

**ÁLGEBRAS DE LIE E APLICAÇÕES
À SISTEMAS ALTERNANTES**

Rildo Pinheiro do Nascimento

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 098

Álgebras de Lie e Aplicações à Sistemas Alternantes

Rildo Pinheiro do Nascimento. ¹

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva.

São José do Rio Preto.

5 de setembro de 2005.

¹contato: rildo@uems.br

Álgebras de Lie e Aplicações à Sistemas Alternantes

Rildo Pinheiro do Nascimento.

Banca Examinadora:

Geraldo Nunes Silva, Livre Docente(UNESP)

Orientador

Antonio Carlos Gardel Leitão, Doutor(UFSC)

Examinador 1

Fernando Manuel Ferreira Lobo Pereira, Doutor(Universidade do Porto – Portugal)

Examinador 2

São José do Rio Preto.

5 de setembro de 2005.

À Jesus meu Senhor.

Aos meus pais, Estanislau e Luzia.

Às minhas irmãs, Regina e Urcely.

Dedico

Agradecimentos

À Deus, Criador e sustentador do Universo, pela vida. À minha família, que sempre me apoiou. Ao Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva, pelo apoio na definição do trabalho, pela compreensão e paciência na orientação. À Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, pelo apoio. À todos os professores e funcionários da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul que me apoiaram e incentivaram. À todos os professores e colegas pós-graduandos do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, e aos funcionários da UNESP Campus de São José do Rio Preto, que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho é feito um estudo aprofundado da estabilidade de sistemas alternantes, principalmente via teoria de Lie. Inicialmente são apresentados os principais conceitos básicos da álgebra de Lie, necessários para o estudo dos critérios de estabilidade dos sistemas alternantes. Depois são discutidos critérios de estabilidade para sistemas alternantes. É feita a exposição da demonstração de que para todo sistema linear da forma $\dot{x} = A_p x$ $p = 1, 2, \dots, N$, com as matrizes A_p assintoticamente estáveis e comutativas duas a duas, existe uma função de Lyapunov quadrática comum. Uma condição suficiente para estabilidade assintótica de um sistema linear alternante é apresentada em termos da álgebra de Lie gerada por uma família infinita de matrizes. A saber, se esta álgebra de Lie é solúvel, então o sistema alternante é estável para uma mudança arbitrária de sinal. Em seguida são estudadas condições mais fracas. Supondo que a álgebra de Lie não é solúvel, mas é decomponível na soma de um ideal solúvel e uma subálgebra com grupo de Lie compacto, então o sistema alternante é globalmente exponencialmente uniformemente estável. Entretanto, se o grupo de Lie não for compacto, verifica-se que é possível gerar uma família finita de matrizes estáveis tais que o correspondente sistema linear alternante não é estável. Finalmente, os resultados correspondentes de estabilidade local para sistemas alternantes não lineares são apresentados.

Palavras-chave: Sistema Alternante, Estabilidade Assintótica, Álgebra de Lie.

Abstract

In this work it is undertaken a deep study of stability for switched systems, mainly via Lie algebraic Theory. At first, the basic concepts and results from Lie algebra necessary for the study of stability of switched systems are presented. Criteria for stability are discussed. It is also done an exposition of the proof that all linear systems $\dot{x} = A_p x$, $p = 1, 2, \dots, N$, with stable and pairwise commutative matrices A_p , have common quadratic Lyapounov functions. A sufficient condition for asymptotic stability of switched linear systems is presented in term of the Lie algebra generated by a family infinite matrices. That is, if this Lie algebra is solvable, then the switched systems are stable for an arbitrary change of sinal. Next weaker conditions are studied. If the Lie algebra is decomposable into two subalgebras in which one is a solvable ideal and the other has a compact Lie group, then the switched systems are globally exponentially uniformly stable. However, if the Lie group is not compact, it is also possible to generate a finite family of stable matrices such that the corresponding switched linear systems are not stable. Finally, corresponding local stability results are presented for nonlinear systems.

Keywords: Switched System, Asymptotic stability, Lie Algebra.

Sumário

Introdução	1
1 Álgebras de Lie	5
1.1 Introdução	5
1.2 Álgebra de Lie	6
1.3 Morfismos	8
1.4 Ideais	9
1.5 Grupo de Lie	9
1.6 Representações	10
1.6.1 Representação Adjunta	11
1.6.2 Representações Equivalentes	12
1.6.3 Soma Direta de Representações	12
1.6.4 Restrições de Representações	12
1.6.5 Decomposição de Representações	13
1.7 Derivações	15
1.8 Série Derivada e o Teorema de Lie	16
1.9 Série Central Descendente	18
1.10 Álgebras Semi-simples	20
1.11 Representações de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	21
1.12 Geradores para $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$	22
2 Estabilidade de Sistemas Alternantes	23
2.1 Introdução	23
2.2 Preliminares	24
2.3 Estabilidade de Sistemas Lineares Alternantes com $\mathcal{P}$ Finito	25

2.4	Estabilidade de Sistemas Lineares Alternantes - $\mathcal{P}$ Infinito	29
2.4.1	Condição Suficiente para Estabilidade	30
2.4.2	Resultado Complementar	34
2.5	Sistemas Alternantes não Lineares	37
	Conclusão	40
A		42
A.1	Introdução	42
A.2	Cones	42
A.3	Menores, Menores Principais e Principais Menores Principais	43
A.4	Matrizes Copositivas	44
A.5	Estabilidade de Sistemas Lineares	45
	Referências Bibliográficas	48

Introdução

Nos últimos anos, o campo de ação da Teoria de Controle está sendo ampliado para incluir sistemas de controles alternantes. Tais sistemas surgem, por exemplo, quando diferentes controles são aplicados em torno de um dado processo de feedback, ou quando um dado processo exibir uma alternância de comportamento provocada pela busca de mudanças em um determinado ambiente.

Um sistema alternante pode ser descrito por uma família de subsistemas de tempo contínuo e uma regra que organiza a mudança entre eles. Uma das primeiras questões a ser resolvida neste contexto é a da estabilidade do sistema total. Portanto, o objetivo principal nesse trabalho é fazer um estudo sobre a estabilidade de um sistema alternante via álgebra de Lie.

Considere o problema

$$\dot{x} = A_{\sigma}x \tag{1}$$

onde $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}$ é uma função constante por partes e $\mathcal{P}$ é um conjunto de índices. Suponha que esta função tenha uma quantidade finita de descontinuidades em intervalos finitos de tempo.

No estudo de estabilidade é natural perguntar sob que condições existe uma função de Lyapunov comum para uma família de subsistemas. Em 1994, Narendra e Balakrishnan demonstraram no artigo [16] que se as matrizes A_p , $p \in \{1, 2, \dots, N\}$ são Hurwitz e comutativas por par então elas admitem uma função de Lyapunov comum para todo sistema linear da forma $\dot{x} = A_p x$.

Uma conexão entre estabilidade assintótica de um sistema linear alternante e as propriedades da correspondente álgebra de Lie foi discutida explicitamente primeiro por Gurvitz no artigo [8], em 1995. Este artigo é concernente com o equivalente problema de tempo

discreto da equação (1) que tem a forma

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) \quad (2)$$

onde σ é uma função de inteiros não negativos de um conjunto finito de índices $\mathcal{P}$. Gurvitz conjecturou que se a álgebra de Lie $\{A_p; p \in \mathcal{P}\}_{LA}$ é nilpotente então a equação (2) é assintoticamente estável para qualquer mudança de sinal σ . Ele usou a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para provar esta conjectura no caso particular onde $\mathcal{P} = \{1, 2\}$, as matrizes A_1 e A_2 são não singulares, e esses colchetes de Lie de terceira ordem se anulam: $[A_1, [A_1, A_2]] = [A_2, [A_1, A_2]] = 0$.

Em 1998, Liberzon, Hespanha e Morse no artigo [12] conseguiram via álgebra de Lie uma condição suficiente para estabilidade assintótica de um sistema que é alternante entre os membros de uma família fixada de subsistemas lineares assintoticamente estáveis. Eles demonstraram, provando a existência de uma função de Lyapunov quadrática comum para esta família, que um tal sistema é globalmente uniformemente exponencialmente estável sob arbitrária mudança se a álgebra de Lie associada é solúvel. Eles também apresentaram uma condição suficiente para a estabilidade assintótica local de um sistema não linear alternante em termos da álgebra de Lie gerada pela linearização da família $\dot{x}f_p(x)$, $p \in \mathcal{P}$.

Em 1999, Agrachev e Liberzon no artigo [1] apresentaram a continuação da linha de trabalho iniciada nas referências acima citadas. O Teorema mais importante apresentado por eles neste artigo é uma extensão direta do Teorema (2.3) enunciado e demonstrado em [12]. Este resultado afirma que o sistema linear alternante ainda tem estabilidade exponencial para uma arbitrária mudança se a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma soma semidireta de um ideal solúvel e uma subálgebra com grupo de Lie compacto, o que foi acrescentado para dizer que todas as matrizes desta segunda subálgebra tem autovalores imaginários puros. Eles também estabeleceram um resultado correspondente de estabilidade para os sistemas alternantes não lineares. A grande vantagem do critério de estabilidade via álgebra de Lie é que ele não depende de uma particular escolha de coordenadas. Além disso, eles mostraram que a condição acima é em algum sentido um critério forte para estabilidade que pode ser dado em nível de álgebra de Lie. A grosso modo, eles mostraram que se a álgebra de Lie não satisfaz esta condição então ela deve ser gerada por uma família de matrizes estáveis com a propriedade de que o correspondente sistema linear alternante não estável.

