

Lisandra Érica de Sousa

**Um Estudo Sobre o Comportamento dos
Zeros dos Polinômios Ortogonais**







***UM ESTUDO SOBRE O
COMPORTAMENTO DOS ZEROS DOS
POLINÔMIOS ORTOGONAIS***

Lisandra Érica de Sousa

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

MAP-048



*Universidade de São Paulo
Matemática Aplicada*

Lisandra Érica de Sousa

UM ESTUDO SOBRE O COMPORTAMENTO DOS ZEROS DOS POLINÔMIOS ORTOGONAIS

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

*Aos meus pais,
Marilisa e Valdir.*

Orientadora: Profa. Dra. *Eliana X. L. de Andrade*



São José do Rio Preto

1999



Agradecimentos

A Deus, por tudo.

Aos meus pais, que enchem minha vida de muito amor e bons exemplos e que participam de todas as minhas atividades, pelo apoio e incentivo em tudo que decidi realizar.

À Nathália, por me ensinar a transformar as dificuldades em completa alegria.

A todos os meus familiares, por compreenderem minha ausência constante. Em especial à minha avó Alice, tia Selma, toda a família da tia Lúcia, ao meu irmão Leandro, Melissa, Reginaldo e D. Maria, que sempre me acompanharam e desejaram o melhor para mim.

À professora Eliana, que tornou possível a realização deste trabalho e que sempre esteve disposta a me atender com muita paciência e dedicação, pela amizade e consideração.

Aos professores Sebastião, Ranga e Borges que me receberam com todo carinho no início do meu curso de mestrado. Sem especial ao professor Fernando Ferrari, pela preocupação que teve comigo.

A todos os meus amigos, pelo companheirismo.

Aos meus pais,

A todos os professores e funcionários que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho. Marilsa e Valdir.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

Agradecimentos

A Deus, por tudo.

Aos meus pais, que enchem minha vida de muito amor e bons exemplos e que participam de todas as minhas atividades, pelo apoio e incentivo em tudo que decidi realizar.

À Nathália, por me ensinar a transformar as dificuldades em completa alegria.

A todos os meus familiares, por compreenderem minha ausência constante. Em especial à minha avó Alice, tia Selma, toda a família da tia Lúcia, ao meu irmão Leandro, Melissa, Reginaldo e D.Maria, que sempre me acompanharam e desejaram o melhor para mim.

À professora Eliana, que tornou possível a realização deste trabalho e que sempre esteve disposta a me atender com muita paciência e dedicação, pela amizade e consideração.

Aos professores Sebastião, Ranga e Borges que me receberam com todo carinho no início do meu curso de mestrado. Em especial ao professor Fernando Ferrari, pela preocupação que teve comigo.

A todos os meus amigos, pelo companheirismo.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.



Resumo

O principal objetivo deste trabalho é realizar um estudo sobre o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais definidos em um intervalo (a, b) , onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, com relação a uma função peso $w(x)$. A densidade dos zeros em (a, b) e a distância entre zeros consecutivos são estudadas. Além disso, se $w(x) = w(x, \tau)$, alguns resultados sobre a dependência dos zeros dos polinômios ortogonais associados com relação ao parâmetro τ são apresentados. Em particular, discutimos a localização e desigualdades para os zeros dos polinômios ortogonais clássicos.

“ Não basta ensinar ao homem uma especialidade, porque se tornará assim uma máquina utilizável e não uma personalidade. É necessário que adquira um sentimento, um senso prático daquilo que vale a pena ser empreendido, daquilo que é belo, do que é moralmente correto.”

Albert Einstein

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é realizar um estudo sobre o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais definidos em um intervalo (a, b) , onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, com relação a uma função peso $w(x)$. A densidade dos zeros em (a, b) e a distância entre zeros consecutivos são discutidas. Além disso, se $w(x) = w(x, \tau)$, alguns resultados sobre a dependência dos zeros dos polinômios ortogonais associados com relação ao parâmetro τ são apresentados. Em particular, discutimos a localização e desigualdades para os zeros dos polinômios ortogonais clássicos.

Introdução

1

The main purpose of this work is to study the behaviour of the zeros of orthogonal polynomials with respect to a weight function $w(x)$ defined on the interval (a, b) , where $-\infty \leq a < b \leq \infty$. The density of the zeros on (a, b) and the distance between consecutive zeros are discussed. We present some results concerning the dependence of the zeros of orthogonal polynomials on a parameter τ which appears in the weight function $w(x) = w(x, \tau)$. We give special emphasis regarding the locations and inequalities for the zeros of classical orthogonal polynomials.

1.5 Teorema de Rolle

6

1.6 Teorema de Weierstrass

6

1.7 Função Hipergeométrica

7

1.8 Teorema de Perron-Frobenius

8

2 Polinômios Ortogonais

9

2.1 Propriedades gerais dos polinômios ortogonais

9

2.2 Propriedades elementares dos zeros

17

Índice

Introdução	1
1 Resultados Preliminares	3
1.1 Equações Diferenciais	3
1.2 Função Gama	5
1.3 Interpolação de Lagrange	5
1.4 Regra de Leibnitz	6
1.5 Teorema de Rolle	6
1.6 Teorema de Weierstrass	6
1.7 Função Hipergeométrica	7
1.8 Teorema de Perron-Frobenius	8
2 Polinômios Ortogonais	9
2.1 Propriedades gerais dos polinômios ortogonais	9
2.2 Propriedades elementares dos zeros	17



2.3	Polinômios ortogonais clássicos	22
2.3.1	Polinômios de Jacobi - $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	22
2.3.2	Polinômios Ultrasféricos	29
2.3.3	Polinômios de Tchebychev de 1ª espécie - $T_n(x)$	33
2.3.4	Polinômios de Tchebychev de 2ª espécie - $U_n(x)$	33
2.3.5	Polinômios de Laguerre - $L_n^{(\alpha)}(x)$	34
2.3.6	Polinômios de Hermite - $H_n(x)$	35
2.3.7	Funções de Bessel	36
3	Comportamento dos Zeros dos Polinômios Ortogonais	38
3.1	Densidade dos zeros	38
3.1.1	Distância entre zeros consecutivos	39
3.1.2	Variação dos zeros com um parâmetro	43
3.2	Desigualdades para os zeros dos polinômios ortogonais clássicos	45
3.3	O Método de Sturm	48
3.3.1	O Método de Sturm e os polinômios de Legendre	51
3.3.2	Polinômios Ultrasféricos e funções de Bessel $J_\alpha(x)$	55
3.3.3	O Método de Sturm e os polinômios de Jacobi	56
3.3.4	O Método de Sturm e os polinômios de Laguerre	57
3.3.5	O Método de Sturm e os polinômios de Hermite	60



4 Alguns Resultados Recentes	63
4.1 Interpretação eletrostática dos zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	63
4.1.1 Limites para os maiores zeros dos Polinômios Ultraféricos, de Laguerre e de Hermite	69
4.2 Propriedades de monotonicidade dos zeros dos Polinômios Ultraféricos	71
4.2.1 Resultados preliminares	71
4.2.2 Resultados principais	76
Considerações Finais	86
Referências Bibliográficas	87

O objetivo inicial proposto para este trabalho era fazer um estudo sobre o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais, principalmente sobre os de Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, entre eles os Ultraféricos, $P_n^{(\alpha)}(x)$, que admitem uma interpretação eletrostática bastante interessante.

Este estudo, feito em detalhes nos capítulos 2 e 3, compreenderia o Teorema de Markov (Teorema 3.5) e o de Sturm (Teorema 3.10) e o livro de Szegő [33] é uma excelente referência para isso.



Porém, ao iniciarmos a pesquisa bibliográfica sobre o tema, deparamo-nos com muitos trabalhos sobre propriedades de monotonicidade dos zeros dos polinômios ultrasféricos, vários deles bem recentes. Por ser um assunto bastante palpitante e atual, optamos, então, por incluir mais um capítulo nesta dissertação, o capítulo 4, onde apresentamos um estudo sobre três desses artigos: [5] e [6] e Elbert e Stafarikas [10]. Este trabalho é muito extenso.

Preocupamo-nos em elaborar um texto didático sobre o assunto, que possa servir de referência aos que pretendem iniciar seus estudos nesta área.

Entre os polinômios associados a uma relação de recorrência de três termos estão os polinômios ortogonais. As aplicações de tais polinômios à Análise Aplicada são muitas e novas aplicações surgem a todo momento (ver Gautschi [16]).

As aplicações dos polinômios ortogonais associados às chamadas medidas clássicas, como as de Jacobi, Laguerre e Hermite, têm, particularmente, papel fundamental em muitos problemas das ciências e das engenharias. Por exemplo: quadraturas numéricas, aproximações por mínimos quadrados, inclusive série de Fourier, aproximação de Padé, aproximações por “splines” (Gautschi [16]), aproximações que preservam momentos (Bojanov & Sri Ranga [3]), método de relaxação em álgebra linear, processo de nascimento e morte (“birth and death”) e regressão polinomial em Estatística (Karlin & McGregor [23]) e teoria de códigos (Sloane [29]). Por esta razão, a caracterização dos zeros dos polinômios ortogonais é muito importante. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra sabemos que se conhecemos os zeros de um polinômio, conhecemos o polinômio a menos de uma constante multiplicativa.

O objetivo inicial proposto para este trabalho era fazer um estudo sobre o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais, principalmente sobre os de Jacobi, $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, entre eles os Ultrasféricos, $P_n^{(\lambda)}(x)$, que admitem uma interpretação eletrostática bastante interessante.

Este estudo, feito em detalhes nos capítulos 2 e 3, compreenderia o Teorema de Markov (Teorema 3.5) e o de Sturm (Teorema 3.10) e o livro de Szegö [33] é uma excelente referência para isso.



Porém, ao iniciarmos a pesquisa bibliográfica sobre o tema, deparamo-nos com muitos trabalhos sobre propriedades de monotonicidade dos zeros dos polinômios ultrasféricos, vários deles bem recentes. Por ser um assunto bastante palpitante e atual, optamos, então, por incluir mais um capítulo nesta dissertação, o capítulo 4, onde apresentamos um estudo sobre três desses artigos (Dimitrov [5] e [6] e Elbert e Siafarikas [11]) para não tornar o trabalho muito extenso.

Preocupamo-nos em elaborar um texto didático sobre o assunto, que possa servir de referência aos que pretendem iniciar seus estudos nesta área.

Organizamos, então, esta dissertação da seguinte forma.

O primeiro capítulo - *Resultados Preliminares* - contém os pré-requisitos matemáticos que necessitaremos no decorrer do trabalho.

No segundo capítulo - *Polinômios Ortogonais* - fazemos um estudo sobre os polinômios ortogonais: definições, propriedades e alguns resultados sobre seus zeros. Apresentamos, também, um resumo sobre os polinômios de Tchebychev, Laguerre e Hermite e um estudo detalhado dos polinômios de Jacobi.

No terceiro capítulo - *Comportamento dos Zeros dos Polinômios Ortogonais* - estudamos com mais detalhes a localização e densidade dos zeros dos polinômios ortogonais, apresentamos alguns teoremas válidos sob condições gerais impostas sobre a função peso e, em seguida, estudamos algumas desigualdades para os zeros dos polinômios ortogonais clássicos.

No capítulo 4 - *Alguns Resultados Recentes*, apresentamos o estudo dos três artigos acima mencionados.

Em - *Considerações Finais* - apresentamos as observações finais sobre o trabalho.

Finalmente, relacionamos, nas *Referências Bibliográficas*, os livros e artigos por nós consultados ou citados.



Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados básicos da Análise Matemática, pré-requisitos essenciais ao desenvolvimento do trabalho. Muitos resultados serão considerados sem demonstrações, que podem ser encontradas nos textos clássicos sobre o assunto.

1.1 Equações Diferenciais

Sejam $K(x)$, $M(x)$ e $N(x)$ funções definidas no intervalo (a, b) , onde $K(x)$ e $M(x)$ têm derivadas contínuas, $K(x) \neq 0$ e $N(x)$ é contínua. Consideremos a equação diferencial

$$K(x)y'' + M(x)y' + N(x)y = 0. \quad (1.1)$$

Fazendo $y = s(x)u(x)$, onde $u(x)$ é uma função desconhecida, podemos determinar $s(x)$ de modo que $u(x)$ satisfaça a uma equação do tipo

$$u'' + \delta(x)u = 0. \quad (1.4)$$

Substituindo y em (1.1), cálculos diretos nos fornecem

$$2Ks' + Ms = 0 \quad \text{e} \quad s(x) = \exp \left\{ - \int_{x_0}^x \frac{Mdx}{2K} \right\}, \quad (1.2)$$

onde x_0 é um ponto arbitrário.

Então,

$$\delta(x) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{M}{2K} \right) - \left(\frac{M}{2K} \right)^2 + \frac{N}{K}.$$

Se introduzirmos em (1.1) a variável independente θ definida por $x = \sigma(\theta)$, obtemos:

$$K(x)\sigma'(\theta)\frac{d^2y}{d\theta^2} + \left\{ M(x)[\sigma'(\theta)]^2 - K(x)\sigma''(\theta) \right\} \frac{dy}{d\theta} + N(x)[\sigma'(\theta)]^3 y = 0. \quad (1.3)$$

Fazendo $y = s^*u$ em (1.3), obtemos

$$s^* = \exp \left\{ -\int \frac{M\sigma'^2 - K\sigma''}{2K\sigma'} d\theta \right\} = (\sigma')^{1/2} s, \quad (1.5)$$

onde s é dado por (1.2). Assim, $y = (\sigma')^{1/2} su$ e u satisfaz

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \delta^* u = 0,$$

onde

$$\delta^* = -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{M(\sigma')^2 - K\sigma''}{2K\sigma'} \right) - \left(\frac{M(\sigma')^2 - K\sigma''}{2K\sigma'} \right)^2 + \frac{N}{K}(\sigma')^2.$$

Outro resultado importante é a representação de uma solução $y = y(x)$ da equação não homogênea

$$K(x)y'' + M(x)y' + N(x)y = f(x)$$

em termos de um sistema fundamental $\{y_1(x), y_2(x)\}$ da equação homogênea (1.1) correspondente. Temos

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_{x_0}^x \frac{y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)}{y_1'(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1(t)} \frac{f(t)}{K(t)} dt, \quad (1.6)$$

onde x_0 é um valor fixo e c_1 e c_2 são constantes. Agora,

$$y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x) = c \exp \left\{ -\int \frac{M}{K} dx \right\}, \quad (1.4)$$

onde c é uma constante.

Observe que quando fazemos $M = 0$, esta expressão se torna uma constante.



1.2 Função Gama

Definição 1.1 A função Gama pode ser definida como a integral de Euler de segunda espécie, por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

para $\operatorname{Re}(x) > 0$ ou $x > 0$.

São válidas as seguintes propriedades:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(x+1) = x!, \quad \text{para } x \text{ inteiro positivo e}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}. \quad (1.5)$$

A integral de Euler de primeira espécie define a função Beta

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, \quad q > 0,$$

que pode ser expressa em termos da função Gama por

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.3 Interpolação de Lagrange

Consideremos o seguinte problema de interpolação.

Sejam $x_1, \dots, x_n$ pontos distintos e $y_1, \dots, y_n$ números reais dados. Existe um único polinômio real algébrico $P(x)$ de grau menor ou igual a $n-1$, que satisfaz às condições

$$P(x_v) = y_v, \quad v = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Em outras palavras, dados n pontos $\{(x_v, y_v)\}_{v=1}^n$ no plano, constrói-se um único polinômio P de grau $n-1$, cujo gráfico passa pelos pontos dados (x_v, y_v) , $v = 1, \dots, n$.

A solução do problema de interpolação (1.6) pode ser dada por

$$P(x) = \sum_{v=1}^n \left\{ y_v \prod_{i=1, i \neq v}^n \frac{x - x_i}{x_v - x_i} \right\} = \sum_{v=1}^n y_v \frac{\pi(x)}{(x - x_v)\pi'(x_v)},$$

onde $\pi(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ e $\pi'(x_v) = (x - x_1) \dots (x - x_{v-1})(x - x_{v+1}) \dots (x - x_n)$.

Em particular, quando os y_v dados coincidem com os valores de função $f(x)$, isto é, quando $y_v = f(x_v)$, $v = 1, \dots, n$, o polinômio de Lagrange que interpola a função f nos pontos $\{x_i\}_{i=1}^n$ é dado por

$$L_{n-1}(f; x) = \sum_{v=1}^n f(x_v) \frac{\pi(x)}{(x - x_v)\pi'(x_v)}.$$

A propriedade principal dos polinômios de interpolação de Lagrange $L_{n-1}(f; x)$, é que $L_{n-1}(f; x) = f(x)$, para qualquer $f \in \mathbb{P}_{n-1}$, onde $\mathbb{P}_{n-1}$ é o espaço dos polinômios de grau até $n - 1$.

1.4 Regra de Leibnitz

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$. A n -ésima derivada do produto $f(x)g(x)$ é dada por

$$\frac{d^n}{dx^n} [f(x)g(x)] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[\frac{d^i}{dx^i} (f(x)) \right] \left[\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} (g(x)) \right].$$

1.5 Teorema de Rolle

Teorema 1.1 (Rolle) *Sejam $f \in C[a, b]$, com $f(a) = f(b)$ e $f \in C^1(a, b)$. Então, existe $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.*

Para mais detalhes, ver Guidorizzi [17], p.410.

1.6 Teorema de Weierstrass

O resultado abaixo é de grande utilidade para a teoria de polinômios pois permite aproximar qualquer função contínua por um polinômio.



Teorema 1.2 (Weierstrass) *Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo I fechado e finito e seja $\epsilon > 0$. Então, existe um polinômio $p(x)$ tal que*

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in I.$$

Para mais detalhes, ver Rivlin [28], p.33.

1.7 Função Hipergeométrica

A função hipergeométrica, definida por

$${}_2F_1(a, b; c; x) = 1 + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+v-1)}{v!} \frac{b(b+1)\dots(b+v-1)}{c(c+1)\dots(c+v-1)} x^v, \quad (1.7)$$

onde c é um inteiro positivo, converge para $|x| < 1$ e satisfaz

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{dy}{dx} - aby = 0. \quad (1.8)$$

Se m é inteiro positivo,

$$\lim_{c \rightarrow -(m-1)} (c+m-1) {}_2F_1(a, b; c; x) = (-1)^{m-1} \frac{a(a+1)b(b+1)\dots(b+m-1)}{m!(m-1)!} x^m \times {}_2F_1(a+m, b+m; m+1; x) \quad (1.9)$$

e a função $x^m {}_2F_1(a+m, b+m; m+1; x)$ satisfaz à equação (1.8) com $c = -(m-1)$.

Em Erdelyi [12], p.103, foi demonstrado que

$$(c-a) {}_2F_1(a-1, b; c; z) + (2a-c-az+bz) {}_2F_1(a, b; c; z) + a(z-1) {}_2F_1(a+1, b; c; z) = 0 \quad (1.10)$$

e

$$(c-b) {}_2F_1(a, b-1; c; z) + (2b-c-bz+az) {}_2F_1(a, b; c; z) + b(z-1) {}_2F_1(a, b+1; c; z) = 0. \quad (1.11)$$

1.8 Teorema de Perron-Frobenius

Em seguida, apresentaremos o teorema de Perron-Frobenius para matrizes tridiagonais. Não vamos enunciar o teorema em uma versão mais geral pois neste trabalho vamos utilizar apenas o caso especial que segue. Para maiores detalhes, veja Horn & Johnson [18].

Teorema 1.3 (Perron-Frobenius) *Sejam A e B matrizes tridiagonais $n \times n$ com elementos positivos fora da diagonal e elementos não negativos na diagonal. Se os elementos de $B - A$ são não-negativos, então o maior auto-valor de B é maior do que o maior auto-valor de A .*

Neste capítulo, faremos um estudo sobre os polinômios ortogonais e suas propriedades, em particular sobre os polinômios clássicos. Em Szegő [33], encontramos todos os resultados aqui apresentados sobre as propriedades dos zeros dos polinômios ortogonais. Incluimos, também, alguns detalhes de demonstrações que foram omitidos no material consultado. Para mais detalhes veja, por exemplo, Szegő [33], Chihara [4], Freud [14].

2.1 Propriedades gerais dos polinômios ortogonais

Sejam $[a, b]$ um intervalo real, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e $\sigma(x)$ uma função real, limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento em $[a, b]$.

Definição 2.1 *Sejam os momentos definidos por:*

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\sigma(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Se os momentos μ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, existem, $d\sigma(x)$ é chamada uma distribuição em $[a, b]$. Quando $d\sigma(x) = w(x)dx$, $w(x)$ é uma função peso.

Definição 2.2 Dizemos que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma Sequência de Polinômios Ortogonais (SPO) se:

(i) $P_n(x)$ é de grau exatamente n , $n \geq 0$;

$$(ii) (P_n, P_m) = \int_a^b P_n(x)P_m(x)d\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \neq m \\ \sigma_n \neq 0 & , \text{ se } n = m. \end{cases} \quad (2.2)$$

Capítulo 2

Se $\sigma_n = 1$, dizemos que a SPO é uma Sequência de Polinômios Ortonormais (SPO*). Notação: $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Polinômios Ortogonais

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}x^k, \quad a_{n,n} \neq 0. \quad (2.3)$$

Neste capítulo, faremos um estudo sobre os polinômios ortogonais e suas propriedades, em particular sobre os polinômios clássicos. Em Szegő [33], encontramos todos os resultados aqui apresentados sobre as propriedades dos zeros dos polinômios ortogonais. Incluímos, também, alguns detalhes de demonstrações que foram omitidos no material consultado. Para mais detalhes veja, por exemplo, Szegő [33], Chihara [4], Freud [14].

2.1 Propriedades gerais dos polinômios ortogonais

Sejam $[a, b]$ um intervalo real, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e $\alpha(x)$ uma função real, limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento em $[a, b]$.

Teorema 2.2 Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO no intervalo $[a, b]$ com relação à distribuição

Definição 2.1 Sejam os momentos definidos por:

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\alpha(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Se os momentos μ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, existem, $d\alpha(x)$ é chamada uma distribuição em $[a, b]$. Quando $d\alpha(x) = w(x)dx$, $w(x)$ é uma função peso.

Definição 2.2 Dizemos que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma Seqüência de Polinômios Ortogonais (SPO) se:

$$\begin{aligned} (i) \quad & P_n(x) \text{ é de grau exatamente } n, \quad n \geq 0; \\ (ii) \quad & \langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x) P_m(x) d\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \neq m \\ \sigma_n \neq 0 & , \text{ se } n = m. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Se $\sigma_n = 1$, dizemos que a SPO é uma Seqüência de Polinômios Ortonormais (SPO*). Notação: $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Neste trabalho, denotaremos os coeficientes do polinômio $P_n(x)$ por $a_{n,i}$, $i = 0, \dots, n$. Logo,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k, \quad a_{n,n} \neq 0. \quad (2.3)$$

Teorema 2.1 Sejam $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$, pertencentes a uma SPO $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Então, eles são linearmente independentes.

Demonstração: Suponhamos que existam constantes c_j , $j = 0, 1, \dots, m$, tais que $\sum_{j=0}^m c_j P_j(x) = 0$. Fazendo o produto interno por $P_k(x)$, $k = 0, \dots, m$, em ambos os membros, teremos:

$$\sum_{j=0}^m c_j \langle P_j(x), P_k(x) \rangle = 0.$$

Por definição, $\langle P_j(x), P_k(x) \rangle = 0, j \neq k$. Logo,

$$\sum_{j=0}^m c_j \langle P_j(x), P_k(x) \rangle = c_k \langle P_k(x), P_k(x) \rangle = 0.$$

Portanto, $c_k = 0, k = 0, \dots, m$. ■

Teorema 2.2 Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO no intervalo $[a, b]$ com relação à distribuição $d\alpha(x)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \text{ é uma SPO}; \\ (ii) \quad & \langle P_n(x), \pi(x) \rangle = 0, \quad \forall \pi(x) \in \mathcal{P}_{n-1}; \\ (iii) \quad & \langle x^m, P_n(x) \rangle = \int_a^b x^m P_n(x) d\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } m < n \\ \rho_n \neq 0 & , \text{ se } n = m \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Demonstração: [(i) $\Rightarrow$ (ii)] Seja $\pi(x)$ um polinômio de grau m , $m < n$. Então,

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^m c_k P_k(x), \quad c_m \neq 0.$$

$$\text{Daí, } \langle P_n(x), \pi(x) \rangle = \sum_{k=0}^m c_k \langle P_n, P_k \rangle = 0, \text{ pois } m < n.$$

Considerando $\pi(x) = x^m$, temos prontamente que (ii) implica (iii).

