

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA

KEVIN COHIM HEREDA DE FREITAS MARINHO

ANÁLISE INVERSA DE PROPRIEDADES DE AMORTECIMENTO DE VIGAS

São João da Boa Vista
2025

Kevin Cohim Hereda de Freitas Marinho

ANÁLISE INVERSA DE PROPRIEDADES DE AMORTECIMENTO DE VIGAS

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica do Campus de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Aeronáutica .

Orientador: Profº Dr. Murilo Sartorato

São João da Boa Vista
2025

M338a

Marinho, Kevin Cohim Hereda de Freitas

Análise inversa de propriedades de amortecimento de vigas / Kevin Cohim Hereda de Freitas Marinho. -- São João da Boa Vista, 2025
74 p. : tabs., fotos

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia Aeronáutica) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista

Orientador: Murilo Sartorato

1. Amortecimento (Mecânica). 2. Otimização robusta. 3. Dinâmica estrutural. 4. Resposta em frequência (Dinâmica). I. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ANÁLISE INVERSA DE PROPRIEDADES DE AMORTECIMENTO DE VIGAS

Aluno: Kevin Cohim Hereda de Freitas Marinho
Orientador: Prof. Dr. Murilo Sartorato

Banca Examinadora:

- Murilo Sartorato (Orientador)
- Carlos do Carmo Pagani Junior (Examinador)
- Éder Luiz Oliveira (Examinador)

Os formulários de avaliação e a ata da defesa, na qual consta a aprovação do trabalho, devidamente assinados pela banca encontram-se no prontuário eletrônico do aluno.

São João da Boa Vista, 28 de novembro de 2025

DADOS CURRICULARES

KEVIN COHIM HEREDA DE FREITAS MARINHO

NASCIMENTO 19/05/2003 - Boa Nova / BA

FILIAÇÃO Ary Celes Marinho
Aila Cohim Hereda de Freitas Marinho

2021 / 2025 Formação acadêmica ou Complementar
Bacharelado em Engenharia Aeronáutica
Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho"

À minha mãe, Aila Cohim H. de F. Marinho, ao meu pai, Ary Celes Marinho (in memoriam) e à minha irmã, Audrey Cohim H. de F. Marinho. O amor de vocês foi o alicerce desta conquista.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, expresso minha sincera gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Murilo Sartorato, pela confiança depositada em meu trabalho e pela orientação contínua. Agradeço por ter me auxiliado desde o início da graduação; sua mentoria foi, indubitavelmente, o alicerce para a concretização desta pesquisa.

Presto uma homenagem profunda à memória de meu pai, Ary Celes Marinho. Durante sua vida, ele foi o pilar em que sempre pude me apoiar, incentivando-me incansavelmente a buscar a minha melhor versão. Agradeço também à minha mãe, Aila Cohim Hereda de Freitas Marinho, que, além de todo o cuidado e amor, revelou-se uma mulher de força admirável. Mesmo diante da perda do ente mais importante de nossas vidas, ela ofereceu o suporte necessário para que eu seguisse com os meus estudos e projetos. À minha irmã, Audrey Cohim Hereda de Freitas Marinho, agradeço pela amizade, paciência e pelos conselhos que, com certeza, contribuíram para melhorar a minha visão de vida e por estarmos juntos superando cada desafio.

Dedico um agradecimento especial à minha namorada e parceira diária, Stephanie Bruno de Campos. Sua presença foi um refúgio tanto nos momentos de alegria quanto, e principalmente, nos períodos mais difíceis dos últimos anos. O seu apoio foi fundamental para que eu mantivesse o foco e a dedicação necessários a este trabalho.

Estendo minha gratidão a todos os amigos que fiz ao longo da graduação. A presença de vocês foi essencial no meu trajeto, contribuindo tanto para o meu crescimento acadêmico quanto para o meu desenvolvimento pessoal.

Por fim, agradeço à Universidade Estadual Paulista (UNESP), à Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas (ABCM) e ao programa com número de processo nº 2023/14176-5, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), cujo apoio financeiro e institucional viabilizou o desenvolvimento da presente pesquisa.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade(s):

FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo

ABCM - Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas

“Se você quiser descobrir os segredos do universo, pense em termos de energia, frequência e vibração.”
(Nikola Tesla)

RESUMO

O presente projeto de pesquisa teve como objetivo implementar uma metodologia de predição e cálculo inverso das propriedades dinâmicas de amortecimento de elementos estruturais de placa, utilizando dados obtidos experimentalmente, simulações numéricas das estruturas e algoritmos de otimização, além de métricas de correlação modal, temporal e em frequência. Os algoritmos foram implementados na linguagem Python, utilizando módulos pré-implementados da biblioteca SciPy para integração no tempo e análise em frequência, com base na extração de matrizes de massa e rigidez, realizadas em códigos do grupo de pesquisa por meio do Método dos Elementos Finitos. Esse método foi aplicado a vigas de Euler-Bernoulli torcionais, e simulações bidimensionais foram executadas no software comercial de elementos finitos ANSYS. Os resultados obtidos pela metodologia proposta foram validados com dados disponíveis na literatura e por meio de experimentos próprios.

PALAVRAS-CHAVE: amortecimento; análises vibracionais; otimização; análise inversa.

ABSTRACT

The present research project aimed to implement a methodology for the prediction and inverse calculation of the dynamic damping properties of plate structural elements, using data obtained experimentally, numerical simulations of the structures, and optimization algorithms, in addition to modal, time, and frequency correlation metrics. The algorithms were implemented in the Python language, employing pre-implemented modules from the SciPy library for time integration and frequency analysis, based on the extraction of mass and stiffness matrices developed by the research group through the Finite Element Method. This method was applied to torsional Euler–Bernoulli beams, and two-dimensional simulations were performed using the commercial finite element software ANSYS. The results obtained through the proposed methodology were validated with data available in the literature and through the group’s own experiments.

KEYWORDS: damping; vibration analysis; optimization; inverse analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Sistema contínuo de placa	25
Figura 2 – Metodologia	29
Figura 3 – Geometrias utilizadas inicialmente	30
Figura 4 – Geometrias complexas utilizadas.	31
Figura 5 – Experimentos	33
Figura 6 – Experimentos realizados na configuração livre-livre.	34
Figura 7 – Alumínio - Engastado-livre	35
Figura 8 – Pontas utilizadas no martelo de impacto	35
Figura 9 – Acelerômetro modelo ICP 352C33-H	36
Figura 10 – Software NI-DAQmx	37
Figura 11 – Alumínio - Engastado-Livre	37
Figura 12 – Fluxograma	38
Figura 13 – Alumínio - Engastado-Livre.	40
Figura 14 – Alumínio - Engastado-Livre.	43
Figura 15 – Alumínio - Engastado-Livre	46
Figura 16 – Alumínio - Engastado-Livre	46
Figura 17 – Aproximação de segunda ordem	48
Figura 18 – Desenvolvimento de uma Biblioteca de Análise Modal em Python	50
Figura 19 – Análises estruturais realizadas	51
Figura 20 – Geometria do elemento SHELL181	51
Figura 21 – Representação da malha elaborada	52
Figura 22 – Indicação do ponto de engaste e do centro de massa	52
Figura 23 – Ponto de aplicação da força	53
Figura 24 – Ponto de obtenção da resposta	53
Figura 25 – Resposta em frequência do Alumínio	54
Figura 26 – Resposta em frequência do Aço	54
Figura 27 – Resposta em frequência do Acrílico	54
Figura 28 – Alumínio - Engastado-engastado	58
Figura 29 – Alumínio - Engastado-livre	58
Figura 30 – Aço - Engastado-engastado	58
Figura 31 – Aço - Engastado-livre	59
Figura 32 – Acrílico - Engastado-engastado	59
Figura 33 – Acrílico - Engastado-livre	60
Figura 34 – Alumínio - Livre-Livre	63
Figura 35 – Aço - Livre-Livre	64
Figura 36 – Acrílico - Livre-Livre	64
Figura 37 – Fibra de Carbono - Livre-Livre	65

Figura 38 – Fibra de Vidro - Configuração 1 Livre-Livre	65
Figura 39 – Fibra de Vidro - Configuração 2 Livre-Livre	66
Figura 40 – Caverna em PLA - Livre-Livre	66
Figura 41 – Longarina em PLA - Configuração 1 Livre-Livre	67
Figura 42 – Longarina em PLA - Configuração 2 Livre-Livre	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dimensões do corpo de prova	30
Tabela 2 – Propriedades dos materiais do corpo de prova	31
Tabela 3 – Propriedades dos materiais do corpo de prova	32
Tabela 4 – Valores de amortecimento para determinadas C.I.	55
Tabela 5 – Valores de amortecimento para palpites iniciais de (1e-6 1e-6 1e-6 1e-6 1e-6 1e-6) em um caso escolhido de aço com condição de engaste-livre usando GA.	56

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANSYS	<i>Analysis System</i> (Software de simulação)
BDF	<i>Backward Differentiation Formula</i>
BFGS	Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
FC	Fibra de Carbono
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FRF	<i>Frequency Response Function</i>
FV	Fibra de Vidro
GA	<i>Genetic Algorithm</i>
GLD	Graus de Liberdade
HHT	Hilber-Hughes-Taylor
ICP	<i>Integrated Circuit Piezoelectric</i>
IEPE	<i>Integrated Electronics Piezo-Electric</i>
L-BFGS-B	<i>Limited-memory BFGS</i> (Otimização com restrições)
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
PLA	<i>Polylactic Acid</i> (Poliácido Láctico)
RK	Runge-Kutta
RVAC	<i>Response Vector Assurance Criterion</i>
TSAC	<i>Time Series Assurance Criterion</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal
B	Matriz de derivadas das funções de forma
C	Matriz de amortecimento
E	Módulo de Elasticidade (Young)
f	Vetor de forças externas
G	Módulo de Cisalhamento
I_{yy}, I_{zz}	Momentos de inércia de área
J	Momento torcional
K	Matriz de rigidez
L	Comprimento da viga/elemento
M	Matriz de massa
N	Funções de forma (<i>Shape functions</i>)
t	Tempo
u, v, w	Deslocamentos translacionais
$x, \dot{x}, \ddot{x}$	Vetores de deslocamento, velocidade e aceleração
α, β	Coefficientes de Rayleigh
δ	Decremento logarítmico
ϵ	Deformação normal
γ	Deformação de cisalhamento
ν	Coefficiente de Poisson
ω_n	Frequência natural
ϕ	Forma modal ou ângulo de rotação
ψ, θ	Rotações nodais
ρ	Densidade do material
σ	Tensão normal

τ	Tensão de cisalhamento
ζ	Razão de amortecimento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	OBJETIVOS	21
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	22
3.1	Revisão da Literatura	22
3.2	MODELO LINEAR DINÂMICO EM ESPAÇO DE ESTADOS	23
3.2.1	Modelo de elementos finitos de Euler-Bernoulli com correção de Saint-Venant	24
3.2.2	Modelos de amortecimento	27
3.2.2.1	Rayleigh	27
3.2.2.2	Modal	28
3.2.2.3	Amortecimento por decremento logarítmico	28
4	METODOLOGIA	29
4.1	CONFIGURAÇÕES EXPERIMENTAIS E CORPOS DE PROVA	29
4.1.1	Engastado-livre e engastado-engastado	29
4.1.1.1	Geometrias	29
4.1.2	Livre-livre	30
4.1.2.1	Geometrias	31
4.1.3	Propriedades	31
4.2	EXPERIMENTOS	32
4.2.1	Procedimento experimental: aquisição de dados na configuração engastado-livre da viga de alumínio	34
4.2.1.1	Instrumentação e configuração do sistema	35
4.2.1.2	Resultados da aquisição	37
4.3	ANÁLISES NUMÉRICAS E PÓS-PROCESSAMENTO	38
4.3.1	Análises numéricas	38
4.3.1.1	Escolha e justificativa dos métodos de integração numérica	38
4.3.1.2	Exemplo de aplicação numérica	39
4.3.2	Tratamento de dados	40
4.3.2.1	Pós-processamento e filtragem de dados experimentais	40
4.3.2.2	Análise das funções de resposta em frequência	43
4.3.3	Decremento logarítmico	43
4.3.3.1	Cálculo do amortecimento via decremento logarítmico	44
4.3.3.2	Exemplo	45
4.3.4	Modal	47
4.3.4.1	Separação de picos para o cálculo modal	47
4.3.4.2	Exemplo de regiões e aproximação de segunda ordem	48

4.4	OTIMIZAÇÃO	49
4.5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	50
4.5.1	Resultados - simulação em ANSYS	50
4.5.1.1	Discretização da malha	51
4.5.1.2	Condição de contorno e pontos de análise	52
4.5.1.3	Respostas em frequência obtidas	53
4.5.2	Resultados - primeira montagem experimental	55
4.5.2.1	Abordagem inicial: otimização baseada em gradiente (L-BFGS-B)	55
4.5.2.2	Segunda abordagem: otimização com algoritmo genético (GA)	56
4.5.2.3	Análise gráfica das respostas dinâmicas e em frequência	56
4.5.2.4	Limitações dos métodos de otimização e observações gerais	60
4.5.3	Resultados - segunda montagem experimental	61
4.5.3.1	Análise das respostas dinâmicas e em frequência por material	61
5	CONCLUSÃO	68
	REFERÊNCIAS	69
	APÊNDICE A – DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA EM FORMATO DE BARRA RETANGULAR	72
	APÊNDICE B – DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA DE FIBRA DE CARBONO	73
	APÊNDICE C – DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA DE FIBRA DE VIDRO	74
	APÊNDICE D – DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA DE CAVERNA IMPRESSA EM PLA	75
	APÊNDICE E – DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA DE LONGARINA IMPRESSA EM PLA	76

1 INTRODUÇÃO

O avanço dos meios de transporte foi acelerado no início do século XVIII com a primeira Revolução Industrial e o desenvolvimento da máquina a vapor. Essas descobertas culminaram no surgimento das ferrovias: apesar da velocidade e da capacidade de carga das estradas de ferro, surgiram problemas relacionados à sua implementação, como a baixa flexibilidade, os custos de manutenção e o impacto ambiental (Waters, 2007).

A indústria aeronáutica se desenvolveu um século depois e enfrentou diversos desafios, especialmente devido à pressão social por aeronaves mais leves, seguras e passagens aéreas acessíveis (Florio, 2016). Além dos impactos econômicos diretos e indiretos relacionados a atrasos e cancelamentos de voos, há uma pressão internacional para reduzir o impacto ambiental causado pela indústria aeronáutica (Dale, 2016; IATA, 2017; Pippo, 2017).

Além disso, desde sua concepção a indústria aeronáutica, assim como outras áreas que envolvem estruturas leves, como as indústrias aeroespacial, naval, ferroviária e petrolífera, enfrenta grandes desafios na realização de projetos estruturais. A necessidade de elevados níveis de segurança, redundância, robustez e leveza impõe desafios significativos na concepção e execução dos projetos (Niu, 1997; Jr., 2002; Wright; Cooper, 2014). Ademais, a introdução de soluções modernas para a otimização de estruturas leves em relação a esses requisitos, como a utilização de materiais avançados – ligas metálicas não ferrosas de alta performance (Dursun; Soutis, 2014), ligas metálicas vítreas (Qiao *et al.*, 2019), ligas metálicas de alta entropia (Li *et al.*, 2019), materiais compósitos avançados com rigidez axial variável (Sohouli; Yildiz; Suleman, 2019) e materiais inteligentes (González *et al.*, 2017) – e a otimização da geometria das estruturas torna o problema ainda mais complexo.

Dentro desse contexto, a análise das características dinâmicas de elementos estruturais representa um desafio em diversas áreas da academia e da indústria. Em particular, os elementos estruturais utilizados em indústrias que buscam peso reduzido como requisito de projeto, como a aeroespacial e a aeronáutica, dificultam a obtenção e previsão das características de amortecimento, mesmo por meio de resultados experimentais. Isso se torna especialmente relevante ao considerar os efeitos de interação fluido-estrutura, como divergência, *buffeting* e *flutter* (Wright; Cooper, 2014). Esse fenômeno ocorre devido à baixa espessura dos elementos primários, como vigas e placas, e à utilização de montagens complexas que empregam materiais com características não lineares, como adesivos viscoelásticos em juntas coladas ou juntas cravadas, nas quais as forças de contato são particularmente difíceis de prever (Gudmundsson, 2016).

Análises inversas por meio de algoritmos de otimização consistem em um conjunto de técnicas que permitem obter resultados quantitativos das constantes de amortecimento para diferentes modelos, utilizando a minimização de funções de correlação entre respostas numéricas simuladas e respostas experimentais. Existem diversas métricas de correlação, algumas derivadas da teoria de processamento digital de sinais. Particularmente na área de vibrações, as correlações de significância (do inglês, *assurance correlations* ou *assurance criteriums*) são empregadas para identificar as diferenças entre os resultados numéricos obtidos em simulações e os resultados experimentais. Essas correlações

conectam as respostas numéricas e experimentais por meio da convolução das respostas obtidas pelos dois métodos.

Dessa forma, o presente trabalho introduz técnicas clássicas de simulação numérica de vibrações em corpos contínuos utilizando o Método dos Elementos Finitos. Essas técnicas são combinadas com ensaio modal, além de métricas de correlação, com o objetivo de desenvolver uma metodologia para a obtenção de amortecimento estrutural por meio de análises inversas. As formulações foram utilizadas em conjunto com formulações dinâmicas clássicas, na forma de espaço de estados, incorporando algoritmos de integração numérica e de passo no tempo, utilizando bibliotecas pré-implementadas em Python | SciPy (Virtanen *et al.*, 2020).

Este trabalho insere-se em um projeto mais amplo, no qual as ferramentas desenvolvidas foram utilizadas para criar populações que servirão como dados de entrada para o treinamento de redes neurais artificiais e/ou redes de aprendizado profundo. O objetivo é identificar parâmetros de amortecimento com base em séries temporais e respostas em frequência de estruturas que apresentam comportamento dinâmico não linear, em decorrência de contato e/ou viscoelasticidade.

2 OBJETIVOS

O presente projeto de pesquisa tem como objetivos principais capacitar os alunos na introdução ao método científico e à pesquisa na área de estruturas aeronáuticas, por meio da simulação dinâmica e da realização de experimentos de vibração. Para isso, são estabelecidos objetivos específicos relacionados à execução de experimentos de vibração, ao pós-processamento dos dados, à implementação de códigos de simulação da resposta dinâmica de elementos estruturais por meio do Método dos Elementos Finitos e à aplicação de algoritmos de integração no domínio do tempo, bem como à análise nos domínios modal e de frequência. Além disso, busca-se a utilização desses métodos em conjunto com algoritmos de otimização e análise inversa para a obtenção experimental do amortecimento estrutural. Portanto, traçados os seguintes objetivos específicos:

1. Realizar experimentos de vibração em corpos de prova de placa de diferentes materiais, geometrias e condições de contorno;
2. Modelar dinamicamente as estruturas realizadas nos experimentos através do Método dos Elementos Finitos e de algoritmos de passo no tempo do tipo Runge-Kutta, BDF e HHT em linguagem Python utilizando métodos pré-implementados na biblioteca matemático-científica SciPy;
3. Familiarizar o aluno ao software ANSYS para obtenção de parâmetros de massa e rigidez de elementos estruturais de placa para aplicação nos modelos;
4. Comparar os resultados experimentais e numéricos obtidos pelos diferentes métodos;
5. Implementar códigos de análise inversa de amortecimento para diferentes modelos de clássicos de amortecimento como Rayleigh, estrutural e modal, utilizando os dados obtidos das análises anteriores e da literatura para obtenção de parâmetros dinâmicos.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esta seção abordará de forma sucinta uma revisão bibliográfica e fundamentação teórica consistentes sobre o assunto da pesquisa.

3.1 REVISÃO DA LITERATURA

A previsão do amortecimento em vigas permanece como um dos desafios fundamentais da dinâmica estrutural e figura entre os fenômenos menos compreendidos na análise de vibrações (Arora, 2014). Nas formulações clássicas de Euler-Bernoulli, Timoshenko, Rayleigh e Ordem Superior, empregada para modelar a flexão de vigas, o amortecimento não está inerentemente contemplado pela teoria e, por isso, costuma ser introduzido por meio de modelos empíricos, como o amortecimento viscoso ou o histerético (Wang *et al.*, 2025). No entanto, as hipóteses simplificadoras inerentes ao modelo de Euler Bernoulli, que desprezam a deformação por cisalhamento e a inércia rotacional, acabam por restringir sua precisão em aplicações envolvendo altas frequências ou materiais de comportamento mais complexo.

As correções de Saint Venant configuram-se, então, como refinamentos capazes de incorporar esses efeitos negligenciados pela teoria elementar, ampliando a fidelidade preditiva do modelo. Na prática, tal refinamento pode exigir a inclusão de amortecimento por cisalhamento ou de mecanismos dissipativos não convencionais, sobretudo em regimes de vibração de elevada frequência ou na caracterização de materiais com resposta viscoelástica pronunciada (Wang *et al.*, 2025). Recentemente, muitos pesquisadores têm recorrido a teorias de viga aprimoradas, como a formulação de Timoshenko, ou calibrado modelos de Euler Bernoulli mediante parâmetros corretivos extraídos de dados experimentais.

Nos últimos dez a quinze anos, diversos métodos inversos baseados em otimização foram desenvolvidos com o objetivo de identificar quantitativamente as propriedades de amortecimento em vigas (Adnan; Mohamed; Zairi, 2020; Frandsen; Sæbø, 2019). Essas abordagens computacionais utilizam medições de vibração, por exemplo, funções de resposta em frequência (Maia; Silva, 2014) ou razões de decaimento modal (Ewins, 2000), para atualizar iterativamente um modelo numérico, de modo que sua resposta simulada se aproxime dos resultados experimentais (Reynders; Roeck, 2008). A formulação inversa geralmente assume a forma de um problema de otimização, resolvido por meio de algoritmos de gradiente (Natke; Yao, 1998), procedimentos de mínimos quadrados iterativos (Zhang; Chen, 2010) ou métodos heurísticos (Kaveh, 2014), cujo propósito é minimizar a discrepância entre respostas medidas e computadas.

Como resultado, obtêm-se estimativas detalhadas das características de amortecimento, tais como matrizes de amortecimento proporcionais ou parâmetros distribuídos ao longo da viga, que explicam de maneira mais fidedigna o comportamento dinâmico observado (Wu *et al.*, 2020). A validação desses métodos em escala laboratorial é particularmente relevante: numerosos estudos aplicam suas técnicas a vigas ou protótipos de bancada no contexto de monitoramento da saúde estrutural e controle de vibrações, assegurando que os parâmetros identificados correspondam aos mecanismos físicos reais de dissipação de energia.

Dados todos esses estudos, o presente trabalho concentra-se na estimativa de amortecimento em diferentes configurações estruturais em laboratório, combinando algoritmos de otimização e modelos simples de elementos finitos para vigas. Utiliza-se a teoria de Euler-Bernoulli, melhorada com correções de Saint-Venant, para representar tanto a rigidez quanto os mecanismos dissipativos. Em ensaios vibratórios controlados, são obtidas funções de resposta em frequência e taxas de decaimento modal, que servem de referência para o ajuste iterativo dos parâmetros de amortecimento no modelo.

O procedimento inverso consiste em minimizar a diferença entre as respostas medidas e simuladas, sem necessidade de instrumentação invasiva, o que torna o método prático e de baixo custo, e viabiliza a obtenção de quantidades internas ou propriedades que não são diretamente mensuráveis por ensaios convencionais. Ao final, pretende-se avaliar a capacidade da abordagem em capturar diversos tipos de amortecimento, desde viscoso até histerético ou por cisalhamento interno.