Recentemente em [3], Çamlıbel e Shumacher propuseram dois problemas que procuram generalizar os resultados de estabilidade para sistemas alternantes levando em consi-

deração apenas a positividade no cone de interesse.

Considere o sistema da forma

$$\dot{x} = A_p x \quad \text{para} \quad C_p x \geq 0, \quad p \in \{1, 2\} \quad (3)$$

onde os cones $\mathcal{C}_p = \{x : C_p x \geq 0\}$ não são necessariamente o espaço todo e suponha que:

- i) existe uma função f tal que (3) pode ser descrito por $\dot{x} = f(x)$ para todo $x \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$; e
- ii) para cada estado inicial $x_0 \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ existe uma única solução no sentido de Caratheodory, isto é,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau)) d\tau.$$

Uma forma de estudar a estabilidade do sistema (3) é simplesmente utilizar o Teorema A.2 (veja apêndice A.5). Entretanto, o referido teorema requer que a função de Lyapunov seja definida positiva enquanto que somente a positividade num cone é suficiente. Os problemas propostos por Çamlıbel e Shumacher, que serão apresentados a seguir, procuram eliminar este inconveniente.

Problema 1. *Sejam A uma matriz quadrada e $\mathcal{C} = \{x : Cx \geq 0\}$ um cone. Determinar condições necessárias e suficientes para a existência de uma matriz simétrica P tal que $P \succ 0$ e $A^T P + PA \prec 0$.*

Usa-se as notações $P \succeq 0$ e $(P \succ 0)$, respectivamente para copositividade e copositividade estrita (veja Apendice A5).

Uma condição necessária imediata para a existência de uma tal matriz P é que a matriz A não deve ter autovetores correspondentes aos autovalores positivos no cone $\mathcal{C}$.

Resolvido este problema, seria interessante generalizá-lo.

Problema 2. *Sejam A_1 e A_2 matrizes quadradas e $\mathcal{C}_p = \{x : C_p x \geq 0\}$, para $p = 1, 2$, cones. Determinar condições suficientes para a existência de uma matriz simétrica P tal que $P \succ 0$ e $A^T P + PA \prec 0$ para $p = 1, 2$.*

A motivação para a realização desta dissertação foram os dois problemas apresentados acima. Embora não tenha sido possível resolvê-los neste momento, foi feito um estudo das ferramentas julgadas essenciais para uma possível solução dos mesmos. Assim, no capítulo 1 serão apresentadas as principais definições dos conceitos básicos da teoria das álgebras de Lie,

que serão ilustradas por vários exemplos (na maior parte obtidos de [18] e do apêndice [1]) que deverão servir de base para o desenvolvimento do Capítulo 2, no qual serão estudados o sistemas alternantes baseado nos artigos [1, 12, 16]. Finalmente será incluído no apêndice alguns conceitos de álgebra linear e de estabilidade de sistemas lineares.

Capítulo 1

Álgebras de Lie

1.1 Introdução

As álgebras de Lie formam uma coleção dos conceitos básicos do que se conhece genericamente por teoria de Lie. A referida teoria teve origem por volta de 1870 a partir da idéia, aparentemente simples, de abordar as equações diferenciais sob o mesmo ponto de vista que Galois adotou para as equações algébricas. Sophus Lie e Felix Klein, lançaram um projeto, que consistia em estudar as equações diferenciais via seus grupos de simetrias. Esse projeto colocou em evidência os grupos contínuos de transformações para os quais foi criada, ao longo de anos, uma extensa teoria com ramificações nas diversas áreas da matemática e de suas aplicações. O ponto de partida básico na criação desse enorme campo de conhecimento matemático foi a descoberta, feita por S. Lie, dos grupos infinitesimais, os quais são atualmente conhecidos como álgebras de Lie. Os primeiros resultados da teoria, que posteriormente foram denominados Teoremas de Lie, estabeleceram a relação entre os grupos de transformações, denominados atualmente como grupos de Lie, e as álgebras de Lie, através da aplicação exponencial. Os grupos tem uma natureza geométrica enquanto que as álgebras de Lie são objetos puramente algébricos.

Neste capítulo são apresentados os principais conceitos básicos da teoria das álgebras de Lie, retirados de [18] e de [1]. Os resultados incluídos aqui são apenas para o desenvolvimento do Capítulo 2.

1.2 Álgebra de Lie

Definição 1.1. *Um álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto (colchete ou comutador)*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

que satisfaz a:

- i) bilinearidade;
- ii) anti-simetria, isto é, $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$;
- iii) identidade de Jacobi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

ou

$$[X, [Y, Z]] = [X, Y, Z] + [Y, [X, Z]].$$

Definição 1.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que é fechado pelo colchete, isto é,.*

$$[X, Y] \in \mathfrak{h} \text{ se } X, Y \in \mathfrak{h}$$

Exemplo 1.1. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ é o espaço de todas as transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ que é o mesmo que o espaço das matrizes $n \times n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$. O colchete é dado por

$$[X, Y] = XY - YX$$

com X e Y matrizes.

Exemplo 1.2. *Álgebras abelianas: $[\cdot, \cdot] = 0$. Neste caso, a estrutura de álgebra de Lie não acrescenta nada à estrutura de espaço vetorial. Exemplos de álgebras abelianas.*

- i) Se $\dim \mathfrak{g} = 1$, $\mathfrak{g}$ é abeliana;
- ii) Todo subespaço de dimensão 1 de uma álgebra de Lie qualquer é uma subálgebra abeliana;
- iii) O espaço das matrizes diagonais é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Todo subespaço de uma álgebra abeliana é uma subálgebra.

Exemplo 1.3. Subálgebras de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$:

- i) $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}); X + X^t = 0\}$ onde X^t indica a transposta da matriz X é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Entretanto, o espaço das matrizes simétricas

$$\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}); X = X^t\}$$

não é subálgebra se $n \geq 2$ pois se X e Y são simétricas, então $[X, Y]$ é anti-simétrica.

De fato,

$$[Y, X] = XY - YX = -(YX - XY) = -[X, Y];$$

- ii) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}); \text{tr} X = 0\}$ é subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$;

- iii) O subespaço das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal

$$\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}); X = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\}$$

é uma subálgebra.

- iv) O subespaço das matrizes triangulares superiores

$$\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}); X = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\}$$

é uma subálgebra;

Exemplo 1.4. Álgebras de dimensão ≤ 2 :

- i) $\dim \mathfrak{g} = 1$. Então, $\mathfrak{g}$ é abeliana.

- ii) $\dim \mathfrak{g} = 2$. Existem duas possibilidades:

- ii1) $\mathfrak{g}$ é abeliana.

- ii2) Existe uma base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] = Y$ e a partir daí, o colchete de dois elementos quaisquer de $\mathfrak{g}$ é dado por

$$[aX + bY, cX + dY] = (ad - bc)[X, Y] = (ad - bc)Y.$$

De fato, suponha que $\mathfrak{g}$ não seja abeliana e tome uma base $\{X', Y'\}$ de $\mathfrak{g}$. Então, $[X', Y'] \neq 0$, pois caso contrário $\mathfrak{g}$ seria abeliana. Seja $Y'' = [X', Y']$ e escolha X'' tal que $\{X'', Y''\}$ seja base de $\mathfrak{g}$. Então, $X'' = aX' + bY'$, $Y'' = cX' + dY'$ e

$$[X'', Y''] = \alpha Y''$$

com $\alpha \neq 0$ (pois $\{X'', Y''\}$ é base e daí que se $\alpha = 0$ a álgebra seria abeliana). Os elementos $X = \frac{1}{\alpha} X''$ e $Y = Y''$ formam a base requerida.

As álgebras de Lie $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{K} \right\}$ e

$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{K} \right\}$ são exemplos concretos de álgebras bidimensionais não abelianas.

1.3 Morfismos

Definição 1.3. Uma transformação linear $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ (com $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie) é um:

- i) homomorfismo se $\psi[X, Y] = [\psi X, \psi Y]$;
- ii) isomorfismo se for um homomorfismo inversível;
- iii) automorfismo se é um isomorfismo e $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$. As álgebras $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são isomórfas se existe um isomorfismo $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$.

Exemplo 1.5. Os homomorfismos entre as álgebras abelianas são as transformações lineares. Duas álgebras abelianas são isomórfas se e só se elas têm a mesma dimensão.

Exemplo 1.6. Se $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo e $\mathfrak{h}$ é abeliana então $\ker \psi$ contém todos os elementos da forma $[X, Y]$, com $X, Y \in \mathfrak{g}$, pois $\psi[X, Y] = [\psi X, \psi Y] = 0$.