[(iii) $\Rightarrow$ (i)] Seja $m \leq n$. Temos, então, por (iii), que

$$\langle P_m, P_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^m a_{m,k} x^k, P_n \right\rangle = \sum_{k=0}^m a_{m,k} \langle x^k, P_n \rangle \begin{cases} = 0 & , \text{ se } m < n \\ \neq 0 & , \text{ se } n = m. \end{cases}$$

Como consequência imediata deste teorema temos o seguinte resultado:

Corolário 2.1 *Sejam $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ duas SPO no intervalo $[a, b]$ com relação à $d\alpha(x)$. Então, $Q_j(x) = c_j P_j(x)$, $j = 0, 1, 2, \dots$*

Definição 2.3 *Denominam-se Determinantes de Hankel os determinantes D_n de ordem $n+1$, $n \geq 0$, dados por:*

$$D_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix},$$

onde $\mu_j, j = 0, \dots, 2n$, são os momentos definidos em (2.1).

Teorema 2.3 *Se os momentos μ_n existem, $D_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$*

Demonstração: Tomemos o sistema linear homogêneo, $D_n a = 0$, isto é,

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que o determinante da matriz dos coeficientes é D_n . Mostremos que a única solução do sistema linear acima é $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$. Dessa forma, teremos $D_n \neq 0$.

Substituindo os momentos no sistema linear pela sua definição, teremos:

$$\begin{cases} a_0 \int_a^b x^0 d\alpha(x) + a_1 \int_a^b x d\alpha(x) + \dots + a_n \int_a^b x^n d\alpha(x) & = 0 \\ a_0 \int_a^b x d\alpha(x) + a_1 \int_a^b x^2 d\alpha(x) + \dots + a_n \int_a^b x^{n+1} d\alpha(x) & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_0 \int_a^b x^n d\alpha(x) + a_1 \int_a^b x^{n+1} d\alpha(x) + \dots + a_n \int_a^b x^{2n} d\alpha(x) & = 0. \end{cases}$$

Multiplicando, respectivamente, por $a_0, a_1, \dots, a_n$ as equações do sistema e somando-as, obteremos:

$$\begin{aligned} a_0^2 \int_a^b d\alpha(x) &+ a_1^2 \int_a^b x^2 d\alpha(x) + \dots + a_n^2 \int_a^b x^{2n} d\alpha(x) + 2a_0 a_1 \int_a^b x d\alpha(x) \\ &+ \dots + 2a_0 a_n \int_a^b x^n d\alpha(x) + 2a_1 a_n \int_a^b x^{n+1} d\alpha(x) + \dots = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_a^b (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 d\alpha(x) = 0.$$

Então, $(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 \equiv 0$. Portanto, $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$. ■

Substituindo (2.4) em (2.3), obtemos

$$\sum_{i=0}^n a_{n,i} \langle x^s, x^i \rangle = \begin{cases} 0 & , s = 0, 1, \dots, n-1 \\ \rho_n \neq 0 & , s = n \end{cases}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n-1} \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho_n \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Resolvendo o sistema linear acima por Cramer, obtemos

$$a_{n,n} = \rho_n \frac{D_{n-1}}{D_n} \neq 0. \quad (2.6)$$

Substituindo a última linha de (2.5) por (2.3), temos

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n-1} \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P_n(x) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Logo,

$$P_n(x) = \frac{a_{n,n}}{D_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

Portanto, da expressão acima, demonstramos que existe uma única SPO, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, se, e somente se, $D_n \neq 0$, $n = 0, 1, \dots$.

Observe que $x^n = \sum_{j=0}^n c_j P_j(x)$ com $c_n = \frac{1}{a_{n,n}}$. Então,

$$\rho_n = \langle x^n, P_n(x) \rangle = \sum_{j=0}^n c_j \langle P_j(x), P_n(x) \rangle = \frac{1}{a_{n,n}} \langle P_n(x), P_n(x) \rangle.$$

Logo,

$$\rho_n = \frac{\langle P_n(x), P_n(x) \rangle}{a_{n,n}}.$$

De (2.6), temos, então,

$$a_{n,n}^2 = \frac{D_{n-1}}{D_n} \langle P_n(x), P_n(x) \rangle.$$

Daí, de (2.7), chegamos ao seguinte resultado:

Teorema 2.4 *Seja $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO* em $[a, b]$, com relação à distribuição $d\alpha(x)$.*

Então, para $n \geq 1$, o polinômio ortonormal de grau n é dado por:

$$p_n(x) = (D_n D_{n-1})^{-1/2} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{vmatrix}, \quad (2.8)$$

onde D_n é o determinante de Hankel e o coeficiente principal de $p_n(x)$ é dado por

$$a_{n,n} = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}.$$

Uma propriedade bastante útil e interessante dos polinômios ortogonais é o seguinte teorema:

Teorema 2.5 (Relação de Recorrência de três termos) Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO em $[a, b]$, com relação à distribuição $d\alpha(x)$. Então,

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.9)$$

com $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$, α_{n+1} , β_n , $\gamma_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, onde

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0, \quad (2.10)$$

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

Demonstração: Como $xP_n(x) \in \mathcal{P}_{n+1}$, pode ser escrito como $xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x)$.

Mas, $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^i$, $a_{n,n} \neq 0$. Logo, $xP_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^{i+1}$.

Igualando os coeficientes dos termos de maior grau em ambas as expressões de $xP_n(x)$, obtemos: $a_{n,n} = b_{n+1} a_{n+1,n+1}$.

Daí, $b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}$. Temos que

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \int_a^b P_n(x) x P_j(x) w(x) dx = \langle P_n, xP_j \rangle = 0, \quad \text{para } j \leq n-2.$$

Mas, $\langle xP_n, P_j \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_j \rangle = b_j \langle P_j, P_j \rangle$. Daí,

$$b_j = \frac{\langle xP_n, P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle}. \quad (2.11)$$

Logo, $b_j = 0$, $j \leq n-2$. Assim,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \frac{1}{b_{n+1}} x P_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}} P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}} P_n(x) \\ &= \left(\frac{1}{b_{n+1}} x - \frac{b_n}{b_{n+1}} \right) P_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}} P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x),$$

com

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \quad \beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}. \quad (2.12)$$

Como $b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}$, temos $\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0$.

Calculemos, agora, os valores de α_{n+1} e β_{n+1} . De (2.11) e (2.12),

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Mas, como $P_n(x) = (\gamma_n x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x)$, obtemos

$$xP_{n-1}(x) = \frac{1}{\gamma_n} P_n(x) + \frac{\beta_n}{\gamma_n} P_{n-1}(x) + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} P_{n-2}(x).$$

Porém,

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \int_a^b P_n(x) x P_{n-1}(x) w(x) dx = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle.$$

Então,

$$\langle P_n, xP_{n-1} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-1} \rangle + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-2} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle.$$

Portanto,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0.$$

■

Do teorema acima imediatamente provamos que

Corolário 2.2 Os polinômios ortonormais $p_n(x)$ satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + a_np_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.13)$$

com as condições iniciais $p_0(x) = 1$ e $p_{-1}(x) = 0$, onde

$$a_n = \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \quad e \quad b_n = \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}} - \frac{a_{n+1,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Aplicando a relação de recorrência de três termos à expressão

$$p_{m+1}(x)p_m(y) - p_m(x)p_{m+1}(y),$$

obtemos:

$$\begin{aligned} p_{m+1}(x)p_m(y) - p_m(x)p_{m+1}(y) &= \gamma_{m+1}(x-y)p_m(x)p_m(y) \\ &+ \alpha_{m+1} \{p_{m-1}(y)p_m(x) - p_{m-1}(x)p_m(y)\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por (2.10),

$$\begin{aligned} \frac{a_{m,m}}{a_{m+1,m+1}} \frac{p_{m+1}(x)p_m(y) - p_m(x)p_{m+1}(y)}{x-y} &= p_m(x)p_m(y) \\ &+ \frac{a_{m-1,m-1}}{a_{m,m}} \frac{p_m(x)p_{m-1}(y) - p_{m-1}(x)p_m(y)}{x-y}. \end{aligned}$$

Escrevendo a expressão acima para $m = 0, 1, \dots, n$, (que vale para $m = 0$ com $a_{-1,-1}$ arbitrário) e somando-as, obtemos a importante identidade:

Teorema 2.6 (Identidade de Christoffel-Darboux) Seja $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortonormais - SPO*. Então,

$$\sum_{k=0}^n p_k(x)p_k(y) = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}. \quad (2.14)$$

No caso especial em que $y = x$, chegamos que

$$\sum_{k=0}^n \{p_k(x)\}^2 = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} \{p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)\}. \quad (2.15)$$

2.2 Propriedades elementares dos zeros

Teorema 2.7 *Os zeros dos polinômios ortogonais $P_n(x)$, $n \geq 1$, associados à distribuição $d\alpha(x)$ no intervalo $[a, b]$ são reais, distintos e pertencem ao interior de $[a, b]$.*

Demonstração: (i) Suponhamos que $P_n(x)$ não tenha zeros no interior de $[a, b]$. Então,

$$P_n(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b). \quad (2.16)$$

Consideremos, sem perda de generalidade, $P_n(x) > 0$, $x \in (a, b)$. Temos, pelo Teorema 2.2, que

$$\int_a^b P_n(x) d\alpha(x) = 0, \quad n \geq 1. \quad (2.17)$$

Mas, de (2.16),

$$\int_a^b P_n(x) d\alpha(x) > 0. \quad (2.18)$$

De (2.17) e (2.18) chegamos a um absurdo. Assim, existe pelo menos um zero real de $P_n(x)$ em (a, b) .

(ii) Mostremos que $P_n(x)$ tem n zeros distintos em (a, b) . Sejam $x_{n,i} \in (a, b)$, $i = 1, \dots, r$, $r < n$, os pontos onde $P_n(x)$ muda de sinal, isto é, os zeros de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a, b) . Então, $P_n(x)$ pode ser escrito como

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,r}) q(x), \quad (2.19)$$

onde $q(x)$ terá somente zeros complexos ou de multiplicidade par em (a, b) . Portanto, $q(x)$ não muda de sinal em (a, b) .

Logo, como $r < n$,

$$\int_a^b P_n(x) (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,r}) d\alpha(x) = 0. \quad (2.20)$$

Mas, substituindo (2.19) em (2.20) obtemos

$$\int_a^b (x - x_{n,1})^2 (x - x_{n,2})^2 \dots (x - x_{n,r})^2 q(x) d\alpha(x) \neq 0. \quad (2.21)$$

De (2.20) e (2.21) temos um absurdo. Portanto, $r \geq n$. Como $P_n(x)$ é um polinômio de grau n , $P_n(x)$ tem exatamente n zeros distintos em (a, b) . ■

Observe que podemos mostrar que os zeros de $P_n(x)$ são reais através da fórmula de recorrência para os polinômios ortonormais. Na forma matricial, fazendo $n = 0, 1, \dots, m$, (2.13) pode ser escrita como

$$J_m(x)u(x) = xu(x) - a_m p_m(x)e_m,$$

onde

$$J_m = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-2} & b_{m-2} & a_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1} & b_{m-1} \end{pmatrix}, \quad u(x) = \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{m-2}(x) \\ p_{m-1}(x) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

e

$$e_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^t. \quad (2.24)$$

Consideremos $x_{m,i}$ um zero de $p_m(x)$, $i = 1, \dots, m$. Então,

$$J_m u(x_{m,i}) = x_{m,i} u(x_{m,i}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.25)$$

Portanto, $x_{m,i}$ é um autovalor da matriz J_m com correspondente autovetor $u(x_{m,i})$.

A matriz J_m é tridiagonal e simétrica e é conhecida como *matriz de Jacobi (finita)*. A simetria de J_m implica imediatamente que os autovalores (zeros de $p_m(x)$) são reais.

Consideremos, daqui por diante, $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma SPO com $a_{n,n} > 0$. Então, de (2.15), obtemos a importante desigualdade:

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

Como consequência imediata, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.8 *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO em $[a, b]$, com relação à distribuição $d\alpha(x)$. Então, $P_n(x)$ e $P_{n+1}(x)$, $n \geq 1$, não possuem zeros em comum.*

Além disso, o teorema abaixo mostra que os zeros de dois polinômios de graus consecutivos se entrelaçam.

Teorema 2.9 *Seja $P_n(x)$ pertencente a uma SPO em $[a, b]$ com relação à distribuição $d\alpha(x)$ e sejam $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ os zeros de $P_n(x)$, $x_{n,0} = a$ e $x_{n,n+1} = b$. Então, cada intervalo $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n$, contém exatamente um zero de $P_{n+1}(x)$.*

Demonstração: Sejam $x_{n,k}$ e $x_{n,k+1}$, $1 \leq k \leq n-1$, dois zeros consecutivos de $P_n(x)$. Então,

$$P'_n(x_{n,k})P'_n(x_{n,k+1}) < 0, \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (2.23)$$

Lembrando que o coeficiente do termo de maior grau de $P_n(x)$, $n \geq 1$, é positivo, se fizermos $x = x_{n,k}$ na desigualdade (2.22), teremos:

$$P'_n(x_{n,k})P_{n+1}(x_{n,k}) < 0, \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (2.24)$$

Analogamente, se considerarmos $x = x_{n,k+1}$,

$$P'_n(x_{n,k+1})P_{n+1}(x_{n,k+1}) < 0, \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (2.25)$$

Multiplicando (2.24) e (2.25) e usando (2.23) chegamos que

$$P_{n+1}(x_{n,k})P_{n+1}(x_{n,k+1}) < 0, \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (2.26)$$

Então, existe pelo menos um zero de $P_{n+1}(x)$ entre $x_{n,k}$ e $x_{n,k+1}$, o que resulta em pelo menos $n-1$ zeros de $P_{n+1}(x)$ entre $x_{n,1}$ e $x_{n,n}$.

Precisamos ainda verificar a existência de pelo menos mais dois zeros: um entre $x_{n,0}$ e $x_{n,1}$ e outro entre $x_{n,n}$ e $x_{n,n+1}$.

Primeiramente, consideremos $x = x_{n,n}$ em (2.22). Então, $P'_n(x_{n,n})P_{n+1}(x_{n,n}) < 0$. Como estamos considerando $a_{n,n} > 0$, vemos que $P'_n(x_{n,n}) > 0$. Logo, $P_{n+1}(x_{n,n}) < 0$.

Além disso, como $a_{n+1,n+1} > 0$, $P_{n+1}(x_{n,n+1}) > 0$.

Então, $P_{n+1}(x_{n,n})P_{n+1}(x_{n,n+1}) < 0$. Assim, provamos a existência de pelo menos um zero de $P_{n+1}(x)$ entre $x_{n,n}$ e $x_{n,n+1}$.

Analogamente, se considerarmos $x = x_{n,1}$ em (2.22), provamos a existência de pelo menos um zero entre $x_{n,0}$ e $x_{n,1}$, totalizando os $n + 1$ zeros de $P_{n+1}(x)$.

Dessa forma, temos que existe um, e somente um, zero de $P_{n+1}(x)$ em cada intervalo $(x_{n,k}, x_{n,k+1})$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. ■

Teorema 2.10 *A seguinte decomposição em frações parciais é válida:*

$$\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{\Lambda_k}{(x - x_{n,k})}, \quad \Lambda_k > 0,$$

onde $x_{n,k}$, $k = 1, \dots, n$, são os zeros de $P_n(x)$.

Demonstração: Consideremos o polinômio interpolador de Lagrange de $P_n(x)$ sobre os zeros, $x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$, de $P_n(x)$. Então,

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,1})\pi'(x_{n,i})} P_{n-1}(x_{n,i}),$$

onde $\pi(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,n})$

$$\pi(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,n}) \quad (2.27)$$

é o polinômio dos nós.

Se multiplicarmos ambos os membros de (2.27) pelo coeficiente do termo de maior grau do polinômio $P_n(x)$ teremos:

$$a_{n,n}\pi(x) = a_{n,n}(x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,n}) = P_n(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} P_{n-1}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,1})\pi'(x_{n,i})} P_{n-1}(x_{n,i}) \\ &= P_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{P_{n-1}(x_{n,i})}{(x - x_{n,i})P'_n(x_{n,i})}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{\Lambda_i}{(x - x_{n,i})}, \quad (2.29)$$

onde $\Lambda_i = \frac{P_{n-1}(x_{n,i})}{P'_n(x_{n,i})}$, $i = 1, \dots, n$.

Observe que

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= \frac{P_{n-1}(x_{n,i})}{P'_n(x_{n,i})} = \frac{P_{n-1}(x_{n,i})}{P'_n(x_{n,i})} \frac{P'_n(x_{n,i})}{P'_n(x_{n,i})} \\ &= \frac{P_{n-1}(x_{n,i})P'_n(x_{n,i}) - P'_{n-1}(x_{n,i})P_n(x_{n,i})}{\{P'_n(x_{n,i})\}^2}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade (2.22) temos $\Lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. ■

Teorema 2.11 (Quadratura de Gauss-Jacobi) Se $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ denotam os zeros de $P_n(x)$, então existem números reais $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots, \lambda_{n,n}$ tais que

$$\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = \lambda_{n,1}\rho(x_{n,1}) + \lambda_{n,2}\rho(x_{n,2}) + \dots + \lambda_{n,n}\rho(x_{n,n}), \quad (2.28)$$

sempre que $\rho(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$. A distribuição $d\alpha(x)$ e o inteiro n determinam unicamente esses números $\lambda_{n,k}$. (Os números $\lambda_{n,k}$ são denominados pesos da fórmula de Gauss ou números de Christoffel e $x_{n,k}$, os nós).

Demonstração: Sabemos que o polinômio interpolador de Lagrange $L_{n-1}(x)$ de grau $n - 1$ que coincide com $\rho(x)$ nos pontos $x_{n,k}$, $k = 1, \dots, n$, é dado por:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n \rho(x_{n,k}) \frac{P_n(x)}{(x - x_{n,k})P'_n(x_{n,k})} = \sum_{k=1}^n \rho(x_{n,k}) l_{n,k}(x).$$

Então,

$$\rho(x_{n,k}) - L_{n-1}(x_{n,k}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, $\rho(x) - L_{n-1}(x)$ é divisível por $P_n(x)$, isto é, $\rho(x) - L_{n-1}(x) = P_n(x)r(x)$, com $r(x)$ um polinômio de grau $n - 1$.

Mas,

$$\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n \rho(x_{n,k}) \int_a^b l_{n,k}(x) d\alpha(x).$$

$$\text{Isto nos dá (2.28) com } \lambda_{n,k} = \int_a^b l_{n,k}(x) d\alpha(x) = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x - x_{n,k})P'_n(x_{n,k})} d\alpha(x),$$

$k = 1, 2, \dots, n$. ■

Teorema 2.12 Os números de Christoffel $\lambda_{n,k}$ são positivos e

$$\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2} + \dots + \lambda_{n,n} = \int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a). \quad (2.29)$$

Demonstração: Imediata. Basta considerarmos $f(x) = \left(\frac{\pi(x)}{x - x_{n,k}}\right)^2$ e $f(x) = 1$ na fórmula de quadratura (2.28). ■

São válidas, ainda, as seguintes representações para os pesos (ver Krylov[21]):

$$\lambda_{n,k} = \int_a^b \left(\frac{p_n(x)}{p'_n(x_{n,k})(x - x_{n,k})} \right)^2 d\alpha(x),$$

$$\lambda_{n,k} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \frac{-1}{p_{n+1}(x_{n,k})p'_n(x_{n,k})} = \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n-1}} \frac{-1}{p_{n-1}(x_{n,k})p'_n(x_{n,k})}$$

e

$$(\lambda_{n,k})^{-1} = \sum_{j=0}^n \{p_j(x_{n,k})\}^2.$$

2.3 Polinômios ortogonais clássicos

2.3.1 Polinômios de Jacobi - $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

São ortogonais no intervalo $[-1, 1]$, com relação à função peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, α e β reais.

Através da Fórmula de Rodrigues (Szegő [33], p.67), para α e β arbitrários, os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ satisfazem

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left\{ (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta} \right\}. \quad (2.30)$$

De fato: primeiro, consideramos α e β ambos maiores do que -1 .

Aplicando a fórmula de Leibnitz, temos que o lado direito de (2.30) é da forma

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \rho(x),$$

onde $\rho(x)$ é um polinômio de grau n .

Para mostrar que $\rho(x) = c_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é suficiente provar que

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left\{ (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right\} r(x) dx = 0, \quad (2.31)$$

onde $r(x)$ é um polinômio de grau $n-1$ arbitrário.

Integrando n vezes por partes obtemos que o lado esquerdo de (2.31) é igual a

$$(-1)^n \int_{-1}^1 \left\{ (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right\} r^{(n)}(x) dx$$

que se anula pois $r^{(n)}(x) = 0$.

Determinamos o fator constante fazendo $x = 1$ e usando (2.32), dada a seguir.

Os polinômios de Jacobi serão normalizados de modo a satisfazerem

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)}, \quad n \geq 1. \quad (2.32)$$

Da fórmula de Rodrigues (2.30) obtemos facilmente que

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(-x). \quad (2.33)$$

De (2.32) e (2.33) chegamos que

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}. \quad (2.34)$$

O seguinte teorema nos será de grande utilidade no decorrer do trabalho.

Teorema 2.13 Os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ satisfazem à equação diferencial de segunda ordem:

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0 \quad (2.35)$$

ou

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} y' \right\} + n(n + \alpha + \beta + 1) (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} y = 0.$$

Demonstração: Seja $y(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \in \mathbb{P}_n$. Observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} y' \right\} &= -(\alpha+1)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta+1} y' + (\beta+1)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta} y' \\ &\quad + (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} y'' \\ &= (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \left\{ -(\alpha+1)(1+x)y' + (\beta+1)(1-x)y' + (1-x^2)y'' \right\} \\ &= (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} z(x), \quad \text{onde } z(x) \in \mathbb{P}_n. \end{aligned}$$

Para mostrar que $z(x) = \text{cte } y(x)$, basta provar que, para todo $\rho(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$,

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} z(x) \rho(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left\{ (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} y' \right\} \rho(x) dx = 0.$$

■

Substituindo $n(n+\alpha+\beta+1)$ por γ em (2.35), o teorema seguinte nos diz para quais valores de γ esta equação diferencial possui solução polinomial não-identicamente nula.

Teorema 2.14 *Sejam $\alpha > -1, \beta > -1$. A equação diferencial*

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + \gamma y = 0, \quad (2.36)$$

onde γ é um parâmetro, tem solução polinomial não identicamente nula se, e somente se, γ tem a forma $n(n+\alpha+\beta+1), n = 0, 1, \dots$. A solução é $\text{cte } P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ e não existe solução polinomial que seja linearmente independente de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Demonstração: Seja $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-1)^i$. Substituindo o valor de y em

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + \gamma y = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} &-(x+1) \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)a_i(x-1)^{i-1} - [2(\alpha+1) + (\alpha+\beta+2)(x-1)] \\ &\quad \times \sum_{i=1}^{\infty} i a_i(x-1)^{i-1} + \gamma \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-1)^i = 0. \end{aligned}$$

Daí, outro resultado bastante interessante e que precisaremos mais adiante é o

$$- [2 + (x - 1)] \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)a_i(x-1)^{i-1} - [2(\alpha+1) + (\alpha+\beta+2)(x-1)]$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} i a_i(x-1)^{i-1} + \gamma \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-1)^i = 0.$$

Com isso, vemos que os coeficientes das potências de $(x-1)$ são nulos, isto é,

$$[\gamma - i(i + \alpha + \beta + 1)] a_i - 2(i+1)(i + \alpha + 1)a_{i+1} = 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.37)$$

Suponhamos que y é um polinômio e a_n é o último coeficiente não nulo.

Fazendo $i = n$ em (2.37) obtemos $\gamma = n(n + \alpha + \beta + 1)$.

Reciprocamente, se $\gamma = n(n + \alpha + \beta + 1)$ então, de (2.37), $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$.

Portanto, y é um polinômio de grau n .

Agora, seja $\gamma = n(n + \alpha + \beta + 1)$ e z uma segunda solução de (2.35). Sabemos que z é um polinômio de grau n .

De (2.35), observe que

$$(1 - x^2) [y''z - yz''] + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] [yz' - zy'] = 0. \quad (2.38)$$

Consideremos a função $(1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1} \{yz' - zy'\}$.

Pela equação (2.38), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ (1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1} [yz' - zy'] \} &= (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta} \{ [yz' \\ &- zy'](-(\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)(1-x)) + (1 - x^2) [y''z - yz''] \} \\ &= (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta} \{ (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x) \\ &[yz' - zy'] + (1 - x^2) [y''z - yz''] \} = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$(1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1} \{yz' - zy'\} = c, \quad \forall x,$$

onde c é uma constante.

