

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

FELIPE AUGUSTO DA SILVA BARBOSA

Sistemas vinculados e o problema da fixação de calibre na ação

Guaratinguetá

2019

Felipe Augusto da Silva Barbosa

Sistemas vinculados e o problema da fixação de calibre na ação

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física-Bacharelado da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física-Bacharelado .

Orientador: Profº Dr. Denis Dalmazi

Coorientador:

Guaratinguetá

2019

B238s	Barbosa, Felipe Augusto da Silva Sistemas vinculados e o problema de fixação de calibre na ação / Felipe Augusto da Silva Barbosa – Guaratinguetá, 2020. 53 f.: il. Bibliografia: f. 51 Trabalho de Graduação – Bacharelado em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2020. Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi 1. Campos de calibre (Física). 2. Dirac, equações de. 3. Campos, Teoria de (Física). I. Título.
	CDU 539.12

Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8/3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

FELIPE AUGUSTO DA SILVA BARBOSA

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "BACHAREL EM FÍSICA"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
FÍSICA-BACHARELADO

Profº Dr. MARCO AURÉLIO ALVARENGA MONTEIRO
Coordenador

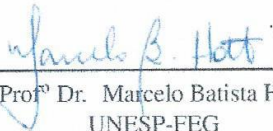
BANCA EXAMINADORA:



Profº Dr. Denis Dalmazi
Orientador/UNESP-FEG



Profº Dr. Elias Leite Mendonça
UNESP-FEG



Profº Dr. Marcelo Batista Hott
UNESP-FEG

Dezembro , 2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe Rosemary Aparecida da Silva pelo suporte fundamental fornecido ao longo da minha graduação. Também ao meu pai José Marcelo Barbosa e ao meu irmão Daniel Cesar da Silva pelo apoio e incentivo durante estes anos.

Agradeço ao meu orientador Denis Dalmazi por todos os anos de aprendizagem, paciência e pelo processo de "alfabetização" na Física de um modo geral.

Agradeço aos meus amigos que foram essenciais durante estes anos de graduação.

Agradeço aos meus professores, em especial a professora Olivia Berengue pelos conselhos que levarei para a vida. Também aos professores Elias Leite, Marcelo Hott e Rafael Sfair por todas as conversas ao longo dos anos e o entusiasmo para responder perguntas e falar sobre Física a todo instante. Certamente foi de grande valia para o meu aprendizado.

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - Processo nº 306380/2017-0, e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) - Processo nº 2019/01372-5.

*“Is impossible to answer really honestly the challenge of explaining in a way that a person can feel the beauties of the laws of nature without their having some deep understanding of mathematics“
(Richard P. Feynmann)*

RESUMO

O presente trabalho trata de simetrias de calibre em sistemas discretos e teorias clássicas de campos. O texto apresenta o método de contagem de graus de liberdade no formalismo Hamiltoniano, a fim de investigar o problema de fixação de calibre a nível de ação, no formalismo Lagrangiano.

A contagem de graus de liberdade é feita seguindo o algoritmo de Dirac exposto pela primeira vez em (DIRAC, 1964), e é apresentada de forma analítica sem abordar o espaço de fase do formalismo Hamiltoniano. O problema de fixação de calibre a nível de ação é desenvolvido acompanhando o que foi feito em (MOTOHASHI; SUYAMA; TAKAHASHI, 2016), onde um critério claro para um procedimento de fixação de calibre bem sucedido é estabelecido. Os tópicos apresentados são acompanhados de exemplos ilustrando as ideias desenvolvidas ao longo do texto.

PALAVRAS-CHAVE: Teorias de Calibre. Algoritmo de Dirac. Fixação de Calibre na Ação.

ABSTRACT

The present work deals with gauge symmetries in discrete systems and classical field theories. The text presents the method of counting degrees of freedom in Hamiltonian formalism in order to investigate the problem of gauge fixing at action level, in Lagrangian formalism. The counting of degrees of freedom is done following the Dirac algorithm first exposed in (DIRAC, 1964), and is presented analytically without addressing the phase space of Hamiltonian formalism. The problem of gauge fixing at action level, is developed by following what has been done in (MOTOHASHI; TAKAHASHI, 2016), where a clear criterion for a successful gauge fixing procedure is established. The topics presented are accompanied by examples illustrating the ideas developed throughout the text.

KEYWORDS: Gauge theories. Dirac algorithm. Gauge fixing in action.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	SISTEMAS DISCRETOS	10
2.1	FORMALISMO LAGRANGIANO	10
2.2	SISTEMAS HAMILTONIANOS	14
2.2.1	Parenteses de poisson	16
3	SISTEMAS HAMILTONIANOS VINCULADOS	18
3.1	ALGORÍTIMO DE DIRAC	18
3.1.1	Vínculos de primeira e segunda classe	24
3.1.2	As transformações de calibre	25
3.1.3	Fixação de calibre	26
4	TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS	29
4.1	O CAMPO ESCALAR	29
4.2	DIRAC PARA CAMPOS	33
4.3	TEORIA DE MAXWELL	35
5	SIMETRIA DE CALIBRE NO FORMALISMO LAGRANGIANO	38
5.1	UNICIDADE DOS PARÂMETROS DE SIMETRIA	38
5.2	SEGUNDO TEOREMA DE NOETHER	41
5.3	O CRITÉRIO PARA FIXAÇÃO	42
5.4	CALIBRE NO ELETROMAGNETISMO	47
6	CONCLUSÃO	50
	REFERÊNCIAS	51
	APÊNDICE A – INVERSÃO DA SOMA	52
	APÊNDICE B – EQUAÇÃO ADJUNTA	53

1 INTRODUÇÃO

Teorias de campos clássicos com simetrias de calibre são frequentes na física, vide por exemplo o eletromagnetismo, teoria de Yang-Mills e até mesmo a relatividade geral, que pode ser interpretada como uma teoria com simetria de calibre. Tendo em vista a importância das teorias de calibre na física é interessante tomar conhecimento sobre alguns aspectos básicos acerca de seu tratamento matemático, o que resume o objetivo deste trabalho.

Este trabalho é uma introdução às teorias clássicas de campo dotadas de simetrias de calibre, com enfoque na contagem de graus de liberdade(gl). O primeiro capítulo é uma introdução ao formalismo lagrangiano e hamiltoniano da mecânica, para sistemas com um número finito de gl. O segundo capítulo traz à tona sistemas hamiltonianos vinculados e o algoritmo de Dirac para lidar com tais sistemas. Também é mostrado como as transformações de calibre surgem e evidencia-se a característica principal das mesmas, ou seja, transformações que não alteram o estado físico do sistema. Este tratamento de teorias com simetria de calibre é feito no formalismo hamiltoniano com número finito de coordenadas. O terceiro capítulo é focado em teoria clássica de campos, seu principal objetivo é exemplificar a existência de sistemas contínuos, e mostrar como estes sistemas podem ser associados ao formalismo lagrangiano. Em seguida estendemos de maneira rápida o algoritmo de Dirac Bergmann aos campos e exemplificamos como o mesmo funciona aplicando-o ao eletromagnetismo. Por fim, o quarto capítulo trabalha as teorias de campo com simetria de calibre no formalismo lagrangiano, especificamente busca-se o critério para fixar um calibre na ação sem alterar o conteúdo físico da teoria. Esta análise foi feita em (MOTOHASHI; SUYAMA; TAKAHASHI, 2016), e aqui tentamos apresentá-la da maneira mais didática possível de modo a facilitar a vida do leitor. O trabalho foi feito visando o leitor iniciante que possui interesse na área de teoria clássica de campos, o texto apresentado fornece um primeiro contato mas é recomendado que o leitor interessado se aprofunde na bibliografia sugerida para adquirir uma visão mais ampla das questões que aqui são apenas introduzidas

2 SISTEMAS DISCRETOS

Nosso ponto de partida neste trabalho será o formalismo lagrangiano e hamiltoniano para sistemas com um número finito de gl. A primeira parte estabelece o formalismo lagrangiano, hamiltoniano e o princípio da mínima ação, em sistemas mecânicos simples, i.e., sem gl espúrios. Posteriormente nos voltamos a lagrangianas singulares e apresentamos o método de Dirac para lidar com estes sistemas, focando principalmente na contagem de gl. Mostramos também como identificar as chamadas simetrias de calibre nestas teorias.

2.1 FORMALISMO LAGRANGIANO

Vamos começar com o princípio da mínima ação. Este princípio é uma forma alternativa à segunda lei de Newton, $\vec{F} = \vec{p}$, para encontrar as equações de movimento (eqm) de um sistema mecânico. Imagine uma partícula de massa m em queda livre próxima a superfície da Terra, a diferença entre a energia cinética e potencial da partícula em qualquer instante de tempo é

$$\frac{m}{2}\dot{y}^2 - mgy, \quad (2.1)$$

onde y é a distância da partícula ao solo. Considere agora a integral no tempo desta diferença:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\dot{y}^2 - mgy \right) \quad (2.2)$$

onde $[t_1, t_2]$ é o intervalo de tempo do movimento da partícula que está caindo. Vamos agora, mantendo os valores $y(t_1)$ e $y(t_2)$ fixos, mudar a função entre t_1 e t_2 . O valor da integral deve mudar se variarmos a função $y(t)$: se $y(t)$ for uma reta, $y = at + b$, a integral tem um valor e se a função for uma exponencial, $y = e^{ct}$ o valor é outro, sempre mantendo $y(t_1)$ e $y(t_2)$ como sendo o mesmo para todas as funções. O princípio da mínima ação diz que de todos os valores possíveis que essa integral pode assumir, para as várias funções com o mesmo valor nos extremos de integração, o menor deles é obtido apenas quando $y(t)$ for a função que descreve a trajetória que a partícula de fato executa. Isto significa que de todos os movimentos possíveis que a partícula poderia realizar, o observado na natureza é aquele que minimiza a diferença média entre a energia cinética e potencial ao longo do tempo². O nome dado para esta integral na física é "ação". Para verificar a validade deste princípio precisamos de um método que nos diga qual é a função $y(t)$ que minimiza a ação. Não podemos sair calculando a integral de várias funções e comparar os resultados, existem infinitas funções no intervalo $[t_1, t_2]$. Por sorte já existe um método para encontrar a função que minimiza a ação, o qual se assemelha ao método para encontrar o valor de x que minimiza uma função real $f(x)$.

Um dos modos de encontrar o mínimo de uma função real é estabelecer que a diferencial da função

¹ O parâmetro c tem o intuito de manter o argumento da exponencial adimensional

² A rigor a diferença média é a ação dividida pelo intervalo de tempo de integração

é zero em torno do ponto de mínimo

$$df \equiv f(x + dx) - f(x) = \frac{df}{dx} dx = 0. \quad (2.3)$$

Esta condição garante que se variarmos a coordenada x infinitesimalmente em torno do ponto de mínimo a função não muda em primeira ordem (primeira ordem significa proporcional apenas a dx). Como a variação infinitesimal dx é arbitrária a derivada deve ser zero ³. A mesma ideia aplicada as funções reais é estendida para a ação: a variação em primeira ordem da ação é zero se $y(t) \rightarrow y(t) + \epsilon g(t)$, sendo $y(t)$ a função que minimiza a integral, ϵ um número muito pequeno e $g(t)$ é uma função arbitrária que satisfaz $g(t_1) = g(t_2) = 0$. Agora a ordem não está sendo contada mais com dt e sim com a potência de ϵ , a mudança na notação é para explicitar que a variação da função $y(t)$ é feita a tempo fixo, $dt = 0$. Estamos indo de uma curva a outra sem alterar o instante de tempo. Estas mudanças na função a tempo fixo são chamadas de variações funcionais. A variação de (2.2) é calculada tomando a diferencial do integrando com relação a $y(t)$ e suas derivadas

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt (m\dot{y}\delta\dot{y} - mg\delta y) = 0, \quad (2.4)$$

observe que se uma função f depende de mais de uma variável, então

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad (2.5)$$

onde x^i são as variáveis de f . No nosso caso f é o integrando, as variáveis são as funções y e $\dot{y}$ e as variações são funcionais. Se $y \rightarrow y + \delta y$ então $\dot{y} \rightarrow \dot{y} + \delta\dot{y}$, da definição de δy segue que $\delta\dot{y} = \epsilon\dot{g}$, logo

$$\delta\dot{y} = \frac{d}{dt}\delta y. \quad (2.6)$$

Utilizando isto e: $\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0$, uma integração por partes no primeiro termo de (2.4) nos leva à:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt (-m\ddot{y} - mg) \delta y = 0. \quad (2.7)$$

Para que a integral seja nula com δy arbitrário, o termo entre parênteses deve ser zero em todo intervalo de integração, se ele não fosse seria possível escolher uma variação δy diferente de zero de tal modo que a integral não se anularia. Portanto, devemos ter

$$\ddot{y} = -g, \quad (2.8)$$

cuja solução é uma parábola no plano (t, y) , além disto esta é a eqm que seria obtida pela segunda lei

³ De maneira geral o ponto em que a derivada é zero não significa mínimo da função, pode ser um ponto de máximo ou a função é constante no ponto e próximo a ele, mas para formular nosso princípio é suficiente que a derivada seja zero.

de Newton. De fato a função que minimiza S é a mesma que descreve o movimento da partícula pois as duas satisfazem a mesma equação diferencial. O princípio da mínima ação funciona no caso de uma partícula em queda livre.

É necessário saber como utilizar este princípio em um caso mais geral para que o formalismo nos seja útil. Considere uma partícula que possa se movimentar nas três direções espaciais sujeita a um potencial que depende apenas da coordenada radial. A diferença entre a energia cinética e potencial é:

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r), \quad (2.9)$$

onde adotamos o sistema de coordenadas esféricas em que

$$x = R \cos \phi \sin \theta$$

$$y = R \sin \phi \sin \theta$$

$$z = R \cos \phi.$$

Para aplicar o princípio da mínima ação devemos prosseguir de modo análogo ao caso com apenas uma variável: a diferencial do integrando agora é com relação as várias coordenadas e velocidades independentes. A minimização da ação leva à

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left[m\dot{r}\delta\dot{r} + mr \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \delta r - \frac{dV}{dr} \delta r \right] \right. \\ \left. + mr^2 \left(\dot{\theta}\delta\dot{\theta} + \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \delta\theta \right) + mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}\delta\dot{\phi} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

O mesmo truque de integração por partes pode ser aplicado nos termos em que a variação funcional aparece com uma derivada no tempo. Considerando sempre que nos extremos de integração a variação funcional de todas as coordenadas é nula. Após a integração por partes somos deixados com:

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left[-m\ddot{r} + mr \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \frac{dV}{dr} \right] \delta r \right. \\ \left. + mr^2 \left(-\ddot{\theta} + \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right) \delta\theta - mr^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} \delta\phi \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A expressão acima pode ser escrita como a soma de três integrais, onde o primeiro integrando é proporcional à δr o segundo à $\delta\theta$ e o terceiro à $\delta\phi$. As coordenadas (r, θ, ϕ) são independentes umas das outras, por consequência as variações funcionais destas coordenadas também são, e nosso problema se reduz a uma soma de três integrais independentes que deve ser zero. O único modo desta condição

ser satisfeita é se cada integral for zero separadamente:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-m\ddot{r} + mr \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \frac{dV}{dr} \right] \delta r &= 0, \\ \int_{t_1}^{t_2} dt mr^2 \left(-\ddot{\theta} + \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right) \delta \theta &= 0, \\ - \int_{t_1}^{t_2} dt mr^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} \delta \phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Agora temos três problemas de variação unidimensional. Como antes a arbitrariedade das variações funcionais leva às eqm:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) + \frac{dV}{dr} &= 0, \\ -\ddot{\theta} + \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 &= 0, \\ \ddot{\phi} &= 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

que são as mesmas equações que seriam obtidas se o problema fosse resolvido pela segunda lei de Newton $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$.