Exemplo 1.7. A aplicação traço $\mathbf{tr} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ é um homomorfismo. De fato, $\mathbf{tr}[X, Y] = \mathbf{tr}(XY - YX) = 0$ para quaisquer transformações lineares X, Y . Por outro lado, $[\mathbf{tr} X, \mathbf{tr} Y] = 0$, já que $\mathbb{K}$, por ser de dimensão um, é uma álgebra abeliana. Portanto, $\mathbf{tr}[X, Y] = [\mathbf{tr} X, \mathbf{tr} Y]$.

Exemplo 1.8. Seja P uma transformação linear inversível do espaço vetorial V . Então, a conjugação por P

$$P : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

$$A \mapsto PAP^{-1}$$

é um automorfismo de $\mathfrak{gl}(V)$.

1.4 Ideais

Definição 1.4. Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um ideal se $\forall Y \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}, [X, Y] \in \mathfrak{h}$ isto é

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \{[X, Y]; X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{h}.$$

Assim, todo ideal é uma subálgebra. A recíproca não é verdade. Por exemplo, o subespaço de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ gerado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é uma subálgebra por ser unidimensional. Porém, não é um ideal, pois

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Todo subespaço de uma álgebra abeliana é um ideal.

Se $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo então as seguintes afirmações são de verificação imediata.

i) $\ker \psi$ é um ideal;

ii) $\text{Im} \psi$ é uma subálgebra.

1.5 Grupo de Lie

Definição 1.5. Um grupo de Lie é um grupo cujo conjunto subjacente tem uma estrutura de variedade diferenciável, de tal forma que a aplicação produto

$$\rho : G \times G \rightarrow G$$

$$(g, h) \mapsto gh$$

é diferenciável.

Qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ pode ser identificada com um espaço tangente pela identidade de um grupo de Lie $\mathbf{G}$. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de matrizes, então os elementos de $\mathbf{G}$ são dados pelos produtos das matrizes exponenciais de $\mathfrak{g}$. Em particular, cada elemento $A \in \mathfrak{g}$ gera o subgrupo de um-parâmetro $\{e^{At}, t \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbf{G}$. Por exemplo, se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ de todas as matrizes com colchete de Lie padrão $[A, B] = AB - BA$, então o correspondente grupo de Lie é dado pelas matrizes inversíveis.

1.6 Representações

Seja V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V . Seja também $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie (sobre o mesmo corpo de escalares que V). Uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Na terminologia usual, V é denominado o espaço da representação enquanto que sua dimensão é a dimensão da representação. Uma representação ρ é dita fiel se $\ker \rho = \{0\}$. A noção de representação vem da idéia de se descrever (representar) as álgebras de Lie como álgebras de transformações lineares. No caso das representações fieis, $\mathfrak{g} \approx \text{im } \mathfrak{g}$ e, portanto, a álgebra pode ser vista como uma subálgebra das transformações lineares (ou matrizes se a dimensão é finita).

Exemplo 1.9. A aplicação

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) &\rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é uma representação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. De fato, facilmente pode-se verificar que ρ é linear. Para verificar que ρ é um homomorfismo considere a base $\{X, H, Y\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ onde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que suas constantes de estrutura são dadas por

$$[H, X] = 2X \quad [H, Y] = -2Y \quad [X, Y] = H.$$

As imagens de ρ nos elementos desta base são as seguintes matrizes:

$$\rho \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A;$$

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = B;$$

$$\rho \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

Como $[B, A] = 2A$, $[B, C] = -2C$ e $[A, C] = B$, segue que: $\rho[H, X] = \rho(2X) = 2\rho X$ e $[\rho H, \rho X] = [B, A] = 2A = 2\rho X$. Logo, $\rho[H, X] = [\rho H, \rho X]$. De modo análogo, verifica-se que: $\rho[H, Y] = [\rho H, \rho Y]$ e $\rho[X, Y] = [\rho X, \rho Y]$. Portanto, ρ é uma representação.

1.6.1 Representação Adjunta

Para um elemento X na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, considere a transformação linear

$$\mathbf{ad}(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

definida por $\mathbf{ad}(X)(Y) = [X, Y]$.

A aplicação

$$\mathbf{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

$$X \mapsto \mathbf{ad}(X)$$

define uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$, denominada representação adjunta.

O núcleo da representação adjunta é denominado de centro de $\mathfrak{g}$ e é denotado por $z(\mathfrak{g})$.

$$z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}; \mathbf{ad}(X)(Y) = [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Isto é, o centro de uma álgebra de Lie é o conjunto de seus elementos que comutam com todos os seus elementos.

1.6.2 Representações Equivalentes

Sejam ρ_1 e ρ_2 duas representações de uma mesma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nos espaços V_1 e V_2 respectivamente. Elas são ditas equivalentes se existe um isomorfismo linear $P : V_1 \rightarrow V_2$ tal que

$$\rho_2(X) \circ P = P \circ \rho_1(X) \quad (1.1)$$

para qualquer $X \in \mathfrak{g}$. Vice-versa, dados uma representação ρ_1 e um isomorfismo linear P , definindo ρ_2 a partir da expressão acima, obtém-se uma representação isomorfa a ρ_1 . O isomorfismo P que realiza a equivalência entre as representações é denominado operador de intercâmbio entre ρ_1 e ρ_2 .

1.6.3 Soma Direta de Representações

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\rho_1, \dots, \rho_n$ representações de $\mathfrak{g}$ em $V_1, \dots, V_n$, respectivamente. Defina

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \oplus \dots \oplus V_n)$$

por $\rho(X) = \rho_1(X) \oplus \dots \oplus \rho_n(X)$. Então, como pode ser verificado, ρ define uma representação em $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ denominada de soma direta das representações ρ_i . Em forma de matrizes, ρ

se escreve em blocos como
$$\begin{pmatrix} \rho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_n \end{pmatrix}.$$

1.6.4 Restrições de Representações

Seja ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V e suponha que W seja um subespaço invariante por ρ , isto é,

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \quad \rho(X)|_W \subset W.$$

A aplicação

$$\rho|_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$$

$$X \mapsto \rho(X)|_W$$

define uma representação de $\mathfrak{g}$ em W .

A soma e a interseção de subespaços invariantes também são invariantes.

1.6.5 Decomposição de Representações

Uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ em V é dita irredutível se os únicos subespaços invariantes por ρ são os triviais $\{0\}$ e V .

A representação é dita completamente redutível se V se decompõe como

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$$

com cada V_i invariante e tal que a restrição de ρ a V_i é irredutível. Em outras palavras, ρ é completamente redutível se ela é isomorfa à soma direta $\oplus_i \rho|_{V_i}$ de representações irredutíveis. Em geral, a decomposição de V em componentes irredutíveis não é única. Apesar dos nomes, uma representação irredutível é sempre completamente redutível. As representações completamente redutíveis são denominadas também representações semi-simples.

Exemplo 1.10. Considere o grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R}) = \{S \in \mathbb{R}^{n \times n}; \det S = 1\}$. Denotando por $f^k[x, y]$ o espaço dos polinômios em duas variáveis x e y que são homogêneos de grau k (onde k é um inteiro positivo). Um homomorfismo ϕ que faz $SL(2, \mathbb{R})$ agir em $f^k[x, y]$ pode ser definido da seguinte forma:

$$\phi(S)f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \left(S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

onde $S \in SL(2, \mathbb{R})$ e $f \in P^k[x, y]$. A representação correspondente da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ a qual será denotada por ρ , é obtida considerando os subgrupos de um parâmetro de $SL(2, \mathbb{R})$ e diferenciando a ação definida acima em $t = 0$. Por exemplo, para $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{aligned} \rho(X)f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \left(e^{-tX} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \left(\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= -y \frac{\partial}{\partial x} f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

De fato,

$$e^{-tX} = \frac{X^0 t^0}{0!} - \frac{X^1 t^1}{1!} + \frac{X^2 t^2}{2!} - \dots + \frac{X^k t^k}{k!} - \dots$$

Como $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, então $e^{-tX} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Assim, $f\left(\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f(x - ty, y)$. Logo,

$$\frac{df}{dt}\bigg|_{t=0} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -y \frac{\partial f}{\partial x} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right).$$

De modo análogo,

$$\rho(Y)f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = -x \frac{\partial f}{\partial y} \quad e \quad \rho(H)f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = -x \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Com respeito a base em $f^k[x, y]$ dada pelos monômios

$y^k, -ky^{k-1}x, (k-1)y^{k-2}x^2, \dots, (-1)^k k!x^k$, os correspondentes operadores diferenciais são realizados pelas matrizes:

$$H \mapsto \begin{pmatrix} k & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & k-2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -k \end{pmatrix}, X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \mu_k \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ onde}$$

$$\mu_i = (k - i + 1), \quad i = 1, \dots, k.$$

De fato, aplicando o operador $\rho(H)f = -x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ nos elementos da base