3.2 MODELO LINEAR DINÂMICO EM ESPAÇO DE ESTADOS

Na presente pesquisa, iniciou-se o estudo pelos modelos dinâmicos mais simples, partindo de sistemas massa–mola com um grau de liberdade até configurações com N graus de liberdade. Essa abordagem teve como objetivo consolidar a compreensão do comportamento dinâmico desses sistemas discretos. Além disso, compreender a formulação e a solução das equações diferenciais por meio da representação em espaço de estados foi fundamental para o desenvolvimento da pesquisa. Essa etapa inicial forneceu uma base conceitual e computacional sólida para a transição ao estudo de sistemas contínuos. Embora o objeto físico analisado experimentalmente seja uma placa, neste estágio optou-se por modelá-la inicialmente como uma viga, simplificando o problema sem perder as características essenciais do comportamento dinâmico. Essa simplificação permite compreender gradualmente os efeitos do amortecimento e a estrutura das equações diferenciais parciais envolvidas, preparando o caminho para análises futuras mais completas com modelos de placa propriamente ditos.

Dessa forma, a equação de movimento de segunda ordem que descreve o comportamento dinâmico de um sistema vibratório com múltiplos graus de liberdade, $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f$, pode ser convenientemente reformulada no espaço de estados. Essa abordagem é particularmente vantajosa por transformar um sistema de equações diferenciais de segunda ordem em um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, que é a representação padrão para a análise e controle de sistemas dinâmicos.

A formulação no espaço de estados fornece uma base unificada e poderosa para descrever o comportamento de sistemas lineares e invariantes no tempo de natureza arbitrária, não se limitando apenas a problemas mecânicos. Ela é amplamente utilizada em diversas áreas da engenharia, pois facilita a aplicação de técnicas numéricas de integração, a análise de estabilidade e o projeto de controladores. Para sistemas vibratórios, essa representação permite uma compreensão mais profunda da dinâmica interna e é a forma preferida para a implementação em simulações computacionais e para a aplicação de ferramentas da teoria de controle, como detalhado em obras fundamentais sobre o tema, a exemplo de (Rao, 2009):

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1}F \end{Bmatrix} \quad (1)$$

3.2.1 Modelo de elementos finitos de Euler-Bernoulli com correção de Saint-Venant

No caso de estruturas de viga, diferentes modelos e hipóteses cinemáticas podem ser utilizados. Para uma viga flexo-torcional, as hipóteses mais comuns são as de Euler-Bernoulli e Saint-Venant (Hughes, 2000).

$$\begin{cases} \bar{u} = u - y\psi + z\theta \\ \bar{v} = v - z\phi \\ \bar{w} = w + y\phi \\ \psi = v_{,x} \\ \theta = -w_{,x} \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \bar{u}_{,x} = u_{,x} - y\psi_{,x} + z\theta_{,x} \\ \varepsilon_y = \bar{v}_{,y} = 0 \\ \varepsilon_z = \bar{w}_{,z} = 0 \\ \gamma_{xy} = \bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x} = -\psi + v_{,x} - z\psi_{,x} = -z\psi_{,x} \\ \gamma_{xz} = \bar{u}_{,z} + \bar{w}_{,x} = \theta - w_{,x} + y\psi_{,x} = y\psi_{,x} \\ \gamma_{yz} = \bar{v}_{,z} + \bar{w}_{,y} = -\psi + \psi = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Dessa forma, podemos expressar o Princípio da Estacionariedade para a viga da seguinte maneira:

$$\delta\Pi = \delta\mathcal{U} + \delta\mathcal{K} + \delta\mathcal{P} = \int_{\Omega} \sigma_x \delta\varepsilon_x + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz} dV + \int_{\Omega} \rho(\ddot{u}\delta\bar{u} + \ddot{v}\delta\bar{v} + \ddot{w}\delta\bar{w})dV - [N\delta u]_0^L - [M_y\psi + M_z\theta]_0^L - [T\psi]_0^L = 0 \quad (3)$$

O funcional $\delta\Pi$ é composto pela variação da energia de deformação $\delta\mathcal{U}$, que quantifica o trabalho virtual das tensões internas sobre as variações das deformações no volume do corpo; pela variação da energia cinética $\delta\mathcal{K}$, que representa o trabalho virtual das forças de inércia sobre as variações dos deslocamentos no volume e pela variação do trabalho virtual das forças externas $\delta\mathcal{P}$, que engloba o trabalho realizado por cargas aplicadas e condições de contorno. Assim, o princípio expressa o equilíbrio dinâmico do sistema ao afirmar que a soma desses trabalhos virtuais, devidos a forças internas, inerciais e externas, deve ser nula.

Para um material homogêneo:

$$\int_{\Omega} E\varepsilon_x \delta\varepsilon_x + G\gamma_{xy} \delta\gamma_{xy} + G\gamma_{xz} \delta\gamma_{xz} dV + \rho \int_{\Omega} \ddot{u}\delta\bar{u} + \ddot{v}\delta\bar{v} + \ddot{w}\delta\bar{w} dV - [N\delta u]_0^L - [M_y\psi + M_z\theta]_0^L - [T\psi]_0^L = 0 \quad (4)$$

Aplicando as hipóteses cinemáticas:

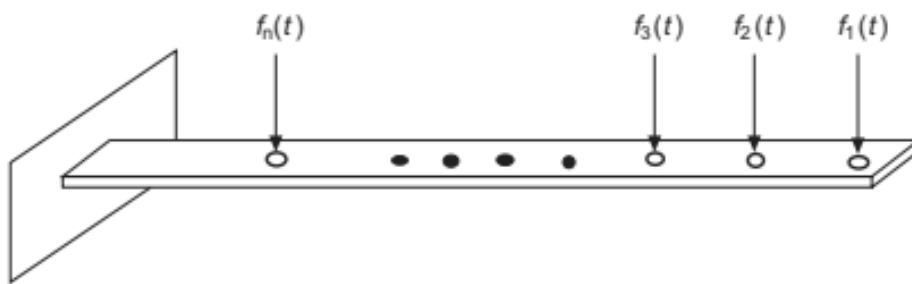
$$\begin{aligned}
& E \int_{\Omega} (u_{,x} - y\psi_{,x} + z\theta_{,x})(\delta u_{,x} - y\delta\psi_{,x} + z\delta\theta_{,x})dV + G \int_{\Omega} (z^2 + y^2)\psi_{,x}\delta\psi_{,x}dV \\
& + \rho \int_{\Omega} (u - y\psi + z\theta)(\delta u - y\delta\psi + z\delta\theta) + (v - z\phi)(v - z\phi) + (w + y\phi)(\delta w + y\delta\phi)dV - \\
& [N\delta u]_0^L - [M_y\psi + M_z\theta]_0^L - [T\psi]_0^L = 0 \quad (5)
\end{aligned}$$

Utilizando uma seção transversal simétrica e aplicando as definições de área (A), segundos momentos de área (I_{yy} , I_{zz}) e momento torcional ($J = I_{yy} + I_{zz}$), obtemos:

$$\begin{aligned}
& EA \int_0^L \delta u' u' dx + EI_{zz} \int_0^L \delta v'' v'' dx + EI_{yy} \int_0^L \delta w'' w'' d\Omega + GJ \int_0^L \delta u' u' dx + \\
& \rho A \int_0^L \delta u \ddot{u} dx + \rho I_{zz} \int_0^L \delta v' \ddot{v}' dx + \rho I_{yy} \int_0^L \delta w' \ddot{w}' dx - \\
& [N\delta u]_0^L - [M_y\psi + M_z\theta]_0^L - [T\psi]_0^L = 0 \quad (6)
\end{aligned}$$

A solução dessas equações diferenciais pode ser realizada por meio de diferentes métodos, sendo os dois mais comuns o Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos Finitos. No primeiro método, definem-se diversas posições que foram sujeitas a forças externas. Os pontos seleccionados ao longo do comprimento do corpo contínuo, conforme a 1, são interpretados como elementos inerciais. Dessa forma, essas massas podem ser consideradas acopladas por molas. No segundo método, o corpo é discretizado em pontos onde se requer a solução exata, formando subdomínios denominados elementos, nos quais a solução é imposta por um conjunto de funções linearmente independentes que satisfazem as condições de Dirichlet da equação, conhecidas como funções de forma.

Figura 1 – Sistema contínuo de placa



Fonte: He & Fu - Modal Analysis, 2023.

Segue uma formulação sucinta de um elemento finito C1 linear que atende às hipóteses de Euler-Bernoulli e Saint-Venant. Utilizando as equações previamente descritas para as matrizes de massa e rigidez, juntamente com as funções de forma e a discretização a seguir, considerando $\bar{U}$ os deslocamentos e rotações nodais de um elemento com nós a e b conforme a equação 8, obtemos:

$$N^n(x, L) = \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{array} \right\}, \quad N^b(x, L) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \end{array} \right\} \quad (7)$$

$$\bar{U} = \left\{ u_a \quad v_a \quad w_a \quad \psi_a \quad \theta_a \quad \phi_a \quad u_b \quad v_b \quad w_b \quad \psi_b \quad \theta_b \quad \phi_b \right\}^T \quad (8)$$

$$N(x, L) = \left[\begin{array}{cccccccccccc} N_1^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^b & 0 & N_3^b & 0 & 0 & 0 & N_2^b & 0 & N_4^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1^b & 0 & N_3^b & 0 & 0 & 0 & N_2^b & 0 & N_4^b & 0 \\ 0 & N_{1,x}^b & 0 & N_{3,x}^b & 0 & 0 & 0 & N_{2,x}^b & 0 & N_{4,x}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,x}^b & 0 & N_{3,x}^b & 0 & 0 & 0 & N_{2,x}^b & 0 & N_{4,x}^b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^n \end{array} \right] \quad (9)$$

$$B_n = \left[\begin{array}{cccccccccccc} N_{1,x}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2,x}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (10)$$

$$B_{b_y} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & N_{1,xx}^b & 0 & N_{3,xx}^b & 0 & 0 & 0 & N_{2,xx}^b & 0 & N_{4,xx}^b & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (11)$$

$$B_{b_z} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & N_{1,xx}^b & 0 & N_{3,xx}^b & 0 & 0 & 0 & N_{2,xx}^b & 0 & N_{4,xx}^b & 0 \end{array} \right] \quad (12)$$

$$B_s = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,x}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2,x}^n \end{array} \right] \quad (13)$$

$$u = \left\{ u \quad v \quad w \quad \psi \quad \theta \quad \phi \right\}^T \quad (14)$$

$$u = N(x, L)\bar{U} \quad (15)$$

$$\varepsilon_x = (B_n + zB_{b_y} + yB_{b_z})\bar{U} \quad (16)$$

$$\gamma_{xy} = -zB_s\bar{U} \quad (17)$$

$$\gamma_{xz} = +yB_s\bar{U} \quad (18)$$

Utilizando todas essas definições, juntamente com a equação 6 de equilíbrio variacional, podemos definir as matrizes de rigidez K , massa M e o vetor de forças f :

$$K = EA \int_0^L B_n^T B_n dx + EI_{yy} \int_0^L B_{b_y}^T B_{b_y} dx + EI_{zz} \int_0^L B_{b_z}^T B_{b_z} dx + GJ \int_0^L B_s^T B_s dx \quad (19)$$

$$M = \rho A \int_0^L N^T N dx \quad (20)$$

$$f^T = \left\{ \begin{array}{cccccccccc} N(0) & V_y(0) & M_z(0) & V_z(0) & -M_y(0) & T(0) & N(L) & V_y(L) & M_z(L) & V_z(L) \\ -M_y(L) & T(L) & & & & & & & & \end{array} \right\} \quad (21)$$

Dessa forma, utilizando quadraturas de Gauss ou a solução analítica dessas equações, podemos estabelecer um espaço de estados discretizado para um corpo contínuo, no qual os estados x e $\dot{x}$ referem-se aos deslocamentos e velocidades dos nós, conforme a equação 1.

Para encontrar as soluções das funções de espaço de estado ao longo do tempo, são necessários algoritmos de integração temporal. Neste trabalho, foram testados e comparados três métodos: Runge-Kutta (RK) de quarta ordem, a fórmula de *backward differentiation* (BDF) (Iserles, 1996; Ascher; Petzold, 1998; Asher; Petzold, 1998; Süli; Mayers, 2003) e o método de Hilber-Hughes-Taylor (HHT) (Negruț *et al.*, 2006), a forma que esses métodos foram implementados na análise numérica, encontram-se em (Craig; Kurdila, 2006).

3.2.2 Modelos de amortecimento

A modelagem adequada do amortecimento estrutural é um fator essencial na previsão precisa da resposta dinâmica de estruturas como vigas e placas. Na presente pesquisa, diversos modelos de amortecimento foram estudados, com o objetivo de comparar suas formulações, identificar suas limitações e selecionar aqueles mais adequados para implementação em métodos inversos baseados em dados experimentais. A seguir, apresenta-se uma descrição dos principais modelos de amortecimento utilizados na literatura e aplicáveis ao escopo desta pesquisa.

3.2.2.1 Rayleigh

O modelo de Rayleigh assume que a matriz de amortecimento C pode ser expressa como uma combinação linear das matrizes de massa M e rigidez K .

Em que, α e β são coeficiente escalares constantes. Em termos das frequências naturais ω_r , isso implica razões de amortecimento modais ζ_r da forma representado na Equação 22.

$$\zeta_r = \frac{1}{2\omega_r} (\alpha + \beta\omega_r^2) \quad (22)$$

Na prática, escolhe-se α e β para ajustar dois valores de ζ em duas frequências de interesse. Esse modelo é amplamente utilizado por sua simplicidade e por garantir a proporcionalidade modal, ou seja, cada modo de vibração permanece desacoplado dos demais. No entanto, como evidenciado em (Nakamura, 2016; Arora, 2014), esse modelo tende a superestimar o amortecimento em modos de alta

frequência e não é adequado quando há distribuição não uniforme de amortecedores na estrutura. Na presente pesquisa, o modelo de Rayleigh foi adotado como referência inicial para testes de identificação e comparação com métodos mais gerais.

3.2.2.2 Modal

O amortecimento modal assume que cada modo vibracional de um sistema possui sua própria razão de amortecimento ζ_r , sem prescrever a forma explícita de C . No âmbito matemático isso equivale a assumir que no espaço modal, coordenadas transformadas pelas formas modais ϕ , a matriz de amortecimento obtida é diagonal. Essa característica permite que cada equação de movimento modal se desacople das demais, significando que cada modo vibracional de um sistema de múltiplos graus de liberdade pode ser convenientemente modelado por um sistema simples de massa-mola-amortecedor de um único grau de liberdade, (Craig; Kurdila, 2006; Ewins, 2000), conforme a Equação 23:

Com elementos $\tilde{c}_{ii} = 2\zeta_i\omega_i m_i$, assim cada equação modal desacopla-se, do tipo:

$$m_i\ddot{x}_i + 2\zeta_i\omega_i m_i\dot{x}_i + k_i x_i = f_i(t) \quad (23)$$

Sem interações entre os modos. Essa abordagem é amplamente utilizada na prática experimental, pois as razões de amortecimento podem ser extraídas de dados medidos, como picos em FRFs ou sinais temporais. Sua principal vantagem é a simplicidade conceitual e numérica. No entanto, o modelo assume proporcionalidade modal e modos reais, sendo inaplicável às estruturas com forte acoplamento modal ou amortecimento não proporcional.

No contexto da pesquisa, as razões modais de amortecimento obtidas por ajuste de FRFs e decremento logarítmico são utilizadas como referência para avaliar a qualidade das matrizes de amortecimento estimadas via métodos inversos.

3.2.2.3 Amortecimento por decremento logarítmico

O método do decremento logarítmico não constitui um modelo físico, mas sim uma técnica amplamente usada para estimar amortecimento modal a partir de sinais de resposta livre. Para um sistema subamortecido, a razão de amortecimento ζ pode ser estimada a partir do decaimento exponencial da resposta:

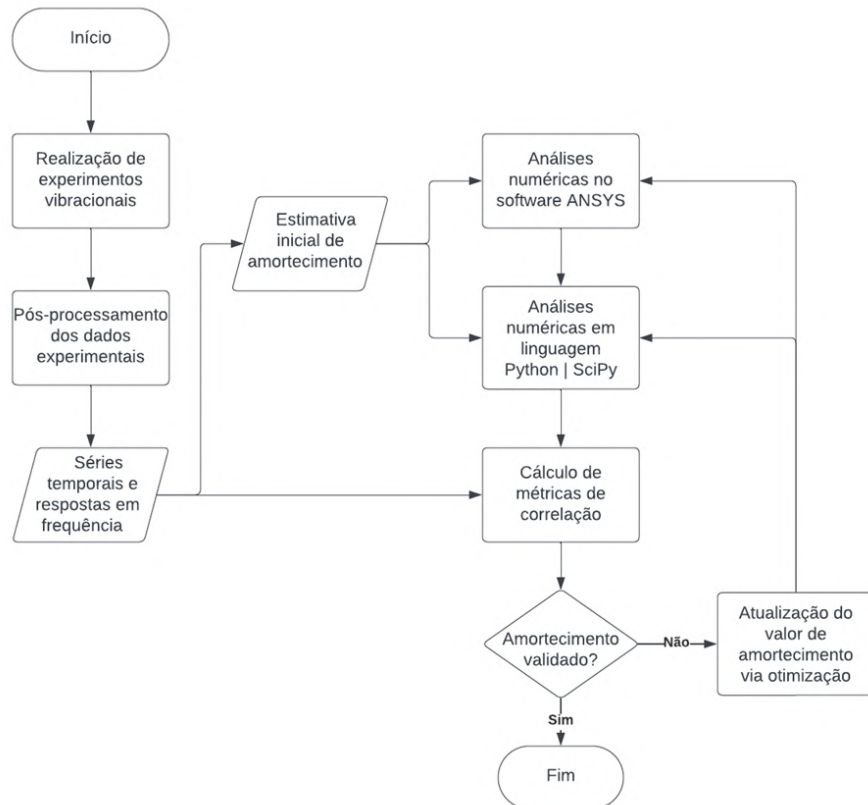
$$\zeta \approx \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}, \quad \text{onde} \quad \delta = \ln \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} \right) \quad (24)$$

Essa técnica é simples, robusta e eficiente quando a resposta medida é dominada por um único modo. No entanto, sua precisão diminui em sistemas com modos próximos, ruído elevado ou resposta multi-modal. Ainda assim, é amplamente empregada em ensaios de vibração de vigas para obter estimativas iniciais de ζ_i , sendo utilizada nesta pesquisa para validação dos resultados experimentais.

4 METODOLOGIA

Esta seção abordará de forma sucinta os materiais, a metodologia e os modelos matemáticos utilizados nas atividades experimentais, assim como o pós-processamento das respostas obtidas de forma experimental e numérica. A 2 apresenta um fluxograma dos procedimentos realizados durante a pesquisa.

Figura 2 – Metodologia



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1 CONFIGURAÇÕES EXPERIMENTAIS E CORPOS DE PROVA

Esta seção detalha as configurações experimentais e os corpos de prova utilizados, apresentando a metodologia aplicada nas práticas experimentais e nas análises numéricas.

4.1.1 Engastado-livre e engastado-engastado

Para a realização dos experimentos para as primeiras geometrias, utilizou-se duas configurações de contorno distintas: engastado-livre e engastado-engastado.

4.1.1.1 Geometrias

Na 3 estão representadas as geometrias utilizadas nesse estudos de caso.

Figura 3 – Geometrias utilizadas inicialmente



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além do mais, no Apêndice A são apresentados desenhos esquemáticos que indicam as dimensões dos corpos de prova, a posição dos acelerômetros e as forças de impacto. Nessas figuras, os hexágonos ou adaptadores em formato de anel, representam os adaptadores para os acelerômetros, com seus centros identificados. Quando não foi possível indicar diretamente os adaptadores, círculos azuis são utilizados. As cruzes vermelhas indicam os pontos de impacto, geralmente aplicados no centro dos corpos de prova.

Com o intuito de facilitar a compreensão e a replicabilidade, as dimensões das geometrias empregadas nos ensaios e simulações numéricas são fornecidas na Tabela 1.

Tabela 1 – Dimensões do corpo de prova

Material	a [mm]	b [mm]	c [mm]	d [mm]	e [mm]	f [mm]
Aço	314.0	150.0	51.0	23.7	26.7	2.90
Alumínio	304.0	150.0	50.8	23.8	25.85	3.20
Acrílico	301.0	150.0	49.4	22.6	25.6	3.00

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1.2 Livre-livre

A configuração de contorno livre-livre foi adotada no presente estudo devido às inconsistências observadas nos dados experimentais obtidos com arranjos engastado-livre e engastado-engastado. As fixações rígidas, embora teoricamente ideais, mostraram-se suscetíveis a imperfeições na prática, resultando em condições de contorno parcialmente soltas ou assimétricas. Tais falhas alteravam a rigidez local e deslocavam as frequências naturais, levando a uma significativa contaminação modal e à excitação de modos não previstos ou altamente amortecidos.

Conforme relatado em estudos como (Pan; Wang, 2015), pequenas imperfeições nas condições de contorno podem comprometer severamente a identificação modal e a estimativa de parâmetros estruturais, como o amortecimento. Dessa forma, a adoção da configuração livre-livre visou mitigar essas fontes de erro, permitindo a obtenção de respostas dinâmicas mais limpas e representativas do sistema estrutural idealizado, o que é fundamental para a calibração do modelo numérico e a identificação inversa precisa dos parâmetros de amortecimento.

4.1.2.1 Geometrias

Adicionalmente aos corpos de prova empregados na fase inicial dos experimentos, as geometrias apresentadas na 4 foram também investigadas na configuração experimental livre-livre.

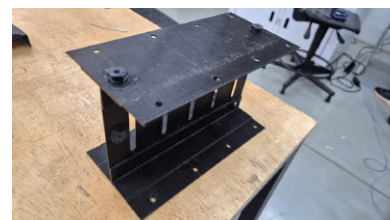
Figura 4 – Geometrias complexas utilizadas.



(a) Caverna em PLA - Vista 1



(b) Caverna em PLA - Vista 2



(c) Longarina em PLA - 3D



(d) Longarina PLA - Lateral



(e) FC e FV

Fonte: Elaborado pelo autor.

Analogamente às representações esquemáticas das configurações anteriores, os Apêndices B,C, D e E apresentam as dimensões das novas geometrias investigadas na configuração experimental livre-livre.

4.1.3 Propriedades

Com a introdução da condição de contorno livre-livre, a variedade de corpos de prova foi ampliada com a inclusão de vigas de fibra de carbono, fibra de vidro e PLA. Essa diversidade de materiais e geometrias foi empregada para avaliar a influência de distintas combinações de rigidez, massa e distribuição geométrica na resposta dinâmica. Os corpos de prova em fibra de carbono e fibra de vidro consistiram em geometrias mais estreitas e leves, contribuindo para frequências naturais elevadas. O PLA, por sua vez, foi utilizado em duas configurações distintas, uma tipo longarina (mais esbelta e flexível) e outra tipo caverna (mais robusta e espessa), fabricadas via manufatura aditiva. As propriedades mecânicas detalhadas de cada material, são apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Propriedades dos materiais do corpo de prova

Material	E [GPa]	ν	$\rho[kg/m^3]$
Aço	200.0	0.30	7840.0
Alumínio	71.0	0.33	2710.0
Acrílico	20.0	0.25	2000.0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ademais, foram analisados corpos de prova sob condição de contorno livre-livre, incluindo materiais previamente utilizados (aço, alumínio e acrílico) e expandindo a variedade com fibra de carbono, fibra de vidro e PLA. Essa diversidade de materiais e geometrias foi empregada para avaliar a influência de distintas combinações de rigidez, massa e distribuição geométrica na resposta dinâmica.