Fazendo $x \rightarrow \pm 1$, obtemos que $c = 0$. Logo, $y'z - yz' = 0$. Como y e z são polinômios de grau n , segue imediatamente que $y = cte z$. ■

Um outro resultado bastante interessante e que precisaremos mais adiante é o seguinte:

Teorema 2.15 Para $v = 0, 1, \dots$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} P_{2v}^{(\alpha, \alpha)}(x) &= \frac{\Gamma(2v + \alpha + 1)\Gamma(v + 1)}{\Gamma(v + \alpha + 1)\Gamma(2v + 1)} P_v^{(\alpha, -1/2)}(2x^2 - 1) \\ &= (-1)^v \frac{\Gamma(2v + \alpha + 1)\Gamma(v + 1)}{\Gamma(v + \alpha + 1)\Gamma(2v + 1)} P_v^{(-1/2, \alpha)}(1 - 2x^2). \\ P_{2v+1}^{(\alpha, \alpha)}(x) &= \frac{\Gamma(2v + \alpha + 2)\Gamma(v + 1)}{\Gamma(v + \alpha + 1)\Gamma(2v + 2)} x P_v^{(\alpha, 1/2)}(2x^2 - 1) \\ &= (-1)^v \frac{\Gamma(2v + \alpha + 2)\Gamma(v + 1)}{\Gamma(v + \alpha + 1)\Gamma(2v + 2)} x P_v^{(1/2, \alpha)}(1 - 2x^2). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Demonstração: Sabemos que

$$\int_{-1}^1 P_{2n}^{(\alpha, \alpha)}(x) \rho(x) (1 - x^2)^\alpha dx = 0, \quad \forall \rho(x) \in \mathcal{P}_{2n-1}. \quad (2.40)$$

Então, vamos mostrar que

$$I = \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, -1/2)}(2x^2 - 1) \rho(x) (1 - x^2)^\alpha dx = 0, \quad \forall \rho(x) \in \mathcal{P}_{2n-1}.$$

Podemos escrever $\rho(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x)$, onde $\rho_1(x)$ é uma função ímpar dada por

$$a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-3}x^{2n-3} \dots a_1x$$

e $\rho_2(x)$ é uma função par dada por

$$a_{2n-2}x^{2n-2} + a_{2n-4}x^{2n-4} + \dots + a_2x^2 + a_0.$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, -1/2)}(2x^2 - 1) \rho_1(x) (1 - x^2)^\alpha dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, -1/2)}(2x^2 - 1) \rho_2(x) (1 - x^2)^\alpha dx \\ &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, -1/2)}(2x^2 - 1) \rho_2(x) (1 - x^2)^\alpha dx. \end{aligned}$$

Como $\rho_2(x)$ é um polinômio par, podemos escrever $\rho_2(x) = r(x^2)$, onde $r(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$.

Assim,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, -1/2)}(2x^2 - 1) r(x^2) (1 - x^2)^\alpha dx \\ &= 2 \int_0^1 P_n^{(\alpha, -1/2)}(2x^2 - 1) r(x^2) (1 - x^2)^\alpha dx. \end{aligned}$$

Fazendo $y = x^2$, temos

$$I = 2 \int_0^1 P_n^{(\alpha, -1/2)}(2y - 1) r(y) (1 - y)^\alpha \frac{1}{2\sqrt{y}} dy. \quad (2.41)$$

Fazendo, agora, $x = 2y - 1$, obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, -1/2)}(x) r\left(\frac{x+1}{2}\right) \left(1 - \frac{x+1}{2}\right)^\alpha \left(\frac{1+x}{2}\right)^{-1/2} \frac{dx}{2} \\ &= 2^{-\alpha-1/2} \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, -1/2)}(x) r\left(\frac{x+1}{2}\right) (1-x)^\alpha (1+x)^{-1/2} dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P_{2n}^{(\alpha, \alpha)}(x) = c_n P_n^{(\alpha, -1/2)}(2x^2 - 1), \quad (2.40)$$

onde c_n é uma constante.

Fazendo $x = 1$ em (2.40) e usando (2.32), obtemos $c_n = \frac{\Gamma(2n + \alpha + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(2n + 1)}$.

De (2.33), chegamos ao resultado

$$P_{2n}^{(\alpha, \alpha)}(x) = c_n P_n^{(\alpha, -1/2)}(2x^2 - 1) = (-1)^n c_n P_n^{(-1/2, \alpha)}(1 - 2x^2). \quad (2.42)$$

Analogamente, podemos encontrar a segunda igualdade de (2.39). ■

Funções Hipergeométricas

Fazendo $x = 1 - 2x'$ em (2.35) temos:

$$x'(1-x') \frac{d^2 y}{dx'^2} + [\alpha + 1 - (\alpha + \beta + 2)x'] \frac{dy}{dx'} + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0,$$

que é a equação hipergeométrica de Gauss e que tem como solução a função hipergeométrica

$${}_2F_1(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; x') = {}_2F_1\left(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}\right).$$

Logo, pelo Teorema 2.14, se $n \geq 1$, temos

$${}_2F_1\left(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}\right) = cte P_n^{(\alpha, \beta)}(x). \quad (2.44)$$

Como, de (1.7), ${}_2F_1\left(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}\right) = 1$ para $x = 1$, obtemos a importante representação:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \binom{n + \alpha}{n} {}_2F_1\left(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}\right) \quad (2.45)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (n + \alpha + \beta + 1) \dots (n + \alpha + \beta + v) \\ \times (\alpha + v + 1) \dots (\alpha + n) \left(\frac{x-1}{2}\right)^v.$$

Desde que $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é um polinômio em α e β , por (2.41) e como o mesmo acontece com o lado direito de (2.30) quando divididos por $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, segue que (2.30) é válida para α e β arbitrários.

Usando (2.41), notamos que o coeficiente $a_{n,n}$ do termo de maior grau de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é:

$$a_{n,n}^{(\alpha, \beta)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 2^{-n} \binom{2n + \alpha + \beta}{n} \quad (2.42)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2^n n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}.$$

Outra aplicação de (2.41) é a fórmula

$$\frac{d}{dx} \{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\} = \frac{1}{2} (n + \alpha + \beta + 1) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) \quad (2.43)$$

que segue imediatamente da expansão de ambos os membros de (1.9) de acordo com (2.41).

Calculando a n -ésima derivada em (2.30) pela Regra de Leibnitz, obtemos a representação:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{v=0}^n \binom{n + \alpha}{n - v} \binom{n + \beta}{v} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-v}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n+\alpha}{n} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n \sum_{v=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-v+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+v)} \binom{n+\beta}{v} \\
&\times \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^v = \binom{n+\alpha}{n} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n F\left(-n, -n-\beta; \alpha+1; \frac{x-1}{x+1}\right).
\end{aligned} \quad (2.44)$$

Obtemos, também, a fórmula:

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2 dx = h_n^{(\alpha,\beta)}, \quad (2.45)$$

onde

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

A fórmula de recorrência, válida para quaisquer três polinômios ortogonais de Jacobi consecutivos, é dada por:

$$\begin{aligned}
2n(n+\alpha+\beta) &\times (2n+\alpha+\beta-2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (2n+\alpha+\beta-1) \\
&\times \left\{ (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x + \alpha^2 - \beta^2 \right\} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\
&- 2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots,
\end{aligned}$$

com $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ e $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)x + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

O coeficiente de $xP_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ é obtido de (2.42) e calculamos os coeficientes de $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ e $P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x)$ substituindo os valores $x = +1$ e $x = -1$ na relação (2.9).

Observação: Quando $\alpha = \beta = 0$, temos os **Polinômios de Legendre**, que são ortogonais em $[-1, 1]$ relativamente à função peso $w(x) = 1$.

2.3.2 Polinômios Ultrasféricos

Fazendo $\alpha = \beta = \lambda - 1/2 \neq 0$ nos polinômios de Jacobi, obtemos os **Polinômios Ultrasféricos ou de Gegenbauer**, que são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$, com relação à função peso $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$.

A notação usual para os polinômios Ultrasféricos é $P_n^{(\lambda)}(x)$, onde

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda + 1/2)\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n + \lambda + 1/2)} P_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}(x), \quad \alpha = \lambda - 1/2. \quad (2.46)$$

Vamos supor primeiro que $\alpha > -1$ ou, $\lambda > -1/2$.

Se $\alpha = -1/2$ ou $\lambda = 0$, de (1.5), o polinômio $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é identicamente nulo para $n \geq 1$. Com $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, obtemos:

$$P_n^{(\lambda)}(1) = \binom{n + 2\lambda - 1}{n} \quad \text{e} \quad P_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\lambda)}(x).$$

Substituindo $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$ em (2.41) obtemos a importante representação:

$$\begin{aligned} P_n^{(\lambda)}(x) &= \binom{n + 2\lambda - 1}{n} {}_2F_1\left(-n, n + 2\lambda; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \\ &= 2^n \binom{n + \lambda - 1}{n} (x-1)^n {}_2F_1\left(-n, -n - \lambda + \frac{1}{2}; -2n - 2\lambda + 1; \frac{2}{1-x}\right). \end{aligned}$$

As últimas fórmulas definem $P_n^{(\lambda)}(x)$ para todos os valores de λ . Se necessário, para alguns valores especiais de λ , como $\lambda = \lambda_0$, as fórmulas podem ser interpretadas como limites para $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Para $\lambda = -m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, temos $P_n^{(\lambda)}(x) = 0$ se $n > 2m$.

Neste caso,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow (-m)} \frac{P_n^{(\lambda)}(x)}{\lambda + m} &= \left(\frac{d}{d\lambda} P_n^{(\lambda)}(x) \right)_{\lambda \rightarrow (-m)} \\ &= 2 \frac{(2m)!(n - 2m - 1)!}{n!} {}_2F_1\left(-n, n - 2m; -m + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \end{aligned}$$

existe.

Outra fórmula envolvendo $P_n^{(\lambda)}(x)$, consequência imediata de (2.43), é a seguinte:

$$\frac{d}{dx} \{P_n^{(\lambda)}(x)\} = 2\lambda P_{n-1}^{(\lambda+1)}(x). \quad (2.47)$$

Finalmente obtemos algumas fórmulas especiais envolvendo as funções hipergeométricas. Combinando (2.39) e (2.41) temos:

$$P_{2v}^{(\lambda)}(x) = \binom{2v + 2\lambda - 1}{2v} {}_2F_1\left(-v, v + \lambda; \lambda + \frac{1}{2}; 1 - x^2\right)$$

$$= (-1)^v \binom{v+\lambda-1}{v} {}_2F_1\left(-v, v+\lambda; \frac{1}{2}; x^2\right); \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} P_{2v+1}^{(\lambda)}(x) &= \binom{2v+2\lambda}{2v+1} x {}_2F_1\left(-v, v+\lambda+1; \lambda+\frac{1}{2}; 1-x^2\right) \\ &= (-1)^v 2\lambda \binom{v+\lambda}{v} x {}_2F_1\left(-v, v+\lambda+1; \frac{3}{2}; x^2\right). \end{aligned}$$

Os fatores constantes podem ser determinados substituindo-se $x = 1$ e comparando-se as maiores potências.

Os polinômios ultrasféricos satisfazem à seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0. \quad (2.49)$$

No decorrer do trabalho necessitaremos também das seguintes integrais definidas. Sejam $I_\nu = I_\nu(n, \lambda)$ definidas por:

$$I_\nu = I_\nu(n, \lambda) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\nu-\frac{1}{2}} [P_n^{(\lambda)}(x)]^2 dx, \quad \lambda > \nu - \frac{1}{2}, \quad \nu = 0, 1, 2. \quad (2.50)$$

Particularmente, I_0 é bem conhecida pois é $\langle P_n^{(\lambda)}, P_n^{(\lambda)} \rangle$, isto é,

$$I_0(n, \lambda) = \frac{2^{1-2\lambda} \Gamma(n+2\lambda)}{n!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2} \pi, \quad \lambda > -\frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.51)$$

A fórmula para I_1 é menos familiar:

$$I_1(n, \lambda) = \frac{2^{1-2\lambda} \Gamma(n+2\lambda)}{n!(\lambda - \frac{1}{2})[\Gamma(\lambda)]^2} \pi, \quad \lambda > \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.52)$$

De fato, para $v = 1, 2$ e $\lambda > v - \frac{1}{2}$, temos, por (2.50),

$$\begin{aligned} (2\lambda - 2v + 1)(I_\nu - I_{\nu-1}) &= (2\lambda - 2v + 1) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\nu-\frac{1}{2}} x^2 [P_n^{(\lambda)}(x)]^2 dx \\ &= - \int_{-1}^1 [(1-x^2)^{\lambda-\nu+\frac{1}{2}}]' x [P_n^{(\lambda)}(x)]^2 dx \\ &= \left[-(1-x^2)^{\lambda-\nu+\frac{1}{2}} [P_n^{(\lambda)}(x)]^2 \right]_{-1}^1 \\ &\quad + \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\nu+\frac{1}{2}} \left[[P_n^{(\lambda)}(x)]^2 + 2x P_n^{(\lambda)}(x) [P_n^{(\lambda)}(x)]' \right] dx \\ &= I_{\nu-1} + 2 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\nu+\frac{1}{2}} x [P_n^{(\lambda)}(x)]' P_n^{(\lambda)}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Para $\nu = 1$, a última integral pode ser facilmente determinada. Como $x [P_n^{(\lambda)}(x)]' = nP_n^{(\lambda)}(x) + \sum_{i=0}^{n-2} c_{n,i}x^i$, onde $c_{n,i}$ são constantes, temos, pela relação de ortogonalidade, que esta última integral é dada por

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} x [P_n^{(\lambda)}(x)]' P_n^{(\lambda)}(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \left(nP_n^{(\lambda)}(x) + \sum_{i=0}^{n-2} c_{n,i}x^i \right) P_n^{(\lambda)}(x) dx \\ &= n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} [P_n^{(\lambda)}(x)]^2 dx = nI_0. \end{aligned}$$

Assim, por (2.53), temos

$$(2\lambda - 1)I_1 = 2(n + \lambda)I_0, \quad \text{para } \lambda > \frac{1}{2}. \quad (2.54)$$

Logo, por (2.51) e pela equação acima, obtemos (2.52).

Finalmente, o caso $\nu = 2$ ainda não aparece nos livros sobre integrais definidas.

Por (2.49), temos, para $y = P_n^{(\lambda)}(x)$,

$$(1-x^2) [P_n^{(\lambda)}(x)]'' - (2\lambda + 1)x [P_n^{(\lambda)}(x)]' + n(n+2\lambda)P_n^{(\lambda)}(x) = 0.$$

Multiplicando esta identidade por $(1-x^2)^{\lambda-\frac{3}{2}}P_n^{(\lambda)}(x)$ e integrando no intervalo $[-1, 1]$, obtemos

$$\begin{aligned} & (2\lambda + 1) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{3}{2}} x [P_n^{(\lambda)}(x)]' P_n^{(\lambda)}(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} x [P_n^{(\lambda)}(x)] P_n^{(\lambda)}(x) dx + n(n+2\lambda)I_1, \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde a integral do lado direito é nula devido à ortogonalidade. Assim, de (2.53),

$$2 \left(\lambda - \frac{3}{2} \right) \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) I_2 = [(n + \lambda)^2 + \lambda^2 - \lambda - 1] I_1. \quad (2.55)$$

Logo, de (2.52), obtemos

$$I_2(n, \lambda) = \frac{\pi 2^{-2\lambda} \Gamma(n+2\lambda)}{n! [\Gamma(\lambda)]^2} \frac{(n + \lambda)^2 + \lambda^2 - \lambda - 1}{(\lambda + \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{3}{2})}, \quad \lambda > \frac{3}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.56)$$

2.3.3 Polinômios de Tchebychev de 1ª espécie - $T_n(x)$

São ortogonais no intervalo $[-1, 1]$, com relação à função peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e definidos por:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Claramente, temos que $T_n(x) = 0$ para $n \arccos x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $k = 1, \dots, n$.

Assim, os zeros de $T_n(x)$ são determinados por $t_{n,k} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \dots, n$.

O coeficiente do termo de maior grau é dado por $a_{n,n} = 2^{n-1}$ e os polinômios satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade:

$$\langle T_n, T_m \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \neq m; \\ \pi & , \text{ se } n = m = 0; \\ \frac{\pi}{2} & , \text{ se } m = n \neq 0. \end{cases}$$

Observe que $T_n(x) = c_n P_n^{(-1/2, -1/2)}(x)$, onde c_n é uma constante que depende apenas de n .

Usando (2.43), notamos que $T'_n(x) = c_n P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$, $T''_n(x) = c_n P_n^{(3/2, 3/2)}(x)$ e, assim, sucessivamente.

De (2.32), após cálculos simples, obtemos a seguinte relação entre os polinômios de Tchebychev de 1ª espécie e os de Jacobi:

$$P_n^{(-1/2, -1/2)}(x) = \frac{1.3. \dots (2n-1)}{2.4. \dots 2n} T_n(x) = \frac{1.3. \dots (2n-1)}{2.4. \dots 2n} \cos n\theta, \quad (2.57)$$

onde $x = \cos \theta$.

2.3.4 Polinômios de Tchebychev de 2ª espécie - $U_n(x)$

Os polinômios de Tchebychev de 2ª espécie são definidos por:

$$U_n(x) = \frac{\sin [(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n \geq 0, \quad x \in [-1, 1].$$

São ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ e satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade:

$$\langle U_n, U_m \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \neq m; \\ \frac{\pi}{2} & , \text{ se } m = n. \end{cases}$$

O coeficiente do termo de maior grau é dado por $a_{n,n} = 2^n$ e $U_n(x) = d_n P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$, onde $d_n = d_n(n)$ é constante.

De (2.32), obtemos a seguinte relação entre os polinômios de Tchebychev de 2ª espécie e os de Jacobi:

$$P_n^{(1/2, 1/2)}(x) = 2 \frac{1.3. \dots (2n+1)}{2.4. \dots (2n+2)} U_n(x) = 2 \frac{1.3. \dots (2n+1)}{2.4. \dots (2n+2)} \frac{\text{sen}[(n+1)\theta]}{\text{sen}\theta}, \quad (2.58)$$

onde $x = \cos\theta$.

De (2.57) e (2.58) podemos demonstrar que são válidas as seguintes representações para os polinômios de Jacobi, respectivamente para $\alpha = -1/2$ e $\beta = 1/2$ e $\alpha = 1/2$ e $\beta = -1/2$:

$$P_n^{(-1/2, 1/2)}(x) = \frac{1.3. \dots (2n-1)}{2.4. \dots 2n} \frac{\cos\{(2n+1)\theta/2\}}{\cos(\theta/2)} \quad (2.59)$$

e

$$P_n^{(1/2, -1/2)}(x) = \frac{1.3. \dots (2n-1)}{2.4. \dots 2n} \frac{\text{sen}[(2n+1)\theta/2]}{\text{sen}(\theta/2)}, \quad (2.60)$$

onde $x = \cos\theta$.

2.3.5 Polinômios de Laguerre - $L_n^{(\alpha)}(x)$

Os polinômios de Laguerre são ortogonais no intervalo $[0, \infty)$, com relação à função peso $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$, e podem ser definidos, pela Fórmula de Rodrigues, por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x}].$$

$a_{n,n} = 1$ é o coeficiente do termo de maior grau e eles satisfazem à equação diferencial dada por

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0.$$

Conservam a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \neq m; \\ n! \Gamma(\alpha + n + 1) & , \text{ se } n = m. \end{cases}$$

Fazendo o limite $\lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; \beta^{-1}x)$, obtemos a série hipergeométrica

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+v-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+v-1)} \frac{x^v}{v!}.$$

Pode-se, então, demonstrar que (ver Szegő [33], p. 103) $L_n^{(\alpha)}(x)$ é dado em termos das funções hipergeométricas, por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x).$$

Daí, obtemos a importante relação entre os polinômios de Jacobi e de Laguerre

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(1 - 2\beta^{-1}x).$$

Como consequência, se $l_{n,1}^{(\alpha)} < \dots < l_{n,n}^{(\alpha)}$ denotam os zeros de $L_n^{(\alpha)}(x)$, temos:

$$l_{n,n-j+1}^{(\alpha)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta}{2} (1 - x_{n,j}^{(\alpha, \beta)}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Portanto, obtemos os seguintes resultados para o menor e o maior zeros do polinômio de Laguerre:

$$l_{n,1}^{(\alpha)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta}{2} (1 - x_{n,n}^{(\alpha, \beta)}) \quad (2.61)$$

$$l_{n,n}^{(\alpha)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta}{2} (1 - x_{n,1}^{(\alpha, \beta)}). \quad (2.62)$$

2.3.6 Polinômios de Hermite - $H_n(x)$

São ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$, com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$.

Pela Fórmula de Rodrigues, podem ser definidos por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$$



e satisfazem à seguinte equação diferencial:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0. \quad (2.62)$$

O coeficiente do termo de maior grau é dado por $a_{n,n} = 2^n$ e eles satisfazem

$$\langle H_n, H_m \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \neq m; \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & , \text{ se } n = m. \end{cases}$$

Um resultado muito interessante sobre o maior zero de $H_n(x)$, demonstrado por Elbert e Laforgia em [9], é o seguinte:

Teorema 2.16 *Seja $x_{n,1}^{(\lambda)}$ o maior zero do polinômio ultrasférico $P_n^{(\lambda)}(x)$. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda} x_{n,1}^{(\lambda)} = h_{n,1},$$

onde $h_{n,1}$ é o maior zero do polinômio de Hermite $H_n(x)$.

Também encontramos em Elbert & Laforgia [9], o seguinte resultado para os zeros dos polinômios ultrasféricos:

$$\sqrt{\lambda} x_{n,k}^{(\lambda)} = h_{n,k} \left[1 - \frac{2n-1+2h_{n,k}^2}{8\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] \quad (\lambda \rightarrow \infty), \quad (2.63)$$

onde $h_{n,k}$ denota o zero correspondente do polinômio de Hermite $H_n(x)$.

2.3.7 Funções de Bessel

A função de Bessel de primeira espécie de ordem n pode ser definida como

$$J_\alpha(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v (z/2)^{\alpha+2v}}{v! \Gamma(v+\alpha+1)}$$

e satisfaz à equação diferencial

$$y'' + z^{-1}y' + (1 - \alpha^2 z^{-2})y = 0. \quad (2.64)$$

Aplicando (1.3) à equação acima, temos

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(k^2 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2} \right) u = 0, \quad \text{de solução} \quad u(x) = x^{1/2} J_\alpha(kx) \quad (2.65)$$

e

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{k}{x} + \frac{1 - \alpha^2}{4x^2} \right) u = 0, \quad \text{de solução} \quad u(x) = x^{1/2} J_\alpha \{ 2(kx)^{1/2} \}.$$

Comportamento dos Zeros dos Polinômios Ortogonais

Neste capítulo, nosso objetivo é fazer um estudo sobre outras propriedades referentes à localização dos zeros dos polinômios ortogonais, tais como sua densidade no intervalo $[a, b]$ e a distância entre zeros consecutivos. Além disso, se $w(x) = w(x, \tau)$, onde τ é um parâmetro, alguns resultados sobre a dependência dos zeros de $P_n(x, \tau)$ com relação a esse parâmetro τ serão também apresentados. Em particular, discutiremos a localização e desigualdades para os zeros de alguns polinômios ortogonais clássicos. Os principais resultados são os Teoremas de Markov e Sturm.

3.1 Densidade dos zeros

Teorema 3.1 *Sejam $dw(x)$ uma distribuição no intervalo finito $[a, b]$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ a sequência dos polinômios ortogonais associada. Seja $[a', b']$ um subintervalo de $[a, b]$ tal que $\int_{a'}^{b'} dw(x) > 0$. Então, para n suficientemente grande, todo polinômio $P_n(x)$ tem pelo menos um zero em $[a', b']$.*

Demonstração: Seja $\rho(x)$ um polinômio arbitrário de grau m , $\rho(x)$ menor ou igual a zero em $[a, b]$ exceto, possivelmente, em $[a', b']$. Tomemos $P_n(x)$ tal que seus zeros $x_{k,n} \notin [a', b']$, $k = 1, \dots, n$, e seja $m \leq 2n - 1$. Assim, pela fórmula de quadratura de Gauss (2.28),

$$\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} \rho(x_{k,n}) \leq 0.$$

Pelo Teorema de Weierstrass 1.2, segue que

Comportamento dos Zeros dos Polinômios Ortogonais

Neste capítulo, nosso objetivo é fazer um estudo sobre outras propriedades referentes à localização dos zeros dos polinômios ortogonais, tais como sua densidade no intervalo $[a, b]$ e a distância entre zeros consecutivos. Além disso, se $w(x) = w(x, \tau)$, onde τ é um parâmetro, alguns resultados sobre a dependência dos zeros de $P_n(x, \tau)$ com relação a esse parâmetro τ serão também apresentados. Em particular, discutiremos a localização e desigualdades para os zeros de alguns polinômios ortogonais clássicos. Os principais resultados são os Teoremas de Markov e Sturm.