$\{y^k, -ky^{k-1}x, k(k-1)y^{k-2}x^2, \dots, (-1)^k k!x^k\}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho(H)(y^k) &= kyy^{k-1} = ky^k \\ &= ky^k + 0(-k)y^{k-1}x + 0k(k-1)y^{k-2}x^2 + \dots + 0(-1)^k k!x^k. \\ \rho(H)(-ky^{k-1}x) &= -x(-ky^{k-1}) + (-k)(k-1)yy^{k-2}x \\ &= ky^{k-1}x - k(k-1)y^{k-1}x \\ &= -ky^{k-1}x(-1 + k - 1) \\ &= (k-2)(-ky^{k-1}x) \\ &= 0y^k + (k-2)(-ky^{k-1}x) + 0k(k-1)y^{k-2}x^2 + \dots + 0(-1)^k k!x^k. \\ &\vdots \\ \rho(H)(-1)^k k!x^k &= -x(-1)^k k!kx^{k-1} \\ &= -(-1)^k k!kx^k \\ &= -k(-1)^k k!x^k \\ &= 0y^k + 0(-ky^{k-1}x) + 0k(k-1)y^{k-2}x^2 + \dots + (-k)(-1)^k k!x^k. \end{aligned}$$

Portanto, $\rho(H) = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & k-2 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -k \end{pmatrix}$. De modo análogo, aplicando o operador $\rho(X)f =$

$-y \frac{\partial f}{\partial x}$ aos elementos da base, obtém-se

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \mu_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e aplicando o operador $\rho(Y) = -x \frac{\partial f}{\partial y}$ nos elementos da base, tem-se:

$$\rho(Y) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Acontece que qualquer representação irredutível de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ de dimensão $k+1$ é equivalente (sob uma mudança linear de coordenadas) a uma representação descrita acima. Uma arbitrária representação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é uma soma direta destas representações irredutíveis.

Quando se trabalha com $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ em vez de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ tem-se a matriz identidade $I_{2 \times 2}$. Isto corresponde ao operador $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ em $P^k[x, y]$, cuja matriz associada é $\mathbb{K}I_{(k+1)(k+1)}$. As representações acima podem naturalmente ser extendidas para $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. As subálgebras suplementares $\mathbb{R}I$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ são invariantes sob a ação resultante destas representações.

1.7 Derivações

Definição 1.6. Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é uma derivação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se satisfaz

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

De forma mais geral, uma derivação de uma álgebra é uma transformação linear que satisfaz a regra de Leibniz de derivada de um produto $D(xy) = D(x)y + xD(y)$.

Um tipo de derivação que aparece com frequência na teoria são as adjuntas dos elementos de $\mathfrak{g}$. Uma das formas da identidade de Jacob apresentada no início do capítulo,

mostra que

$$ad(X)[Y, Z] = [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$$

ou

$$ad(X)[Y, Z] = [ad(X)Y, Z] + [Y, ad(X)Z],$$

isto é, $ad(X)$ é uma derivação. As derivações desse tipo serão denominadas de derivação internas.

1.8 Série Derivada e o Teorema de Lie

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, para dois subconjuntos A e B de $\mathfrak{g}$. Será usada a notação $[A, B]$ para indicar o subespaço gerado por

$$\{[X, Y]; X \in A, Y \in B\}.$$

Define-se, por indução, os seguintes subespaços de $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] \end{aligned}$$

Proposição 1.1. $\mathfrak{g}^{(k)}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ para todo $k \geq 0$. Em particular $\mathfrak{g}^{(k)}$ é subálgebra e, portanto, a seqüência é decrescente: $\mathfrak{g}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}$.

Demonstração. Será demonstrado por indução sobre k . Evidentemente $\mathfrak{g}^{(0)}$ é um ideal. Assumindo que $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ seja ideal, sejam $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{g}^{(k)}$. Pode-se escrever Y como $Y = \sum_i [Z_i, W_i]$ com $Z_i, W_i \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$. Pela identidade de Jacob,

$$[X, Y] = \sum_i [X, [Z_i, W_i]] = \sum_i [[X, Z_i], W_i] + [Z_i, [X, W_i]]$$

e esta última soma está em $\mathfrak{g}^{(k)}$, pois cada fator dos colchetes está em $\mathfrak{g}^{(k-1)}$. Portanto $\mathfrak{g}^{(k)}$ é ideal.

□

Definição 1.7. Essa sequência de ideais é a série derivada de $\mathfrak{g}$ e suas componentes são as álgebras derivadas de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 1.11. $\mathfrak{g}$ é abeliana se e só se $\mathfrak{g}' = 0$.

Exemplo 1.12. $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{g}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{g}'' = \{0\}$ e $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ se $k \geq 2$.

Exemplo 1.13. Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} \right\}.$$

Então, $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ se k é suficientemente grande.

Exemplo 1.14. $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{g}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{g}'' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ se $k \geq 3$.

Exemplo 1.15. Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra das matrizes triangulares superiores

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & * \end{pmatrix}_{n \times n} \right\}.$$

Então, $\mathfrak{g}'$ é a álgebra das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal, portanto, $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ se $k \geq k_0$ para algum k_0 suficientemente grande.

Definição 1.8. (Álgebras Solúveis) Uma álgebra é solúvel se alguma de suas álgebras derivadas se anula, isto é, $\mathfrak{g}^{(k_0)} = 0$ para algum $k_0 \geq 1$ (e, portanto, $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para $k \geq k_0$).

O resultado abaixo é conhecido como Teorema de Lie. Sua demonstração pode ser vista por exemplo em ([18] pg.70).

Teorema 1.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie solúvel sobre um corpo algebricamente fechado, e seja ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ num espaço vetorial de dimensão finita n . Então existe uma

base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que para cada $X \in \mathfrak{g}$ a matriz da transformação linear $\rho(X)$ nesta base tem a forma triangular superior

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(X) & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n(X) \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_1(X), \dots, \lambda_n(X)$ são os autovalores da matriz de $\rho(X)$.

1.9 Série Central Descendente

A série central descendente da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é definida por indução, como:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]. \end{aligned}$$

Proposição 1.2. *i) $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$;*

ii) $\mathfrak{g}^k$ é o subespaço gerado por todos os possíveis produtos (colchetes) envolvendo k elementos de $\mathfrak{g} : [X_1, \dots, [x_{k-1}, X_k] \dots]$.

Demonstração. *i) Por indução sobre j . Para $j = 1$ a inclusão é a definição de $\mathfrak{g}^{i+1}$.*

Assumindo o resultado para j , tem-se:

$$[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{j+1}] = [\mathfrak{g}^i, [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}]] \subset [[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j], \mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j]] \subset [\mathfrak{g}^{i+j}, \mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}^{i+1}, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j+1}.$$

ii) Seja $\mathfrak{s}^k$ o subespaço gerado por todos os possíveis produtos de k elementos de $\mathfrak{g}$. O objetivo é mostrar que $\mathfrak{s}^k = \mathfrak{g}^k$. Para $k = 1$ ou 2 , é imediato da definição. Suponha que o resultado é válido para $j = 1, 2, \dots, k-1$. Os elementos de $\mathfrak{g}^{k-1}$ são da forma $\sum Z_i$ com Z_i produto de $k-1$ elementos de $\mathfrak{g}$. Primeiro será mostrado que $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{s}^k$. Tomando $H \in \mathfrak{g}^k$, $H = [X_1, X_2]$ com $X_1 \in \mathfrak{g}$ e $X_2 \in \mathfrak{g}^{k-1}$. Mas $X_2 = \sum Z_i$ com $Z_i \in \mathfrak{s}^{k-1}$. Isto implica que $H = [X_1, \sum Z_i] = \sum [X_1, Z_i]$, logo $H \in \mathfrak{s}^k$. Agora será mostrado que $\mathfrak{s}^k \subset \mathfrak{g}^k$. Seja $Z \in \mathfrak{s}^k$ tal que $Z = \sum Z_i$, onde Z_i é o produto de k

elementos e $Z_i = [Y_i, W_i]$ com $Y_i \in \mathfrak{g}^j$ e $W_i \in \mathfrak{g}^{k-j}$, para algum $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, por
 i) $Z_i \in \mathfrak{g}^k$ isto implica que $Z = \sum Z_i \in \mathfrak{g}^k$. Portanto, $\mathfrak{s}^k = \mathfrak{g}^k$.

□

Exemplo 1.16. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $\mathfrak{g}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$;
 $\mathfrak{g}^3 = 0$, assim como $\mathfrak{g}^k$ para $k \geq 3$.

Exemplo 1.17. $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$; $\mathfrak{g}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}^2$
 se $k \geq 3$. (De fato, basta verificar que $\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2] = \mathfrak{g}^2$).

Observação 1.1. i) $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$, pois um produto de $k+1$ elementos também é um produto de k elementos.

ii) $\mathfrak{g}^k$ é um ideal para $k \geq 1$, pois $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = \mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$. De onde se conclui que a série central descendente é, de fato, decrescente,

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{g}^k \supset \dots$$

Proposição 1.3. A série derivada decresce mais rápido que a série central decrescente:
 $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$.