As fibras de carbono apresentam módulo de elasticidade de 140.0 GPa, coeficiente de Poisson de 0.20 e densidade de 1600.0 kg/m³, enquanto as fibras de vidro possuem 50.0 GPa de módulo de elasticidade, 0.26 de coeficiente de Poisson e densidade de 2000.0 kg/m³. Ambos os materiais foram utilizados em corpos de prova de geometria mais estreita e leve, favorecendo frequências naturais mais elevadas. O PLA, por sua vez, exibe módulo de elasticidade de 3.0 GPa, coeficiente de Poisson de 0.36 e densidade de 1240.0 kg/m³, sendo empregado em duas configurações distintas obtidas por manufatura aditiva: uma esbelta tipo longarina e outra robusta tipo caverna. As propriedades completas desses materiais estão resumidas na Tabela 3.

Tabela 3 – Propriedades dos materiais do corpo de prova

Material	E [GPa]	ν	ρ [kg/m ³]
Fibra de Carbono	140.0	0.20	1600.0
Fibra de Vidro	50.0	0.26	2000.0
PLA	3.0	0.36	1240.0

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2 EXPERIMENTOS

Os experimentos vibracionais foram realizados no laboratório de Engenharia Aeronáutica da Faculdade de Engenharia de São João da Boa Vista (FESJ/UNESP). Os objetivos desses experimentos são investigar o comportamento vibracional de placas de diferentes materiais submetidas a ensaios. Na primeira bateria de experimentos, especificamente, aplicaram-se duas condições de contorno distintas: engastado-livre e engastado-engastado, representando diferentes formas de fixação das placas, assim como indicado na 5. Os materiais das placas utilizados nos testes foram aço, alumínio, acrílico, fibra de vidro, fibra de carbono e filamento PLA. Cada um desses materiais apresenta propriedades físicas e mecânicas específicas. Assim, foram determinadas três configurações experimentais: engastado-livre com acelerômetro na extremidade da placa e engastado-engastado com acelerômetro no meio da placa.

Figura 5 – Experimentos

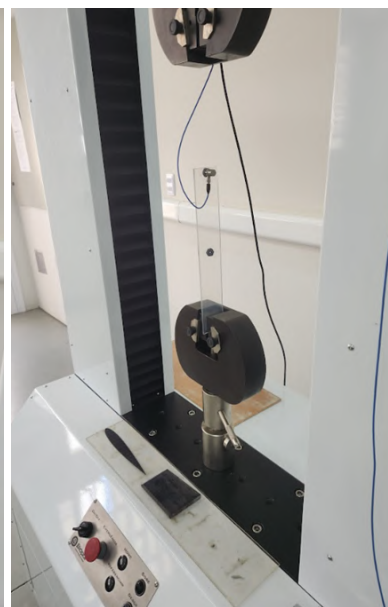
(a) Aço Engastado-livre



(b) Aço Engastado-engastado



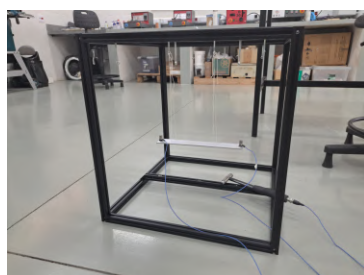
(c) Acrílico Engastado-livre



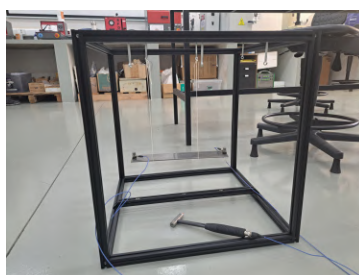
Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma nova série de experimentos foi realizada com corpos de prova adicionais, conforme detalhado na 4. Para simular a condição livre-livre, um kit estrutural de impressora 3D foi adquirido e adaptado, como pode ser visto na 6. Essa adaptação envolveu a fixação de olhais específicos com porcas de encaixe esférico, visando a estabilidade e precisão da montagem para a instalação dos barbantes de suspensão. Conforme a metodologia previamente estabelecida, suportes foram igualmente colados aos corpos de prova para a acomodação dos acelerômetros.

Figura 6 – Experimentos realizados na configuração livre-livre.



(a) Aço



(b) Alumínio



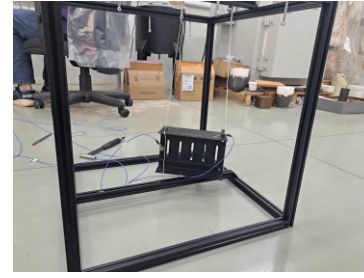
(c) Fibra de Vidro



(d) Fibra de Carbono



(e) Caverna em PLA



(f) Longarina em PLA



(g) Acrílico

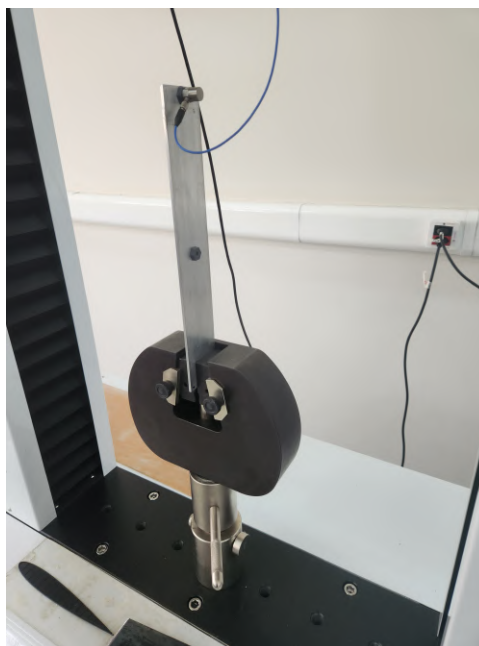
Fonte: Elaborado pelo autor.

A suspensão dos corpos de prova na configuração livre-livre foi realizada por meio de barbantes estrategicamente dispostos na estrutura de suporte. Os materiais investigados incluem aço, alumínio, acrílico, fibra de carbono, fibra de vidro, caverna em PLA e longarina em PLA, cujas representações são detalhadas nas Figuras 6a, 6b, 6d, 6c, 6e, 6f e 6g,.

4.2.1 Procedimento experimental: aquisição de dados na configuração engastado-livre da viga de alumínio

Para ilustrar o procedimento de aquisição de dados, este estudo de caso foca no ensaio da viga de alumínio com condição de contorno engastado-livre, conforme mostrado na 7. Essa configuração representa um caso clássico da literatura em vibrações estruturais e é particularmente sensível à forma como o engaste é realizado. Apesar de a condição livre-livre permitir maior pureza modal, o engastado-livre foi escolhido aqui por estar mais presente em aplicações práticas, como vigas em consoles, e permitir comparação com modelos teóricos amplamente estabelecidos.

Figura 7 – Alumínio - Engastado-livre



Fonte: Elaborado pelo autor.

A viga foi fixada por uma de suas extremidades utilizando as garras de uma máquina de ensaio mecânico (modelo BioPDI, capacidade 100 kN), o que proporciona uma condição de engaste próxima ao ideal. A extremidade oposta permaneceu livre para permitir a excitação e a propagação dos modos de vibração.

4.2.1.1 Instrumentação e configuração do sistema

A excitação da viga foi realizada com um martelo de impacto ICP® Impact Hammer 086C03-L, 8, equipado com uma célula de carga de sensibilidade de 100 mV/N.

Figura 8 – Pontas utilizadas no martelo de impacto



Fonte: Elaborado pelo autor.

A resposta vibracional foi captada por dois acelerômetros ICP Accelerometer 352C33-H, 9, cada um com sensibilidade de 100 mV/g.

Figura 9 – Acelerômetro modelo ICP 352C33-H



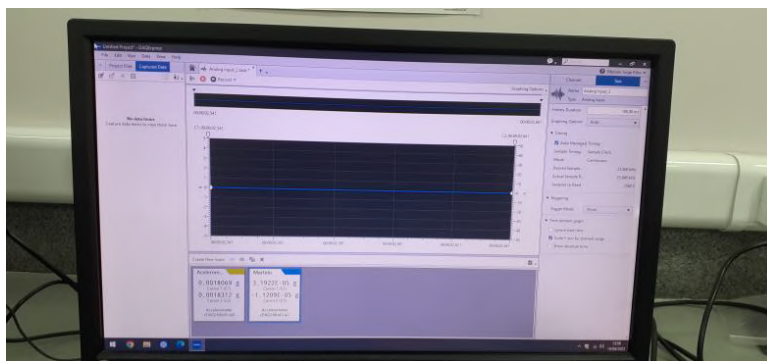
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os acelerômetros convertem a aceleração em um sinal de tensão proporcional, que é transmitido ao sistema de aquisição de dados. Os acelerômetros utilizados (modelos A) são do tipo IEPE (do inglês *Integrated Electronics Piezo-Electric*), caracterizando-se como sensores com eletrônica integrada. Esses sensores requerem uma corrente constante para alimentar um circuito interno de condicionamento de sinal. O circuito interno geralmente contém um cristal piezoelétrico que gera carga proporcional à aceleração, um circuito de conversão de carga para tensão (normalmente um amplificador de carga com um capacitor de desacoplamento) e uma interface simplificada de dois fios, que transmite o sinal de saída sobreposto à corrente de alimentação através de um cabo coaxial via saída universal.

Dito isso, os sinais de força e aceleração foram transmitidos ao sistema de aquisição de dados, modelo NI 9234, que oferece suporte a esses sensores. O módulo foi configurado para fornecer uma corrente constante de 2 mA para alimentar os circuitos internos dos acelerômetros, garantindo a correta polarização e a estabilidade do sinal.

A coleta de dados foi gerenciada pelo software NI-DAQmx, 10, configurado com uma taxa de amostragem de 25.560 Hz (intervalo de tempo constante de 39,12 μ) e uma faixa de frequência de interesse de 0 a 500 Hz. Cada medição teve uma duração de 5 segundos, período este otimizado para capturar adequadamente os modos de baixa frequência sem a necessidade de *triggers* externos para o martelo de impacto. Os impactos foram aplicados em múltiplos pontos da viga, por exemplo a extremidade, centro, quinas e laterais, para excitar uma ampla gama de modos de vibração.

Figura 10 – Software NI-DAQmx



Fonte: Elaborado pelo autor.

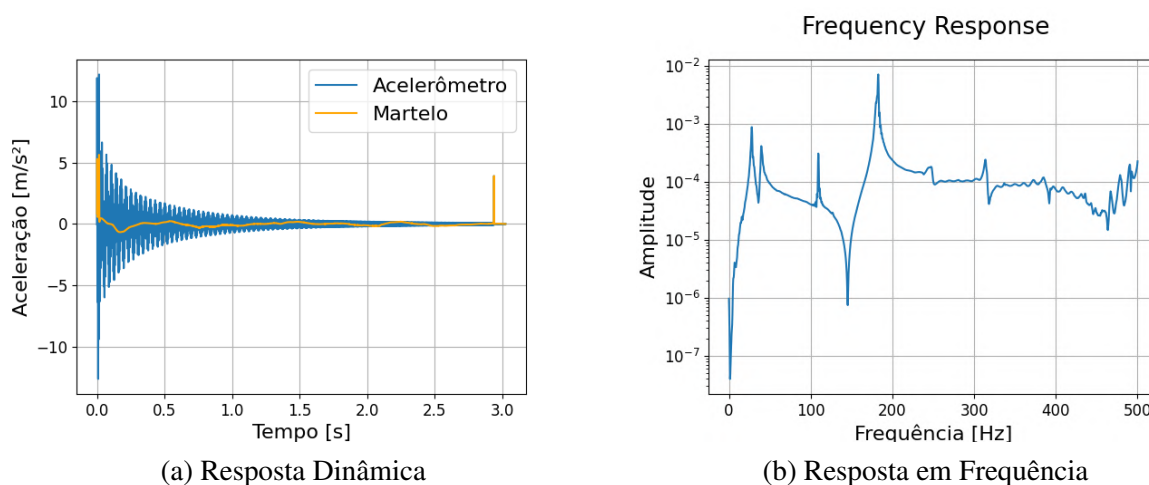
Para este ensaio específico da viga de alumínio livre-livre, os dados brutos de entrada e saída foram registrados em arquivos .csv, contendo:

- Dados de aceleração do Acelerômetro 1 (localizado, por exemplo, na extremidade da viga).
- Dados de força da Célula de carga do martelo de impacto.

4.2.1.2 Resultados da aquisição

A 11 apresenta os resultados obtidos no domínio do tempo e no domínio da frequência. Observa-se, na resposta dinâmica, Figura 11a, a forma de onda típica de um sistema levemente amortecido submetido à excitação impulsiva. A função de resposta em frequência, Figura 11b, evidencia a presença dos primeiros modos naturais, com picos bem definidos, mesmo em presença de ruído experimental. Esses dados foram utilizados como referência para a validação dos modelos numéricos e identificação inversa dos parâmetros de amortecimento.

Figura 11 – Alumínio - Engastado-Livre



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3 ANÁLISES NUMÉRICAS E PÓS-PROCESSAMENTO

Nesta seção, apresentam-se os métodos utilizados tanto para a simulação numérica do sistema dinâmico quanto para o pós-processamento dos dados experimentais coletados. As simulações foram realizadas por meio de integração direta no tempo por métodos numéricos aplicados à forma em espaço de estados, enquanto o tratamento dos dados experimentais envolveu transformadas no domínio da frequência, filtragem de sinais e extração de parâmetros de amortecimento.

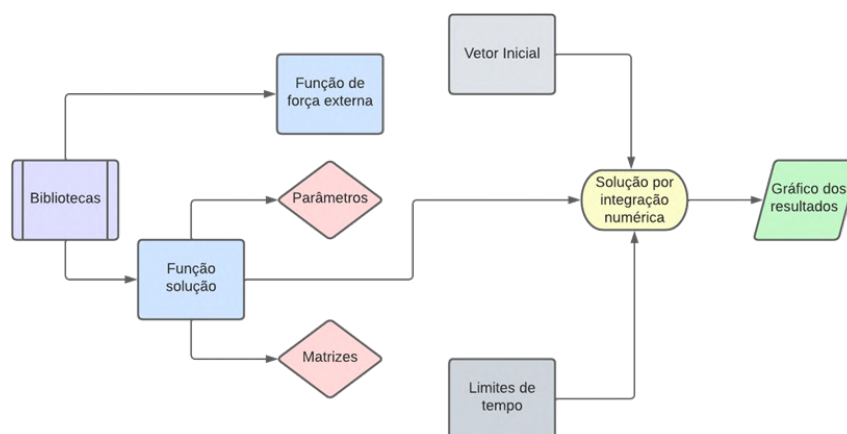
4.3.1 Análises numéricas

Essa abordagem foca na apresentação e justificativa dos métodos de integração selecionados para resolver as equações que governam a dinâmica do sistema, de acordo ao exposto na 12.

Para a realização das simulações e a obtenção de gráficos do comportamento vibracional dos corpos de prova analisados, foram implementadas funções específicas na linguagem Python. A biblioteca *NumPy* foi utilizada para operações eficientes e indexação de matrizes.

Ademais, foi utilizada a biblioteca *SciPy*, que opera com os arrays criados pelo *NumPy*, fornecendo integrações numéricas e otimizações eficientes. A função principal do código é encontrar a solução da equação do espaço de estados, utilizando os parâmetros e os valores iniciais fornecidos. A função empregada para obter os dados foi a *scipy.integrate*. Por fim, para a visualização dos resultados obtidos nas simulações, gráficos são gerados por meio da função *pyplot*, importada da biblioteca *Matplotlib*. Dessa forma, possibilita-se a visualização e análise do comportamento vibracional do elemento de inércia definido pelos parâmetros do código.

Figura 12 – Fluxograma



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3.1.1 Escolha e justificativa dos métodos de integração numérica

Para a simulação numérica do comportamento vibracional de corpos de prova, implementou-se um modelo de espaço de estados baseado em elementos finitos utilizando funções dedicadas em Python. As bibliotecas *NumPy* e *SciPy* foram empregadas, respectivamente, para operações matriciais eficientes e para integrações numéricas e otimizações.

A avaliação inicial dos métodos de integração temporal da biblioteca `scipy.integrate` incluiu Runge-Kutta (RK) e Hilber-Hughes-Taylor (HHT). Embora o método RK seja conhecido por sua precisão e baixo erro de truncamento local em Equações Diferenciais Ordinárias com valores iniciais, sua eficiência é reduzida para Equações Diferenciais Parciais. O HHT, por sua vez, sendo uma técnica predictor-corretor derivada do método Newmark- β , é robusto para EDOs de segunda ordem em dinâmica estrutural, particularmente em sistemas que combinam efeitos de rigidez e massa.

Contudo, a rigidez numérica significativa do problema, observada em função das características dos materiais em estudo, direcionou a pesquisa para a seleção de métodos implícitos. Entre as opções avaliadas, incluindo Dormand-Prince e Radau, que demonstraram boa consistência, os métodos de Diferenciação Regressiva (BDF) foram adotados como a principal abordagem. Os métodos BDF são intrinsecamente eficientes para EDOs rígidas, pois gerenciam de forma otimizada as escalas de tempo amplamente variáveis, exigindo a resolução de equações algébricas em cada passo de tempo. Sua formulação, que expressa a solução em um passo de tempo futuro como uma combinação linear de soluções em passos anteriores através de fórmulas de diferenciação inversa, assegurou a maior eficiência computacional, consistência e acurácia necessárias para as simulações conduzidas neste estudo.

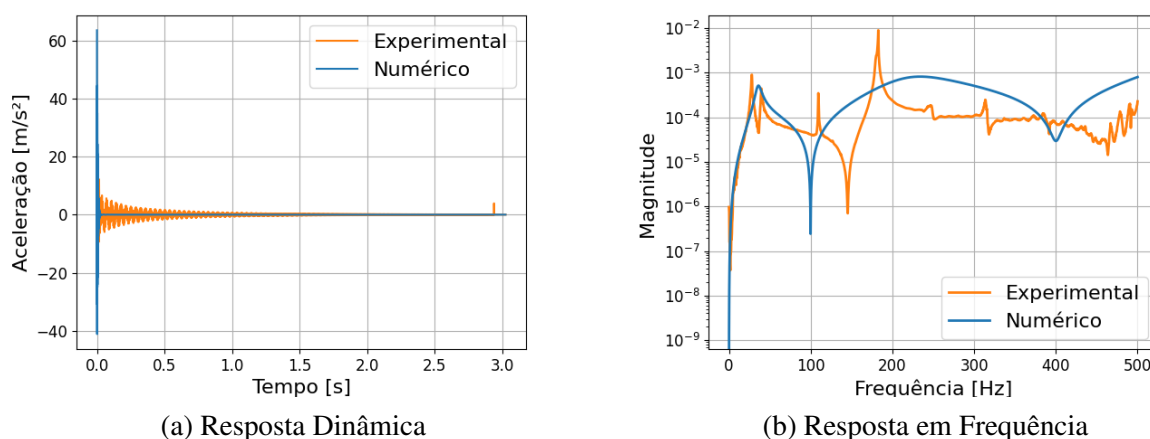
Embora o algoritmo desenvolvido para o modelo de N-GDL fosse capaz de gerar respostas dinâmicas e de frequência, a integração da equação no espaço de estados por métodos derivativos apresentou elevados tempos de resolução. Isso ocorreu devido à discretização ineficiente dos parâmetros para o cálculo das taxas de variação, resultando em desempenho insatisfatório ou ausência de convergência. Para mitigar essa limitação, explorou-se uma alternativa que consistiu na criação manual de matrizes como funções e na utilização de algoritmos iterativos baseados em laços de repetição, em vez do cálculo direto dos gradientes, visando otimizar a performance da simulação.

4.3.1.2 Exemplo de aplicação numérica

A Figura 13a, por sua vez, complementa essa análise ao exibir as curvas de aceleração em função do tempo. Aqui, a diferença no amortecimento é ainda mais evidente. Enquanto a resposta numérica, curva azul, demonstra um decaimento rápido, atenuando as vibrações em aproximadamente 0.5 segundos, a resposta experimental, curva laranja, exibe um decaimento consideravelmente mais lento, persistindo com oscilações por um período muito maior. Essa diferença na taxa de decaimento reforça a conclusão de que o modelo numérico superestima o amortecimento presente no sistema físico.

A Figura 13b apresenta a magnitude da resposta em frequência da viga. Observa-se uma boa concordância entre o modelo numérico, curva azul, e os dados experimentais, curva laranja, para as frequências naturais dos primeiros modos de vibração, próximos a 20 Hz e 100 Hz. Contudo, há uma clara discrepância na magnitude dos picos, com o modelo numérico geralmente superestimando o amortecimento em comparação com o experimental, especialmente evidente a partir do terceiro modo, próximo a 180 Hz, onde o pico experimental é mais acentuado e o numérico mais brando e deslocado. Além de 200 Hz, as curvas divergem significativamente, indicando que o modelo numérico não está capturando de forma adequada o comportamento dinâmico e dissipativo em frequências mais elevadas.

Figura 13 – Alumínio - Engastado-Livre.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em síntese, a análise conjunta das duas figuras revela que, embora o modelo numérico seja capaz de prever as frequências naturais dos primeiros modos com razoável precisão, ele não reproduz adequadamente o nível de amortecimento da viga, especialmente para os modos de ordem superior e a taxa de decaimento temporal da vibração.

4.3.2 Tratamento de dados

Este tópico descreve o processo de pós-processamento dos dados brutos obtidos nos experimentos, desde a leitura inicial até a obtenção FRFs filtradas.

4.3.2.1 Pós-processamento e filtragem de dados experimentais

Após a aquisição dos dados brutos dos ensaios de impacto, utilizando o software previamente descrito, uma série de procedimentos de pós-processamento foi aplicada para a categorização, eliminação de ruídos e extração das respostas em frequência filtradas a partir das séries temporais. Tais resultados permitiram a realização de estimativas iniciais de amortecimento proporcional e/ou modal.

Considerando o volume de dados coletados, desenvolveu-se um algoritmo com estrutura condicional encadeada para assegurar a leitura precisa e automatizada dos dados. Este algoritmo, implementado com a biblioteca *Pandas*, habilita a identificação e o processamento eficiente do arquivo de entrada correspondente a cada material e condição de contorno, por meio da função *leitura_experimental*. O pseudocódigo a seguir ilustra a lógica de leitura:

Algorithm 1 Leitura de Dados Experimentais

Require: material: String com o nome do material; cc: String com a condição de contorno.

Ensure: exp_tempo: Vetor de tempo; exp_aceleracao: Vetor de aceleração; exp_martelo: Vetor do sinal do martelo. $\triangleright$ Determinar o nome do arquivo com base no material e condição de contorno

```

1: if cc é “engastado_engastado” and material é “aluminio” then
2:   nome_arquivo  $\leftarrow$  'exp_5/Al_biengastado_mcentro_acentro.csv'
3: else if ... then  $\triangleright$  Outras condições para aço, acrílico, etc.
4: end if  $\triangleright$  Ler o arquivo CSV usando Pandas
5: experimental_df  $\leftarrow$  pd.read_csv(nome_arquivo, sep=';', decimal=',', ...)
6: exp_tempo  $\leftarrow$  experimental_df['t1'].to_numpy()
7: exp_aceleracao  $\leftarrow$  experimental_df['r1'].to_numpy()
8: exp_martelo  $\leftarrow$  experimental_df['r2'].to_numpy()
9: return exp_tempo, exp_aceleracao, exp_martelo

```

Para o ajuste do ponto inicial de cada série temporal, um algoritmo foi concebido para identificar o instante exato do impacto, superando a ausência de 'triggers' de automação no modelo do martelo de impacto. Este algoritmo analisa e detecta a primeira variação abrupta da aceleração (derivada na série temporal), indicando o início do impacto, através da função *pos_experimental*. O pseudocódigo demonstra a lógica de corte inicial:

Algorithm 2 Ajuste do Ponto Inicial da Série Temporal

Require: exp_tempo: Vetor de tempo bruto; exp_aceleracao: Vetor de aceleração bruta.