Lema 3.2 Seja $x = \cos \alpha$. A função definida por

3.1 Densidade dos zeros

Teorema 3.1 Sejam $d\alpha(x)$ uma distribuição no intervalo finito $[a, b]$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência dos polinômios ortogonais associada. Seja $[a', b']$ um subintervalo de $[a, b]$ tal que $\int_{a'}^{b'} d\alpha(x) > 0$. Então, para n suficientemente grande, todo polinômio $P_n(x)$ tem pelo menos um zero em $[a', b']$.

$$\cos(N\alpha) = \cos[(N-1)\alpha + \alpha] = \cos[(N-1)\alpha]\cos\alpha - \sin[(N-1)\alpha]\sin\alpha$$

Demonstração: Seja $\rho(x)$ um polinômio arbitrário de grau m , $\rho(x)$ menor ou igual a zero em $[a, b]$ exceto, possivelmente, em $[a', b']$. Tomemos $P_n(x)$ tal que seus zeros $x_{n,k} \notin [a', b']$, $k = 1, \dots, n$, e seja $m \leq 2n - 1$. Assim, pela fórmula de quadratura de Gauss (2.28),

$$\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} \rho(x_{n,k}) \leq 0.$$

Pelo Teorema de Weierstrass 1.2, segue que

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \leq 0,$$

onde $f(x)$ é contínua mas não é maior do que zero em $[a, b]$ exceto, possivelmente, em $[a', b']$. Se considerarmos

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } a \leq x \leq a' \text{ e } b' \leq x \leq b \\ (x - a')(b' - x) & , \text{ se } a' < x < b' \end{cases}$$

teremos $\int_a^b f(x) d\alpha(x) > 0$, o que é um absurdo.

Portanto, $P_n(x)$ tem pelo menos um zero em $[a', b']$. ■

3.1.1 Distância entre zeros consecutivos

A partir deste ponto, vamos considerar distribuições do tipo $w(x)dx$.

Lema 3.2 *Seja $x = \cos \alpha$. A função definida por*

$$f(x) = \left(\frac{\sin[N\alpha/2]}{N \sin[\alpha/2]} \right)^{2m},$$

onde N e m são inteiros positivos, é um polinômio de grau $m(N-1)$ em x .

Demonstração: Primeiramente vejamos que $\left[\frac{1 - \cos(N\alpha)}{1 - \cos \alpha} \right]$ é um polinômio de grau $N-1$ em x . Temos que

$$\cos(N\alpha) = \cos[(N-1)\alpha + \alpha] = \cos[(N-1)\alpha] \cos \alpha - \sin[(N-1)\alpha] \sin \alpha$$

e demonstração: Sejam k um inteiro fixo, $0 \leq k \leq \alpha$, $\gamma = (\theta_{k,k+1} + \theta_{k,k})/2$.

$$\cos[(N-2)\alpha] = \cos[(N-1)\alpha - \alpha] = \cos[(N-1)\alpha]\cos\alpha + \sin[(N-1)\alpha]\sin\alpha.$$

Assim, $\cos(N\alpha) + \cos[(N-2)\alpha] = 2\cos[(N-1)\alpha]\cos\alpha$. Logo,

$$\frac{1 - \cos(N\alpha)}{1 - \cos\alpha} + \frac{1 - \cos[(N-2)\alpha]}{1 - \cos\alpha} = 2 \frac{(1 - \cos[(N-1)\alpha])}{1 - \cos\alpha} \cos\alpha.$$

Seja $g_N(\cos\alpha) = \frac{1 - \cos(N\alpha)}{1 - \cos\alpha}$. Temos, então,

$$g_N(\cos\alpha) + g_{N-2}(\cos\alpha) = 2g_{N-1}(\cos\alpha)\cos\alpha.$$

Daí, como $x = \cos(\alpha)$, obtemos $g_N(x) = 2xg_{N-1}(x) - g_{N-2}(x)$.

Como $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = 2x + 2$, facilmente mostramos, por indução sobre N , que $g_N(x)$ é um polinômio de grau $N-1$ em x .

Consideremos, agora, a função

$$f(x) = \left[\frac{\sin(N\alpha/2)}{N\sin(\alpha/2)} \right]^{2m}, \quad x = \cos\alpha.$$

Temos que

$$f(x) = \left[\frac{\sin^2(N\alpha/2)}{N^2\sin^2(\alpha/2)} \right]^m = \frac{1}{N^{2m}} \left[\frac{\sin^2(N\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)} \right]^m = \frac{1}{N^{2m}} \left[\frac{1 - \cos(N\alpha)}{1 - \cos\alpha} \right]^m.$$

Como $\left[\frac{1 - \cos(N\alpha)}{1 - \cos\alpha} \right]$ é um polinômio de grau $N-1$ em x , chegamos ao resultado desejado. ■

Utilizaremos o lema anterior na demonstração do seguinte teorema:

Teorema 3.3 *Seja $w(x)$ uma função peso no intervalo finito $[a, b]$, limitada por zero, isto é, $w(x) \geq \mu > 0$. Sejam $x_{n,1} > x_{n,2} > \dots > x_{n,n}$ os zeros do polinômio ortonormal associado, $p_n(x)$, em ordem decrescente. Se*

$$x_{n,k} = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\cos(\theta_{n,k}), \quad 0 < \theta_{n,k} < \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

então,

$$\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k} < K \frac{\log(n)}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad \theta_{n,0} = 0, \quad \theta_{n,n+1} = \pi. \quad (3.1)$$

A constante K depende somente de μ, a e b .

Demonstração: Sejam k um inteiro fixo, $0 \leq k \leq n$, $\gamma = (\theta_{n,k+1} + \theta_{n,k})/2$ e

$$\rho(x) = \rho\left(\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\cos\theta\right)$$

definida por

$$2\rho(x) = \left(\frac{\text{sen}[N(\gamma+\theta)/2]}{N\text{sen}[(\gamma+\theta)/2]}\right)^{2m} + \left(\frac{\text{sen}[N(\gamma-\theta)/2]}{N\text{sen}[(\gamma-\theta)/2]}\right)^{2m}, \quad (3.3)$$

onde N e m são inteiros positivos. Pelo Lema 3.2, os termos do lado direito representam o mesmo polinômio trigonométrico de grau $m(N-1)$, tomados alternadamente com argumentos $(\gamma+\theta)$ e $(\gamma-\theta)$.

Temos que

$$(\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k})/4 \leq \gamma/2 < (\gamma + \pi)/2 \leq \pi - (\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k})/4.$$

Assim, para $1 \leq k \leq n$,

$$0 < (\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k})/4 < (\gamma + \theta_{n,k})/2 < \pi - (\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k})/4,$$

de modo que

$$\left(\text{sen}\frac{\gamma + \theta_{n,k}}{2}\right)^{-1} < \left(\text{sen}\frac{\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k}}{4}\right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Para $|\text{sen}(\gamma - \theta_{n,k})/2|^{-1}$, temos:

$$\left(\text{sen}\frac{\gamma + \theta_{n,k+1}}{2}\right)^{-1} \leq \left(\text{sen}\frac{\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k}}{4}\right)^{-1},$$

desde que $|\gamma - \theta_{n,k}| \geq (\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k})/2$.

Assim,

$$\rho(x_{n,k}) \leq \left(N\text{sen}\frac{\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k}}{4}\right)^{-2m}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Supondo $m(N-1) \leq 2n-1$, usando a fórmula de Quadratura de Gauss (2.28), obtemos

$$\int_a^b \rho(x)w(x)dx \leq \left(N\text{sen}\frac{\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k}}{4}\right)^{-2m} \int_a^b w(x)dx. \quad (3.2)$$

Por outro lado, $\rho(x) \geq 1/2$ para $\theta = \gamma$, de modo que se

$$x_0 = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\cos\gamma,$$

obtemos, do último resultado,

$$\int_a^b \rho(x)w(x)dx \geq \mu \int_a^b \rho(x)dx \geq \mu Cn^{-2}\rho(x_0) \geq \frac{1}{2}\mu Cn^{-2}, \quad (3.3)$$

com C constante positiva que depende somente de a e b .

Comparando (3.2) e (3.3), temos

$$\frac{1}{2}\mu Cn^{-2} \leq \left(N \operatorname{sen} \frac{\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k}}{4} \right)^{-2m} \int_a^b w(x)dx$$

ou,

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k}}{4} \right) \leq N^{-1} [(\mu C/2)^{-1} n^2]^{1/(2m)} \left[\int_a^b w(x)dx \right]^{1/(2m)}.$$

Substituindo $N = [n/\log(n)]$ e $m = [\log(n)]$, vemos que a condição $m(N-1) \leq 2n-1$ é satisfeita para valores grandes de n e (3.1) segue imediatamente. ■

Teorema 3.4 *Seja $w(x)$ uma função peso no intervalo $[-1, 1]$ e suponhamos que*

$$A \leq (1-x^2)^{1/2}w(x) \leq B, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

onde A e B são constantes positivas. Se $x_{n,k} = \cos\theta_{n,k}$, $0 < \theta_{n,k} < \pi$, $k = 1, 2, \dots, n$, são os zeros, em ordem decrescente, do polinômio ortonormal $p_n(x)$ associado a $w(x)$, então,

$$\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k} < \frac{4\pi B}{A} \frac{1}{n}, \quad k = 0, \dots, n, \quad \theta_{n,0} = 0, \quad \theta_{n,n+1} = \pi. \quad (3.4)$$

Demonstração: Sejam $\lambda_{n,k}$ os números de Christoffel correspondentes a $x_{n,k}$. Então,

$$\begin{aligned} A(\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k}) &\leq \int_{\theta_{n,k}}^{\theta_{n,k+1}} w(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta d\theta \\ &= \int_{x_{n,k+1}}^{x_{n,k}} w(x)dx \leq \lambda_{n,k} + \lambda_{n,k+1}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$k = 0, 1, \dots, n$, $\lambda_0 = \lambda_{n+1} = 0$.

Por outro lado,

$$\rho(x) = \rho(\cos \theta) = \left(\frac{\text{sen}[n(\theta - \theta_{n,k})/2]}{n \text{sen}[(\theta - \theta_{n,k})/2]} \right)^2 + \left(\frac{\text{sen}[n(\theta + \theta_{n,k})/2]}{n \text{sen}[(\theta + \theta_{n,k})/2]} \right)^2$$

é um polinômio de grau $n - 1$ em $\cos \theta$. Além disso, $\rho(x_{n,k}) = \rho(\cos \theta_{n,k}) \geq 1$, é tal que

$$\begin{aligned} \lambda_{n,k} &\leq \sum_{v=1}^n \lambda_{n,v} \rho(x_{n,v}) = \int_{-1}^1 \rho(x) w(x) dx \leq B \int_0^\pi \rho(\cos \theta) d\theta \\ &= B \int_{-\pi}^\pi \left(\frac{\text{sen}(n\theta/2)}{n \text{sen}(\theta/2)} \right)^2 d\theta = \frac{2\pi B}{n}. \end{aligned}$$

Combinando este resultado com (3.5), temos (3.4). ■

3.1.2 Variação dos zeros com um parâmetro

O resultado seguinte é o mais importante desta seção, pois nos permite interpretar o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais em relação ao parâmetro do qual dependem.

Teorema 3.5 (A. Markov) *Seja $w(x) = w(x, \tau)$ uma função peso no intervalo $[a, b]$, que depende do parâmetro τ , tal que $w(x, \tau)$ é positiva e contínua para $a < x < b$ e $\tau_1 < \tau < \tau_2$. Consideremos, também, que as derivadas parciais $w_\tau(x, \tau)$ existem e são contínuas para $a < x < b$ e $\tau_1 < \tau < \tau_2$ e que as integrais*

$$\int_a^b x^v w_\tau(x, \tau) dx, \quad v = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1,$$

convergem uniformemente em todo subintervalo fechado $\tau' \leq \tau \leq \tau''$ do intervalo aberto (τ_1, τ_2) . Se os zeros de $P_n(x) = P_n(x, \tau)$ são denotados por $x_{n,1}^{(\tau)} > x_{n,2}^{(\tau)} > \dots > x_{n,n}^{(\tau)}$, o v -ésimo zero, $x_{n,v}^{(\tau)}$, (para um valor fixo de v) é uma função crescente de τ se w_τ/w é uma função crescente de x , $a < x < b$.

Demonstração: Seja $d\alpha(x) = w(x, \tau)dx$. Sabemos que

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\alpha(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

convergem uniformemente para $\tau' \leq \tau \leq \tau''$ e as relações (3.6) podem ser diferenciadas em relação a τ , para $v = 0, 1, \dots, 2n - 1$.

Seja $a < a' < b' < b$. Para $a' \leq x \leq b'$ e $\tau' \leq \tau \leq \tau''$, a função $w(x, \tau)$ tem um mínimo positivo. Daí, os determinantes de Hankel D_{n-1} (dados pela definição 2.3) são uniformemente limitados por zero se $\tau' \leq \tau \leq \tau''$.

De acordo com (2.8), os coeficientes de $p_n(x)$ e também os zeros $x_{n,v}^{(\tau)}$, que são todos distintos, possuem derivadas contínuas para $\tau_1 < \tau < \tau_2$.

Consideremos $\rho(x)$ um polinômio de grau $2n - 1$ fixo e apliquemos a fórmula de Quadratura de Gauss com $d\alpha(x) = w(x, \tau)dx$.

Os números de Christoffel $\lambda_{n,v} = \lambda_{n,v}(\tau) = \int_a^b \left(\frac{p_n(x)}{p'_n(x_{n,v})(x - x_{n,v})} \right)^2 d\alpha(x)$, $v = 1, 2, \dots, n$, são funções de τ com derivadas contínuas.

Derivando $\int_a^b \rho(x)w(x)dx = \sum_{v=1}^n \lambda_{n,v}\rho(x_{n,v})$ em relação a τ , obtemos

$$\int_a^b w_\tau(x, \tau)\rho(x)dx = \sum_{v=1}^n \lambda_{n,v}\rho'(x_{n,v})x'_{n,v}(\tau) + \sum_{v=1}^n \lambda'_{n,v}(\tau)\rho(x_{n,v}).$$

Agora, substituindo $\rho(x) = \frac{p_n(x)^2}{x - x_{n,v}}$ ($\rho'(x_{n,v}) = p'_n(x_{n,v})^2$), temos

$$\int_a^b w_\tau(x, \tau) \frac{p_n(x)^2}{x - x_{n,v}} dx = \lambda_{n,v}(\tau) [p'_n(x_{n,v})]^2 x'_{n,v}(\tau), \quad (3.7)$$

desde que $\rho'(x_{n,\mu}) = 0$ se $\mu \neq v$.

O lado esquerdo da expressão (3.7) pode ser escrito da forma

$$\int_a^b \left[w_\tau(x, \tau) - \frac{w_\tau(x_{n,v}, \tau)}{w(x_{n,v}, \tau)} w(x, \tau) \right] \frac{p_n(x)^2}{x - x_{n,v}} dx, \quad (3.8)$$

já que o segundo termo da integral acima é zero devido à ortogonalidade. Assim, como w_τ/w é uma função crescente de x , a diferença $\frac{w_\tau(x, \tau)}{w(x, \tau)} - \frac{w_\tau(x_{n,v}, \tau)}{w(x_{n,v}, \tau)}$ terá o mesmo sinal de $(x - x_{n,v})$. Portanto, $(x_{n,v}^{(\tau)})' > 0$.

Isto completa a demonstração. ■

Teorema 3.6 *Sejam $w(x)$ e $W(x)$ funções peso em $[a, b]$, positivas e contínuas para $a < x < b$. Seja $W(x)/w(x)$ crescente. Se $x_{n,v}$ e $X_{n,v}$, $v = 1, \dots, n$, denotam, em ordem*

decrecente, os zeros dos correspondentes polinômios ortogonais de grau n , então

$$x_{n,v} < X_{n,v}, \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração: Definindo $w(x, \tau) = (1 - \tau)w(x) + \tau W(x)$, $0 \leq \tau \leq 1$, vemos que

$$\frac{w_\tau(x, \tau)}{w(x, \tau)} = \frac{-w(x) + W(x)}{(1 - \tau)w(x) + \tau W(x)} = \tau^{-1} - \frac{\tau^{-1}}{1 - \tau + \tau \frac{W(x)}{w(x)}}$$

é uma função crescente de x , $0 < \tau < 1$. Como temos $w(x, 0) = w(x)$ e $w(x, 1) = W(x)$, pelo teorema anterior, segue o resultado desejado. ■

3.2 Desigualdades para os zeros dos polinômios ortogonais clássicos

Consideremos os zeros $x_{n,v}^{(\alpha, \beta)} = \cos \theta_{n,v}$ do polinômio de Jacobi, $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ em ordem decrescente:

$$+1 > x_{n,1}^{(\alpha, \beta)} > x_{n,2}^{(\alpha, \beta)} > \dots > x_{n,n}^{(\alpha, \beta)} > -1; \quad 0 < \theta_{n,1} < \theta_{n,2} < \dots < \theta_{n,n} < \pi.$$

Temos, então, o seguinte resultado:

Teorema 3.7 Se $x_{n,v} = x_{n,v}^{(\alpha, \beta)}$, então,

$$\frac{dx_{n,v}}{d\alpha} < 0, \quad \frac{dx_{n,v}}{d\beta} > 0, \quad v = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

No caso ultrasférico $\alpha = \beta$, temos

$$\frac{dx_{n,v}}{d\alpha} < 0, \quad v = 1, 2, \dots, [n/2]. \quad (3.9)$$

Demonstração: Aplicando o Teorema 3.5 para $w(x, \tau) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$ com $\alpha = \tau$ e β fixo, ou $\beta = \tau$ e α fixo, obtemos as desigualdades (3.8). No primeiro caso, temos $w_\tau/w = \log(1 - x)$, que é uma função decrescente de x , $x \in (-1, 1)$. No segundo caso,

temos $w_\tau/w = \log(1+x)$, que é uma função crescente de x , $x \in (-1, 1)$.

No caso ultrasférico, a desigualdade (3.9) não segue imediatamente do Teorema 3.5, já que para $w(x, \tau) = (1-x^2)^\tau$, $w_\tau/w = \log(1-x^2)$ não é monótona.

Fazendo $\tau = \lambda$, temos, de (2.46) e (2.39), que

$$P_{2n}^{(\lambda)}(x) = c_{2n} P_{2n}^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}(x) = c'_{2n} x P_n^{(\lambda-1/2, -1/2)}(2x^2 - 1)$$

e

$$P_{2n+1}^{(\lambda)}(x) = c_{2n+1} P_{2n+1}^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}(x) = c'_{2n+1} x P_n^{(\lambda-1/2, 1/2)}(2x^2 - 1),$$

onde c_{2n} , c_{2n+1} , c'_{2n} e c'_{2n+1} são constantes.

Assim, se $x_v = x_{2n,v}$ é zero de $P_{2n}^{(\lambda)}(x)$, então $y_v = 2x_v^2 - 1$ é zero de $P_n^{(\lambda-1/2, -1/2)}(y)$. Do mesmo modo, se $x_v = x_{2n+1,v}$ é zero de $P_{2n+1}^{(\lambda)}(x)$, então $y_v = 2x_v^2 - 1$ é zero de $P_n^{(\lambda-1/2, 1/2)}(y)$.

Logo, $\frac{dy_v}{d\lambda} = 4x_v^{(\lambda)} \frac{dx_v}{d\lambda}$. Usando (3.8) para β_* fixo, obtemos (3.9). Para os zeros negativos, obtemos (3.9) com a desigualdade oposta.

Portanto, para os polinômios ultrasféricos, temos que os zeros positivos são funções decrescentes de λ e os zeros negativos são funções crescentes de λ . ■

No caso dos polinômios de Laguerre temos $w(x, \tau) = e^{-x} x^\alpha$ com $\alpha = \tau$. Observe que $w_\tau/w = \log(x)$ é crescente para $x > 0$. Daí, os zeros de $L_n^{(\alpha)}(x)$, $n \geq 1$, são funções crescentes de α , $\alpha > -1$.

Teorema 3.8 *Sejam α e β os parâmetros do polinômio de Jacobi, $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, sujeitos às condições*

$$\frac{-1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{-1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}.$$

Então, para os zeros, temos:

$$\frac{2v-1}{2n+1} \pi \leq \theta_{n,v} \leq \frac{2v}{2n+1} \pi, \quad v = 1, 2, \dots, n,$$

com igualdade somente nos casos especiais $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/2$ e $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/2$.

Demonstração: De acordo com (3.8), o máximo e o mínimo de $x_{n,v}^{(\alpha,\beta)} = \cos \theta_{n,v}$ são obtidos nos casos especiais mencionados acima. Assim,

$$\arccos[x_{n,v}^{(-1/2,1/2)}] \leq \theta_{n,v} \leq \arccos[x_{n,v}^{(1/2,-1/2)}].$$

Sabemos, de (2.59), que para $\tilde{x}_{n,v} = x_{n,v}^{(-1/2,1/2)}$,

$$0 = P_n^{(-1/2,1/2)}(\tilde{x}_{n,v}) = \frac{1.3.....(2n-1)}{2.4.....2n} \frac{\cos \{(2n+1)\tilde{\theta}_{n,v}/2\}}{\cos(\tilde{\theta}_{n,v}/2)},$$

onde $\tilde{\theta}_{n,v} = \arccos \tilde{x}_{n,v}$.

Então, $\cos [(2n+1)\tilde{\theta}_{n,v}/2] = 0$. Daí, $\tilde{\theta}_{n,v} = \frac{(2v-1)\pi}{2n+1}$, $v = 1, 2, \dots, n$.

Assim,

$$\frac{(2v-1)\pi}{2n+1} \leq \theta_{n,v}, \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Do mesmo modo, por (2.60), temos que, para $\hat{x}_{n,v} = x_{n,v}^{(1/2,-1/2)}$,

$$0 = P_n^{(1/2,-1/2)}(\hat{x}_{n,v}) = \frac{1.3.....(2n-1)}{2.4.....2n} \frac{\text{sen} [(2n+1)\hat{\theta}_{n,v}/2]}{\text{sen}(\hat{\theta}_{n,v}/2)}.$$

Logo, como $\text{sen} [(2n+1)\hat{\theta}_{n,v}/2] = 0$, então $\hat{\theta}_{n,v} = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $v = 1, 2, \dots, n$.

Daí,

$$\theta_{n,v} \leq \frac{2v\pi}{2n+1}, \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema 3.9 No caso ultrasférico com $-1/2 \leq \alpha = \beta \leq 1/2$, temos as desigualdades

$$\left(v - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{n} \leq \theta_{n,v} \leq v \frac{\pi}{n+1}, \quad v = 1, 2, \dots, [n/2],$$

com igualdades somente nos casos especiais $\alpha = \beta = -1/2$ e $\alpha = \beta = 1/2$.

Demonstração: De (3.9), temos que o máximo e o mínimo de $x_{n,v}^{(\alpha,\beta)}$, $v \leq [n/2]$, são obtidos, respectivamente, se $\alpha = \beta = -1/2$ e $\alpha = \beta = 1/2$.

Sabemos que $P_n^{(-1/2, -1/2)}(x) = c_n \cos n\theta$. Logo, $P_n^{(-1/2, 1/2)}(x) = 0$ para $\cos n\theta = 0$, isto é, $\theta = \frac{2v-1}{2n}\pi$.

Assim,

$$\frac{2v-1}{2n}\pi \leq \theta_{n,v}, \quad v = 1, 2, \dots, [n/2].$$

Do mesmo modo, $0 = P_n^{(1/2, 1/2)}(x) = \tilde{c}_n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

De $\sin(n+1)\theta = 0$ temos $\theta = \frac{v}{n+1}\pi$.

Assim, obtemos

$$\theta_{n,v} \leq \frac{v}{n+1}\pi, \quad v = 1, 2, \dots, [n/2].$$

■

3.3 O Método de Sturm

O principal resultado desta seção é o Teorema de Sturm, que nos fornece uma maneira de obtermos desigualdades para os zeros dos polinômios ortogonais, que chamaremos aqui de Método de Sturm.

Teorema 3.10 (Sturm) *Sejam $f(x)$ e $F(x)$ funções contínuas em $x_0 < x < X_0$, com $f(x) \leq F(x)$. Sejam as funções $y(x)$ e $Y(x)$ não identicamente nulas, satisfazendo, respectivamente, as equações diferenciais*

$$y'' + f(x)y = 0 \quad \text{e} \quad Y'' + F(x)Y = 0.$$

Sejam x' e x'' , $x' < x''$, dois zeros consecutivos de $y(x)$ em (x_0, X_0) . Então, a função $Y(x)$ tem pelo menos uma variação de sinal em (x', x'') desde que $f(x) \neq F(x)$ em $[x', x'']$.

A afirmação também é válida para $x' = x_0$ [$y(x_0 + 0) = 0$] se a condição adicional

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \{y'(x)Y(x) - y(x)Y'(x)\} = 0 \quad (3.10)$$

é satisfeita (analogamente para $x'' = X_0$).