Verificamos dois exemplos para os quais o princípio de mínima ação funciona, mas como podemos saber que ele dá certo para qualquer sistema mecânico? A diferença entre energia cinética e potencial é chamada de lagrangiana que é a base de um formalismo da mecânica analítica chamado de formalismo lagrangiano. Dada uma lagrangiana arbitrária associada a um sistema mecânico

$$L(q^1, q^2, \dots, q^N, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^N, t), \quad (2.14)$$

onde q^i são as coordenadas associadas a este sistema e $\dot{q}^i$ as respectivas velocidades Jouseph-Louis Lagrange mostrou que as equações de movimento do sistema mecânico podem ser escritas como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1 \dots, N \quad (2.15)$$

que são chamadas equações de Euler-Lagrange. Este conjunto constitui um sistema de equações diferenciais de segunda ordem nas coordenadas, e é possível mostrar que o mesmo advém da segunda lei de Newton aplicada ao sistema. A ação associada é:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^1, q^2, \dots, q^N, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^N, t). \quad (2.16)$$

Ao exigir que a variação da ação seja zero em primeira ordem recuperamos (2.15), isto garante a validade do princípio de mínima ação: as funções que minimizam a ação devem satisfazer as equações de Euler-Lagrange e portanto a segunda lei de Newton. Assim como a derivada de uma função ser zero não garante que estamos em um ponto de mínimo, a variação em primeira ordem da ação ser zero também não garante que as funções em questão minimizam a ação. Mas isso de fato não importa, a variação da ação em primeira ordem nula implica nas equações de Euler-Lagrange e as funções que a

satisfazem são aquelas que descrevem a evolução do sistema entre t_1 e t_2 com $y(t_1)$ e $y(t_2)$ fixos.

As equações (2.15) são um sistema de N equações diferenciais ordinárias independentes, consequentemente são necessárias $2N$ condições iniciais CI, N velocidades e N posições em um instante t_0 ($\{q^i(t_0), \dot{q}^i(t_0)\}$), para determinar univocamente o valor das coordenadas no instante t . Isto é o que ocorre em sistemas simples, mas estes sistemas não são de nosso interesse, por esta razão vamos definir agora o que irá ser chamado de grau de liberdade físico ou simplesmente grau de liberdade. Um conjunto de graus de liberdade são N coordenadas independentes que podem ser determinadas univocamente no instante t se conhecemos seus valores e velocidades em t_0 . De maneira equivalente podemos dizer que a quantidade de gl de um sistema é a metade da quantidade de CI necessárias para determinar univocamente as coordenadas que descrevem o sistema em um instante de tempo qualquer. Em sistemas mais gerais nem todas as coordenadas são gl, então é importante definir a diferença ⁴. O modo como identificaremos os gl de um sistema qualquer está intimamente conectado com outro formalismo da mecânica analítica, o formalismo hamiltoniano que veremos a seguir.

2.2 SISTEMAS HAMILTONIANOS

O formalismo lagrangiano descreve um sistema físico através das coordenadas e velocidades. Existe uma outra descrição analítica para sistemas físicos chamada de formulação hamiltoniana. Nesta formulação as velocidades são substituídas pelos momentos canonicamente conjugados, definidos por

$$p^i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (2.17)$$

enquanto que a dependência nas coordenadas é mantida. A relação acima a priori é inversível, ou seja, as velocidades podem ser recuperadas como funções dos momentos. A função hamiltoniana, que é a base do formalismo hamiltoniano, não se relaciona com a lagrangiana apenas por uma troca de $\dot{q}$ por p . Estas funções estão conectadas por uma transformada de Legendre que é um método sistemático de realizar a troca de velocidades por momentos, promovendo os momentos a coordenadas independentes, sem perder a informação que a lagrangiana carrega acerca do sistema físico. A transformada em questão é dada por:

$$H(q, p) \equiv \sum_{i=1}^N \dot{q}^i p^i - L(q, \dot{q}), \quad (2.18)$$

onde H é a função hamiltoniana. Se substituirmos as velocidades como função dos momentos acima o resultado é uma função que depende apenas de q e p . Para nos convencer disto podemos tomar o

⁴ As coordenadas do sistema que não representam gl físicos são chamadas de gl espúrios

diferencial ao lado direito da função (2.18):

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^N (\dot{q}^i dp^i + d\dot{q}^i p^i) - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} d\dot{q}^j \right) L(q, \dot{q}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\dot{q}^i dp^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde utilizamos a definição (2.17) da primeira para a segunda linha. Como a diferencial depende apenas de dq^i e dp^i a função deve depender apenas de q e p . Tomando a diferencial também do lado esquerdo de (2.18) e igualando ambos os lados somos levados à

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (2.20)$$

entretanto se lembrarmos das equações de Euler-Lagrange (2.15) e da definição (2.17) de momento, podemos reescrever a expressão acima

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (2.21)$$

Estas são as equações de Hamilton para a evolução do sistema físico. A dinâmica hamiltoniana tem a vantagem de produzir apenas equações diferenciais de primeira ordem no tempo, mas o número de equações é dobrado. Agora temos $2N$ equações diferenciais para resolver. As equações acima também podem ser obtidas de um princípio de mínima ação. A ação, integral no tempo da lagrangiana, é:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_i p^i \dot{q}^i - H(q^i, p^i, t) \right]. \quad (2.22)$$

Se fizermos variações funcionais infinitesimais nas coordenadas e momentos mantendo

$$\delta q(t_1) = \delta p(t_1) = \delta q(t_2) = \delta p(t_2) = 0, \quad (2.23)$$

δS passa a ser:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_i (\delta \dot{q}^i p^i + \dot{q}^i \delta p^i) - \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q^j} \delta q^j + \frac{\partial H}{\partial p^j} \delta p^j \right) \right] = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p^i} \right) \delta p^i - \left(\dot{p}^i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

realizando uma integral por partes no primeiro termo, na primeira linha. As coordenadas e momentos são independentes, se definirmos $Q^j \equiv \{q^i, p^i\}$, $j = 1, \dots, 2N$ a expressão acima pode ser reescrita:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{2N} (\dots)_j \delta Q^j = 0, \quad (2.25)$$

que constitui uma generalização de (2.11) e assim como naquele caso o único modo da soma destas integrais independentes ser zero é se cada uma for zero separadamente, isto é

$$\int_{t_1}^{t_2} dt (\dots)_j \delta Q^j = 0. \quad (2.26)$$

Como as variações funcionais δQ^j são completamente arbitrárias $(\dots)_j = 0$ em todo intervalo de integração, fornecendo as equações de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (2.27)$$

O princípio de mínima ação recupera as equações de Hamilton. Vamos tratar agora um exemplo simples para o formalismo hamiltoniano:

Exemplo:

Voltemos a partícula em queda livre. O momento conjugado, utilizando a definição (2.17), é dado por

$$p = m\dot{y}, \quad (2.28)$$

que é idêntico ao momento mecânico⁵. A hamiltoniana

$$\begin{aligned} H &= \dot{y}p - \left(\frac{m}{2}\dot{y}^2 - mgy \right) \\ &= \frac{p^2}{2m} + mgy \end{aligned} \quad (2.29)$$

é obtida invertendo a expressão (2.28), e substituindo a velocidade por momento. As equações de Hamilton são

$$\dot{y} = \frac{p}{m} \quad \dot{p} = -mg, \quad (2.30)$$

observe que substituindo p por (2.28) somos levados à eqm da partícula livre obtida no formalismo lagrangiano pelo princípio da mínima ação. As equações de Hamilton são equivalente às equações de Euler-Lagrange e deve ser assim se quisermos que ambas as formulações sejam equivalentes.

2.2.1 Parenteses de poisson

Dentro da formulação hamiltoniana existe uma maneira compacta de escrever a derivada no tempo de qualquer função $F(q, p)$, para isto iremos usar algo chamado de Parênteses de Poisson. Dadas duas

⁵ O momento canonicamente conjugado não é igual ao momento mecânico a princípio. A igualdade é válida em lagrangianas cuja dependência na velocidade está apenas na energia cinética, mas podemos ter lagrangianas com dependências mais gerais e nestes casos os momentos são diferentes

funções $F(q, p)$ e $G(q, p)$ o parênteses de Poisson entre elas é:

$$\{F, G\} \equiv \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial q_j} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right), \quad (2.31)$$

considerando que o sistema físico em questão tem N coordenadas e momentos. No caso da partícula livre $N = 1$. Se F não depende explicitamente do tempo, então

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \\ &= \{F, H\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Com a definição dos parênteses de Poisson e o auxílio das equações de Hamilton (2.21) podemos escrever as eqm no formalismo hamiltoniano de forma concisa. Da definição (2.31) seguem algumas propriedades úteis: o parênteses é antissimétrico:

$$\{F, G\} = -\{G, F\}. \quad (2.33)$$

Uma regra de Leibniz é satisfeita: se temos também $J(q, p)$ então

$$\{FJ, G\} = \{F, G\}J + F\{J, G\}, \quad (2.34)$$

esta propriedade evidentemente é uma consequência da regra de Leibniz atuando na definição do parênteses. E para as coordenadas q^i, p^j vale

$$\{q^i, p^j\} = \delta^{ij}, \quad (2.35)$$

onde δ^{ij} é a delta de Kronecker que vale 1 se $i = j$ e 0 para $i \neq j$.

As coordenadas e momentos do formalismo hamiltoniano usualmente são chamadas de coordenadas canônicas. Devemos definir agora o que será chamado mais adiante de gl hamiltonianos: um conjunto de coordenadas canônicas Q^j são caracterizadas como gl hamiltonianos se as coordenadas são independentes e univocamente determinadas em qualquer instante t dados os valores de $Q^j(t_0)$. A quantidade de gl físicos ou lagrangianos é dada simplesmente pela quantidade de gl hamiltonianos dividida por 2. Esta definição permite traduzir do formalismo hamiltoniano a quantidade de gl físicos que deveríamos ter no formalismo lagrangiano e será importante no próximo capítulo no qual abordamos sistemas vinculados.

Um estudo mais detalhado da mecânica analítica, envolvendo os tópicos abordados pode ser conduzido através de (LEMONS, 2007). Uma excelente discussão sobre o princípio da mínima ação, e outros princípios variacionais na física, pode ser lida em (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008).

3 SISTEMAS HAMILTONIANOS VINCULADOS

Boa parte dos modelos físicos mais recentes como a teoria da relatividade geral, o modelo padrão para a física de partículas e até mesmo o eletromagnetismo clássico de Maxwell podem ser obtidos de lagrangianas que possuem mais "coordenadas" do que gl¹. Isto significa que as equações diferenciais características destas teorias podem surgir como eqm de lagrangianas que dependem de várias coordenadas mas nem todas são gl. O método padrão para tratar estes sistemas no formalismo hamiltoniano foi desenvolvido por Dirac, e apresentado em uma série de aulas que foram transcritas em (DIRAC, 1964), e será o método explorado neste capítulo.

3.1 ALGORÍTIMO DE DIRAC

Estando ciente da existência de lagrangianas que possuem mais coordenadas do que gl as duas perguntas mais imediatas que podemos fazer são: dada uma lagrangiana como eu posso saber que ela possui mais coordenadas do que gl, e quantos são os gl se eles forem menor do que o número de coordenadas. Uma das nossas exigências para que uma coordenada seja um gl é que a coordenada em questão possa ser determinada no instante t a partir de $q(t_0)$ e $\dot{q}(t_0)$, isto é equivalente a exigência de que exista uma equação diferencial de segunda ordem no tempo para tal coordenada². Então podemos investigar o que é necessário dentro do formalismo lagrangiano para que exista uma equação de segunda ordem para cada coordenada. A lagrangiana é uma função das coordenadas e velocidades, levando este fato em consideração temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \ddot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j \right) \quad (3.1)$$

o que permite reescrever as equações de Euler-Lagrange (2.15) como

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \ddot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Podemos encarar a quantidade que multiplica as acelerações como os elementos de uma matriz

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}, \quad (3.3)$$

¹ Nos referimos a "coordenadas" porque nas teorias citadas as coordenadas em questão são campos clássicos que representam um número infinito de coordenadas $q(t)$ no espaço, é um abuso de linguagem.

² Apenas a existência de uma equação de segunda ordem no tempo não garante que a coordenada é univocamente determinada, o que é necessário para que a consideremos um gl. Entretanto possuir uma equação diferencial associada é o mínimo que devemos ter para que seja possível determinar a coordenada em qualquer instante de tempo, univocamente ou não.

se esta matriz possui inversa, então ao multiplicar (3.2) pela inversa de W_{ij}

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N \left(W_{mi}^{-1} W_{ij} \ddot{q}^j + W_{mi}^{-1} \frac{\partial L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j \right) - W_{mi}^{-1} \frac{\partial L}{\partial q^i} \right\} = 0 \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\delta_{mj} \ddot{q}^j + \sum_{i=1}^N W_{mi}^{-1} \frac{\partial L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j \right) - \sum_{i=1}^N W_{mi}^{-1} \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \implies \\ & \ddot{q}^m = - \sum_{i,j=1}^N \left\{ W_{mi}^{-1} \frac{\partial L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j - W_{mi}^{-1} \frac{\partial L}{\partial q^i} \right\}, \quad m = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.4)$$

O sistema de equações (3.4) constitui uma equação diferencial para cada coordenada e com a adição das condições iniciais a solução $\{q^i(t)\}$ fica univocamente determinada. Entretanto se a matriz W_{ij} não possuir inversa então não é possível inverter (3.2) e não temos uma equação diferencial de segunda ordem para cada coordenada, ou seja nosso sistema possui mais coordenadas do que gl. Para que W_{ij} não possua inversa é necessário que seu determinante seja nulo, isto permite definir um critério geral para verificar se em uma lagrangiana qualquer existem mais coordenadas do que gl. Com efeito se

$$\|W_{ij}\| = 0 \quad (3.5)$$

então a lagrangiana possui mais coordenadas do que gl. Uma lagrangiana deste tipo é chamada de singular, e a matriz W_{ij} é chamada de hessiana³.

