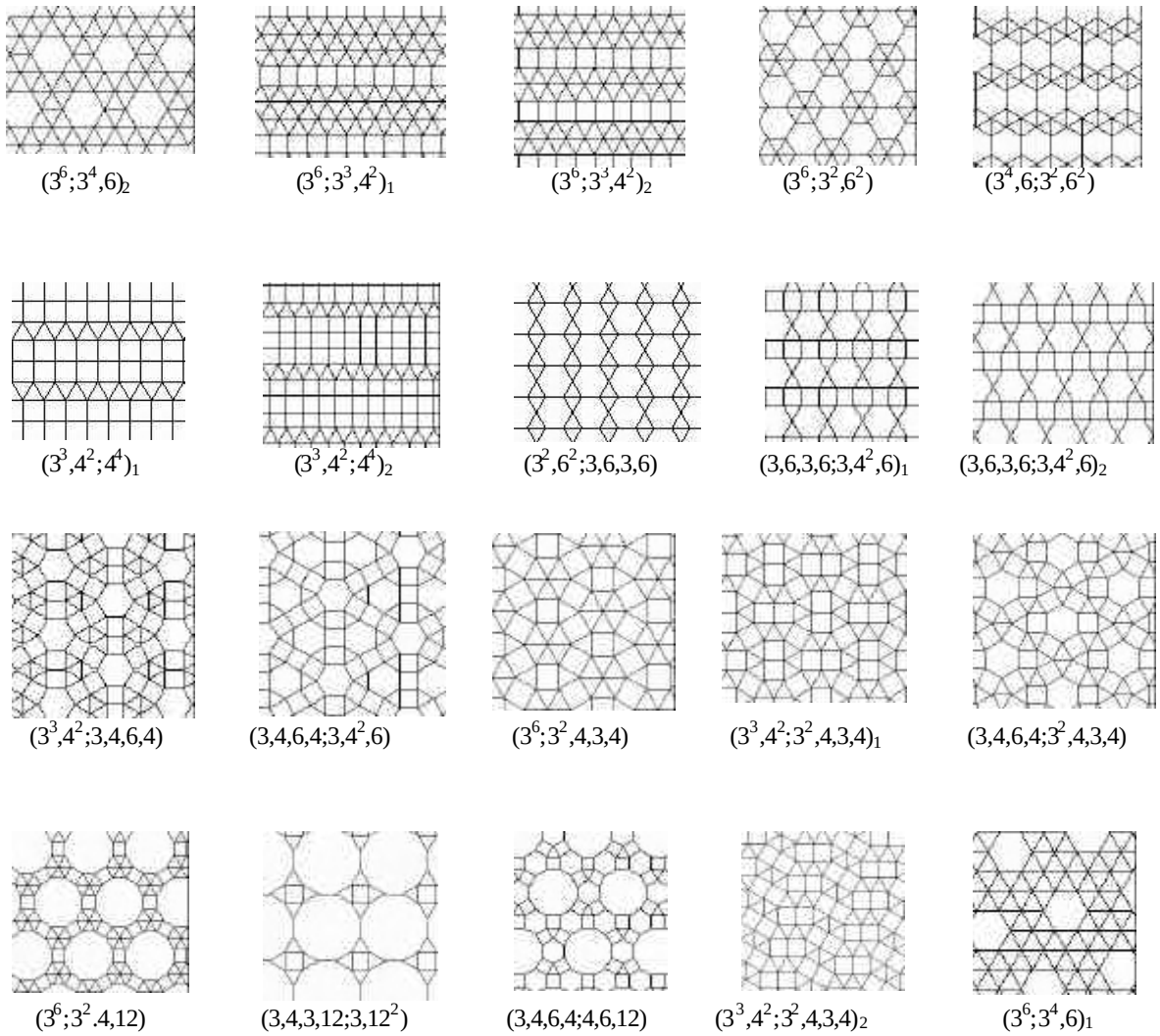


figura 48

³⁸ GRUNBAUM, B., SHEPHARD, G. C., *Tillings and patterns: an introduction*, Freeman, N. Y., 1989.

O expoente no número de lados dos polígonos das configurações representa quantas vezes consecutivas os polígonos aparecerão ao redor de cada vértice ou nó. A repetição de algumas configurações, representadas por (1) e (2) , se justifica porque as pavimentações ocorrem em duas formas enantiomorfas.

5 Bases e colorações

Consideramos como caleidoscópio qualquer conjunto de espelhos planos perpendiculares a um mesmo plano, desde que possibilite a obtenção perfeita de imagens. Os caleidoscópios utilizados em estudos de pavimentações do plano são aqueles formados por 3 e 4 espelhos.

No interior destes caleidoscópios são colocados padrões (que denominamos bases substituíveis) construídos graficamente com segmentos adequados, de modo que suas reflexões nos espelhos forneçam a pavimentação pretendida.

As bases substituíveis podem ser extraídas de uma determinada porção da pavimentação, considerando as linhas de simetria dos polígonos que a formam. Relacionando-as, obtêm-se as bases geradoras e as bases transformadas.

Segundo Murari³⁹, são três os métodos de obtenção de bases:

♦ Método I:

Sabendo de antemão qual o visual a ser gerado por segmentos em relação aos ângulos dos espelhos, podemos construir a base substituível com os segmentos apropriados para que nas simetrias reflexionais possamos obter, através das regiões delimitadas por estes segmentos, os polígonos regulares desejados.

Quando nos utilizamos deste método, nosso objetivo é o desenvolvimento da percepção espacial por parte dos alunos, com exploração de simetrias e construções geométricas adequadas na determinação das bases.

³⁹ MURARI, C., *Ensino Aprendizagem de Geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópio*, Tese de Doutorado, IGCE-UNESP, Rio Claro, 1999, p.129-132.

♦ Método II:

Trabalhando, por exemplo, com três régua ou três esquadros para formação de triângulos sobre o desenho de uma pavimentação, podemos “visualizar” (descobrir) as bases substituíveis que geram esta pavimentação, pois réplicas triangulares da figura serão reproduzidas por todo o plano, contendo os mesmos segmentos da base encontrada.

Para utilização deste método, as régua que formarão os triângulos devem ser posicionadas a partir do centro dos polígonos da pavimentação em estudo; isto é, os vértices do triângulo formado pelas régua corresponderão ao centro de três polígonos, ocorrendo isto na maioria das vezes, mas não sendo uma regra geral (observar que, para algumas pavimentações, serão utilizadas quatro régua).

♦ Método III:

Kingston⁴⁰ chama a atenção para o fato de que existem pavimentações que apresentam simetrias reflexionais em relação às mediatrizes dos lados dos polígonos.

Por este fato Murari⁴¹ propõe um novo meio de obtenção de bases: para encontrá-las devemos traçar as linhas de simetria da pavimentação que são linhas de simetria dos polígonos regulares. Este método tem o nome de “algoritmo” e é o que mais usamos em nosso estudo.

Vejamos um exemplo.

O algoritmo da figura 49 foi feito na pavimentação de configuração (3,4,6,4).

Os traços vermelhos são as linhas de simetria reflexional.

Observem que existem dois outros traçados: um azul e outro verde. Eles correspondem às duas bases geradoras e suas respectivas transformadas, conforme

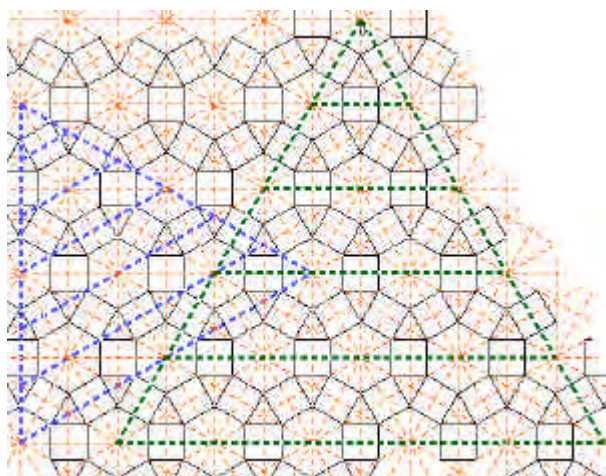


figura 49

⁴⁰ KINGSTON, M., Mosaics by Reflexions, *Mathematics Teacher*, 50, 1957, p.280-286.

⁴¹ Ibid, MURARI, C., 1999, p.131.

figuras abaixo.

bases geradoras

1



figura 50

2



figura 51

bases transformadas

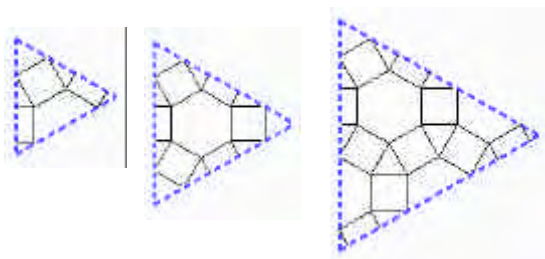


figura 52

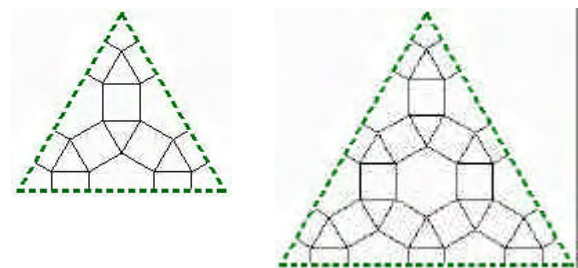


figura 53

Como se pode ver, as bases transformadas são compostas por réplicas da base geradora. A primeira base transformada possui 4 bases geradoras; a segunda, 9; a terceira 16. Observe que, a cada “passo”, são acrescentadas 3, 5, 7, 9, 11... réplicas da base geradora ao passo anterior.

O número de regiões a serem coloridas aumenta a cada base transformada. No exemplo acima, temos que, para a base geradora 1, a sequência destas regiões (cores) é 4, 9, 16, 25.... Faremos um estudo detalhado deste assunto na seção 6 deste capítulo. As figuras abaixo mostram os visuais caleidoscópicos da pavimentação (3,4,6,4), a partir das bases geradoras.

4 cores

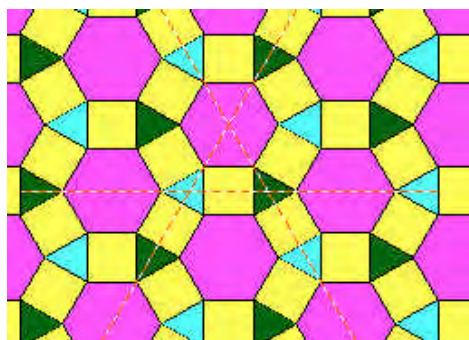


figura 54

7 cores

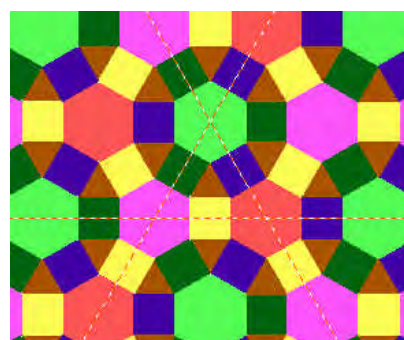


figura 55

As tabelas 6 e 7, abaixo, mostram quais pavimentações podem ser visualizadas e quais os tipos de caleidoscópios utilizados para que a visualização se processe.

Configuração 1-uniforme	Tipo de caleidoscópio
$(3,3,3,3,3,3), (6,6,6), (3,12,12), (4,6,12), (3,6,3,6), (3,4,6,4)$	Equilátero
$(4,4,4,4), (4,8,8)$	Isósceles
$(3,3,4,3,4)$	Quadrangular
$(3,3,3,4,4)$	Retangular
$(3,3,3,3,6)$	Não possui eixo de simetria

tabela 6

Configuração 2-uniforme	Tipo de caleidoscópio
$(3^6;3^4,6)_2; (3^6;3^2,4,3,4); (3^3;3^2,4,12); (3^6;3^2,6^2); (3^3,4^2;3,4,6,4);$ $(3^2,4,3,4;3,4,6,4); (3,4^2,6;3,4,6,4); (3,4,6,4;4,6,12)$	Equilátero
$(3^3;3^3,4^2)_1; (3^3;3^3,4^2)_2; (3^3,4^2,4)_1; (3^3,4^2,4)_2; (3^4,6;3^2,6^2);$ $(3^2,6^2;3,6,3,6); (3,4^2,6;3,6,3,6)_1; (3,4^2,6;3,6,3,6)_2$	Retangular
$(3,4,3,12;3,12^2)$	Isósceles
$(3^3,4^2;3^2,4,3,4)_1$	Quadrangular
$(3^6;3^4,6)_1; (3^3,4^2;3^2,4,3,4)_2$	Não possui eixo de simetria

tabela 7

Em Murari (1999) encontramos todo um estudo sobre as bases geradoras e transformadas das pavimentações de configuração 1-uniforme, inclusive como construí-las utilizando régua e compasso. A seguir, faremos uma amostra das bases geradoras e algumas transformadas destas pavimentações.

5.1 Bases para pavimentações de configuração 1-uniforme

- (3,3,3,3,3)

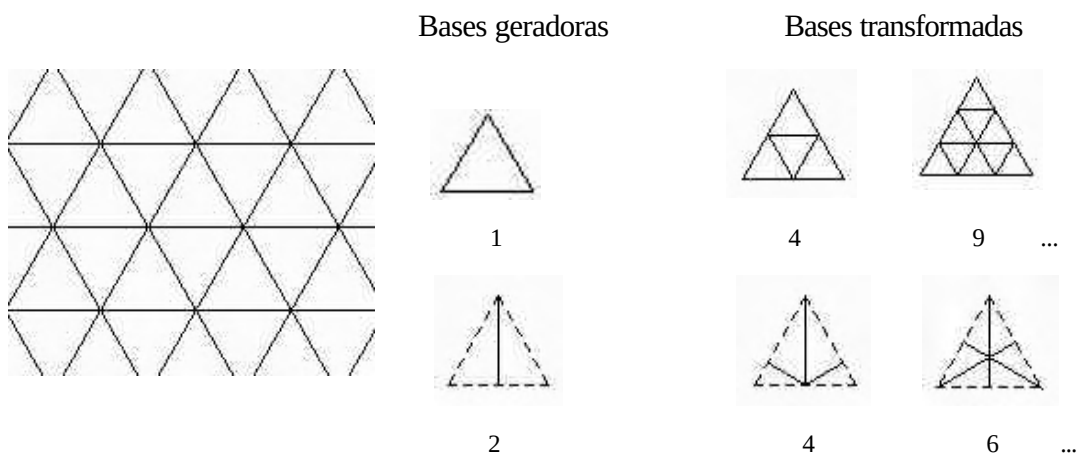


figura 56

Visual
caleidoscópico
a partir da base
geradora para
até duas cores

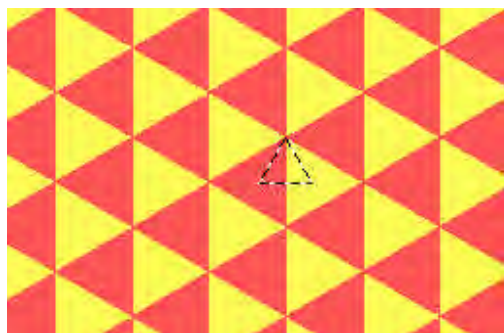
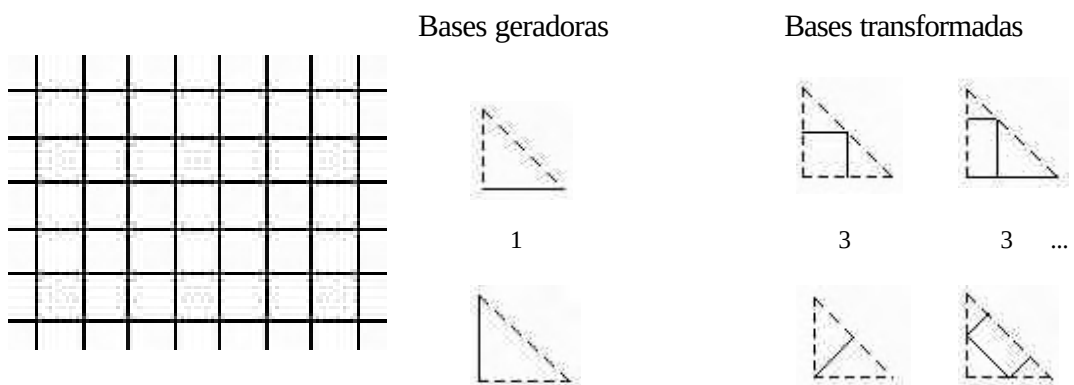
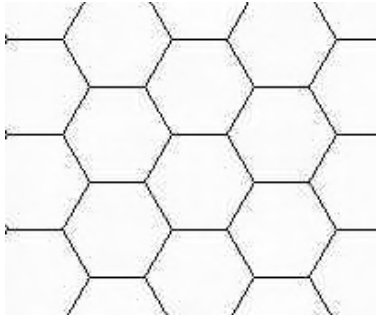


figura 57

- (4,4,4,4)



- (6,6,6)



1

2

4

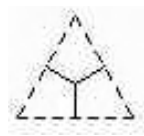
...

figura 58

Bases geradoras



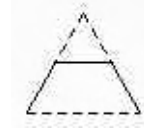
1



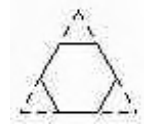
3

figura 59

Bases transformadas

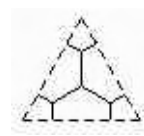


2

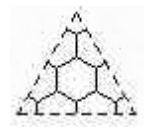


4

...



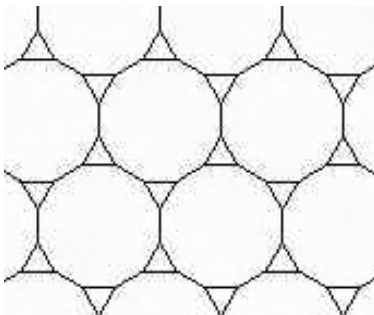
6



10

...

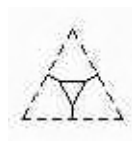
- (3,12,12)



Bases geradoras



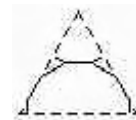
3



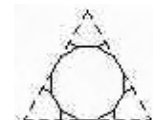
4

figura 60

Bases transformadas

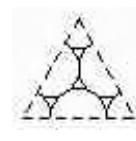


6

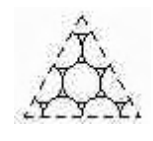


10

...



10



19

...

Visual
caleidoscópico a
partir da base
geradora para até
quatro cores

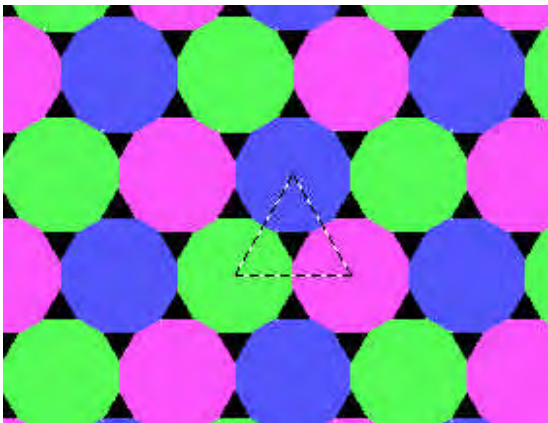


figura 61

- (3,6,3,6)

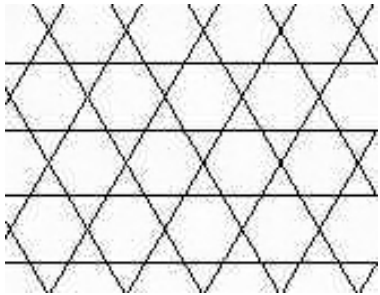


figura 62

Algoritmo

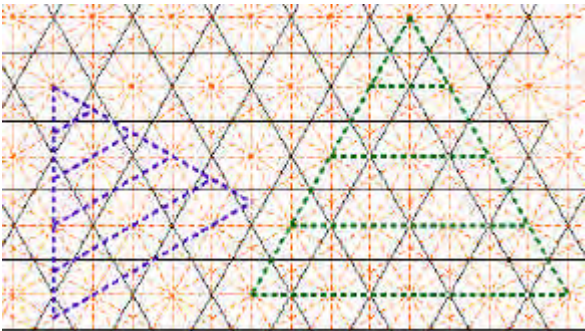


figura 63

Bases geradoras

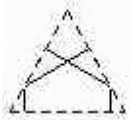


3

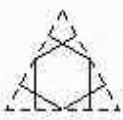


4

Bases transformadas

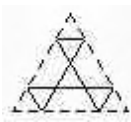


6

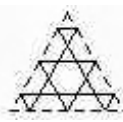


10

...



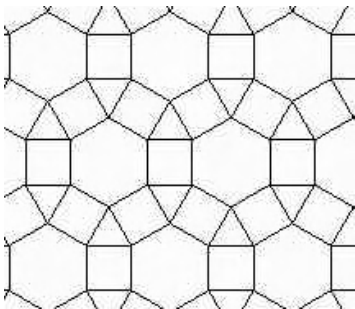
10



19

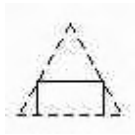
...

figura 64



- (3,4,6,4)

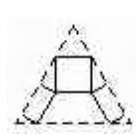
Bases geradoras



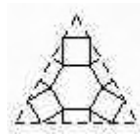
4



Bases transformadas



9



16

...



7



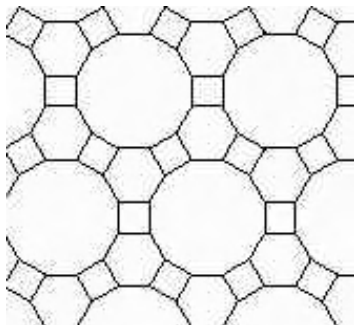
19

37

...

- (4,6,12)

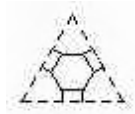
figura 65



Bases geradoras

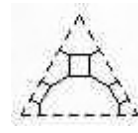


4

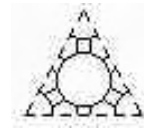


7

Bases transformadas

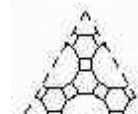


9

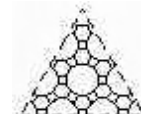


16

...



19



37

...

figura 66

Visual
caleidoscópico
a partir da base
geradora para
até sete cores

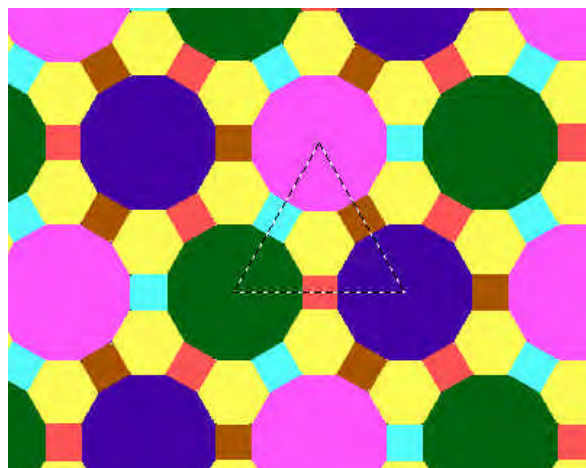
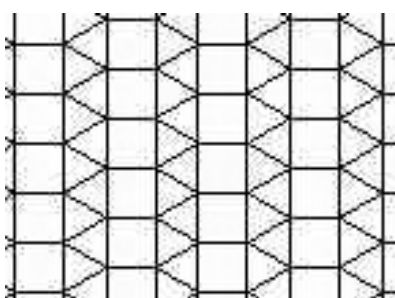


figura 67

- (3,3,3,4)



Base geradora

Bases transformadas

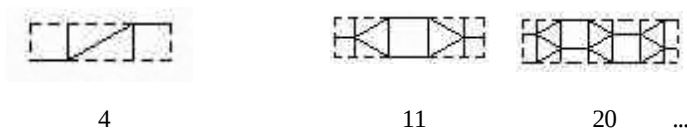


figura 68

- (4,8,8)

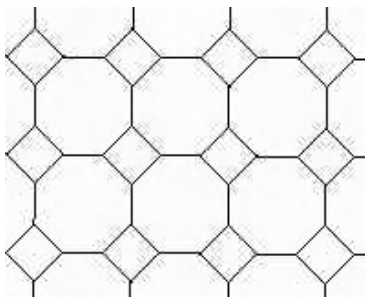


figura 69

Algoritmo

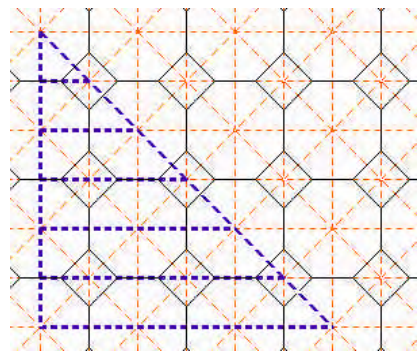


figura 70

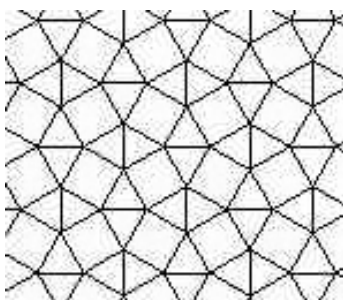
Base geradora

Bases transformadas



figura 71

- (3,3,4,3,4)



Base geradora

Bases transformadas

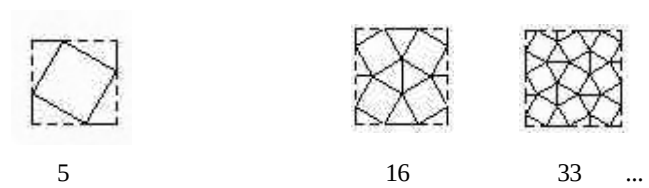


figura 72

Visual
caleidoscópico
a partir da base
geradora para
até cinco cores

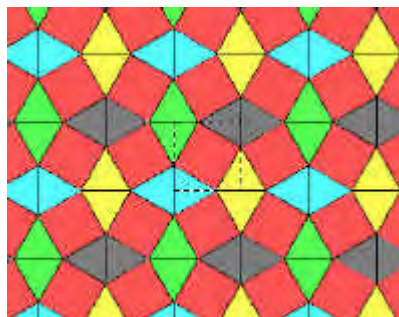
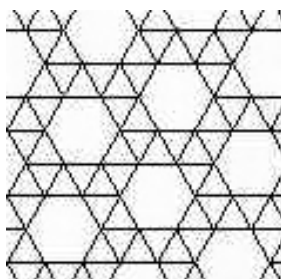


figura 73

- $(3,3,3,3,6)$



não possui eixo de simetria reflexional

figura 74

As construções através de régua e compasso de todas as bases geradoras das pavimentações 1-uniforme foram feitas por Murari (1999). A seguir, mostraremos como construir algumas destas bases, utilizando o software Cabri Géomètre II.