Demonstração: Seja $Y(x) \geq 0$, $Y(x) \neq 0$ para $x' < x < x''$. Suponhamos, sem perda de generalidade, $y(x) > 0$, $x' < x < x''$. Então, se $x_0 < x' < x'' < X_0$,

$$(y'Y - yY')_{x=x'}^{x=x''} = \int_{x'}^{x''} (F(x) - f(x))Y(x)y(x)dx > K.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} y'(x'')Y(x'') - y(x'')Y'(x'') - y'(x')Y(x') + y(x')Y'(x') \\ = y'(x'')Y(x'') - y'(x')Y(x') > 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como x' e x'' são dois zeros consecutivos e $y(x) > 0$, $x' < x < x''$, temos

$$\frac{y'(x'')}{y'(x')} < 0.$$

Mas, de (3.11),

$$\frac{y'(x'')}{y'(x')} > \frac{Y(x')}{Y(x'')}.$$

Logo, $\frac{Y(x')}{Y(x'')} < 0$. Portanto, existe pelo menos uma variação de sinal de $Y(x)$ entre x' e x'' .

Se $x' = x_0$, de (3.10) e de (3.11), temos que

$$y'(x'')Y(x'') > 0.$$

Como $y(x'') < 0$, então $Y(x'') < 0$, o que é uma contradição. ■

Teorema 3.11 *Seja $\Phi(x)$ contínua e decrescente em $x_0 < x < X_0$ e seja y uma solução não identicamente nula de $y'' + \Phi(x)y = 0$. Então, se $x' < x'' < x'''$ são três zeros consecutivos de $y(x)$, temos $x'' - x' < x''' - x''$, isto é, a seqüência de zeros de y é sempre convexa.*

Demonstração: Suponhamos a existência de pelo menos três zeros no intervalo $x_0 < x < X_0$. Sejam $x' < x'' < x''' < \dots$ os zeros em questão, com $x'' - x' = h$.

Aplicando o Teorema de Sturm no intervalo (x'', x''') para as equações

$$y'' + \Phi(x)y = 0 \quad \text{e} \quad Y'' + \Phi(x+h)Y = 0, \quad \text{onde} \quad Y(x) = y(x-h), \quad (3.15)$$

temos que existe $\bar{x} \in (x'', x''')$, com $Y(\bar{x}) = 0$.

Mas, $Y(\bar{x}) = y(\bar{x} - h)$. Logo, $y(\bar{x} - h) = 0$ e, então, $\bar{x} - h = x''$.

Observe que $x''' - x'' = x''' - \bar{x} + h > h$ e $\bar{x} - h > x'' - h = x'$.

Como $x' < x'' < x'''$ são três zeros consecutivos, então $\bar{x} - h$ (que é zero de $y(x)$) só pode ser x'' . ■

Teorema 3.12 *Sejam $f(x)$ uma função contínua e negativa em $x_0 < x < X_0$ e y uma solução arbitrária de $y'' + f(x)y = 0$, com $y \rightarrow 0$ se $x \rightarrow X_0$. Então, y não se anula em $x_0 \leq x < X_0$.*

Demonstração: Como $f(x) < 0$, $x_0 < x < X_0$, e $y(x)$ satisfaz à equação diferencial acima,

$$\text{sinal } y''(x) = \text{sinal } y(x), \quad x_0 < x < X_0.$$

Suponhamos que seja positivo.

Mas, se $f(x)$ possuir zeros em $[x_0, X_0]$ a conclusão acima é uma contradição, pois entre zeros consecutivos, se $y(x) > 0$, então $y''(x) < 0$ em alguns subintervalos de $[x_0, X_0]$. ■

A seguir, aplicaremos os teoremas anteriores nas equações diferenciais de Legendre

$$z'' + \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + (2 \operatorname{sen} \theta)^{-2} \right\} z = 0, \quad (3.12)$$

cuja solução é $z = (\operatorname{sen} \theta)^{1/2} P_n(\cos \theta)$, de Bessel

$$u'' + \{1 + (2\theta)^{-2}\} u = 0, \quad u = \theta^{1/2} J_0(\theta), \quad (3.13)$$

dos polinômios ultrasféricos

$$z''_\lambda + \{(n + \lambda)^2 + \lambda(1 - \lambda)(\operatorname{sen} \theta)^{-2}\} z_\lambda = 0, \quad z_\lambda = (\operatorname{sen} \theta)^\lambda P_n^{(\lambda)}(\cos \theta) \quad (3.14)$$

e na equação diferencial geral de Bessel

$$u''_\alpha + \{1 + (1 - 4\alpha^2)(2\theta)^{-2}\} u_\alpha = 0, \quad u_\alpha = \theta^{1/2} J_\alpha(\theta). \quad (3.15)$$



As equações (3.12) e (3.14) são satisfeitas em $(0, \pi)$ e (3.13) e (3.15) são válidas para $\theta > 0$.

Todas as equações acima são facilmente obtidas das equações diferenciais para os polinômios de Legendre, Ultrasféricos e Bessel dadas no capítulo 2, aplicando-se o método dado na seção 1.1.

3.3.1 O Método de Sturm e os polinômios de Legendre

Inicialmente, vamos estudar as desigualdades para os zeros dos polinômios de Legendre $P_n(\cos \theta)$, dadas por Bruns, Markov e Stieltjes.

Sejam $\theta_{n,1}, \theta_{n,2}, \dots, \theta_{n,n}$ os zeros de $P_n(\cos \theta)$ em ordem crescente no intervalo $(0, \pi)$, tais que $0 < \theta_{n,1} < \theta_{n,2} < \dots < \theta_{n,n} < \pi$.

Então, as desigualdades de Bruns podem ser formuladas como seguem:

$$\frac{v - \frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2}}\pi < \theta_{n,v} < \frac{v}{n + \frac{1}{2}}\pi, \quad v = 1, 2, \dots, n, \quad (3.16)$$

e as desigualdades de Markov e Stieltjes são dadas por

$$\frac{v - \frac{1}{2}}{n}\pi < \theta_{n,v} < \frac{v}{n + 1}\pi, \quad v = 1, 2, \dots, [n/2]. \quad (3.17)$$

Esses resultados são válidos para os zeros que estão no intervalo $0 < \theta < \pi/2$. No entanto, a propriedade simétrica

$$\theta_{n,v} + \theta_{n,n+1-v} = \pi \quad (3.18)$$

permite uma estimativa similar para os zeros que estão no intervalo $\pi/2 < \theta < \pi$.

Comparemos (3.12) para $z = Y$, com a solução $y = \text{sen} \left((n + \frac{1}{2})(x - x_0) \right)$ de

$$y'' + \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 y = 0. \quad (3.19)$$

Sejam $f(x) = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2$ e $F(x) = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + (2\text{sen}\theta)^{-2}$, com $x = \cos \theta$. Observe que y se anula para todo $x = x_0 + \frac{v\pi}{n + \frac{1}{2}}$, $v = 0, \dots, n$.

Pelo Teorema de Sturm, temos que existe pelo menos um zero de $(\operatorname{sen} \theta)^{1/2} P_n(\cos \theta)$ em todo intervalo de comprimento $\frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}$ e, em particular, nos intervalos

$$\frac{v-1}{n + \frac{1}{2}} \pi < \theta < \frac{v}{n + \frac{1}{2}} \pi, \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, todo intervalo contém exatamente um zero $\theta_{n,v}$ de $(\operatorname{sen} \theta)^{1/2} P_n(\cos \theta)$ e, portanto,

$$\frac{v-1}{n + \frac{1}{2}} \pi < \theta_{n,v} < \frac{v}{n + \frac{1}{2}} \pi, \quad v = 1, 2, \dots, n. \quad (3.20)$$

A estimativa inferior de (3.16) pode ser demonstrada através da propriedade simétrica

$$\theta_{n,v} = \pi - \theta_{n,n+1-v} > \pi - \frac{n+1-v}{n + \frac{1}{2}} \pi = \frac{v - \frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2}} \pi,$$

de modo que obtemos as desigualdades de Bruns.

A seguir, vamos demonstrar, primeiramente, a estimativa superior de (3.17).

Como $(2\operatorname{sen} \theta)^{-2}$ decresce em $0 < \theta \leq \pi/2$, o Teorema 3.11 garante a convexidade da seqüência $\theta_{n,v}$. Temos, também, a convexidade da seqüência $\theta'_{n,v} = \theta_{n,v} - \frac{v}{n+1} \pi$, $v = 0, 1, 2, \dots, [n/2] + 1$.

Sabemos que uma seqüência convexa tem seu máximo somente nos pontos extremos de qualquer intervalo, isto é, sempre para o primeiro ou o último valores de v .

Como $\theta'_{n,0} = 0$ e, para n ímpar, $\theta'_{n,(n+1)/2} = 0$, tem-se o limite superior para n ímpar.

Seja n par. Então, $\theta'_{n,n/2} + \theta'_{n,n/2+1} = 0$, de modo que se $\theta'_{n,n/2} < 0$, então $\theta'_{n,v} < 0$, $v = 1, 2, \dots, n/2$.

Conseqüentemente, obtemos o limite superior.

Para demonstrar o limite inferior de (3.17), vamos usar a seguinte desigualdade

$$\theta_{n,v} - \theta_{n,v-1} < \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad (3.21)$$

que é conseqüência imediata de (3.20).

Agora, consideremos

$$\theta''_{n,v} = \theta_{n,v} - \frac{v - \frac{1}{4}}{n + \frac{1}{2}} \pi.$$

Por (3.21), $\theta''_{n,v} - \theta''_{n,v-1} < 0$, de modo que $\theta''_{n,v}$ é decrescente. Para n ímpar, $\theta''_{n,(n+1)/2} = 0$ e, conseqüentemente, $\theta''_{n,v} > 0$ para $v < (n+1)/2$. Para n par, é suficiente demonstrar que $\theta''_{n,n/2} > 0$. Isto segue de (3.21) pois

$$\theta_{n,n/2+1} - \theta_{n,n/2} = \pi - \theta_{n,n/2} - \theta_{n,n/2} < \pi/(n+1/2).$$

Assim, chegamos ao resultado desejado.

A Função de Bessel $J_0(\theta)$ e os polinômios de Legendre

Comparando (3.13) com $y'' + y = 0$, cuja solução é $y = \sin \theta$, temos a existência de um número infinito de zeros de $\theta^{1/2} J_0(\theta)$, $0 = j_0 < j_1 < j_2 < \dots$, para os quais

$$j_v - j_{v-1} < \pi \quad \text{e} \quad j_v < v\pi, \quad v = 1, 2, 3, \dots \quad (3.22)$$

Além disso, as diferenças $j_v - j_{v-1}$ são monotonicamente crescentes, de modo que, pelo Teorema 3.11, a seqüência j_v é convexa. Usando (3.22), vemos que

$$j_v - v\pi \leq j_1 - \pi = 0.764\dots\pi - \pi \quad \text{e} \quad j_v \leq \left(v - \frac{1}{4}\right)\pi + 0.014\dots\pi. \quad (3.23)$$

Agora, comparemos (3.12), para $z = Y$, com

$$y'' + \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + (2\theta)^{-2} \right\} y = 0,$$

que tem solução $y = \theta^{1/2} J_0 \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \theta \right]$, $0 < \theta < \pi$.

Desde que $\sin \theta < \theta$, temos a existência de pelo menos um zero de $P_n(\cos \theta)$ em todos os intervalos $\left(\frac{j_{v-1}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)}, \frac{j_v}{\left(n + \frac{1}{2}\right)} \right)$, $v = 1, 2, \dots, n$.

O fato de $\frac{j_v}{\left(n + \frac{1}{2}\right)} < \pi$ implica na existência de exatamente um zero em cada um desses intervalos, de modo que

$$\frac{j_{v-1}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)} < \theta_{n,v} < \frac{j_v}{\left(n + \frac{1}{2}\right)}, \quad v = 1, 2, \dots, n. \quad (3.24)$$

A estimativa superior é particularmente importante: é melhor do que a estimativa superior de Bruns.

Isto também vale para o limite inferior de j_v . De fato: seja v qualquer inteiro positivo e $n = 2v - 1$.

Então, $v = \frac{n+1}{2}$ e $\theta_{n,v} = \frac{\pi}{2}$. Temos, conseqüentemente, $\frac{\pi}{2} < \frac{j_v}{(2v - \frac{1}{2})}$ e, em virtude de (3.23),

$$\left(v - \frac{1}{4}\right) \pi < j_v < \left(v - \frac{1}{4}\right) \pi + 0.014... \pi, \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

A estimativa superior (3.24) para $\theta_{n,v} = \theta_{n,v}(n)$ é a melhor possível para v fixo e $n \rightarrow \infty$, pois, de (3.24), é fácil ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta_{n,v} = j_v$.

A primeira desigualdade em (3.24) não é particularmente boa. Para obtermos uma melhor, usamos a desigualdade elementar

$$(\sin \theta)^{-2} - \theta^{-2} \leq 1 - (2/\pi)^2 = k, \quad 0 < \theta < \pi/2,$$

e comparamos (3.12) com $Y'' + \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{k}{4} + (2\theta)^{-2} \right\} Y = 0$.

Assim, obtemos

$$\theta_{n,v} > \frac{j_v}{\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{k}{4}\right]}, \quad 0 < \theta_{n,v} \leq \pi/2, \quad \frac{k}{4} = 0.148678816... \quad (3.25)$$

O mesmo argumento fornece uma desigualdade para os zeros no intervalo $0 < \theta \leq l$, onde l é um número positivo fixo, $l < \pi/2$. Então, obtemos (3.25) com a constante k_l no lugar de k , onde $k_l = (\sin(l))^{-2} - l^2$.

A fórmula (3.25) também fornece um limite superior para j_v , quando fazemos $v = (n+1)/2$, $\theta_{n,v} = \pi/2$:

$$\begin{aligned} j_v &< \frac{\pi}{2} \left[\left(2v - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{k}{4} \right]^{1/2} = \left(v - \frac{1}{4}\right) \pi \left[1 + \frac{k/4}{\left(2v - \frac{1}{2}\right)^2} \right]^{1/2} \\ &< \left(v - \frac{1}{4}\right) \pi + \frac{k\pi}{32(v - 1/4)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para $v = 1$, esta desigualdade não é tão boa quanto a desigualdade (3.23). No entanto, para $v \geq 2$, ela é muito melhor, especialmente para v grande.

$$\left(v + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \pi < j_v < \left(v - \frac{1}{4}\right) \pi + \frac{k\pi}{32(v - 1/4)}, \quad v = 1, 2, 3, \dots \quad (3.27)$$

3.3.2 Polinômios Ultrasféricos e funções de Bessel $J_\alpha(x)$

Consideremos a equação (3.14) no caso $0 < \lambda < 1$. Sejam $x_{n,v}^{(\lambda)} = \cos \theta_{n,v}$, $v = 1, \dots, n$, os zeros dos polinômios $P_n^{(\lambda)}(x)$.

O mesmo argumento usado no caso especial $\lambda = 1/2$ (caso dos polinômios de Legendre) fornece

$$\frac{v-1}{n+\lambda}\pi < \theta_{n,v} < \frac{v}{n+\lambda}\pi, \quad v = 1, 2, \dots, n,$$

de onde obtemos, pela propriedade simétrica,

$$\frac{v-(1-\lambda)}{n+\lambda}\pi < \theta_{n,v} < \frac{v}{n+\lambda}\pi, \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Essas são as desigualdades correspondentes às de Bruns.

Temos, também,

$$\frac{v-\frac{1}{2}(1-\lambda)}{n+\lambda}\pi < \theta_{n,v} < \frac{v}{n+1}\pi, \quad v = 1, 2, \dots, n,$$

correspondente às desigualdades de Markov-Stieltjes. A demonstração é feita como no caso dos polinômios de Legendre. Ela é baseada na convexidade das seqüências

$$\theta_{n,v} \quad \text{e} \quad \theta_{n,v} - \frac{v-\frac{1}{2}(1-\lambda)}{n+\lambda}\pi, \quad v = 0, 1, 2, \dots, [n/2] + 1$$

e na desigualdade $\theta_{n,v} - \theta_{n,v-1} < \pi/(n+\lambda)$, $v = 1, 2, \dots, n$.

No caso $-1/2 < \alpha < 1/2$, obtemos resultados similares para os zeros $j_v^{(\alpha)}$ de $\theta^{1/2}J_\alpha(\theta)$. Temos, em particular,

$$j_v^{(\alpha)} - j_{v-1}^{(\alpha)} < \pi, \quad j_v^{(\alpha)} < v\pi, \quad v = 1, 2, \dots; \\ j_0^{(\alpha)} = 0 \quad \text{e} \quad j_v^{(\alpha)} \leq (v-1)\pi + j_1^{(\alpha)}.$$

Agora, vamos comparar (3.14) com (3.15), para $\lambda = \alpha + 1/2$. Obtemos, então,

$$\frac{j_{v-1}^{(\alpha)}}{n+\lambda} < \theta_{n,v} < \frac{j_v^{(\alpha)}}{n+\lambda}, \quad v = 1, 2, \dots, n. \quad (3.26)$$

Disto, obtemos, como foi feito anteriormente, $\frac{\pi}{2} < \frac{j_v^{(\alpha)}}{2v-1+\lambda}$, de modo que

$$\left(v + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi < j_v^{(\alpha)} < (v-1)\pi + j_1^{(\alpha)} (< v\pi), \quad v = 1, 2, 3, \dots \quad (3.27)$$

3.3.3 O Método de Sturm e os polinômios de Jacobi

Aplicando o Método de Sturm para os polinômios de Jacobi, vamos melhorar consideravelmente alguns resultados.

Consideremos $-1/2 \leq \alpha \leq 1/2$ e $-1/2 \leq \beta \leq 1/2$, excluindo, em geral, o caso $\alpha^2 = \beta^2 = 1/4$.

Consideremos, como antes, os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ em ordem decrescente, $x_{n,v}^{(\alpha, \beta)} = \cos \theta_{n,v}$,

$$+1 > x_{n,1}^{(\alpha, \beta)} > x_{n,2}^{(\alpha, \beta)} > \dots > x_{n,n}^{(\alpha, \beta)} > -1; \quad 0 < \theta_{n,1} < \theta_{n,2} < \dots < \theta_{n,n} < \pi.$$

Teorema 3.13 *Sob as condições acima mencionadas, temos:*

$$\theta_{n,v} - \theta_{n,v-1} < \frac{\pi}{n + (\alpha + \beta + 1)/2}, \quad v = 1, 2, \dots, n+1, \quad (3.28)$$

que vale para $\alpha^2 = \beta^2 = 1/4$, com o sinal de $=$ no lugar de $<$. Aqui,

$$\theta_{n,0} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \alpha > -1/2 \\ -\theta_{n,1} & , \text{ se } \alpha = -1/2 \end{cases}$$

$$\theta_{n,n+1} = \begin{cases} \pi & , \text{ se } \beta > -1/2 \\ 2\pi - \theta_{n,n} & , \text{ se } \beta = -1/2 \end{cases}$$

Demonstração: Notemos que, para

$$\alpha = \beta = -1/2 \Rightarrow \theta_{n,v} = \left(v - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{n}, \quad \alpha = \beta = +1/2 \Rightarrow \theta_{n,v} = v \frac{\pi}{n+1}, \quad (3.29)$$

$$\alpha = -\beta = +1/2 \Rightarrow \theta_{n,v} = v \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \alpha = -\beta = -1/2 \Rightarrow \theta_{n,v} = \frac{v - \frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2}} \pi,$$

para $v = 0, 1, \dots, n+1$.

A desigualdade (3.28) segue imediatamente do Teorema de Sturm, quando comparamos

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left\{ \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{4 \sin^2(\theta/2)} + \frac{\frac{1}{4} - \beta^2}{4 \cos^2(\theta/2)} + \left(n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}\right)^2 \right\} u = 0,$$

cuja solução é

$$u(\theta) = \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha+1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{\beta+1/2} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta),$$

com

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} + \left(n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right)^2 V = 0,$$

com solução

$$V = \sin(n + (\alpha + \beta + 1)/2)(\theta - \theta_{n,v-1}).$$

■

Teorema 3.14 *Sob as condições mencionadas no teorema anterior, temos:*

$$\frac{v + (\alpha + \beta - 1)/2}{n + (\alpha + \beta + 1)/2} \pi < \theta_{n,v} < \frac{v}{n + (\alpha + \beta + 1)/2} \pi, \quad v = 1, 2, \dots, n. \quad (3.30)$$

Demonstração: Os limites (3.30) seguem da soma de (3.28) para $v = 1, 2, \dots, n+1$, e do fato de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(-x)$.

No caso $\alpha = -1/2$, o fator v do limite superior pode ser substituído por $v - 1/2$.

Se $\beta = -1/2$, o fator $v + (\alpha + \beta + 1)/2$ do limite inferior pode ser substituído por $v + (\alpha + \beta)/2$.

Nos casos (3.29), valem os mesmos limites, com o sinal de $=$ no lugar de $<$. ■

Observe que essas desigualdades são mais precisas do que as Desigualdades de Bruns (3.16), desde que $\alpha + \beta > 0$.

No caso dos polinômios de Legendre ($\alpha = \beta = 0$), elas são idênticas às de Bruns.

3.3.4 O Método de Sturm e os polinômios de Laguerre

Passemos, agora, ao estudo do comportamento dos zeros dos polinômios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$. Consideremos $\alpha > -1$.

Teorema 3.15 *Sejam $l_{n,v}^{(\alpha)}$, $v = 1, 2, \dots, n$, os zeros do polinômio de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ em ordem crescente. Então,*

$$l_{n,v}^{(\alpha)} > \frac{(j_v^{(\alpha)}/2)^2}{n + (\alpha + 1)/2}, \quad v = 1, 2, \dots, n, \quad (3.31)$$

onde $j_v^{(\alpha)}$ são os zeros positivos da função de Bessel $J_\alpha(x)$.

Demonstração: A afirmação segue diretamente do Teorema de Sturm, quando comparamos as seguintes equações:

$$U'' + \left(\frac{n + (\alpha + 1)/2}{x} + \frac{1 - \alpha^2}{4x^2} \right) U = 0,$$

que tem solução $U(x) = x^{1/2} J_\alpha \left\{ 2x^{1/2} \left(n + \frac{\alpha + 1}{2} \right)^{1/2} \right\}$, e

$$u'' + \left(\frac{n + (\alpha + 1)/2}{x} + \frac{1 - \alpha^2}{4x^2} - \frac{1}{4} \right) u = 0, \quad (3.32)$$

cujas soluções são

$$u(x) = e^{-x/2} x^{(\alpha+1)/2} L_n^{(\alpha)}(x).$$

Observe que $J_\alpha \left\{ 2x^{1/2} \left(n + \frac{\alpha + 1}{2} \right)^{1/2} \right\}$ se anula para $j_v^{(\alpha)} = 2\sqrt{x_v} \left(n + \frac{\alpha + 1}{2} \right)^{1/2}$, isto é, $x_v = \left(\frac{j_v^{(\alpha)}}{2} \right)^2 \frac{1}{n + \frac{\alpha+1}{2}}$.

Logo, x_v está entre dois zeros consecutivos de $L_n^{(\alpha)}(x)$ e a desigualdade (3.31) segue imediatamente. ■

Podemos obter um limite superior similar para $l_{n,v}^{(\alpha)}$. Seja w uma constante positiva tal que $w < 4n + 2(\alpha + 1)$.

Agora, vamos comparar (3.32) com

$$V'' + \left\{ \frac{n + (\alpha + 1)/2 - w/4}{x} + \frac{1 - \alpha^2}{4x^2} \right\} V = 0, \quad \text{onde } 0 < x \leq w,$$

cujas soluções são $V(x) = x^{1/2} J_\alpha \left\{ 2x^{1/2} \left(n + \frac{\alpha + 1}{2} - \frac{w}{4} \right)^{1/2} \right\}$. Então, os zeros de $L_n^{(\alpha)}(x)$ satisfazem

$$l_{n,v}^{(\alpha)} < \frac{(j_v^{(\alpha)}/2)^2}{n + (\alpha + 1)/2 - w/4}, \quad (3.33)$$

se a expressão do lado direito for menor ou igual a w (para um v fixo e n grande).

A constante $(j_v^{(\alpha)}/2)^2$ nas desigualdades (3.31) e (3.33) é a melhor possível pois para v fixo, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n l_{n,v}^{(\alpha)} = (j_v^{(\alpha)}/2)^2. \quad (3.34)$$

Observe que para $x > x_0 = \left(2n + \alpha + 1 + \sqrt{(2n + \alpha + 1)^2 + \frac{1}{4} - \alpha^2}\right)^{1/2}$, o coeficiente de u na equação diferencial

$$u'' + \left(4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2}\right) u = 0,$$

cuja solução é

$$u = e^{-x^2/2} x^{\alpha+1/2} L_n^{(\alpha)}(x^2),$$

é negativo, isto é, $4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2} < 0$.