Demonstração. Por indução, tem-se

$$\mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}] \subset [\mathfrak{g}^{k+1}, \mathfrak{g}^{k+1}] \subset [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^{k+1}] \subset [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}^{k+1}] \subset \dots \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k+1}] = \mathfrak{g}^{k+2}. \quad \square$$

Definição 1.9. (Álgebras Nilpotentes). Uma álgebra de Lie é nilpotente se sua série central decrescente se anula em algum momento, isto é, $\mathfrak{g}^{k_0} = 0$ para algum $k_0 \geq 1$ (e, portanto, $\mathfrak{g}^k = 0$ para todo $k \geq k_0$).

Observação 1.2. As álgebras nilpotentes são solúveis pois $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$. No entanto, nem sempre uma álgebra solúvel é nilpotente como mostra a álgebra das matrizes triangulares superiores, que é solúvel mas não é nilpotente.

1.10 Álgebras Semi-simples

Definição 1.10. (*Radical*). Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. O ideal solúvel $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ (isto é, solúveis como álgebra de Lie) que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$ é chamado de radical.

Proposição 1.4. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in \mathfrak{g}$ ideais solúveis. Então, $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ também é um ideal solúvel.

Demonstração. (Veja [18], pg.47). □

Proposição 1.5. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então, existe em $\mathfrak{g}$ um único ideal solúvel $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$.

Demonstração. Denote por n o máximo das dimensões dos ideais solúveis de $\mathfrak{g}$ e seja $\mathfrak{r}$ um ideal solúvel com $\dim \mathfrak{r} = n$. Então, todo ideal solúvel de $\mathfrak{g}$ está contido em $\mathfrak{r}$. De fato, se $\mathfrak{h}$ é ideal solúvel, pela proposição anterior $\mathfrak{r} + \mathfrak{h}$ também é. Pela maximalidade da dimensão, $\dim(\mathfrak{r} + \mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{r}$ e daí $\mathfrak{r} + \mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$. Portanto, $\mathfrak{r}$ contém todos os ideais solúveis e ele é claramente o único. □

Definição 1.11. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$ (ou seja, $\mathfrak{g}$ não contém ideais solúveis além do 0).

Definição 1.12. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é simples se:

- i) Os únicos ideais de $\mathfrak{g}$ são 0 e $\mathfrak{g}$;
- ii) $\dim \mathfrak{g} \neq 1$.

A forma de Killing em uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a forma bilinear simétrica k dada por

$$K(X, Y) := \text{tr}(adX \circ adY)$$

para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Uma álgebra de Lie semi-simples é chamada compacta se a forma de Killing é negativa definida. Uma álgebra de Lie compacta geral é a soma direta de uma álgebra de Lie semi-simples compacta e uma álgebra de Lie comutativa.

Esta terminologia é justificada pelo fato de que a álgebra tangente de qualquer grupo de Lie é compacta de acordo com esta definição, e que para qualquer álgebra de Lie compacta

$\mathfrak{g}$ existe um grupo de Lie compacto $\mathbf{G}$ relacionado com a álgebra tangente $\mathfrak{g}$. A compacidade de uma matriz álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semi-simples acrescenta a propriedade de que os autovalores de todas as matrizes em $\mathfrak{g}$ fica no eixo imaginário.

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ arbitrária pode ser decomposta na soma semidireta $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$, onde $\mathfrak{r}$ é o radical, $\mathfrak{s}$ é uma álgebra semi-simples, e $[\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{r}$ pois $\mathfrak{r}$ é um ideal. Isto é conhecido como a decomposição de Levi, veja por exemplo ([18] Teorema 5.8).

1.11 Representações de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real, não compacta e semi-simples. O alvo aqui é mostrar que $\mathfrak{g}$ tem uma subálgebra que é uma representação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Para isto, considera-se uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$, onde $\mathfrak{t}$ é uma subálgebra compacta maximal de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{p}$ é o complemento ortogonal com respeito a k . A forma de Killing k é definida negativa em $\mathfrak{t}$ e definida positiva em $\mathfrak{p}$. Seja $\mathfrak{a}$ uma subálgebra comutativa maximal de $\mathfrak{p}$. Então $\mathfrak{g}$ pode ser decomposta numa soma direta de subespaços invariantes sob $\text{ad}X$, $X \in \mathfrak{a}$, em cada um dos quais todo operador $\text{ad}X$ tem exatamente um autovalor. O único autovalor da $\text{ad}X$ em cada um destes subespaços invariantes é dado por uma função linear λ em $\mathfrak{a}$, e consequentemente o correspondente subespaço é denotado por $\mathfrak{g}_\lambda$. Como $\mathfrak{p} \neq 0$ (porque $\mathfrak{g}$ não é compacta) e como k é positiva definida em $\mathfrak{p}$, o subespaço $\mathfrak{g}_0$ associado com λ será identicamente nulo não podendo ser todo o $\mathfrak{g}$. De forma resumida: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus (\bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{g}_\lambda)$ onde Σ é um conjunto finito de funções lineares não nulas em $\mathfrak{a}$ (que são chamadas de raízes) e $\mathfrak{g}_\lambda = \{g \in \mathfrak{g}; \text{ad}X(g) = \lambda(X)g \ \forall \ X \in \mathfrak{a}\}$. Pode-se mostrar por indução (veja [18] pg. 78) que $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu]$ é um subespaço de $\mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ se $\lambda + \mu \in \Sigma \cup \{0\}$ e igual a zero caso contrário. Isto implica que o subespaço $\mathfrak{g}_\lambda$ e $\mathfrak{g}_\mu$ são ortogonais com respeito a k a menos que $\lambda + \mu = 0$, veja [17] pag.38. Como k é não degenerado em $\mathfrak{g}$ (isto é, não existe vetor $a \neq 0$ ortogonal a todos os outros vetores na álgebra, ou seja, não se tem $k(X, Y) = 0$ com $X \neq 0$ e $Y \in \mathfrak{g}$), isto implica se λ é uma raiz, então $-\lambda$ também é. Além disso, o subespaço $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_{-\lambda}]$ de $\mathfrak{g}_0$ tem dimensão 1, e a restrição de λ a este subespaço não é identicamente nulo, (veja [17] pag. 39 – 40). Isto diz que existem alguns elementos $X \in \mathfrak{g}_\lambda$ e $Y \in \mathfrak{g}_{-\lambda}$ tais que $H := [X, Y] \neq 0$. Agora fica fácil de ver que, multiplicando X, Y e H por uma constante se necessário, obtém-se uma tripla $\mathfrak{sl}(2)$.

1.12 Geradores para $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$

Nesta seção será mostrado que numa pequena vizinhança arbitrária de qualquer par de matrizes $n \times n$ pode-se encontrar outro par de matrizes que gera toda a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Estes fatos demonstram que as condições de estabilidade via álgebra de Lie (que serão considerados no próximo capítulo) nunca são fortes com respeito a pequenas perturbações das matrizes que definem o sistema alternante.

Seja B_1 a matriz diagonal $B_1 = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ satisfazendo duas propriedades:

$$i) \quad b_i - b_j \neq b_k - b_l \text{ se } (i, j) \neq (k, l);$$

$$ii) \quad \sum_{i=1}^n b_i \neq 0.$$

Seja $\mathfrak{od}(n, \mathbb{R})$ o espaço das matrizes com elementos nulos na diagonal principal e B_2 uma matriz qualquer em $\mathfrak{od}(n, \mathbb{R})$ tal que todas entradas fora da diagonal são diferentes de zero. Não é difícil verificar que se $E_{i,j}$ é uma matriz cujo i,j -ésimo elemento é um e todos os outros elementos são zero, com $i \neq j$, então $[B_1; E_{i,j}] = (b_i - b_j)E_{i,j}$. Desse modo, segue da propriedade $i)$ acima que B_2 não está sob nenhuma propriedade de subspaço de $\mathfrak{od}(n, \mathbb{R})$ que é invariante com respeito ao operador $\text{ad} B_1$. Portanto, o espaço linear gerado pelos colchetes $\text{ad}^k B_1(B_2)$ é todo o $\mathfrak{od}(n, \mathbb{R})$. Fazendo colchetes da forma $[E_{i,j}, E_{j,i}]$, gera-se todas as matrizes diagonais de traço nulo. Como B_1 tem um traço não nulo pela propriedade $ii)$ acima, conclui-se que $\{B_1, B_2\}_{LA} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Agora seja A_1 e A_2 duas matrizes $n \times n$ arbitrárias. Usando as matrizes B_1 e B_2 corretamente construídas, pode-se definir $A_1(\alpha) := A_1 + \alpha B_1$ e $A_2(\alpha) := A_2 + \alpha B_2$, onde $\alpha \geq 0$. As duas matrizes $A_1(\alpha)$ e $A_2(\alpha)$ geram $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ para qualquer α suficientemente pequeno, como pode ser mostrado usando o mesmo argumento que será empregado na prova do Teorema 2.5. Desse modo $(A_1(\alpha), A_2(\alpha))$ é o par desejado de matrizes em uma vizinhança de (A_1, A_2) .