5.1.1 Bases para a pavimentação de configuração $(3,4,6,4)$

Porção da pavimentação

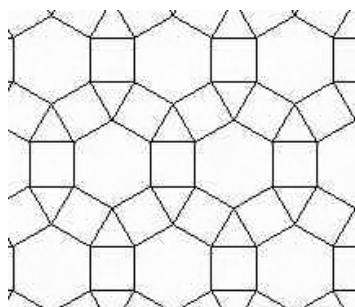
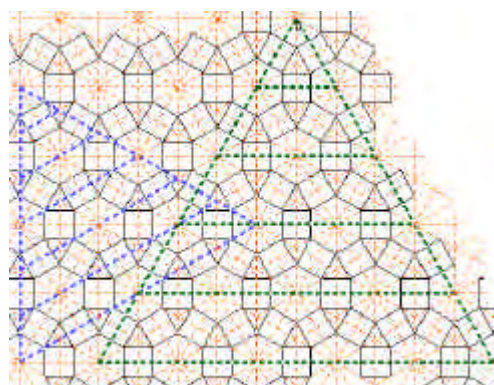
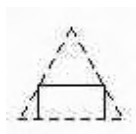


figura 75

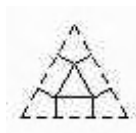
Algoritmo



Bases geradoras

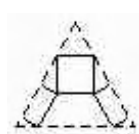


4

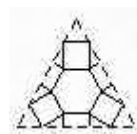


7

Bases transformadas

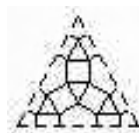


9

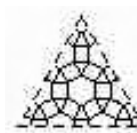


16

...



19



37

...

figura 76

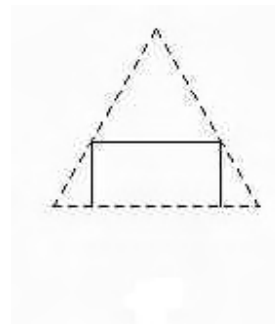
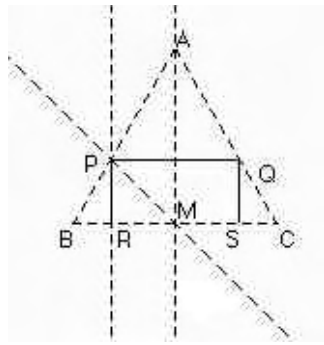
Construção das bases ger

figura 77

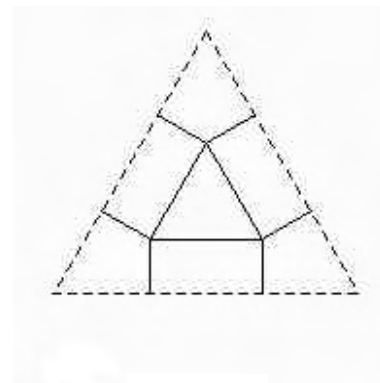
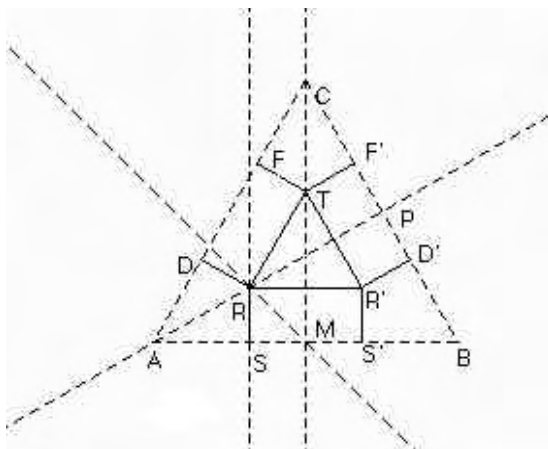
- Base para até 4 cores
- ✓ com software Cabri Géomètre II
 - um triângulo equilátero de vértices A , B e C , com traços pontilhados (polígono regular , pontilhado )*.
 - traçar bissetriz de $\hat{A}$, determinando o ponto M em BC (bissetriz ).
 - traçar a bissetriz do ângulo $\hat{AMB}$, determinando o ponto P no lado AB .
 - pelo ponto P baixar perpendicular ao lado BC , determinando o ponto R (reta perpendicular ).
 - segmento PR e seu simétrico QS em relação a AM . (segmento , simetria axial )*.
 - segmento PQ .
 - esconda todas as construções auxiliares (esconder/mostrar )*, vistas na figura 78, devendo permanecer apenas o que mostra a figura 79.**

* Nas notas entre parênteses estaremos especificando, quando necessário, quais ferramentas devem ser utilizadas.

** Para que se possa colorir posteriormente, feche as regiões formadas com polígonos, isto é, marque os polígonos APQ , PBR , QSC e $PQRS$.



- Base para até 7 cores
- ✓ com software Cabri Géomètre II
 - um triângulo equilátero de vértices A , B e C , com traços pontilhados.
 - traçar as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$, determinando P em BC e M em AB .
 - bissetriz do ângulo $\hat{AMC}$, determinando R na interseção com a bissetriz de $\hat{A}$.
 - reta perpendicular por R , determinando S em AB .
 - segmento RS e seu simétrico $R'S'$ em relação a CM . Segmento RR' .
 - simétricos RD e TF de RS e $R'S'$, respectivamente, em relação a AP . Segmento RT .
 - simétricos TF' e $R'D'$ de TF e RD , respectivamente, em relação a CM . Segmento TR' (figura 80).
 - esconda todas as construções auxiliares (figura 81).



5.1.2 Bases para a pavimentação de configuração (3,3,3,4,4)

Porção da pavimentação

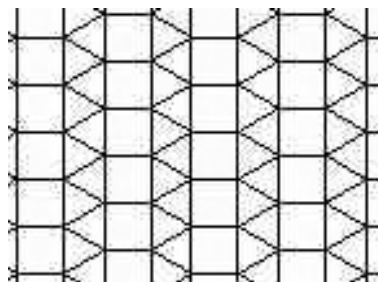


figura 82

Algoritmo

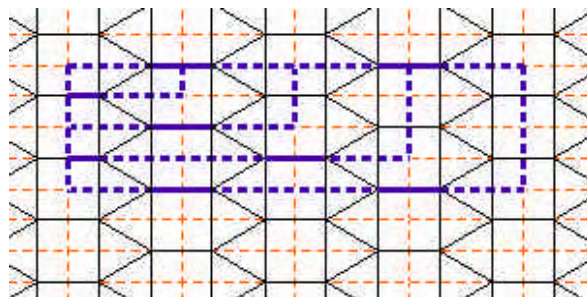
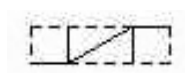


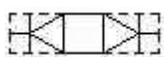
figura 83

Base geradora



4

Bases transformadas



11



20

...

figura 84

Construção da base geradora:

✓ com software Cabri Géomètre II

- ? Retas r e s perpendiculares por A .
- ? Circunferência C com centro A e raio qualquer (circunferência .
- ? Pontos B e D nas interseções de C com s e r , respectivamente.
- ? Retas d e b perpendiculares a r e s por D e B , respectivamente.
- ? Ponto E na interseção de b com d .
- ? Circunferência C' com centro E e raio $2 \cdot AB$ (compasso .
- ? Ponto F na interseção de C' com s .
- ? Circunferência C'' com centro F e raio AB .
- ? Ponto G na interseção de C'' com s , no semi-plano acima do ponto F .

- ? Retas f e g perpendiculares a s por F e G , respectivamente.
- ? Pontos X e Y nas interseções de f e g com d , respectivamente.
- ? Segmentos BE , ED , GF , FX e EF com traço contínuo. Segmentos GY , YE , AD e AF tracejados (figura 85).
- ? esconda todas as construções auxiliares (figura 86).

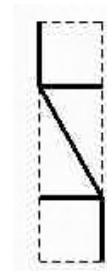
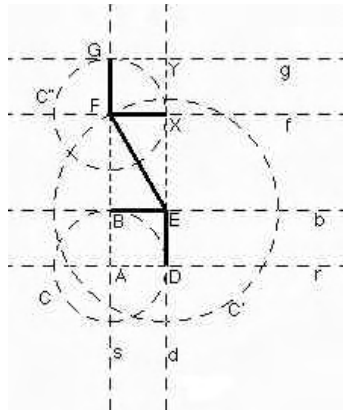


figura 86

A seguir estão figura 85 detalhes sobre as bases geradoras e transformadas das pavimentações de configuração 2-uniforme. Para que não fique um estudo exaustivo, apenas algumas pavimentações terão suas bases geradoras construídas e devidamente justificadas.

5.2 Bases para as pavimentações de configuração 2-uniforme

- $(3,4,3,12;3,12^2)$

Porção da pavimentação

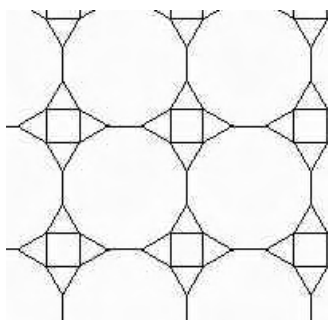


figura 87

Algoritmo

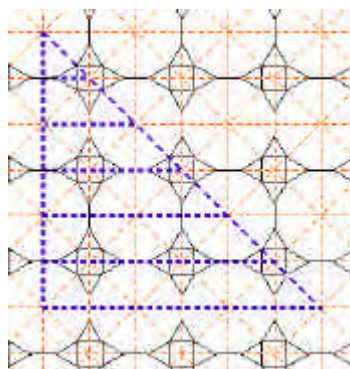
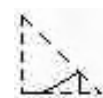


figura 88

Base geradora

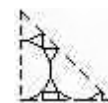


3

Bases transformadas



6



12

...

figura 89

- $(3,4,6,4;3^2,4,3,4)$

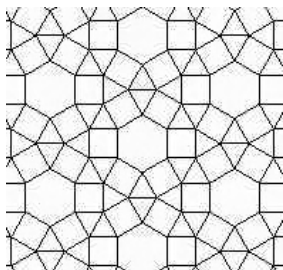


figura 90

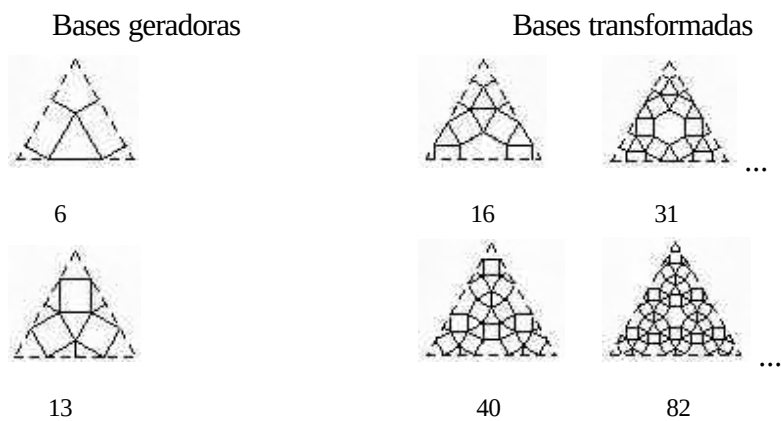


figura 91

- $(3^2,6^2;3,6,3,6)$

Porção da pavimentação

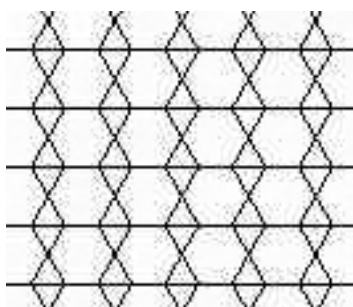


figura 92

Algoritmo

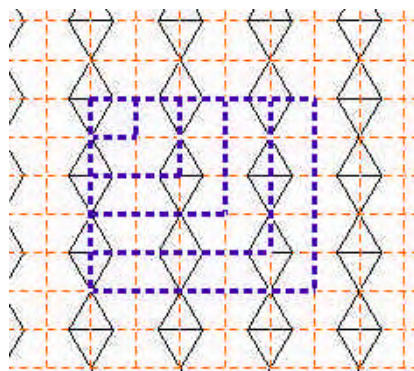
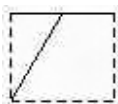


figura 93

Base geradora



2

Bases transformadas



5



10

...

figura 94

- $(3,4,6,4;4,6,12)$

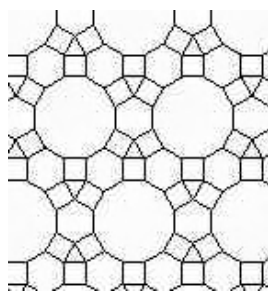
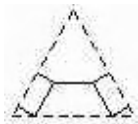
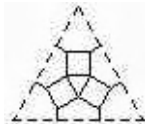


figura 95

Base geradora

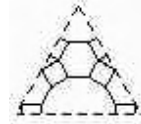


6

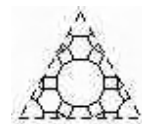


10

Bases transformadas

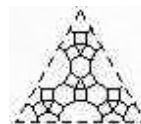


15

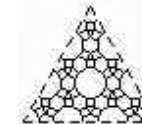


28

...



31



64

...

figura 96

- $(3^6;3^2,6^2)$

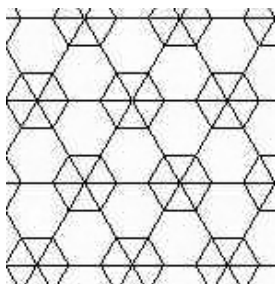
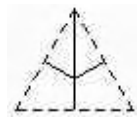
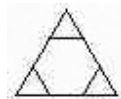


figura 97

Bases geradoras

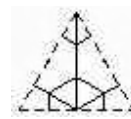


4

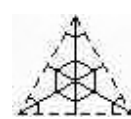


4

Bases transformadas



10

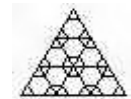


18

...



16



36

...

figura 98

Visual
caleidoscópico
a partir da base
geradora nº 2

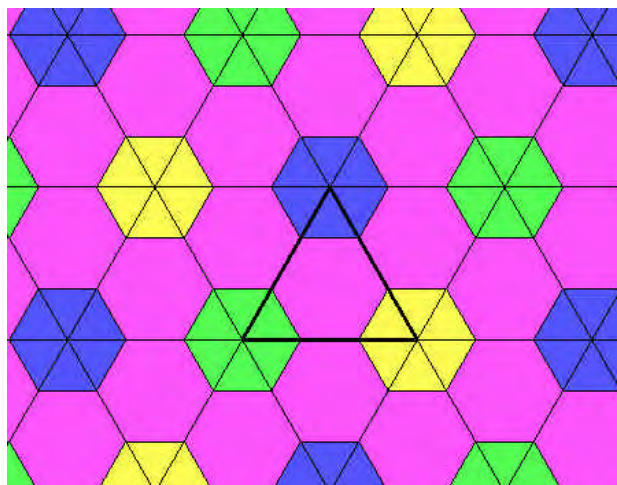


figura 99

- $(3^3, 4^2; 3, 4, 6, 4)$

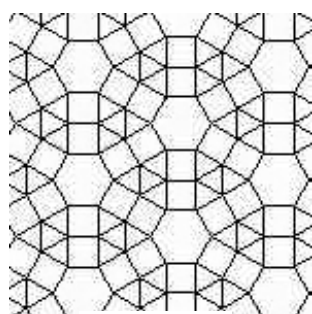
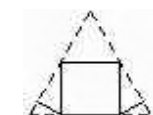
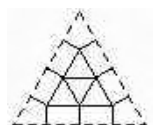


figura 100

Bases geradoras

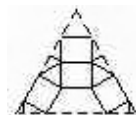


6

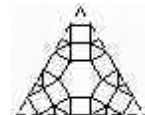


13

Bases transformadas

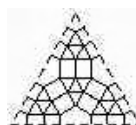


16

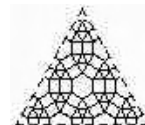


31

...



40



82

...

figura 101

- $(3^3, 4^2; 4^4)_1$

Porção da pavimentação

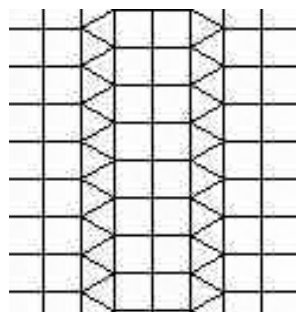


figura 102

Algoritmo

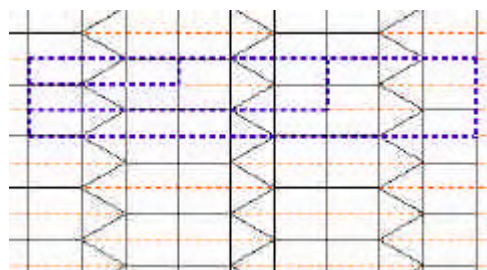
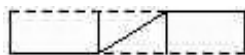


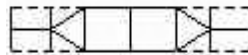
figura 103

Base geradora



4

Bases transformadas



12



24

...

figura 104

- $(3^6; 3^2, 4, 12)$

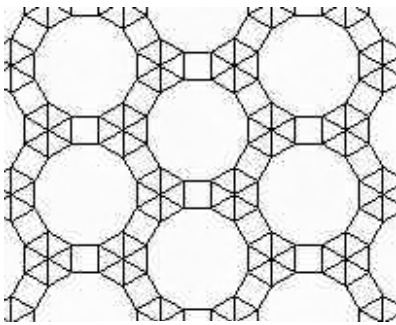


figura 105

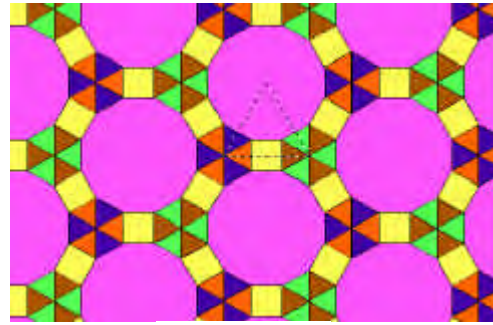
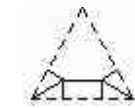


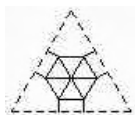
figura 106

Visual
caleidoscópico
a partir da base
geradora para
até seis cores

Bases geradoras

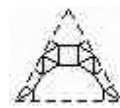


6

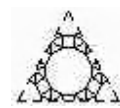


12

Bases transformadas

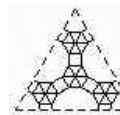


17

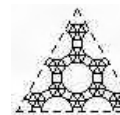


34

...



39



82

...

- $(3^6; 3^3, 4^2)_1$

figura 107

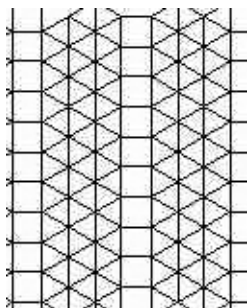
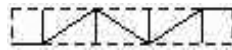


figura 108

Base geradora

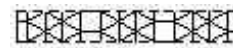


8

Bases transformadas



23



44

...

figura 109

- $(3^6; 3^3, 4^2)_2$

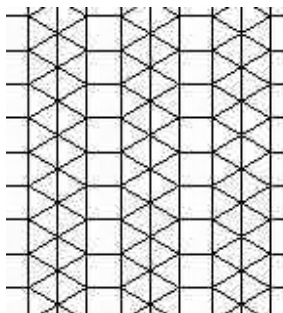


figura 110

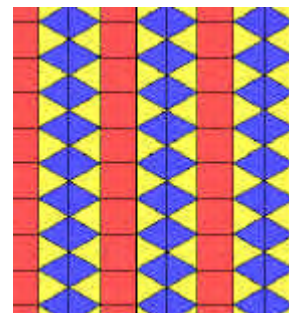
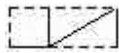


figura 111

Visual
caleidoscópico
a partir da base
geradora

Base geradora



3

Bases transformadas



10



16

...

figura 112

- $(3^6; 3^4, 6)_2$

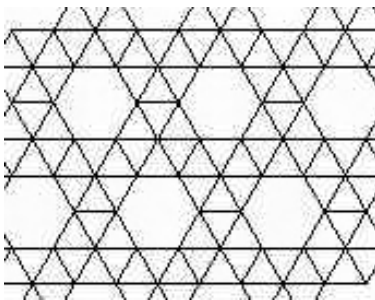
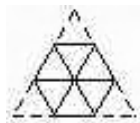
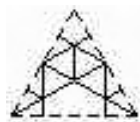


figura 113

Bases geradoras

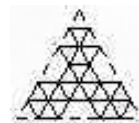


9

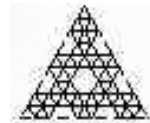


14

Bases transformadas

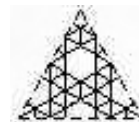


30

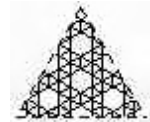


64

...



45



94

...

figura 114

- $(3^4, 6; 3^2, 6^2)$

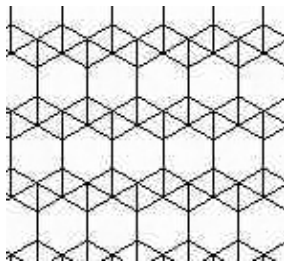


figura 115

Bases geradoras

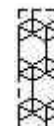


4

Bases transformadas



13



26

...

figura 116

- $(3^3, 4^2; 4^4)_2$

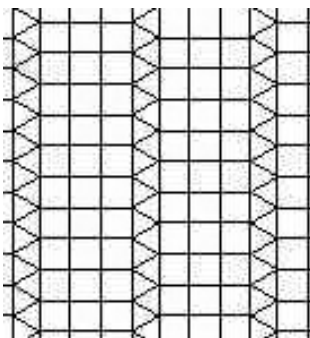


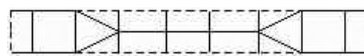
figura 117

Base geradora



6

Bases transformadas



16



32

...

figura 118

- $(3,6,3,6;3,4^2,6)_1$

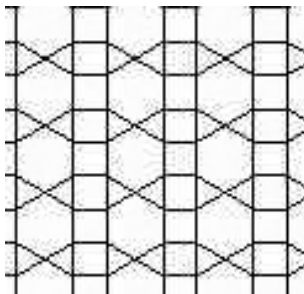


figura 119

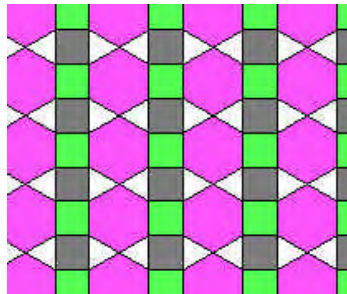
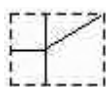


figura 120

Visual
caleidoscópico
a partir da base
geradora

Base geradora

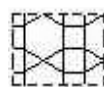


4

Bases transformadas



11



18

...

- $(3,6,3,6;3,4^2,6)_2$

figura 121

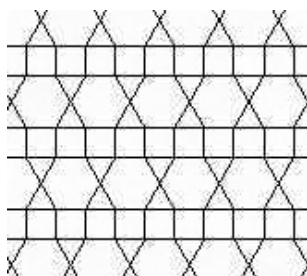
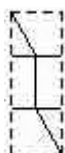


figura 122

Base geradora



6

Bases transformadas



16



32

...

figura 123

- $(3^3,4^2;3^2,4,3,4)_1$

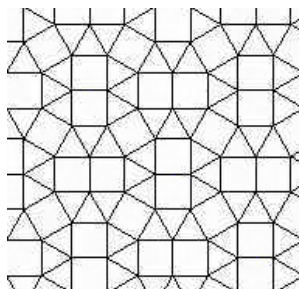
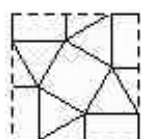


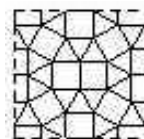
figura 124

Base geradora

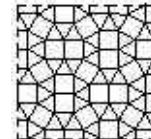


13

Bases transformadas



44



93

...

figura 125

- $(3^3, 4^2; 3^2, 4, 3, 4)_2$

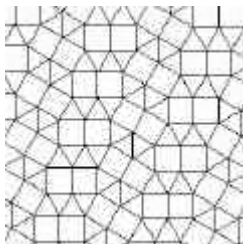


figura 126

não possui eixo de simetria reflexional

- $(3^6; 3^4, 6)_1$

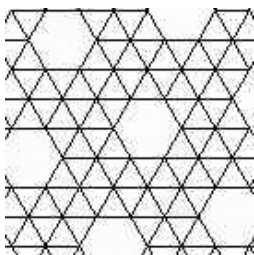


figura 127

não possui eixo de simetria reflexional

- $(3, 4, 4, 6; 3, 4, 6, 4)$

Porção da pavimentação

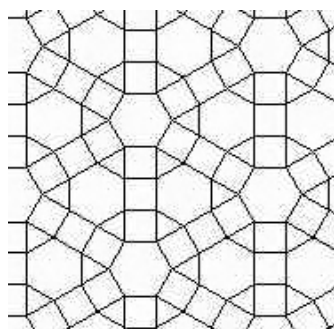


figura 128

Algoritmo

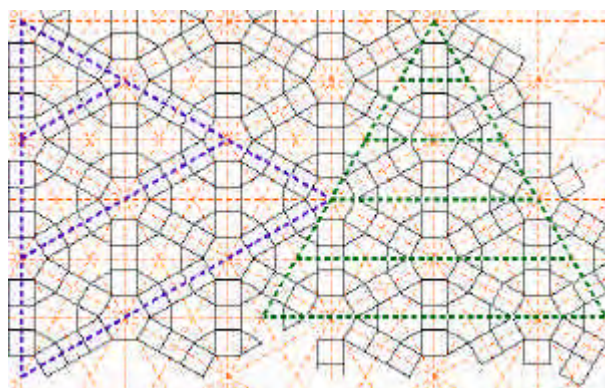
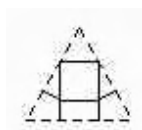


figura 129

Bases geradoras

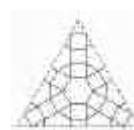


7

Bases transformadas



19

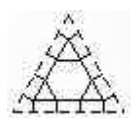


37

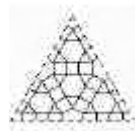


61

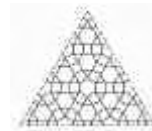
...