Como a solução $u(x)$ tende a zero para $x \rightarrow \infty$, pelo Teorema 3.12, $u(x)$ não se anula para $x \geq x_0$. Mas, $(l_{n,k}^{(\alpha)})^{1/2}$, $k = 1, \dots, n$, são zeros de $u(x)$. Temos, então, o seguinte resultado:

Teorema 3.16 *O maior zero do polinômio de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ satisfaz à desigualdade*

$$l_{n,n}^{(\alpha)} < 2n + \alpha + 1 + \left\{(2n + \alpha + 1)^2 + \frac{1}{4} - \alpha^2\right\}^{1/2} \cong 4n. \quad (3.35)$$

Fazendo $x = [n + (\alpha + 1)/2]^{-1} \xi$ na equação (3.32), obtemos

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \left\{\frac{1}{\xi} + \frac{1 - \alpha^2}{4\xi^2} - \frac{1}{4} \left(n + \frac{\alpha + 1}{2}\right)^{-2}\right\} u = 0.$$

Como o coeficiente de u cresce com n , para um v fixo, segue que $\left\{n + \frac{(\alpha + 1)}{2}\right\} l_{n,v}^{(\alpha)}$ é função decrescente de n .

O limite quando $n \rightarrow \infty$ é $\left(\frac{j_v^{(\alpha)}}{2}\right)^2$ (de acordo com (3.34)).

Uma consequência interessante desta propriedade (decrecer) é

$$n + \frac{(\alpha + 1)}{2} l_{n,v}^{(\alpha)} \leq v + \frac{(\alpha + 1)}{2} l_{v,v}^{(\alpha)}, \quad n = v, v + 1, \dots \quad (3.36)$$

Assim, $l_{n,v}^{(\alpha)} \leq \{v + (\alpha + 1)/2\} \frac{l_{v,v}^{(\alpha)}}{\{n + (\alpha + 1)/2\}}$. Agora, usando (3.35), obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.17 Sejam $\alpha > -1$ e $l_{n,v}^{(\alpha)}$, $v = 1, \dots, n$, os zeros em ordem crescente do polinômio de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$. Valem, então, as seguintes estimativas:

$$\frac{(j_v^{(\alpha)}/2)^2}{n + (\alpha + 1)/2} < l_{n,v}^{(\alpha)} < \left[v + \frac{(\alpha + 1)}{2} \right] \frac{2v + \alpha + 1 + \{(2v + \alpha + 1)^2 + 1/4 - \alpha^2\}^{1/2}}{n + (\alpha + 1)/2}, \quad (3.37)$$

$v = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$.

Em particular, para o menor zero $l_{n,1}^{(\alpha)}$, temos:

$$\frac{(j_1^{(\alpha)}/2)^2}{n + (\alpha + 1)/2} < l_{n,1}^{(\alpha)} \leq \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 3)}{2n + \alpha + 1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.38)$$

onde $j_v^{(\alpha)}$ são os zeros positivos da função de Bessel $J_\alpha(x)$.

Observação: Para $v = 1$, $l_{1,1}^{(\alpha)}$ pode ser calculado através da fórmula de recorrência para os polinômios de Laguerre, isto é, $l_{1,1}^{(\alpha)} = \alpha + 1$. Logo, usando (3.36), temos:

$$l_{n,1}^{(\alpha)} \leq \left\{ 1 + \frac{(\alpha + 1)}{2} \right\} \frac{l_{1,1}^{(\alpha)}}{\{n + (\alpha + 1)/2\}} = \frac{(\alpha + 3)(\alpha + 1)}{2n + \alpha + 1}.$$

3.3.5 O Método de Sturm e os polinômios de Hermite

As considerações correspondentes para os polinômios de Hermite são muito simples. A equação diferencial

$$z'' + (2n + 1 - x^2)z = 0, \quad \text{cuja solução é } z = e^{-x^2/2} H_n(x), \quad (3.39)$$

e o Teorema 3.12 fornecem o limite superior $(2n + 1)^{1/2}$ para os zeros de $H_n(x)$, pois

$$\lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = 0 \quad \text{e} \quad 2n + 1 - x^2 < 0 \quad \text{para} \quad x > \sqrt{2n + 1}.$$

Consideremos $h_{n,1}, h_{n,2}, \dots$ os zeros positivos de $H_n(x)$ em ordem crescente.

Tomando $n \geq 2$, $2n + 1 - x^2$ é decrescente para $x \geq 0$ e, portanto, pelo Teorema 3.11 temos a convexidade da seqüência dos zeros do polinômio de Hermite $H_n(x)$,

$$h_{n,0} < h_{n,1} < h_{n,2} < \dots, \quad (3.40)$$

onde $h_{n,0} = 0$ se n é ímpar e $h_{n,0} = -h_{n,1}$ se n é par.

Comparando a mesma equação acima com $z'' + (2n+1)z = 0$, encontramos

$$h_{n,v} > \begin{cases} \frac{v-1/2}{(2n+1)^{1/2}}\pi, & n \text{ par}, \\ \frac{v}{(2n+1)^{1/2}}\pi, & n \text{ ímpar}, \quad v = 1, 2, \dots, [n/2]. \end{cases} \quad (3.41)$$

Agora, seja w um número fixo positivo, $w < (2n+1)^{1/2}$ e consideremos a equação diferencial $y'' + (2n+1-w^2)x^2)y = 0$.

Então, comparando-a com a mesma equação (3.39), obtemos

$$h_{n,v} < \begin{cases} \frac{v-1/2}{(2n+1-w^2)^{1/2}}\pi, & n \text{ par}, \\ \frac{v}{(2n+1-w^2)^{1/2}}\pi, & n \text{ ímpar}, \quad v = 1, 2, \dots, [n/2], \end{cases}$$

se os membros do lado direito são menores ou iguais a w .

Fazendo $x = (2n+1)^{-1/2}\xi$, a equação diferencial (3.39) mencionada acima transforma-se em

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} + \{1 - (2n+1)^{-2}\xi^2\}z = 0,$$

onde

$$z = \exp(-(2n+1)^{-1}\xi^2/2) H_n((2n+1)^{-1/2}\xi)$$

é uma solução.

O coeficiente de z na equação diferencial é função crescente de n . Assim, para v fixo, $\xi_{n,v} = (2n+1)^{1/2}h_{n,v}$ é função decrescente de n .

Além disso, temos

$$\xi_{n,v} = (2n+1)^{1/2}h_{n,v} \leq (4v+1)^{1/2}h_{2v,v}$$

ou

$$\xi_{n,v} = (2n+1)^{1/2}h_{n,v} \leq (4v+3)^{1/2}h_{2v+1,v}.$$

Assim,

$$h_{n,v} > \begin{cases} \frac{v-1/2}{(2n+1)^{1/2}}\pi, & n \text{ par}, \\ \frac{v}{(2n+1)^{1/2}}\pi, & n \text{ ímpar}, \end{cases} \quad \text{e} \quad h_{n,v} < \begin{cases} \frac{4v+1}{(2n+1)^{1/2}}, & n \text{ par}, \\ \frac{4v+3}{(2n+1)^{1/2}}, & n \text{ ímpar}, \end{cases} \quad (3.40)$$

$v = 1, 2, \dots, [n/2]$.

Para o menor zero positivo $h_{n,1}$, obtemos, com $h_{2,1} = 2^{-1/2}$ e $h_{3,1} = (3/2)^{1/2}$,

$$h_{n,1} > \begin{cases} \frac{\pi/2}{(2n+1)^{1/2}}, & n \text{ par}, \\ \frac{\pi}{(2n+1)^{1/2}}, & n \text{ ímpar}, \end{cases} \quad \text{e} \quad h_{n,1} \leq \begin{cases} \left(\frac{5/2}{(2n+1)}\right)^{1/2}, & n \text{ par}, \\ \left(\frac{21/2}{(2n+1)}\right)^{1/2}, & n \text{ ímpar}, \end{cases} \quad (3.41)$$

$n \geq 2$.

Para $v = 1$, os limites superiores são mais precisos do que os resultantes de (3.40).

Neste capítulo, fazemos um estudo de três trabalhos recentes sobre desigualdades para os zeros dos polinômios de Jacobi e Ultrasféricos, utilizando técnicas diferentes das apresentadas no capítulo 3.

Na seção 1, fazemos um estudo sobre o artigo de Dimitrov [6] e, na seção 2, sobre os trabalhos de Dimitrov [5] e de Elbert e Sifarihas [11].

4.1 Interpretação eletrostática dos zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$

Uma das importantes razões para o interesse nos zeros dos polinômios de Jacobi, $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $n \geq 1$, é que $x_{n,k}^{(\alpha, \beta)}$, $k = 1, \dots, n$, admitem uma interpretação eletrostática muito interessante. São pontos de equilíbrio de n cargas unitárias em $(-1, 1)$ no campo gerado pelas cargas $(\alpha + 1)/2$ em 1 e $(\beta + 1)/2$ em -1 , onde as cargas se repelem de acordo com a lei do potencial logarítmico. O campo eletrostático não é campo de cargas pontuais, mas de retas perpendiculares ao eixo real. Esta interpretação é devida a Stieltjes. Szegő ([33], seção 6.7) provou que o equilíbrio é um ponto de mínimo da energia.

Assim, qualquer resultado sobre o comportamento de $x_{n,k}^{(\alpha, \beta)}$ fornece informação

sobre o campo eletrostático mencionado.

No trabalho de Dimitrov [6], foi sugerido o oposto, isto é, ele aplicou os resultados de Stieltjes e Szegő mencionados acima para obter limites para os zeros extremos do polinômio de Jacobi.

Capítulo 4

Alguns Resultados Recentes

Neste capítulo, fazemos um estudo de três trabalhos recentes sobre desigualdades para os zeros dos polinômios de Jacobi e Ultrasféricos, utilizando técnicas diferentes das apresentadas no capítulo 3.

Na seção 1, fazemos um estudo sobre o artigo de Dimitrov [6] e, na seção 2, sobre os trabalhos de Dimitrov [5] e de Elbert e Siafarikas [11].

4.1 Interpretação eletrostática dos zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$

Uma das importantes razões para o interesse nos zeros dos polinômios de Jacobi, $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $n \geq 1$, é que $x_{n,k}^{(\alpha, \beta)}$, $k = 1, \dots, n$, admitem uma interpretação eletrostática muito interessante. São pontos de equilíbrio de n cargas unitárias em $(-1, 1)$ no campo gerado pelas cargas $(\alpha + 1)/2$ em 1 e $(\beta + 1)/2$ em -1 , onde as cargas se repelem de acordo com a lei do potencial logarítmico. O campo eletrostático não é campo de cargas pontuais, mas de retas perpendiculares ao eixo real. Esta interpretação é devida a Stieltjes. Szegő ([33], seção 6.7) provou que o equilíbrio é um ponto de mínimo da energia.

Assim, qualquer resultado sobre o comportamento de $x_{n,k}^{(\alpha, \beta)}$ fornece informação

sobre o campo eletrostático mencionado.

No trabalho de Dimitrov [6], foi sugerido o oposto, isto é, ele aplicou os resultados de Stieltjes e Szegő mencionados acima para obter limites para os zeros extremos do polinômio de Jacobi.

Consideremos, então, o campo eletrostático descrito acima. Cargas $(\alpha + 1)/2$ e $(\beta + 1)/2$ são distribuídas em retas perpendiculares ao eixo real e que o interceptam em -1 e 1 , respectivamente. Tomemos n cargas unitárias distribuídas em retas que também são perpendiculares ao eixo real e passam pelos pontos $x_1, \dots, x_n$ onde $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$. Então, a energia do campo é dada por

$$L(x_1, \dots, x_n) = \frac{\alpha + 1}{2} \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{|1 - x_i|} + \frac{\beta + 1}{2} \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{|1 + x_i|} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log \frac{1}{|x_j - x_i|}. \quad (4.1)$$

Então, a energia é mínima se, e somente se, a função

$$T(x_1, \dots, x_n) := e^{-L(x_1, \dots, x_n)} = \prod_{i=1}^n (1 - x_i)^{(\alpha+1)/2} (1 + x_i)^{(\beta+1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_j - x_i| \quad (4.2)$$

é máxima.

A seguir, daremos alguns resultados que serão necessários à demonstração do teorema de Dimitrov sobre os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Lema 4.1 *Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$, n pontos distintos e $\pi(x) := \prod_{i=1}^n (x - x_i)$. Então,*

$$(-1)^l \pi^{(l+1)}(x_k) = (l+1) \pi_k^{(l)}(x_k), \quad l = 0, 1, \dots, n-1,$$

onde $\pi_k(x) := \pi(x)/(x - x_k)$, $k = 1, \dots, n$.

Demonstração: Para $l = 0$, obtemos facilmente que $\pi'(x_k) = \pi_k(x_k)$.

Consideremos $l = 1$. Temos que

$$\pi'_k(x_k) = \left(\frac{\pi(x)}{(x - x_k)} \right)'_{x=x_k} = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{(x - x_k) \pi'(x) - \pi(x)}{(x - x_k)^2}.$$

Usando a expansão de Taylor para $\pi(x)$ temos que

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{(x - x_k) \pi'(x) - \pi(x)}{(x - x_k)^2} = -\frac{\pi''(x_k)}{2!}.$$

Repetindo, sucessivamente, este processo, chegamos ao resultado desejado. ■

Lema 4.2 Para qualquer inteiro não negativo l , $y(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é solução da equação diferencial

$$(1 - x^2)y^{(l+2)} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2l + 2)x]y^{(l+1)} + [n(n + \alpha + \beta + 1) - l(l + \alpha + \beta + 1)]y^{(l)} = 0. \quad (4.3)$$

Demonstração: O resultado é válido para $l = 1$ pois sabemos que $y(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é a única (a menos de fator constante) solução polinomial não nula da equação diferencial

$$(1 - x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0.$$

Assim, derivando esta equação diferencial, obtemos

$$(1 - x^2)y''' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 4)x]y'' + [n(n + \alpha + \beta + 1) - (\alpha + \beta + 2)]y' = 0.$$

Agora vamos supor o resultado válido para $k < l$, isto é,

$$(1 - x^2)y^{(k+2)} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2k + 2)x]y^{(k+1)} + [n(n + \alpha + \beta + 1) - k(k + \alpha + \beta + 1)]y^{(k)} = 0.$$

Derivando a equação diferencial acima, obtemos

$$(1 - x^2)y^{(k+3)} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2(k + 1) + 2)x]y^{(k+2)} + [n(n + \alpha + \beta + 1) - k(\alpha + \beta + k + 1) - (\alpha + \beta + 2k + 2)]y^{(k+1)} = 0.$$

Logo,

$$(1 - x^2)y^{(k+3)} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2(k + 1) + 2)x]y^{(k+2)} + [n(n + \alpha + \beta + 1) - (k + 1)(k + \alpha + \beta + (k + 1) + 1)]y^{(k+1)} = 0.$$

Estamos, agora, em condições de demonstrar o resultado de Dimitrov. ■

Os resultados de Stieltjes e Szegő estão resumidos no seguinte teorema:

Teorema 4.3 [Szegő [33], Teorema 6.7.1] *Sejam $\alpha > -1, \beta > -1$ e seja $\{x_i\}$, $-1 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$, um sistema de valores para o qual a expressão (4.2) se torna máxima. Então, $\{x_i\}$ são os zeros do polinômio de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.*

Demonstração: Sabemos que o máximo de (4.2) será obtido nos pontos onde

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad \text{ou, onde} \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{x_k - x_1} + \dots + \frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{x_k - x_{k+1}} + \dots + \frac{1}{x_k - x_n} + \frac{(\alpha + 1)/2}{x_k - 1} + \frac{(\beta + 1)/2}{x_k + 1} = 0. \quad (4.4)$$

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ os pontos que satisfazem à equação (4.4) acima.

Tomemos o polinômio de grau n , $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$. Então, de (4.4) e do Lema 4.1 temos

$$\frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)} + \frac{(\alpha + 1)/2}{x_k - 1} + \frac{(\beta + 1)/2}{x_k + 1} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

ou,

$$(1 - x_k)^2 f''(x_k) + [\beta - \alpha - (\beta + \alpha + 2)x_k] f'(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Observe que $F(x) = (1 - x)^2 f''(x) + [\beta - \alpha - (\beta + \alpha + 2)x] f'(x)$ se anula em $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Logo, $F(x) = \text{cte } f(x)$.

Comparando os termos de maior grau, obtemos $-n(n + \alpha + \beta + 1)$ para o valor da constante.

Então,

$$(1 - x)^2 f''(x) + [\beta - \alpha - (\beta + \alpha + 2)x] f'(x) = [-n(n + \alpha + \beta + 1)] f(x).$$

Pelo Teorema 2.14, $f(x) = \text{cte } P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Portanto, os pontos de máximo de $T(x_1, \dots, x_n)$ são os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ e, como consequência disso, o sistema $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$ é único. ■

Estamos, agora, em condições de demonstrar o resultado de Dimitrov.

Teorema 4.4 Sejam $x_{n,1}^{(\alpha, \beta)} > x_{n,2}^{(\alpha, \beta)} > \dots > x_{n,n}^{(\alpha, \beta)}$ os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Então, para todo inteiro positivo n e quaisquer reais $\alpha > -1$ e $\beta > -1$, valem as seguintes desigualdades:

$$x_{n,n}^{(\alpha, \beta)} > \frac{\beta^2 - \alpha^2 - \sqrt{B(n, \alpha, \beta)}}{4n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 2)} \quad (4.6)$$

e

$$x_{n,1}^{(\alpha,\beta)} < \frac{\beta^2 - \alpha^2 + \sqrt{B(n, \alpha, \beta)}}{4n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 2)}, \quad (4.7)$$

onde

$$\begin{aligned} B(n, \alpha, \beta) &= (\beta^2 - \alpha^2)^2 + [4n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 2)] \\ &\quad \times [4n(n + \alpha + \beta + 1) + 2(\alpha + \beta + 2) - (\beta - \alpha)^2]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Demonstração: Consideremos a função $T(x_1, \dots, x_n)$ dada em (4.2) no simplex Ξ , onde

$$\Xi := \{-1 < x_1 < \dots < x_n < 1\}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} T^2(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n (1 - x_i)^{(\alpha+1)} (1 + x_i)^{(\beta+1)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2 \\ &= \tau(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) (1 - x_k)^{\alpha+1} (1 + x_k)^{\beta+1} \prod_{i \neq k} (x_k - x_i)^2 \\ &= \tau(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) (1 - x_k)^{\alpha+1} (1 + x_k)^{\beta+1} \pi_k^2(x_k), \end{aligned}$$

onde a função $\tau(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) := \tau(\bar{x} \setminus x_k)$ não depende de x_k .

Derivando a última identidade e usando o Lema 4.1, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} T^2(x_1, \dots, x_n) &= \tau(\bar{x} \setminus x_k) \frac{\partial}{\partial x_k} [(1 - x_k)^{\alpha+1} (1 + x_k)^{\beta+1} \pi_k^2(x_k)] \\ &= \tau(\bar{x} \setminus x_k) (1 - x_k)^\alpha (1 + x_k)^\beta \pi_k(x_k) [(-\alpha - 1)(1 + x_k) \pi_k(x_k) \\ &\quad + (\beta + 1)(1 - x_k) \pi_k(x_k) + (1 - x_k)(1 + x_k) 2\pi'_k(x_k)] \\ &= \tau(\bar{x} \setminus x_k) (1 - x_k)^\alpha (1 + x_k)^\beta \pi_k(x_k) \\ &\quad \times \{2(1 - x_k^2) \pi'_k(x_k) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x_k] \pi_k(x_k)\} \\ &= \tau(\bar{x} \setminus x_k) (1 - x_k)^\alpha (1 + x_k)^\beta \pi'_k(x_k) \\ &\quad \times \{(1 - x_k^2) \pi''_k(x_k) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x_k] \pi'_k(x_k)\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

e

$$\tau^{-1}(\bar{x} \setminus x_k) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} T^2(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_k} [(1 - x_k)^\alpha (1 + x_k)^\beta \pi_k(x_k)]$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ 2(1 - x_k^2) \pi'_k(x_k) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x_k] \pi_k(x_k) \right\} \\
 & + (1 - x_k)^\alpha (1 + x_k)^\beta \pi_k(x_k) \times \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ 2(1 - x_k^2) \pi'_k(x_k) \right. \\
 & \left. + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x_k] \pi_k(x_k) \right\} \\
 & = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(1 - x_k)^\alpha (1 + x_k)^\beta \pi_k(x_k) \right] \\
 & \times \left\{ 2(1 - x_k^2) \pi'_k(x_k) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x_k] \pi_k(x_k) \right\} \\
 & + (1 - x_k)^\alpha (1 + x_k)^\beta \pi_k(x_k) \quad (4.10) \\
 & \times \left\{ 2(1 - x_k^2) \pi''_k(x_k) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 6)x_k] \pi'_k(x_k) \right. \\
 & \left. - (\alpha + \beta + 2) \pi_k(x_k) \right\} \\
 & = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(1 - x_k)^\alpha (1 + x_k)^\beta \pi_k(x_k) \right] \\
 & \times \left\{ (1 - x_k^2) \pi''(x_k) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x_k] \pi'(x_k) \right\} \\
 & + (1 - x_k)^\alpha (1 + x_k)^\beta \pi'(x_k) \\
 & \times \left\{ (1 - x_k^2) \frac{2\pi'''(x_k)}{3} + [\beta - \alpha(\alpha + \beta + 6)x_k] \frac{\pi''(x_k)}{2} \right. \\
 & \left. - (\alpha + \beta + 2) \pi'(x_k) \right\}.
 \end{aligned}$$

A função T^2 é positiva em Ξ e se anula na fronteira de Ξ . Além disso, o valor máximo é obtido em um ponto interior de Ξ . Isto quer dizer que o máximo é local.

Como o máximo de T^2 é local e único, pelo Teorema 4.3, temos que as derivadas parciais $\partial^2 T^2 / \partial x_k^2$ são negativas para $k = 1, \dots, n$, somente no ponto extremo $(x_{n,n}^{(\alpha,\beta)}, \dots, x_{n,1}^{(\alpha,\beta)})$. Seja $F(x_k)$ dada por

$$\begin{aligned}
 F(x_k) := & \pi'(x_k) \left\{ \frac{2}{3} (1 - x_k^2) \pi'''(x_k) + \frac{1}{2} [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 6)x_k] \pi''(x_k) \right. \\
 & \left. - (\alpha + \beta + 2) \pi'(x_k) \right\}.
 \end{aligned}$$

Como, para $x_k = x_k^{(\alpha,\beta)}$, $k = 1, \dots, n$,

$$\tau^{-1}(\bar{x} \setminus x_k) > 0$$

e, por (4.5),

$$(1 - x_k^2) \pi''(x_k) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x_k] \pi'(x_k) = 0,$$

temos $F(x_k) < 0$.

Para simplificar $F(x_k)$, usamos (4.3) respectivamente para $l = 1$ e $l = 0$ e obtemos:

$$\begin{aligned} 6F(x_k) &= \pi'(x_k) \{[(\alpha + \beta - 2)x_k + \alpha - \beta] \pi''(x_k) \\ &\quad - [4n(n + \alpha + \beta + 1) + 2(\alpha + \beta + 2)\pi'(x_k)]\} \\ &= \frac{(\pi'(x_k))^2}{1 - x_k^2} \{[(\alpha + \beta - 2)x_k + \alpha - \beta][(\alpha + \beta + 2)x_k + \alpha - \beta] \\ &\quad - [4n(n + \alpha + \beta + 1) + 2(\alpha + \beta + 2)](1 - x_k^2)\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Logo, para $x_k = x_k^{(\alpha, \beta)}$ e $k = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} &[(\alpha + \beta - 2)x_k + \alpha - \beta][(\alpha + \beta + 2)x_k + \alpha - \beta] \\ &\quad - [4n(n + \alpha + \beta + 1) + 2(\alpha + \beta + 2)](1 - x_k^2) < 0. \end{aligned}$$

Resolvendo esta inequação do segundo grau e lembrando que $x_{n,n}^{(\alpha, \beta)} < x_{n,1}^{(\alpha, \beta)}$, chegamos ao resultado desejado. ■

Como aplicação desses resultados, limites para os zeros de outros polinômios clássicos podem ser obtidos.

É o que veremos a seguir.

4.1.1 Limites para os maiores zeros dos Polinômios Ultrasféricos, de Laguerre e de Hermite

Seja $x_{n,1}^{(\lambda)}$ o maior zero do polinômio ultrasférico $P_n^{(\lambda)}(x)$. Recentemente, três resultados sobre limites superiores para $x_{n,1}^{(\lambda)}$ foram obtidos. Elbert e Laforgia [8] (Teorema 1 (ii)), provaram que

$$x_{n,1}^{(\lambda)} < \sqrt{\frac{n^2 + 2\lambda n}{n^2 + 2\lambda n + \lambda^2 + \lambda}}, \text{ para } \lambda \geq 0$$

e Ifantis e Siafarikas [19] provaram a desigualdade

$$x_{n,1}^{(\lambda)} < \sqrt{\frac{n^2 + 2\lambda n - n}{n^2 + 2\lambda n + \lambda^2 - n - \lambda}}, \text{ para } \lambda > 1/2. \quad (4.10)$$

Föster e Petras [13] chegaram ao limite superior

$$x_{n,1}^{(\lambda)} < \sqrt{\frac{n^2 + 2\lambda n - \lambda - 1/2}{n^2 + 2\lambda n + \lambda^2 - 1/4}}, \text{ para } \lambda > -1/2. \quad (4.11)$$

Substituindo $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ em (4.7), Dimitrov, neste mesmo trabalho, obteve

$$x_{n,1}^{(\lambda)} < \sqrt{\frac{n^2 + 2\lambda n + \lambda + 1/2}{n^2 + 2\lambda n + \lambda^2 - 1/4}}, \text{ para } \lambda > -1/2, \quad (4.12)$$

e, como consequência, limites para os zeros extremos dos polinômios de Laguerre e Hermite.