Capítulo 2

Estabilidade de Sistemas Alternantes

2.1 Introdução

Para definir mais precisamente o que se entende por um sistema alternante, considere uma família $\{f_p : p \in \mathcal{P}\}$ de funções suficientemente regulares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, parametrizadas por algum conjunto $\mathcal{P}$ de índices. Seja $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}$ uma função de tempo constante por parte, chamada de mudança de sinal. Um sistema alternante é dado então pelo seguinte sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = f_\sigma(x). \quad (2.1)$$

Se o estado de (2.1) não salta na mudança de instante, então a solução $x(\cdot)$ é sempre contínua. Note que mudanças infinitamente rápidas, que levam um conceito de solução generalizada, não são consideradas aqui. Tal situação pode ser evitada pela hipótese de que os instantes $\{t_1, t_2, \dots\}$ de comutação do sistema devem satisfazer $\sum_{i=1}^{\infty} (t_{i+1} - t_i) < \infty$.

No caso particular onde todos os subsistemas individuais são lineares (isto é, $f_p(x) = A_p x$, onde $A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para cada $p \in \mathcal{P}$), obtém-se um sistema linear alternante

$$\dot{x} = A_\sigma x. \quad (2.2)$$

O sistema (2.2) é globalmente uniformemente exponencialmente estável se existe constantes positivas c e μ tais que a solução de (2.2) para qualquer estado inicial $x(0)$ e qualquer mudança de sinal σ satisfaz

$$\|x(t)\| \leq ce^{-\mu t} \|x(0)\| \quad \forall t \geq 0. \quad (2.3)$$

Diz-se que o sistema (2.2) é localmente uniformemente exponencialmente estável se existem constantes positivas M, c e μ tais que, para toda mudança de sinal σ , a solução da equação (2.2) com $\|x(0)\| \leq M$ satisfaz

$$\|x(t)\| \leq ce^{-\mu t} \|x(0)\| \quad \forall t \geq 0.$$

Será visto neste capítulo que a existência de uma função de Lyapunov quadrática comum para a família de sistemas lineares

$$\dot{x} = A_p x, \quad p \in \mathcal{P} \quad (2.4)$$

implica que o sistema (2.2) é uniformemente exponencial estável para uma arbitrária mudança de sinal σ se a álgebra de Lie $\{A_p; p \in \mathcal{P}\}_{LA}$ é solúvel.

2.2 Preliminares

No estudo da estabilidade de sistemas lineares e não lineares é comum usar a teoria de Lyapunov, onde a existência de uma função de Lyapunov garante a estabilidade do sistema. No caso de sistemas alternantes, como veremos neste capítulo, é necessário a noção de função de Lyapunov comum à toda família de campos do sistema.

Diz-se que uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Lyapunov comum para a família (2.4) se $V(0) = 0$, $V(x) > 0$, se $x \neq 0$ e a derivada de V ao longo da trajetória (2.4) é negativa para todo $x \neq 0$.

O lema abaixo diz que a existência de uma função de Lyapunov quadrática comum para a família de sistemas lineares $\dot{x} = A_p x$, $p \in \mathcal{P}$ garante a estabilidade global exponencial uniforme da equação (2.2).

Lema 2.1. *Se existem matrizes reais simétricas positiva definida Q e R tais que*

$$-QA_p - A_p^T Q \geq R, \quad \text{e } p \in \mathcal{P} \quad (2.5)$$

então o sistema (2.2) é globalmente uniformemente exponencialmente estável.

Demonstração. Seja $V(x) = x^T Q x$, com $Q > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x = \xi(t)$. Como na demonstração do Teorema A.2, temos

$$\frac{dV}{dt}(\xi(t)) = [\xi^T(t) Q \xi(t)]'$$

$$\begin{aligned}
 &= [\xi^T(t)]' Q \xi(t) + \xi^T(t) Q \xi'(t) \\
 &= [A_p x]^T Q x + x^T Q A_p x \\
 &= x^T A_p^T Q x + x^T Q A_p x \\
 &= x^T [A_p^T Q + Q A_p] x.
 \end{aligned}$$

Assim, $A_p^T Q + Q A_p < -R$, com $R > 0$ é uma condição suficiente para que V seja uma função de Lyapunov comum, e portanto o sistema 2.2 é globalmente uniformemente estável. De acordo com o Corolário 3.4 de [11], para verificar que (2.2) é globalmente exponencialmente uniformemente estável, basta mostrar que existem constantes $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$k_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq k_2 \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n \quad (2.6)$$

A existência de k_1, k_2 satisfazendo (2.6) segue do fato que Q é simétrica positiva definida. $\square$

2.3 Estabilidade de Sistemas Lineares Alternantes com $\mathcal{P}$ Finito

Considere o sistema linear de tempo variando

$$\dot{x} = A_p(t)x(t), \quad x(0) = x_0, \quad p \in \mathcal{P} = \{1, 2, \dots, N\} \quad (2.7)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e a matriz $A_p(t)$ alterna entre as matrizes estáveis $A_1, A_2, \dots, A_N$. O objetivo aqui é encontrar as condições necessária e suficiente para a estabilidade assintótica do estado de equilíbrio desse sistema. Com esta classe de problema, uma importante questão que surge freqüentemente é onde o sistema (2.7) é exponencialmente estável para qualquer sequência arbitrária de mudança entre os elementos de $\mathcal{P}$.

Aqui será considerado um caso especial do problema acima, no qual as matrizes A_p comutam por par, isto é $A_p A_q = A_q A_p$, $p, q \in \mathcal{P}$. O principal resultado está contido no item ii) do Teorema 2.1 com $N = 2$, onde um método explícito de gerar uma função de Lyapunov comum é apresentado. Isto é generalizado no Teorema 2.2, para o caso onde $N \geq 2$.

Teorema 2.1. *Considere o sistema alternante (2.7) com $p \in \mathcal{P} = \{1, 2\}$. Assumindo que A_1 e A_2 são matrizes assintoticamente estáveis tais que $A_1 A_2 = A_2 A_1$. Então:*

i) O sistema é exponencialmente estável para qualquer arbitrária seqüência alternante entre os elementos de $\mathcal{A}$.

ii) Dada uma matriz positiva definida simétrica P_0 , sejam P_1 e P_2 as únicas matrizes simétricas positivas definidas que são soluções para as equações de Lyapunov,

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -P_0, \quad (2.8)$$

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -P_1. \quad (2.9)$$

Então a função $V(x) = x^T P_2 x$ é uma função de Lyapunov comum para ambos sistemas $\dot{x} = A_p x$, $p \in \mathcal{P} = \{1, 2\}$ e daí segue que V é uma função de Lyapunov para o sistema alternante (2.7).

iii) Para uma dada escolha da matriz P_0 , as matrizes A_1 e A_2 podem ser escolhidas em qualquer ordem em (2.8), (2.9) que resulta na mesma solução P_2 , isto é, se

$$A_2^T P_3 + P_3 A_2 = -P_0 \quad (2.10)$$

então

$$A_1^T P_2 + P_2 A_1 = -P_3. \quad (2.11)$$

iv) A matriz P_2 pode também ser expressa na forma integral como:

$$\begin{aligned} P_2 &= \int_0^\infty e^{A_2^T t} \left[\int_0^\infty e^{A_1^T \tau} P_0 e^{A_1 \tau} d\tau \right] e^{A_2 t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{A_1^T t} \left[\int_0^\infty e^{A_2^T \tau} P_0 e^{A_2 \tau} d\tau \right] e^{A_1 t} dt. \end{aligned}$$

Demonstração. i) Isto pode ser provado diretamente usando o fato que se A_1 e A_2 comutam, então $e^{A_1 t} e^{A_2 \tau} = e^{A_2 \tau} e^{A_1 t}$, para todo t, τ . A estabilidade exponencial também segue de ii) abaixo.

ii) Seja $V(x) = x^T P_2 x$. Se $\dot{x} = A_2 x$, usando (2.9) a derivada de V ao longo da trajetória deste sistema é

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P_2 x + x^T P_2 \dot{x} \\ &= x^T A_2^T P_2 x + x^T P_2 A_2 x \\ &= x^T (A_2^T P_2 + P_2 A_2) x \\ &= -x^T P_1 x < 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que V é uma função de Lyapunov para este sistema. Agora, a derivada de V ao longo da trajetória do sistema $\dot{x} = A_1x$ é dada por $\dot{V} = x^T(A_1^T P_2 + P_2 A_1)x$. Substituindo P_1 de (2.9) em (2.8) e usando a comutatividade de A_1 e A_2 , obtém-se

$$P_0 = A_1^T(A_2^T P_2 + P_2 A_2) + (A_2^T P_2 + P_2 A_2)A_1$$

que implica em

$$P_0 = A_2^T(A_1^T P_2 + P_2 A_1) + (A_1^T P_2 + P_2 A_1)A_2. \quad (2.12)$$

Visto que A_2 é estável e $P_0 > 0$, isto mostra que $A_1^T P_2 + P_2 A_1 < 0$, e portanto $\dot{V} < 0$. Finalmente, a derivada de V ao longo da trajetória do sistema alternante (2.7) é dado por

$$\dot{V} = x^T(A_p^T(t)P_2 + P_2 A_p(t))x = \begin{cases} x^T(A_2^T P_2 + P_2 A_2)x = -x^T P_1 x < 0, & p = 2 \\ x^T(A_1^T P_2 + P_2 A_1)x = -x^T P_3 x < 0, & p = 1 \end{cases}$$

e segue que V é também uma função de Lyapunov para o sistema alternante.