16



49



100



169

...

figura 130

Construção das bases geradoras:

- Base para até 7 cores

✓ com régua e compasso

- ? um triângulo equilátero de vértices A , B e C .
- ? traçar as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, determinando P em BC , N em AC e M em AB , respectivamente.
- ? traçar também as bissetrizes dos ângulos $\hat{AMC}$ e $\hat{BMC}$, determinando R e R' nas interseções com as bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, respectivamente.
- ? retas perpendiculares a AB por R e R' , determinando os pontos Y e Y' em AB e também X e X' em AC e BC , respectivamente.
- ? reta perpendicular a AC por R e a BC por R' , determinando S e S' nas interseções com AC e BC , respectivamente.
- ? marcar com traço contínuo os segmentos SR , $S'R'$, XY , $X'Y'$, RR' e XX' , tracejar o triângulo ABC e apagar as construções auxiliares (figuras 131 e 132).

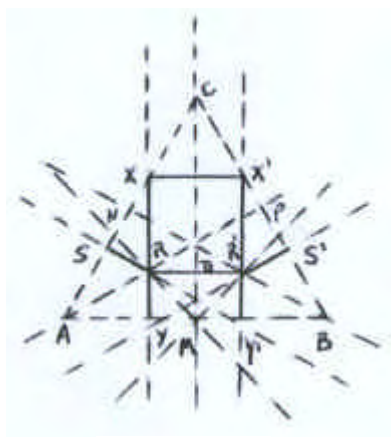


figura 131

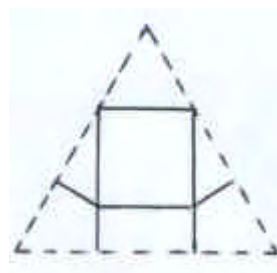


figura 132

✓ com software Cabri Géomètre II

- ? um triângulo de vértices A , B e C , com traços pontilhados.
- ? a bissetriz do ângulo $\hat{C}$, determinando M em AB .
- ? as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{AMC}$, determinando R em sua interseção.
- ? perpendiculares a AC e a AB por R , determinando S e X em AC e Y em AB , respectivamente.
- ? segmentos SR e XY .
- ? simétricos $S'R'$ e $X'Y'$ de SR e XY , respectivamente, em relação a CM .
- ? segmentos RR' e XX' (figuras 133 e 134).

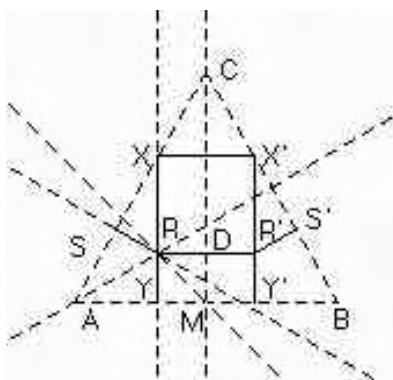


figura 133

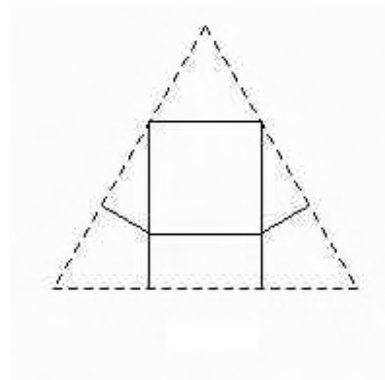


figura 134

Justificativa da construção:

Dado que o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero, então:

- $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$;
- $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$;
- as bissetrizes de $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ interceptam perpendicularmente BC , AC e AB em seus respectivos pontos médios.

Com isso, temos que:

- $\hat{MAR} = \hat{MBR'} = 30^\circ$ ($\overline{AR}$ e $\overline{BR'}$ são bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, respectivamente);

- $\hat{A}MR = \hat{B}MR' = 45^\circ$ ($\overrightarrow{MR}$ e $\overrightarrow{MR'}$ são bissetrizes de $\hat{A}MC$ e $\hat{B}MC$, respectivamente);
- $\overline{AM} = \overline{BM}$ (M é ponto médio de AB).

Portanto, pelo caso *ângulo-lado-ângulo*, os triângulos $\triangle MAR$ e $\triangle MBR'$ são congruentes. Logo:

- $\overline{AR} = \overline{BR'}$;
- $\overline{MR} = \overline{MR'}$;
- $\hat{A}RM = \hat{B}R'M$.

Sabemos que, para qualquer triângulo retângulo, $\text{sen } a = \frac{\text{op}}{\text{hip}}$, onde a é um de seus ângulos agudos (figura

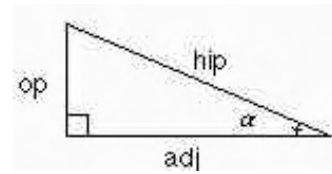


figura 135

135). Sendo $a = 30^\circ$, temos que $\text{sen } a = \frac{1}{2}$.

Com estas informações, considerando o triângulo retângulo $\triangle RAY$, temos que:

$$\text{sen } \hat{R}AY = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\overline{RY}}{\overline{RA}}.$$

Assim, $\overline{RY} = \frac{1}{2} \overline{RA}$. Analogamente, considerando agora os triângulos retângulos

$\triangle RAS$, $\triangle RXS$, $\triangle R'BY'$, $\triangle R'BS'$ e $\triangle R'X'S'$, temos respectivamente:

- $\overline{RS} = \frac{1}{2} \overline{RA}$
- $\overline{RS} = \frac{1}{2} \overline{RX}$
- $\overline{R'Y'} = \frac{1}{2} \overline{R'B}$
- $\overline{R'S'} = \frac{1}{2} \overline{R'B}$
- $\overline{R'S'} = \frac{1}{2} \overline{R'X'}$

Podemos concluir que $\overline{RS} = \overline{RY}$, $\overline{R'S'} = \overline{R'Y'}$, $\overline{RA} = \overline{RX}$ e $\overline{R'B} = \overline{R'X'}$. Como $\overline{RA} = \overline{R'B}$ (congruência entre $\triangle MAR$ e $\triangle MBR'$ mostrada acima) temos que $\overline{RS} = \overline{RY} = \overline{R'S'} = \overline{R'Y'}$ e $\overline{RA} = \overline{RX} = \overline{R'B} = \overline{R'X'}$.

Nomeando D o ponto de interseção entre CM e RR' , consideremos os triângulos $\triangle RMD$ e $\triangle R'MD$ que, pelo caso *lado-ângulo-lado*, são congruentes, pois MD é lado comum, $\widehat{RMD} = \widehat{R'MD} = 45^\circ$ e $\overline{MR} = \overline{MR'}$ (da congruência entre $\triangle MAR$ e $\triangle MBR'$). Portanto, $\overline{RD} = \overline{DR'}$, ou ainda $\overline{RD} = \frac{1}{2} \overline{RR'}$.

Sabemos que $\overline{RY} = \overline{R'Y'}$ e $\widehat{RYM} = \widehat{R'Y'M} = 90^\circ$. Assim $RR' \parallel YY'$ e ainda $\widehat{DRY} = \widehat{DR'Y'} = \widehat{RDM} = 90^\circ$ e $\overline{DM} = \overline{RY} = \overline{R'Y'}$. Temos que $\widehat{DRM} = \widehat{YMR}$ e $\widehat{DR'M} = \widehat{Y'MR'}$ (alternos internos). Mas $\overline{MR}$ e $\overline{MR'}$ são bissetrizes de $\widehat{YMD}$ e $\widehat{Y'MD}$ (retos), fazendo com que $\widehat{YRM} = \widehat{DRM} = \widehat{DMR} = \widehat{YMR} = \widehat{Y'R'M} = \widehat{DR'M} = \widehat{DMR'} = \widehat{Y'MR'}$. Portanto, os triângulos $\triangle DRM$, $\triangle DR'M$, $\triangle YMR$ e $\triangle Y'MR'$ são isósceles, donde $\overline{DR} = \overline{DR'} = \overline{DM} = \overline{RY} = \overline{R'Y'}$.

De resultados acima temos que $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$. Como $\widehat{XYA} = \widehat{X'Y'B} = 90^\circ$, obtemos $XX' \parallel YY'$ e ainda $\widehat{X'XY} = \widehat{X'Y'X'} = 90^\circ$ e $\overline{XX'} = \overline{RR'}$. Portanto, o quadrilátero $XX'R'R$ é um quadrado.

Resumindo:

$$\overline{XX'} = \overline{RR'} = \overline{RX} = \overline{R'X'} = 2\overline{RS} = 2\overline{RY} = 2\overline{R'Y'} = 2\overline{R'S'}.$$

Com isso, o segmento XX' gerará um hexágono regular em relação ao ângulo $\hat{C}$, assim como os pares de segmentos RS e RY em relação a $\hat{A}$ e $R'S'$ e $R'Y'$ em relação a $\hat{B}$. Os segmentos XR e RS gerarão um triângulo equilátero em relação a AC , da mesma maneira que o par $X'R'$ e $R'S'$. Os segmentos RY , RR' e $R'Y'$ gerarão um quadrado em relação a AB .

Desse modo, pelas reflexões nos três espelhos, simultaneamente, obteremos a pavimentação de configuração (3,4,4,6;3,4,6,4), com até 7 cores, nomeadas com as letras A, B, C, D, E, F e G, conforme figura 136 abaixo. A figura 137 mostra o visual obtido quando as regiões da base estão coloridas.

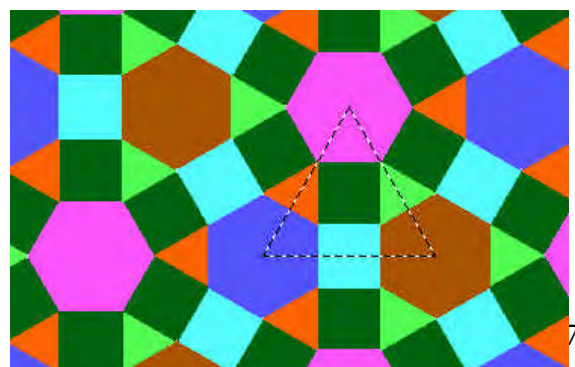
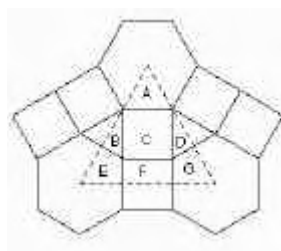


figura 136

figura 137

- Base para até 16 cores

✓ com régua e compasso

- ? um triângulo equilátero de vértices A , B e C .
- ? construir as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, determinando P em BC , N em AC e M em AB , respectivamente, e também o incentro O .
- ? traçar as bissetrizes dos ângulos:
 - $\hat{AMC}$ e $\hat{AOM}$, interceptando-se em R ;
 - $\hat{BMC}$ e $\hat{BOM}$, interceptando-se em R' ;
 - $\hat{APB}$ e $\hat{BOP}$, interceptando-se em E' ;
 - $\hat{APC}$ e $\hat{COP}$, interceptando-se em G' ;
 - $\hat{BNC}$ e $\hat{CON}$, interceptando-se em G ;
 - $\hat{ANB}$ e $\hat{AON}$, interceptando-se em E .
- ? traçar as retas r de RR' , s de $E'G'$ e t de EG , determinando Y , Y' e X nas bissetrizes de $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente.
- ? traçar retas perpendiculares a AB por R , R' , Y e Y' , determinando S , S' , Z e Z' em AB , respectivamente.
- ? retas perpendiculares a BC por E' , G' , Y' e X , determinando F' , H' , D' e K' em BC , respectivamente.
- ? retas perpendiculares a AC por E , G , Y e X , determinando F , H , D e K em AC , respectivamente.
- ? marcar com traço contínuo os segmentos RS , $R'S'$, $E'F'$, $G'H'$, EF , GH , YY' , XY' , XY , YZ , YD , $Y'Z'$, $Y'D'$, XK , XK' , GG' , $E'R'$ e ER , tracejar o triângulo ABC e apagar as construções auxiliares (figuras 138 e 139).

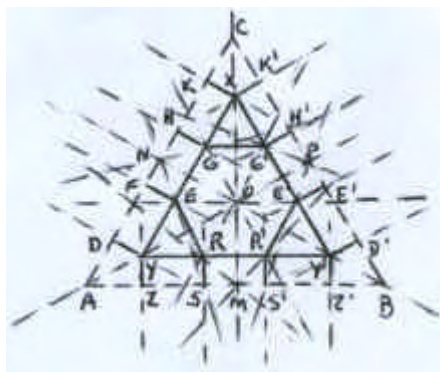


figura 138

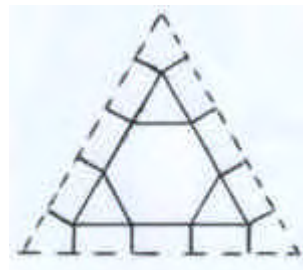


figura 139

✓ com software Cabri Géomètre II

- ? um triângulo de vértices A , B e C , com traços pontilhados.
- ? bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{C}$ determinando P em BC e M em AB , respectivamente
- ? as bissetrizes dos ângulos $\hat{AMC}$ e $\hat{AOM}$, onde O é o incentro, determinando R na interseção.
- ? perpendicular a AB por R determinando S em AB . Segmento RS .
- ? simétrico $R'S'$ de RS em relação a CM .
- ? reta por RR' determinando Y em AP .
- ? perpendicular a AB por Y , determinando Z em AB . Segmento YZ .
- ? simétrico $Y'Z'$ de YZ em relação a CM . Segmento YY' .
- ? simétricos XY de YY' em relação a AP . Segmento XY' .
- ? simétricos YD , EF , GH e XK de YZ , RS , $R'S'$ e $Y'Z'$, respectivamente, em relação a AP
- ? simétricos XK' , $G'H'$, $E'F'$ e $Y'D'$ de XK , GH , EF e YD , respectivamente, em relação a CM .
- ? segmentos ER , $E'R'$ e GG' (figuras 140 e 141).

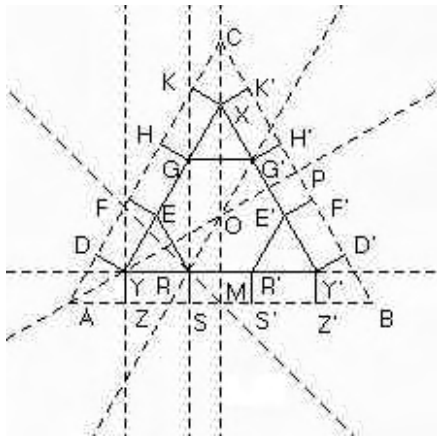


figura 140

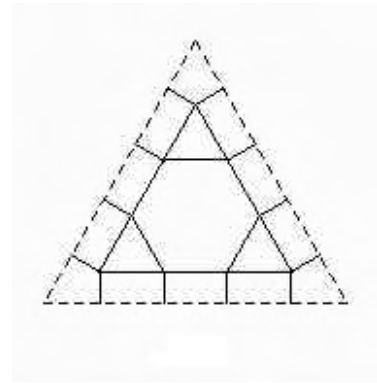


figura 141

- (3,3,3,3,3,3;3,4,3,4)

Porção da pavimentação

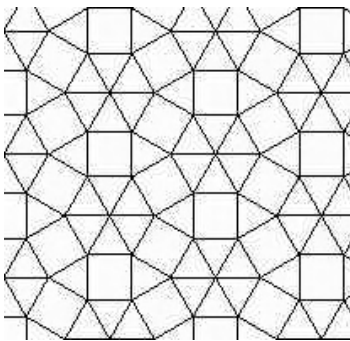
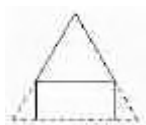
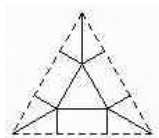


figura 142
Bases geradoras

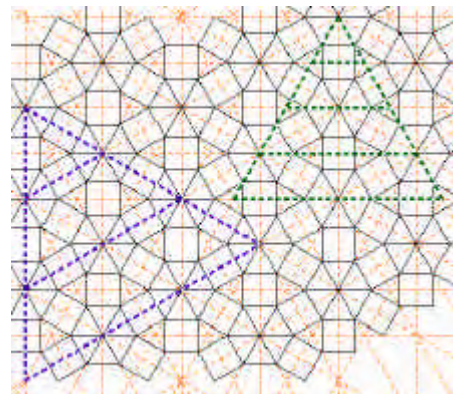


4

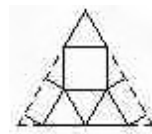


10

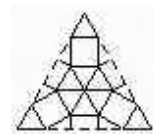
Algoritmo



Bases transformadas figura 143

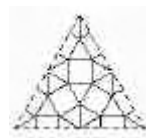


11

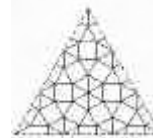


21

...



31



63

...

figura 144

Construção das bases geradoras:

- Base para até 4 cores

✓ com régua e compasso

- um triângulo equilátero de vértices A , B e C .
- traçar a bissetriz do ângulo $\hat{A}$, determinando o ponto M em BC .
- bissetrizes dos ângulos $\hat{AMB}$ e $\hat{AMC}$, determinando os pontos P e Q em AB e AC , respectivamente.
- pelos pontos P e Q , baixar perpendiculares a BC , determinando os pontos R e S em BC , respectivamente.
- traçar os segmentos PR , QS , PQ , AP e AQ .
- tracejar os segmentos PB , QC e BC e apagar as construções auxiliares (figuras 145 e 146).

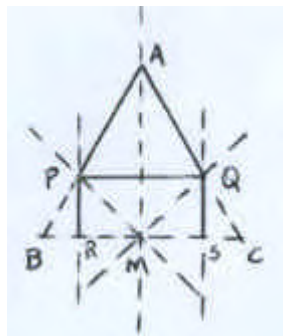


figura 145

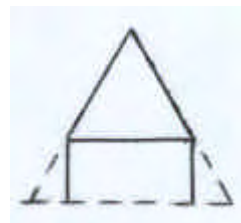


figura 146

✓ com software Cabri Géomètre II

- um triângulo equilátero de vértices A , B e C , com traços pontilhados.
- traçar a bissetriz do ângulo $\hat{A}$, determinando o ponto M em BC .
- traçar a bissetriz do ângulo $\hat{AMB}$, determinando o ponto P no lado AB .
- pelo ponto P baixar perpendicular ao lado BC , determinando o ponto R .
- segmentos PR e AP , e seus simétricos QS e AQ , em relação a AM .
- segmento PQ .
- esconda todas as construções auxiliares (figuras 147 e 148).

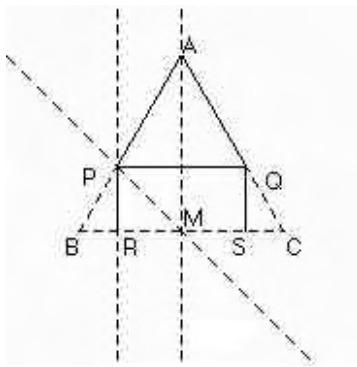


figura 147

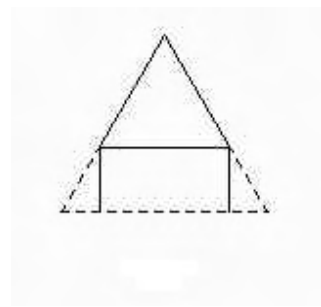


figura 148

Visual caleidoscópico

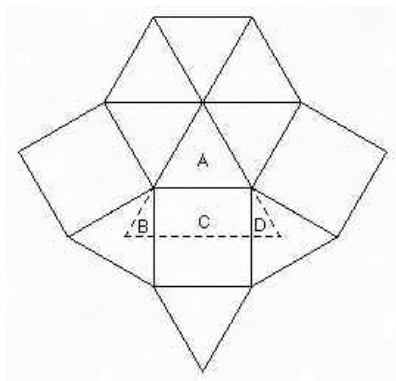


figura 149

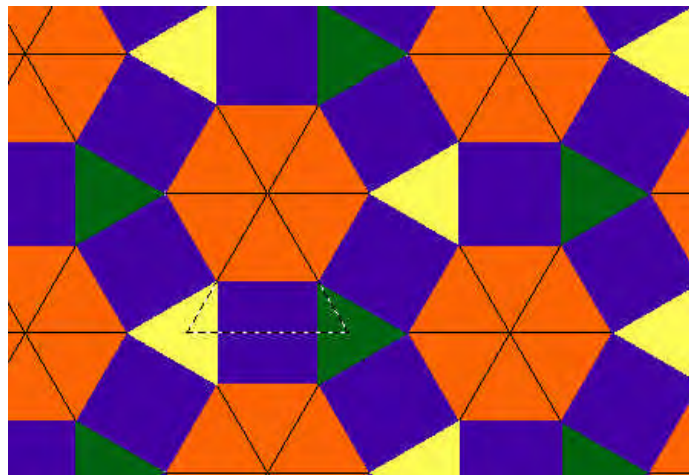


figura 150

- Base para até 10 cores

✓ com régua e compasso

- ? um triângulo equilátero de vértices A , B e C .
- ? construir as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, determinando P em BC , N em AC e M em AB , respectivamente.
- ? traçar as bissetrizes dos ângulos $\hat{AMC}$, $\hat{BPA}$ e $\hat{CNB}$, determinado os pontos R , R' e T nas interseções com as bissetrizes de $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente.

? baixar perpendiculares a:

- AB por R e R' , determinando S e S' em AB , respectivamente;
- BC por R' e T , determinando D' e F' em BC , respectivamente;
- AC por R e T , determinando D e F em AC , respectivamente.

? marcar com traço contínuo os segmentos AR , BR' , CT , RR' , $R'T$, RT , RS , $R'S'$, $R'D'$, TF' , RD e TF , tracejar o triângulo ABC e apagar as construções auxiliares (figuras 151 e 152).



figura 151

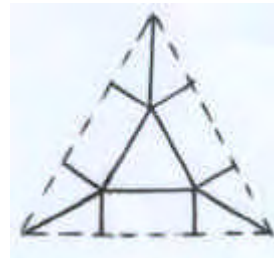


figura 152

✓ com software Cabri Géomètre II

- um triângulo equilátero de vértices A , B e C , com traços pontilhados.
- ? traçar as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$, determinando P em BC e M em AB , respectivamente.
- bissetriz do ângulo $\hat{AMC}$, determinando R na interseção com a bissetriz de $\hat{A}$.
- reta perpendicular por R , determinando S em AB .
- segmento RS e seu simétrico $R'S'$ em relação a CM . Segmento RR' .
- simétricos RD e TF de RS e $R'S'$, respectivamente, em relação a AP . Segmento RT .
- simétricos TF' e $R'D'$ de TF e RD , respectivamente, em relação a CM . Segmento TR' (figuras 153 e 154).

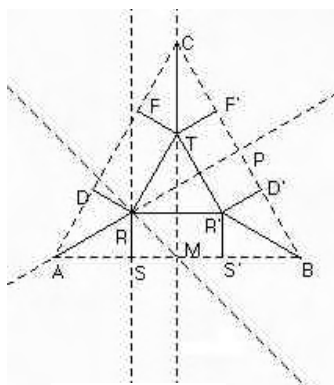


figura 153

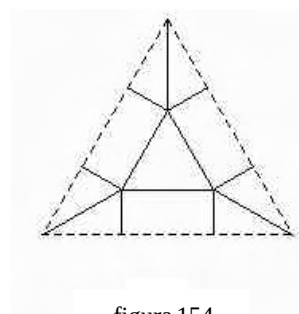


figura 154

5.2 Bases transformadas no software Cabri Géomètre II

Construir uma base transformada com régua e compasso muitas vezes é possível, conforme fez Murari⁴² para a pavimentação de configuração (4,6,12). Em primeiro lugar, o triângulo equilátero que servirá de base para o caleidoscópio é triangulado: para a primeira transformada os lados foram divididos em 2 partes iguais, pelo ponto médio, obtendo-se 4 triângulos equiláteros congruentes (figura 156); para a segunda, cada lado foi dividido em 3 partes iguais, obtendo-se 9 triângulos (figura 159); e assim sucessivamente, dividindo cada lado em 4, 5, 6.... Em todos os triângulos resultantes é empregada a construção da base geradora, no caso, para até 4 cores (figuras 157 e 160).

Base geradora

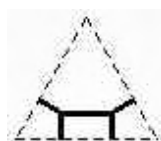


figura 155

Primeira Base transformada

⁴² Ibid., MURARI, C., 1999, p.154.