Ensure: tempo_cortado: Vetor de tempo ajustado; aceleracao_cortada: Vetor de aceleração ajustado.

```

1: time_increment  $\leftarrow$  exp_tempo[1] - exp_tempo[0]
2: DIFF  $\leftarrow$  0.05  $\triangleright$  Limite para detectar impacto
3: pos  $\leftarrow$  0
4: for i de 0 até len(exp_aceleracao) - 2 do
5:   if abs(exp_aceleracao[i+1] - exp_aceleracao[i])  $\geq$  DIFF then
6:     pos  $\leftarrow$  i
7:     break  $\triangleright$  Sai do loop ao detectar impacto
8:   end if
9: end for
10: tempo_cortado  $\leftarrow$  [j * time_increment for j in range(len(exp_tempo[pos:]))]
11: aceleracao_cortada  $\leftarrow$  exp_aceleracao[pos:]  $\triangleright$  O mesmo corte pode ser aplicado ao sinal do martelo, se necessário
12: return tempo_cortado, aceleracao_cortada

```

Os sinais obtidos no domínio do tempo foram submetidos a um processamento de sinais, utilizando a Transformada Rápida de Fourier (FFT) implementada em Python. Este procedimento permitiu a conversão dos dados para o domínio da frequência, viabilizando a obtenção da resposta em frequência das estruturas, com a análise focada especificamente na faixa de 1 a 500 Hz.

Algorithm 3 Cálculo da FRF (Função de Resposta em Frequência)

Require: `aceleracao_cortada`: Aceleração no domínio do tempo; `martelo_cortado`: Sinal do martelo no domínio do tempo; `tempo_cortado`: Vetor de tempo ajustado.

Ensure: `freq_frf`: Frequências da FRF; `ampl_frf`: Amplitude da FRF; `fase_frf`: Fase da FRF.

```

1:  $T \leftarrow \text{tempo\_cortado}[1] - \text{tempo\_cortado}[0]$  ▷ Passo de tempo
2:  $N\_samples \leftarrow \text{len}(\text{aceleracao\_cortada})$ 
3:  $\text{transform\_acel} \leftarrow \text{fft}(\text{aceleracao\_cortada})[:N\_samples // 2]$ 
4:  $\text{transform\_martelo} \leftarrow \text{fft}(\text{martelo\_cortado})[:N\_samples // 2]$ 
5:  $\text{transform\_freq} \leftarrow \text{fftfreq}(N\_samples, T)[:N\_samples // 2]$ 
6:  $\text{mask\_freq} \leftarrow \text{transform\_freq} < 500$  ▷ Máscara para faixa de frequência de interesse
7:  $\text{freq\_frf} \leftarrow \text{transform\_freq}[\text{mask\_freq}]$ 
8:  $\text{ampl\_frf} \leftarrow (2.0 / N\_samples) * \text{abs}(\text{transform\_acel}[\text{mask\_freq}] / \text{transform\_martelo}[\text{mask\_freq}])$ 
9:  $\text{fase\_frf} \leftarrow \text{angle}(\text{transform\_acel}[\text{mask\_freq}] / \text{transform\_martelo}[\text{mask\_freq}]) * 180 / (2 * \pi)$ 
10: return freq_frf, ampl_frf, fase_frf

```

O aprimoramento das respostas experimentais e a mitigação de ruídos indesejados foram alcançados por meio de um procedimento de filtragem. Para este propósito, aplicou-se um filtro 'Butterworth', predominantemente configurado como passa-baixa. A escolha desse tipo de filtro visou remover componentes de alta frequência que não correspondiam à dinâmica estrutural da viga, mas sim a ruídos provenientes do acelerômetro (como ressonância do sensor) e interferências do setup de cabos e circuitos, que ocorrem em frequências significativamente superiores à faixa de interesse do estudo. O filtro foi cuidadosamente adaptado para cada material testado, com seus parâmetros ajustados empiricamente, a fim de otimizar a clareza das Funções de Resposta em Frequência (FRFs) e garantir a qualidade do sinal resultante, como pode ser visualizado no Algoritmo 4.

Algorithm 4 Filtragem do Sinal da FRF

Require: `material`: Material da viga; `ampl_frf`: Amplitude da FRF bruta.

Ensure: `signal_filtered`: Amplitude da FRF filtrada. ▷ Parâmetros do filtro são ajustados condicionalmente ao material

```

1: if material é "aluminio" then
2:    $N\_filter \leftarrow 7$  ▷ Ordem do filtro
3:    $Wn\_filter \leftarrow 0.02$  ▷ Frequência de corte normalizada
4: else if material é "aco" then
5:    $N\_filter \leftarrow 7$ 
6:    $Wn\_filter \leftarrow 0.5$ 
7: else if material é "acrilico" then
8:    $N\_filter \leftarrow 6$ 
9:    $Wn\_filter \leftarrow 0.5$ 
10: end if
11:  $b, a \leftarrow \text{butter}(N=N\_filter, Wn=Wn\_filter, btype='lowpass', \text{analog}=False, \text{output}='ba')$ 
12:  $\text{signal\_filtered} \leftarrow \text{filtfilt}(b, a, \text{ampl\_frf})$ 
13: return signal_filtered

```

Simultaneamente à filtragem, a identificação dos pontos de ressonância na FRF foi realizada por meio da aplicação da função *find_peaks*. Com base nos picos identificados, vetores foram construídos para armazenar seus respectivos valores de frequência e amplitude.

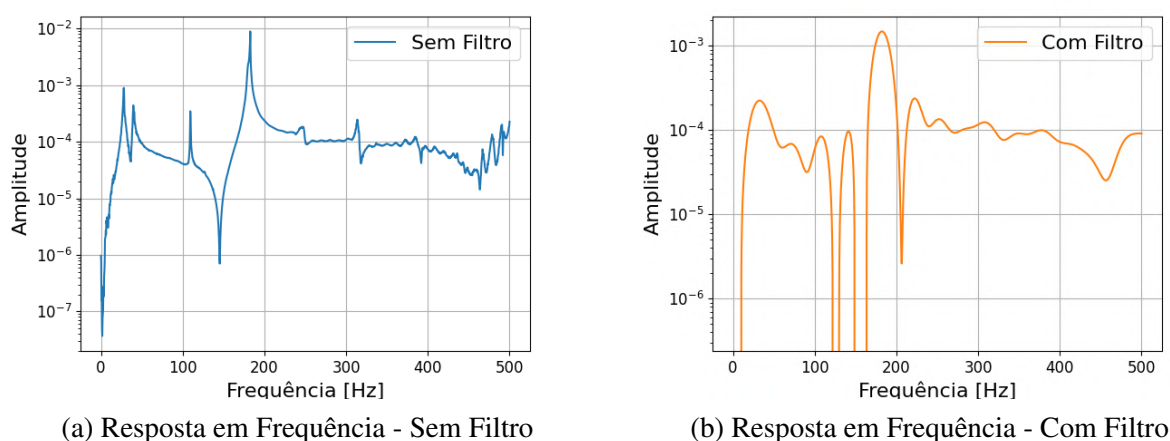
4.3.2.2 Análise das funções de resposta em frequência

Os gráficos apresentados na 14 ilustram o impacto do procedimento de filtragem nas FRFs de uma viga de alumínio com condição de contorno engastado-livre.

A Figura 14a mostra a FRF obtida diretamente da FFT dos dados brutos de aceleração e martelo. Observa-se a presença de ruídos de alta frequência, especialmente a partir de aproximadamente 300 Hz, que obscurecem a identificação clara dos modos de vibração. Os picos de ressonância são visíveis, mas a interpretação é dificultada pela flutuação do sinal.

Em contraste, a Figura 14b apresenta a FRF após a aplicação do filtro 'Butterworth' bidirecional, conforme descrito anteriormente. A comparação visual entre as duas figuras demonstra a eficácia do filtro na supressão de ruídos de alta frequência. A FRF filtrada exibe picos de ressonância muito mais distintos e bem definidos, facilitando a identificação precisa das frequências naturais e suas respectivas amplitudes. Esta clareza aprimorada é crucial para a determinação precisa dos parâmetros modais, como as frequências naturais e os fatores de amortecimento. A suavização do sinal, sem introdução de atrasos de fase devido à aplicação bidirecional do filtro, permite uma análise mais robusta dos dados experimentais.

Figura 14 – Alumínio - Engastado-Livre.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3.3 Decremento logarítmico

Dentro do contexto da análise experimental, a estimativa do amortecimento é um passo crucial para caracterizar o comportamento dinâmico de estruturas. Esta parte detalha os princípios e a metodologia computacional empregada para calcular o fator de amortecimento ζ a partir dos dados experimentais no domínio do tempo.

4.3.3.1 Cálculo do amortecimento via decremento logarítmico

Dada a FRF filtrada, uma das técnicas empregadas para estimar o amortecimento foi o método do decremento logarítmico. Este método é particularmente útil para estabelecer uma base simples na obtenção dos dados experimentais e fornece um ponto de partida para simulações numéricas e processos de otimização.

O decremento logarítmico é um método para estimar o amortecimento ζ de um sistema a partir da resposta temporal de um sistema subamortecido. Ele se baseia na razão das amplitudes de dois picos consecutivos ou vales da resposta. As equações fundamentais estão indicadas em 1:

$$\delta = \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right), \quad \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (1)$$

Onde δ é o decremento logarítmico e x_1 e x_2 são as amplitudes de dois picos consecutivos.

A implementação computacional do decremento logarítmico iniciou-se com a identificação dos picos de ressonância na FRF filtrada, que correspondem às frequências naturais do sistema. Isso foi realizado utilizando a função *find_peaks* da biblioteca *scipy.signal*. O Algoritmo 5 ilustra essa etapa.

Algorithm 5 Identificação dos picos na FRF filtrada

Require: FRF_filtrada, vetor_de_frequencias_da_FRF

Ensure: tempo_picos_freq, amp_picos_freq

- 1: $\text{signal_filtered} \leftarrow \text{FRF_filtrada}$ ▷ Proveniente da função *filtfilt*
 - 2: $\text{freq_frf} \leftarrow \text{vetor_de_frequencias_da_FRF}$
 - 3: $\text{picos_indices}, _ \leftarrow \text{find_peaks}(\text{signal_filtered}, \text{distancia_minima}, \text{proeminencia_minima})$
 - 4: $\text{tempo_picos_freq} \leftarrow \text{freq_frf}[\text{picos_indices}]$
 - 5: $\text{amp_picos_freq} \leftarrow \text{signal_filtered}[\text{picos_indices}]$
 - 6: **return** tempo_picos_freq, amp_picos_freq
-

Uma vez que os picos na FRF são identificados, suas frequências correspondentes *tempo_picos_freq* são utilizadas para estimar os períodos de vibração para cada modo. Para o cálculo do amortecimento por decremento logarítmico, são necessários os picos correspondentes no domínio do tempo. Para isso, foram selecionados os dois picos de maior amplitude da FRF, cujas frequências foram usadas para determinar o espaçamento temporal esperado entre os picos de amortecimento na resposta no domínio do tempo.

O Algoritmo para identificar esses picos na resposta temporal *aceleracao_cortada* utilizou novamente a função *find_peaks*, ajustando a distância mínima entre os picos com base no período estimado do modo, é mostrado no Algoritmo 6. A Figura 11a ilustra esses picos identificados na resposta dinâmica.

Algorithm 6 Estimativa dos Amortecimentos via Decremento Logarítmico

```

amp_picos_freq, tempo_picos_freq, vetor_de_tempos, aceleracao_resposta, passo_de_tempo zeta_1,
zeta_2
indices_ordenados  $\leftarrow$  argsort(amp_picos_freq) *[r]Ordena picos por amplitude
pico_1_indice  $\leftarrow$  indices_ordenados[-1] *[r]Maior pico
pico_2_indice  $\leftarrow$  indices_ordenados[-2] *[r]Segundo maior pico
omega_1  $\leftarrow$  tempo_picos_freq[pico_1_indice]
omega_2  $\leftarrow$  tempo_picos_freq[pico_2_indice]
T_1  $\leftarrow$   $2 * \pi / \omega_1$ 
T_2  $\leftarrow$   $2 * \pi / \omega_2$ 
tempo_cortado  $\leftarrow$  vetor_de_tempos
aceleracao_cortada  $\leftarrow$  aceleracao_resposta
time_increment  $\leftarrow$  passo_de_tempo
distance_accel  $\leftarrow$  (T_1 * 0.9) / time_increment
(peaks_acel_indices, _)  $\leftarrow$ 
find_peaks(aceleracao_cortada, distance=distance_accel)
decrement_peaks_tempo  $\leftarrow$ 
tempo_cortado[peaks_acel_indices[primeiros_dois_apos_tempo_max/5]]

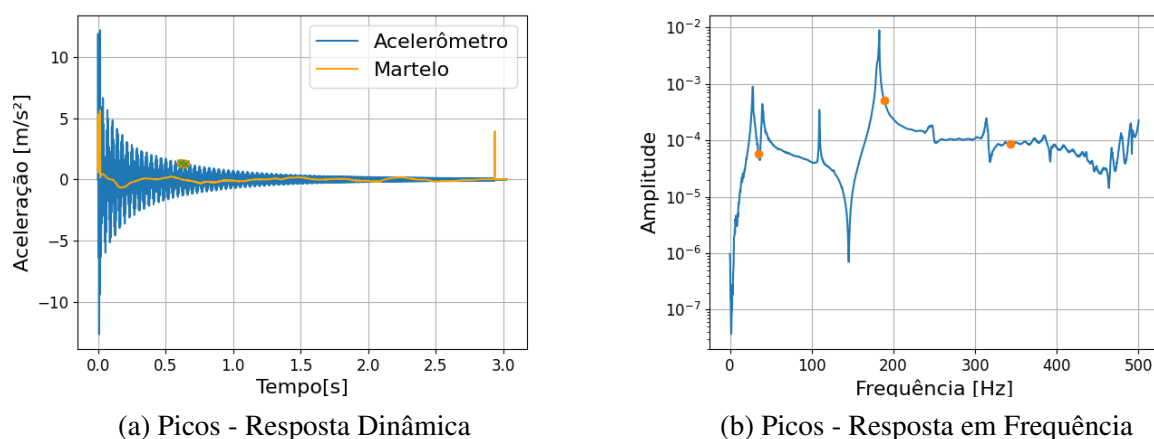
decrement_amp_tempo  $\leftarrow$ 
aceleracao_cortada[peaks_acel_indices[primeiros_dois_apos_tempo_max/5]]
x_pico_1  $\leftarrow$  decrement_amp_tempo[0]
x_pico_2  $\leftarrow$  decrement_amp_tempo[1]
delta_1  $\leftarrow$   $\log(x\_pico\_1 / x\_pico\_2)$ 
zeta_1  $\leftarrow$   $\delta_1 / \sqrt{4 * \pi^2 + \delta_1^2}$ 
*[f]Repetir o mesmo procedimento para calcular zeta_2

```

4.3.3.2 Exemplo

A 15 detalha a identificação dos picos para o cálculo do amortecimento por decremento logarítmico. A Figura 15a ilustra os picos identificados na resposta dinâmica, que são selecionados com base nos períodos dos modos obtidos da FRF e usados para o cálculo do decremento logarítmico. A 15b exibe a FRF com os picos de ressonância identificados, que correspondem às frequências naturais do sistema. A combinação dessas identificações nos domínios do tempo e da frequência é crucial para a determinação precisa dos parâmetros de amortecimento do sistema.

Figura 15 – Alumínio - Engastado-Livre

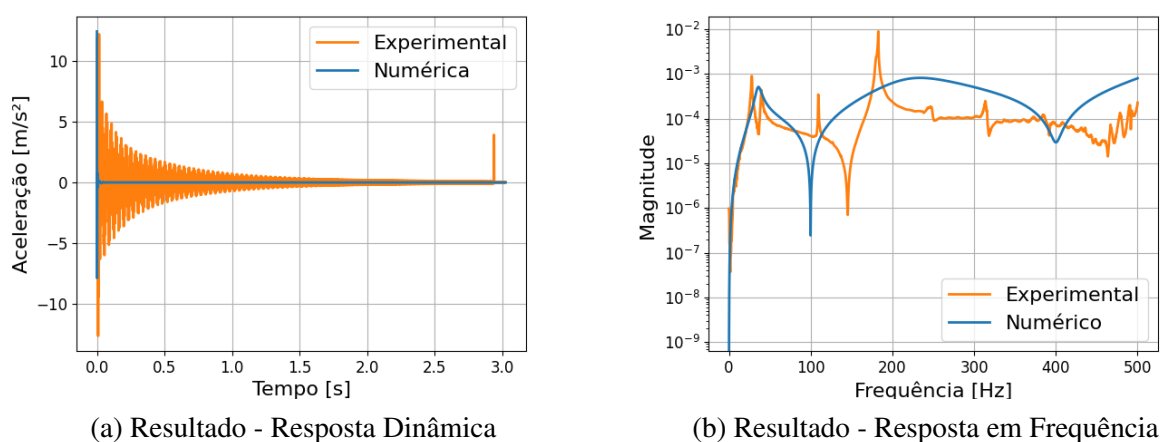


Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 16a mostra que a curva numérica exibe um decaimento muito rápido, com as vibrações se atenuando significativamente em menos de um segundo. Em contraste, a resposta experimental demonstra um decaimento consideravelmente mais lento, com oscilações visíveis persistindo por um tempo muito maior. Essa diferença sugere claramente que o modelo numérico superestima o amortecimento presente no sistema experimental, pois sua dissipação de energia acontece muito mais rapidamente.

Por outro lado, a Figura 16b apresenta que a FRF experimental exibe picos de ressonância nítidos e bem definidos. Picos nítidos em FRFs são característicos de sistemas subamortecidos com amortecimento moderado, onde a energia é dissipada de forma controlada nas frequências naturais. Em contraste, a FRF numérica mostra uma curva com forma "abaulada" e suprimida, isso é típico de sistemas superamortecidos ou com um amortecimento excessivamente elevado.

Figura 16 – Alumínio - Engastado-Livre



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3.4 Modal

A análise modal experimental é uma ferramenta fundamental para caracterizar o comportamento dinâmico de estruturas, permitindo a identificação de seus parâmetros modais: frequências naturais, fatores de amortecimento modal e formas modais. Esses parâmetros são cruciais para a validação de modelos numéricos e para a compreensão da resposta da estrutura a diferentes tipos de excitação. A base para esta análise são as FRFs obtidas experimentalmente.

4.3.4.1 Separação de picos para o cálculo modal

Após os procedimentos de pós-processamento e filtragem dos dados, as FRFs apresentam picos de ressonância bem definidos, conforme ilustrado na Figura 14b. Cada um desses picos corresponde a uma frequência natural de vibração do sistema. Para o cálculo dos parâmetros modais, é necessário isolar e analisar individualmente a região ao redor de cada pico.

O algoritmo de identificação de picos, utilizando a função *find_peaks* do *SciPy.signal*, já fornece as frequências e amplitudes dos picos de ressonância na FRF filtrada. Essas frequências *tempo_picos_freq* ou *phi_exp* representam as frequências naturais experimentais. A separação em picos para o cálculo modal refere-se ao processo de focar em cada uma dessas frequências naturais identificadas para extrair seus parâmetros modais correspondentes, amortecimento modal e, em análises mais avançadas, a forma modal. O pseudocódigo a seguir ilustra a etapa conceitual de iteração sobre os picos identificados:

Algorithm 7 Iteração sobre Picos Identificados na FRF

Require: *freq_frf*: Vetor de frequências da FRF; *signal_filtered*: Amplitude da FRF filtrada.

Ensure: *frequencias_naturais*: Lista de frequências naturais; *amortecimento_modal*: Lista de fatores de amortecimento modal.

```

1: picos_indices, _  $\leftarrow$  find_peaks(signal_filtered, distancia_minima,
   proeminencia_minima)
2: frequencias_naturais_experimentais  $\leftarrow$  freq_frf[picos_indices]
3: amplitudes_picos_experimentais  $\leftarrow$  signal_filtered[picos_indices]
4: for i in range(len(frequencias_naturais_experimentais)) do
5:   frequencia_pico  $\leftarrow$  frequencias_naturais_experimentais[i]
6:   amplitude_pico  $\leftarrow$  amplitudes_picos_experimentais[i]   ▷ Definir uma
   região de interesse ao redor de frequencia_pico
7:   regiao_FRF  $\leftarrow$  Subconjunto de freq_frf e signal_filtered próximo de
   frequencia_pico   ▷ Calcular amortecimento modal para esta região
8:   zeta_modal  $\leftarrow$  CalcularAmortecimentoModal(regiao_FRF,
   frequencia_pico)
9:   adicionar frequencia_pico em frequencias_naturais
10:  adicionar zeta_modal em amortecimento_modal
11: end for
12: return frequencias_naturais, amortecimento_modal

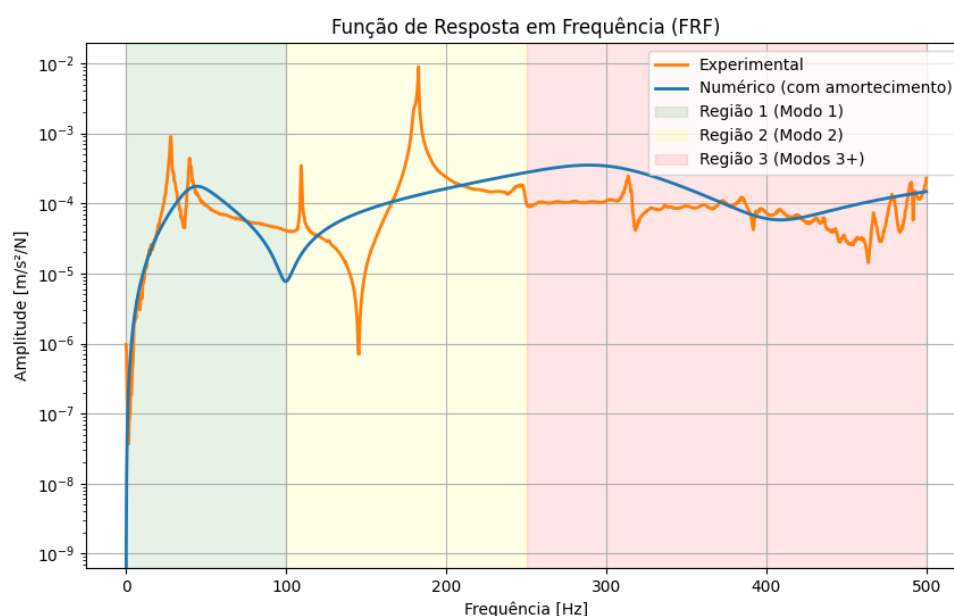
```

4.3.4.2 Exemplo de regiões e aproximação de segunda ordem

A aproximação de segunda ordem modela sistemas dinâmicos por meio de equações diferenciais que consideram massa, rigidez e amortecimento, como o exemplo apresentado na 17. O amortecimento, em particular, é fundamental para representar a dissipação de energia em sistemas reais, influenciando a amplitude dos picos de ressonância na FRF.

No modelo numérico da viga, incluímos amortecimento modal com um coeficiente uniforme de 1% e $\zeta = 10^{-6}$ para cada modo. Esse parâmetro foi essencial para ajustar a altura dos picos na FRF numérica, aproximando-a dos dados experimentais. Sem amortecimento, as amplitudes tenderiam ao infinito nas ressonâncias, o que não condiz com a realidade física.

Figura 17 – Aproximação de segunda ordem



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os cálculos foram realizados utilizando scripts em Python, gerando a FRF numérica da viga, que foi comparada com a FRF experimental. As frequências naturais calculadas numericamente apresentaram boa correspondência com as experimentais, confirmando a correta identificação dos modos de vibração. A amplitude dos picos na FRF numérica, ajustada pelo amortecimento de 1%, aproximou-se dos valores experimentais, embora algumas discrepâncias residuais tenham sido observadas. A resposta temporal da aceleração, interpolada para alinhar os grids temporais, também exibiu concordância satisfatória entre os dados numéricos e experimentais após a inclusão do amortecimento. Esses resultados sugerem que o modelo de segunda ordem, incorporando amortecimento, é eficaz na captura do comportamento dinâmico da viga. Ajustes adicionais, como o refinamento da discretização ou a calibração dos coeficientes de amortecimento, podem minimizar ainda mais as diferenças observadas.