iii) Sendo P_3 , solução para a equação Lyapunov (2.10), ela é positiva definida. Daí segue que existe uma única solução positiva definida P_4 para a equação de Lyapunov

$$A_1^T P_4 + P_4 A_1 = -P_3. \quad (2.13)$$

Será mostrando que $P_4 = P_2$. De (2.10) e (2.13) e a comutatividade de A_1 e A_2 segue que

$$P_0 = A_1^T(A_2^T P_4 + P_4 A_2) + (A_2^T P_4 + P_4 A_2)A_1. \quad (2.14)$$

De (2.12) e (2.14), $A_2^T P_2 + P_2 A_2$ e $A_2^T P_4 + P_4 A_2$ são as únicas soluções da mesma equação de Lyapunov. Segue $A_2^T(P_2 - P_4) + (P_2 - P_4)A_2 = 0$. Visto que A_2 é estável, $P_4 = P_2$;

iv) A solução da equação de Lyapunov (2.8) é conhecida como $P_1 = \int_0^\infty e^{A_1^T \tau} P_0 e^{A_1 \tau} d\tau$. Então a solução para uma equação de Lyapunov (2.9) é

$$P_2 = \int_0^\infty e^{A_2^T t} \left[\int_0^\infty e^{A_1^T \tau} P_0 e^{A_1 \tau} d\tau \right] e^{A_2 t} dt.$$

A segunda forma para P_2 pode ser obtida de modo análogo usando a segunda caracterização de P_2 dada por (2.10) e (2.11). $\square$

Teorema 2.2. *Considere o sistema alternante (2.7), onde as matrizes A_p com $p \in \mathcal{P} = \{1, 2, \dots, N\}$ são assintoticamente estáveis e comutam duas a duas. Então:*

- i) O sistema é exponencialmente estável para qualquer arbitrária sequência alternante entre os elementos de $\{A_p\}_{p \in \mathcal{P}}$;
- ii) dada uma matriz simétrica positiva definida P_0 , seja $P_1, \dots, P_N$ as únicas soluções simétricas positivas definidas para as equações de Lyapunov

$$A_p^T P_p + P_p A_p = -P_{p-1}, \quad p = 1, 2, \dots, N. \quad (2.15)$$

Então a função $V(x) = x^T P_N x$ é uma função de Lyapunov comum para cada um dos sistemas individuais $\dot{x} = A_p x$, $p = 1, 2, \dots, N$, e assim $V(x) = x^T P_N x$ é uma função de Lyapunov para o sistema alternante (2.7);

- iii) para uma dada escolha da matriz P_0 , as matrizes $A_1, \dots, A_N$ podem ser escolhidas em qualquer ordem em (2.15) que resulta na mesma solução P_N ;
- iv) a matriz P_N pode também ser expressa na forma integral como

$$P_N = \int_0^\infty e^{A_N^T t_N} \dots \left[\int_0^\infty e^{A_2^T t_2} \left[\int_0^\infty e^{A_1^T t_1} P_0 e^{A_1 t_1} dt_1 \right] e^{A_2 t_2} dt_2 \right] \dots e^{A_N t_N} dt_N$$

onde, como na parte iii) acima, a ordem na qual as matrizes $A_1, \dots, A_N$ aparecem pode ser trocada por qualquer permutação.

Demonstração. A demonstração desse teorema é semelhante a demonstração do Teorema 2.1, a seguir serão dados somente os passos básicos da demonstração:

- i) Segue da parte ii) do teorema;
- ii) Se $\dot{x} = A_p x$, a derivada de V ao longo das trajetórias deste sistema é dada por $\dot{V} = x^T (A_p^T P_N + P_N A_p) x$ e segue que é necessário mostrar que $A_p^T P_N + P_N A_p < 0$ para $p = 1, 2, \dots, N$. Para este propósito, definimos a matriz

$$P_{pq} := A_p^T P_q + P_q A_p.$$

Se for mostrado que $P_{pq} < 0$ para $p = 1, 2, \dots, N$, $q = p, p+1, \dots, N$ então o resultado segue da escolha de $q = N$ para cada p . Seja $p \in \{1, 2, \dots, N\}$. De 2.15, $P_{pp} = -P_{p-1} < 0$. Agora suponha que $P_{pq} < 0$ para algum $q \in \{p, p+1, \dots, N-1\}$. Usando 2.15, a comutatividade de A_p e A_{q+1} e a estabilidade de A_{q+1} segue que

$$A_{q+1}^T P_{p,q+1} + P_{p,q+1} A_{q+1} = -(A_p^T P_q + P_q A_p) = -P_{pq} > 0,$$

mostrando que $P_{p,q+1} < 0$ e o item ii) segue por indução.

iii) A demonstração deste item segue de forma semelhante ao que foi feito no Teorema 2.1.

Considere uma permutação de $A_1, \dots, A_N$ em (2.15) e suponha que a solução resultante seja R_N . Usando a unicidade das soluções das equações de Lyapunov e a comutatividade das matrizes $A_1, \dots, A_N$ verifica-se que $R_N = P_N$.

iv) A demonstração é semelhante ao caso (iv) do Teorema 2.1.

□

Observação 2.1. O Teorema (2.1) afirma que comutatividade garante a existência de uma função de Lyapunov comum. A recíproca não é verdadeira em geral. Por exemplo, se $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, então $V(x) = x^T x$ é uma função de Lyapunov, mas A_1 e A_2 não comutam.

Na próxima seção o resultado de estabilidade para sistemas alternantes será estendido para o caso não comutativo.

Observação 2.2. Se $V(x) = x^T P x$ é uma função de Lyapunov para A_1 e A_2 então ela é também uma função de Lyapunov para qualquer combinação linear positiva de A_1 e A_2 , isto é, para matrizes da forma $\alpha A_1 + \beta A_2$ onde $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta > 0$.

Observação 2.3. Se $V(x) = x^T P x$ é uma função de Lyapunov comum para A_1 e A_2 , então existem vizinhanças N_1 e N_2 rodeando A_1 e A_2 , respectivamente, tais que V permanece uma função de Lyapunov para qualquer par de matrizes B_1 e B_2 pertencentes ao conjunto $N_1 \cup N_2$.

2.4 Estabilidade de Sistemas Lineares Alternantes - $\mathcal{P}$ Infinito

Nesta seção considerados os sistemas lineares alternantes (2.4) onde $\mathcal{P}$ é subconjunto compacto de um espaço vetorial linear normado de dimensão finita e as matrizes da família $\{A_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ não são necessariamente comutativas por par. Supomos que

$$A_p : \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

$$p \mapsto A_p$$

são funções contínuas.

2.4.1 Condição Suficiente para Estabilidade

A estabilidade do sistema (2.4) será garantida pela construção de uma função de Lyapunov quadrática comum para a família de sistemas lineares $\dot{x} = A_p x$, $p \in \mathcal{P}$. A existência de uma tal função na verdade implica na estabilidade global exponencialmente uniforme do sistema (Lema 2.1). A construção de tal função de Lyapunov comum é baseada no Teorema de Lie (Teorema 1.1).

Será enunciado a seguir o resultado mais importante desta teoria.

Teorema 2.3. *Se a álgebra de Lie $\{A_p : p \in \mathcal{P}\}_{LA}$ é solúvel, então o sistema (2.2) é globalmente uniformemente exponencialmente estável.*

Demonstração. Pelo Lema 2.1 é suficiente encontrar matrizes reais simétricas positivas definidas Q e R tais que as inequações (2.5) sejam satisfeitas.