Corolário 4.1 *Seja $h_{n,1}$ o maior zero do polinômio de Hermite $H_n(x)$. Então*

$$h_{n,1} < \sqrt{2n - 1}. \quad (4.13)$$

Demonstração: Multiplicando (4.11) por $\sqrt{\lambda}$ e fazendo $\lambda \rightarrow \infty$, obtemos, do Teorema 2.16, o resultado desejado. ■

Corolário 4.2 *Sejam, respectivamente, $l_{n,1}^{(\alpha)}$ e $l_{n,n}^{(\alpha)}$ o menor e o maior zeros do polinômio de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$. Então, para qualquer $\alpha > -1$, valem as seguintes desigualdades:*

$$l_{n,1}^{(\alpha)} \geq 2n + \alpha + 1 - \sqrt{(2n + \alpha + 1)^2 + 1 - \alpha^2} \quad (4.14)$$

e

$$l_{n,n}^{(\alpha)} \leq 2n + \alpha + 1 + \sqrt{(2n + \alpha + 1)^2 + 1 - \alpha^2}. \quad (4.15)$$

Demonstração: Seja $A(n, \alpha, \beta)$ definida por

$$A(n, \alpha, \beta) = 4n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 2) + \alpha^2 - \beta^2.$$

Então, as desigualdades (4.6) e (4.7) referentes aos zeros dos polinômios de Jacobi, se tornam, respectivamente,

$$1 - x_{n,n}^{(\alpha,\beta)} < \frac{A(n, \alpha, \beta) + \sqrt{B(n, \alpha, \beta)}}{4n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 2)} \quad (4.16)$$

e demonstrar: Seja n par. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $q(x)$ é um

$$1 - x_{n,1}^{(\alpha,\beta)} > \frac{A(n, \alpha, \beta) - \sqrt{B(n, \alpha, \beta)}}{4n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 2)}, \quad (4.17)$$

onde $B(n, \alpha, \beta)$ é dada por (4.8).

Como $A(n, \alpha, \beta) = 2[(2n + \alpha + 1)\beta + 2n(n + \alpha + 1) + \alpha^2 + \alpha]$ e $B(n, \alpha, \beta)$ é um polinômio quadrático em β com coeficiente de maior grau $4[(2n + \alpha + 1)^2 + 1 - \alpha^2]$, então as relações (4.16) e (2.61) implicam em (4.15), pois

$$\begin{aligned} l_{n,1}^{(\alpha)} &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta}{2} (1 - x_{n,n}^{(\alpha,\beta)}) \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta}{2} \frac{A(n, \alpha, \beta) + \sqrt{B(n, \alpha, \beta)}}{4n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 2)} \\ &= 2n + \alpha + 1 + \sqrt{(2n + \alpha + 1)^2 + 1 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, (4.17) e (2.62) fornecem (4.14). ■

4.2 Propriedades de monotonicidade dos zeros dos Polinômios Ultrasféricos

Nesta seção, usaremos o Teorema de Markov para demonstrar alguns resultados sobre a monotonicidade de $f(\lambda)x_{n,k}^{(\lambda)}$ e, a partir deles, obter alguns limites para os zeros $x_{n,k}^{(\lambda)}$, $k = 1, \dots, n$, dos polinômios ultrasféricos $P_n^{(\lambda)}(x)$.

4.2.1 Resultados preliminares

Apresentaremos, aqui, os pré-requisitos que serão de grande utilidade nas demonstrações dos principais resultados referentes à monotonicidade dos zeros dos polinômios ultrasféricos.

Lema 4.5 *Seja $q(x)$ um polinômio de grau $n \geq 3$ com zeros reais e distintos. Suponha que $q(x)$ é um polinômio par (ímpar) se n for par (ímpar). Então, todo zero positivo de $q'(x)$ é uma função crescente de qualquer zero positivo de $q(x)$.*

Demonstração: Seja n par. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $q(x)$ é um polinômio mônico. Como $q(x)$ é um polinômio par e tem somente zeros reais, então

$$q(x) = (x^2 - x_1^2) \dots (x^2 - x_{n/2}^2), \quad 0 < x_{n/2} < \dots < x_1.$$

Suponhamos que $\xi = x_m$ para algum m , $1 \leq k \leq n/2$. Então,

$$q(x) = (x^2 - \xi^2)r(x).$$

Daí, o polinômio $q'(x)2xr(x) + (x^2 - \xi^2)r'(x)$ é um polinômio ímpar e, pelo Teorema de Rolle, possui $n/2 - 1$ zeros positivos η_j , $x_{j+1} < \eta_j < x_j$, $j = 1, \dots, (n/2 - 1)$. Seja η um desses zeros, $\eta = \eta_m$. Afirmamos que η é uma função crescente de ξ . Para demonstrar isso, consideremos $q_\epsilon(x) := (x^2 - (\xi + \epsilon)^2)r(x)$, para algum ϵ positivo. Como $q'(\eta) = 0$ segue que

$$r'(\eta) = -\frac{2\eta r(\eta)}{(\eta^2 - \xi^2)}. \quad (4.18)$$

Por outro lado, $q'_\epsilon(\eta) = 2\eta r(\eta) + [\eta^2 - (\xi + \epsilon)^2]r'(\eta)$. Usando (4.18), obtemos

$$q'_\epsilon(\eta) = 2\eta [(\xi + \epsilon)^2 - \xi^2] r(\eta) / (\eta^2 - \xi^2).$$

Além disso,

$$\text{sinal}[q'_\epsilon(\eta)] = \text{sinal}[r(\eta)/(\eta^2 - \xi^2)].$$

Vemos que se $\eta > \xi$, então, por (??)

$$\text{sinal}[r(\eta)] = \text{sinal}[q(\eta)]$$

e, se $\eta < \xi$, então

$$-\text{sinal}[r(\eta)] = \text{sinal}[q(\eta)].$$

Mas, $\text{sinal}[q(\eta)] = (-1)^m$ pois $q(x)$ é mônico e $x_{m+1} < \eta = \eta_m < x_m$. Assim,

$$\text{sinal}[q'_\epsilon(\eta)] = \text{sinal}[q(\eta)] = (-1)^m. \quad (4.19)$$

Sejam $x_i(\epsilon)$, $i = 1, \dots, n/2$ os zeros positivos de $q_\epsilon(x)$. Pelo teorema de Rolle, $q'_\epsilon(x)$ tem exatamente um zero $\eta(\epsilon) \in (x_{m+1}(\epsilon), x_m(\epsilon))$.

Por outro lado, sinal $[q'_\epsilon(x_{m+1}(\epsilon))] = (-1)^m$ e sinal $[q'_\epsilon(x_m(\epsilon))] = (-1)^{m+1}$, pois $q_\epsilon(x)$ é um polinômio mônico.

Portanto, de (4.19), $q'_\epsilon(\eta_\epsilon)$ e $q'_\epsilon(x_{m+1}(\epsilon))$ têm o mesmo sinal. Lembrando que $q'_\epsilon(\eta_\epsilon) = 0$, $\eta(\epsilon) > \eta$.

A prova para n ímpar é similar. ■

Como consequência imediata deste teorema temos o seguinte resultado:

Corolário 4.3 *Seja $q(x)$ um polinômio de grau $n \geq 3$ com zeros reais e distintos. Suponha que $q(x)$ é um polinômio par (ímpar) se n for par (ímpar). Então, todo zero positivo de $q^{(v)}(x)$, $0 < v < n - 1$ é uma função crescente para qualquer zero positivo de $q(x)$.*

Lema 4.6 *Seja $\omega(x)$ uma função peso positiva e contínua no intervalo (a, b) . Denotemos por $\{P_n(x; \beta)\}$ os polinômios ortogonais com relação à função $\omega(x)$ no intervalo (a, β) , $a < \beta \leq b$. Então, os zeros de $P_n(x; \beta)$ são funções crescentes de β .*

Demonstração: Sejam $x_1^{(\beta)}, \dots, x_n^{(\beta)}$ os zeros de $P_n(x; \beta)$. Então, satisfazem às seguintes equações

$$\int_a^\beta \frac{P_n^2(x; \beta)}{x - x_i^{(\beta)}} \omega(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

pois, pelo Teorema 2.2,

$$\int_a^\beta \frac{P_n^2(x; \beta)}{x - x_i^{(\beta)}} \omega(x) dx = \int_a^\beta P_n(x; \beta) \frac{P_n(x; \beta)}{(x - x_i^{(\beta)})} \omega(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, n..$$

Derivando a k -ésima equação com relação à β , obtemos:

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i \neq k} \left(\int_a^\beta \frac{P_n^2(x; \beta)}{(x - x_i^{(\beta)})(x - x_k^{(\beta)})} \omega(x) dx \right) (x_i^{(\beta)})' \\ - \int_a^\beta \left(\frac{P_n^2(x; \beta)}{(x - x_k^{(\beta)})^2} \omega(x) dx \right) (x_k^{(\beta)})' + \omega(\beta) \frac{P_n^2(\beta; \beta)}{(\beta - x_k^{(\beta)})} = 0. \end{aligned}$$

Devido à ortogonalidade, todas as integrais da soma acima se anulam. Portanto,

$$(x_k^{(\beta)})' = \frac{\frac{\omega(\beta) P_n^2(\beta; \beta)}{(\beta - x_k^{(\beta)})}}{\int_a^\beta \frac{P_n^2(x; \beta)}{(x - x_k^{(\beta)})^2} \omega(x) dx} > 0,$$

isto é, os zeros de $P_n(x; \beta)$ são funções crescentes de β . ■

Definição 4.1 Uma seqüência de nascimento e morte $Q_n(x; \tau)$ é definida por:

$$\begin{aligned} Q_0(x; \tau) &= 1, \\ Q_1(x; \tau) &= [b_0^{(\tau)} + d_0^{(\tau)} - x] / b_0^{(\tau)}, \\ -xQ_n(x; \tau) &= b_n^{(\tau)}Q_{n+1}(x; \tau) - (b_n^{(\tau)} + d_n^{(\tau)})Q_n(x; \tau) + d_n^{(\tau)}Q_{n-1}(x; \tau), \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $b_n^{(\tau)} > 0, d_{n+1}^{(\tau)} > 0$ para $n \geq 0$ e $d_0^{(\tau)} \geq 0$. Os coeficientes $b_n^{(\tau)}$ e $d_n^{(\tau)}$ são chamados coeficientes do processo de nascimento e morte.

(Para mais detalhes, ver, por exemplo, Karlin e McGregor [22].)

Se os coeficientes do processo de nascimento e morte, $\{b_n^{(\tau)}\}$ e $\{d_n^{(\tau)}\}$, são funções crescentes (decrecentes) de τ , aplicando o Teorema de Perron-Frobenius para $(-1)^n Q_n(x; \tau)$, provamos que o maior zero de $Q_n(x; \tau)$ é uma função crescente (decrecente) de τ .

Observe que fazendo $\tilde{Q}_m(x; \tau) = (-1)^m Q_m(x; \tau)$ e $m = 1, 2, \dots, n$, da relação de recorrência (4.20), obtemos o sistema linear

$$x \begin{pmatrix} \tilde{Q}_0(x; \tau) \\ \tilde{Q}_1(x; \tau) \\ \tilde{Q}_2(x; \tau) \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{Q}_{n-1}(x; \tau) \end{pmatrix} = A(\tau) \begin{pmatrix} \tilde{Q}_0(x; \tau) \\ \tilde{Q}_1(x; \tau) \\ \tilde{Q}_2(x; \tau) \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{Q}_{n-1}(x; \tau) \end{pmatrix} + b_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{Q}_n(x; \tau) \end{pmatrix},$$

onde $A(\tau)$ é a matriz tridiagonal

$$\begin{pmatrix} b_0^{(\tau)} + d_0^{(\tau)} & b_0^{(\tau)} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ d_1^{(\tau)} & b_1^{(\tau)} + d_1^{(\tau)} & b_1^{(\tau)} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_2^{(\tau)} & b_2^{(\tau)} + d_2^{(\tau)} & b_2 & 0 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{n-1}^{(\tau)} & b_{n-1}^{(\tau)} + d_{n-1}^{(\tau)} \end{pmatrix}.$$

Se $x_{n,j}^{(\tau)}$, $j = 1, \dots, n$, for um zero de $\tilde{Q}_n(x; \tau)$ então, $x_{n,j}^{(\tau)}$ é um auto valor de $A(\tau)$.

Assim, se $\{b_n^{(\tau)}\}$ e $\{d_n^{(\tau)}\}$, são funções crescentes (decrecentes) de τ , temos que $A(\tau + 1) - A(\tau)$ é positiva (negativa).

Logo, o maior zero de $Q_n(x; \tau)$ é uma função crescente (decrecente) de τ .

Denotemos por $g_n^{(\lambda)}$ e $h_n^{(\lambda)}$ os polinômios hipergeométricos de grau n

$$g_n^{(\lambda)}(x) := {}_2F_1(-n, n + \lambda; 1/2; x)$$

e

$$h_n^{(\lambda)}(x) := {}_2F_1(-n, n + \lambda + 1; 3/2; x).$$

De (2.48), sabemos que $P_{2n}^{(\lambda)}(x^{1/2})$ e $x^{-1/2}P_{2n+1}^{(\lambda)}(x^{1/2})$ são múltiplos de $g_n^{(\lambda)}(x)$ e $h_n^{(\lambda)}(x)$, respectivamente. Cálculos simples mostram que, para $n \neq m$,

$$\int_0^1 P_{2n}^{(\lambda)}(x^{1/2}) P_{2m}^{(\lambda)}(x^{1/2}) \frac{1}{2} (1-x)^{\lambda-1/2} x^{-1/2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^{-1/2} g_n^{(\lambda)} g_m^{(\lambda)} (1-x)^{\lambda-1/2} dx = 0$$

e

$$\int_0^1 P_{2n+1}^{(\lambda)}(x^{1/2}) P_{2m+1}^{(\lambda)}(x^{1/2}) \frac{1}{2} (1-x)^{\lambda-1/2} x^{-1/2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^{1/2} h_n^{(\lambda)} h_m^{(\lambda)} (1-x)^{\lambda-1/2} dx = 0.$$

Assim, $g_n^{(\lambda)}(x)$ e $h_n^{(\lambda)}(x)$, $n = 0, 1, \dots$ são seqüências de polinômios ortogonais em $(0, 1)$ com relação às funções peso $\omega_e(x) = x^{-1/2}(1-x)^{\lambda-1/2}$ e $\omega_o(x) = x^{1/2}(1-x)^{\lambda-1/2}$, respectivamente.

Outra consequência é que os zeros de $g_n^{(\lambda)}(x)$ são $(x_{2n,k}^{(\lambda)})^2$ e os zeros de $h_n^{(\lambda)}(x)$ são $(x_{2n+1,k}^{(\lambda)})^2, k = 1, \dots, n$.

De (1.10) e (1.11) obtemos as seguintes relações de recorrência para $g_n^{(\lambda)}(x)$ e $h_n^{(\lambda)}(x)$:

$$\begin{aligned} g_0^{(\lambda)}(x) &= 1 \\ g_1^{(\lambda)}(x) &= 1 - 2(\lambda + 1)x \\ -xg_n^{(\lambda)}(x) &= \frac{(2n+1)(n+\lambda)}{2(2n+\lambda)(2n+\lambda+1)}g_{n+1}^{(\lambda)}(x) - \frac{4n^2+4\lambda n+\lambda-1}{2(2n+\lambda-1)(2n+\lambda+1)}g_n^{(\lambda)}(x) \\ &\quad + \frac{n(2n+2\lambda-1)}{2(2n+\lambda)(2n+\lambda-1)}g_{n-1}^{(\lambda)}(x), \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} h_0^{(\lambda)}(x) &= 1 \\ h_1^{(\lambda)}(x) &= 1 - 2(\lambda + 2)x/3 \\ -xh_n^{(\lambda)}(x) &= \frac{(2n+3)(n+\lambda+1)}{2(2n+\lambda+1)(2n+\lambda+2)}h_{n+1}^{(\lambda)}(x) - \frac{4n^2+4(\lambda+1)n+3\lambda}{2(2n+\lambda)(2n+\lambda+1)}h_n^{(\lambda)}(x) \\ &\quad + \frac{n(2n+2\lambda-1)}{2(2n+\lambda)(2n+\lambda+1)}h_{n-1}^{(\lambda)}(x), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Portanto, pela definição 4.1, $\{g_n^{(\lambda)}(x)\}$ e $\{h_n^{(\lambda)}(x)\}$ são seqüências de nascimento e morte.

4.2.2 Resultados principais

Em [20], M.E.Ismail formulou uma conjectura que chamaremos Conjectura de Ismail-Lettessier-Askey (ILA) e que apresentamos a seguir:

Conjectura 4.1 (ILA) *Seja $n > 2$ e $1 \leq k \leq [n/2]$. Então, a função $(\lambda + 1)^{1/2}x_{n,k}^{(\lambda)}$ é uma função crescente de λ , para $\lambda > -1/2$.*

Esta conjectura se baseia nos seguintes fatos:

- Quando $n = 2$, $x_{2,1}^{(\lambda)} = 1/\sqrt{2(\lambda+1)}$ e, quando $n = 3$, $x_{3,1}^{(\lambda)} = \sqrt{3/2(\lambda+2)}$, de onde segue a Conjectura ILA.

- O seguinte resultado de Ahmed-Muldoon-Spliger implica que a Conjectura ILA é válida para $-1/2 \leq \lambda \leq 3/2$ e $n \geq 3$:

Teorema 4.7 Para $n \geq 2$, denotemos por $x_{n,k}^{(\lambda)}$ o k -ésimo zero de $P_n^{(\lambda)}(x)$, em ordem decrescente. Então, para $k = 1, \dots, [n/2]$,

$$\left[2n^2 + 1 + 2\lambda(2n + 1)\right]^{1/2} x_{n,k}^{(\lambda)} \quad (4.22)$$

é função crescente de λ , $-1/2 \leq \lambda \leq 3/2$.

- Em [19], E. Ifantis e Siafarikas provaram a Conjectura-ILA para o maior zero positivo $x_{n,1}^{(\lambda)}$ usando uma técnica de análise funcional.

Recentemente, Dimitrov [5] provou a Conjectura 4.1 para todos os zeros positivos $x_{n,k}^{(\lambda)}$ para $\lambda \in (-1/2, 9/2]$ e, também, para $\lambda \in (-1/2, 3/2 + v)$ e $n > 1 + (v^2 + 3v + 3/2)^{1/2}$, $v \in \mathbb{N}$. É o que veremos a seguir.

Teorema 4.8 Seja v um inteiro não-negativo. Então, para qualquer $n > 1 + (v^2 + 3v + 3/2)^{1/2}$ e $k, 1 \leq k \leq [n/2]$, os produtos $(\lambda + 1)^{1/2} x_{n,k}^{(\lambda)}$ são funções crescentes de λ para $-1/2 < \lambda \leq 3/2 + v$.

Demonstração: A prova será feita por indução sobre v .

- (i) Para $v = 0$, a afirmação segue do Teorema 4.7, lembrando que ele afirma que se $n \geq 2$, então

$$\left[\lambda + (2n^2 + 1)/(4n + 2)\right]^{1/2} x_{n,k}^{(\lambda)}$$

cresce com λ para $-1/2 < \lambda \leq 3/2$. Como $(2n^2 + 1)/(4n + 2) \geq 1$ para $n \geq (3/2)^{1/2}$, então o Teorema é verdadeiro para $v = 0$.

- (ii) Agora, seja v qualquer inteiro positivo fixo e consideremos a afirmação válida para $v' < v$.

- (iii) Mostremos que ela também vale para v .

Temos que $n \geq 1 + (v^2 + 3v + 3/2)^{1/2} > 1 + [(v - 1)^2 + 3(v - 1) + 3/2]^{1/2}$. Então, pela

hipótese de indução, as funções $(\lambda + 1)^{1/2} x_{n,k}^{(\lambda)}$ crescem com λ para $-1/2 < \lambda \leq v + 1/2$.

Falta mostrar que elas crescem para $\lambda \in (v + 1/2, v + 3/2]$. O resultado de Ahmed, Muldoon e Spigler mencionado é equivalente ao fato de que os zeros positivos de $P_N^{(\mu)} \left([(\mu + (2N^2 + 1)/(4N + 2))^{-1/2} x] \right)$ crescem para $\mu \in [-1/2, 3/2]$. Fazendo $\mu = \lambda - v$, $N = n + v$, chegamos que os zeros positivos de

$$P_{n+v}^{(\lambda-v)} \left(\left[\lambda - v + (2(n+v)^2 + 1)/(4n + 4v + 2) \right]^{-1/2} x \right) \quad (4.22)$$

são funções crescentes de λ se $\lambda \in (v + 1/2, v + 3/2]$.

Mas, sabemos que $(P_n^{(\lambda)}(x))' = 2\lambda P_{n-1}^{(\lambda+1)}(x)$ e $(P_n^{(\lambda)}(x))^{(v)} = c(n, \lambda, v) P_{n-v}^{(\lambda+v)}(x)$, onde $c(n, \lambda, v)$ são constantes não-nulas.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d^v}{dx^v} \left\{ P_{n+v}^{(\lambda-v)} \left[\left(\lambda - v + \frac{2(n+v)^2 + 1}{4n + 4v + 2} \right)^{-1/2} x \right] \right\} \\ = c_1(n, \lambda, v) P_n^{(\lambda)} \left[\left(\lambda - v + \frac{2(n+v)^2 + 1}{4n + 4v + 2} \right)^{-1/2} x \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Observe que $P_{n+v}^{(\lambda-v)} \left([\lambda - v + (2(n+v)^2 + 1)/(4n + 4v + 2)]^{-1/2} x \right)$ é um polinômio par (ímpar) em x se $n + v$ é par (ímpar). Assim, segue do Corolário 4.3, que qualquer zero positivo de $\{P_{n+v}^{(\lambda-v)} \left([\lambda - v + 2(n+v)^2 + 1)/(4n + 4v + 2)]^{-1/2} x \right)\}^{(v)}$ é uma função crescente de qualquer zero positivo de

$$P_{n+v}^{(\lambda-v)} \left(\left[\lambda - v + (2(n+v)^2 + 1)/(4n + 4v + 2) \right]^{-1/2} x \right). \quad (4.24)$$

Mas,

$$\begin{aligned} P_{n+v}^{(\lambda-v)} \left(\left[\lambda - v + (2(n+v)^2 + 1)/(4n + 4v + 2) \right]^{-1/2} x \right) \\ = c_1(n, \lambda, v) P_n^{(\lambda)} \left(\left[\lambda - v + (2(n+v)^2 + 1)/(4n + 4v + 2) \right]^{-1/2} x \right). \end{aligned}$$

Logo, todo zero positivo de $P_n^{(\lambda)} \left([\lambda - v + (2(n+v)^2 + 1)/(4n + 4v + 2)]^{-1/2} x \right)$ cresce com λ para $\lambda \in (v + 1/2, v + 3/2]$.

Isto quer dizer que os produtos

$$\left[\lambda - v + (2(n+v)^2 + 1)/(4n + 4v + 2) \right]^{-1/2} x_{n,k}^{(\lambda)}$$

são funções crescentes de λ para $\lambda \in (v + 1/2, v + 3/2]$.

Agora,

$$n \geq 1 + (v^2 + 3v + 3/2)^{1/2} \iff \lambda - v + [2(n + v)^2 + 1] / (4n + 4v + 2) \geq \lambda + 1.$$

Assim, obtemos o resultado desejado, pois

$$\sqrt{\lambda - v + [2(n + v)^2 + 1] / (4n + 4v + 2)} \geq \sqrt{\lambda + 1}.$$

Daí,

$$\sqrt{\lambda - v + [2(n + v)^2 + 1] / (4n + 4v + 2)} x_{n,k}^{(\lambda)} \geq \sqrt{\lambda + 1} x_{n,k}^{(\lambda)} \geq \sqrt{\lambda + 1} x_{n,k}^{(\lambda+1)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\lambda + 1) - v + [2(n + v)^2 + 1] / (4n + 4v + 2)} x_{n,k}^{(\lambda+1)} \\ & \geq \sqrt{\lambda - v + [2(n + v)^2 + 1] / (4n + 4v + 2)} x_{n,k}^{(\lambda)} \geq \sqrt{\lambda + 1} x_{n,k}^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

■

Corolário 4.4 Se $n > 2$ e $1 \leq k \leq [n/2]$, então $(\lambda + 1)^{1/2} x_{n,k}^{(\lambda)}$ é uma função crescente de λ para $-1/2 < \lambda \leq 9/2$.