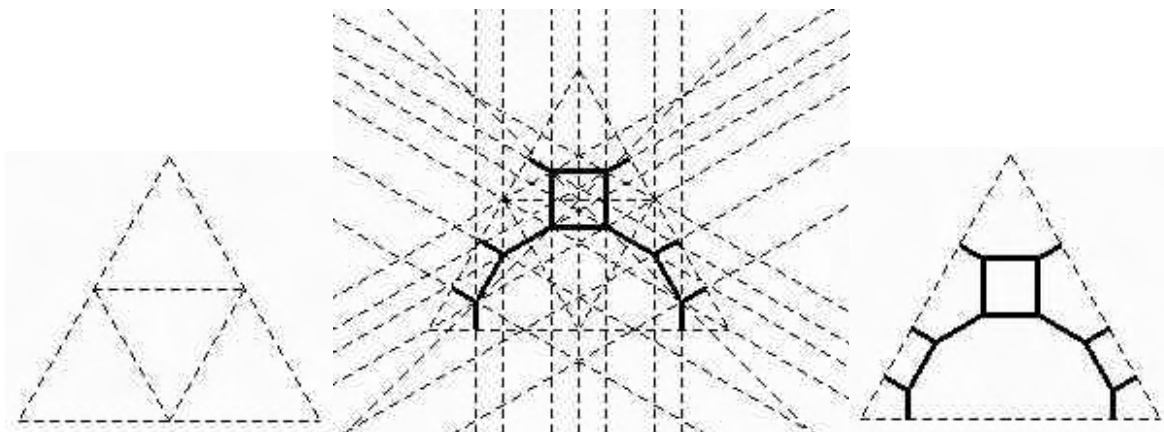


figura 156

figura 157

figura 158

Segunda Base transformada

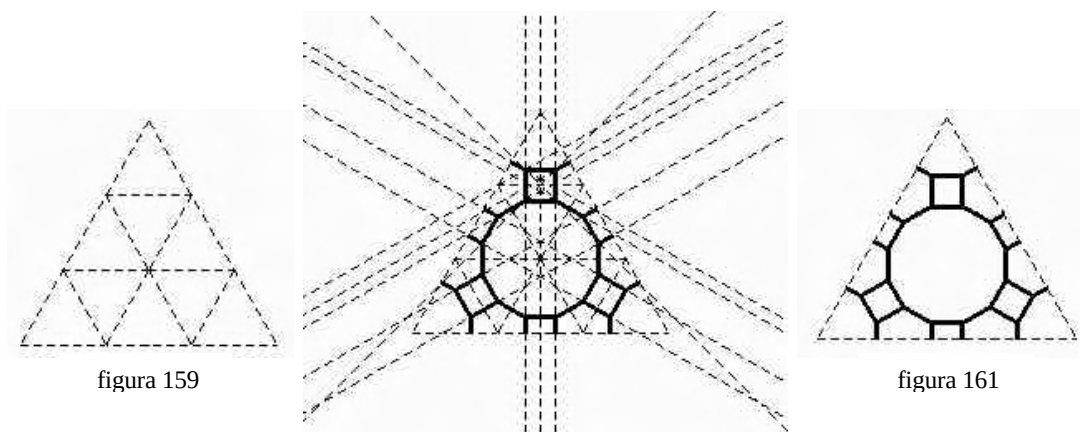


figura 159

figura 160

figura 161

Como deve ter sido observado, à medida que passamos de uma base transformada para outra, o grau de dificuldade nas construções gráficas aumenta, além de crescer também a imprecisão dos desenhos. Assim encontramos no software Cabri Géomètre II o auxílio ideal para agilizar e dar maior eficiência ao nosso trabalho. As bases transformadas de qualquer pavimentação podem ser construídas utilizando a ferramenta “*simetria axial*”. Veremos como isto é feito.



figura 162

- **Bases transformadas que são triângulos equiláteros** (tomaremos como exemplo a base geradora da pavimentação de configuração (3,4,6,4) para até 4 cores, cuja construção se encontra na pág.53)

Base geradora

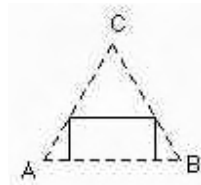


figura 163

- Por simetria axial, fazer um triângulo ABC' simétrico ao triângulo base ABC em relação a um de seus lados, por exemplo, ao lado AB (figura 164).
- Obter mais dois triângulos: $AB'C'$ e $A'BC'$, simétricos do triângulo ABC' em relação aos lados AC' e BC' , respectivamente (figura 165 e figura 166).

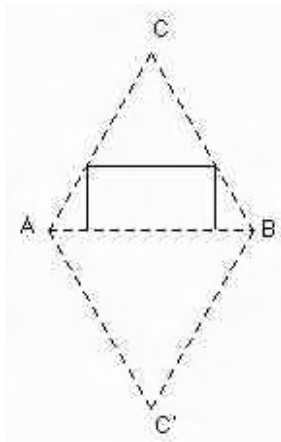


figura 164

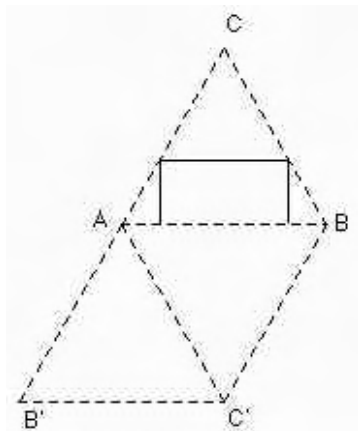


figura 165

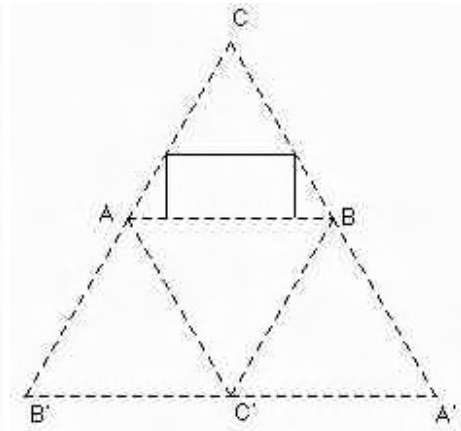


figura 166

- Fazer os simétricos dos segmentos da base geradora em relação aos lados AB , AC' e BC' (figura 167 e figura 168).

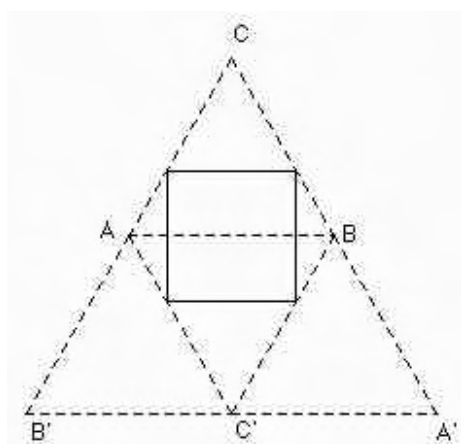


figura 167

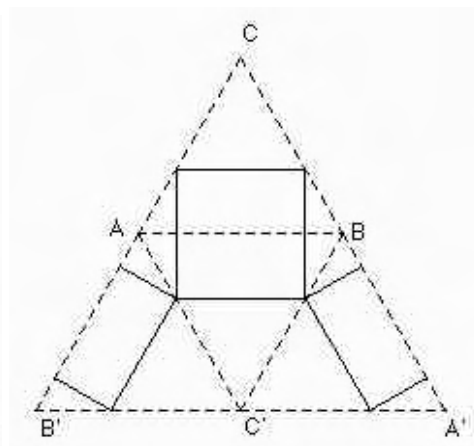


figura 168

- d. Traçar o triângulo $A'B'C'$ pontilhado, esconder as letras (se houver) e os triângulos eqüiláteros construídos nos passos *a* e *b*. (figura 169). Se necessário, redimensione o triângulo utilizando a ferramenta “*semelhança*” (é preciso selecionar o triângulo eqüilátero) (figura 170). Assim, finalizamos a construção da primeira base transformada.

Primeira Base transformada

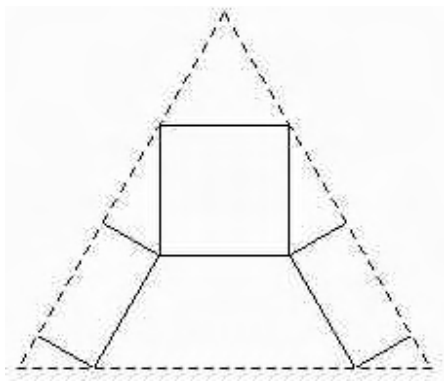


figura 169

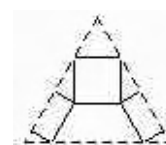


figura 170

As bases transformadas seguintes são obtidas continuando o processo de maneira análoga: para a segunda é necessário acrescentar à primeira base transformada 5 réplicas da base geradora (figura 171); para a terceira são adicionadas 7 à segunda (figura 172); e assim, sucessivamente, são acrescentadas 9, 11, 13... réplicas da base geradora.

Segunda Base transformada

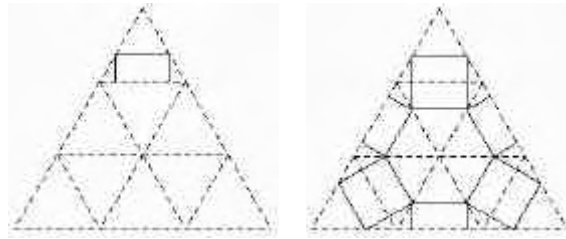


figura 171

Terceira base transformada

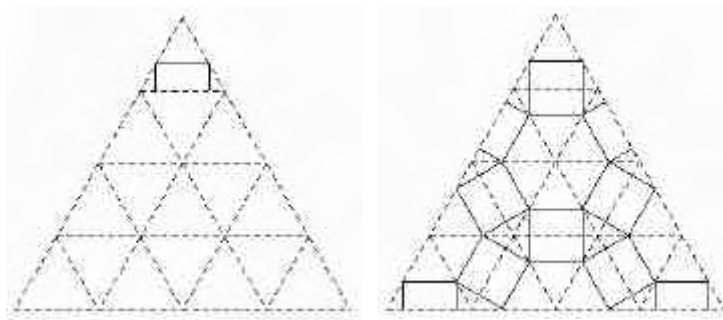


figura 172

- **Bases transformadas retangulares** (tomaremos como exemplo a base geradora da pavimentação de configuração (3,3,3,4,4), cuja construção se encontra na pág.55).

Base geradora

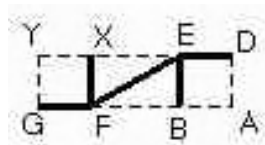


figura 173

- Fazer os simétricos de todos os segmentos da base de vértices $YGAD$ em relação a um dos lados, no caso, o lado AG , formando um retângulo $YY'D'D$ (figura 174).
- Fazer os simétricos de todos os segmentos do retângulo $YY'D'D$ em relação ao lado DD' , formando o retângulo $YY'Y''Y'''$ (figura 175).

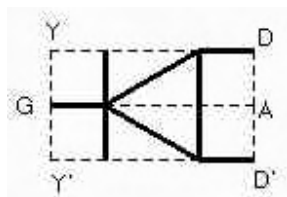


figura 174

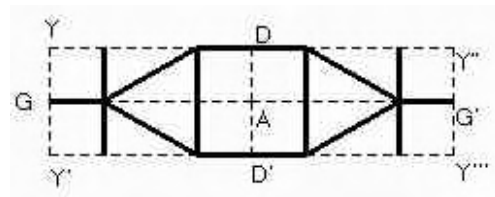


figura 175

- c. Esconder os segmentos pontilhados e as letras (se houver). Esta é a primeira base transformada (figura 176). Se necessário, redimensione a base, de acordo com sua construção. Observe que, assim como nos casos em que as bases são triângulos equiláteros, esta primeira base transformada foi obtida acrescentando 3 réplicas da base geradora. Neste caso, esta transformada possui duas linhas e duas colunas de bases geradoras.

Primeira Base transformada

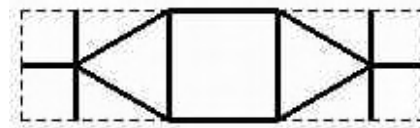


figura 176

- d. Para se construir a segunda base transformada, basta fazer os simétricos de modo que se tenha, no total, três linhas e três colunas de bases geradoras, ou seja, há um acréscimo de 5 bases geradoras (figura 177). Para a terceira, o processo é o mesmo, sendo que 7 são somadas (figura 179). Segue-se adicionando 9, 11, 13..., assim como nos casos em que as bases são triângulos equiláteros (De preferência, siga um padrão para os acréscimos. Por exemplo, escolha sempre os lados “inferior e direito” para serem os eixos de simetria reflexional.).

Segunda Base transformada

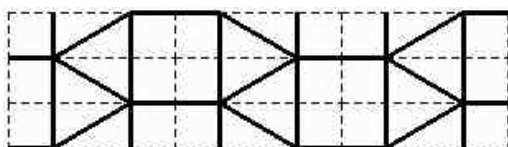


figura 177

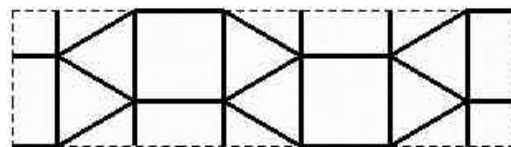


figura 178

Terceira Base transformada

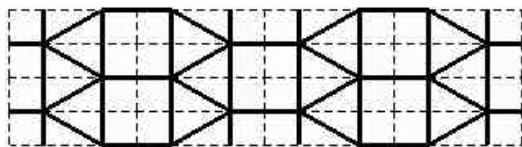


figura 179

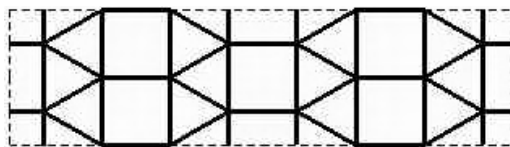


figura 180

À medida que passamos de uma base transformada para a seguinte (o que chamaremos de interação), o número de regiões a serem coloridas aumenta. Mas como saber quantas cores poderão ser utilizadas em uma base transformada qualquer?

Será que é possível estabelecer uma relação entre o número de cores e as bases transformadas? A próxima seção deste capítulo esclarecerá essa pergunta.

6 Relações entre o número de cores

As bases geradoras de uma pavimentação geralmente possuem poucas regiões a serem coloridas. Quando queremos ter um número maior de cores nas bases, construímos as chamadas bases transformadas, que continuam gerando, em caleidoscópios, a mesma pavimentação. Nessas construções existem objetivos de natureza matemática e educacional.

Como objetivos de natureza matemática temos: as formas geométricas das bases; as construções geométricas apropriadas das bases geradoras e transformadas; as relações geométricas existentes entre os elementos das bases e a análise das simetrias.

O propósito dos objetivos de natureza educacional é oferecer ao professor de Matemática instrumentos e recursos que o habilitem a uma integração multidisciplinar, por exemplo, com: Ciências e Física, quando se exploram simetrias e se calcula o número de imagens em espelhos; Desenho Geométrico, quando se constrói graficamente as bases; Educação Artística, quando se colorem as bases, desenvolve-se o senso estético.

A construção geométrica das bases transformadas, com régua e compasso, às vezes é um trabalho demorado. Então, utilizamos o software Cabri Géomètre II, com sua ferramenta *simetria axial*, para realizar tal tarefa.

Ao construirmos as primeiras bases transformadas de algumas pavimentações, observamos que o número de regiões a serem coloridas, aparentemente, aumentava de

maneira familiar: Progressão Aritmética de segundo grau. Segundo Gilioli⁴³, uma seqüência numérica é dita Progressão Aritmética de primeiro grau quando a diferença entre dois termos consecutivos é constante; temos uma PA de segundo grau se tais diferenças formam uma PA de primeiro grau. Uma vez definida a progressão de grau m qualquer, chamaremos progressão aritmética de grau $m+1$ às progressões cujas diferenças entre dois termos consecutivos é uma PA de grau m .

Vejamos, primeiro, como se dá o aumento das “cores” nas sete bases apresentadas neste trabalho: (3,4,6,4), com 4 e 7 regiões; (3,3,3,4,4), com 4 regiões; (3,4,4,6;3,4,6,4), com 7 e 16 regiões; e (3,3,3,3,3,3;3,3,4,3,4), com 4 e 10 regiões.

↪ Para (3,4,6,4)

- Com 4 regiões

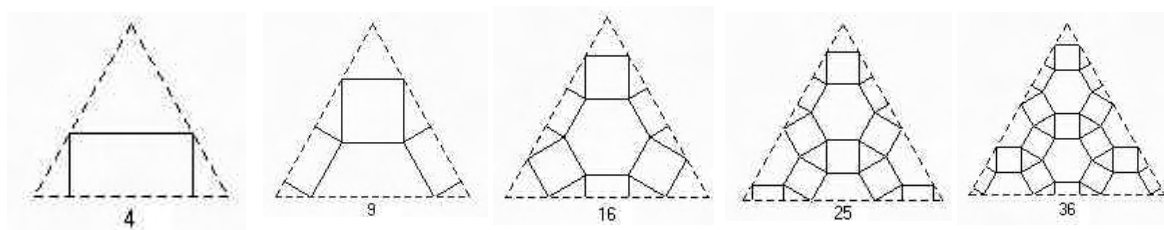


figura 181

Fazendo a diferença entre o número de regiões de duas bases consecutivas, temos os seguintes resultados:

$$9-4=5; \quad 16-9=7; \quad 25-16=9; \quad 36-25=11; \quad \dots$$

Como podemos observar, os números (5,7,9,11) são termos de uma PA de primeiro grau de razão 2.

- Com 7 regiões

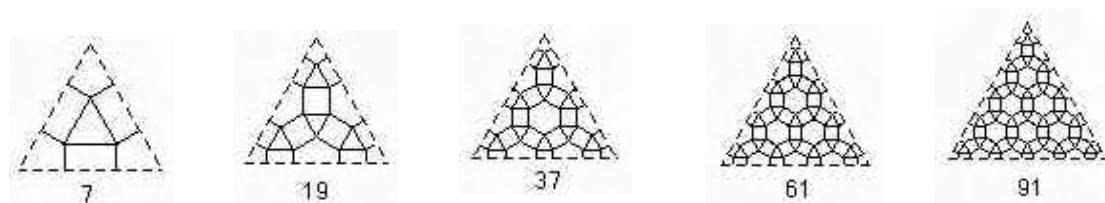


figura 182

⁴³ GILIOLI, A., *Estudos de sucessões numéricas particulares – Progressões de grau m* , Colégio de Aplicação da Faculdade de Filosofia Da Universidade de São Paulo, p.1.

O cálculo das diferenças nos mostra números que são termos de uma PA de primeiro grau de razão 6. São eles: (12, 18, 24, 30).

✧ Para (3,3,3,4,4)

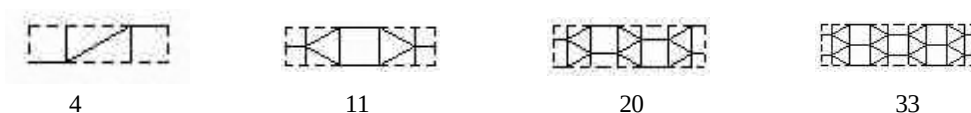


figura 183

Para essa pavimentação, ao fazermos as diferenças entre os números de regiões a serem coloridas, encontramos a sequência (7, 9, 13), cujos números não são termos de uma PA.

✧ Para (3,4,4,6;3,4,6,4)

• Com 7 regiões

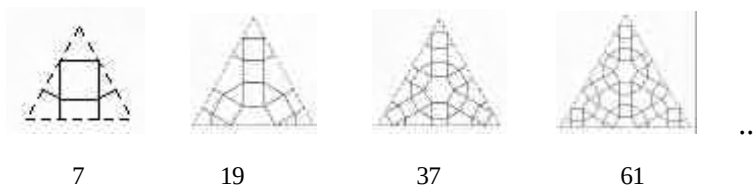


figura 184

Com os cálculos das diferenças, temos (12, 18, 24) que parecem estar numa PA de primeiro grau, cuja razão é 6.

• Com 16 regiões

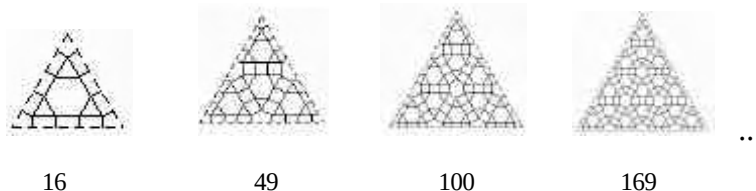


figura 185

Com essa base, obtemos os primeiros termos de uma PA de razão 18 e $a_0 = 33$, ou seja: $49 - 16 = 33$; $100 - 49 = 51$; $169 - 100 = 69$; $256 - 169 = 87$; ... nos fornece (33, 51, 69, 87, ...).

↪ Para (3,3,3,3,3,3,3,3,4)

- Com 4 regiões

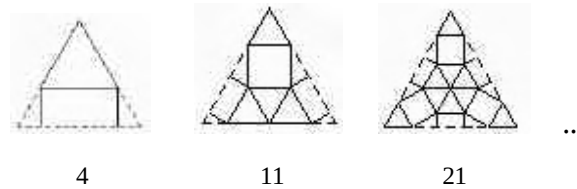


figura 186

Nesse caso, os cálculos nos fornecem a sequência (7, 10, 15, 18, 21), cujos números não são pertencentes a uma PA.

- Com 10 regiões

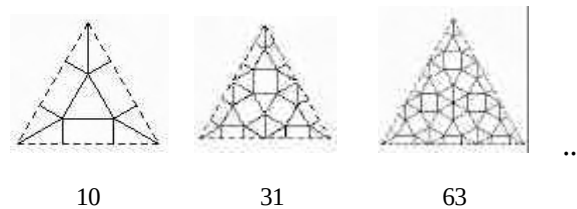


figura 187

Fazendo os cálculos:

$$31 - 10 = 21; \quad 63 - 31 = 32; \quad 106 - 63 = 43; \quad 160 - 106 = 54; \dots$$

percebe-se que os números (21, 32, 43, 54, ...) pertencem a uma PA de razão 11, com $a_0 = 21$.

Gostaríamos de esclarecer que a contagem das regiões de todas as bases acima apresentadas foi feita manualmente, após construção no software Cabri Géomètre II, sem a utilização de qualquer outro instrumento.

No próximo item desse capítulo mostraremos como fazer para saber quantas regiões a serem coloridas terá a n -ésima base transformada de uma pavimentação.

6.1 Fórmula do número de cores

Esta parte é dedicada ao estudo da relação que existe entre o número de regiões a serem coloridas e as bases transformadas. Buscamos uma fórmula que possa ajudar e facilitar o conhecimento da quantidade de regiões numa base transformada qualquer. Como nossas

suspeitas apontam para Progressões Aritméticas, mostraremos a teoria que nos dá suporte para as próximas afirmações.

6.1.1 Progressões Aritméticas (PA)

Se uma seqüência numérica $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots)$ é uma PA de primeiro grau, então seu termo geral é dado por $x_n = x_0 + n \cdot r$, onde r é a razão da PA e $0 \leq n \in \mathbf{IN}$. Deduziremos, a seguir, qual é a fórmula do termo geral de uma PA de segundo grau.

Suponhamos que a seqüência numérica $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)$ é uma PA de segundo grau, ou seja, as diferenças:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = a_1 - a_0 \\ b_1 = a_2 - a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} = a_n - a_{n-1} \\ b_n = a_{n+1} - a_n \\ \vdots \end{array} \right.$$

formam a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \dots)$ que é uma PA de primeiro grau, tal que $b_n = b_0 + n \cdot r$, onde r é a razão da PA e $r = b_1 - b_0 = a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0$.

Temos que

$$\begin{aligned} a_n &= \underbrace{a_n - a_{n-1}}_{b_{n-1}} + \underbrace{a_{n-1} - a_{n-2}}_{b_{n-2}} + a_{n-2} - \dots - a_3 + \underbrace{a_3 - a_2}_{b_2} + \underbrace{a_2 - a_1}_{b_1} + \underbrace{a_1 - a_0}_{b_0} + a_0 \\ &= b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} + \dots + b_3 + b_2 + b_1 + b_0 + a_0 \\ &= b_0 + (n-1) \cdot r + b_0 + (n-2) \cdot r + \dots + b_0 + 2 \cdot r + b_0 + r + b_0 + a_0 \\ &= n \cdot b_0 + [(n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1] \cdot r + a_0. \end{aligned}$$

Como $(n-1)+(n-2)+\dots+3+2+1=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$, obtemos

$$a_n = n \cdot b_0 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot r + a_0 = n \cdot b_0 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0)}{2} + a_0.$$

Portanto, a fórmula do termo geral de uma PA de segundo grau é

$$a_n = n \cdot (a_1 - a_0) + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0)}{2} + a_0.$$

Provemos, pelo Processo de Indução Finita, que esta fórmula é válida para todo $n \in \mathbf{IN}$.

Para $n = 0$ temos

$$0 \cdot (a_1 - a_0) + 0 \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0) + a_0 = a_0 \quad \text{OK}$$

Para $n = 1$ temos

$$(a_1 - a_0) + 0 \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0) + a_0 = a_1 - a_0 + a_0 = a_1 \quad \text{OK}$$

Para $n = 2$ temos

$$2 \cdot (a_1 - a_0) + (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0) + a_0 = 2 \cdot a_1 - 2 \cdot a_0 + a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0 + a_0 = a_2 \quad \text{OK}$$

Suponhamos que seja válida para n e mostremos que para $n+1$ teremos

$$a_{n+1} = (n+1) \cdot (a_1 - a_0) + \frac{n \cdot (n+1) \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0)}{2} + a_0.$$

Sabemos que $b_n = a_{n+1} - a_n$, então $a_{n+1} = a_n + b_n$. Logo

$$a_{n+1} = n \cdot (a_1 - a_0) + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0)}{2} + a_0 + b_n.$$

Como $b_n \in \text{PA}$ obtemos $b_n = b_0 + n \cdot r = a_1 - a_0 + n \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= n \cdot (a_1 - a_0) + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0)}{2} + a_0 + (a_1 - a_0) + n \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0) \\
 &= (n+1) \cdot (a_1 - a_0) + \left[\frac{n \cdot (n-1)}{2} + n \right] \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0) + a_0 \\
 &= (n+1) \cdot (a_1 - a_0) + \frac{[n \cdot (n-1) + 2 \cdot n]}{2} \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0) + a_0 \\
 &= (n+1) \cdot (a_1 - a_0) + \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right] \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0) + a_0.
 \end{aligned}$$

Portanto, para as pavimentações cujas “cores” em suas bases crescem conforme uma PA de segundo grau, é possível saber quantas regiões a serem coloridas terá a n -ésima base transformada através desta fórmula:

$$a_n = n \cdot (a_1 - a_0) + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0)}{2} + a_0,$$

onde a_0 é o número de cores da base geradora e a_1 e a_2 , da primeira e da segunda bases transformadas, respectivamente.

6.1.1.1 Aplicando a fórmula do termo geral (PA de segundo grau)

Tomando como exemplo a pavimentação de configuração (3,4,6,4), a partir da base para até 4 cores, temos os seguintes resultados:

Considerando n o número que representa a ordem da base ($n=0,1,2,3,\dots$, onde $n=0$ representa a base geradora) e a_n o número de cores na n -ésima base, obtivemos a tabela 8 abaixo.

n	a_n	$a_{n+1}-a_n$
0	4	-
1	9	5
2	16	7
3	25	9
4	36	11

tabela 8

Supondo que as diferenças $a_{n+1}-a_n$ sejam termos de uma PA de primeiro grau, e substituindo em $a_n = n \cdot (a_1 - a_0) + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0)}{2} + a_0$ os valores de a_0 , a_1 e a_2 , temos:

$$a_n = n^2 + 4n + 4,$$

como sendo a fórmula do número de cores na n -ésima base da pavimentação de configuração (3,4,6,4).