4.4 OTIMIZAÇÃO

A prática de análises inversas por meio de algoritmos de otimização consiste em um conjunto de técnicas capazes de obter resultados quantitativos para amortecimento de Rayleigh, estrutural e modal, através da minimização de funções de correlação entre respostas numéricas simuladas e respostas experimentais. Diversas métricas de correlação estão disponíveis, algumas oriundas da teoria de processamento digital de sinais. Particularmente na área de vibrações, as correlações de significância (do inglês assurance correlations) são utilizadas para identificar as diferenças entre resultados numéricos obtidos em simulações e resultados experimentais. Dentre essas métricas, destacam-se a MAC (do inglês modal assurance criterion - (Pastor; Binda; Harčarik, 2012) - Eq. 20), RVAC (do inglês response vector assurance criterion - (Medeiros *et al.*, 2016) - Eq. 21) e TSAC (do inglês time series assurance criterion (Medeiros *et al.*, 2016) - Eq. 22) ligam as respostas numéricas obtidas com as respostas experimentais através da convolução dos dados modais, em frequência e temporais respectivamente entre os dois métodos.

$$MAC = \frac{|\phi_{num}^t \phi_{exp}^*|^2}{(\phi_{num}^t \phi_{num}^*) \cdot (\phi_{exp}^t \phi_{exp}^*)} \quad (2)$$

$$TSAC = \frac{|H_{num}^t H_{exp}^*|^2}{(H_{num}^t H_{num}^*) \cdot (H_{exp}^t H_{exp}^*)} \quad (3)$$

$$RVAC = \frac{|u_{num}^t u_{exp}^*|^2}{(u_{num}^t u_{num}^*) \cdot (u_{exp}^t u_{exp}^*)} \quad (4)$$

Utilizando essas métricas, um problema de otimização pode ser formulado, no qual elas devem ser maximizadas em função de diferentes constantes de amortecimento empregadas nas simulações numéricas. Essa abordagem permite obter resultados experimentais de forma precisa, evitando a necessidade de aproximar os modelos por meio de modelos de segunda ordem ou de utilizar premissas de amortecimento proporcional (Lin; Zhu, 2006; Pradhan; Modak, 2017; Cong; Hu; Li, 2020).

Dentro desse contexto, a proposta atual destinou-se à realização de experimentos vibracionais sob diferentes condições de contorno em estruturas do tipo placa, fabricadas em diversos materiais e geometrias. Além disso, desenvolveram-se algoritmos de simulação numérica e otimização inversa para a identificação de parâmetros dinâmicos de amortecimento.

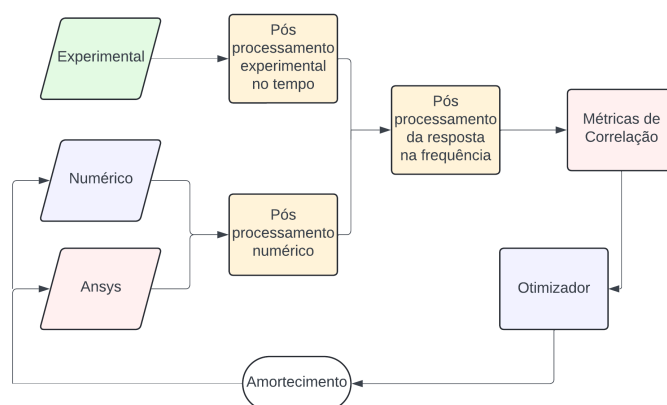
Dessa forma, a solução do problema de otimização irrestrito delineado na Equação 5 é realizada por meio de algoritmos de otimização vinculados à biblioteca *Scipy* (`scipy.optimize`). A função objetivo é avaliada através de diferentes métricas de correlação descritas nas Equações 2 a 4. Dois métodos foram utilizados e comparados em relação à eficiência: BFGS, um método baseado em gradiente com aproximação numérica para a matriz hessiana, e o algoritmo genético, um método não determinístico baseado em critérios de evolução (Rao, 2009). Através da solução desse problema, constantes utilizadas em diferentes modelos de amortecimento foram obtidas; em particular, foram inicialmente focados os modelos de Rayleigh e modal.

$$\text{minimizar } f(\alpha, \beta, \xi_i) = -MAC|RVAC|TSAC \quad (5)$$

Para obter respostas mais precisas e coerentes com o estado da arte no cálculo do método de correlação MAC, foi realizado o levantamento das frequências naturais amortecidas dos autovalores da matriz A , da forma matricial de espaço de estados que inclui o amortecimento, rigidez e a massa.

Ademais, foi utilizada a função *scipy.minimize* da biblioteca *Scipy* para otimizar as métricas de correlação. Essa função é calculada com base na matriz A amortecida, nos valores iniciais de amortecimento, nas condições de contorno e no material da placa. Para a solução, foi empregado o método numérico BFGS, pois apresentou menor desvio entre as respostas, conforme detalhado no fluxograma da 18.

Figura 18 – Desenvolvimento de uma Biblioteca de Análise Modal em Python



Fonte: Elaborado pelo autor.

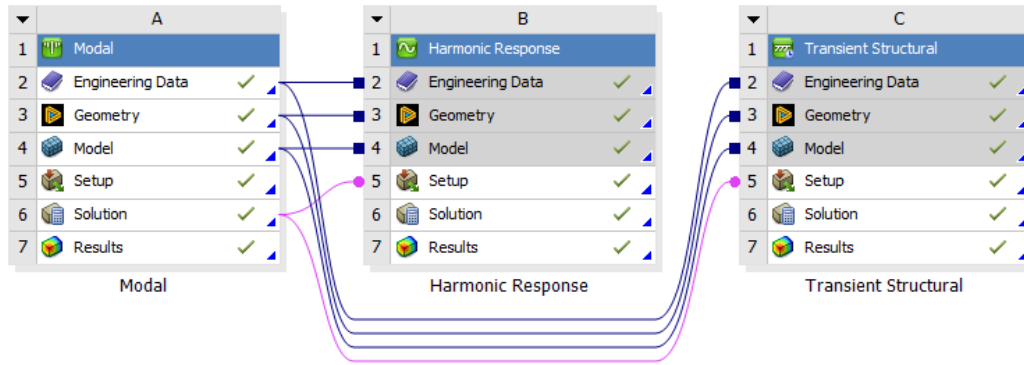
4.5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, são apresentados os resultados dos diversos experimentos realizados e das otimizações implementadas.

4.5.1 Resultados - simulação em ANSYS

As simulações numéricas foram conduzidas no software comercial ANSYS, empregando diferentes módulos para atender às necessidades de cada tipo de análise estrutural. O módulo Static Structural foi utilizado para as análises estáticas preliminares. A partir dele, as análises dinâmicas foram realizadas: o módulo Transient para análises no domínio do tempo e o módulo Harmonic Response para a determinação das Funções de Resposta em Frequência. A organização das análises no ambiente ANSYS Workbench é ilustrada na 19.

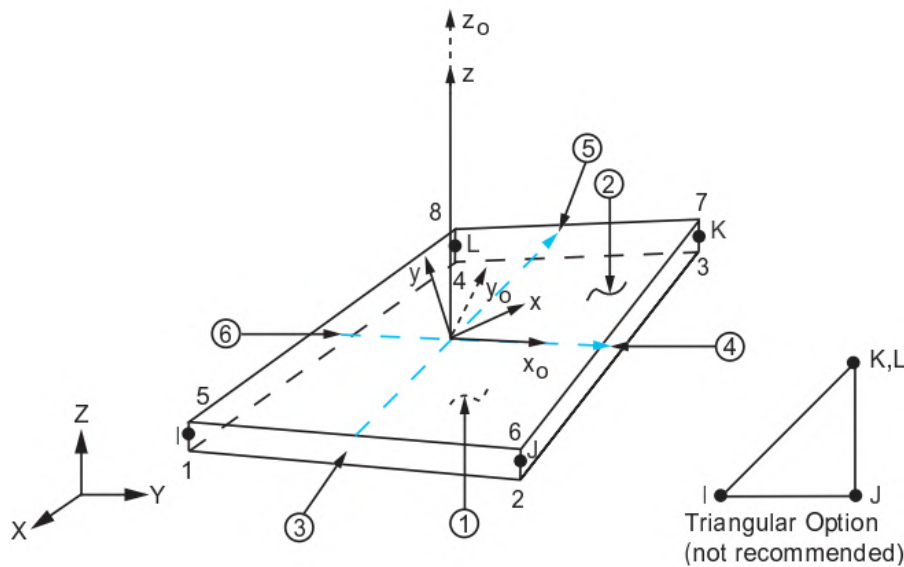
Figura 19 – Análises estruturais realizadas



Fonte: Elaborado pelo autor.

O modelo estrutural predominante empregado nas análises foi o elemento SHELL181 ((Ansys Inc., 2024a); (Ansys Inc., 2024b)), que é um elemento de casca de quatro nós adequado para modelar estruturas finas ou de espessura média. Cada nó do SHELL181 possui seis graus de liberdade, sendo cinco deles físicos (três translações e duas rotações), conforme representado na 20.

Figura 20 – Geometria do elemento SHELL181

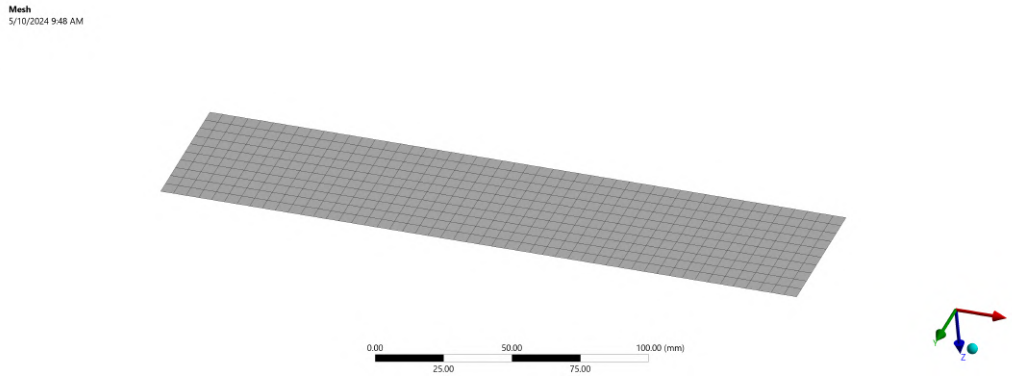


Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5.1.1 Discretização da malha

A discretização do modelo foi realizada por meio de uma malha de elementos finitos quadráticos, cuja densidade foi definida após um rigoroso teste de convergência para garantir a validade e a precisão dos resultados da simulação. A malha final, apresentada na 21, é composta por 500 elementos e 561 nós, totalizando 2805 graus de liberdade (GLDs). A escolha por elementos quadráticos deve-se à sua capacidade de proporcionar maior precisão para superfícies com as características das geometrias analisadas.

Figura 21 – Representação da malha elaborada

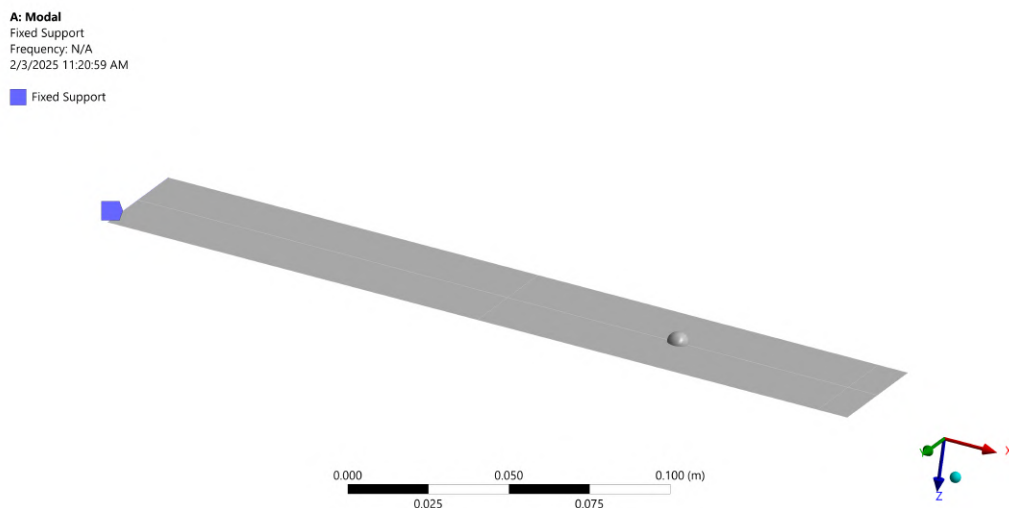


Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5.1.2 Condição de contorno e pontos de análise

Para a análise modal, que tem como objetivo determinar as frequências naturais e formas modais da estrutura, foi aplicada uma condição de suporte fixo (engaste) na extremidade esquerda do corpo, ao longo do eixo y. Embora na análise modal não sejam aplicadas cargas externas, é necessário definir condições de contorno (como apoios ou engastes) para eliminar os modos de corpo rígido e obter frequências naturais reais da estrutura. Este ponto de restrição é essencial para caracterizar corretamente o comportamento vibracional do sistema e está ilustrado na 22, que também indica a localização do centro de massa do corpo ($x=0.01825$ m; $y=0.025$ m; $z=0$ m).

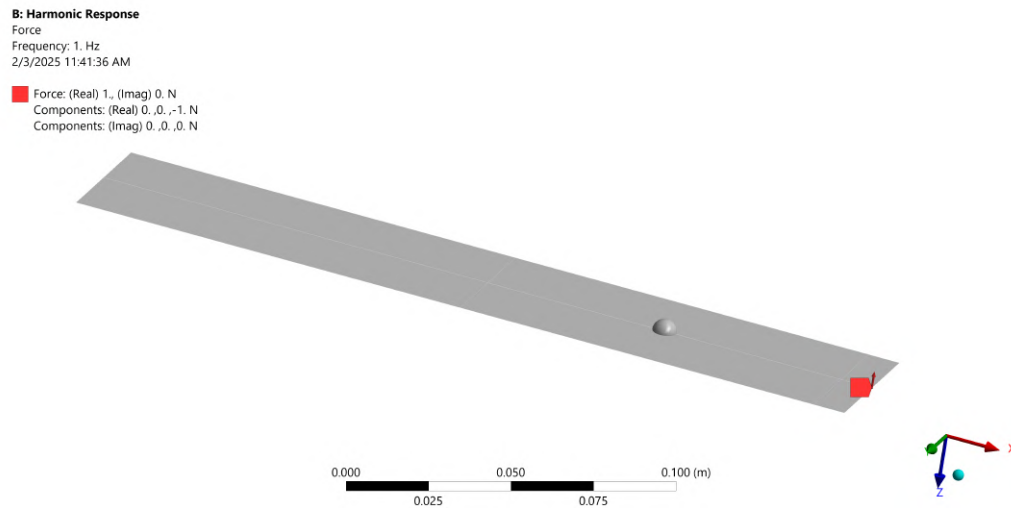
Figura 22 – Indicação do ponto de engaste e do centro de massa



Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando as mesmas condições de contorno da análise modal, a análise de resposta harmônica foi conduzida em uma faixa de frequência de 1 a 2000 Hz. A excitação foi aplicada como uma força em um ponto específico da estrutura, cuja posição é ilustrada na 23.

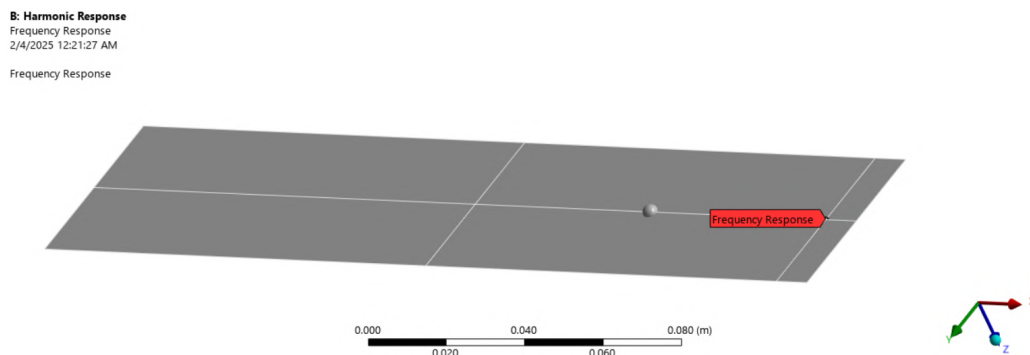
Figura 23 – Ponto de aplicação da força



Fonte: Elaborado pelo autor.

A resposta da aceleração direcional no eixo z foi obtida em um ponto de interesse distinto, detalhado na 24.

Figura 24 – Ponto de obtenção da resposta

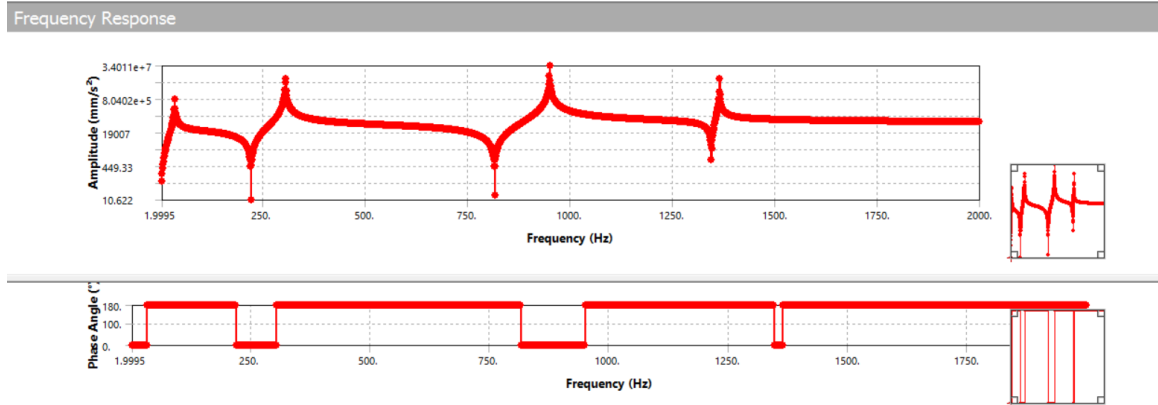


Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5.1.3 Respostas em frequência obtidas

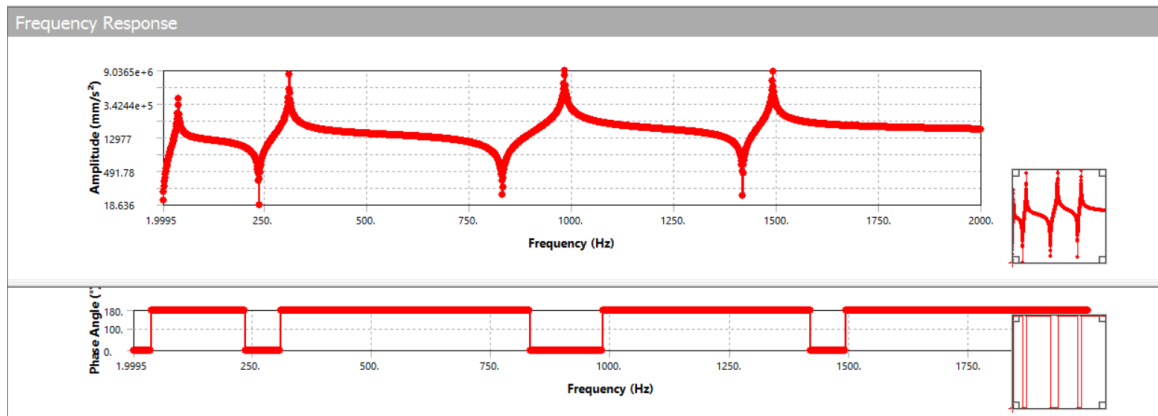
As respostas em frequências obtidas pelo módulo da resposta harmônica para os materiais Alumínio, Aço e Acrílico são apresentadas, respectivamente, na 25, 25 e 27.

Figura 25 – Resposta em frequência do Alumínio



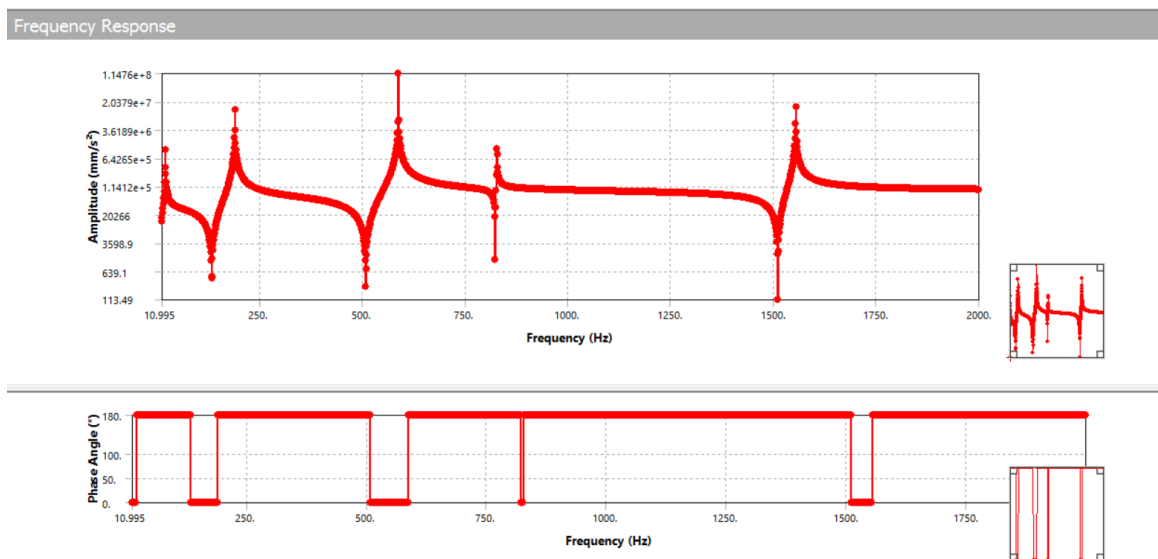
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 26 – Resposta em frequência do Aço



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 27 – Resposta em frequência do Acrílico



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os gráficos obtidos representam as FRFs da estrutura, resultantes da análise harmônica conduzida no ANSYS, considerando excitação senoidal varrendo a faixa de 1 a 2000 Hz. Observa-se a ocorrência de picos de amplitude nas frequências de ressonância, indicando os modos naturais de vibração, acompanhados de variações abruptas no ângulo de fase. A análise dessas curvas permite identificar as frequências naturais, avaliar o comportamento dinâmico da estrutura e estimar qualitativamente o nível de amortecimento a partir da largura dos picos.

4.5.2 Resultados - primeira montagem experimental

Os resultados obtidos na primeira fase da experimentação, estão focados na aplicação de métodos de otimização para a determinação dos parâmetros de amortecimento. Os desafios encontrados nesta etapa foram cruciais para a evolução da metodologia e a justificativa para a exploração de abordagens alternativas.

4.5.2.1 Abordagem inicial: otimização baseada em gradiente (L-BFGS-B)

Inicialmente, a otimização dos parâmetros de amortecimento α e β do modelo de amortecimento modal foi realizada utilizando o método L-BFGS-B e uma função objetivo baseada no MAC, implementada no módulo *scipy.optimize*. A Tabela 4 apresenta os chutes iniciais e os valores correspondentes de α e β após a otimização.

Tabela 4 – Valores de amortecimento para determinadas C.I.