Agora que sabemos como verificar se uma lagrangiana é ou não singular podemos prosseguir à próxima questão: dada uma lagrangiana singular quantos gl ela possui? O método de contagem dos gl da lagrangiana singular é construído no formalismo hamiltoniano. Na prática conta-se a quantidade de gl hamiltonianos da teoria e então traduzimos esta quantidade em gl físicos. A razão disto é que se uma lagrangiana é singular as coordenadas canônicas da hamiltoniana associada serão vinculadas isto ocorre porque quando calculamos o momento conjugado algumas das relações (2.17) definem vínculos entre coordenadas e momentos.

Um vínculo é uma relação entre as coordenadas e momentos do tipo:

$$f(q, p) = 0. \quad (3.6)$$

Sabendo que cada vínculo elimina uma coordenada independente, e como nossa contagem está associada ao número de coordenadas canônicas independentes, nosso primeiro impulso poderia ser calcular a diferença entre o número de coordenadas canônicas e o número de vínculos do sistema obtidos na definição dos momentos e dizer que isto é o número de gl hamiltonianos. Prosseguir desta forma seria errado e o motivo é sutil. Os vínculos entre as coordenadas canônicas devem ser constantes no tempo, isto é, se em algum instante o vínculo $f(q, p) = 0$ é satisfeito, então ele deve ser satisfeito em todos os outros instantes de tempo no intervalo $[t_1, t_2]$. Para garantir que isto aconteça devemos

³ Observe que (3.2) pode ser escrita como $\frac{\partial p^i}{\partial \dot{q}^j}$. Explicitamente a matriz hessiana é o Jacobiano da transformação $\dot{q} \rightarrow p$, se o determinante é nulo nem todas as velocidades podem ser recuperadas como funções dos momentos quando prosseguimos ao formalismo hamiltoniano.

derivar nossa função $f(q, p)$ no tempo e exigir que esta derivada seja sempre zero (se a derivada de uma função no tempo é sempre nula e a função é zero em um determinado instante então ela continua sendo zero em todos os demais instantes). A condição $\dot{f}(q, p) = 0$ pode implicar em novos vínculos, que irão diminuir ainda mais o número de coordenadas independentes. Portanto, ao parar nos primeiros vínculos encontrados estamos contando o número de gl de forma errada.

Vamos começar com uma lagrangiana singular

$$L(q^i, \dot{q}^i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.7)$$

os momentos canonicamente conjugados definem os vínculos

$$f^j(q^i, p^i) = 0, \quad j = 1, \dots, K, \quad (3.8)$$

que iremos chamar de vínculos primários para diferenciar dos demais vínculos que podem surgir. Para garantir que estes vínculos são mantidos no tempo devemos saber como derivar uma função $f^j(q, p)$ quando as coordenadas canônicas não são todas independentes. Não é possível utilizar (2.32) pois esta expressão está fundamentada em (2.21) que assumem que as coordenadas Q^j são independentes. Precisamos verificar como a evolução das coordenadas é feita quando o sistema possui vínculos.

Ao minimizar a ação no formalismo hamiltoniano somos levados à

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^N \left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p^i} \right) \delta p^i - \left(\dot{p}^i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right] = 0. \quad (3.9)$$

Quando as coordenadas Q^j são independentes a integral da soma pode ser dividida em uma soma de integrais que são zero separadamente. O surgimento de vínculos entre as coordenadas faz com que as variações funcionais deixem de ser independentes, variando funcionalmente um vínculo temos:

$$\delta f^j = \sum_i \left(\frac{\partial f^j}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial f^j}{\partial p^i} \delta p^i \right) = 0 \quad j = 1, \dots, K. \quad (3.10)$$

Para cada vínculo existente vai ser possível isolar uma variação funcional em termos das demais, de modo análogo ao que foi feito com as coordenadas. Como existem K vínculos primários apenas $2N - K$ variações δQ^j são independentes. Um truque engenhoso para contornar este problema é feito da seguinte forma: Nós devemos trocar nossa hamiltoniana usual pela hamiltoniana abaixo

$$H \rightarrow H_t = H + \sum_{j=1}^K \lambda_j f^j,$$

onde λ_j são funções arbitrárias do tempo, denominadas multiplicadores de Lagrange (ML), e H_t é chamada de hamiltoniana total. Como estamos adicionando funções que são zero nossa hamiltoniana

continua a mesma para os Q^i que satisfazem os vínculos. A ação agora passa a ser

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_i p^i \dot{q}^i - H - \sum_{j=1}^K \lambda_j f^j \right], \quad (3.11)$$

e a variação desta ação fornece

$$\delta S = \int dt \sum_{i=1}^N \left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p^i} - \sum_{j=1}^K \lambda_j \frac{\partial f^j}{\partial p^i} \right) \delta p^i - \left(p^i + \frac{\partial H}{\partial q^i} + \sum_{j=1}^K \lambda_j \frac{\partial f^j}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right] = 0. \quad (3.12)$$

Os vínculos existentes na teoria implicam que K dos δq^i e δp^i são dependentes de $2N - K$ variações independentes restantes. Para cada termo em (3.10) isolamos um δQ^j em termos dos demais. Portanto, a variação da ação conta com K termos nos quais as variações δQ^j não são arbitrárias

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^K (\dots)_j \delta Q^j. \quad (3.13)$$

Em cada um desses termos $(\dots)_j$ existem K ML arbitrários. Vamos utilizar a arbitrariedade dos ML para forçar a condição $(\dots)_j = 0$. Fazendo isto (3.12) se reduz a

$$\delta S = \sum_{i=1}^{2N-K} \int dt (\dots)_i \delta Q^i = 0. \quad (3.14)$$

onde a soma que sobrou é apenas nas variações δQ^i independentes e arbitrárias. Nesta soma valem os argumentos já utilizados: como as variações são independentes cada integral deve ser zero separadamente, e como as variações são arbitrárias devemos ter

$$(\dots)_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2N - K. \quad (3.15)$$

Como utilizamos a arbitrariedade dos ML para garantir que $(\dots)_j = 0$ $j = 1, \dots, K$, sendo que j conta os termos associados a variações δQ^j que não são arbitrárias, o resultado final pode ser escrito simplesmente como

$$(\dots)_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2N, \quad (3.16)$$

incluindo todos os termos da ação (3.12). Explicitamente temos

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i} + \sum_{j=1}^K \lambda_j \frac{\partial f^j}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^K \lambda_j \frac{\partial f^j}{\partial q^i}. \quad (3.17)$$

Estas equações são equivalentes as equações de Euler-Lagrange da lagrangiana associada. As eqm

podem ser escritas de forma mais simples se utilizarmos o Parênteses de Poisson:

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H_t\} \quad p^i \approx \{p^i, H_t\}, \quad (3.18)$$

introduzindo o símbolo de fracamente igual: " $\approx$ ". Este símbolo serve para nos lembrar de tomar os vínculos da teoria como sendo zero só depois de calcular os parênteses de Poisson. Se fosse imposto que os vínculos são zero antes de calcular o parênteses teríamos, por exemplo,

$$\dot{q}^i = \{q^i, H + 0\} = \{q^i, H\}, \quad (3.19)$$

o que está errado. Portanto o símbolo de fracamente igual irá acompanhar as expressões com parênteses de Poisson para nos lembrar que os vínculos devem ser tomados como sendo zero depois de calculados os parênteses. De modo geral, uma função qualquer $F(q, p)$ tem sua derivada dada por

$$\dot{F}(q, p) \approx \{F, H_t\}, \quad (3.20)$$

o que pode ser concluído com o mesmo raciocínio do caso sem vínculos.

Agora que já sabemos como uma função qualquer evolui no tempo podemos encontrar a derivada dos vínculos primários conforme desejávamos inicialmente. Como os vínculos são funções das coordenadas canônicas

$$\dot{f}^m \approx \{f^m, H\} + \sum_{j=1}^K \lambda_j \{f^m, f^j\} \approx 0 \quad m = 1, \dots, K, \quad (3.21)$$

o símbolo de fracamente igual está aí para nos lembrar que esta expressão deve ser zero quando fixamos $f^m = 0$ após calcular os parênteses de Poisson. As condições acima são chamadas de condições de consistência, no sentido de que o vínculo deve ser mantido no tempo portanto sua derivada deve ser sempre zero. Ao impor as condições de consistência em um determinado vínculo existe um conjunto de resultados possíveis. Se o primeiro e o segundo termo em (3.21) são identicamente nulos, a condição se reduz a

$$0 \approx 0, \quad (3.22)$$

ou seja, o vínculo é identicamente satisfeito ao longo do tempo. Por outro lado, se

$$\{f^m, H\} = 0, \quad \{f^m, f^j\} \neq 0, \quad (3.23)$$

para algum valor de j a condição de consistência impõem restrições sobre os ML. Lembremos que os vínculos são funções de Q^i e portanto os parênteses de Poisson entre os vínculos também são funções de Q^i . Se para um vínculo a condição de consistência é do tipo (3.23), então

$$\{f^m, H\} + \sum_{j=1}^K \lambda_j \{f^m, f^j\} = \lambda_1 M_{m1} + \lambda_2 M_{m2} + \dots \lambda_K M_{mK} \approx 0, \quad M_{mj} \equiv \{f^m, f^j\}. \quad (3.24)$$

Para o caso especial em que M_{mj} é diferente de zero apenas para um valor de j , digamos $j = 3$, o ML λ_3 é determinado como sendo zero, mas em casos menos específicos este tipo de condição de consistência apenas restringe os multiplicadores. Uma situação semelhante a esta ocorre quando

$$\{f^m, H\} \neq 0, \quad \{f^m, f^j\} \neq 0, \quad (3.25)$$

que impõem a restrição:

$$\lambda_1 M_{m1} + \lambda_2 M_{m2} + \dots \lambda_K M_{mK} \approx -\{f^m, H\}. \quad (3.26)$$

A última possibilidade é caracterizada por

$$\{f^m, H\} \neq 0, \quad \{f^m, f^j\} = 0, \quad (3.27)$$

para todos os valores de j . Neste caso a condição de consistência exige que

$$\{f^m, H\} \approx 0. \quad (3.28)$$

O parênteses de Poisson entre o vínculo e a hamiltoniana é uma função de Q^i que não é proporcional a nenhuma combinação linear dos f^m , pois se assim fosse ele seria zero e voltaríamos ao 1º caso. Então temos uma nova função de Q^i independente dos vínculos primários que deve ser zero, isso define um novo vínculo, chamado de secundário. Esta é a sutileza mencionada: a validade de um vínculo ao longo do tempo define um novo vínculo entre as coordenadas canônicas! As condições de consistência devem ser aplicadas a todos os vínculos primários, se ao fazermos isto encontramos L vínculos secundários então devemos aplicar novamente as condições de consistência a estes vínculos secundários. Uma das três possibilidades pode ocorrer neste caso: os vínculos são identicamente satisfeitos, são impostas restrições sobre os ML ou novos vínculos surgem. Se mais uma vez novos vínculos surgirem na teoria devemos garantir que eles também sejam mantidos no tempo e assim sucessivamente com todos os vínculos até que nenhum novo vínculo surja. Todos os vínculos que surgem da aplicação das condições de consistência, seja na primeira ou centésima, são chamados de secundários.

Em suma ao aplicar a condição de consistência sobre um vínculo(primário ou secundário) uma das três possibilidades pode ocorrer

- o vínculo é identicamente satisfeito levando a uma identidade,
- a condição impõe restrições sobre os ML,
- surgimento de um novo vínculo.

Após calculadas todas as condições de consistência, podemos escrevê-las como

$$\dot{f}^m \approx \{f^m, H\} + \sum_{j=1}^K \lambda_j \{f^m, f^j\} = 0, \quad m, = 1, \dots, K + L \quad (3.29)$$

supondo que existem L vínculos secundários no total. A expressão acima é um sistema de equações lineares, nas incógnitas λ_j , só que em vez de números como coeficientes temos funções de Q^i . Podemos escrever esta expressão em uma forma matricial como em todo sistema linear

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1K} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{(K+L)1} & M_{(K+L)2} & \dots & M_{(K+L)K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_K \end{bmatrix} \approx - \begin{bmatrix} \{f^1, H\} \\ \{f^2, H\} \\ \vdots \\ \{f^{K+L}, H\} \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

A solução para esse sistema é um vetor coluna que satisfaz a equação matricial. A pergunta que deve ser respondida é: os multiplicadores de Lagrange podem ser determinados a partir deste sistema linear? Veremos a seguir que alguns deles podem ser e outros não, para que isto fique claro, entretanto, é necessário adicionar uma nova classificação aos vínculos que será explorada adiante.

3.1.1 Vínculos de primeira e segunda classe

Podemos classificar os vínculos da teoria de um modo que deixa explícito uma característica intrínseca da mesma. Diremos que uma função é de primeira classe se seu parênteses de Poisson com qualquer vínculo for fracamente nulo, caso contrário a função é de segunda classe. Esta definição pode ser estendida aos vínculos. Como o parênteses de Poisson de um vínculo com ele mesmo é zero, pela definição do parênteses, para que um vínculo seja de primeira classe é necessário que seu parênteses com qualquer outro vínculo seja fracamente nulo, se isso não ocorre o vínculo é de segunda classe.

Suponha que o sistema possua n_1 vínculos de primeira classe, $f^j \approx 0$ com $j = 1, \dots, n_1$, e n_2 vínculos de segunda classe, $g^m \approx 0$ com $m = 1, \dots, n_2$, sendo que $n_1 + n_2 = K + L$. Se escrevemos agora as condições de consistência para todos os vínculos da teoria como em (3.29), verifica-se que

$$\dot{g}^m \approx \{g^m, H\} + \sum_{l=1}^{\tilde{n}_2} \lambda_l \{g^m, g^l\} \approx 0, \quad m = 1, \dots, n_2 \quad (3.31)$$

$$\dot{f}^j \approx \{f^j, H\} \approx 0, \quad j = 1, \dots, n_1, \quad (3.32)$$

onde $\tilde{n}_2$ é o número de vínculos primários de segunda classe. Dirac mostrou que a matriz de todos os vínculos de segunda classe $C^{mk} \equiv \{g^m, g^k\}$ possui determinante diferente de zero. As condições de consistência para os vínculos primários de segunda classe são

$$\{g^n, H\} + \sum_{K=1}^{\tilde{n}_2} \lambda_K C^{nK} \approx 0, \quad n = 1, \dots, \tilde{n}_2 \quad (3.33)$$

que podem ser invertidas para fornecer

$$\lambda_l \approx - \sum_{n=1}^{\tilde{n}_2} \{g^n, H\} C_{ln}^{-1}, \quad l = 1, \dots, \tilde{n}_2 \quad (3.34)$$

Quando as condições de consistência são escritas considerando os vínculos como sendo de primeira

classe ou segunda classe podemos observar que não existem relações algébricas envolvendo os ML associados a vínculos primários de primeira classe. É esperado que estes multiplicadores permaneçam completamente arbitrários, e de fato isto é o que ocorre. A existência de ML arbitrários tem implicações profundas na teoria, o que será o assunto de nosso estudo na próxima seção.