Verificando para $n=3$ e 4 , obtemos os valores 25 e 36, respectivamente. Utilizando o software Cabri Géomètre II para construção dessas duas bases, verificou-se serem verdadeiros os valores encontrados.

Ainda não é possível garantir a veracidade da fórmula: é preciso provar que as diferenças $a_{n+1}-a_n$ ($n = 0,1,2,\dots$) formam uma PA de primeiro grau.

Há ainda um outro processo de descoberta do número de cores existentes na n -ésima base transformada: utilizar interpolação através do polinômio de Gregory-Newton com diferenças descendentes, abordado no item seguinte.

6.1.2 Polinômio de Gregory-Newton

Em seu livro “Cálculo Numérico – Interpolação Polinomial e Tabelas Numéricas”, no capítulo V, Barbosa⁴⁴ define:

➤ Operador de diferença descendente ou progressiva: $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$, com

$$\Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

➤ Potência inteira ou diferenças sucessivas: $\Delta_h^n f(x) = \Delta_h [\Delta_h^{n-1} f(x)]$, onde $\Delta_h^1 = \Delta_h$.

➤ Potência fatorial k decrescente: $x^{(k)} = x(x-1)(x-2)\dots[x-(k-1)]$.

➤ Potência fatorial k decrescente generalizada de passo h :

$$x^{(k;h)} = x(x-h)(x-2h)\dots[x-(k-1)h]$$

para as quais se têm as extensões:

$$x^{(0;h)} = 1 \quad x^{(1;h)} = x \quad x^{(k;1)} = x^{(k)} \quad x^{(k;0)} = x^k,$$

onde $x^k = x.x.x.x\dots x$ com k fatores.

➤ Diferenças descendentes e potências decrescentes: $\Delta_h^r x^{(k;h)} = k^{(r)} h^r x^{(k-r;h)}$.

Com isso, deduz-se a Fórmula de Gregory-Newton com diferenças descendentes, como mostramos a seguir.

Sejam dados $(n+1)$ pares de valores $(x_r; y_r)$ com $r = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, e com $x_r \neq x_s$ para $r \neq s$, e ainda com $x_i = x_0 + ih$ (equidistantes)*.

Seja $P(x)$ o polinômio de interpolação de grau n (pelo menos n), que podemos supor escrito não com potências simples, mas com potências fatoriais decrescentes de passo h , e para $x + x_0$:

$$P(x + x_0) = \sum_{i=0}^n a_i x^{(i;h)}$$

⁴⁴ BARBOSA, R.M., *Cálculo Numérico - Interpolação Polinomial e Tabelas Numéricas*, Livraria Nobel SA, 1976, cap. V.

* Percebe-se que, ao colocar que $x_i = x_0 + ih$, temos que os x_i 's constituem uma Progressão Aritmética de primeiro grau com razão h .

onde os coeficientes a_i serão determinados.

Para $x = 0$, temos $P(0 + x_0) = P(x_0) = a_0 + 0 + 0 + \dots \Rightarrow P(x_0) = a_0$.

Aplicando Δ_h sucessivamente obteremos

$$a_i = \frac{\Delta_h^i P(x_0)}{i! h^i}.$$

Substituindo os valores a_i na expressão de $P(x + x_0)$, teremos:

$$P(x + x_0) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta_h^i P(x_0)}{i! h^i} x^{(i;h)}$$

que é a fórmula de interpolação polinomial de Gregory-Newton com diferenças descendentes.

Em particular, se $h=1$, podemos escrever:

$$P(x + x_0) = \sum_{i=0}^n \frac{x^{(i)}}{i!} \Delta^i P(x_0).$$

Obs.: h é a diferença entre os termos x_r e x_{r+1} , $r=0,1,2,3,\dots$

6.1.2.1 Aplicando a fórmula de Gregory-Newton

Para exemplificar, utilizaremos novamente os dados da pavimentação (3,4,6,4), a partir da base geradora para até 4 cores.

Considerando i o número que representa a ordem da base ($i=0,1,2,3,\dots$) e y o número de cores na i -ésima base, obtivemos a tabela seguinte.

i	x	y
0	1	4
1	2	9
2	3	16

3	4	25
---	---	----

tabela 9

Neste caso, foram dados 4 pares de valores (x_i, y_i) , $i=0,1,2,3$, e com $x_r \neq x_s$, para $r \neq s$. Temos, também, válido que $x_i = x_0 + ih$, ou seja, $x_i = 1 + i$, com $0 \leq i \in \mathbf{IN}$.

Assim, fazendo os devidos cálculos, chegamos à seguinte tabela:

i	x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
0	1	4	-	-	-
1	2	9	5	-	-
2	3	16	7	2	-
3	4	25	9	2	0

tabela 10

Logo, como $x_0=1$ e $h=1$, temos que:

$$P(x+1) = \sum_{i=0}^3 \frac{x^{(i)}}{i!} (\Delta^i P(1)) = \frac{x^{(0)}}{0!} (\Delta^0 P(1)) + \frac{x^{(1)}}{1!} (\Delta^1 P(1)) + \frac{x^{(2)}}{2!} (\Delta^2 P(1)) + \frac{x^{(3)}}{3!} (\Delta^3 P(1)).$$

Sendo $\Delta^3 P(1) = 0$, resulta que o polinômio interpolador será:

$$P(x+1) = \frac{1}{1} 4 + \frac{x}{1} 5 + \frac{x(x-1)}{2} 2$$

$$= 4 + 5x + x^2 - x$$

$$= x^2 + 4x + 4.$$

Portanto, o polinômio interpolador para a pavimentação (3,4,6,4) a partir da base geradora para até 4 cores, é dado pela fórmula:

$$P(x+1) = x^2 + 4x + 4.$$

Verificando para $x+1=4$ e 5, obtemos os valores 25 e 36, respectivamente, que nós já sabemos serem verdadeiros. Observe que as fórmulas obtidas nos dois casos (“*termo geral de PA de segundo grau*” e “*polinômio de Gregory-Newton*”) são idênticas.

Nas duas ocasiões, necessitamos conhecer pelo menos as duas primeiras bases transformadas, sendo que na primeira delas (Gilioli) é preciso que a diferença entre os números de cores de duas bases transformadas consecutivas e da geradora forme os primeiros termos de uma PA de primeiro grau. Mas, como garantir que essa sequência numérica é mesmo uma PA com estas condições?

Essa dúvida nos levou a explorar o que acontece nas bases transformadas das pavimentações, ou seja, era preciso entender como são acrescentadas novas regiões a serem coloridas à medida que passamos de uma base transformada para a seguinte.

Esse é o assunto do próximo item.

6.1.3 Acréscimo de regiões a serem coloridas

Como já dissemos, muitas pavimentações do plano podem ser visualizadas em caleidoscópios utilizando padrões geometricamente construídos, que chamamos bases substituíveis geradoras e/ou transformadas.

As regiões formadas no interior destas bases podem ser coloridas, fazendo com que a pavimentação visualizada se torne mais interessante do ponto de vista matemático e educacional. Quanto mais regiões, mais cores. As bases transformadas possuem um número cada vez maior destas regiões, como pudemos observar nos itens anteriores.

Um método que nos permite descobrir a quantidade de cores a ser utilizada numa base transformada, para algumas pavimentações, é aplicar a fórmula do termo geral de uma PA de segundo grau. Porém, é necessário ter a certeza de que as diferenças entre dois termos consecutivos da sequência de cores formam uma PA.

Para isso, procuramos contar as regiões a serem coloridas nas bases de maneira exata. Cada base pode ser considerada como um “pedaço” de uma região fundamental do plano, ou seja, um bloco gerador de uma tesselação regular do plano (ver Firby & Gardiner⁴⁵). Tal região é obtida quando o triângulo ABC é transformado usando as reflexões geradas em r e r_2 (figura 188), formando: ou um triângulo equilátero, ou um quadrado ou um hexágono regular.

⁴⁵ FIRBY, P.A., GARDINER, C.F., *Surface Topology*, second edition, Ellis Horwood, New York, 1991, p.154.

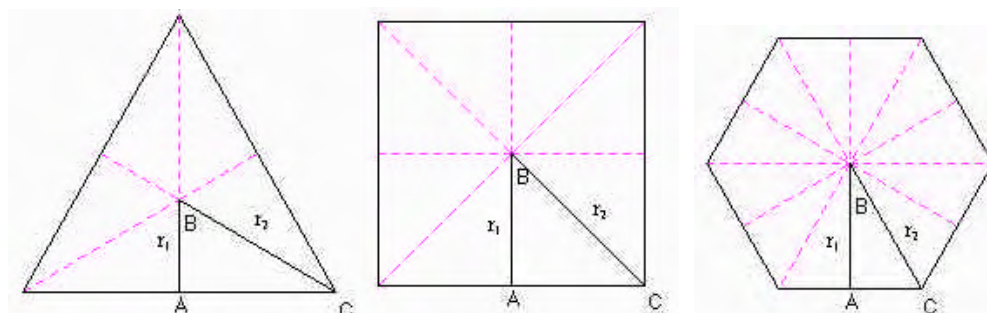


figura 188

O número de regiões fundamentais em cada base transformada aumenta de uma maneira facilmente dedutível, pois depende apenas de sabermos qual o formato das bases substituíveis (se triângulos, quadrados ou retângulos). Assim, sabendo o número de cores que estas regiões fundamentais possuem, conseguimos sanar nossa dúvida.

Mostraremos esse processo feito com as pavimentações (3,4,6,4), (3,6,3,6) e (4,8,8).

6.1.3.1 Número de regiões para (3,4,6,4)

Tomaremos a base geradora para até 4 cores (figura 189).

Assim, a figura 190 mostra as primeiras bases transformadas.

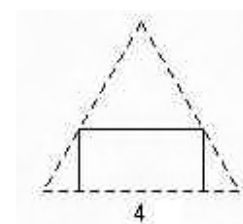


figura 189

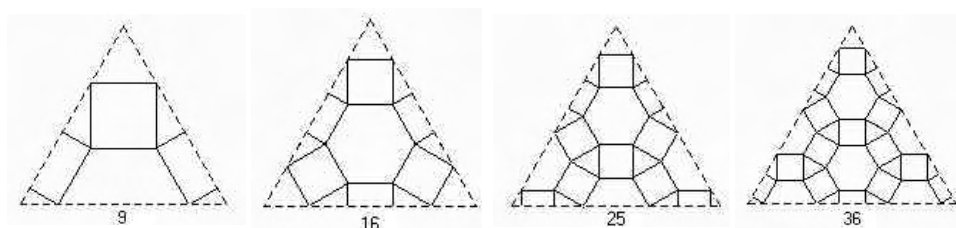


figura 190

Daremos o nome de passo à ordem da base, isto é:

- passo 0 – base geradora;
- passo 1 – primeira base transformada;
- passo 2 – segunda base transformada;
- passo n – n-ésima base transformada.

A região fundamental para essa pavimentação é um hexágono regular, formado por 6 réplicas da base geradora, comportando até 13 cores (figura 191). Porém, o que fizemos foi considerar apenas metade dessa região fundamental, ou seja, um trapézio formado por 3 réplicas da geradora, comportando até 8 cores (figura 192).

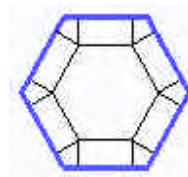


figura 191

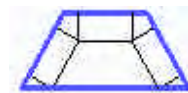


figura 192

Esse trapézio, que chamaremos de trapézio fixo, aparece sempre, desde a primeira base transformada (figura 193), porém não contamos como acréscimos todas as suas regiões.

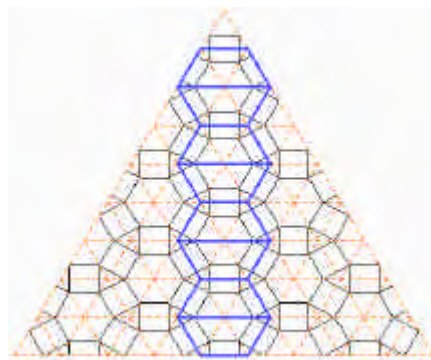


figura 193

A primeira base transformada é obtida acrescentando à geradora 3 réplicas suas, que é exatamente o trapézio descrito acima. Desconsideramos 3 regiões do trapézio, pois são partes que completarão os polígonos já considerados na base geradora.

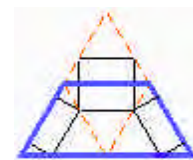


figura 194

Assim, somamos 5 às 4 regiões da geradora. Portanto, no passo 1 são acrescentadas 5 regiões às do passo 0, resultando $4+5=9$.

A segunda base transformada é obtida acrescentando 5 réplicas da geradora à primeira transformada, formando um novo trapézio. Ficam sobrando duas réplicas, uma de cada lado do segundo trapézio.

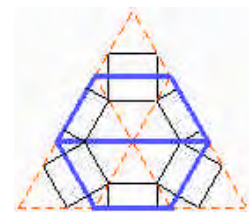


figura 195

Com isso, novamente somamos 5 cores (referentes ao novo trapézio) às 9 da primeira transformada (passo anterior). As réplicas que sobraram contribuem com 1 região cada, pois as outras 6 são partes que completam os polígonos já contados no trapézio.

Portanto, o passo 2 acrescenta $5+2$ regiões às do passo 1, resultando em $9+(5+2)=16$.

Para a terceira base transformada, ainda aparece um só trapézio (terceiro), mas agora sobram 4 réplicas. Estas contribuem com 4 cores (2 de cada). Logo, o passo 3 acrescenta $5+4$ regiões às do passo anterior, resultando $16+(5+4)=25$.

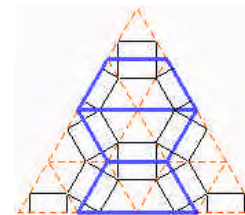


figura 196

Para a quarta transformada, assim como para a primeira, não sobram réplicas da geradora. Agora, aparecem mais dois trapézios, um de cada lado daquele já fixo. Como 5 das 8 regiões que cada um desses dois novos trapézios possuem já foram contadas (ou no passo anterior ou no trapézio fixo), temos um acréscimo de 6 cores (3 de cada). Portanto, o passo 4 soma $5+6$ cores às do passo 3, resultando $25+(5+6)=36$.

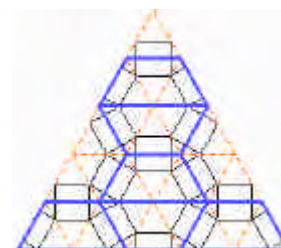


figura 197

Ao marcarmos todos os trapézios por vários passos (figura 198), verificamos que acontecem três casos em relação às réplicas da base geradora e o acréscimo de cores com que tais réplicas contribuem:

- ou não sobra nenhuma, somando 0;
- ou sobram duas (uma de cada lado), somando 1 para cada;
- ou sobram quatro (duas de cada lado), somando 2 para cada.

Pela própria formação de um triângulo equilátero, isto sempre vai se repetir. Então, o que fizemos foi separar n (número do passo) em três classes. Assim:

$$n = \begin{cases} 3k+1 \\ 3k+2 \\ 3k+3 \end{cases}, \text{ onde } k=0,1,2,\dots$$

A variável k é substituída ao mesmo tempo nas três classes. Por exemplo, quando $k=0$ temos:

$$3 \times 0 + 1 = 1,$$

$$3 \times 0 + 2 = 2,$$

$$3 \times 0 + 3 = 3,$$

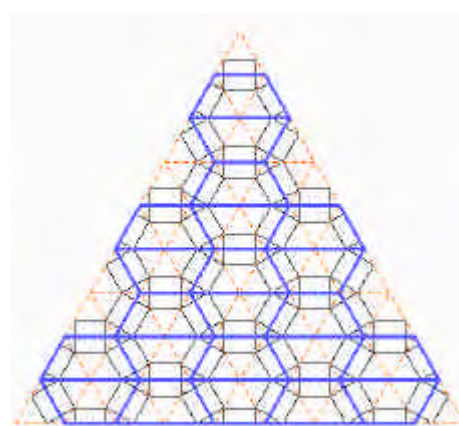


figura 198

resultando $n=1, 2$ e 3 , simultaneamente. Os sucessores do exemplo são obtidos fazendo $k=1$, resultando em $4, 5$ e 6 .

Observação:

$$n=3k+3 \rightarrow \begin{cases} n-1 = 3k+2 \\ n+1 = 3k+4 = 3(k+1) + 1 = 3k'+1 \end{cases}$$

$$n=3k+2 \rightarrow \begin{cases} n-1 = 3k+1 \\ n+1=3k+3 \end{cases}$$

$$n=3k+1 \rightarrow \begin{cases} n-1 = 3k = 3k - 3 + 3 = 3(k-1) + 3 = 3k''+3 \\ n+1 = 3k+2 \end{cases}$$

Assim, para cada passo n , tem-se:

n	Regiões acrescentadas às regiões do passo anterior
1	$5 + 0 + 0 \times 3$
2	$5 + 2 + 0 \times 3$
3	$5 + 4 + 0 \times 3$
4	$5 + 0 + 2 \times 3$
5	$5 + 2 + 2 \times 3$
6	$5 + 4 + 2 \times 3$
7	$5 + 0 + 4 \times 3$
8	$5 + 2 + 4 \times 3$

tabela 11

Onde:

5 regiões do trapézio fixo

$\left. \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \right\}$ regiões com as quais as réplicas contribuem

$\left. \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ \dots \end{matrix} \right\}$ quantidade de novos trapézios (nomearemos t)

3 regiões com as quais os novos trapézios acrescentados contribuem

Observe que a quantidade de novos trapézios acrescentados varia como um múltiplo de 2, de três em três n 's, isto é:

$t=0$, para $1 \leq n \leq 3$

$t=2$, para $4 \leq n \leq 6$

$t=4$, para $7 \leq n \leq 9 \dots$

Ou ainda, $\forall n = \begin{cases} 3k+1 \\ 3k+2 \\ 3k+3 \end{cases}$, temos que $t=2k$, onde $k \geq 0$.

Com isso, temos os seguintes resultados:

Se $n=$	então, acrescentam-se regiões às regiões do passo anterior
$3k+1$	$5 + 0 + 6k$
$3k+2$	$5 + 2 + 6k$
$3k+3$	$5 + 4 + 6k$

tabela 12

onde $k=0,1,2,\dots$

Observe que, para qualquer n , temos que a diferença entre dois acréscimos consecutivos é sempre igual a 2, isto é, os acréscimos formam uma PA de primeiro grau; mas ainda não temos sua expressão. Portanto, podemos utilizar a fórmula do termo geral de uma PA de segundo grau, de onde obtemos a expressão $a_n = n^2 + 4n + 4$, já vista anteriormente.

Vejamos as relações que se estabelecem.

k	n	acrécimo	número de regiões	
-	0	-	4	$(0+2)^2$
0	1	5	9	$(1+2)^2$
	2	7	16	$(2+2)^2$
	3	9	25	$(3+2)^2$
1	4	11	36	$(4+2)^2$
	5	13	49	$(5+2)^2$
	6	15	64	$(6+2)^2$
2	7	17	81	$(7+2)^2$
	8	19	100	$(8+2)^2$
	9	21	121	$(9+2)^2$
...	...	...	...	...

tabela 13

Como já suspeitávamos, a fórmula para descobrir o número de regiões é a mesma encontrada anteriormente, pois $(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$. O que precisávamos era demonstrar que os acréscimos, ou seja, (5,7,9,11,13,...), formavam uma sequência que é PA de primeiro grau que, como vimos acima, é verdadeiro.

Na sequência mostraremos, via Indução Finita, que para a relação de acréscimo estabelecida na tabela 12, é válido que o número de regiões na n -ésima transformada é dado pela fórmula $(n+2)^2$.

Seja a_n o número de regiões na n -ésima transformada. Provemos que $a_n = (n+2)^2$, $n \geq 0$.

Para $n=0 \rightarrow a_0 = (0+2)^2 = 2^2 = 4$ OK!

Para $n=1 \rightarrow a_1 = (1+2)^2 = 3^2 = 9$ OK!

Suponha válido para n qualquer, ou seja, $a_n = (n+2)^2$. Provemos que para $n+1$ teremos $a_{n+1} = ((n+1)+2)^2 = (n+3)^2$.

– Se $n = 3k+1$ então $a_n = (3k+3)^2$ e ainda temos $n+1 = 3k+2$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 5 + 2 + 6k = (3k+3)^2 + 7 + 6k = 9k^2 + 18k + 9 + 7 + 6k = \\ &= 9k^2 + 24k + 16 = (3k)^2 + 2 \times 4 \times 3k + (4)^2 = \\ &= (3k + 4)^2 = ((3k+2) + 2)^2 = ((n+1)+2)^2 \text{ OK!} \end{aligned}$$

– Se $n = 3k+2$ então $a_n = (3k+4)^2$ e ainda temos $n+1 = 3k+3$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 5 + 4 + 6k = (3k+4)^2 + 9 + 6k = 9k^2 + 24k + 16 + 9 + 6k = \\ &= 9k^2 + 30k + 25 = (3k)^2 + 2 \times 5 \times 3k + (5)^2 = \\ &= (3k + 5)^2 = ((3k+3) + 2)^2 = ((n+1)+2)^2 \text{ OK!} \end{aligned}$$

– Se $n = 3k+3$ então $a_n = ((3k+3) + 2)^2 = (3k+5)^2$ e ainda temos $n+1 = 3(k+1) + 1 = 3k'+1$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 5 + 0 + 6k' = (3k+5)^2 + 5 + 6k' = 9k^2 + 30k + 25 + 5 + 6k' = \\ &= 9k^2 + 30k + 30 + 6(k+1) = 9k^2 + 36k + 36 = \\ &= (3k)^2 + 2 \times 6 \times 3k + (6)^2 = \\ &= (3k + 6)^2 = ((3k+4) + 2)^2 = \\ &= ((3k+3+1) + 2)^2 = ((3(k+1)+1) + 2)^2 = \\ &= ((3k'+1) + 2)^2 = ((n+1)+2)^2 \text{ OK!} \end{aligned}$$

Portanto, é válido que o número de regiões a serem coloridas na n -ésima transformada é dado pela fórmula $a_n = (n+2)^2$, quando utilizamos as relações obtidas acima.

Com isso, conseguimos a expressão da PA de primeiro grau formada pelas diferenças entre os acréscimos, pois, sendo $a_n = (n+2)^2$ e $a_{n+1} = ((n+1)+2)^2$, temos que:

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n = ((n+1)+2)^2 - (n+2)^2 = \\ &= (n+3)^2 - (n+2)^2 = \\ &= n^2 + 6n + 9 - n^2 - 4n - 4 = \\ &= 2n + 5, n \geq 0. \end{aligned}$$

6.1.3.2 Número de regiões para (3,6,3,6)

Para esse caso, tomaremos a base geradora para até 3 cores (figura 199).

Assim, a figura 200 mostra as primeiras bases transformadas:

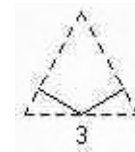


figura 199

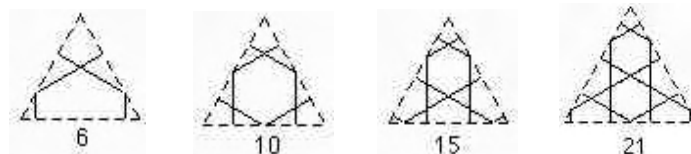


figura 200

Como as bases são triângulos equiláteros, muitas coisas funcionam da mesma maneira que para a pavimentação (3,4,6,4), ou seja, a região fundamental é um hexágono regular, porém comportando apenas 7 cores; a meia região fundamental também é um trapézio, mas comporta 5 cores; este trapézio aparece sempre, desde a primeira base transformada; e, por fim, três casos ocorrem em relação às réplicas da base geradora:

- ou não sobra nenhuma;
- ou sobram 2 (uma de cada lado);
- ou sobram 4 (duas de cada lado).

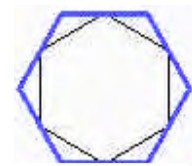


figura 201



figura 202

A figura abaixo mostra estes fatos.

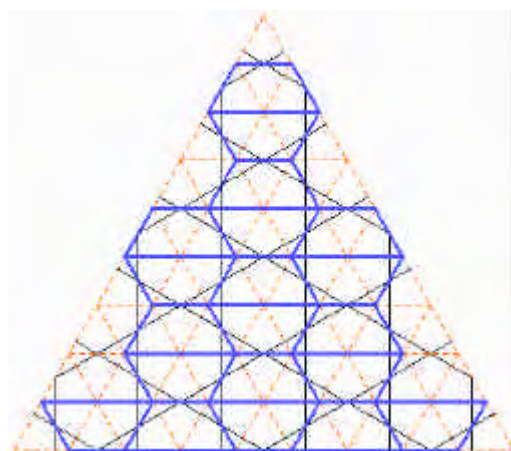


figura 203

Mas, diferentemente da pavimentação do item anterior, não será preciso considerar tal fato, nem separar n em classes. Observando algumas bases transformadas (figura 204), podemos verificar que os acréscimos acontecem da forma descrita na tabela 14.

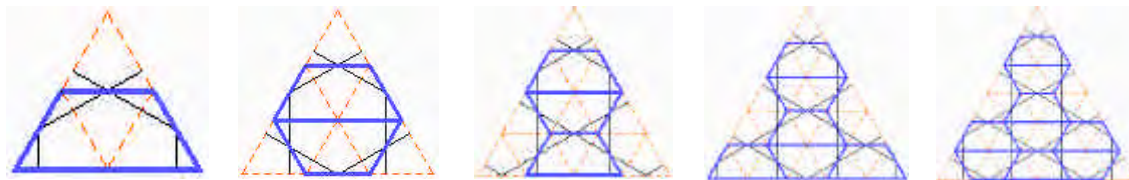


figura 204

n	Regiões acrescentadas às regiões do passo anterior
1	$3 + 0 + 0 = 3 + 0 = 3 + (n - 1)$
2	$2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 3 + (n - 1)$
3	$3 + 1 + 1 = 3 + 2 = 3 + (n - 1)$
4	$2 + 2 + 2 = 3 + 3 = 3 + (n - 1)$
5	$3 + 2 + 2 = 3 + 4 = 3 + (n - 1)$
6	$2 + 3 + 3 = 3 + 5 = 3 + (n - 1)$

tabela 14

Assim, $\forall n \geq 1$, são acrescentadas $3 + (n - 1)$ regiões, no n -ésimo passo, às regiões do passo anterior.