Teorema 4.9 Seja $\lambda \geq 1/2$. Então, para quaisquer n e k ,

$$(\lambda - 1/2)^{1/2} x_{n,k}^{(\lambda)} \tag{4.24}$$

é uma função crescente de λ .

Demonstração: Note que $(\lambda - 1/2)^{1/2} x_{n,k}^{(\lambda)}$ cresce se, e somente se, $(\lambda - 1/2) \{x_{n,k}^{(\lambda)}\}^2$ cresce. Vamos mostrar que $(\lambda - 1/2) \{x_{n,k}^{(\lambda)}\}^2$, $k = 1, \dots, n/2$ são funções crescentes de λ em $[1/2, \infty)$. Esses produtos são os zeros de $s_n^{(\lambda)}(x) := g_n^{(\lambda)}(x/(\lambda - 1/2))$, onde $g_n^{(\lambda)}$ é o polinômio hipergeométrico definido anteriormente.

Vemos que $\{s_n^{(\lambda)}\}$ são ortogonais em $(0, \lambda - 1/2)$ com relação à função peso

$$\omega_e(x; \lambda) := x^{-1/2} (\lambda - 1/2 - x)^{\lambda-1/2}. \tag{4.25}$$



Sejam $1/2 < \lambda_1 < \lambda_2$ e $\{s_n\}$ polinômios ortogonais em $(0, \lambda_1 - 1/2)$ com relação à restrição $\omega_e(x; \lambda_2)$ no intervalo $(0, \lambda_1 - 1/2)$.

Denotemos por $\xi_k^{(\lambda_i)}$, $i = 1, 2$, o k -ésimo zero de $s_n^{(\lambda_i)}$ e por ξ_k o k -ésimo zero de s_n . Devemos provar que $\xi_k^{(\lambda_1)} < \xi_k^{(\lambda_2)}$. Para isto, mostremos que $\xi_k^{(\lambda_1)} < \xi_k$ e $\xi_k < \xi_k^{(\lambda_2)}$. A primeira desigualdade segue imediatamente do Teorema de Markov (Teorema 3.5) e do fato de que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \omega_e(x; \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\lambda - 1/2) \ln (\lambda - 1/2 - x)] \\ &= \ln (\lambda - 1/2 - x) + \frac{\lambda - 1/2}{\lambda - 1/2 - x} \end{aligned}$$

é uma função crescente de x para $x \in (0, \lambda)$. A desigualdade $\xi_k < \xi_k^{(\lambda_2)}$ é uma consequência do Lema 4.6.

Para n ímpar, a prova de que $(\lambda - 1/2) \{x_{n,k}^{(\lambda)}\}^2$ cresce com λ é similar. ■

A função $(\lambda - 1/2)^{1/2}$ não é extrema. Ela é uma função que faz com que os produtos (4.24) cresçam em $[1/2, \infty)$.

O próximo teorema se refere ao comportamento monotônico do maior zero de $P_n^{(\lambda)}$.

Teorema 4.10 *Seja $\lambda > -1/2$. Então,*

- (i) *para qualquer n par fixo, $(\lambda + 1)^{1/2} x_{n,1}^{(\lambda)}$ é uma função crescente de λ .*
- (ii) *para qualquer n ímpar fixo, $n \geq 3$, $(\lambda + 2)^{1/2} x_{n,1}^{(\lambda)}$ é uma função crescente de λ .*

Demonstração: Primeiramente, consideremos n par. Pelo Teorema 4.9, devemos provar que o maior zero de $G_n^{(\lambda)}(x) := g_n^{(\lambda)}\left(\frac{x}{\lambda + 1}\right)$ é uma função crescente de λ para $\lambda > -1/2$. De (4.21), obtemos, facilmente, que

$$\begin{aligned} G_0^{(\lambda)}(x) &= 1 \\ G_1^{(\lambda)}(x) &= 1 - 2x \\ -x G_n^{(\lambda)}(x) &= B_n^{(\lambda)} G_{n+1}^{(\lambda)}(x) - (B_n^{(\lambda)} + D_n^{(\lambda)}) G_n^{(\lambda)}(x) + D_n^{(\lambda)} G_{n-1}^{(\lambda)}(x), \end{aligned}$$

onde os coeficientes $B_n^{(\lambda)}$ e $D_n^{(\lambda)}$ são dados por:

$$B_n^{(\lambda)} = (\lambda + 1) \frac{(2n + 1)(n + \lambda)}{2(2n + \lambda)(2n + \lambda - 1)}. \quad (4.25)$$



e Desde que

$$D_n^{(\lambda)} = (\lambda + 1) \frac{n(2n + 2\lambda - 1)}{2(2n + \lambda)(2n + \lambda - 1)}. \quad (4.26)$$

Portanto, $\{G_n^{(\lambda)}\}$ são seqüências polinomiais de nascimento e morte.

Pelo Teorema 1.3 o crescimento do coeficiente do processo de nascimento e morte é consequência do crescimento do maior zero de $G_n^{(\lambda)}(x)$.

De (4.25) obtemos que

$$\begin{aligned} (n + 1/2)^{-1}(2n + \lambda)^2(2n + \lambda + 1)^2 (B_n^{(\lambda)})' \\ = (n + 2\lambda + 1)(2n + \lambda)(2n + \lambda + 1) - (\lambda + 1)(n + \lambda)(4n + 2\lambda + 1) \\ = n [3\lambda^2 + 2(4n + 1)\lambda + 4n^2 + 2n + 1]. \end{aligned}$$

Assim, $(B_n^{(\lambda)})' > 0$ para $\lambda \geq 0$. A expressão entre colchetes pode ser reescrita da forma $4n^2 + 2(4\lambda + 1)n + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1$. Seu discriminante é igual a $4\lambda^2 - 3$. Logo, a expressão é positiva para $|\lambda| < \sqrt{3}/2$. Assim, $(B_n^{(\lambda)})' > 0$ para $\lambda > -1/2$.

Derivando (4.26) temos

$$\begin{aligned} 2n^{-1}(2n + \lambda)^2(2n + \lambda - 1)^2 (D_n^{(\lambda)})' \\ = (2n + \lambda)(2n + \lambda - 1)(2n + 4\lambda + 1) - (\lambda + 1)(2n + 2\lambda - 1)(4n + 2\lambda - 1) \\ = (2n - 1) [3\lambda^2 + 2(4n - 1)\lambda + 4n^2 - 2n + 1]. \end{aligned}$$

Assim, temos também $(D_n^{(\lambda)})' > 0$ para $\lambda \geq 0$. O discriminante da expressão entre colchetes, $4n^2 + 2(4\lambda - 1)n + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1$, é novamente igual a $4\lambda^2 - 3$ e $(D_n^{(\lambda)})' > 0$ para $\lambda > -1/2$.

Quando n é ímpar, temos que mostrar que o maior zero de $H_n^{(\lambda)}(x) := h_n^{(\lambda)}\left(\frac{x}{\lambda + 2}\right)$ cresce com λ para $\lambda > -1/2$. De (4.21) é fácil mostrar que $\{H_n^{(\lambda)}\}$ são seqüências polinomiais de nascimento e morte com coeficientes de nascimento e morte definidos por

$$B_n^{(\lambda)} = (\lambda + 2) \frac{(2n + 3)(n + \lambda + 1)}{2(2n + \lambda + 1)(2n + \lambda + 2)} \quad (4.27)$$

e

$$D_n^{(\lambda)} = (\lambda + 2) \frac{n(2n + 2\lambda - 1)}{2(2n + \lambda)(2n + \lambda + 1)}.$$

Desde que

$$(n + 3/2)^{-1}(2n + \lambda + 1)^2(2n + \lambda + 2)^2 \left(B_n^{(\lambda)} \right)' = n [3(\lambda + 1)^2 + 2(4n + 1)(\lambda + 1) + 4n^2 + 2n + 1],$$

então $\left(B_n^{(\lambda)} \right)' > 0$ para $\lambda > -1$.

Mas,

$$2n^{-1}(2n + \lambda)^2(2n + \lambda + 1)^2 D'_n(\lambda) = (6n - 1)\lambda^2 + 4(4n^2 + 1)\lambda + 8n^3 + 10n + 2 := r(\lambda).$$

Observe que $r(\lambda)$ atinge seu mínimo para $\lambda_0 < -1/2$ e é positivo para $\lambda \geq 0$. Temos que $r(-1/2) = 2n(4n^2 - 2n + 5) + (6n - 1)/4 > 0$ para $n > 0$. Assim, $r(\lambda) > 0$ para $\lambda > -1/2$. Portanto, $D_n^{(\lambda)}$ é função crescente para $\lambda, \lambda > -1/2$. ■

Observemos que a função $f(\lambda) = (\lambda + 2)^{1/2}$ é extrema em (ii) pois $x_{3,1} = [2(\lambda + 2)/3]^{-1/2}$. O Teorema 4.10 vale não somente para os maiores zeros de $P_n^{(\lambda)}$, mas para todos os zeros positivos.

A seguir, apresentaremos alguns resultados que serão de grande utilidade para a demonstração de um teorema recente de A.Elbert e P.D.Siafarikas [11]. Este teorema é um resultado muito importante, pois nele os autores provam a Conjectura-ILA.

Consideremos a fórmula de Richardson (para detalhes, ver Elbert & Muldoon [10]).

Seja $U(t) = U(\lambda, t)$ solução de

$$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + R(\lambda, t)U(t) = 0,$$

com a condição inicial $U(0) = 0$ ou $\left(\frac{d}{dt} U(t) \right)_{t=0} = 0$.

Se $c(\lambda)$ é uma raiz da equação $U(t, \lambda) = 0$, então $c(\lambda)$ é uma função diferenciável e

$$\left[\frac{d}{dt} U(\lambda, c(\lambda)) \right]^2 \frac{dc(\lambda)}{d\lambda} = - \int_0^{c(\lambda)} \frac{\partial R(\lambda, t)}{\partial \lambda} U^2(\lambda, t) dt, \quad (4.27)$$

com $\frac{\partial}{\partial \lambda} R(\lambda, t)$ contínua em $[0, c(\lambda)]$. Esta fórmula foi encontrada por Richardson no caso em que $U(0) = 0$.

Sabemos, de (2.49), que os polinômios ultrasféricos, $P_n^{(\lambda)}(x)$, satisfazem à equação diferencial de segunda ordem

$$(1 - x^2)y'' - (2\lambda + 1)xy' + n(n + 2\lambda)y = 0$$

e que os polinômios $\{P_n^{(\lambda)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $(1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$, isto é,

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} P_n^{(\lambda)}(x) P_m^{(\lambda)}(x) dx = 0, \quad \text{se } n \neq m.$$

Por outro lado, pela relação de simetria $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, temos que $P_n(0)P'_n(0) = 0$.

A função $u(x) = (1 - x^2)^{\lambda/2 + 1/4} P_n^{(\lambda)}(x)$ satisfaz à equação diferencial de Sturm-Liouville (ver Elbert & Muldoon [10])

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + Q(\lambda, x)u(x) = 0,$$

onde

$$Q(\lambda, x) = \frac{(n + \lambda)^2}{1 - x^2} + \frac{1/2 + \lambda - \lambda^2 + x^2/4}{(1 - x^2)^2}.$$

Fazendo $t = f(\lambda)x$, onde $f(\lambda) = [\lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2}]^{1/2}$, a função $U(t) = U(f(\lambda)x) = u(x)$ satisfaz à equação diferencial de Richardson

$$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + R(\lambda, t)U(t) = 0,$$

com

$$R(\lambda, t) = [f(\lambda)]^{-2} Q(\lambda, t/f(\lambda)).$$

Substituindo $t^2 = \tau$ e $f^2(\lambda) = \varphi(\lambda) = \lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2}$, temos

$$S(\lambda, \varphi(\lambda), \tau) = R(\lambda, t) = \frac{(n + \lambda)^2}{\varphi(\lambda) - \tau} + \frac{\varphi(\lambda)(1/2 + \lambda - \lambda^2) + \tau/4}{(\varphi(\lambda) - \tau)^2}.$$

Como $U(0)U'(0) = 0$, podemos aplicar a fórmula de Richardson (4.27). Calculando a derivada $\frac{d}{d\lambda} S(\lambda, \varphi(\lambda), \tau)$, obtemos:

$$(\varphi(\lambda) - \tau)^3 \frac{d}{d\lambda} S(\lambda, \varphi(\lambda), \tau) = A\tau^2 + B\tau + C, \quad (4.28)$$

onde

$$A = 2(n + \lambda),$$

$$B = -(4n + 2\lambda + 1)\varphi(\lambda) + \lambda^2 - \lambda - 1 + (n + \lambda)^2,$$

$$C = (2n + 1)\varphi^2(\lambda) + [\lambda^2 - \lambda - 1/2 - (n + \lambda)^2]\varphi(\lambda).$$

Pela definição de $\varphi(\lambda)$ temos $C = 0$. Seja $\tau_0 = -B/A$. Então, $\tau_0 \geq \varphi(\lambda)$ se $\lambda \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ e $0 < \tau_0 < \varphi(\lambda)$ se $\lambda > \frac{3}{2}$. Daí,

$$\frac{dS(\lambda, \varphi(\lambda), \tau)}{d\lambda} \begin{cases} < 0 & \text{para } 0 < \tau < \varphi(\lambda), \text{ se } \lambda \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}], \\ < 0 & \text{para } 0 < \tau < \tau_0, \text{ se } \lambda > \frac{3}{2}, \\ > 0 & \text{para } \tau_0 < \tau < \varphi(\lambda), \text{ se } \lambda > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (4.29)$$

Seja $c(\lambda) = f(\lambda)x_{n,k}^{(\lambda)}$ um zero positivo de $U(\lambda, t) = 0$. Assim, por (4.27), o sinal de $dc(\lambda)/d\lambda$ é determinado pela integral

$$\Phi(c) = - \int_0^c \frac{dS(\lambda, \varphi(\lambda), t^2)}{d\lambda} U^2(\lambda, t) dt, \quad 0 < c < f(\lambda). \quad (4.30)$$

De (4.29), esta integral é sempre positiva se $\lambda \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ pois o integrando é negativo. Este fato foi explorado em Elbert & Laforgia [7]. Observemos que esta integral também é positiva para $\lambda > \frac{3}{2}$. Por (4.29), a função $\Phi(c)$ cresce com c para $0 < c < \sqrt{\tau_0}$ e $\Phi(c)$ alcança seu máximo quando $c = \sqrt{\tau_0}$. Então, $\Phi(c)$ é decrescente no intervalo $(\sqrt{\tau_0}, \sqrt{\varphi(\lambda)})$. Mas, para $c = \sqrt{\varphi(\lambda)}$, $\Phi(c) = 0$. Temos, então, o seguinte resultado (demonstrado no lema 4.12 abaixo):

Lema 4.11 A função $\Phi(c)$ definida em (4.30) é positiva para $0 < c < \sqrt{\varphi(\lambda)}$ e $\Phi(0) = \Phi(\sqrt{\varphi(\lambda)}) = 0$.

Vamos mostrar, agora, o seguinte resultado:

Lema 4.12 Para $\lambda > \frac{3}{2}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{f(\lambda)} \frac{dS(\lambda, \varphi(\lambda), t^2)}{d\lambda} U^2(\lambda, t) dt \\ &= f^{-3}(\lambda) \int_0^1 \frac{A\varphi(\lambda)x^4 + Bx^2}{(1-x^2)^3} (1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} \left(P_n^{(\lambda)}(x)\right)^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Demonstração: Usando os valores de A e B dados em (4.28), temos que

$$A\varphi(\lambda)x^4 + Bx^2 = \varphi(\lambda) \left[2(n+\lambda)(1-x^2)^2 - (2\lambda-1)(1-x^2) \right] \\ + \left[2 \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \left(\lambda - \frac{3}{2} \right) - [(n+\lambda)^2 + \lambda^2 - \lambda - 1] (1-x^2) \right].$$

Por (2.50), a integral em (4.31) é dada por

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{A\varphi(\lambda)x^4 + Bx^2}{(1-x^2)^3} (1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} \left(P_n^{(\lambda)}(x) \right)^2 dx \\ = \varphi(x) [2(n+\lambda)I_0 - (2\lambda-1)I_1] \\ + \left[2 \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \left(\lambda - \frac{3}{2} \right) I_2 - [(n+\lambda)^2 + \lambda^2 - \lambda - 1] I_1 \right].$$

Mas, por (2.54) e (2.55) temos que esta integral é nula. Assim, chegamos ao resultado desejado. ■

Os lemas 4.11 e 4.12 implicam no resultado de Elbert e Siafarikas que demonstra a Conjectura ILA.

Teorema 4.13 *Seja $n \geq 3$ e $1 \leq k \leq [n/2]$. Então, a função $\left[\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2} \right]^{1/2} x_{n,k}^{(\lambda)}$ é uma função crescente de λ para $\lambda > -1/2$.*

Sabemos que $(\lambda+a)/(\lambda+b)$ é uma função crescente de λ se $a < b$ e $\lambda+b > 0$. Assim, este teorema implica na Conjectura ILA porque $(2n^2+1)/(4n+2) > 1$ para $n \geq 3$.

Por (2.63) temos, para os polinômios ultrasféricos, que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2} \right]^{1/2} x_{n,k}^{(\lambda)} = h_{n,k}.$$

Combinando este limite com a monotonicidade estabelecida no teorema anterior, temos o seguinte resultado:

Corolário 4.5 *Para os zeros positivos $x_{n,k}^{(\lambda)}$ do polinômio ultrasférico $P_n^{(\lambda)}(x)$, tem-se a seguinte desigualdade:*

$$\left[\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2} \right]^{1/2} x_{n,k}^{(\lambda)} < h_{n,k} \quad \text{para } \lambda > -\frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right].$$

Considerações Finais

Embora os limites obtidos no Teorema 4.4 e Corolários 4.1 e 4.2 não sejam exatos, eles são os melhores limites conhecidos. Experimentos numéricos mostram que o melhor limite conhecido para os zeros extremos dos polinômios de Jacobi foram obtidos por Ismail e Li [21] e o melhor limite superior para o maior zero do polinômio de Laguerre é dado em Szegő [33], Teorema 6.32. A desigualdade 4.13 é melhor do que a desigualdade $h_{n,1} < \sqrt{2n}$, que foi obtida recentemente por Ifantis e Siafarikas [19].

Embora a estimativa (4.12) seja mais fraca do que (4.11), sua vantagem é que ela é uma consequência imediata de uma estimativa para $x_{n,1}^{(\alpha,\beta)}$, enquanto todos os resultados anteriores valem especificamente para os maiores zeros dos polinômios Ultrasféricos.

As propriedades de monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais são temas de muitos artigos recentes. Somente este assunto já seria o bastante para a elaboração de uma outra dissertação de mestrado. Acreditamos ser este um campo de pesquisa muito promissor.

[5] Dimitrov, D. K., *On a conjecture concerning monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials*, J. Approx. Theory, 85 (1996).

[6] Dimitrov, D. K., *Electrostatic Interpretation and Bounds for the Extreme Zeros of Classical Orthogonal Polynomials*, Bull. Greek Math. Soc., 40 (1998) 43-48.

[7] Elbert, A. & Laforgia, A., *A note to the paper of Ahmed, Muldoon and Spigler*, SIAM, J. Math. Anal., 17 (1986), 1008-1009.

[8] Elbert, A. & Laforgia, A., *Upper bounds for the zeros of ultraspherical polynomials*, J. Approx. Theory, 61 (1990), 88-97.

Referências Bibliográficas

- [1] Ahmed, S., *On the zeros of Orthogonal Polynomials*, Abstracts Amer. Math. Soc., **3** (1982), 339.
- [2] Ahmed, S., Muldoon, M.E. & Spigler, R., *Inequalities and numerical bounds for the zeros of ultraspherical polynomials*, SIAM J. Math. Anal., **17** (1986), 1000-1007.
- [3] Bojanov, B. & Sri Ranga, A., *Some examples of moment preserving approximations*, in *Continued Fractions: From Analytic Number Theory to Constructive Approximation*, B. Berndt & F. Geztesy, eds., Contemporary Mathematics, Editora AMS, Aceito.
- [4] Chihara, T.S., *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1978.
- [5] Dimitrov, D.K., *On a conjecture concerning monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials*, J. Approx. Theory, **85** (1996).
- [6] Dimitrov, D.K., *Electrostatic Interpretation and Bounds for the Extreme Zeros of Classical Orthogonal Polynomials*, Bull. Greek Math. Soc., **40** (1998) 43-48.
- [7] Elbert, A. & Laforgia, A., *A note to the paper of Ahmed, Muldoon and Spigler*, SIAM, J. Math. Anal., **17** (1986), 1008-1009.
- [8] Elbert, A. & Laforgia, A., *Upper bounds for the zeros of ultraspherical polynomials*, J. Approx. Theory, **61** (1990), 88-97.

- [9] Elbert, A. & Laforgia, A., *Asymptotic formulas for ultraspherical polynomials $P_n^{(\lambda)}(x)$ and their zeros for large values of λ* , Proc. Amer. Math. Soc., **114** (1992), 371-377.
- [10] Elbert, A. & Muldoon, M.E., *On the derivative with respect to a parameter of a zero of a Sturm-Liouville function*, SIAM J. Math. Anal., **25** (1994), 354-364.
- [11] Elbert, A. & Siafarikas, P., *Monotonicity properties of the zeros of ultraspherical polynomials*, J. Approx. Theory, aceito.
- [12] Erdelyi, A. et Al., *Higher Transcendental Functions, I*, McGraw-Hill, NY, 1953.
- [13] Föster, K.J. & Petras, K., *On estimates for the weights in Gaussian quadrature in the ultraspherical case*, Math. Comp., **55** (1990), 243-264.
- [14] Freud, G., *Orthogonal Polynomials*, Pergamon Press, NY, 1971.
- [15] Gatteschi, L., *Una nuova disuguaglianza per gli zeri dei polinomi di Jacobi*, Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **103** (1968-69), 259-265.
- [16] Gautschi, W., *Orthogonal Polynomial - Constructive theory and applications*, J. of Comput. and Applied Math., **12-13** (1985), 61-76.
- [17] Guidorizzi, H.L., *Um curso de Cálculo*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., **1**, (1985).
- [18] Horn, R.A. & Johnson, C.A., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985, 508-511.
- [19] Ifantis, E.K. & Siafarikas, P.D., *Differential inequalities and monotonicity properties of the zeros of associated Laguerre and Hermite polynomials*, Ann. Num. Math., **2** (1995), 79-91.
- [20] Ismail, M.E.H., *Monotonicity of zeros of Orthogonal Polynomials in "q-series and Partitions"*, (D. Stanton, Ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1988, 177-190.

- [21] Ismail, M.E. & Li, X., *Bounds on the extreme zeros of orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., **115** (1992), 131-140.
- [22] Karlin, S. & McGregor, J.L., *The differential equations of birth-and-death processes and the Stieltjes moment problem*, Trans. Amer. Math. Soc., **85** (1957), 489-546.
- [23] Karlin, S. & McGregor, J.L., *Linear growth, birth and death processes*, J. Math. Mech. (Indiana Math. J.), **7** (1958), 643-662.
- [24] Laforgia, A., *Sugli zeri delle funzione di Bessel*, Calcolo **17** (1980), 211-220.
- [25] Laforgia, A., *A monotonic property for the zeros of ultraspherical polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., **83** (1981), 757-758.
- [26] Laforgia, A. & Siafarikas, P.D., *Inequalities for the zeros of ultraspherical polynomials*, in "Orthogonal Polynomials and their Applications", (C. Brezinski et al., Eds.), IMACS, 1991, 327-330.
- [27] Markov, V., *On Functions Least Deviated from Zero on a given Interval*, St. Petersburg, 1892 [in Russian]; *Über Polynome die in einen gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen*, (W. Markoff, transl.), Math. Ann., **77** (1916), 213-258. [German transl.]
- [28] Rivlin, T.J., *Chebyshev Polynomials - From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc., USA, 1990.
- [29] Sloane, N.J.A., *An introduction to association schemes and coding theory*, in *Theory and Applications of Special Functions*, R.A., Askey, Ed., Academic Press, NY, 1975, 225-260.
- [30] Spigler, R., *On the monotonic variation of the zeros of ultraspherical polynomials with the parameter*, Canad. Math. Bull., **27** (1984), 472-477.
- [31] Stieltjes, T.J., *Sur les racines de l'équation $X_n = 0$* , Acta. Math., **9** (1886), 385-400; Oeuvres Complètes, **2**, 73-88.



- [32] Szegő, G., *Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related functions*, Trans. of the Amer. Math. Soc., **39** 1936, 1-17.
- [33] Szegő, G., *Orthogonal Polynomials*, 3rd.ed., Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 23, Providence, RI, 1939.
- [34] Van Assche, W., *Orthogonal Polynomials in the Complex Plane and on the Real Line*, Amer. Math. Soc., **14** 1997, 211-245.