3.1.2 As transformações de calibre

É tentador dizer que a quantidade de gl hamiltonianos é $2N - (K + L)$, entretanto deve ser verificado se a evolução no tempo destas coordenadas é univocamente determinada. As eqm para as coordenadas Q^i são:

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H_t\}, \quad \dot{p}^i \approx \{p^i, H_t\}, \quad (3.35)$$

logo as soluções $Q^i(t)$ também dependem dos ML. A consequência de possuir funções arbitrárias nas eqm é que as coordenadas $Q^i(t)$ não são univocamente determinadas se especificamos $Q^i(t_0)$. Utilizando (3.34) a Hamiltoniana total pode ser escrita como

$$H_t = H - \sum_{j=1}^{\tilde{n}_2} \sum_{m=1}^{\tilde{n}_2} C_{jm}^{-1} \{g^m, H\} g^j + \sum_{k=1}^{\tilde{n}_1} \tilde{\lambda}_k f^k \equiv H' + \sum_{k=1}^{\tilde{n}_1} \tilde{\lambda}_k f^k \quad (3.36)$$

$$H' = H - \sum_{j=1}^{\tilde{n}_2} \sum_{m=1}^{\tilde{n}_2} C_{jm}^{-1} \{g^m, H\} g^j. \quad (3.37)$$

onde $\tilde{n}_1$ é o número de vínculos primários de primeira classe. A primeira soma corre nos vínculos primários de segunda classe e os ML determinados, enquanto que a segunda soma corre nos vínculos primários de primeira classe e os ML indeterminados. Calculando agora $q^i(t_0 + dt)$ até primeira ordem em dt :

$$q^i(t_0 + dt) = q_0^i + \left[\{q^i, H'\} + \sum_{k=1}^{\tilde{n}_1} \tilde{\lambda}_k \{q^i, f^k\} \right]_{t_0}. \quad (3.38)$$

A redefinição de $\tilde{\lambda}_k \rightarrow \tilde{\lambda}'_k$ muda o valor da coordenada, e conclui-se que o valor da coordenada em $t_0 + dt$ depende de uma escolha matemática arbitrária, não é determinado univocamente pelas condições iniciais $q^i(t_0)$.

A ideia dos gl hamiltonianos é representar com o menor número de coordenadas possível o estado físico de um sistema. Na física frequentemente queremos determinar o estado físico de um sistema no futuro a partir do conhecimento desse sistema no presente, as vezes também é feito o caminho inverso. Nos casos em que estamos interessados, esta evolução no tempo é unívoca, ou seja, se o sistema está no estado A hoje, daqui a três dias ele vai estar no estado B , e em nenhum outro estado. Preparando vários sistemas idênticos no estado A , ao esperar três dias o resultado é sempre o mesmo. A exigência de que o conjunto de coordenadas que descreve o estado físico de um sistema seja univocamente determinado pelas CI é portanto algo necessário, para ser coerente com os sistemas que estas coordenadas descrevem. No formalismo lagrangiano a representação de um estado físico é feita através de uma coordenada e

sua velocidade associada, se desejamos que esta coordenada represente o estado de um sistema físico devemos garantir que ela evolua no tempo de maneira unívoca para que sua velocidade também o faça.

Como as coordenadas $Q^i(t)$ não são univocamente determinadas elas não podem ser gl, mas isto não significa que elas não descrevam um estado físico do sistema. É possível construir transformações que levam de um conjunto de coordenadas a outro apenas mudando o ML. Em primeira ordem, se escolhemos o conjunto $\tilde{\lambda}'_k$

$$q'^i(t_0 + dt) = q_0^i + \left[\{q^i, H'\} + \sum_{k=1}^{\tilde{n}_1} \tilde{\lambda}'_k \{q^i, f^k\} \right]_{t_0} . \quad (3.39)$$

e $q'^i = q^i + \delta q^i$, onde

$$\delta q^i = \sum_{k=1}^{\tilde{n}_1} (\tilde{\lambda}'_k - \tilde{\lambda}_k) \{q^i, f^k\} dt. \quad (3.40)$$

Estas transformações de coordenadas que não alteram o estado físico são chamadas de transformações de calibre(ou transformações de gauge), e um sistema dotado de tais transformações é dito ser um sistema com simetria de calibre. Os vínculos primários de primeira classe funcionam como geradores destas transformações, pois é graças a sua existência que temos funções arbitrárias e consequentemente podemos construir as transformações de calibre.

Dirac conjecturou que os vínculos secundários de primeira classe também deveriam gerar transformações de calibre. Entretanto, estes vínculos não estão a priori na hamiltoniana total, logo seria estranho que eles gerassem tais transformações. Para contornar este problema Dirac definiu uma hamiltoniana estendida que incorpora tais vínculos

$$H_e = H_t + \bar{\lambda}_j f^j, \quad j = 1, \dots, n_1 - \tilde{n}_1. \quad (3.41)$$

As eqm para as coordenadas canônicas obtidas com esta hamiltoniana não são as mesmas que as eqm de Euler-Lagrange. A introdução dos vínculos secundários de primeira classe dessa forma foi feita de maneira ad-hoc. É costume postular que a conjectura de Dirac está correta nos problemas físicos, mas geralmente não há necessidade de construir a hamiltoniana estendida, os vínculos secundários de primeira classe surgem naturalmente na hamiltoniana canônica, multiplicados por funções arbitrárias.

3.1.3 Fixação de calibre

Para determinar os gl devemos fixar os ML, quando eles deixam de ser arbitrários a evolução das coordenadas canônicas passa a ser unívoca. O modo de fazer esta fixação é impondo novos vínculos, e esse processo é denominado fixação de calibre. Devemos fixar um calibre para cada vínculo de primeira classe existente e as novas relações fixadas devem ser consistentes com os vínculos já existentes. Não podemos fixar por exemplo $p^k = 0$ se já existe um vínculo na teoria garantindo que $p^k \neq 0$. O mais importante é que os calibres fixados devem transformar os vínculos de primeira classe em segunda

classe. Se $\psi^j \approx 0$ são as condições de calibre então

$$\{\psi^j, f^k\} \neq 0, \quad j, k = 1, \dots, n_1. \quad (3.42)$$

As condições de consistência dos vínculos $\psi^j \approx 0$ com a hamiltoniana estendida geram um sistema linear que fixa os ML arbitrários

$$\{\psi^j, H_e\} = \{\psi^j, H'\} + \sum_{k=1}^{n_1} \bar{\lambda}_k \{\psi^j, f^k\} \approx 0. \quad (3.43)$$

Como os vínculos em questão passam a ser de segunda classe a matriz $\tilde{C}^{jk} \equiv \{\psi^j, f^k\}$ possui inversa e os multiplicadores de Lagrange são

$$\bar{\lambda}_k \approx - \sum_{j=1}^{n_1} \tilde{C}_{kj}^{-1} \{\psi^j, H'\}. \quad (3.44)$$

Agora os multiplicadores estão completamente determinados, mas a custo da imposição de novos vínculos, o que significa perda de mais coordenadas independentes.

A contagem de gl pode finalmente ser feita. Se possuíamos $2N$ coordenadas canônicas inicialmente, n_1 vínculos de primeira classe e n_2 vínculos de segunda classe, são necessárias n_1 condições de gauge para eliminar toda a arbitrariedade do sistema e por fim restam

$$2N - (2n_1 + n_2) \quad (3.45)$$

gl hamiltonianos. A quantidade de gl lagrangianos é a metade disto. Para cada vínculo de primeira classe um gl lagrangiano é perdido.

Exemplo

Considere a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \left[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} - \xi)^2 \right] - V(r), \quad (3.46)$$

é fácil notar que se $\theta \rightarrow \theta + \alpha(t)$ e $\xi \rightarrow \xi + \dot{\alpha}(t)$ a lagrangiana permanece invariante. Isto caracteriza uma simetria de calibre no formalismo lagrangiano. Pode-se esperar de antemão que a lagrangiana seja singular e a hamiltoniana do sistema possua vínculos de primeira classe. Considerando $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ e $q_3 = \xi$, a hessiana é dada por

$$W_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

e tem determinante nulo. Os momentos desse sistema são

$$p_r = \dot{r} \quad p_\theta = r^2 (\dot{\theta} - \xi) \quad p_\xi \approx 0. \quad (3.48)$$

Na definição dos momentos nos deparamos com o vínculo $p_\xi \approx 0$. A hamiltoniana total do sistema, incluindo este vínculo é

$$H_t = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\xi}p_\xi - \left[\frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} - \dot{\xi})^2 \right) - V(r) \right] + \lambda p_\xi \quad (3.49)$$

$$= \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \xi p_\theta + V(r) + (\lambda + \dot{\xi}) p_\xi. \quad (3.50)$$

Ora λ é uma função arbitrária então $\lambda + \dot{\xi}$ também é uma função arbitrária então o termo que multiplica p_ξ também é um ML que iremos chamar de λ a partir de agora significando que este termo ainda é uma função arbitrária, então

$$H_t = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \xi p_\theta + V(r) + \lambda p_\xi. \quad (3.51)$$

A condição de consistência para p_ξ

$$\dot{p}_\xi \approx \{p_\xi, H_t\} = -p_\theta \approx 0, \quad (3.52)$$

gera o vínculo secundário $p_\theta \approx 0$. A condição de consistência deste vínculo leva a identidade $0 \approx 0$, como não há mais nenhum vínculo paramos aqui. Os vínculos da teoria

$$p_\xi \approx 0, \quad p_\theta \approx 0, \quad (3.53)$$

são de primeira classe e portanto são geradores de transformações de calibre. Note que não é necessário escrever a hamiltoniana estendida, pois o vínculo secundário de primeira classe $p_\theta \approx 0$ já está na hamiltoniana canônica multiplicado por uma função arbitrária, esta função é a própria coordenada ξ . A eqm para a coordenada ξ fornece

$$\dot{\xi} \approx \{\xi, H_t\} \approx \lambda, \quad (3.54)$$

como $\dot{\xi}$ é uma função arbitrária a coordenada ξ também é uma função arbitrária e ela própria faz o papel de ML do vínculo de primeira classe secundário. A hamiltoniana total pode ser reescrita para deixar isto explícito

$$H_t = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r) + \tilde{\lambda} p_\theta + \lambda p_\xi. \quad (3.55)$$

O vínculo $p_\theta \approx 0$ gera uma transformação de calibre para a coordenada θ , assim como $p_\xi \approx 0$ gera para a coordenada ξ . A hamiltoniana possui dois vínculos de primeira classe logo os gl hamiltonianos são $6 - 4 = 2$ e portanto há apenas 1 gl físico, ou gl lagrangiano.

Nós encerramos aqui a exposição sobre o algoritmo de Dirac para sistemas com um número finito de gl. Agora iremos estendê-lo para sistemas contínuos, ou seja, campos.

Um estudo mais detalhado com um carácter geométrico pode ser feito através de (SUNDERMEYER, 1982), (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992) e (SANTOS,).

4 TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

Os campos surgiram na física clássica como uma ferramenta necessária para descrever sistemas contínuos, i.e. um sistema com um número muito grande de gl, tão próximos uns dos outros na escala cotidiana, que poderíamos aproximá-los como um sistema contínuo. Um exemplo simples é a membrana de um tambor que executa vibrações quando espalmada por um músico, ou as ondas que se propagam em um lago quando jogamos uma pedra no mesmo. Com o advento da relatividade especial a existência de campos na física passou a ser necessária quando se considera interações que não são de contato. Precisamos do campo como mediador da interação para evitar problemas de causalidade quando se troca de referencial. Iremos investigar teorias que envolvem campos clássicos da perspectiva do algoritmo de Dirac, i.e., teorias de campos cuja lagrangiana associada possui mais campos do que o necessário para descrever um sistema físico.

4.1 O CAMPO ESCALAR

Um campo escalar é uma função escalar das coordenadas e do tempo, ou seja, associa a cada ponto no espaço um número justificando seu nome. Campos escalares aparecem já na física básica e o exemplo mais simples deles é a função de onda. Uma onda transversal propagando-se em uma corda pode ser descrita por

$$y(x, t) = A \sin k(x - vt), \quad (4.1)$$

onde y é o deslocamento da corda de sua posição de equilíbrio, k é o número de onda e v a velocidade de propagação da onda. Como o campo $y(x, t)$ representa uma onda ele deve satisfazer a equação da onda, isto é

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (4.2)$$

Podemos dizer que $y(x, t)$ é dotado de dinâmica, no sentido de que podemos determinar $y(x, t)$ ao especificar $y(x, t_0)$ e $\dot{y}(x, t_0)$,

$$\dot{y}(x, t) \equiv \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (4.3)$$

Estas especificações são como CI, na verdade elas representam infinitas CI, uma para cada ponto x no eixo das coordenadas. No processo de solução da eqm também é necessário fornecer condições de contorno para o campo. Para uma corda estas condições podem exigir que os extremos da corda, em x_1 e x_2 sejam fixos, isto significa que o campo deve ser nulo nos extremos. As condições de contorno são restrições nos valores da função que dependem apenas da região do espaço em que nos encontramos e não do instante de tempo. No caso da corda, com extremos fixos a todo instante de tempo, a condição de contorno é $y = 0$ nas extremidades o que depende apenas da posição das extremidades no espaço.

É possível associar uma lagrangiana ao campo $y(x, t)$ de modo que a equação de onda surja como uma equação de Euler-Lagrange. No caso de uma função de onda a lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (4.4)$$

A primeira diferença do campo para os sistemas anteriores é que a lagrangiana deste é uma integral sobre suas derivadas, e isto não é por acaso. Nós já tratamos de sistemas que possuíam mais de uma coordenada mas o número de coordenadas era finito e além disso era possível enumerá-los por um índice discreto $(q_1, q_2, \dots, q_N)$. Nesses casos a lagrangiana é uma soma discreta nas velocidades e pode conter termos de produto entre uma coordenada e outra. Por outro lado o campo representa um número infinito de gl indicados agora por um número que varia continuamente: $y(x, t) = q_x(t)$. A lagrangiana é uma soma sobre estes gl contínuos, consequentemente ela se reduz a uma integral. A integral sobre a derivada temporal do campo ao quadrado está somando as energias cinéticas dos diferentes gl. O termo de derivada com relação a x ao quadrado representa uma interação entre a coordenada q_x e a coordenada q_{x+dx} . Lembre-se que

$$y(x + dx, t) = y(x, t) + \frac{\partial y}{\partial x} dx. \quad (4.5)$$

Então se queremos que uma coordenada interaja com as coordenadas na sua vizinhança infinitesimal inevitavelmente a derivada espacial do campo aparecerá na lagrangiana.