Com isso, é fácil perceber que a diferença entre dois acréscimos consecutivos é constante e igual a 1, e, portanto, a sequência desses acréscimos é uma PA de primeiro grau. Logo, podemos utilizar a fórmula do termo geral de uma PA de segundo grau, para encontrarmos o número de cores numa base transformada qualquer dessa pavimentação, ou seja:

$$\begin{aligned}
 a_n &= n(a_1 - a_0) + \frac{n(n-1)(a_2 - 2a_1 + a_0)}{2} + a_0 = n(6-3) + \frac{(n^2-n)(10-12+3)}{2} + 3 \\
 &= 3n + \frac{n^2-n}{2} + 3 = \frac{n^2+5n+6}{2} \\
 &= \frac{(n+2)(n+3)}{2}.
 \end{aligned}$$

Com isso, temos a fórmula do número de regiões a serem coloridas na n -ésima base transformada dessa pavimentação, já que verificamos ser verdadeiro o fato de que os acréscimos formam uma PA de primeiro grau. O que não sabemos é a expressão dessa PA. Para isso, mostraremos primeiro, via Indução Finita, que pela relação de acréscimos estabelecida na tabela acima a fórmula do número de cores coincide com a_n descrito, isto é, $\frac{(n+2)(n+3)}{2}$.

Sendo a_n o número de regiões a serem coloridas na n -ésima transformada, provemos que $a_n = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$, $n \geq 0$.

Para $n=0$, ou seja, a base geradora, temos veracidade, pois $a_0 = 3 = \frac{(0+2)(0+3)}{2}$.

Para $n=1$, $a_1 = \frac{(1+2)(1+3)}{2} = 6$ OK!

Suponha válido para k qualquer, ou seja, $a_k = \frac{(k+2)(k+3)}{2}$. Provemos que para $k+1$ teremos $a_{k+1} = \frac{((k+1)+2)((k+1)+3)}{2}$.

Para $n = k+1$, acrescentamos $3 + ((k+1) - 1)$ regiões às regiões do passo $n = k$, isto é,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 3 + ((k+1) - 1) = \frac{(k+2)(k+3)}{2} + 3 + k \\ &= \frac{(k+2)(k+3) + 6 + 2k}{2} = \frac{k^2 + 5k + 6 + 6 + 2k}{2} \\ &= \frac{k^2 + 7k + 12}{2} \end{aligned}$$

Sabemos que $k^2 + 7k + 12 = k^2 + 3k + 4k + 3 \cdot 4 = (k+3)(k+4)$.

$$\text{Portanto } a_{k+1} = \frac{(k+3)(k+4)}{2} = \frac{((k+1)+2)((k+1)+3)}{2}.$$

Logo, é válido que o número de regiões a serem coloridas na n -ésima transformada é dado pela fórmula $a_n = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$, quando utilizamos as relações obtidas acima.

Com isso, conseguimos a expressão da PA de primeiro grau formada pelas diferenças entre os acréscimos, pois, sendo $a_n = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$ e $a_{n+1} = \frac{((n+1)+2)((n+1)+3)}{2}$, temos que:

$$\begin{aligned} b_n = a_{n+1} - a_n &= \frac{((n+1)+2)((n+1)+3)}{2} - \frac{(n+2)(n+3)}{2} = \\ &= \frac{(n+3)((n+4)-(n+2))}{2} = \frac{2(n+3)}{2} = \\ &= 3 + n, n \geq 0. \end{aligned}$$

6.1.3.3 Número de regiões para (4,8,8)

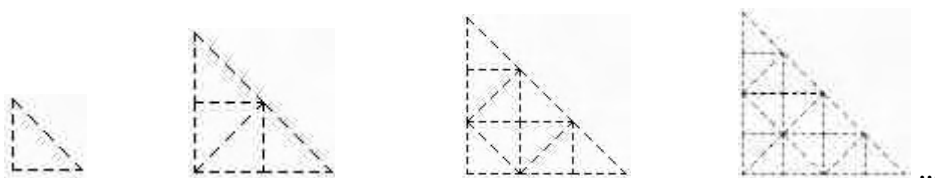
As bases para esta pavimentação são do tipo triangular isósceles retângulo e a base geradora possui duas regiões a serem coloridas (conforme pág.51).

base geradora



figura 205

Existem vários modos de se obter bases transformadas para pavimentações cuja base é do tipo triangular isósceles retângulo. Por exemplo, unindo réplicas da base geradora a partir de um de seus lados menores. São acrescentadas 3,5,7,9,11,13... réplicas.



base geradora

1ª. transformada

2ª. transformada

3ª. transformada

figura 206

O método que escolhemos foi unir réplicas a partir da hipotenusa do triângulo base. São acrescentadas 8,16,24,32,40... réplicas.

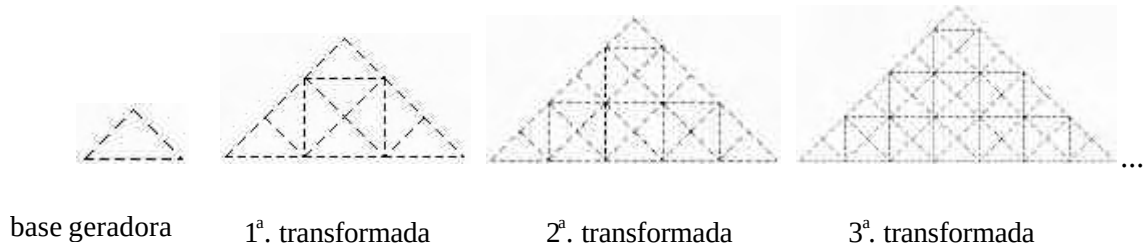


figura 207

Seguindo esse método, essas são as primeiras bases da pavimentação de configuração (4,8,8), com o respectivo número de cores:

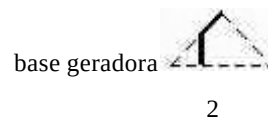


figura 208

bases transformadas

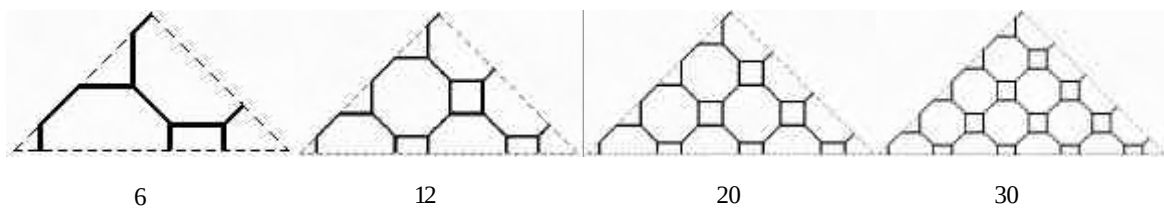


figura 209

A região fundamental para essa pavimentação tem a forma de um quadrado formado por 8 réplicas da base geradora, comportando até 5 cores (figura 210). Tomaremos metade dessa região fundamental, ou seja, um triângulo isósceles retângulo formado por 4 réplicas da base geradora, que comporta até 4 cores (figura 211). Este triângulo aparece sempre, desde a 1ª. base transformada, mas sempre serão consideradas 3 cores de acréscimo, pois uma de suas regiões sempre completa um polígono já considerado no passo anterior. Por essa razão, o chamaremos de triângulo fixo (figura 212).

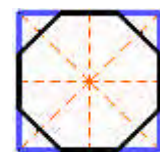


figura 210

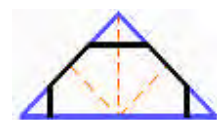


figura 211

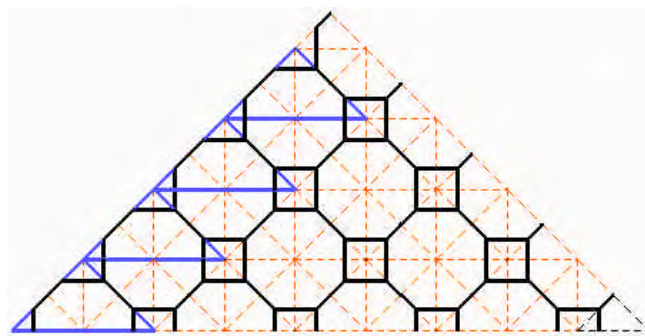


figura 212

Ao marcarmos todos os triângulos (meia região fundamental) por vários passos, verificamos que sempre há uma sobra de quatro réplicas da base geradora, mas apenas 1 região é considerada como acréscimo (figura 213).

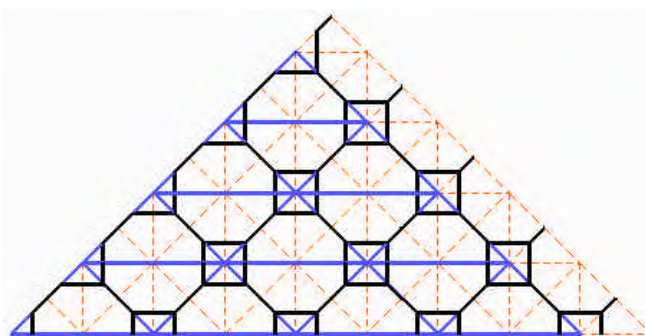


figura 213

Pela própria formação das bases transformadas, constatamos que, a partir da 2ª. base transformada, além do triângulo fixo, a meia região fundamental aparece mais algumas vezes, sendo que metade delas não contribui com nenhuma nova cor, conforme descrevemos na tabela 15.

n	0	1	2	3	4	5	6
triângulo fixo	0	1	1	1	1	1	1
meia região fundamental a mais	0	0	2	4	6	8	10
nº de regiões fundamentais que contribuem com nova cor	0	0	1	2	3	4	5

tabela 15

Em cada base transformada, o triângulo fixo contribui com 3 novas cores e as outras meias regiões fundamentais acrescentam 2 cores cada uma. Assim, observando que o número de regiões fundamentais que contribuem com nova cor na n -ésima base transformada é $n-1$, temos que o acréscimo de cores é dado pela fórmula: $3 + 2(n-1) + 1$, ou ainda, $2n + 2$, $\forall n \geq 1$.

Com isso, é fácil perceber que a diferença entre dois acréscimos consecutivos é constante igual a 2, e, portanto, a sequência destes acréscimos é uma PA de primeiro grau. Logo, podemos utilizar a fórmula do termo geral de uma PA de segundo grau para encontrarmos a expressão que nos diz quantas regiões poderão ser coloridas na n -ésima base transformada, ou seja:

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + n(a_1 - a_0) + \frac{n(n-1)(a_2 - 2a_1 + a_0)}{2} \\ &= 2 + n(6 - 2) + \frac{(n^2 - n)(12 - 12 + 2)}{2} \\ &= 2 + 4n + n^2 - n \\ &= n^2 + 3n + 2. \end{aligned}$$

Portanto, temos a fórmula do número de regiões a serem coloridas na n -ésima base transformada, ou seja, $a_n = n^2 + 3n + 2$, pois verificamos ser verdadeiro o fato de que os acréscimos formam uma PA de primeiro grau.

Mostraremos, via Indução Finita, que pela relação de acréscimos estabelecida acima ($2n+2$), a fórmula do número de cores coincide com a_n descrito, isto é, $n^2 + 3n + 2$.

Sendo a_n o número de regiões a serem coloridas na n -ésima transformada, provemos que $a_n = n^2 + 3n + 2$, $n \geq 0$.

Para $n=0$, ou seja, a base geradora, temos $a_0 = 2 = 0 + 3 \cdot 0 + 2$.

Para $n=1$, $a_1 = 1 + 3 \cdot 1 + 2 = 6$ OK!

Suponha válido para k qualquer, ou seja, $a_k = k^2 + 3k + 2$. Provemos que para $k + 1$ teremos $a_{k+1} = (k+1)^2 + 3(k+1) + 2$.

Para $n = k+1$, acrescentamos $2(k+1) + 2$ regiões às regiões do passo $n = k$, isto é,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 2(k+1) + 2 = k^2 + 3k + 2 + 2k + 4 = \\ &= k^2 + 5k + 6 = (k^2 + 2k + 1) + 3k + 5 = \\ &= (k+1)^2 + 3(k+1) + 2. \end{aligned}$$

Portanto, é válido que o número de regiões a serem coloridas na n -ésima transformada é dado pela fórmula $a_n = n^2 + 3n + 2$, quando utilizamos as relações obtidas acima.

Com isso, conseguimos a expressão da PA de primeiro grau formada pelas diferenças entre os acréscimos, pois, sendo $a_n = n^2 + 3n + 2$ e $a_{n+1} = (n+1)^2 + 3(n+1) + 2$, temos que:

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n = [(n+1)^2 + 3(n+1) + 2] - (n^2 + 3n + 2) = \\ &= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 2 - n^2 - 3n - 2 = \\ &= 2n + 4, n \geq 0. \end{aligned}$$

Capítulo III

1 Introdução

Apoiados no referencial teórico apresentado no capítulo anterior, elaboramos uma estratégia de ensino que utiliza os caleidoscópios, o software Cabri Géomètre II e jogos.

A fim de averiguar se esse material colabora para que as aulas de matemática se tornem interessantes e que haja participação dos alunos, trabalhamos com estudantes do Ensino Médio numa escola de Cordeirópolis – SP, no primeiro semestre de 2002.

Nesse capítulo apresentaremos algumas das atividades desenvolvidas e faremos um breve relato dos mais importantes fatos ocorridos em nossa experiência.

2 Ambiente

O estabelecimento de ensino onde se deu nossa experiência foi a E.E. Jamil Abrahão Saad, situada em Cordeirópolis – SP (figura 214). Ocupando uma área de $2911,47\text{m}^2$, essa escola possui 17 salas ambiente, um laboratório de informática com 10 computadores, um laboratório de ciências, uma biblioteca e duas quadras esportivas (uma delas coberta).



figura 214

Com 1160 alunos matriculados em 2002 e 45 professores, funciona nos três períodos, sendo o da manhã reservado às séries do Ensino Médio, o período da tarde às 5ª e 8ª (não há 6ª e 7ª séries) e o noturno à 8ª, Ensino Médio e tele-sala.

Os alunos participantes foram os da turma do 2º ano 1 do Ensino Médio matutino (39 jovens em idade adequada para a série). A escolha dessa turma não teve qualquer critério preestabelecido, com exceção de que foi possível conciliar o dia em que tinham aula de Matemática com nosso dia disponível.

A professora responsável pela aula de Matemática dessa turma já conhecia nosso trabalho, pois, em 2000, participamos de um grupo denominado “*Rede Interlink*”*, que se reunia semanalmente com as professoras de Matemática dessa escola.

Iniciamos nosso trabalho observando a turma com a qual iríamos trabalhar. Nossa presença tinha por finalidade tornar conhecido nosso objetivo e também conhecer os elementos desse grupo de alunos, estreitando as relações de amizade e confiança, bem como saber as estratégias a serem utilizadas no momento de nossa intervenção.

Após o período de observação, que durou aproximadamente um mês, cientes da potencialidade dos alunos e analisado seu comportamento quanto à participação e interesse nas aulas de matemática, sentimo-nos seguros em realizar nossa experiência.

O número de aulas de Matemática por semana era quatro, mas, num acordo feito com a professora, ficamos com apenas uma, às terças-feiras, das 10:00h às 10:50h. Mesmo tendo um dia acertado, ficamos livres para mudarmos se acontecesse algum imprevisto, sendo possível escolhermos entre segundas e quintas.

As atividades foram desenvolvidas através de trabalho em grupo. Devido ao número de alunos, formaram-se oito grupos, sendo que os alunos ficaram livres para escolher seus companheiros.

Na distribuição das fichas de atividade e do material utilizado (espelhos, caleidoscópios, compassos, transferidores, kits de polígonos, jogo de bases, etc.) contávamos sempre com a ajuda da professora que, sempre presente, nos ajudava na medida do possível.

A arrumação das carteiras, tanto para a formação de grupos quanto na disposição normal (em fileiras), era feita pelos alunos sempre de maneira organizada.

* Interlink é “uma rede constituída por professores, futuros professores de Matemática e professores da universidade que buscam organizar e desenvolver atividades para a sala de aula que utilizem os recursos da tecnologia informática”. Seu principal objetivo é “estimular a interação entre professores da escola pública, alunos do curso de licenciatura e professores da universidade para discutir e implementar o uso de tecnologia informática na educação matemática”. Um projeto coordenado pela Profª. Miriam Godoy Penteado. Para mais informações visite a página Interlink: <http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/interlk/interlink.htm>.

Enquanto os alunos realizavam as tarefas, nossa presença se alternava de grupo em grupo, fomentando perguntas a fim de avaliar o empenho de cada indivíduo do grupo.

Para que o trabalho, a manipulação e principalmente a visualização nos caleidoscópios se desse de maneira apropriada, foi permitido que os alunos ficassem em pé ao redor de suas carteiras e até mesmo andassem entre os grupos, trocando informações.



figura 215

3 Algumas atividades

Em nosso primeiro dia de intervenção apresentamos os caleidoscópios com o intuito de despertar o interesse dos alunos para as atividades que prosseguiriam.

Foi distribuído a cada grupo um kit contendo:

- ➔ uma folha de almaço;
- ➔ uma folha com um transferidor desenhado;
- ➔ uma folha com um triângulo equilátero pontilhado desenhado, cujos lados mediam 22 cm cada;
- ➔ dois canudinhos plásticos;
- ➔ um palito de madeira (tipo churrasco);
- ➔ um círculo de papel colorido;

- um prisma triangular de isopor;
- um caleidoscópio modificado e um individual;
- bases substituíveis de ornamentos e de pavimentações.

Após instruímos sobre a montagem do caleidoscópio modificado, os deixamos livres para que explorassem todo o material. Pedimos, apenas, que anotassem todos os experimentos na folha de almaço, para nossa análise posterior.

Durante o trabalho, fizemos algumas sugestões. Por exemplo, utilizando apenas dois espelhos e um objeto entre eles (o círculo de papel colorido), pedimos que variassem o ângulo de abertura (como auxílio, usaram o transferidor) e observassem o resultado. Muitos alunos, antes mesmo de realizarem a tarefa, disseram que quanto menor fosse o ângulo, mais imagens veríamos. Houve grupos que escreveram a quantidade de imagens de acordo com o ângulo.

As bases substituíveis que cada grupo recebeu não eram iguais. Mas não foi necessário pedir-lhes que trocassem uns com os outros a fim de que todos tivessem a oportunidade de visualizar diferentes mosaicos. Foi necessário numerá-las para facilitar o relato do visual obtido quando colocadas no caleidoscópio. É indispensável frisar que o nome “base” foi muito bem aceito pelos alunos, fato esse que se comprova ao ver seus relatórios.

O primeiro contato com o material distribuído deixou-os bastante animados e ansiosos para a aula seguinte, na qual trabalhamos com apenas um espelho.

Com um espelho

As atividades que desenvolvemos com os alunos utilizando um espelho exploravam conceitos como: a reflexão de pontos e figuras, eixo de simetria reflexional e figuras com estrutura simétrica reflexional.

Cada grupo recebia um espelho medindo 10cm por 15cm, aproximadamente, além da ficha tarefa com instruções sobre a atividade a ser desenvolvida.

Começamos trabalhando com reflexões de pontos e figuras com o objetivo de que os alunos descobrissem onde estava o eixo de simetria utilizando o espelho (atividade I).

Observando as figuras abaixo, como utilizar o espelho para obter as figuras 2 e 4 a partir das figuras 1 e 3, respectivamente?

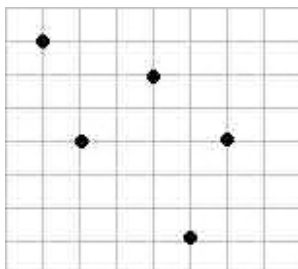


fig. 1

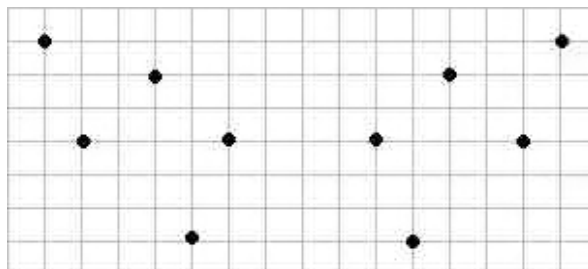


fig. 2

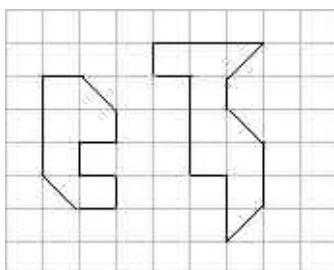


fig. 3

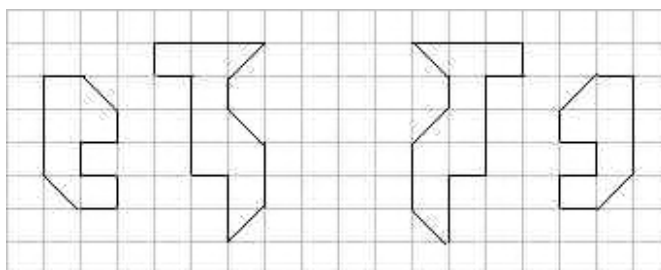


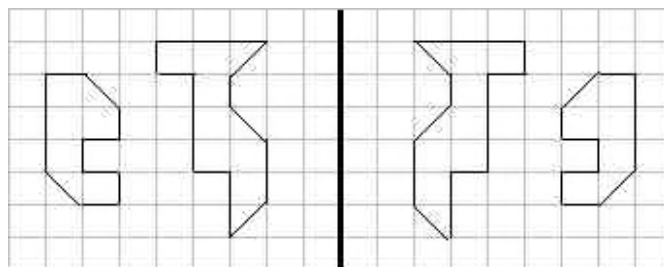
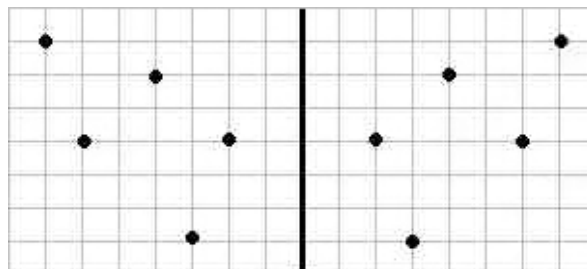
fig. 4

Atividade I

Todos os grupos fizeram praticamente os mesmos movimentos com o espelho, sendo que a primeira tentativa foi a de posicioná-lo à esquerda da fig. 1 ou da fig.3. Vimos também que alguns grupos colocavam o espelho acima, abaixo e até mesmo em posição transversal. Mas, após alguns experimentos, os grupos todos chegaram à solução correta. Vários deles escreveram e desenharam onde deveria ficar o espelho e inclusive de que lado a face espelhada apontaria.

Nessa ocasião, introduzimos o conceito de “*eixo de simetria reflexional*”, exposto na seguinte ficha:

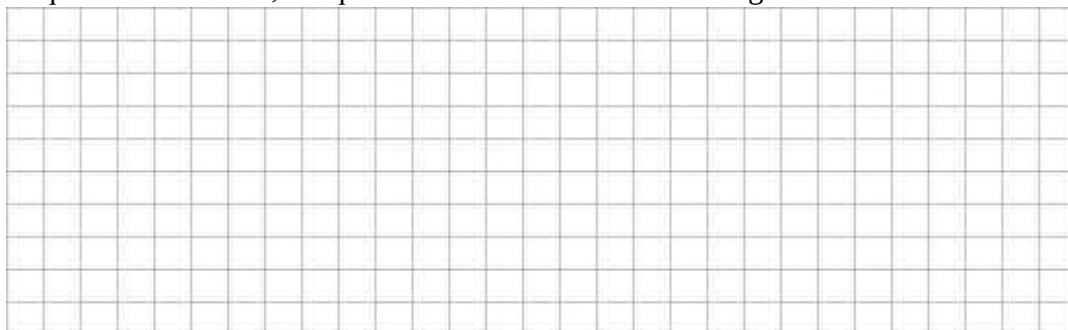
Para obtermos as figuras 2 e 4 a partir das figuras 1 e 3, respectivamente, bastava colocar o espelho sobre a linha apropriada. Vejamos:



Essa linha é chamada ***eixo de simetria reflexional***.

Ainda para assimilação do conceito de simetria reflexional, demos a seguinte atividade, que foi resolvida com muita criatividade:

No quadriculado abaixo, marque um eixo de simetria e desenhe figuras e suas reflexões.



Alguns grupos contaram os quadradinhos e, ao perceberem que o número de colunas era ímpar, optaram por duas soluções:

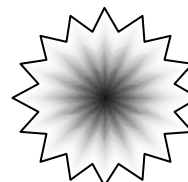
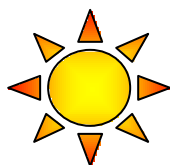
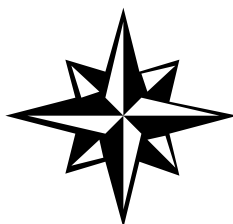
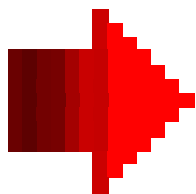
- dividir a coluna do meio
- desenhar mais uma coluna

Nesse momento notamos, por parte dos alunos, o entendimento de que o eixo de simetria eqüidista da figura original e de sua imagem.

Outros grupos fizeram figuras que possuíam estrutura simétrica reflexional e traçaram os eixos. Com isso, percebemos que os alunos descobriram que o eixo reflexional divide a figura ao meio.

Dada essa oportunidade, a atividade seguinte tratava exatamente de figuras com ou sem estrutura simétrica reflexional (atividade III).

Utilizando um espelho, descubra todos os eixos de simetria das figuras que os possuem.