C.I.	$\alpha; \beta$
(0,0001; 0,001)	(0,00010004; 0,00100005)
(0,002; 0,004)	(0,00200164; 0,00400173)
(0,05; 0,002)	(0,05000012; 0,00200004)
(0,007; 0,006)	(0,00700666; 0,00602037)
(0,009; 0,0009)	(0,00900001; 0,00090001)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao analisar a Tabela 4, observa-se que, para cada chute inicial, os valores finais de α e β obtidos após a convergência apresentam apenas pequenas variações em relação aos palpites iniciais. Este comportamento demonstra que o processo de otimização via L-BFGS-B tendeu a identificar mínimos locais próximos aos pontos de partida, sem explorar significativamente o espaço de busca. As pequenas diferenças entre os palpites iniciais e os valores finais sugerem que o método L-BFGS-B, embora consistente na convergência para um mínimo local, não se mostrou robusto para a exploração global da paisagem de otimização, indicando sua inadequação para a determinação dos parâmetros de amortecimento neste contexto. A dependência do chute inicial e a ocorrência de múltiplos mínimos locais eram limitações claras para a obtenção de uma solução globalmente otimizada.

4.5.2.2 Segunda abordagem: otimização com algoritmo genético (GA)

Diante das limitações observadas com a otimização baseada em gradiente, uma abordagem heurística utilizando um Algoritmo Genético (GA) foi implementada como alternativa, com o objetivo de buscar uma convergência mais robusta e menos dependente de chutes iniciais. Esta implementação foi realizada através da biblioteca DPEA do Python (Opasen,), utilizando as métricas MAC, TSAC e RVAC para a função objetivo. A Tabela 5 apresenta as estimativas para os coeficientes de amortecimento normalizados ζ_i do modelo de amortecimento modal.

Tabela 5 – Valores de amortecimento para palpites iniciais de (1e-6 1e-6 1e-6 1e-6 1e-6 1e-6) em um caso escolhido de aço com condição de engaste-livre usando GA.

Métrica	ζ_i					
MAC	(8.2896e-06	8.7724e-07	7.6216e-06	7.3378e-06	1.2944e-06	6.3965e-06)
TSAC	(9.8910e-06	1.3264e-06	9.3545e-06	4.8912e-07	2.8145e-07	8.9014e-06)
RVAC	(1.3436e-06	3.1999e-07	4.7182e-06	1.2495e-06	1.4227e-06	5.2003e-07)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Apesar de ser uma abordagem meta-heurística, a análise da Tabela 5 revela que, para o caso específico testado, o algoritmo genético também não alcançou os resultados esperados para a determinação precisa do amortecimento. Embora os resultados mostrem uma coerência ligeiramente maior entre as diferentes métricas em comparação com o método L-BFGS-B (valores mais próximos de amortecimento para as diferentes métricas), a performance geral ainda foi insatisfatória.

As principais razões para a limitação do Algoritmo Genético nesta etapa incluem hiperparâmetros não ajustados e um número reduzido de gerações. A sensibilidade do GA a parâmetros como tamanho da população, taxas de crossover e mutação é alta, e a falta de ajuste fino pode ter impedido uma busca eficiente no espaço de soluções. Além disso, um número insuficiente de gerações pode ter limitado a capacidade do algoritmo de convergir para um ótimo global ou mesmo para um ótimo local satisfatório, impedindo a exploração completa da paisagem de otimização.

Esses resultados negativos, tanto do método L-BFGS-B quanto do Algoritmo Genético, foram fundamentais para a compreensão das complexidades envolvidas na modelagem e otimização do amortecimento em sistemas vibratórios. Eles reforçam a ideia de que modelos de amortecimento mais refinados e metodologias de otimização mais robustas são cruciais para a obtenção de resultados confiáveis, guiando a pesquisa para as próximas etapas.

4.5.2.3 Análise gráfica das respostas dinâmicas e em frequência

A análise das respostas obtidas na primeira campanha experimental revelou desafios significativos na concordância entre os resultados numéricos otimizados e os dados experimentais, especialmente no que tange à representação precisa do amortecimento.

Para a condição engastado-engastado, o Aço, 30, na resposta em frequência, Figura 30b, mostrou que, embora o modo de ressonância principal, próximo a 200 Hz, tenha sido razoavelmente capturado em frequência pelas otimizações, as curvas de "Numerical Optimization"(MAC, TSAC, RVAC)

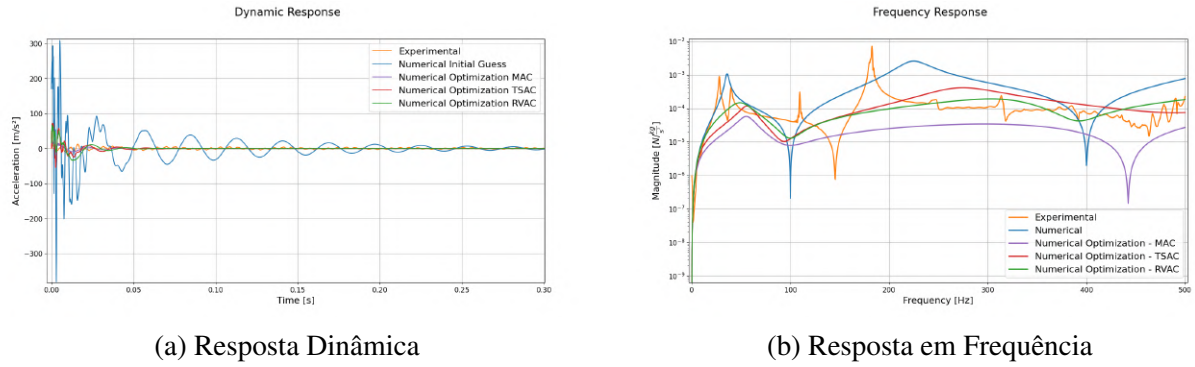
apresentaram uma largura de banda significativamente maior e magnitudes inferiores em comparação com a curva experimental. Esta discrepância indica que os modelos de otimização não conseguiram representar com precisão o baixo amortecimento intrínseco do material, resultando em previsões mais amortecidas do que o observado experimentalmente. Similarmente, na resposta dinâmica, 30a, as curvas otimizadas exibiram um decaimento mais acentuado da amplitude, não reproduzindo a persistência da vibração da curva experimental.

Na condição engastado-livre, o Aço, 31, também demonstrou desafios. Na resposta em frequência, Figura 31b, os picos de ressonância nas curvas otimizadas foram novamente mais largos e com magnitudes distintas em comparação à curva experimental, que exibiu um perfil complexo e com múltiplos picos (e.g., 180 Hz, 350 Hz). A resposta dinâmica, Figura 31a, corroborou essas dificuldades, com as curvas otimizadas apresentando decaimento mais acentuado do que a resposta experimental.

Para o Alumínio na condição engastado-engastado, 28, a resposta em frequência, Figura 28b, apresentou um pico de ressonância experimental nítido próximo a 180 Hz. As curvas otimizadas, no entanto, falharam em reproduzir fielmente a magnitude e a forma deste pico, mostrando picos deslocados e/ou com larguras de banda divergentes, indicando uma dificuldade em capturar o amortecimento e a rigidez corretos. Na resposta dinâmica, Figura 28a, o decaimento da vibração nas curvas otimizadas foi significativamente mais acentuado do que na curva experimental, evidenciando uma superestimação do amortecimento.

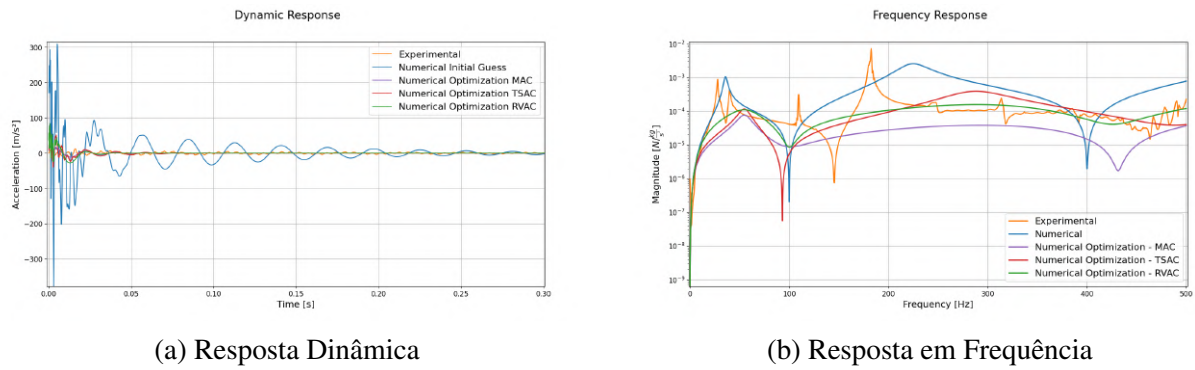
Na condição engastado-livre, o Alumínio, 29, apresentou desafios notáveis na concordância. Na resposta dinâmica, Figura 29a, a curva experimental exibe um decaimento da amplitude que não é consistentemente replicado pelas curvas otimizadas. Embora a "Numerical Initial Guess" e a otimização por MAC pareçam seguir o envelope geral da resposta experimental em algumas regiões, as otimizações por TSAC e RVAC divergem significativamente, exibindo um amortecimento excessivo, resultando em vibrações que cessam muito mais rapidamente do que o observado experimentalmente. No domínio da frequência, Figura 29b, a curva experimental revelou picos de ressonância distintos, notadamente um pico primário próximo a 40 Hz, outro em cerca de 150 Hz, e um terceiro pico significativo próximo a 420 Hz. As curvas numéricas otimizadas por MAC, TSAC e RVAC falharam em reproduzir a forma, magnitude e, em alguns casos, a frequência exata desses picos, especialmente em frequências mais altas, indicando que os métodos não foram capazes de ajustar os parâmetros de amortecimento para corresponder à dissipação de energia real do sistema.

Figura 28 – Alumínio - Engastado-engastado



Fonte: Elaborado pelo autor.

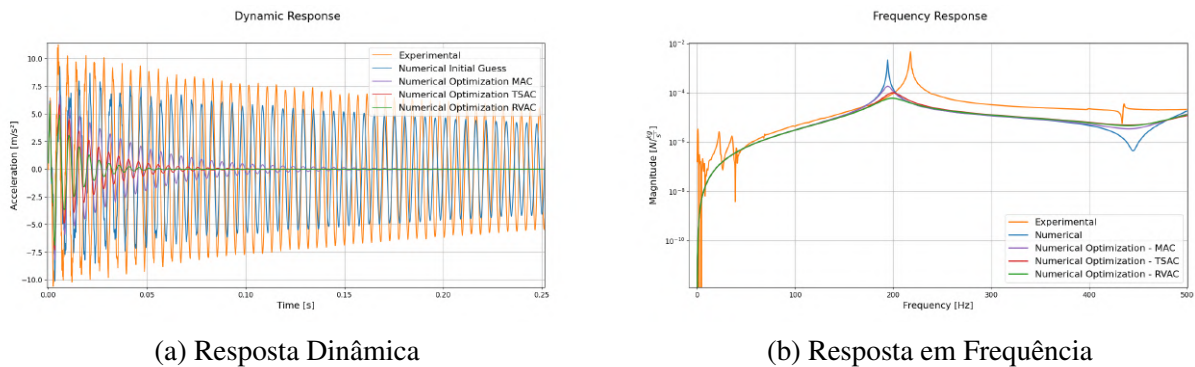
Figura 29 – Alumínio - Engastado-livre



Fonte: Elaborado pelo autor.

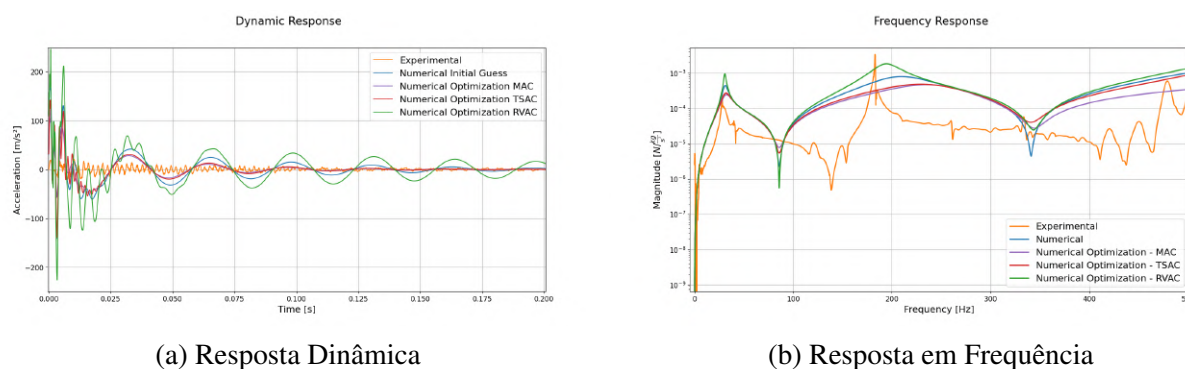
Enquanto as s 30 e 31 expõem as curvas obtidas para as configurações engastado-engastado e engastado-livre, considerando o aço como material.

Figura 30 – Aço - Engastado-engastado



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 31 – Aço - Engastado-livre



(a) Resposta Dinâmica

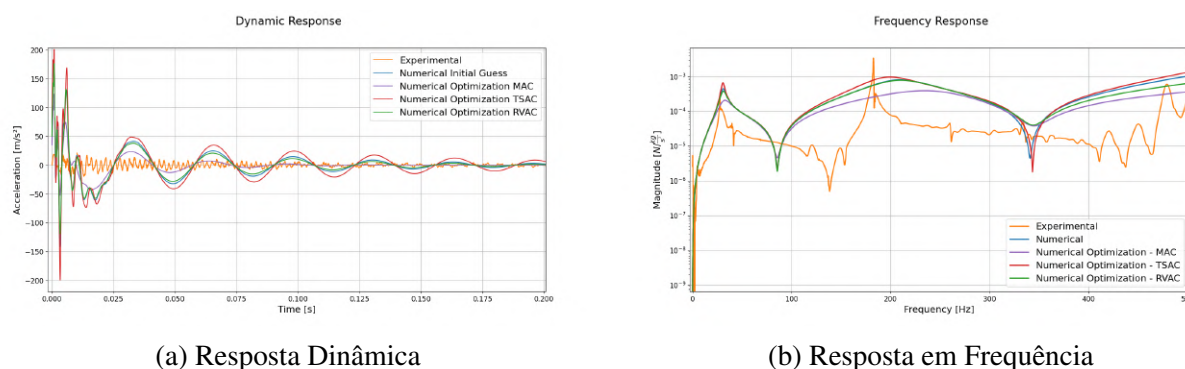
(b) Resposta em Frequência

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o Acrílico, 32, na condição engastado-engastado, a resposta em frequência, Figura 32b, mostrou que, apesar de um pico de ressonância experimental relativamente largo (próximo a 180 Hz, sugerindo maior amortecimento intrínseco), as curvas de otimização ainda apresentaram dificuldades em replicar a forma exata e a magnitude dos picos, com desvios notáveis em relação à curva experimental. A resposta dinâmica, Figura 32a, também exibiu inconsistências no decaimento da vibração, indicando que a otimização não capturou adequadamente a dissipação de energia do acrílico.

Na condição engastado-livre, o Acrílico, 33, na resposta em frequência, Figura 33b, revelou picos experimentais, por exemplo, 20 Hz, 180 Hz e 350 Hz, que foram representados de forma imprecisa pelas curvas otimizadas, com larguras de banda e magnitudes que não correspondiam ao comportamento experimental. A resposta dinâmica, Figura 33a, demonstrou que as curvas numéricas otimizadas frequentemente apresentavam um decaimento mais suave ou oscilações residuais que não se alinhavam com a resposta experimental mais rapidamente amortecida.

Figura 32 – Acrílico - Engastado-engastado

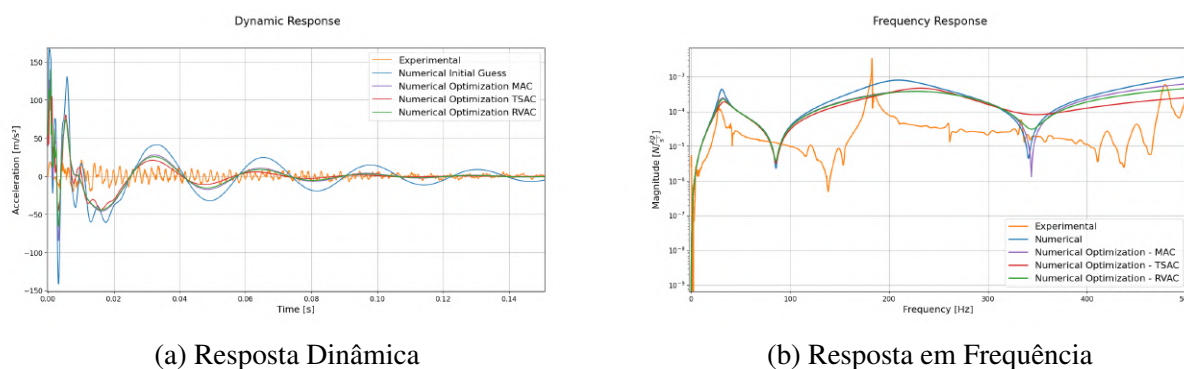


(a) Resposta Dinâmica

(b) Resposta em Frequência

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 33 – Acrílico - Engastado-livre



(a) Resposta Dinâmica

(b) Resposta em Frequência

Fonte: Elaborado pelo autor.

O estudo dos gráficos de respostas dinâmicas, Figuras 28a, 29a, 30a, 31a, 32a e 33a confirma a presença de amortecimento no sistema e a influência de múltiplos modos de vibração, evidenciada pelo formato da curva, que é característico da soma de senos. Adicionalmente, a presença de modos de vibração em baixas frequências exigiu um tempo de aquisição prolongado para capturar adequadamente a resposta do sistema. É importante notar também a influência de múltiplos impactos do martelo nos corpos em teste, os quais geraram resultados que, em alguns casos, podem não ser ideais para a análise pura da resposta do material.

4.5.2.4 Limitações dos métodos de otimização e observações gerais

Conforme evidenciado pelas análises gráficas apresentadas, a abordagem de otimização empregando métodos baseados em gradiente (L-BFGS-B, aplicada com função objetivo MAC) e o algoritmo genético (GA, utilizando MAC, TSAC, RVAC), implementados nesta primeira campanha experimental, não demonstrou a concordância esperada entre os resultados numéricos e experimentais. Uma das principais limitações observadas foi a incapacidade consistente dos modelos numéricos otimizados em capturar o amortecimento real do sistema. Em materiais caracterizados por baixo amortecimento intrínseco, como o aço e o alumínio, os modelos otimizados tenderam a superestimar a dissipação de energia, manifestando-se em picos de ressonância de banda mais larga e um decaimento mais rápido das respostas dinâmicas em comparação com os dados experimentais. Inversamente, mesmo para materiais com maior amortecimento, como o acrílico, a otimização não conseguiu reproduzir o perfil de dissipação com a precisão desejada.

Adicionalmente, os métodos de otimização utilizados apresentaram desafios inerentes de convergência e dependência de mínimos locais. Como detalhado na Tabela 4, a otimização baseada em gradiente (L-BFGS-B) exibiu forte sensibilidade aos chutes iniciais, frequentemente convergindo para mínimos locais que não representavam a solução globalmente ótima da paisagem de otimização. Embora o algoritmo genético seja uma meta-heurística projetada para explorar o espaço de busca de forma mais abrangente, sua implementação nesta fase inicial, conforme Tabela 5, foi limitada por hiperparâmetros não ajustados e um número reduzido de gerações, o que impediu uma otimização robusta e a obtenção de resultados mais acurados.

As discrepâncias observadas na magnitude e forma dos picos de frequência constituem outra evidência dessas limitações. Frequentemente, as curvas otimizadas apresentavam magnitudes de pico inferiores ou formas (largura de banda) que não correspondiam fielmente às observações experimentais, indicando uma modelagem imprecisa tanto do amortecimento quanto da rigidez do sistema. Em um contexto mais amplo, o estudo das respostas dinâmicas em geral confirmou a presença de amortecimento e a influência de múltiplos modos de vibração, característicos da soma de senoides. Contudo, a necessidade de um tempo de aquisição prolongado para capturar adequadamente modos de baixa frequência, juntamente com a interferência de múltiplos impactos do martelo nos corpos de teste, introduziu ruídos e distorções que, em certos casos, comprometeram a idealidade dos resultados experimentais e, conseqüentemente, a capacidade dos modelos de se ajustarem com precisão.

Em suma, os resultados desta primeira campanha, embora não culminando em uma correspondência ideal entre o modelo e o experimento, foram instrumentais para validar a inadequação dos modelos de amortecimento e das metodologias de otimização empregadas nesta fase inicial do estudo. Eles forneceram insights fundamentais sobre as limitações dos modelos simplificados e a crítica importância da qualidade dos dados experimentais e das estratégias de otimização, direcionando, assim, a pesquisa para a busca de abordagens mais refinadas na grupo de ensaios subsequente.

4.5.3 Resultados - segunda montagem experimental

Esta seção detalha os resultados da segunda campanha experimental, focando na caracterização do comportamento vibracional de diversos materiais sob a condição de contorno livre-livre. Esta configuração foi estrategicamente adotada para mitigar as limitações observadas na campanha experimental anterior, que incluíam a influência de restrições de fixação e a presença de ruído excessivo, dificultando a otimização precisa dos parâmetros de amortecimento. A condição livre-livre visa proporcionar uma resposta vibracional intrínseca das amostras, otimizando a qualidade dos dados para a calibração de modelos numéricos.

Os resultados experimentais são apresentados nas Figuras 35 a 42, ilustrando as respostas no domínio do tempo e no domínio da frequência para cada amostra.

4.5.3.1 Análise das respostas dinâmicas e em frequência por material

A análise integrada das respostas dinâmicas e em frequência permite uma caracterização abrangente do comportamento vibracional de cada material na condição livre-livre.

A resposta dinâmica do aço, 35 exibiu uma amplitude de aceleração inicial superior a 400 m/s^2 , seguida por um decaimento lento da oscilação, persistindo por mais de 0.5 segundos. Este comportamento é indicativo de um material com baixo amortecimento intrínseco e elevada rigidez. Corroborando esta observação, o espectro de frequência apresentou picos de ressonância nítidos e de banda estreita. O modo fundamental foi identificado aproximadamente em 150 Hz, com modos de ordem superior proeminentes em cerca de 380 Hz e 440 Hz, demonstrando uma concentração de energia vibracional em frequências naturais bem definidas. De maneira similar, a resposta dinâmica da, 34, apresentou uma amplitude inicial de aproximadamente 300 m/s^2 , com um decaimento gradual comparável ao do aço, sugerindo um baixo coeficiente de amortecimento. Seu gráfico de resposta em frequência revelou

picos de ressonância igualmente distintos, com o pico principal localizado em torno de 150 Hz e um modo secundário significativo em aproximadamente 420 Hz, evidenciando uma resposta em frequência com modos dominantes claramente isolados para este material.

Em contraste com os materiais metálicos, o acrílico, 36, exibiu um perfil de amortecimento distinto. Sua resposta dinâmica mostrou um decaimento mais rápido da amplitude, com uma amplitude inicial próxima a 200 m/s^2 e atenuação perceptível em menos de 0.15 segundos, indicando um amortecimento intrínseco mais elevado. No domínio da frequência, o acrílico apresentou picos de ressonância de banda mais larga e menor fator de qualidade em comparação com os metais. O pico de maior amplitude foi observado em aproximadamente 300 Hz, com a largura desses picos sendo consistente com a maior dissipação de energia intrínseca do material.