O processo de obter a eqm é análogo ao caso discreto, as eqm também advém de um princípio de mínima ação. A ação, integral no tempo da lagrangiana, passa a ser uma integral dupla:

$$S[y(x, t)] = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (4.6)$$

e a função que iremos variar agora depende de duas coordenadas. O procedimento geral ainda é o mesmo: $y(x, t) \rightarrow y(x, t) + \delta y(x, t)$; mas agora impomos que as variações funcionais também são zero nos extremos espaciais

$$\delta y(x, t_1) = \delta y(x, t_2) = \delta y(x_1, t) = \delta y(x_2, t) = 0. \quad (4.7)$$

A variação da ação é obtida diferenciando o integrando:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left[\frac{\partial y}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) - v^2 \frac{\partial y}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left[\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \delta y}{\partial t} - v^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

sendo que as derivadas no espaço e tempo ainda podem ser intercambiadas com a variação funcional

$$\delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial \delta y}{\partial t} \quad \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial \delta y}{\partial x}. \quad (4.9)$$

Uma vez mais utilizamos o truque da integral por partes, só que agora no tempo e espaço, de forma que

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \delta y = 0. \quad (4.10)$$

Como variação funcional δy é arbitrária,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (4.11)$$

e a equação de onda surge naturalmente como eqm da lagrangiana. O integrando da lagrangiana L é chamado de densidade lagrangiana $\mathcal{L}$, mas é comum na física chamar a densidade lagrangiana de lagrangiana, um abuso de linguagem que será cometido aqui.

Frequentemente é necessário trabalhar com lagrangianas que contêm mais de um campo escalar, sendo que todos eles estão definidos em todo o espaço. Considere por exemplo

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\dot{\phi}^i, \nabla \phi^i, \phi^i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.12)$$

sendo o volume de integração todo o espaço, e $\nabla \phi^i$ representa as derivadas espaciais do campo em relação a x, y, z . Podemos definir a coordenada $x^0 = ct$, sendo c a velocidade da luz no vácuo, e o quadrivetor $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, com as coordenadas espaciais representadas por $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Em posse destas definições introduzimos um operador nabla generalizado

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right) = \partial_\mu, \quad (4.13)$$

nesta notação podemos representar o operador nabla espacial por $\nabla = \partial_i$ e a derivada temporal está codificada em ∂_0 . A lagrangiana pode ser reescrita

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi^i, \phi^i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.14)$$

A ação tipicamente é uma integral no tempo no intervalo $(-\infty, \infty)$, escrita na notação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi^i, \phi^i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.15)$$

onde $d^4x = dx^0 d^3x$ em um sistema de unidades que $c = \hbar = 1$. A ação é uma integral em todo o espaço-tempo, logo é necessário que os campos tendam a zero quando $|t|, |\vec{x}| \rightarrow \infty$, para que a integral seja convergente. O método de obtenção das eqm para vários campos é análogo a generalização feita no caso discreto: considere $\phi^i \rightarrow \phi^i + \delta \phi^i$, a variação da ação em primeira ordem nos campos é

$$\delta S = \int d^4x \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^i} \delta \dot{\phi}^i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi^i)} \delta (\partial_j \phi^i) \right] = 0. \quad (4.16)$$

Podemos integrar por partes o segundo termo na variável temporal, trocando a ordem da variação

funcional e a derivada temporal antes, como a variação dos campos vai a zero nos extremos de integração ficamos com

$$\delta S = \int d^4x \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i - \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^i} \right) \delta \phi^i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi^i)} \delta (\partial_j \phi^i) \right] = 0. \quad (4.17)$$

O terceiro termo pode ser pensado como um produto escalar usual de vetores:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi^i)} \delta (\partial_j \phi^i) = \vec{V} \cdot \nabla \delta \phi^i. \quad (4.18)$$

Utilizando a identidade

$$\nabla \cdot (\vec{V} \delta \phi^i) = \vec{V} \cdot \nabla \delta \phi^i + \nabla \cdot \vec{V} \delta \phi^i, \quad (4.19)$$

e o teorema de Gauss da divergência, garantimos que

$$\int d^3x \vec{V} \cdot \nabla \delta \phi^i = - \int d^3x \nabla \cdot \vec{V} \delta \phi^i. \quad (4.20)$$

O teorema de Gauss afirma que

$$\int d^3x \nabla \cdot (\vec{V} \delta \phi^i) = \int d^2x \delta \phi^i \vec{V} \cdot \hat{n}, \quad (4.21)$$

a integral no espaço do divergente é igual a integral do vetor na superfície que delimita o espaço, como estamos tratando de todo o espaço é possível imaginar a superfície que o delimita como uma esfera cujo raio vai a infinito. Mas as variações funcionais, assim como os campos, vão a zero no infinito portanto este termo é zero. A variação em primeira ordem da ação pode ser reescrita

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i - \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^i} \right) \delta \phi^i - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi^i)} \right) \delta \phi^i \right] \\ &= \delta S = \int d^4x \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^i} \right) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi^i)} \right) \right] \delta \phi^i = 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

a arbitrariedade e independência das variações infinitesimais leva a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^i} \right) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi^i)} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.23)$$

Estas eqm podem ser expressas de maneira muito mais compacta se adotarmos a chamada convenção de soma de Einstein: sempre que dois índices aparecerem repetidos como $v_j v^j$ assumiremos que existe

uma soma

$$v^j v_j = \sum_{j=1}^3 v_j v^j, \quad (4.24)$$

notemos além disso que para os índices com letras gregas a soma é sobre o espaço-tempo:

$$V_\mu V^\mu = \sum_{\mu=0}^3 V_\mu V^\mu = V_0 V^0 + V_j V^j. \quad (4.25)$$

Desta forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi^i)} \right) - \partial_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi^i)} \right) = \\ = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.26)$$

Estas são as equações de Euler Lagrange para a teoria de campos. Um sistema de equações diferenciais independentes, a priori, de segunda ordem no tempo e espaço de modo geral. As teorias de campo em que estamos interessados são aquelas em que as eqm não são todas independentes. Estes casos constituem as teorias com simetrias de calibre, podemos estender o método de Dirac também a estas teorias para uma contagem de gl, que é precisamente nosso próximo objetivo.

4.2 DIRAC PARA CAMPOS

O método para tratar de sistemas hamiltonianos vinculados pode ser desenvolvido para o caso contínuo. O problema fundamental é análogo: uma lagrangiana que possui mais campos do que gl. A definição de gl nesse caso é um conjunto de campos escalares independentes que são univocamente determinados em um instante de tempo t se fornecermos estes campos e suas derivadas temporais no instante t_0 . Assim como no caso discreto a maneira de verificar se uma lagrangiana qualquer possui mais campos do que gl é calculando o determinante da Hessiana

$$W_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^i \partial \dot{\phi}^j}. \quad (4.27)$$

Se o determinante é nulo não existem equações diferenciais de segunda ordem no tempo para todos os campos e por conseguinte não é possível determiná-los a partir das CI. Os momentos canonicamente conjugados são

$$\pi_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^j}, \quad (4.28)$$

e a densidade hamiltoniana associada é

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^N \dot{\phi}^j \pi_j - \mathcal{L}. \quad (4.29)$$

A hamiltoniana é a integral de sua densidade sobre todo o espaço. Se a lagrangiana é singular então (4.28) define vínculos entre momentos e campos. Assim como o campo ϕ , o momento também representa infinitos gl. Em vista disto as relações entre momento e campos na verdade constituem infinitos vínculos, um para cada ponto do espaço, estes vínculos também costumam envolver derivadas dos campos e momentos nas coordenadas espaciais. Cada um destes infinitos vínculos deve ser adicionado na hamiltoniana com um ML associado. Portanto se ao calcular os momentos encontramos K relações $F^j \approx 0$ a hamiltoniana total é

$$H_t = \int d^3x \left[\mathcal{H} + \sum_{j=1}^K \lambda_j(\vec{x}, t) F^j \right]. \quad (4.30)$$

Os ML passam a ser funções de $\vec{x}$ pra garantir que todos os vínculos serão inclusos na hamiltoniana. As condições de consistência ainda devem ser calculadas, mas o modo de obter o parênteses de Poisson é um pouco diferente. A definição formal é construída em cima de derivadas funcionais, aqui irei fornecer apenas as propriedades principais do parênteses:

$$\{\phi^i(\vec{x}, t), \phi^j(\vec{x}', t)\} = \{\pi^i(\vec{x}, t), \pi^j(\vec{x}', t)\} = 0 \quad (4.31)$$

$$\{\phi^i(\vec{x}, t), \pi^j(\vec{x}', t)\} = \delta^{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (4.32)$$

onde $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ é a delta de Dirac que é zero se $\vec{x} \neq \vec{x}'$, e é ∞ se $\vec{x} = \vec{x}'$. Além disso ela é normalizada no sentido de que

$$\int_V d^3x' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = 1 \quad (4.33)$$

se o volume V contém o ponto $\vec{x} = \vec{x}'$. A delta de Dirac também possui a propriedade

$$\int d^3x' f(\vec{x}', t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = f(\vec{x}, t), \quad (4.34)$$

que é chamada de filtragem.

As Condições de Consistência dos vínculos se reduzem a

$$\{F^j, H_t\} \approx \int d^3x [\{F^j, \mathcal{H}\} + \lambda_l \{F^j, F^l\}] \approx 0, \quad (4.35)$$

lembre-se que a integral é apenas uma soma e o parênteses de Poisson de uma função F com uma

¹ É evidente que a delta de Dirac não é uma função já que associa uma tendência, o infinito, a um ponto no espaço. Na matemática a delta é vista como uma distribuição: a tendência de uma sequência de funções normalizadas altamente concentradas, ou seja, elas são diferentes de zero em uma região muito pequena e sua integral sobre todo o domínio de definição é 1. Um estudo preliminar sobre distribuições é feito em (BUTKOV, 1988)

soma é simplesmente a soma do parênteses de F com cada um dos termos da soma.

Assim como no caso discreto as condições de consistência podem resultar em uma identidade, restrições sobre os ML ou novos vínculos. Como antes o algoritmo só é encerrado quando não encontramos mais nenhum vínculo. Todo o processo de contagem é inteiramente análogo, e ainda podemos definir vínculos de primeira e segunda classe. Vamos exemplificar no caso do eletromagnetismo de Maxwell a seguir.

4.3 TEORIA DE MAXWELL

A ação do eletromagnetismo, em um sistema de unidades tal que $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$, sem cargas ou correntes é:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (4.36)$$

onde $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, sendo ϕ o potencial escalar e $\mathbf{A}$ o potencial vetor. Os campos elétrico e magnético estão conectados ao quadripotencial por

$$E^i = F^{0i} = -\left(\nabla A^0 + \dot{\mathbf{A}}\right)^i, \quad B^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} F^{jk} = (\nabla \times \mathbf{A})^i. \quad (4.37)$$

Note que $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$, sendo que

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

ou seja $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski. A lei de Gauss para o campo elétrico e a lei de Ampere-Maxwell são as eqm da ação (4.36), nesta formulação as outras duas leis do eletromagnetismo se reduzem a identidades matemáticas.

A ação é invariante se $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, sendo $\Lambda(x^\mu)$ uma função arbitrária, ou seja, existe uma simetria de calibre. Os momentos canonicamente conjugados são

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{\mu 0} \quad \rightarrow \quad \pi^i = -E^i = \left(\nabla A^0 + \dot{\mathbf{A}}\right)^i \quad (4.39)$$

a componente zero é o vínculo primário

$$\pi^0 \approx 0. \quad (4.40)$$

Este vínculo decorre da ausência de $\dot{A}^0$ na lagrangiana. A hamiltoniana total é

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x' \left[\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} + \lambda \pi^0 \right] \\ &= \int d^3x' \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - A^0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \lambda \pi^0 \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

A condição de consistência $\dot{\pi}^0 \approx 0$ aplicada ao sistema fornece

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \approx 0, \quad (4.42)$$

ou seja, a lei de Gauss no vácuo. A condição de consistência deste vínculo é identicamente satisfeita. O parênteses de Poisson entre os dois vínculos é zero, portanto ambos são de primeira classe, e as eqm do sistema são:

$$\begin{aligned} \dot{A}^0 &= -\lambda \\ \dot{A}^i &= -(E^i + \partial^i A^0) \\ \dot{E}^i &= \partial_j F^{ij}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Podemos observar que $\dot{A}^0$ é proporcional a uma função arbitrária, então A^0 por si só também é uma função arbitrária. A conjectura de Dirac se concretiza no eletromagnetismo naturalmente: A^0 atua como uma função arbitrária, ML, associada a um vínculo secundário de primeira classe na teoria. A hamiltoniana portanto poderia ser escrita como

$$H_t = \int d^3x' \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \bar{\lambda} \nabla \cdot \mathbf{E} + \lambda \pi^0 \right] \quad (4.44)$$

A existência de dois vínculos primários de primeira classe implica na existência de duas funções arbitrárias no formalismo, para nos livrarmos desta arbitrariedade é necessário impor duas condições de calibre totalizando 4 vínculos. Logo, a quantidade de gl restante é 4 gl no formalismo hamiltoniano, e dois no formalismo lagrangiano ².

As eqm da lagrangiana que partirmos são a lei de Gauss e a lei de Ampere-Maxwell, no vácuo. A lei de Gauss para o magnetismo e a lei Faraday surgem como identidades quando a formulação é fundamentada no campo vetorial e escalar. As equações de Maxwell no vácuo admitem como solução ondas eletromagnéticas propagando-se com velocidade c . Em uma onda eletromagnética o campo magnético $\mathbf{B}$ pode ser obtido a partir de $\mathbf{E}$, utilizando a lei de Ampere-Maxwell. Portanto, tudo que precisamos saber para especificar a onda é o campo elétrico. O campo elétrico se propaga com uma certa polarização, ou seja, o campo elétrico oscila de uma determinada forma enquanto se propaga. A polarização mais geral possível é construída a partir de dois estados de polarização ortogonais, que podem ser direções de oscilação ortogonais ou estados de polarização circulares no sentido horário e

² Integrando por partes a a lagrangiana em (4.36) obtemos $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \right]$ o vínculo primário desta lagrangiana é $\pi_0 - \nabla \cdot \mathbf{A} \approx 0$, e a estrutura de vínculos associada a hamiltoniana é diferente. Entretanto o algoritmo de Dirac ainda fornece dois gl para a teoria, como deveria ser já que as lagrangianas diferem apenas por termos de superfície e portanto devem ser equivalentes.

anti-horário. Deste modo para especificar a onda mais geral possível precisamos de duas componentes de um campo vetorial, ortogonais a direção de propagação da onda. Por este motivo a contagem fornece apenas dois gl, ou seja dois campos independentes para especificar o estado da onda eletromagnética.