Em virtude da coloração, duas das figuras apresentadas na atividade III não possuem eixo de simetria reflexional. Essa situação gerou vasta discussão entre os alunos, pois caso não fossem coloridas, seria possível traçar 1 e 4 eixos, respectivamente, conforme se vê nas figuras 216 e 217.



figura 216

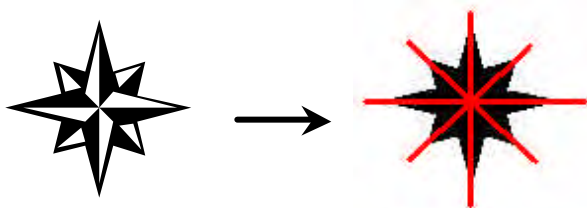


figura 217

Alguns grupos registraram ao lado das figuras quantos eixos elas possuíam. Por exemplo, nos casos das figuras 218, 219 e 220, os alunos escreveram que em todas as pontas era possível traçar um eixo de simetria.

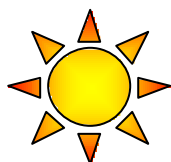


figura 218



figura 219

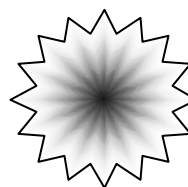
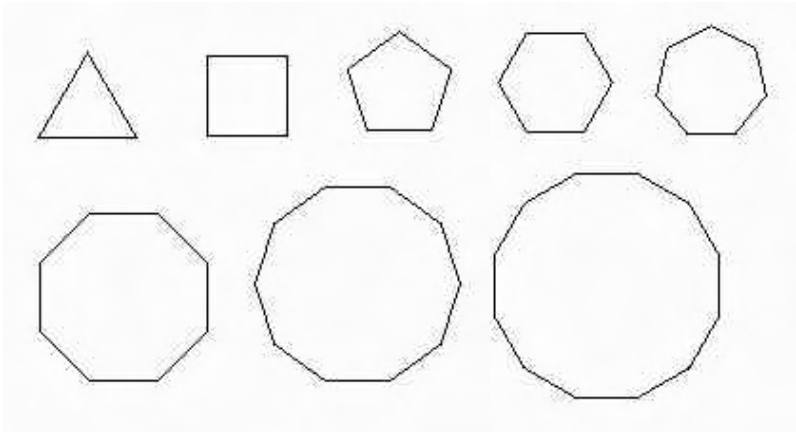


figura 220

Concluída a procura dos eixos de simetria reflexional de figuras quaisquer, os alunos deveriam cumprir a seguinte tarefa: encontrar todos os eixos de simetria dos polígonos regulares desenhados na ficha de trabalho, como segue abaixo na atividade IV.

Abaixo estão desenhados alguns polígonos regulares. Descubra todos os eixos de simetria de cada um e registre na tabela.



Número de lados								
Número de eixos								

Atividade IV

Os grupos começaram a perceber que quanto maior o número de lados, maior o número de eixos de simetria nesses polígonos. Assim, partiu dos alunos a sugestão de apenas contar os eixos e anotar na tabela, sem traçá-los, permitindo então um melhor aproveitamento do tempo de aula.

Nenhum grupo fez qualquer comentário sobre o fato do número de eixos de simetria coincidir com o número de lados do polígono regular.

Além das atividades já mencionadas, outras foram também desenvolvidas. Assim, com um espelho, pudemos trabalhar conceitos de: reflexão, eixo e ponto simétrico, figuras simétricas, congruência, orientação, figuras geométricas e explicar que “translação e rotação”

não são possíveis de serem obtidas apenas com um espelho. Depois disso, passamos a trabalhar com dois espelhos, os quais podem ser utilizados de duas maneiras: articulados ou não (paralelos).

Dois espelhos

Com o objetivo de desenvolver as noções de *orientação* e *translação*, trabalhamos com dois espelhos paralelos na seguinte atividade:

Coloque um espelho sobre cada uma das linhas, de modo que as faces espelhadas fiquem frente a frente. Observe que os espelhos ficaram paralelos. Entre eles, coloque o sólido dado. Descreva o resultado.



Atividade V

O sólido a que a atividade se referia era um prisma triangular feito de isopor (figura 221).



figura 221

Esse prisma, quando colocado entre os espelhos, gera dois tipos de imagens que vão se alternando infinitamente: uma com a mesma orientação do prisma e outra com orientação invertida em relação à original (figura 222).

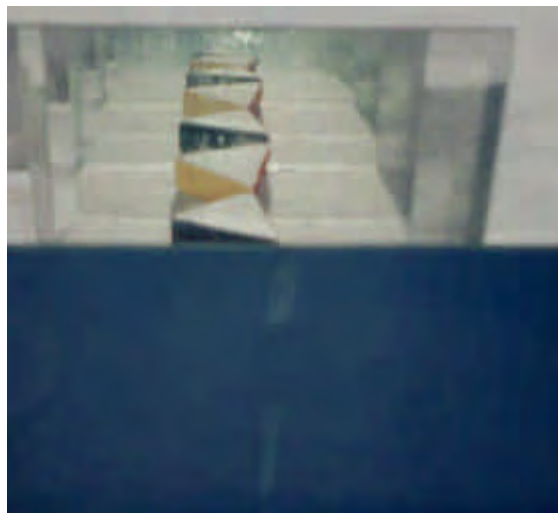


figura 222

Os grupos não tiveram dificuldade em perceber esse fato e logo começaram a se lembrar de acontecimentos anteriores em que estiveram envolvidos numa situação semelhante, sendo que eles mesmos eram os objetos entre os espelhos. Esses episódios recordados ocorreram, segundo eles, em parques de diversão, cabeleireiros e *shopping center*, onde espelhos se encontravam sobre paredes paralelas e seus reflexos se alternavam, intercalando frente e costas.

Um aluno nos disse que seria muito interessante colocar uma vela acesa entre os espelhos paralelos, principalmente se o ambiente estivesse sem nenhuma outra fonte de luz. Essa atividade não foi realizada, mas fica registrada a indicação.

Usando dois espelhos planos articulados, podemos reforçar algumas propriedades dos polígonos regulares.

Para a execução da atividade VI, foram distribuídos aos grupos faixas de papel colorido, canudinhos plásticos, palito de madeira e um caleidoscópio de dois espelhos, o qual chamamos de *diedro*.

Utilizando os canudinhos, o palito ou as faixas de papel, como visualizar no diedro de espelhos polígonos regulares como triângulo eqüilátero, quadrado, hexágono regular, entre outros?

Atividade VI

Os alunos deveriam registrar suas experiências para que pudéssemos analisar posteriormente.

Alguns comentários foram muito produtivos, como por exemplo, este:

Quanto menor o ângulo da abertura do espelho, maior o número de lados do polígono e quanto maior o ângulo, menor o número de lados.

A maioria dos grupos concluiu que, para visualizar um quadrado, bastava abrir o diedro (caleidoscópio) num ângulo de 90° e para o hexágono, 60° . Alguns grupos tiveram dificuldade na obtenção do triângulo eqüilátero via caleidoscópio, porém, esta foi superada quando se lembraram que maior abertura acarreta menor número de lados.



figura 223

Durante o trabalho, os grupos não faziam qualquer comentário sobre como colocar o canudinho ou a faixa de papel entre os espelhos, mas pudemos verificar que esse material era colocado corretamente, ou seja, aberto o diedro no ângulo adequado, a faixa era colocada de maneira a formar com os espelhos um triângulo isósceles.



figura 224

Entretanto, nem todas as respostas dadas pelos alunos eram corretas. Por exemplo, um dos grupos disse ter conseguido visualizar um pentágono quando montou o caleidoscópio sobre a folha com o transferidor desenhado e o abriu num ângulo de 70° . Mas esse erro aconteceu devido à proximidade do ângulo correto que é de 72° ; foi um pequeno descuido durante o posicionamento do caleidoscópio.

Essa atividade gerou muita descontração. Após registrarem suas respostas, os alunos começaram a “brincar” com os materiais. Variando o ângulo de abertura e colocando os canudinhos e as faixas em posições diversas, obtiveram imagens de polígonos estrelados e flores. Um grupo de meninas chamou a atenção de toda a sala, pela criatividade. Na interseção dos espelhos, por baixo, uma das alunas colocou um dedo e depois dois e, movendo-os, percebeu que suas imagens se mexiam alternadamente. Outra menina pôs o caleidoscópio ao redor do olho e direcionou a visão para a esquerda e em seguida para a direita. Com essa brincadeira, o grupo aprendeu a mudança que a reflexão provoca na orientação de um objeto, fazendo então uma ligação com a atividade V, anteriormente desenvolvida.

Concluindo, no trabalho com dois espelhos pudemos abordar os conceitos de orientação e translação e a obtenção de polígonos.

Kit de polígonos

Num estudo preparatório para o tema pavimentação é recomendável trabalhar-se com um *kit* de polígonos, o qual gera atividades interessantes. Murari (1999) sugere um *kit* de polígonos, o qual foi por nós utilizado.

Os grupos receberam um *kit* com polígonos regulares, com mesma medida de lados, recortados em papel cartão colorido dos dois lados com cores diferentes, permitindo, assim, a utilização das duas faces dos polígonos.

Nesse *kit* haviam triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos regulares, hexágonos regulares, octógonos regulares, decágonos regulares, dodecágonos regulares.

Como nossa intenção era que os alunos descobrissem, por meio de exploração, algumas pavimentações do plano por polígonos regulares, acreditamos ser conveniente primeiro fazerem uma investigação sobre os ângulos vértices dos polígonos distribuídos, conforme atividade VII.

Com a ajuda do transferidor, preencha a tabela abaixo utilizando os polígonos do *kit*.

Número de lados do polígono							
Medida do ângulo vértice							
Nome do polígono							

Atividade VII

A Geometria Euclidiana plana, com seus postulados e teoremas, nos garante que o ângulo vértice i de um polígono regular de n lados é determinado pela expressão

$$i = \frac{(n-2)180^\circ}{n}.$$

Entretanto, no universo lápis e papel ocorrem imprecisões que muitas vezes nos levam a falsos resultados.

Os polígonos utilizados nessa atividade foram recortados em papel cartão, porém, mesmo tomando todo cuidado, as imperfeições são inevitáveis. Da mesma maneira, instrumentos de medida, como o transferidor utilizado pelos alunos, apresentam suas falhas. Por essa razão, na execução dessa atividade surgiram algumas respostas erradas, como por exemplo, o ângulo vértice do decágono com medida 145° , quando na verdade vale 144° ; e do pentágono, medindo 110° , sendo o real valor 108° .

Tendo completado essa tarefa, os alunos foram desafiados com a seguinte atividade:

Sabendo já a medida dos ângulos internos dos polígonos regulares, utilizando os polígonos do *kit*, descubra quais podem ser agrupados em torno de um ponto, sem sobreposição ou lacunas.

Dica: Tente agrupar primeiro um só tipo de polígono. Depois combine polígonos variados.

Pergunta: É possível que os arranjos encontrados sejam estendidos pelo plano? Lembre-se que os polígonos devem estar dispostos na mesma ordem.

Atividade VIII

Devido ao conhecimento já adquirido pelos alunos antes de nosso trabalho com eles, a reposta imediata ao problema foi que a soma dos ângulos vértices dos polígonos envolvidos num arranjo deveria ser 360° , para que não ocorressem vazios ou sobreposição.

Então, a partir desse fato, os orientamos para que tentassem unir polígonos de um só tipo, como por exemplo, os triângulos equiláteros.

As experiências dos alunos os levaram a responder corretamente que somente os triângulos equiláteros, os quadrados e os hexágonos regulares poderiam ser agrupados ao redor de um ponto quando utilizamos apenas um tipo de polígono para esse fim.

Prosseguindo a atividade, os grupos deveriam variar os polígonos com o mesmo objetivo, isto é, agrupar polígonos diferentes ao redor de um ponto. As respostas foram as mais diversas, como, por exemplo, as seguintes configurações: (3,3,4,3,4), (3,4,6,4), (3,6,3,6), (3,3,3,4,4), (3,12,12), (4,8,8), (4,6,12), (3,3,4,12). Entretanto, acreditando apenas no material (sem considerar as medidas dos ângulos internos), determinados grupos cometeram alguns erros, afirmando ser possível as seguintes configurações: (3,4,5,5), (3,3,4,10), (5,6,8).

A ficha de trabalho trazia ainda mais uma pergunta, ou seja, os alunos deveriam descobrir quais dos arranjos encontrados poderiam ser estendidos por todo o plano. Pelo tempo escasso, nem todos os arranjos foram discutidos pelos grupos, mas conseguiram verificar que, por exemplo, se estendem pelo plano as configurações: $(3,3,3,3,3,3)$, $(4,4,4,4)$, $(6,6,6)$, $(3,4,6,4)$, $(4,6,12)$, $(4,8,8)$, $(3,6,3,6)$.

Um grupo que estava muito envolvido com a atividade construiu um arranjo de configuração $(3,3,6,6;3,3,4,3,4;3,4,4,6;4,6,12)$, conforme figura 225.

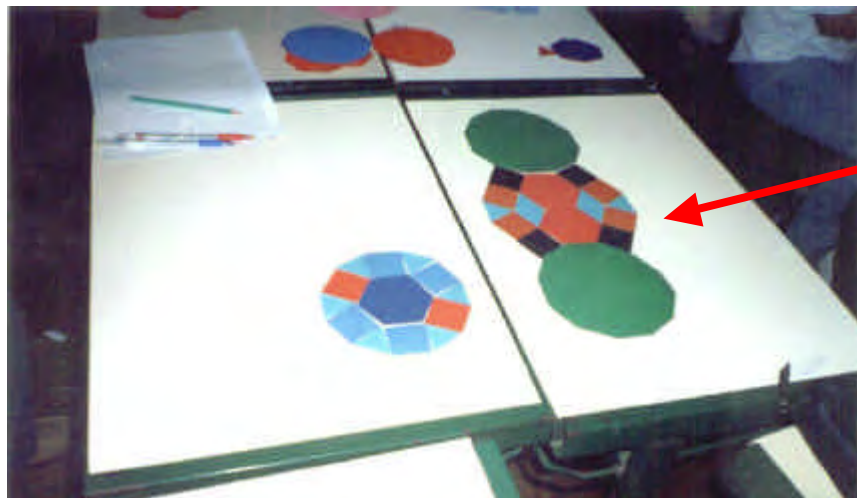


figura 225

Apesar do pouco tempo, pareceu-nos compreendida a idéia de pavimentação do plano por polígonos regulares e o conceito de ângulos internos de polígonos. Assim, passamos para as atividades que envolviam três espelhos.

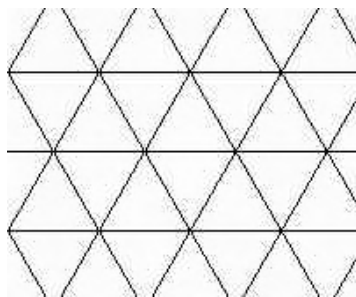
Três espelhos

Como pretendíamos trabalhar com pavimentação do plano via caleidoscópios, a atividade IX foi elaborada com o objetivo de familiarizar os alunos com descoberta e construção de bases substituíveis.

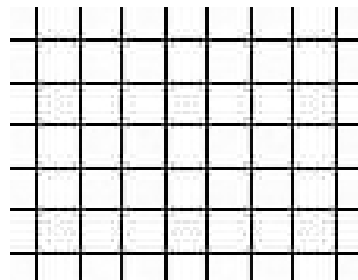
Para a atividade IX, foram distribuídos:

- um caleidoscópio modificado;
- canudinhos plásticos, faixas de papel;
- uma folha com um triângulo equilátero pontilhado desenhado, cujos lados mediam 22 cm cada;
- uma folha com um triângulo isósceles retângulo pontilhado desenhado, cujos lados mediam 22 cm cada cateto e 31,1 cm (aproximadamente) a hipotenusa;
- uma ficha de trabalho, como a que se segue:

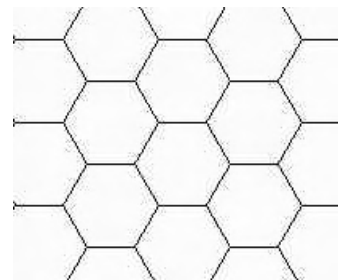
Utilizando canudinhos ou faixas de papel, tente visualizar essas pavimentações no caleidoscópio de três espelhos.



1



2



3

Atividade IX

Após disporem o caleidoscópio sobre o triângulo equilátero pontilhado, muitos grupos nos disseram que a pavimentação 1 estava pronta. Nesse momento, tivemos de explicar que, apesar da formação e visualização serem realmente apropriadas, o que se via eram os “*espelhos virtuais*” e não uma pavimentação. Com isso, a primeira reação foi colocar um canudinho junto a um dos espelhos, conseguindo então visualizar a pavimentação 3. Imediatamente, tomaram mais dois canudinhos e, dispondo-os junto aos espelhos restantes, visualizaram assim a pavimentação 1.

Uma outra resposta muito ocorrida para obtenção da pavimentação (3,3,3,3,3) foi dispor um canudinho como mostra a figura 226.

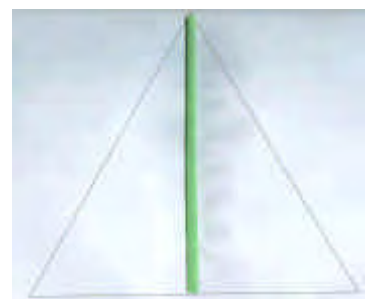


figura 226

Nessa situação, para dizer onde o canudinho estava, os alunos usaram muito o termo “no meio”. Assim, aproveitamos o fato da intuição levá-los a utilizar tal termo e dissemos que não estavam errados ao dizerem “no meio”, já que esse canudinho estava na posição da bissetriz de um dos ângulos do triângulo equilátero e também passava pelo ponto médio do lado oposto, dividindo o triângulo em dois outros triângulos congruentes.

Depois de montarem o caleidoscópio sobre o triângulo isósceles retângulo, a fim de visualizarem a pavimentação por quadrados, as respostas dos alunos foram as mesmas em relação às pavimentações anteriores: ou colocaram o canudinho junto a um dos espelhos, ou, como eles disseram, “no meio” (figura 227).



figura 227

Como essa atividade permitia diversas colocações das faixas ou os palitos de madeira, fomos orientando-os às denominações corretas dessas posições (ponto médio, bissetriz, etc.) e fazendo-os observar o comportamento dos segmentos (fornecidos pelo material utilizado) nas reflexões, formando polígonos diversos.

Concluído esse trabalho exploratório, a atividade seguinte deu início ao estudo das construções geométricas das bases substituíveis utilizadas para visualização de pavimentações em caleidoscópios.

Construção das bases

Para a execução da atividade X os grupos receberam:

- ➔ régua e compasso;
- ➔ uma folha com um triângulo equilátero pontilhado desenhado, cujos lados mediam 22 cm cada;
- ➔ uma folha com um triângulo isósceles retângulo pontilhado desenhado, cujos lados mediam 22 cm cada cateto e 31,1 cm (aproximadamente) a hipotenusa;
- ➔ e uma ficha como a seguinte

Quando esses canudinhos ou faixas de papel são colocados entre os espelhos de forma que se consiga visualizar a pavimentação desejada, estamos construindo uma **base**.

Como você construiria, geometricamente, as bases para visualizar as pavimentações da atividade anterior? (utilizar as folhas com triângulos pontilhados).

Atividade X

Como essa atividade foi iniciada após o término da atividade IX, apenas dois grupos se interessaram em resolvê-la. Como o tempo restante era pouco e na aula subsequente os alunos teriam uma avaliação, os demais grupos preferiram estudar.

Um grupo formado apenas por meninos nos chamou a atenção. A princípio, eles tiveram uma certa dificuldade de entender o que deveria ser feito nessa atividade. Porém, durante nossa conversa, fomos questionando-os, começando por fazê-los lembrar do lugar onde foi posto o canudinho ou a faixa de papel para a visualização da pavimentação por triângulos, na atividade IX. Então, como nos disseram ter colocado o material “no meio”, logo se recordaram que o canudinho sai de um vértice e toca no ponto médio do lado oposto. Portanto, bastava ligar esses dois pontos e teriam a base geradora da pavimentação de configuração (3,3,3,3,3,3).

Novamente, lembremo-lhes que o segmento formado nada mais era que a bissetriz. Um dos alunos desse grupo disse que já tinha ouvido falar da bissetriz de um ângulo e que sua propriedade era dividir o ângulo ao meio.

Devido ao pouco interesse demonstrado ao final da atividade anterior e a fim de que os alunos não se dispersassem durante nossa intervenção, optamos por abordar o tema “construção de bases” a partir de jogos, do tipo quebra-cabeça, elaborados por nós e explicados a seguir:

Jogo

As peças de cada jogo são bases geradoras e/ou transformadas (triangulares, quadradas ou retangulares) da pavimentação correspondente.

Os jogos foram feitos utilizando o software Cabri Géomètre II para a construção e coloração das bases geradoras e transformadas.

Em seguida, essas bases foram transportadas para o Microsoft Word e impressas em papel sulfite 60. Depois de recortadas, as peças foram coladas da seguinte forma: base geradora numa face, base transformada na outra. Finalizando, foram todas plastificadas com papel do tipo Contact.

Para que possamos explicar melhor o funcionamento do jogo, tomaremos como exemplo a pavimentação de configuração (4,4,4,4).

A base geradora dessa pavimentação possui duas regiões, que (para o jogo) foram coloridas de vermelho e verde escuro. A base transformada que tomamos foi a que possui três regiões, no caso coloridas com rosa, verde claro e preto. Como o jogo se baseia em simetria reflexional, é necessário que se tenham duas peças diferentes, ou melhor, enantiomorfos, conforme figuras 228 e 229 para a base geradora e figuras 230 e 231 para a transformada.

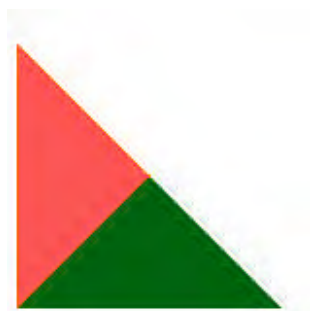


figura 228



figura 229



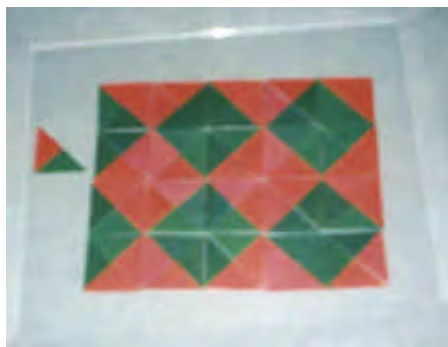
figura 230



figura 231

As peças foram feitas colando a figura 228 no verso da 230, e a figura 229 no verso da 231.

O jogo pode ser utilizado para montar uma porção da pavimentação a partir da base geradora ou da transformada (figura 232).



porção através da base geradora (frente)



porção através da base transformada (verso)

figura 232

Observe que as peças são encaixadas levando-se em consideração a simetria reflexional.

Esse jogo também permite trabalhar na descoberta de bases transformadas, ou seja, a partir da base geradora, os alunos podem “montar” as bases transformadas (figura 233).

Assim, enquanto jogam, os alunos verificam que as pavimentações podem ser obtidas através de diversas bases, estudam a formação das transformadas, podem contar as regiões, além de que, pela regra, estão trabalhando com simetria reflexional.



figura 233

A primeira atividade usando o jogo foi para a montagem de uma porção da pavimentação de configuração $(3,3,3,3,3,3)$. Nesse jogo, as peças são triangulares, numa das faces está a base geradora para duas cores e na outra a base transformada para até seis cores (figura 234).



figura 234

Para essa atividade distribuímos as peças do jogo, um pedaço de vidro sobre o qual as peças deveriam ser montadas e a ficha XI abaixo.

Com esse *kit* que você recebeu, monte a pavimentação corretamente sobre o vidro. (observe que cada um dos lados das peças é diferente).

Atividade XI

Os grupos deveriam montar as peças sobre o vidro justamente para que, quando o levantassem e olhassem por baixo o que se formou, percebessem a possibilidade de representar a mesma pavimentação a partir de bases diferentes (figura 235).



figura 235

Logo que realizaram a tarefa de construir a pavimentação usando a face da base para duas cores e ergueram o vidro, visualizando a pavimentação a partir da outra base, os alunos viraram as peças e remontaram o quebra-cabeça, agora utilizando a outra face, cuja base era a transformada para até seis cores.

O comentário geral foi que, com a base transformada a pavimentação ficava mais colorida, apesar de serem menores os triângulos que a formavam.

Ficaram muito curiosos sobre a confecção das peças e se surpreenderam quando lhes contamos como se deu tal fato. A princípio, pela qualidade do material, pensaram que os jogos haviam sido adquiridos no comércio.

Após as montagens, voltamos a propor a construção das bases. Os grupos poderiam escolher entre construir a base geradora ou a base transformada. A grande maioria construiu a

base transformada. Poucos grupos se interessaram em construir a partir do traçado das bissetrizes dos ângulos do triângulo com compasso e régua não graduada. A maior parte dos alunos fez do modo que disseram ser mais rápido: ligar o ponto médio de cada lado com o vértice oposto. Como os lados mediam 22 cm cada, o ponto médio foi facilmente encontrado utilizando uma régua graduada.

Para a coloração, levamos quatro caixas de 12 lápis de cor, evitando assim imprevistos. O mais interessante é que muitos alunos pintaram suas bases com as mesmas cores das peças do jogo.



figura 236

Após a coloração, os grupos puderam, através do caleidoscópio, verificar o resultado de sua construção.



figura 237

Prosseguimos, agora distribuindo aos alunos o jogo para a pavimentação de configuração (4,4,4,4).

A atividade XII era semelhante: montar sobre o vidro uma porção da pavimentação utilizando a face com a base geradora e em seguida visualizar a possibilidade de obtê-la através de outra base (a transformada), porém mais colorida.



figura 238



figura 239

Praticamente todos os grupos tiveram uma certa dificuldade de montar o quebra-cabeça para essa pavimentação. Realmente é um pouco confuso quando não se atenta para a regra: considerar os lados das peças como linhas de simetria reflexional e encaixar a peça simétrica correspondente. Alertados sobre essa regra, o obstáculo foi vencido.

Alguns grupos, ao invés de levantarem o vidro onde haviam montado a porção da pavimentação, colocaram um espelho sob o vidro de tal forma que puderam visualizar o resultado, porém refletido no espelho.