O tubo de compósito de fibra de carbono, 37, apresentou uma resposta dinâmica com alta amplitude inicial, superior a 400 m/s^2 , e um decaimento relativamente lento, persistindo por cerca de 0.25 segundos. Este perfil indica um baixo nível de amortecimento para o compósito testado. O espectro de frequência correspondente revelou picos de ressonância proeminentes e bem definidos, com o pico de maior magnitude localizado em aproximadamente 270 Hz, e a presença de múltiplos picos secundários que sugerem um comportamento modal caracterizado por múltiplos modos bem definidos, típico de estruturas compósitas.

Para os cilindros de fibra de vidro, a Configuração 1 38, onde os dois acelerômetros estavam posicionados a 0° um em relação ao outro, apresentou uma resposta dinâmica com amplitude inicial em torno de 100 m/s^2 . O decaimento da amplitude foi mais rápido que o observado nos metais e fibra de carbono, mas mais gradual que o acrílico ou PLA, com atenuação considerável após 0.25 segundos, sugerindo um nível moderado de amortecimento. Seu gráfico de resposta em frequência mostrou um pico de ressonância dominante e bem definido em aproximadamente 160 Hz, com um pico secundário notável em torno de 460 Hz. Os picos apresentaram largura de banda relativamente estreita, indicando que, apesar do amortecimento, este não é tão pronunciado quanto em polímeros. A consistência entre as curvas "Resposta 1" e "Resposta 2" em ambos os domínios reforça a confiabilidade da medição.

Para a Configuração 2, 39, onde um acelerômetro foi posicionado a 90° em relação ao segundo, a resposta dinâmica exibiu características gerais similares à Configuração 1, com decaimento moderado, amplitude inicial comparável e atenuação em período semelhante. No domínio da frequência, esta configuração apresentou picos de ressonância nas mesmas frequências principais da Configuração 1, aproximadamente 160 Hz e 460 Hz, porém, com pequenas variações na amplitude relativa dos picos. As larguras de banda dos picos permaneceram semelhantes, indicando que a mudança de configuração não alterou significativamente o nível de amortecimento, mas pode ter influenciado levemente a excitação ou a resposta modal específica dos sensores.

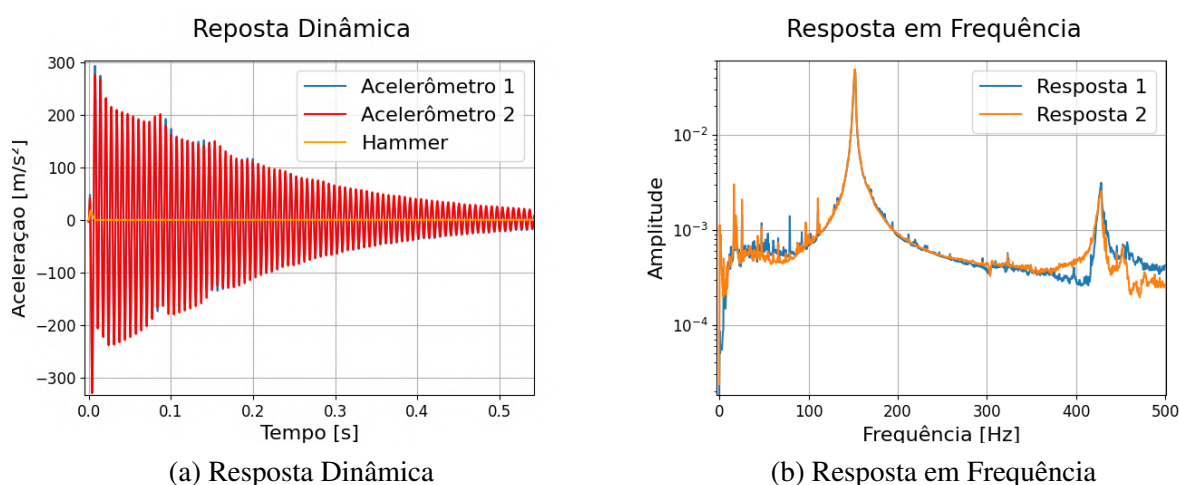
As estruturas prototipadas em PLA demonstraram um comportamento de amortecimento consistentemente elevado. A estrutura de caverna em PLA, 40, exibiu um decaimento rápido da amplitude na resposta dinâmica, amplitude inicial próxima a 100 m/s^2 , atenuando-se significativamente em 0.15 segundos, confirmando um elevado amortecimento intrínseco. Observou-se uma complexa modulação da amplitude, reflexo da excitação de múltiplos modos de vibração. Corroborando estes dados, os picos de ressonância no espectro de frequência foram notavelmente mais largos e menos proeminentes do que

nos materiais com baixo amortecimento, com picos significativos identificados em aproximadamente 200 Hz e 380 Hz.

Analogamente, a longarina em PLA na Configuração 1, 41, com acelerômetros a 0° entre si, apresentou um rápido decaimento da vibração - amplitude inicial de aproximadamente 70 m/s^2 , com atenuação substancial em 0.15 segundos - similar ao comportamento da caverna em PLA. Seu espectro de frequência exibiu picos de ressonância de banda larga, com um pico mais amplo em baixas frequências, abaixo de 50 Hz, e um pico mais nítido e proeminente em aproximadamente 470 Hz. A amplitude relativamente baixa da resposta em frequência em comparação com outros materiais reforça o elevado amortecimento.

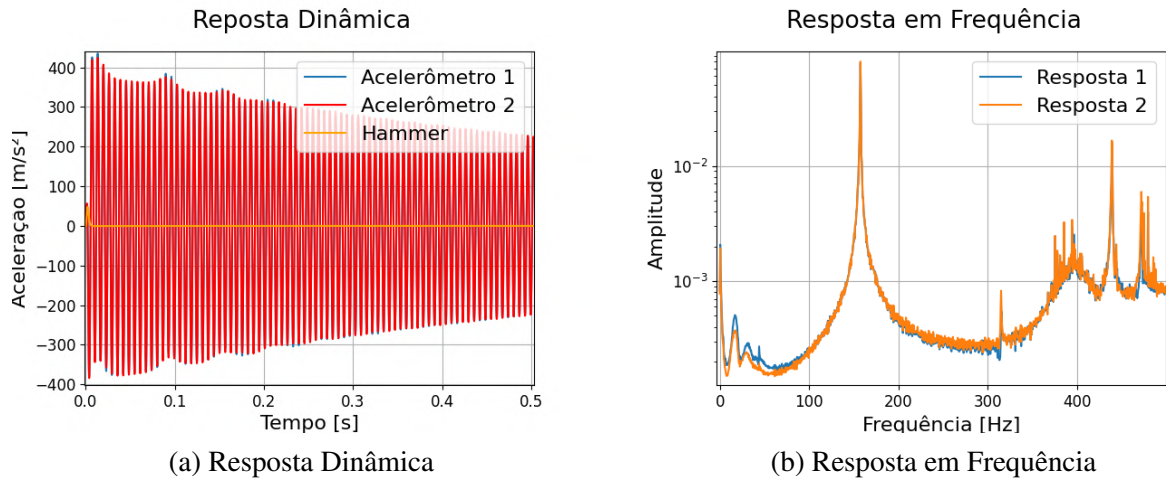
Finalmente, a longarina em PLA na Configuração 2, 42, com um acelerômetro a 90° em relação ao outro, manteve o padrão de rápido decaimento característico do PLA, com amplitudes e tempos de atenuação similares à Configuração 1, indicando um comportamento de amortecimento consistente. No domínio da frequência, esta configuração exibiu picos de ressonância em frequências ligeiramente distintas, pico em baixa frequência inferior a 50 Hz e outro em aproximadamente 480 Hz, embora a largura de banda e o perfil geral dos picos, indicativos de alto amortecimento, fossem mantidos. As pequenas variações nas frequências naturais entre as configurações de 0° e 90° sugerem uma leve anisotropia de rigidez devido à orientação de fabricação ou à excitação de modos vibracionais ligeiramente diferentes.

Figura 34 – Alumínio - Livre-Livre



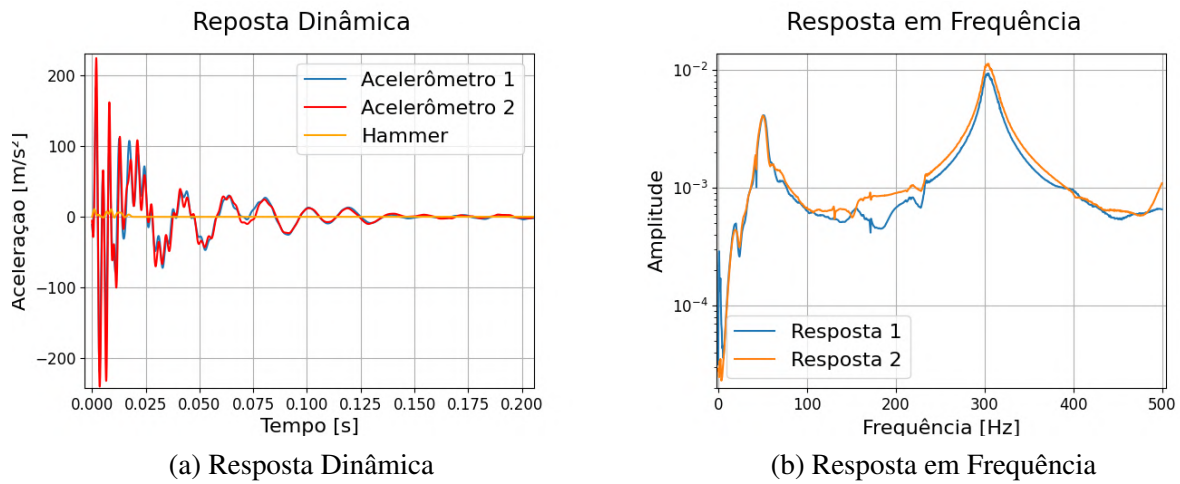
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 35 – Aço - Livre-Livre



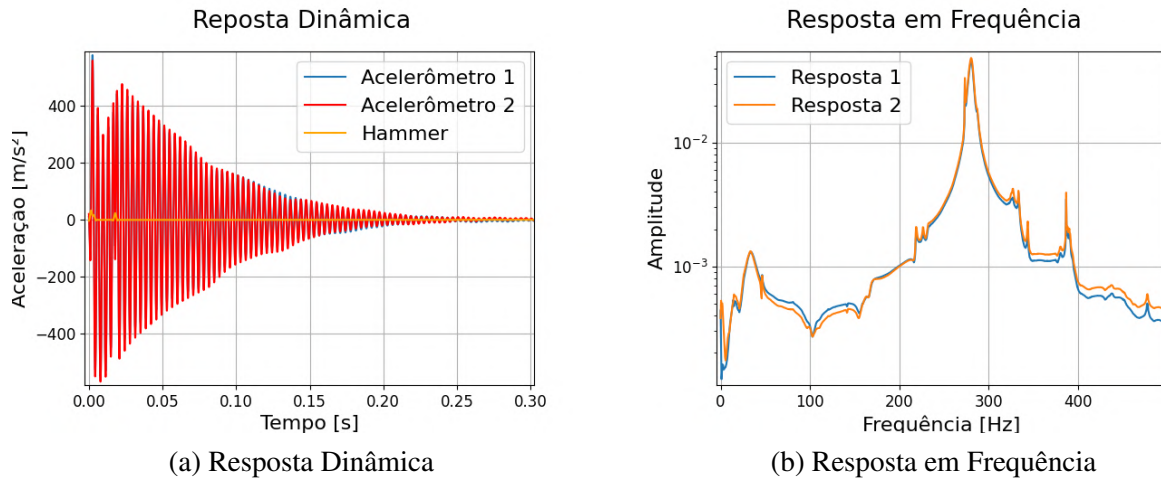
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 36 – Acrílico - Livre-Livre



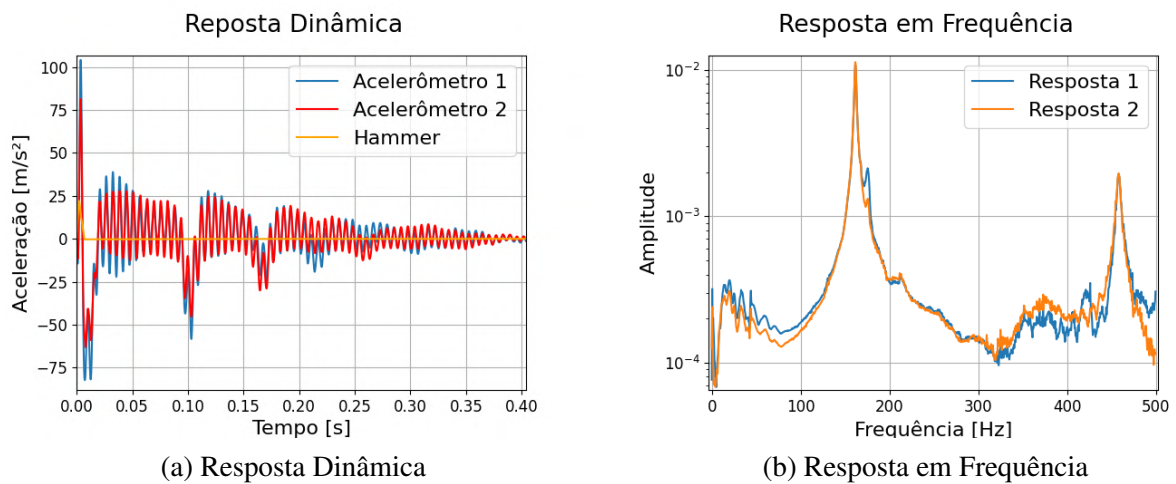
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 37 – Fibra de Carbono - Livre-Livre



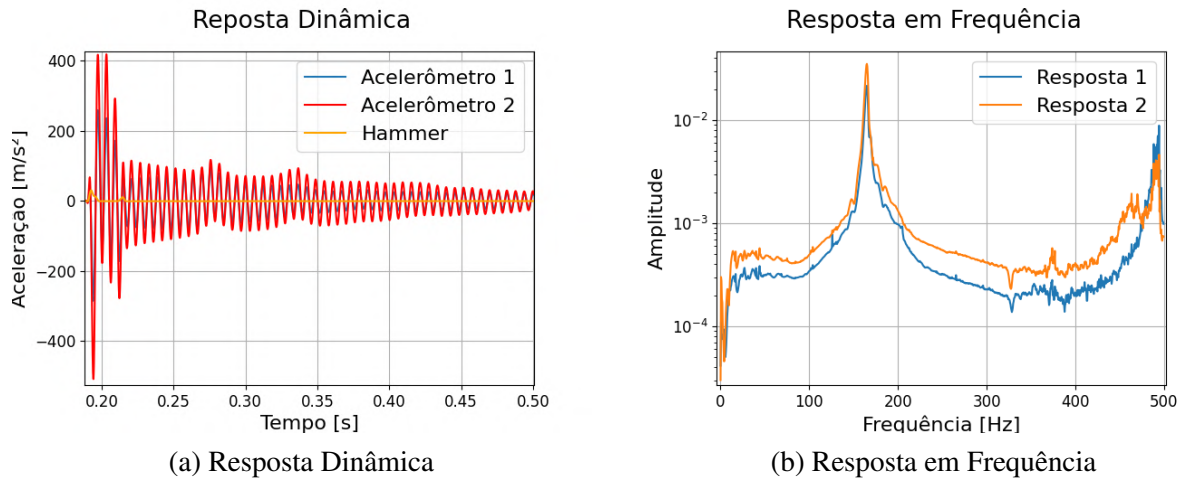
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 – Fibra de Vidro - Configuração 1 Livre-Livre



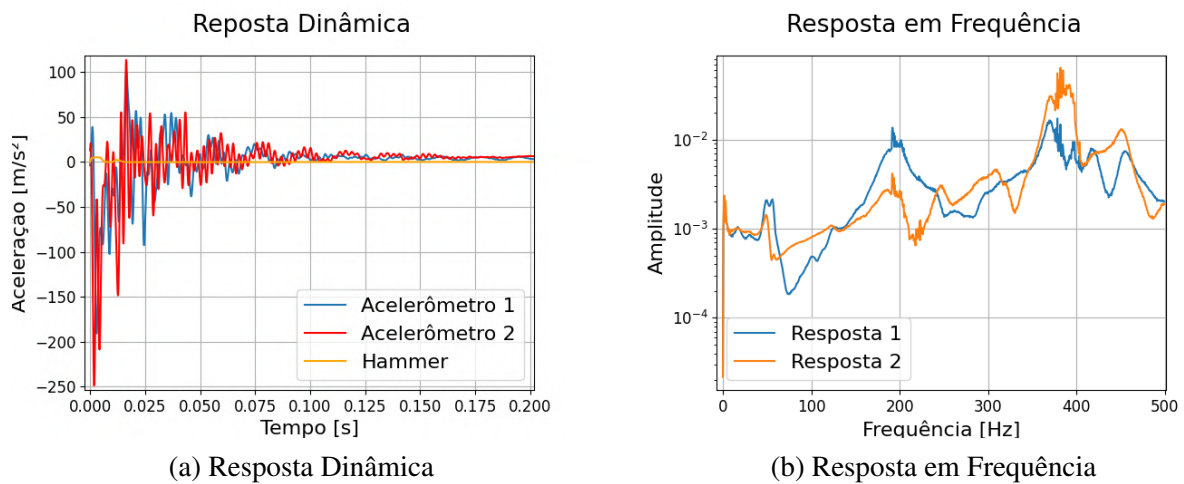
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 39 – Fibra de Vidro - Configuração 2 Livre-Livre



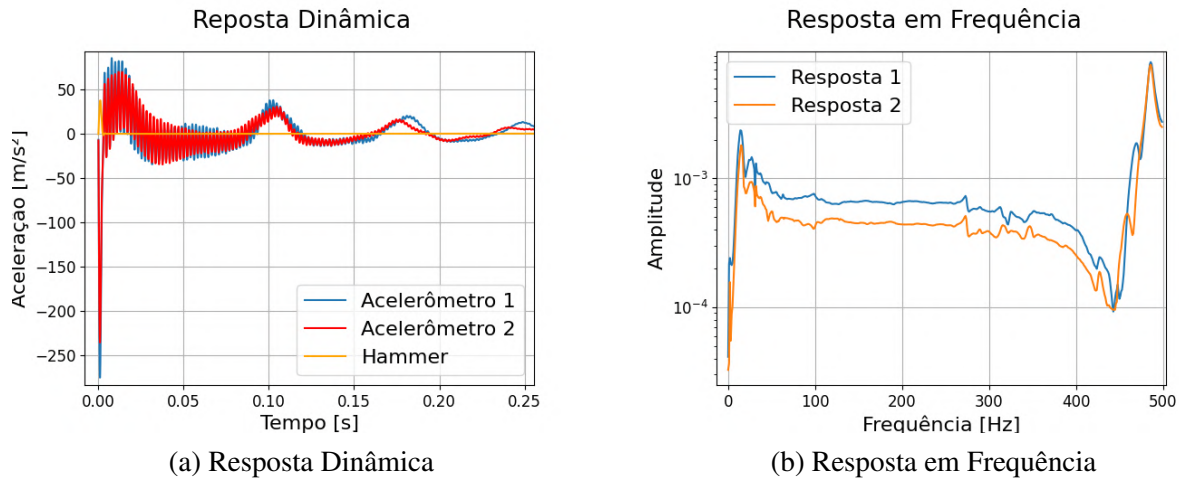
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 40 – Caverna em PLA - Livre-Livre



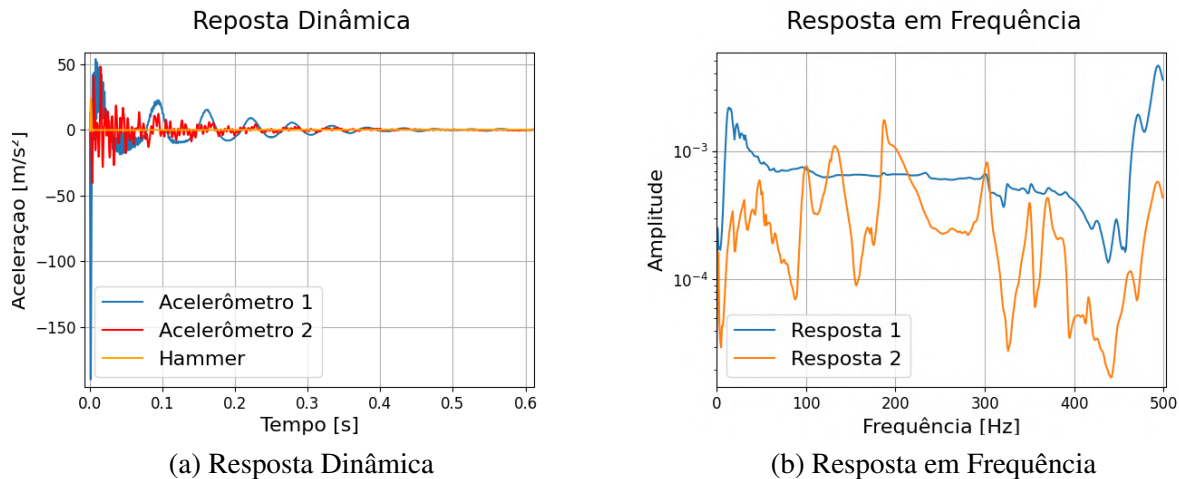
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 41 – Longarina em PLA - Configuração 1 Livre-Livre



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 42 – Longarina em PLA - Configuração 2 Livre-Livre



Fonte: Elaborado pelo autor.

A implementação da condição de contorno livre-livre na segunda bateria de experimentos resultou em uma significativa melhoria na qualidade dos dados, caracterizada por uma redução notável no ruído e na interferência de acoplamentos com as estruturas de fixação. Esta melhoria é evidente pela maior nitidez e distinção dos picos de ressonância nos gráficos de frequência, facilitando a identificação precisa das frequências naturais dos materiais.

Embora a presença de múltiplos modos de vibração e a necessidade de um tempo de aquisição prolongado para capturar modos de baixa frequência permaneçam intrínsecas ao fenômeno, a diminuição dos artefatos experimentais permite uma análise mais fidedigna do comportamento dinâmico dos materiais. A elevada qualidade dos dados obtidos nesta campanha é fundamental para a calibração e validação de modelos numéricos de amortecimento, uma vez que oferece uma base experimental robusta para a determinação de parâmetros e a avaliação da acurácia dos modelos. A acurácia na identificação das frequências naturais e do amortecimento é crucial para a predição do comportamento vibracional de sistemas complexos.

5 CONCLUSÃO

Infere-se, portanto, que este trabalho teve como principal objetivo desenvolver uma metodologia para obtenção de parâmetros de amortecimento estrutural a partir de análises inversas, combinando simulações numéricas via Método dos Elementos Finitos (MEF) e ensaios modais. A abordagem foi aplicada a diferentes estruturas de geometria tipo viga e elementos em placa simplificados, fabricados com uma ampla variedade de materiais.

As simulações iniciais, baseadas em modelos de Euler-Bernoulli/Saint-Venant, apresentaram limitações na representação fiel do comportamento amortecido das vigas. Observou-se, por exemplo, que o modelo numérico apresentou um decaimento mais rápido que o experimental, Figura 13a, sugerindo superestimação do amortecimento. Além disso, embora as frequências naturais tenham mostrado boa concordância, Figura 13b, a diferença na magnitude dos picos indicou que o modelo numérico não capturava adequadamente o nível real de dissipação, principalmente acima de 180 Hz.

A tentativa de ajuste automático dos parâmetros de amortecimento, por meio de métodos baseados em gradiente (L-BFGS-B) e algoritmos genéticos (GA), não alcançou os resultados esperados. O L-BFGS-B mostrou alta sensibilidade aos valores iniciais, convergindo para mínimos locais, enquanto o GA não foi eficaz, possivelmente em função da calibração insuficiente dos hiperparâmetros e do número restrito de gerações avaliadas. Particularmente para materiais com baixo amortecimento, como aço e alumínio, os modelos otimizados superestimaram a dissipação, resultando em respostas dinâmicas com decaimento excessivamente rápido e picos mais largos nas FRFs.