Encerramos por aqui a análise de teorias de calibre no formalismo hamiltoniano. O algoritmo de Dirac é uma ferramenta bem sucedida no tratamento destes sistemas, além de ser relativamente simples, para contar os gl é necessário apenas seguir a receita do algoritmo e eventualmente encontramos a quantidade de gl da teoria. A partir de agora exploraremos um pouco de sistemas com simetria no formalismo lagrangiano e iremos investigar um problema que lá reside. Mas ainda nos basearemos nas análises feitas no formalismo hamiltoniano a fim de verificar a validade das conclusões que iremos obter.

A aplicação do formalismo de Dirac ao eletromagnetismo com mais detalhes pode ser acompanhada em (REGGE; TEITELBOIM, 1976), e uma série de aplicações do algoritmo a várias teorias de campo pode ser vista em (SANTOS, 2018).

5 SIMETRIA DE CALIBRE NO FORMALISMO LAGRANGIANO

No formalismo lagrangiano uma teoria com simetria de calibre é identificada pela invariância da ação sob transformações envolvendo funções arbitrárias. A consequência desta invariância é a ausência de algumas eqm para as coordenadas, ou campos. Usualmente o modo de lidar com este problema é deduzir as eqm e então fixar condições de calibre para eliminar alguns gl. Uma pergunta que surge, entretanto, é se não é possível eliminar estes gl redundantes na ação, o que pode simplificar o tratamento. O objetivo deste capítulo é explorar esta possibilidade, e verificar sob quais condições podemos fazer esta fixação de calibre diretamente na ação.

5.1 UNICIDADE DOS PARÂMETROS DE SIMETRIA

Uma lagrangiana com simetria de calibre possui o mesmo problema que a hamiltoniana associada: as coordenadas, ou campos, não podem ser determinadas de maneira única em um instante de tempo qualquer a partir das CI. Por conseguinte existe mais de um conjunto de coordenadas que podem estar associadas ao mesmo estado físico em um determinado instante. Considere novamente a ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{2} \left[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} - \xi)^2 \right] - V(r) \right), \quad (5.1)$$

as equações de movimento do sistema são

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta} - \xi)^2 + \frac{dV}{dr} = 0, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{d}{dt} \left[r^2(\dot{\theta} - \xi) \right] = 0, \\ \varepsilon_\xi &= r^2(\dot{\theta} - \xi) = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

A eqm $\varepsilon_r = 0$ pode ser simplificada utilizando $\varepsilon_\xi = 0$, levando à

$$\varepsilon_r = \ddot{r} + \frac{dV}{dr} = 0, \quad (5.3)$$

se $r \neq 0$. Esta eqm é de segunda ordem no tempo e envolve apenas a coordenada $r(t)$, portanto espera-se que $r(t)$ seja univocamente determinada dadas as CI. Podemos dizer então que $r(t)$ representa um gl físico. A respeito das coordenadas θ e ξ é evidente que suas eqm não são independentes, com efeito $\varepsilon_\theta - \dot{\varepsilon}_\xi = 0$ ¹ identicamente. Temos três coordenadas e apenas "duas eqm"; isto já é um indicio de que nem todas as coordenadas vão ser univocamente determinadas. A eqm $\varepsilon_\xi = 0$ apenas informa que $\xi = \dot{\theta}$ mas não nos dá qualquer informação sobre $\theta(t)$. Além disto mesmo que definíssemos ambas as coordenadas através de alguma função $f(t)$ com $f(t) = \theta$ restaria uma indeterminação, pois se $\theta \rightarrow \theta' = \theta + \alpha(t)$ e $\xi \rightarrow \xi' = \xi + \dot{\alpha}(t)$, onde $\alpha(t)$ é uma função arbitrária do tempo, as novas

¹ Isto não é uma coincidência ou algo específico do exemplo, é uma característica geral das teorias de calibre e será explorada na próxima seção.

coordenadas ainda satisfazem a eqm $\varepsilon_\xi = 0$ portanto elas são tão adequadas quanto as coordenadas antigas para especificar o estado físico do sistema. Esta indeterminação devido a simetria das eqm perante uma transformação das coordenadas através de uma função arbitrária é tipicamente o que se espera em teorias de calibre. Assim como no formalismo hamiltoniano devemos impor vínculos sobre estas coordenadas indeterminadas para resolver o problema, usualmente estes vínculos são impostos nas eqm. Façamos $\theta = 0$ em (5.2): de $\varepsilon_\xi = 0$ podemos concluir que $\xi = 0$ e todas as três coordenadas são determinadas univocamente, com adição das condições iniciais para a coordenada $r(t)$. Como de três coordenadas duas são nulas a todo instante de tempo e devemos fornecer duas condições iniciais apenas para uma delas podemos dizer que o sistema tem apenas um gl, o que é consistente com a análise hamiltoniana deste sistema.

Por outro lado ao escolher $\xi = 0$ o sistema de eqm passa a ser

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \ddot{r} + \frac{dV}{dr} = 0, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0, \\ \varepsilon_\xi &= r^2 \dot{\theta} = 0.\end{aligned}\tag{5.4}$$

$\varepsilon_\xi = 0$ diz apenas que θ deve ser constante e devemos ter duas condições iniciais para determinar $r(t)$ e mais uma condição para $\theta(t)$ então nós deveríamos ter um gl e meio ? Isto não é possível, mesmo que nossa fixação seja diferente a contagem deve ser a mesma. O problema aqui é que ainda resta uma simetria nas eqm se $\theta \rightarrow \theta + C$, sendo C um número real, as eqm não mudam, existe uma simetria residual! Nós devemos impor uma condição a mais, agora sobre θ o que pode ser $\theta = 0$, desse modo a contagem de gl é consistente com o caso anterior.

O método realizado acima é o padrão, a pergunta mais simples que pode ser feita após observar este exemplo é: por que um vínculo quando imposto elimina toda a simetria das eqm e o outro mantém uma simetria residual ? A resposta mais direta, e específica do exemplo trabalhado, é: o primeiro vínculo mantém uma coordenada igual a zero nas eqm após ser aplicado, $\xi = 0$, e o segundo mantém a derivada de uma coordenada igual a zero nas eqm, $\dot{\theta} = 0$. Então a simetria residual surge porque o segundo vínculo fixa uma coordenada e uma velocidade. Entretanto, podemos encarar isto de outra forma que é mais útil em problemas mais gerais. Fixar um vínculo é equivalente a definir o parâmetro arbitrário da transformação de calibre, analogamente ao formalismo hamiltoniano onde a fixação dos ML arbitrários era feita introduzindo novos vínculos. Suponhamos que $\theta(t)$ seja uma função qualquer do tempo, sempre podemos realizar a transformação

$$\theta \rightarrow \theta' = \theta + \alpha(t), \quad \alpha(t) = -\theta.\tag{5.5}$$

A função arbitrária é especificada de modo que a nova coordenada seja zero sempre ($\theta' = 0$), logo: fixar um calibre é realizar uma transformação com o parâmetro de simetria totalmente determinado. Quando impomos $\xi = 0$ a transformação correspondente é:

$$\xi \rightarrow \xi' = \xi + \dot{\alpha}(t), \quad \dot{\alpha}(t) = -\xi.\tag{5.6}$$

O vínculo $\xi = 0$ não especifica o parâmetro de simetria, sua derivada é que é determinada. O parâmetro é determinado a menos de constante aditiva, consequentemente as eqm permanecem com simetria por uma constante real quando fixamos $\xi = 0$. De modo geral uma fixação de calibre não deixa simetrias residuais nas eqm apenas se ela determinar o parâmetro de simetria completamente ². Iremos nos referir aos vínculos que fixam completamente os parâmetros de simetria como "bom calibre", caso contrário o vínculo é um "calibre ruim"

Neste exemplo simples o sistema possuía apenas três coordenadas e foi relativamente simples deduzir as eqm. Na maioria dos casos temos várias coordenadas e a dedução das eqm pode ser demasiadamente trabalhosa. Se estes modelos têm simetria de calibre é natural se perguntar se algumas coordenadas não podem ser eliminadas diretamente na ação em vez de deduzir todas as eqm e depois eliminá-las do nosso tratamento. Para que isto seja feito sem prejudicar a teoria, as eqm que obtemos desta ação sem algumas coordenadas, a ação vinculada, devem ser as mesmas que obteríamos se as eqm fossem deduzidas da ação completa e só depois fossem fixados os vínculos. Apenas para alguns vínculos isto de fato ocorre, para outros algumas eqm fundamentais são perdidas. Para esclarecer esta questão fixemos o vínculo $\theta = 0$ na ação do problema anterior:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\xi}^2) - V(r) + \lambda \theta \right], \quad (5.7)$$

assim como no formalismo hamiltoniano ao fixar um vínculo devemos incluir o vínculo na ação através do ML, e a coordenada θ pode ser eliminada da ação por uma redefinição do ML. As eqm são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \ddot{r} - r\dot{\xi}^2 + \frac{dV}{dr} = 0, \\ \varepsilon_\theta &= \lambda = 0, \\ \varepsilon_\xi &= r^2 \dot{\xi} = 0, \\ \varepsilon_\lambda &= \theta = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Novamente o uso de ε_ξ permite simplificar ε_r colocando a na forma (5.3) e o resultado é igual ao obtido quando $\theta = 0$ foi fixado nas eqm: $\xi = 0$ e $r(t)$ é o único gl. Note entretanto que nós perdemos a eqm ε_θ que satisfazia $\dot{\varepsilon}_\xi - \varepsilon_\theta = 0$ mas isto não é problema já que esta eqm era redundante. Façamos agora $\xi = 0$ na ação:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r) + \lambda \xi \right], \quad (5.9)$$

² Em teorias mais gerais podem haver mais de uma transformação de calibre envolvendo várias funções arbitrárias independentes, nestes casos cada vínculo imposto entre as coordenadas é feito com o intuito de especificar uma das funções arbitrárias. As eqm ainda vão ter simetria pelas transformações de calibre cujos parâmetros os vínculos não deveriam fixar.

as eqm advindas desta ação são:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{dV}{dr} = 0, \\
 \varepsilon_\xi &= \lambda = 0, \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0, \\
 \varepsilon_\lambda &= \xi = 0.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Temos agora duas eqm independentes: ε_r e ε_θ ; ambas são de segunda ordem e portanto precisamos de quatro condições iniciais o que contabiliza dois gl. Isto evidentemente está errado, sabemos que só deve haver um gl. O problema aqui é que nós perdemos a eqm para $\varepsilon_\xi = 0$ que satisfazia $\dot{\varepsilon}_\xi + \varepsilon_\theta = 0$. Com efeito as eqm (5.4) obtidas fixando $\xi = 0$ após derivar as eqm da ação completa preservam $\varepsilon_\xi = 0$ e com isso poderíamos concluir a existência de apenas um gl. Agora, podemos dizer apenas que: $r^2\dot{\theta} = C$, com C um número real. A perda da equação $\varepsilon_\xi = 0$ leva a uma contagem errada de gl.

A questão que desejamos responder é: existe algum critério para que um vínculo possa ser imposto na ação sem perda de eqm fundamentais, e se existe qual é? Porque um vínculo causa a perda da eqm, $\varepsilon_\xi = 0$, e outro não? Neste exemplo a diferença fundamental entre os vínculos é que um deles fixava o parâmetro de simetria completamente e o outro não, portanto devemos iniciar nossa busca partindo desta diferença. Antes disto iremos verificar um resultado devido a Noether que relaciona simetrias de calibre e eqm da lagrangiana.

5.2 SEGUNDO TEOREMA DE NOETHER

A partir de agora nosso tratamento será mais geral. Iremos considerar uma teoria com N campos escalares clássicos em um espaço tempo de D dimensões e com derivadas de ordem m dos campos na ação. O tratamento mais generalizado deixa claro a potência dos resultados que podem ser uteis em teorias com derivadas de ordem maior que a primeira na ação, as chamadas "Lagrangianas com derivadas de ordem superior", e teorias em um espaço tempo com mais dimensões como teoria de cordas ou até mesmo teorias de dimensão mais baixa. Considere a ação

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^D x \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i, \partial_\mu \partial_\nu \phi^i, \dots, \partial_{(m)} \phi^i, x^\mu); \quad i = 1, \dots, N \\
 \partial_{(m)} &\equiv \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_m},
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

onde $\mathcal{L}$ é invariante a menos de um termo de superfície se $\phi^i \rightarrow \phi^i + \delta\phi^i$, com

$$\begin{aligned}
 \delta\phi^i &\equiv \sum_{p=0}^k F_I^{i(p)} \partial_{(p)} \xi^I; \quad I = 1, \dots, m < N, \\
 \xi^I &= \xi^I(x^\mu), \quad F_I^{i(p)} = F_I^{i(p)}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i, \dots, x^\mu) \\
 \sum_{p=0}^k F_I^{i(p)} \partial_{(p)} \xi^I &= F_I^{i(0)} \xi^I + F_I^{i(\mu)} \partial_\mu \xi^I + F_I^{i(\mu\nu)} \partial_\mu \partial_\nu \xi^I + \dots
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Índices repetidos significam soma. Os parâmetros arbitrários ξ^I são todos independentes. A variação da ação, em primeira ordem, devido a variações dos campos é

$$\delta S = \delta \int d^D x \mathcal{L} = \int d^D x \varepsilon_i \delta \phi^i = 0,$$

sendo ε_i as eqm. Substituindo a forma da variação funcional pelas transformações de calibre (5.12) temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^D x \varepsilon_i \left(\sum_{p=0}^k F_I^{i(p)} \partial_{(p)} \xi^I \right) \\ &= \int d^D x \xi^I \sum_{p=0}^k (-1)^p \partial_{(p)} \left(\varepsilon_i F_I^{i(p)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Entre a primeira e segunda linha realizamos uma integral por partes assumindo que o termo de superfície vai a zero. O que temos acima é novamente algo da forma (2.11):

$$\begin{aligned} \int d^D x \xi^1 (\cdots)_1 + \int d^D x \xi^2 (\cdots)_2 + \cdots &= 0, \\ (\cdots)_I &\equiv \sum_{p=0}^k (-1)^p \partial_{(p)} \left(\varepsilon_i F_I^{i(p)} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde os parâmetros ξ^I são arbitrários e independentes. Pelos mesmos argumentos concluímos que:

$$(\cdots)_I = \sum_{p=0}^k (-1)^p \partial_{(p)} \left(\varepsilon_i F_I^{i(p)} \right) = 0, \quad I = 1, \dots, m, \quad (5.15)$$

este é o chamado segundo teorema de Noether. A existência de simetrias funcionais leva a vínculos entre as eqm, e existe um vínculo para cada parâmetro ξ^I . Além disso, como os vínculos podem envolver derivadas, algumas eqm são mais fundamentais do que outras ³, no sentido de que algumas das eqm são apenas derivadas de outras eqm mais fundamentais. Se os vínculos fossem uma combinação linear simples $C_i \varepsilon^i = 0$ todas as eqm seriam equivalentes pois de $\varepsilon_j = 0$ para qualquer j podemos concluir que as demais também são zero. Entretanto se existem derivadas $\varepsilon_j = 0$ não garante que $\varepsilon_k = 0$, $k \neq j$, se por exemplo $\varepsilon_j = \dot{\varepsilon}_k$.