Assim, ao terminarem as montagens, a atividade seguinte consistia em construir uma das bases do jogo. Novamente, alguns grupos quiseram utilizar o ponto médio para construir as bases, mas, como agora um dos lados do triângulo base media $22\sqrt{2}$ cm, não foi possível encontrar com exatidão seu ponto médio utilizando uma régua graduada. Por esse motivo, todos os grupos tiveram de usar compasso e o lado não graduado da régua. Foi necessária uma

exposição sobre a construção de uma bissetriz com esses materiais. Mas, como os grupos não tinham o mesmo ritmo, tivemos de explicar grupo a grupo.

Vale a pena ressaltar que, apesar de parecer cansativo esclarecer dúvidas para cada grupo, fazia parte de nosso trabalho encaminhá-los em seus desafios e acompanhá-los em suas descobertas. Por isso, não poderíamos ter ares de indiferença para com eles, principalmente porque acreditamos que quanto menor a distância entre educador e educando, melhor o aproveitamento de ambos.

Assim sendo, após a construção, a maioria dos grupos também coloriu sua base com as mesmas cores das peças do jogo e, em seguida, visualizaram o resultado no caleidoscópio.

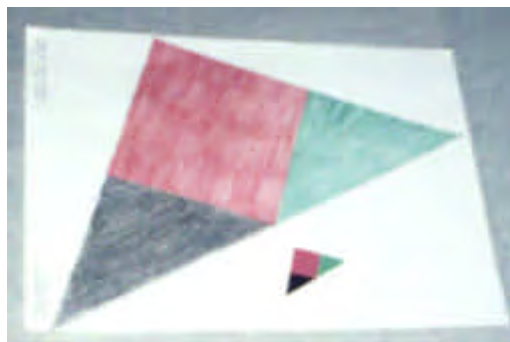


figura 240

Bases transformadas

Mais um jogo para a pavimentação $(3,3,3,3,3,3)$ foi distribuído: numa das faces das peças estava a base geradora com duas regiões e na outra face a base transformada de quatro regiões que, no caso, estavam coloridas de marrom, verde, rosa e azul.

Os alunos montaram a porção da pavimentação utilizando a face com a base transformada sem muita dificuldade. Comentaram que essa base transformada também faz com que os triângulos que formam a pavimentação sejam mais coloridos e, ao contrário da outra peça (base transformada para até seis cores), os triângulos não ficam tão pequenos.



figura 241

Com isso, foi-lhes entregue a ficha da atividade seguinte que iniciava o trabalho com bases transformadas.

Com o jogo você deve ter percebido que qualquer uma das bases abaixo monta a pavimentação (3,3,3,3,3,3).



A primeira delas, como é a mais simples, é chamada de base geradora. As outras duas recebem o nome de bases transformadas, já que são feitas a partir da geradora.

Utilize o jogo para construir bases transformadas e preencha a tabela:

base transformada	1ª	2ª	3ª
nº de bases geradoras			
nº de regiões			

Atividade XIII

Num primeiro momento os alunos tiveram uma certa dificuldade sobre como deveriam ser dispostas as peças para montar cada base transformada. Nosso apoio foi lembrá-los da regra de montagem, ou seja, considerar os lados das peças como se fossem espelhos e então encaixar a peça simétrica. Além disso, os alertamos para o seguinte fato: como, para esta pavimentação, as bases têm a forma de um triângulo equilátero, para se obter uma base transformada as peças devem ser unidas a fim de que o resultado final tenha também o formato de um triângulo equilátero.



figura 242

Assim, a tabela foi corretamente preenchida por todos os grupos.

Cabri Géomètre II

Nosso próximo passo foi levar os alunos ao laboratório de informática. Devido à quantidade de alunos, foi necessário dividi-los em duas turmas. Enquanto uma turma trabalhava com o software Cabri Géomètre II, a outra ficava na sala de aula, onde a professora responsável pela aula de matemática continuava a desenvolver seu programa. Após 25 minutos (metade da aula) era feita a troca.

Cada computador era ocupado por uma dupla de alunos, perfazendo um total de 20 alunos numa turma e 19 na outra. A princípio tivemos uma certa dificuldade para atender a todos os chamados. A insegurança dos alunos em manusear o computador era muito grande.

Iniciamos fazendo, junto com os alunos, uma breve leitura das ferramentas de que o software dispõe.

Em seguida, os alunos realizaram algumas atividades exploratórias a fim de que se familiarizassem com o Cabri Géomètre II. Essas atividades não abordavam todos os recursos que o software oferece, pois nossa intenção era de que os alunos conseguissem manipular as ferramentas necessárias à construção de bases geradoras e transformadas de algumas pavimentações. Antes de ser feita a troca de turma, as atividades eram gravadas em disquete, facilitando assim a continuação e o término das tarefas.

Vejamos algumas:

➤ **reta perpendicular**

- traçar uma reta e nomeá-la de r ;
- marcar um ponto P não pertencente à reta r ;
- traçar a reta perpendicular a r que passa pelo ponto P ;
- marcar o ponto R de interseção;
- marcar na reta r dois pontos A e B tais que R esteja entre eles;
- medir os ângulos $\widehat{ARP}$ e $\widehat{BRP}$;
- qual a propriedade característica?

➤ **reta mediatriz**

- traçar um segmento AB qualquer;
- medir AB;
- traçar a reta mediatriz de AB e nomeá-la de m ;
- nomear o ponto de interseção de M ;
- marcar um ponto P qualquer em m ;
- medir AM, BM, AP e BP;
- quais as propriedades características?
- as propriedades prevalecem quando se movimentam os pontos A,B e P?

Atividade XV

➤ **bissetriz**

- marcar três pontos A, O e C;
- traçar as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$;
- medir o ângulo $\widehat{AOC}$;
- traçar a bissetriz do ângulo $\widehat{AOC}$;
- marcar um ponto B qualquer na bissetriz;
- medir os ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{BOC}$;
- qual a propriedade característica?
- a propriedade prevalece quando se movimentam os pontos A e C?

Atividade XVI

➤ **simetria reflexional**

- traçar uma reta s dividindo a tela em duas partes;
- de um mesmo lado da reta:
 - ♦ construir dois polígonos quaisquer;
 - ♦ marcar cinco pontos: A, B, C, D e E;
- colorir um dos polígonos e tracejar o outro;
- traçar os segmentos AC e AE;
- através da ferramenta simetria axial, obter os simétricos dos polígonos, dos segmentos AC e AE e dos pontos B e D;
- medir a distância entre o ponto B e seu simétrico e entre o ponto B e a reta s ;
- quais as propriedades características?
- as propriedades prevalecem quando se movem os pontos, os polígonos e os segmentos?

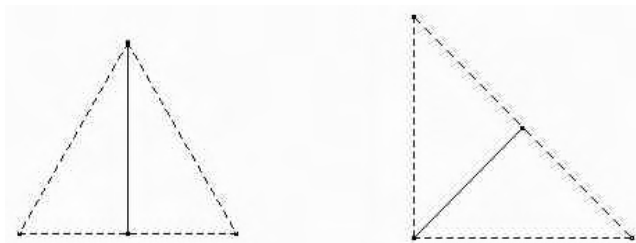
Atividade XVII

As dúvidas mais comuns dos alunos eram sobre como executar as funções selecionadas, isto é, onde deveriam “cliquear” para conseguirem o que queriam. Essas dificuldades já eram esperadas. Primeiro pelo próprio computador, uma vez que muitos alunos sequer haviam trabalhado com ele; segundo, porque aquele momento era o primeiro contato desses alunos com o software Cabri Géomètre II. Por isso, essas atividades eram justamente para que os alunos se adaptassem a ele, de modo que nosso trabalho posterior fluísse sem maiores problemas.

Após essa exploração, prosseguimos nosso trabalho, ainda utilizando o software Cabri Géomètre II.

A atividade seguinte era sobre construção das bases geradoras das pavimentações de configuração (3,3,3,3,3,3) e (4,4,4,4).

Construir e colorir as bases geradoras das pavimentações $(3,3,3,3,3,3)$ e $(4,4,4,4)$:



Atividade XVIII

Os alunos se lembraram de que, na sala de aula, construíram a base geradora para a pavimentação de configuração $(3,3,3,3,3,3)$ encontrando o ponto médio de um dos lados do triângulo que serve de base. Já para a pavimentação de configuração $(4,4,4,4)$ tiveram de construir a bissetriz, pois o ponto médio não seria encontrado com exatidão. Mesmo deixando-os livres para decidirem qual dos dois artifícios usariam com o software, insistimos para que tentassem através da construção da bissetriz.



figura 243

Diferentemente do ocorrido na sala de aula, os alunos coloriram as regiões das bases de maneira muito criativa (alguns meninos usaram as cores de seus times de futebol).

Algumas dessas bases foram ampliadas e imprimidas a fim de que os alunos pudessem, através dos caleidoscópios, visualizar as pavimentações, comparando seu trabalho manual com o feito usando o software Cabri Géomètre II.

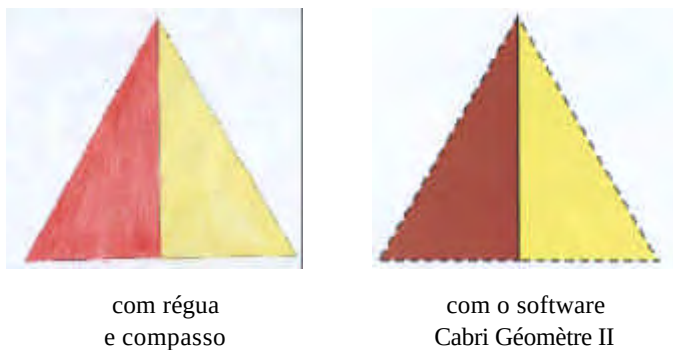


figura 244

Os alunos acharam que com o software a pavimentação fica muito mais bonita, principalmente por não haver imperfeições que ocorrem quando se usa lápis de cor, sem contar que o trabalho é menor.

Bases transformadas com o Cabri Géomètre II

A atividade XIX consistia em obter bases transformadas da pavimentação de configuração (3,3,3,3,3,3) através da base geradora de duas regiões, usando o software Cabri Géomètre II. Essas construções ficam muito facilitadas quando utilizamos a ferramenta *simetria axial* (ver item 5.3 do capítulo II).

Os alunos não apresentaram dificuldades, pois já haviam realizado, em sala de aula, uma atividade sobre obtenção de bases transformadas da mesma pavimentação (atividade XIII), e também, durante a exploração do software Cabri Géomètre II, fizeram uma tarefa usando a ferramenta *simetria axial* (atividade XVII).

Como a base geradora com a qual estavam trabalhando era a construída e colorida por eles mesmos (atividade XVIII), as bases transformadas, apesar de terem mais regiões, continuavam apresentando apenas duas cores. Então, atendendo ao pedido dos alunos, explicamos como fazer para que cada região possuisse uma cor diferente, isto é, eles deveriam transformar cada uma das regiões num polígono e só então preenchê-lo com a cor desejada.

Número de regiões a serem coloridas

Para finalizar nosso trabalho com esses alunos, foi-lhes proposta a seguinte atividade, que como pode ser visto é longa, porém não muito trabalhosa:

1. O novo quebra-cabeça que você recebeu monta qual pavimentação?
2. Construa as bases transformadas da mesma maneira que você construiu para a pavimentação (3,3,3,3,3) e preencha a tabela.

base transformada	1ª	2ª	3ª	4ª
nº de bases geradoras				
nº de regiões				

3. Calcule:
 - a) (nº de regiões da 1ª transformada) – (nº de regiões da geradora)=
 - b) (nº de regiões da 2ª transformada) – (nº de regiões da 1ª transformada)=
 - c) (nº de regiões da 3ª transformada) – (nº de regiões da 2ª transformada)=
 - d) (nº de regiões da 4ª transformada) – (nº de regiões da 3ª transformada)=
4. Os valores encontrados formam uma sequência. O que ela tem de particular?

Atividade XX

O jogo que receberam era da pavimentação de configuração (3,4,6,4). Em suas peças estava a base geradora com quatro regiões que, no caso, estavam coloridas de azul, cinza preto e rosa (figura 245).

A primeira questão da ficha não foi respondida como esperávamos, ou seja, apenas dois grupos responderam que o jogo montava a pavimentação de configuração (3,4,6,4). Porém,

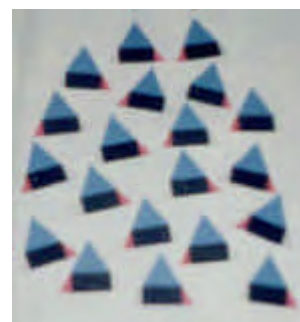


figura 245

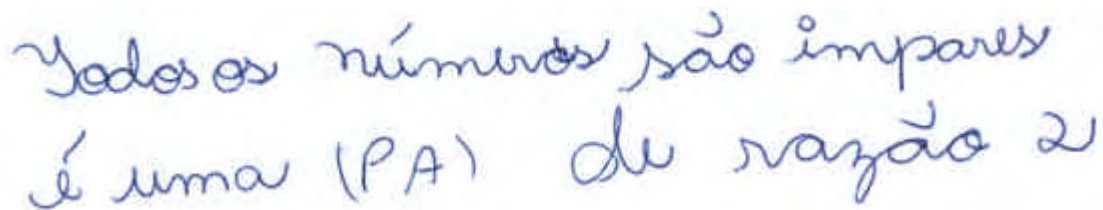
consideramos como correta a resposta que foi predominante: “*monta hexágono, triângulo, quadrado*”.

A tabela da segunda questão foi adequadamente preenchida, já que uma atividade semelhante havia sido executada por eles há poucos dias.

Conforme o esperado, muitos alunos notaram que, para essa pavimentação e essa base geradora, o número de regiões da base geradora coincide com o número de bases geradoras necessárias para a obtenção da primeira base transformada; o número de regiões da primeira base transformada coincide com o número de bases geradoras necessárias para a obtenção da segunda base transformada; e assim sucessivamente.

Foi necessária uma breve explicação para que os alunos entendessem do que se tratava a terceira questão da ficha de trabalho, isto é, precisamos dizer-lhes que os itens a), b), c) e d) nada mais pediam que simples contas de subtração.

Assim, resolvida essa questão, as respostas dadas à quarta pergunta nos surpreendeu. Abaixo seguem algumas:



Handwritten student response in blue ink: "Todos os números são ímpares é uma (PA) de razão 2".



Handwritten student response in light blue ink: "Eles são números ímpares e aumentam de dois em dois. É uma PA de razão 2 e $a_5=5$ ".

Alguns grupos se interessaram em saber se, de algum modo, era possível descobrir o número de regiões de qualquer base transformada para aquela pavimentação, já que haviam encontrado essa PA relacionando exatamente o número de regiões. Não fizemos com eles a demonstração, mas nossa resposta foi afirmativa e explicamos que essas descobertas também fazem parte de nossa pesquisa (como mostramos no item 5 do capítulo II deste trabalho).

Com isso, falamos que, para a pavimentação de configuração (3,4,6,4), as regiões a serem coloridas nas bases transformadas podem ser encontradas utilizando PA de segundo grau. No caso, a expressão usada é: $a_n=(n+2)^2$, considerando que $a_0=4$ (regiões na base geradora) e n é a n -ésima base transformada.

Muitos alunos comentaram que nunca haviam trabalhado com PA de outra maneira ou envolvendo outra parte da matemática (no caso geometria), a não ser naquelas listas de incontáveis exercícios repetitivos pedindo para determinar este ou aquele termo, sabendo isso ou aquilo, ou ainda, dados os termos, determinar a razão, etc.

Acharam também muito interessante existir Progressões Aritméticas que são de segundo, terceiro ou outro grau maior.

Capítulo IV

1 Conclusões

Conforme já registrado, o objetivo principal de nossa pesquisa foi o de apresentar uma proposta alternativa utilizando caleidoscópios, o software Cabri Géomètre II e jogos em atividades de Geometria.

Assim, estabelecemos alguns parâmetros para o desenvolvimento de nosso trabalho, a fim de não torná-lo nem tão supérfluo e nem tão extenso. Para tanto, elegemos o tema "Pavimentações do Plano" e escolhemos uma classe do segundo ano do Ensino médio, de uma escola estadual, para aplicação de nossas atividades.

Com base na bibliografia que dá suporte e fundamentação ao nosso estudo, estruturamos as atividades através da Metodologia Resolução de Problemas, que é a estratégia de ensino que melhor promove uma interação entre aluno e professor. Os problemas foram apresentados através de situações desafiadoras onde os alunos, diante de situações novas, foram encorajados a pensar produtivamente e a desenvolver seu raciocínio.

Foi com satisfação que constatamos uma boa melhoria nesse sentido. Comparando a participação dos alunos no nosso período de observação em relação ao final de nosso trabalho efetivo com eles, pudemos afirmar que nossa intervenção não foi em vão. A rapidez na resolução dos problemas propostos e as diferentes soluções por eles apresentadas são provas inequívocas do progresso, do interesse e da participação desses alunos.

De um modo geral, as atividades foram desenvolvidas por todos os alunos. Vários fatores contribuíram para isso: o material utilizado ser totalmente desconhecido por eles, o lúdico presente nas situações de aprendizagem e, principalmente, o uso de computadores, pois muitos ainda nunca tinham utilizado esse equipamento e sentiram-se até mais valorizados pelo fato de estarem incorporando novos conhecimentos que iriam melhorar seu currículo no mercado de trabalho.

A característica inerente aos caleidoscópios, de fornecer visuais magníficos e particulares, muito contribuiu para despertar o envolvimento dos alunos em participar dos trabalhos.

A sequência de atividades de maneira progressiva quanto aos conteúdos permite-nos afirmar que os conceitos estudados foram compreendidos. Aqueles que, nas discussões, pareciam-nos ainda um tanto obscuros, insistíamos em debatê-los de modo a minimizar ou erradicar tais dúvidas.

Por tudo que já citamos, sentimo-nos encorajados a responder afirmativamente ao questionamento principal de nossa pesquisa, ou seja, atingimos nosso objetivo de elaborar uma estratégia de ensino utilizando os instrumentos propostos, tomando mais interessante e participativa a aprendizagem de alguns conceitos de geometria.

Além disso, paralelamente ao atingimento dos objetivos pré-estabelecidos no início da pesquisa, fomos contemplados com a ocorrência de fatos que vieram a coroar de mais êxito o nosso trabalho: a produção de um jogo educacional e a descoberta de uma fórmula original.

Primeiro, o surgimento de um jogo educacional, com o qual pudemos desenvolver conceitos de simetria (reflexão, rotação, translação) ao trabalhar na montagem das pavimentações e de suas bases transformadas. Esse jogo também auxiliou na contagem das cores nas bases, sendo que, através desse trabalho diferenciado, foi possível reforçar as noções de Progressões Aritméticas. Estamos avaliando a possibilidade de comercialização desse jogo, podendo estar no mercado já no próximo ano.

Nossas investigações também nos levaram a um resultado inédito: um algoritmo através do qual podemos encontrar precisamente a fórmula que determina a quantidade de regiões que poderão ser coloridas na n -ésima base transformada de algumas pavimentações ($n \in \mathbb{IN}$).

Capítulo V

1 Bibliografia

1. ALMEIDA, P.N. **Educação Lúdica – técnicas e jogos pedagógicos**, São Paulo, Loyola.
2. ALSPAUGH, C. A. Kaleidoscope Geometry. In: **Arithmetic Teacher**, 17, p.116 - 117, reprinted In: Readings in Geometry from the Arithmetic Teacher N.C.T.M (3^a. ed.) 1972.
3. ANDRÉ, M.E.D.A. **Etnografia da Prática Escolar**. Campinas, Papirus, 1995.
4. BALL, R. & COXETER, M.C.H. **Mathematical Recreations and Essays**. Univ. Toronto, 1974, republication by Dover, N.Y., 1987.
5. BARBOSA, R. M. **Descobrendo Padrões em Mosaicos**. São Paulo, Atual, 1993.
6. BARBOSA, R.M. **Cálculo Numérico – Interpolação Polinomial e Tabelas Numéricas**. Livraria Nobel SA, 1976.
7. BARBOSA, R.M. **Determinação do Número de Imagens para Espelhos Planos**. Atividades Pedagógicas, 40 (5 - 8), 1957.
8. BARBOSA, R.M. e MURARI, C. **Mosaicos Ornamentais em caleidoscópio equilátero e isósceles**. In: IV EPEM/SBEM - PUC/SP, Janeiro/96, Anais, 187 - 193.
9. BARBOSA, R.M., e MURARI, C. Aprendendo construir novos mosaicos, agora em caleidoscópios com quatro espelhos. In: **Revista de Educação Matemática**, SBEM-SP, Ano 6, nº 4, jul/98, p.57-66.
10. BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**, Brasília, 1999.
11. **CABRI GÉOMÈTRE II – MANUAL PARA MACINTOSH Y MS-DOS**. Texas Instruments Instructional Communications, [s.n.t.].
12. COXETER, H.S.M. **Introduction to Geometry**. N.Y., John Wiley & Sons, Inc., 1961.
13. DAFFER, P.G.O'., CLEMENS, R.S. **Geometry: An Investigative Approach**. Addison-Wesley, Marlo Park, California, 1977.
14. DANTE, L.R. **Didática da resolução de problemas: 1^a. a 5^a. series**. São Paulo, 1991.
15. FIRBY, P.A., GARDINER, C.F. **Surface Topology**, second edition, New York, Ellis Horwood, 1991.
16. GILIOLI, A. **Estudos de sucessões numéricas particulares – Progressões de grau m**. Colégio de Aplicação da Faculdade de Filosofia da Universidade de São Paulo, [s.d.].
17. GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**. 3^a. ed. Rio de Janeiro, Record, 1997.

18. GRUNBAUM, B., SHEPARD, G.C. *Tillings and patterns: an introduction*. Freeman, N.Y., 1989.
19. GRUNBAUM, B., SHEPARD, G.C. Tillings by Regular Polygons. In: *Mathematics Magazine*, 1977, vol. 50, nº5, p.227-247.
20. HENRIQUES, A. *Ensino e Aprendizagem da Geometria Métrica: Uma seqüência didática com auxílio do software Cabri Géomètre II*. Dissertação de Mestrado, IGCE-UNESP, Rio Claro, 1999.
21. JACOBS, H.J. *Geometry*. W. H. Freeman and Company, New York, San Francisco, 1974.
22. KINGSTON, M. Mosaics by Reflections. In: *The Mathematics Teacher*, nº50, 1957, p.280-286.
23. LINDQUIST, M.M., SHULTE, A.P. (Org.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. tradução de Hygino H. Domingues, São Paulo, Atual, 1994.
24. LOURENÇO, M.L. *Cabri Géomètre II – introdução e atividades*. Catanduva, FAFICA, 2000.
25. LÜDKE, M. & ANDRÉ, M.E.D.A. *Pesquisa Qualitativa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo, Ed. Pedagógica e Universitária Ltda., 1986.
26. MARTINS, R.A., ALMEIDA, S.T., MURARI, C. Pavimentação do plano de configuração $(3^2, 4, 3, 4; 3, 4, 6, 4)$ no caleidoscópio equilátero. In: *Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat*. Departamento de Matemática IGCE – UNESP – Rio Claro, vol. II, 2000, p.38-53.
27. MOURA, M.O. *A construção do signo numérico em situação de ensino*, Tese de Doutorado, Faculdade de Educação Universitária de São Paulo, São Paulo, 1992.
28. MOURA, M.O. A série busca no jogo: do lúdico na Matemática, In: KISHIMOTO, T.M. *Jogo, brinquedo e a educação*, 5ª. edição, São Paulo, Cortez, 2001, p.73-87.
29. MURARI, C. Brincando, colorindo e aprendendo com o caleidoscópio equilátero em pavimentações de configuração $(3, 3, 3, 3, 3)$. In: *A Educação Matemática em Revista*, [s.l.], SBEM, ano III, 1º sem. 1995, p.31-38.
30. MURARI, C. *Ensino-Aprendizagem de Geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios*. Tese de Doutorado, Vol. I e II, UNESP/IGCE, Rio Claro, 1999.
31. MURARI, C. Pavimentação do Plano de Configuração $(4, 6, 12)$ Usando Caleidoscópios Equiláteros para Coloração Múltipla. In: *IV EPEM/SBEM* - PUC/SP, Janeiro/96, Anais, 263 - 268.
32. MURARI, C. Um caleidoscópio educacional modificado para trabalho em grupo. In: *Revista de Educação Matemática*, [s.l.], SBEM, ano 3, nº 2, mar. 1995, p.11-15.

33. MURARI, C., MARTINS, R.A., ALMEIDA, S.T. Obtenção de bases substituíveis para caleidoscópio no Cabri Géomètre II. In: **Workshop – Informática Aplicada à Educação**, UNIARA – SBEM – SP, Resumos, Ago/2000, p.41.
34. MURARI, C., PEREZ, G. A Geometria na ótica do caleidoscópio. **Revista Educação e Matemática**, SBEM, São Paulo, dez./1999, p.43-50.
35. MURARI, C., PEREZ, G. Atividades educacionais de Geometria, com um, dois e três espelhos – caleidoscópio. In: **IV EPEM/SBEM** - PUC/SP, Janeiro/96, Anais, 348.
36. MURARI, C., PEREZ, G., BARBOSA, R.M. Caleidoscopios educacionales: coloraciones múltiples. In: **UNO – Revista de Didáctica de las Matemáticas – Las tareas matemáticas**. Barcelona, GRAÓ, nº27, 2000, p.7-20.
37. ONUCHIC, L.R. Ensino-aprendizagem através da resolução de problemas. In: BICUDO, M.A.V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo, Ed. UNESP, 1999, p.199-218.
38. PONTE, J.P. **O computador – um instrumento da educação**. 3ª edição, Texto, Lisboa, 1988.
39. RODRIGUES, V. **Resolução de problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática**. Dissertação Mestrado - UNESP, Rio Claro, 1992.
40. SARAIVA, M. J. F. S. **O computador na Aprendizagem de Geometria: uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade**. Dissertação de Mestrado, 1992, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
41. TORRES, I.M. **A percepção de professores e alunos a respeito do papel do computador na educação: um estudo em uma escola municipal paulista**. Tese de Mestrado, PUC-SP, 1993.
42. TRIVIÑOS, A.N.S. **Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais: A Pesquisa Qualitativa em Educação**. São Paulo, Atlas, 1987.