Diante dessas limitações, foi realizada uma segunda campanha experimental com corpos de prova em condição de contorno livre-livre, a qual trouxe ganhos substanciais em qualidade de dados ao reduzir interferências de fixação e ruído. Essa nova etapa possibilitou caracterizar de forma mais precisa o comportamento dinâmico e dissipativo do aço e alumínio, os quais mostraram baixo amortecimento intrínseco, com picos de ressonância estreitos e decaimento lento. No caso do acrílico, foi apresentado um maior amortecimento, evidenciado por picos mais largos e decaimento mais rápido. Enquanto que na fibra de carbono revelou baixo amortecimento, com picos bem definidos, e a fibra de vidro demonstrou comportamento intermediário. Por fim, o PLA, tanto nas geometrias tipo caverna quanto longarina, apresentou alto nível de amortecimento, com picos mais largos e menos proeminentes.

Esses resultados experimentais, obtidos a partir de diferentes geometrias e materiais, representam a principal contribuição concreta deste estudo. Eles oferecem uma base sólida para validação de modelos numéricos e para o aprimoramento de estratégias de ajuste de parâmetros. Por fim, este trabalho amplia o entendimento sobre o fenômeno de amortecimento estrutural e abre perspectivas para o uso desses dados e modelos no treinamento de redes neurais artificiais voltadas à identificação de parâmetros dinâmicos em sistemas complexos e potencialmente não lineares.

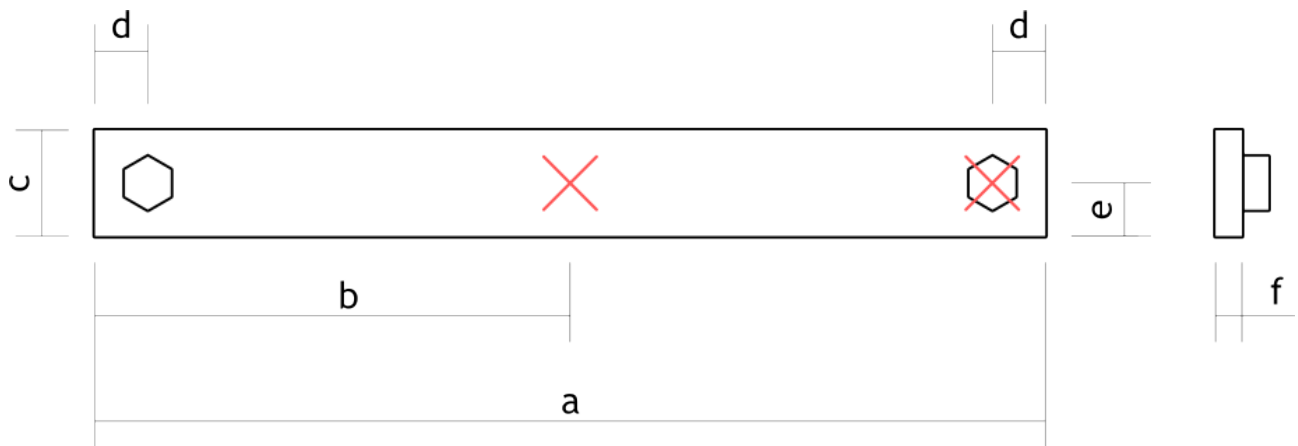
REFERÊNCIAS

- ADNAN, A.; MOHAMED, N.; ZAIRI, M. A review on inverse methods for identification of structural parameters: Towards damage detection. **Journal of Mechanical Science and Technology**, v. 34, p. 1459–1473, 2020.
- Ansys Inc. **ANSYS Mechanical APDL Element Reference: SHELL181**. [S.l.], 2024. Disponível em: <https://www.ansys.com>. Acesso em: 25 jul. 2025.
- Ansys Inc. **ANSYS Mechanical APDL Theory Reference**. [S.l.], 2024. Disponível em: <https://www.ansys.com>. Acesso em: 25 jul. 2025.
- ARORA, V. Structural damping identification method using normal frfs. **International Journal of Solids and Structures**, v. 51, p. 133–143, 2014.
- ASCHER, U. M.; PETZOLD, L. R. **Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations**. Philadelphia: SIAM, 1998. ISBN 0-89871-412-5.
- ASHER, M. H.; PETZOLD, L. R. **Computational Methods for Ordinary Differential Equations**. [S.l.]: Wiley, 1998.
- CONG, S.; HU, S.-L. J.; LI, H.-J. Inverse modeling of damping and soil–structure interface for monopiled offshore wind turbines. **Ocean Engineering**, v. 216, 2020.
- CRAIG, R.; KURDILA, A. **Fundamentals of Structural Dynamics**. Hoboken, NJ: John Wiley, 2006.
- DALE, G. A. Going green moves to higher gear. **Aerospace America**, p. 21–24, 2016. Disponível em: <https://aerospaceamerica.aiaa.org/departments/going-green-moves-to-higher-gear/>. Acesso em: 10 abr. 2025.
- DURSUM, T.; SOUTIS, C. Recent developments in advanced aircraft aluminium alloys. **Materials & Design (1980–2015)**, v. 56, p. 862–871, 2014. ISSN 0261-3069.
- EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory, Practice and Application**. 2. ed. [S.l.]: Research Studies Press, 2000.
- FLORIO, F. D. Flight safety. *In*: **Airworthiness**. [S.l.]: Elsevier, 2016. p. 1–3.
- FRANDSEN, J. B.; SÆBØ, S. Inverse identification of damping properties of a composite beam using a modal approach. **Applied Acoustics**, v. 145, p. 360–366, 2019.
- GONZÁLEZ, C. *et al.* Structural composites for multifunctional applications: Current challenges and future trends. **Progress in Materials Science**, v. 89, p. 194–251, 2017. ISSN 0079-6425.
- GUDMUNDSSON, S. **General Aviation Aircraft Design**. Woburn, MA: Butterworth-Heinemann, 2016.
- HUGHES. **The Finite Element Method**. Mineola, NY: Dover Publications, 2000. (Dover Civil and Mechanical Engineering).
- IATA. **Future of the Airline Industry 2035**. IATA, 2017. Disponível em: <https://www.iata.org/policy/Documents/iata-future-airline-industry.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2025.
- ISERLES, A. **A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations**. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. ISBN 978-0-521-55655-2.

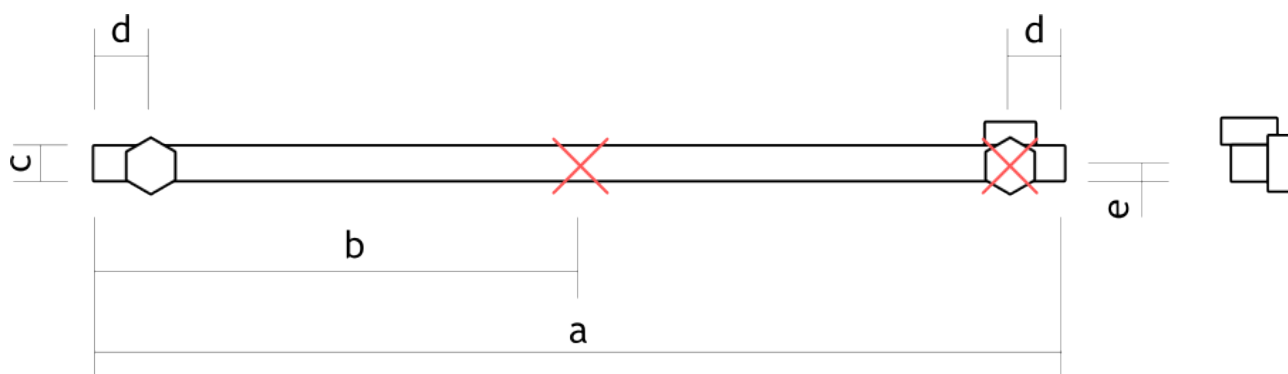
- JR., W. D. C. **Ciência e engenharia de materiais: uma introdução**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002.
- KAVEH, A. **Metaheuristic Algorithms for Optimal Design of Structures**. [S.l.]: Springer, 2014.
- LI, Z. *et al.* Mechanical properties of high-entropy alloys with emphasis on face-centered cubic alloys. **Progress in Materials Science**, v. 102, p. 296–345, 2019. ISSN 0079-6425.
- LIN, R. M.; ZHU, J. Model updating of damped structures using frf data. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 20, n. 8, 2006.
- MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. **Modal Analysis and Testing**. 2. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2014.
- MEDEIROS, R. *et al.* A comparative assessment of different frequency-based damage detection in unidirectional composite plates using mfc sensors. **Journal of Sound and Vibration**, v. 383, p. 171–190, 2016.
- NAKAMURA, N. Extended rayleigh damping model. **Frontiers in Built Environment**, v. 2, p. 14, 2016. ISSN 2297-3362. Disponível em: <https://www.frontiersin.org/journals/built-environment/articles/10.3389/fbuil.2016.00014/full>. Acesso em: 16 mai. 2023.
- NATKE, H. G.; YAO, J. T. P. (Ed.). **Structural Safety and Reliability: Proceedings of the 7th International Conference on Structural Safety and Reliability**. [S.l.]: Pergamon, 1998.
- NEGRUȚ, D. *et al.* On an implementation of the hilber–hughes–taylor method in the context of index 3 differential-algebraic equations of multibody dynamics. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, v. 2, 2006.
- NIU. **Airframe Stress Analysis and Sizing**. Hong Kong: Hong Kong Conmilit Press Ltd., 1997.
- OPASEN, D. **DPEA – Demetry’s Pascal Evolutionary Algorithms**. Software. Disponível em: https://github.com/PasaOpasen/PasaOpasen.github.io/blob/master/EA_packages.md#dpea-demetrys-pascal-evolutionary-algorithms. Acesso em: 17 ago. 2024.
- PAN, Y.; WANG, Y. Inverse identification of exponential damping using experimental frequency response functions. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 54–55, p. 57–69, 2015.
- PASTOR, M.; BINDA, M.; HARČARIK, T. Modal assurance criterion. **Procedia Engineering**, v. 48, p. 543–548, 2012.
- PIPPO, S. D. Third ICAO/UNOOSA symposium focuses on space harmony. **The ICAO Journal**, v. 72, n. 4, p. 14–16, 2017.
- PRADHAN, S.; MODAK, H. A review of numerical methods for structural vibration and their applications. **International Journal of Computational Methods**, v. 14, n. 6, p. 1750031, 2017.
- QIAO, J. C. *et al.* Structural heterogeneities and mechanical behavior of amorphous alloys. **Progress in Materials Science**, v. 104, p. 250–329, 2019.
- RAO, S. **Engineering Optimization: Theory and Praxis**. [S.l.]: Wiley, 2009.
- REYNDERS, E.; ROECK, G. D. Finite element model updating using experimental data: A unified dynamic approach. **Journal of Sound and Vibration**, v. 313, n. 1–2, p. 48–61, 2008.
- SOHOULI, A.; YILDIZ, M.; SULEMAN, A. Cost analysis of variable stiffness composite structures with application to a wind turbine blade. **Composite Structures**, v. 203, p. 681–695, 2019.

- SÜLI, E.; MAYERS, D. **An Introduction to Numerical Analysis**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.
- VIRTANEN, P. *et al.* SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. **Nature Methods**, v. 17, n. 3, p. 261–272, 2020.
- WANG, T. *et al.* Shear stress correction in Euler–Bernoulli beam theory. **Journal of Mechanical Science and Technology**, v. 39, p. 2627–2637, 2025.
- WATERS, G. W. Evolution of railroad economics. **Research in Transportation Economics**, v. 20, p. 11–67, 2007.
- WRIGHT, J. R.; COOPER, J. E. **Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads**. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd., 2014. 499 p.
- WU, Y. *et al.* Model updating using frequency response functions based on Sherman–Morrison formula. **Applied Sciences**, v. 10, n. 14, p. 4985, 2020. ISSN 2076-3417.
- ZHANG, L.; CHEN, G. An inverse method for damping identification of beam structures using vibration responses. **Journal of Vibroengineering**, v. 12, n. 4, p. 517–526, 2010.

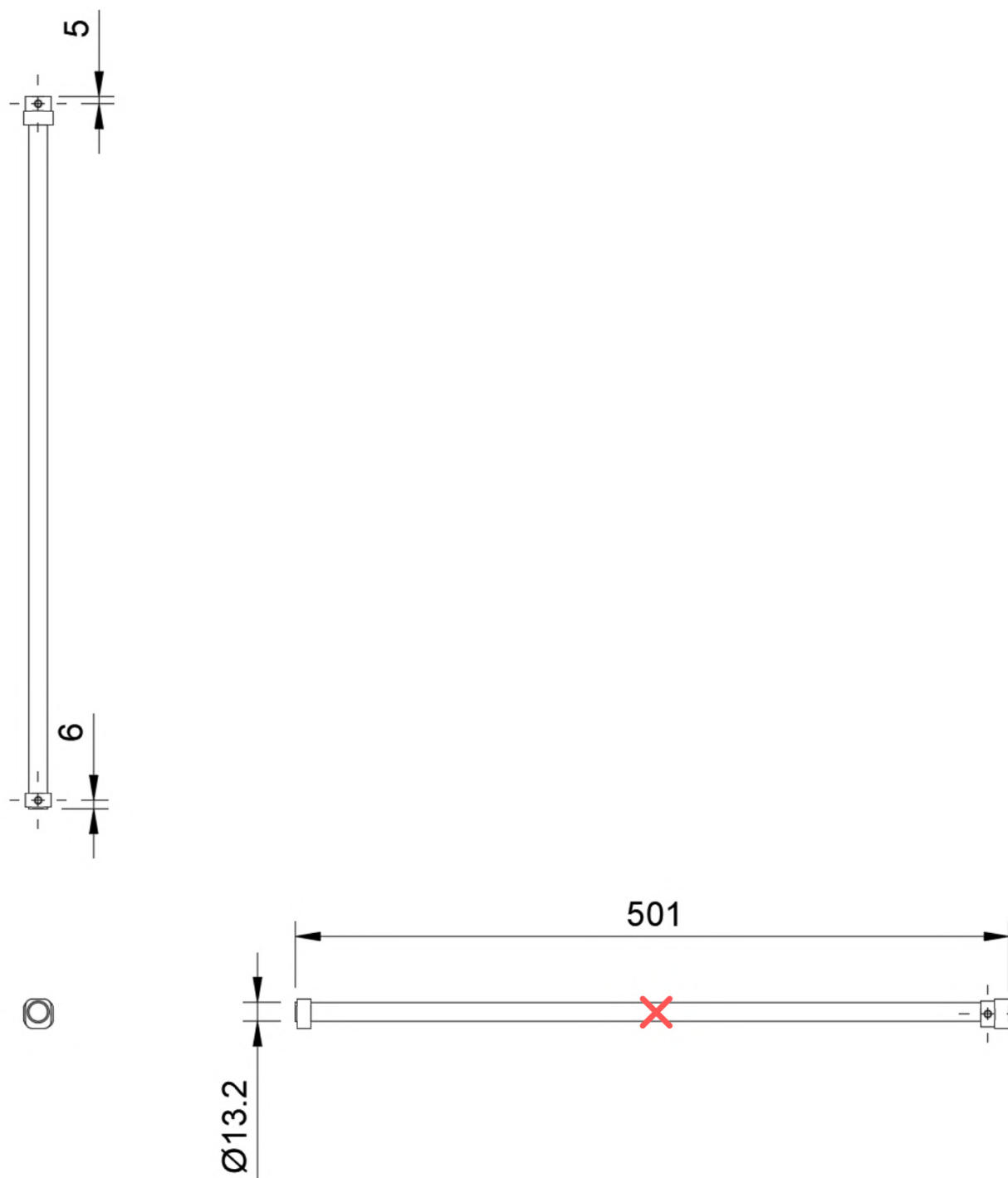
**APÊNDICE A – DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA EM FORMATO DE BARRA
RETANGULAR**



Fonte: Elaborado pelo autor.

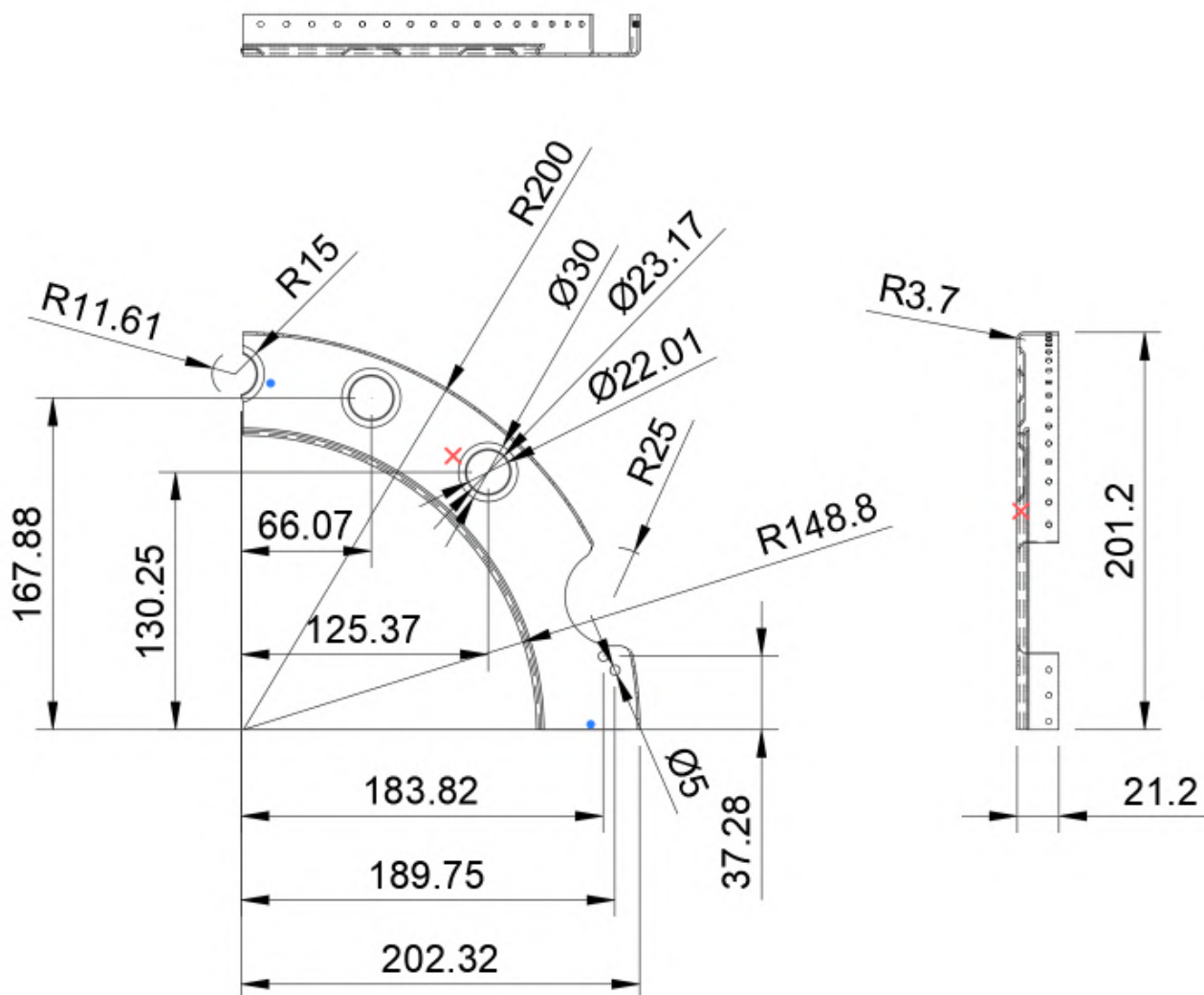
APÊNDICE B – DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA DE FIBRA DE CARBONO

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE C – DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA DE FIBRA DE VIDRO

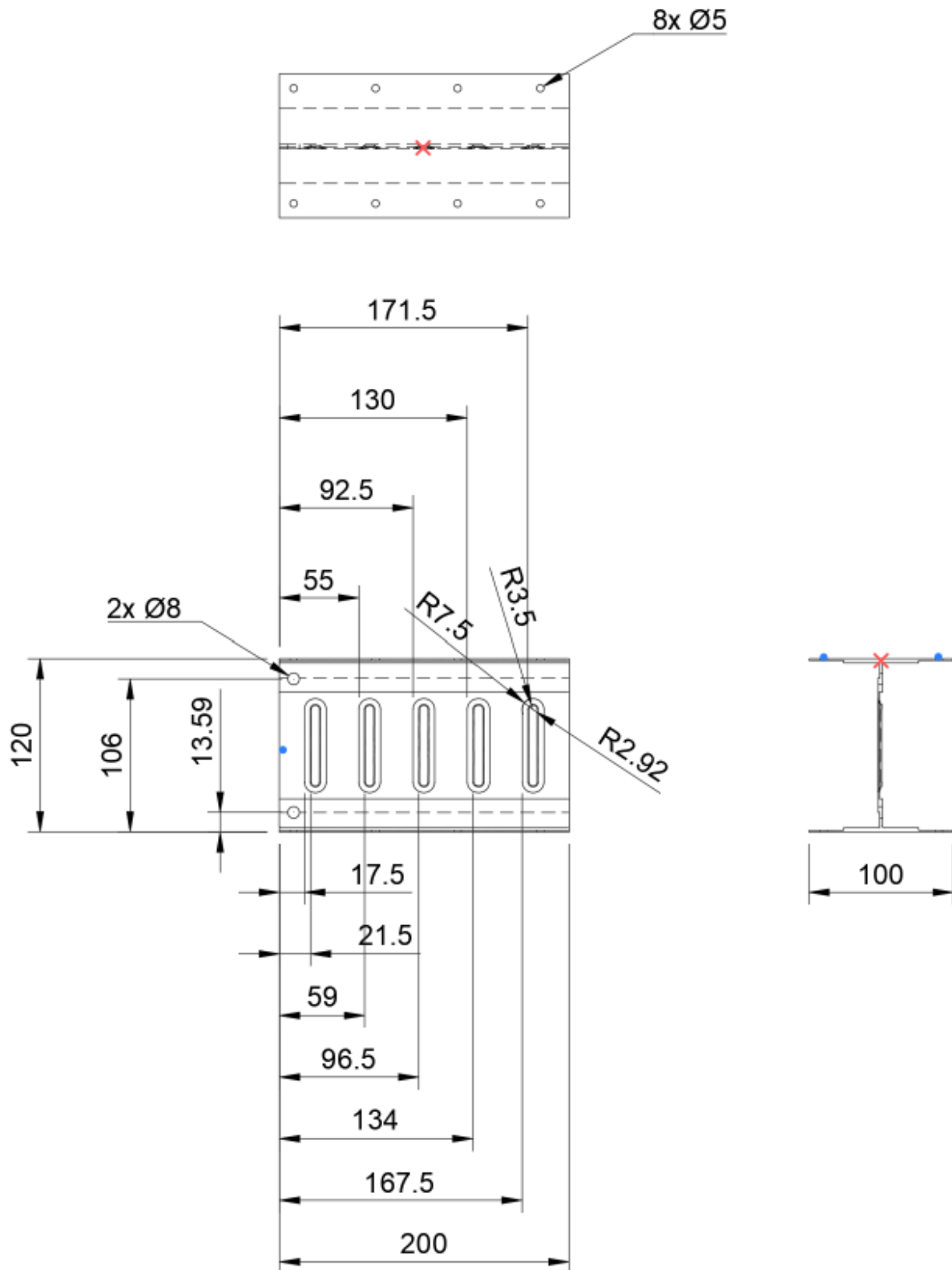
Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE D – DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA DE CAVERNA IMPRESSA EM PLA



Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE E – DIMENSÕES DOS CORPOS DE PROVA DE LONGARINA IMPRESSA EM PLA



Fonte: Elaborado pelo autor.