5.3 O CRITÉRIO PARA FIXAÇÃO

O segundo teorema de Noether formaliza um resultado que havíamos apenas exemplificado: a existência de simetrias de calibre leva a vínculos entre as eqm. Quando se fixa um calibre na lagrangiana alguma eqm é perdida, como foi visto anteriormente. Estes vínculos sugerem que não há problema em perder eqm que não são fundamentais. Então, o critério para fixar um calibre na ação deve ser: as eqm perdidas devido a fixação de calibre na ação devem ser eqm redundantes. Este critério está correto mas

³ Na seção anterior $\varepsilon_\theta = \dot{\varepsilon}_\xi$, logo $\varepsilon_\xi = 0$ é mais fundamental que $\varepsilon_\theta = 0$ porque da primeira podemos concluir a segunda mas a recíproca não vale

não é muito útil, pois não diz como podemos saber a priori se a fixação de um determinado vínculo vai resultar ou não na perda de eqm fundamentais. Observamos no exemplo anterior que o calibre bom era o que não levava a perda da eqm fundamental, vamos tomar isto como inspiração e verificar quais são as condições para que um conjunto de vínculos seja completo. Em seguida iremos procurar condições para que as eqm deduzidas de uma ação vinculada sejam **completas** no sentido de que nenhuma eqm fundamental é perdida e enfim ver se existe alguma relação entre os critérios.

Dada a ação

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i, \partial_\mu \partial_\nu \phi^i, \dots, \partial_{(m)} \phi^i, x^\mu); \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.16)$$

onde a lagrangiana é invariante a menos de um termo de superfície pelas transformações (5.12). Temos m_g condições de calibre

$$f^J(\phi^i, \partial_\mu \phi^i, \dots, \partial_{(l)} \phi^i, x^\mu) = 0; \quad J = 1, \dots, m_g \leq m, \quad (5.17)$$

que poderiam ser fixadas nesta teoria. Não é necessário a priori fixar todos os parâmetros de simetria mas podemos fixá-los se quisermos por isso $m_g \leq m$. Como podemos saber se essas condições são **completas**? Se as condições acima são completas então só existe uma configuração $\{\phi^i\}$ que satisfaz os vínculos, qualquer outra configuração $\{\phi'^i\}$ tal que

$$\delta \phi^i \equiv \phi'^i - \phi^i = \sum_{p=0}^k F_I^{i(p)} \partial_{(p)} \xi^I; \quad I = 1, \dots, m_g \quad (5.18)$$

não satisfaz $f^J = 0$ se $\xi^I \neq 0$.⁴ Podemos escrever uma expressão matemática que carregue esta informação como segue: se $\{\phi'^i\}$ é a configuração que satisfaz os vínculos $f^J = 0$ e $\{\phi''^i\}$ é outra configuração obtida via transformação de calibre nos campos $\{\phi'^i\}$ pelos parâmetros de simetria ξ^I , para que os vínculos sejam completos é necessário que

$$\delta f^J \equiv f^J|_{\phi''^i} - f^J|_{\phi'^i} = 0 \iff \xi^I = 0, \quad (5.19)$$

como $f^J|_{\phi'^i} = 0$ nossa expressão está dizendo que $f^J|_{\phi''^i} = 0$ se e somente se $\{\phi''^i\} = \{\phi'^i\}$.

Podemos analisar a condição de completeza dos vínculos apenas em primeira ordem nas variações funcionais dos campos:

$$\begin{aligned} \delta f^J &= \frac{\partial f^J}{\partial \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\partial f^J}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \partial_\mu \phi^i + \dots + \frac{\partial f^J}{\partial (\partial_{(l)} \phi^i)} \delta \partial_{(l)} \phi^i \\ &= \sum_{q=0}^l \frac{\partial f^J}{\partial (\partial_{(q)} \phi^i)} \partial_{(q)} \delta \phi^i = \sum_{q=0}^l \frac{\partial f^J}{\partial (\partial_{(q)} \phi^i)} \partial_{(q)} \left(\sum_{p=0}^k F_I^{i(p)} \partial_{(p)} \xi^I \right) \\ &= \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l \frac{\partial f^J}{\partial (\partial_{(q)} \phi^i)} \partial_{(q)} \left(F_I^{i(p)} \partial_{(p)} \xi^I \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

⁴ Note que os parâmetros da transformação de calibre considerada são apenas aqueles que, por hipótese, foram fixados pelos vínculos $f^J = 0$. Ainda há simetria pelos parâmetros que estes vínculos não fixam.

A regra de Leibniz

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(x)g(x)) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x), \quad (5.21)$$

pode ser aplicada no termo com derivada, fornecendo

$$\delta f^J = \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l \sum_{r=0}^q \binom{q}{r} \frac{\partial f^J}{\partial (\partial_{(q)} \phi^i)} \partial_{(q-r)} F_I^{i(p)} \partial_{(p+r)} \xi^I \equiv \hat{P}^J{}_I \xi^I = 0. \quad (5.22)$$

Podemos reescrever esta expressão de modo que apenas um índice seja responsável pela ordem da derivada em ξ^I , os detalhes da redefinição estão no apêndice A. O operador $\hat{P}^J{}_I$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \hat{P}^J{}_I &= \sum_{s=0}^{k+l} M^{(s)J}{}_I \partial_{(s)}; \\ M^{(s)J}{}_I &\equiv \sum_{p=\text{maior}\{s-l, 0\}}^{\text{menor}\{s, k\}} \sum_{q=s-p}^l \binom{q}{s-p} \frac{\partial f^J}{\partial (\partial_{(q)} \phi^i)} \partial_{(q+p-s)} F_I^{i(p)}, \end{aligned}$$

onde a primeira soma na segunda linha corre do maior valor entre $s-l$ e 0 até o menor valor entre s e k . Quando escrito desta forma fica claro que $\hat{P}^J{}_I$ é um operador diferencial atuando nos ξ^I . (5.22) é um sistema de equações diferenciais nos parâmetros ξ^I . A primeira impressão pode ser a de que a única forma de determinar estes parâmetros como sendo zero de maneira unívoca é se $M^{(s)J}{}_I = 0$ para $s \geq 1$ e $\|M^{(0)J}{}_I\| \neq 0$. Isto transforma o sistema de equações diferenciais em um sistema de equações algébricas que pode ser invertido fornecendo $\xi^I = 0$. Esta condição de fato é necessária quando temos apenas um vínculo e nenhuma condição sobre o parâmetro⁵. Porém na presença de dois vínculos ou mais esta condição é suficiente mas não necessária. Com efeito, considere

$$M^{(0)} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \quad M^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d^\mu & 0 \end{bmatrix} \quad M^{(s)} = 0, \quad s \geq 2. \quad (5.23)$$

Se $\|M^{(0)}\| \neq 0$ é necessário que $a, c \neq 0$. Logo $\hat{P}^J{}_I \xi^I = 0$ implica:

$$\begin{aligned} a\xi^1 &= 0 \\ b\xi^1 + c\xi^2 + d^\mu \partial_\mu \xi^1 &= 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

A primeira equação garante que $\xi^1 = 0$ que, quando introduzido na segunda nos leva a $\xi^2 = 0$. Mesmo com derivadas o sistema $\hat{P}^J{}_I \xi^I = 0$ fornece $\xi^I = 0$ de maneira inequívoca.

A condição matemática para que $\xi^I = 0$ seja determinada univocamente determina que $\hat{P}^J{}_I$ esteja associado a um operador inverso que não envolva integrais garantindo que o sistema de equações diferenciais $\hat{P}^J{}_I \xi^I = 0$ é apenas aparente no sentido de que não precisamos resolver as equações diferenciais para determinar ξ^I .

⁵ No eletromagnetismo $\nabla^2 \Lambda = 0$ mais a condição de que $\Lambda = 0$ no infinito fixa $\Lambda = 0$ univocamente.

Agora sabemos o critério para determinar se um conjunto de vínculos é completo ou não: se os vínculos são completos deve existir um operador $\left(\hat{P}^J{}_I\right)^{-1}$ que não envolva integrais. Infelizmente não é possível dizer se um dado operador $P^J{}_I$ qualquer possui ou não tal inversa apenas pelo conhecimento do mesmo. Mas independentemente deste detalhe a condição para a completude dos vínculos está bem determinada. Antes de verificar o que é necessário para que vínculos impostos na ação não levem a perda de eqm vamos investigar uma característica crucial do sistema de equações (5.22).

Considere um conjunto de funções (u_I, v^J) que tendem a zero no infinito. Podemos construir o produto:

$$\langle u_I, \hat{P}^I{}_J v^J \rangle \equiv \int d^D x \left[u_I \sum_s M_J^{(s)I} \partial_{(s)} v^J \right]. \quad (5.25)$$

Integrando por partes é possível definir a atuação de um operador adjunto $\hat{P}_J^{\dagger I} u_I$:

$$\begin{aligned} \langle u_I, \hat{P}^I{}_J v^J \rangle &\equiv \int d^D x \left[u_I \sum_s M_J^{(s)I} \partial_{(s)} v^J \right] \\ &= \int d^D x \left[\sum_s (-1)^s \partial_{(s)} \left(u_I M_J^{(s)I} \right) \right] v^J = \langle \hat{P}_J^{\dagger I} u_I, v^J \rangle, \\ \hat{P}_J^{\dagger I} u_I &\equiv \sum_s (-1)^s \partial_{(s)} \left(u_I M_J^{(s)I} \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Desse modo, se $\hat{P}^J{}_I \xi^I = 0$, então $\hat{P}^{\dagger J}{}_I \lambda_J = 0$, sendo $\{\lambda_J, \xi^I\}$ um conjunto de funções arbitrárias (Verifique!). Além disso, se $\hat{Q}^I{}_J$ é inversa baseada em derivadas de $\hat{P}^I{}_J$, logo $\hat{Q}^I{}_J \hat{P}^J{}_K = \hat{P}^I{}_J \hat{Q}^J{}_K = \delta^K{}_I$, então $\hat{Q}^{\dagger I}{}_J$ é inversa de $\hat{P}^{\dagger J}{}_I$. Para verificar esta afirmação note que

$$\begin{aligned} \langle \lambda_J, \epsilon^J \rangle &= \langle \lambda_J, \delta^J{}_I \epsilon^I \rangle = \langle \lambda_J, \hat{P}^J{}_K \hat{Q}^K{}_I \epsilon^I \rangle \\ &= \langle \hat{P}^{\dagger J}{}_K \lambda_J, \hat{Q}^K{}_I \epsilon^I \rangle = \langle \hat{Q}^{\dagger K}{}_I \hat{P}^{\dagger J}{}_K \lambda_J, \epsilon^I \rangle \end{aligned} \quad (5.27)$$

da primeira igualdade segue que $\hat{Q}^{\dagger K}{}_I \hat{P}^{\dagger J}{}_K = \delta^J{}_I$. Estas manipulações só são possíveis pois consideramos $\hat{Q}^I{}_J$ um operador construído apenas com derivadas, a própria definição do operador adjunto assume que o operador é derivativo. O resultado importante aqui é que se: $\hat{P}^I{}_J \xi^J = 0$ tem como única solução $\xi^J = 0$, existe um operador inverso $\hat{Q}^I{}_J$ construído com derivadas, e consequentemente $\hat{Q}^{\dagger K}{}_I$ é o operador inverso construído com derivadas de $\hat{P}^{\dagger J}{}_I$. Portanto a equação adjunta $\hat{P}^{\dagger J}{}_I \lambda_I = 0$ também admite como única solução $\lambda^I = 0$. Esta unicidade compartilhada é fundamental para prosseguirmos na investigação do critério.

Ao invés de investigar perdas de eqm fundamentais quando fixamos vínculos na ação iremos seguir por um caminho mais indireto, mas equivalente a este. Assim como foi feito com o eletromagnetismo vamos fixar o gauge na ação apenas com os ML, não iremos utilizar os vínculos na lagrangiana original⁶. Ao deduzir as eqm da ação vinculada devemos verificar o que é necessário para concluir que

⁶ Nós poderíamos fixar os vínculos na lagrangiana original mas não iremos fazer isto pois queremos manter intactas as eqm ε_i advindas da lagrangiana original.

os ML são nulos. Este critério é o que precisamos para que o processo de fixar vínculos na ação gere eqm equivalentes as que são obtidas pela fixação dos mesmos vínculos em eqm advindas de uma ação não vinculada. Se os processos são equivalentes então não há perdas de eqm fundamentais quando fixamos os vínculos na ação. Suponha que as eqm de (5.16) sejam $\varepsilon_i = 0$ ao fixar os m_g vínculos (5.33) nos sobra o conjunto de equações

$$\varepsilon_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad f^I = 0, \quad I = 1, \dots, m_g. \quad (5.28)$$

A ação vinculada é

$$S = \int d^D x (\mathcal{L} + \lambda_I f^I) \quad (5.29)$$

e ao minimizá-la com relação aos campos e ML segue que:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^D x \left[\varepsilon_i + \sum_{q=0} (-1)^q \partial_{(q)} \left(\lambda_I \frac{\partial f^I}{\partial (\partial_{(q)} \phi^i)} \right) \right] \delta \phi^i + \int d^D x f^I \delta \lambda_I = 0 \implies \\ Q_i &\equiv \varepsilon_i + \sum_{q=0} (-1)^q \partial_{(q)} \left(\lambda_I \frac{\partial f^I}{\partial (\partial_{(q)} \phi^i)} \right) = 0, \quad f^I = 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Note que os campos e ML são independentes, como a lagrangiana $\mathcal{L}$ não foi alterada a sua variação com relação aos campos gera as expressões ε_i . Não é possível concluir algo sobre os ML dessa expressão geral, mas a utilização do segundo teorema de Noether nas expressões ε_i simplifica o problema. Como a lagrangiana $\mathcal{L}$ não foi alterada ela ainda possui simetria por transformações de calibre e a consequência disto é que para ε_i valem as identidades (5.15). Ao aplicar as identidades em Q_i ficamos com

$$(\dots)_I = \sum_{p=0}^k (-1)^p \partial_{(p)} \left(\varepsilon_i F_I^{i(p)} \right) + \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \left[F^{i(p)}{}_J \partial_{(q)} \left(\lambda_I \frac{\partial f^I}{\partial (\partial_{(q)} \phi^i)} \right) \right] = 0, \quad (5.31)$$

o primeiro termo é identicamente nulo, então o segundo termo deve ser nulo. Como está mostrado no apêndice B o segundo termo é equivalente à $\hat{P}^{\dagger I}{}_J \lambda_I$, logo o que nos resta é o sistema de equações

$$\hat{P}^{\dagger I}{}_J \lambda_I = 0. \quad (5.32)$$

Este sistema, como verificamos, implica em $\lambda_I = 0$ univocamente se, e somente se, os vínculos impostos fixam $\xi^I = 0$ univocamente. Conclui-se então que não há perdas de eqm fundamentais quando os calibres impostos a nível de ação não possuem simetrias residuais, pois $\lambda_I = 0$ em $Q_i = 0$ implica na recuperação das eqm $\varepsilon_i = 0$ (vide (5.30)).

Esta conclusão, assim como a maior parte do tratamento deste capítulo, foi obtida pela primeira vez em (MOTOHASHI; SUYAMA; TAKAHASHI, 2016), onde a questão da fixação de calibre foi enunciada na forma do teorema abaixo

Teorema: Seja $\mathcal{L}(\phi^i, \dots, \partial_{(m)} \phi^i, x^\mu)$ invariante, a menos de uma derivada total, pelas transforma-

ções $\delta\phi^i$ e consideremos a imposição das m_g condições de gauge

$$f^I(\phi^i, \partial_\mu \phi^i, \dots, \partial_{(I)} \phi^i, x^\mu) = 0; \quad I = 1, \dots, m_g \leq m \quad (5.33)$$

na ação. Se as condições são completas, i.e., fixam m_g parâmetros ξ^I de maneira unívoca, então as m_g eqm perdidas podem ser recuperadas das $N - m_g$ restantes.

A afirmação de que as eqm perdidas podem ser recuperadas faz referência ao segundo teorema de Noether: as eqm fundamentais dão origem as redundantes através das identidades do teorema. O resultado é de grande generalidade mas faz menção apenas as condições de calibre impostas na ação, do ponto de vista da teoria de campos parece que mesmo que as condições por si só não sejam completas, se com a adição das condições de contorno os parâmetros forem univocamente determinados é suficiente para impor o vínculo na ação. Veremos um exemplo disto no eletromagnetismo a seguir.

5.4 CALIBRE NO ELETROMAGNETISMO

As eqm de movimento decorrentes da ação (4.36) são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (5.34)$$

ou seja, um sistema de quatro equações diferenciais, que em componentes é

$$\nabla^2 A^0 + \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = 0 \quad (5.35)$$

$$\square \mathbf{A} + \nabla \left(-\dot{A}^0 + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = 0, \quad (5.36)$$

$$\square \equiv -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2.$$

Claramente não há uma equação de segunda ordem no tempo para A^0 , ou seja não temos uma equação que fixe sua dinâmica, além disso as eqm satisfazem um vínculo, a saber:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (5.37)$$

Não é possível determinar A^0 a partir das CI. Assim como a ação, as eqm também permanecem invariantes se $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, para determinar os campos devemos impor vínculos sobre as componentes do campo vetorial A^μ , os dois vínculos mais recorrentes são o calibre de Lorentz e o calibre de Coulomb, respectivamente:

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (5.38)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (5.39)$$

Ao fixar o calibre de Coulomb nas eqm somos levados a

$$\nabla^2 A'^0 = 0 \quad (5.40)$$

$$\square \mathbf{A}' - \nabla \dot{A}'^0 = 0. \quad (5.41)$$

Se fizermos a redefinição $\Lambda \rightarrow \Lambda + \Lambda'$ e calcularmos a diferença (5.19) temos

$$\nabla^2 \Lambda' = 0. \quad (5.42)$$

onde o operador P^J_I é ∇^2 . A princípio existem soluções não nulas para esta equação mas a condição de contorno $\Lambda' \rightarrow 0$ se $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ fixa univocamente a solução $\Lambda' = 0$. Este par, eqm + condição de contorno, é suficiente para fixar o calibre na ação sem perda de eqm. A ação com o calibre de Coulomb é:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{A} \right), \quad (5.43)$$

as eqm por sua vez são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \delta^\nu_j \partial^j \lambda = 0 \quad (5.44)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (5.45)$$

se aplicarmos o operador ∂_ν em (5.44) obtemos

$$-\nabla^2 \lambda = 0. \quad (5.46)$$

A conclusão $\lambda = 0$ segue da condição de contorno $\lambda \rightarrow 0$ se $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Portanto o calibre de Coulomb, suplementado pelas condições de contorno, quando fixado na ação leva às mesmas eqm que seriam obtidas ao fixá-lo a nível de eqm advindas de uma ação não vinculada. Pode-se verificar também que a análise hamiltoniana da lagrangiana associada a (5.43) garante a existência de apenas 2 gl lagrangianos.

A fixação do calibre de Lorentz nas eqm leva a

$$\square A'^\mu = 0, \quad (5.47)$$

Se fizermos a redefinição $\Lambda \rightarrow \Lambda + \Lambda'$ e calcularmos a variação (5.19) no calibre de Lorentz a equação para o parâmetro Λ' fica sendo

$$\square \Lambda' = 0, \quad (5.48)$$

o operador P^j_I associado ao calibre de Lorentz é $\square$. Mesmo com a condição de contorno que exige $\Lambda' \rightarrow 0$ se $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ o parâmetro não é fixado univocamente, ainda existem soluções Λ' não nulas que satisfazem estas condições. Devemos esperar portanto que o calibre de Lorentz não é uma boa escolha

para fixar na ação. Com efeito, ao fixar o calibre de Lorentz na ação temos:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda \partial_\mu A^\mu \right). \quad (5.49)$$

As eqm advindas da ação agora são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial^\nu \lambda = 0 \quad (5.50)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (5.51)$$

que implicam em

$$\square \lambda = 0, \quad (5.52)$$

que admite soluções com $\lambda \neq 0$. O ML passa a ser um gl a mais na teoria. É possível mostrar via algoritmo de Dirac que a Hamiltoniana associada a (5.49) possui 3 gl lagrangianos, a fixação do calibre de Lorentz a nível de ação muda o conteúdo físico da teoria.

Portanto, ao menos no eletromagnetismo, se os vínculos suplementados pelas condições de contorno fixam univocamente o parâmetro de simetria, podemos fixar tais vínculos a nível de ação. Deve ser enfatizado que o teorema exposto em (MOTOHASHI; SUYAMA; TAKAHASHI, 2016) garante que se os vínculos impostos fixam univocamente os parâmetros de simetria então não há perda das eqm fundamentais. A fixação dos parâmetros pelos vínculos a que o teorema se refere é uma fixação em que não há necessidade de resolver nenhuma equação diferencial. No eletromagnetismo o que ocorre é que a solução de (5.46) suplementada das condições de contorno fixa $\Lambda' = 0$. Até o momento não há um teorema garantindo que a fixação de vínculos que, com a adição das condições de contorno, determinam os parâmetros de simetria univocamente não causa perda de eqm fundamentais.

6 CONCLUSÃO

Verificamos neste trabalho algumas características fundamentais de teorias com simetria de calibre, a saber os vínculos de primeira classe entre coordenadas canônicas como geradores de transformações de calibre, no formalismo hamiltoniano, e a relação direta entre os parâmetros de simetria e os vínculos entre as eqm no formalismo lagrangiano. As duas abordagens contam a mesma história: na presença de simetrias de calibre nem todas as coordenadas são de fato necessárias para descrever o sistema físico. Quero enfatizar aqui a potência do método de Dirac, se temos em mãos uma teoria em que não conhecemos todas as simetrias e desejamos contar os gl, o método lagrangiano de impor vínculos nas eqm até que todas as simetrias acabem não é confiável, pois alguma simetria pode passar despercebida. Porém com o algoritmo de Dirac não existe este problema, não importa se todas as simetrias são conhecidas ou não, o algoritmo dá conta de todas elas, e ainda informa no final quais são as simetrias de calibre do problema na formulação hamiltoniana o que pode nos dar dicas de quais simetrias procurar no formalismo lagrangiano. A análise hamiltoniana de sistemas vinculados é uma receita que funciona bem, se as instruções forem seguidas da maneira correta.

A fixação de calibre na ação é algo ainda em desenvolvimento para teoria de campos. O teorema aqui exposto de fato estabelece um critério para determinar quando vínculos podem ou não ser impostos na ação, a saber os vínculos só podem ser fixados na ação se não deixam simetrias residuais na teoria. O problema relacionado à classificação de um vínculo como sendo completo ou não está bem formulado apenas no caso $D = 1$, (MOTOHASHI; SUYAMA; TAKAHASHI, 2016), onde foi mostrado que existe um modo de saber se certo conjunto de condições fixa ou não os parâmetros de simetria univocamente. Em teorias de campos parece que mesmo os vínculos não completos, a princípio, podem ser fixados na ação, se estes se tornarem completos com a adição das condições de contorno. Mas isto é algo que observamos trabalhando no eletromagnetismo, não foi estabelecida uma prova matemática acerca dessa questão. Por fim queremos enfatizar que ainda existe trabalho a ser feito em fixação de simetrias de calibre na ação para teoria de campos, mas o primeiro passo já foi dado.

REFERÊNCIAS

- BUTKOV, E. **Física matemática**. São Paulo: Guanabara, 1988.
- DIRAC, P. A. M. **Lectures on quantum mechanics**. New York: Yeshiva University Lectures, 1964.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Lições de física de Feynman, v.2**: A edição definitiva. Porto Alegre, Rio Grande do Sul: ARTMED, 2008.
- HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. **Quantization of gauge systems**. New Jersey: Princeton University Press, 1992.
- LEMONS, N. **Mecânica analítica**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- MOTOHASHI, H.; SUYAMA, T.; TAKAHASHI, K. Fundamental theorem on gauge fixing at the action level. **Physical Review D**, v. 94, n. 124021, p. 124021–1 – 124021–21, 2016.
- REGGE, A. H. T.; TEITELBOIM, C. **Constrained hamiltonian systems**: ciclo di lezioni tenute dal 29 aprile al 7 maggio 1974. Roma: Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.
- SANTOS, A. L. R. dos. **Sistemas vinculados e o método de Dirac**. Não Publicado.
- SANTOS, R. R. L. dos. **Sistemas hamiltonianos vinculados e redução dimensional em teoria clássica de campos**. Trabalho de graduação (física)-Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá. 2018.
- SUNDERMEYER, K. **Constrained dynamics**. Berlin: Springer, 1982.

APÊNDICE A – INVERSÃO DA SOMA

Queremos reorganizar o somatório (5.22) de modo que a soma nas derivadas que atuam no parâmetro ϵ^J dependam apenas de um índice. Se esse índice é definido como $s = p + r$ então $r = s - p$ e as seguintes condições devem ser satisfeitas

$$s - p \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

$$s - p \leq q. \quad (\text{A.2})$$

A primeira condição diz que $p \leq s$, entretanto também deve ser satisfeito $p \leq k$. Para que as duas condições sejam sempre satisfeitas p deve ser menor que o menor número entre s e k :

$$p \leq \text{menor}\{s, k\}. \quad (\text{A.3})$$

$s - p \leq q$ combinado com a condição $q \leq l$ implica em $p \geq s - l$, entretanto também deve ser satisfeito $p \geq 0$, logo p deve ser maior que o maior número entre $s - l$ e 0:

$$p \geq \{s - l, 0\}. \quad (\text{A.4})$$

Para a soma em q devemos ter $p \geq 0$ e $q \geq s - p$ ambas as condições são equivalentes pois $s - p \geq 0$ logo basta dizer que $p \geq s - p$, e o limite superior para q não muda, ainda devemos ter $q \leq l$. Combinando tudo isto a soma (5.22) pode ser rearranjada para

$$\sum_{s=0}^{k+l} \sum_{p=\text{maior}\{s-l, 0\}}^{\text{menor}\{s, k\}} \sum_{q=s-p}^l \binom{q}{s-p} \frac{\partial f^J}{\partial (\partial_{(q)} \phi^i)} \partial_{(q+p-s)} F_I^{i(p)} \partial_{(s)} \epsilon^J \quad (\text{A.5})$$

APÊNDICE B – EQUAÇÃO ADJUNTA

A equação adjunta para os ML é:

$$\begin{aligned}
 \hat{P}^I{}_J \lambda_I &= \sum_{s=0}^{k+l} (-1)^s \partial_s \left(\lambda_I M^{(s)I}{}_J \right) \\
 &= \sum_{s=0}^{k+l} (-1)^s \partial_s \left[\lambda_I \left(\sum_{p=\text{maior}\{s-l,0\}}^{\text{menor}\{s,k\}} \sum_{q=s-p}^l \binom{q}{s-p} \frac{\partial f^I}{\partial(\partial_{(q)}\phi^i)} \partial_{(q+p-s)} F_J^{i(p)} \right) \right] \\
 &= \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l \sum_{r=0}^q \binom{q}{r} (-1)^{p+r} \partial_{(p+r)} \left(\lambda_I \frac{\partial f^I}{\partial(\partial_{(q)}\phi^i)} \partial_{(q-r)} F_J^{i(p)} \right) \\
 &= \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l \sum_{r=0}^q \sum_{t=0}^r \binom{q}{r} \binom{r}{t} (-1)^{p+r} \partial_{(p)} \left[\partial_{(t)} \left(\lambda_I \frac{\partial f^I}{\partial(\partial_{(q)}\phi^i)} \right) \partial_{(q-t)} F_J^{i(p)} \right], \quad (\text{B.1})
 \end{aligned}$$

onde da segunda para a terceira linha retornamos aos índices iniciais antes de inserir $s = p + r$. É possível trocar a ordem das somas em r e t como segue

$$\sum_{r=0}^q \sum_{t=0}^r = \sum_{t=0}^q \sum_{r=t}^q, \quad (\text{B.2})$$

atentando também a identidade

$$\sum_{r=t}^q (-1)^r \binom{q}{r} \binom{r}{t} = (-1)^q \delta_{qt} \quad (\text{B.3})$$

podemos reescrever a expressão (B.1) como

$$\sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l (-1)^{p+q} \partial_{(p)} \left[\partial_{(q)} \left(\lambda_I \frac{\partial f^I}{\partial(\partial_{(q)}\phi^i)} \right) F_J^{i(p)} \right], \quad (\text{B.4})$$

ou seja a expressão (5.31) de fato é a equação adjunta para os ML.