Em primeiro lugar mostra-se que existe uma matriz $\tilde{Q}$ positiva definida tal que

$$-\tilde{Q}\tilde{A}_p - \tilde{A}_p^* \tilde{Q} > 0, \quad p \in \mathcal{P} \quad (2.16)$$

onde $\tilde{A}_p = T A_p T^{-1}$ para alguma matriz complexa não singular T . A existência de $\tilde{A}_p$ segue do fato que $\{A_p; p \in \mathcal{P}\}$ é solúvel e daí o Teorema 1.1 (Teorema de Lie) garante a existência de uma matriz complexa não singular T tal que $\tilde{A}_p = T A_p T^{-1}$ é triangular superior para todo $p \in \mathcal{P}$. Supondo $\tilde{Q}$ uma matriz diagonal real, tem-se:

$$-\tilde{Q}\tilde{A}_p - \tilde{A}_p^* \tilde{Q} = \begin{pmatrix} -2q_1(\mathbf{R}\tilde{A}_p)_{11} & -q_1(\tilde{A}_p)_{12} & \cdots & -q_1(\tilde{A}_p)_{1n} \\ -q_1(\overline{\tilde{A}_p})_{12} & -2q_2(\mathbf{R}\tilde{A}_p)_{22} & \cdots & -q_2(\tilde{A}_p)_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -q_1(\overline{\tilde{A}_p})_{1n} & -q_2(\overline{\tilde{A}_p})_{2n} & \cdots & -2q_n(\mathbf{R}\tilde{A}_p)_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

onde $\mathbf{R}$ denota a parte real e $\mathbf{I}$ a parte imaginária. Escolhendo um arbitrário $q_1 > 0$ temos $-2q_1(\mathbf{R}\tilde{A}_p)_{11} > 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}$ pois $\tilde{A}_p$ tem parte real negativa (isto segue do fato de que A_p é estável, o que implica que $\tilde{A}_p = T A_p T^{-1}$ é também estável). Agora suponha que $q_1, \dots, q_k > 0$ tenha sido escolhidos para que os principais menores principais da matriz do lado direito de (2.17) até ordem k são maiores que algum número $\varepsilon > 0$ para qualquer $p \in \mathcal{P}$. Não é difícil de ver que pela escolha de q_{k+1} suficientemente grande pode-se fazer o $(k+1)\text{x}(k+1)$ principal menor principal positivo para qualquer $p \in \mathcal{P}$. Procedendo dessa forma, o Lema A.1 garante que a matriz do lado direito de 2.17 é positiva definida e a matriz $\tilde{Q}$ é positiva

definida satisfazendo (2.16). Como $\tilde{A}_p = TA_pT^{-1}$, obtém-se:

$$-T^*\tilde{Q}TA_p - A_p^T T^* \tilde{Q}T > 0, \quad p \in \mathcal{P}.$$

De fato,

$$\tilde{A}_p = TA_pT^{-1}, \quad p \in \mathcal{P} \quad (2.18)$$

logo

$$\tilde{A}_p^* = (T^*)^{-1}A_p^T T^*, \quad p \in \mathcal{P}. \quad (2.19)$$

Substituindo (2.18) e (2.19) em (2.16), obtém-se

$$-\tilde{Q}TA_pT^{-1} - (T^*)^{-1}A_p^T T^* \tilde{Q} > 0.$$

Multiplicando a última desigualdade pela direita por T , obtém-se

$$-\tilde{Q}TA_p - (T^*)^{-1}A_p^T T^* \tilde{Q}T > 0.$$

Agora multiplicando a última desigualdade pela esquerda por T^* segue que

$$-T^*\tilde{Q}TA_p - A_p^T T^* \tilde{Q}T > 0 \quad p \in \mathcal{P}.$$

Se denotarmos $T^*\tilde{Q}T$ por $\hat{Q}$ e $-T^*\tilde{Q}TA_p - A_p^T T^* \tilde{Q}T$ por R_p , pode-se escrever

$$R_p = -\hat{Q}A_p - A_p^T \hat{Q}. \quad (2.20)$$

Ou mais explicitamente (recordando que as matrizes A_p são reais)

$$-(\mathbf{R}\hat{Q} + \sqrt{-1}\mathbf{I}\hat{Q})A_p - A_p^T(\mathbf{R}\hat{Q} + \sqrt{-1}\mathbf{I}\hat{Q}) = \mathbf{R}R_p + \sqrt{-1}\mathbf{I}R_p.$$

Disto segue que

$$-\mathbf{R}\hat{Q}A_p - A_p^T \mathbf{R}\hat{Q} = \mathbf{R}R_p.$$

Mas para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se $0 < x^T \hat{Q}x = x^T \mathbf{R}\hat{Q}x$. De fato, como $\hat{Q}$ é Hermitiana, segue que $\mathbf{I}\hat{Q}$ é anti-simétrica.

Similarmente, $0 < x^T R_p x = x^T \mathbf{R}R_p x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e qualquer $p \in \mathcal{P}$. Além disso, como o conjunto $\{A_p; p \in \mathcal{P}\}$ é compacto, segue de (2.20) o conjunto de matrizes definida positiva $\{R_p; p \in \mathcal{P}\}$ também é compacto e conseqüentemente existe uma matriz real simétrica positiva definida R tal que $\mathbf{R}R_p \geq R$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Mas veja que a matriz $Q := \mathbf{R}\hat{Q}$ e R satisfazem a condição do Lema 2.1, o que completa a demonstração. $\square$

Observação 2.4. *Note que, embora tenha sido mostrado que a função de Lyapunov quadrática comum existe, esta construção depende do conhecimento da matriz T . Portanto, métodos numéricos apropriados devem ser empregados para calcular esta matriz.*

No contexto do sistema linear alternante (2.2), suponha que $\{A_p : p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto compacto de matrizes reais $n \times n$ estáveis, e agora considere uma decomposição de Levi de $\mathbf{g}$, isto é, $\mathbf{g} = \mathbf{r} \oplus \mathbf{s}$ onde $\mathbf{r}$ é o radical e $\mathbf{s}$ é uma subálgebra semi-simples. Tem-se a seguinte generalização do Teorema 2.3.

Teorema 2.4. *Se $\mathbf{s}$ é uma álgebra de Lie compacta, então o sistema linear alternante (2.2) é globalmente exponencialmente uniformemente estável.*

Demonstração. Para um arbitrário $p \in \mathcal{P}$, escreve-se $A_p = r_p + s_p$ com $r_p \in \mathbf{r}$ e $s_p \in \mathbf{s}$. Agora será mostrado que r_p é uma matriz estável. Escrevendo

$$e^{(r_p+s_p)t} = e^{s_p t} B_p(t) \quad (2.21)$$

Diferenciando (2.21) com respeito a t , obtém-se

$$(r_p + s_p)e^{(r_p+s_p)t} = s_p e^{s_p t} B_p + e^{s_p t} \dot{B}_p$$

De (2.21) segue que

$$r_p e^{s_p t} B_p + s_p e^{s_p t} B_p = s_p e^{s_p t} B_p + e^{s_p t} \dot{B}_p.$$

Logo,

$$\dot{B}_p(t) = e^{-s_p t} r_p e^{s_p t} B_p(t), \quad B_p(0) = I. \quad (2.22)$$

Sabe-se da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff que para quaisquer duas matrizes A e B tem-se

$$e^{-A} B e^A = e^{ad^A}(B) = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots \quad (2.23)$$

Definindo $c_p(t) := e^{-s_p t} r_p e^{s_p t}$ obtém-se de (2.23) a expansão

$$c_p(t) = r_p + [s_p t, r_p] + \frac{1}{2}[s_p t, [s_p t, r_p]] + \dots$$

Como $[\mathbf{s}, \mathbf{r}] \subseteq \mathbf{r}$ pois $\mathbf{r}$ é radical, tem-se que $c_p(t) \in \mathbf{r}$. De acordo com o Teorema de Lie, existe uma base na qual todas as matrizes de $\mathbf{r}$ são triangular superior. Como $\mathbf{s}$ é compacta, existe uma constante $c > 0$ tal que $|e^s x| \geq c|x|$ para todo $s \in \mathbf{s}$ e $x \in \mathbb{R}^n$; então não se

tem $e^{s_p t} x \rightarrow 0$ para $x \neq 0$. Como $e^{(r_p+s_p)t} = e^{s_p t} B_p(t)$ e $e^{(r_p+s_p)t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, pois $e^{(r_p+s_p)t} = e^{A_p}$ e A_p é estável, então $e^{s_p} B_p(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Mas, como $e^{s_p t}$ não tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, segue que $B_p(t) \rightarrow 0$. Logo $e^{r_p t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ pois $B_p(t) = e^{r_p t}$. Portanto, r_p é estável.

Como $p \in \mathcal{P}$ é arbitrário, todas as matrizes r_p , $p \in \mathcal{P}$, são estáveis. Logo o Teorema 2.3 implica que os sistemas lineares alternantes gerados por essas matrizes são globalmente uniformemente exponencialmente estáveis. Além disso, as mesmas propriedades são válidas para matrizes no conjunto estendido

$$\bar{r} := \{\bar{A} : \exists p \in \mathcal{P} \text{ e } s \in \mathcal{S} \text{ tq } \bar{A} = e^{-s} r_p e^s\}. \quad (2.24)$$

Isto é verdade porque as matrizes neste conjunto são estáveis e porque elas pertencem a $\mathbf{r}$. A afirmação anterior segue da expansão (2.23) novamente visto que $[\mathbf{s}, \mathbf{r}] \subseteq \mathbf{r}$.

Agora a matriz de mudança do sistema linear alternante original (2.2) no tempo t tem a forma

$$\Phi(t, 0) = e^{(r_{p_k}+s_{p_k})t_k} \dots e^{(r_{p_1}+s_{p_1})t_1} = e^{s_{p_k} t_k} B_{p_k}(t_k) \dots e^{s_{p_1} t_1} B_{p_1}(t_1),$$

onde $t_1, t_1 + t_2, \dots, t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1} < t$ são instantes alternantes, $t_1 + \dots + t_k = t$, e, como antes, $\dot{B}_{p_i}(t) = e^{-s_{p_i} t} r_{p_i} e^{s_{p_i} t} B_{p_i}(t)$, $i = 1, \dots, k$. Para simplificar a notação, seja $k = 2$. Assim,

$$\Phi(t, 0) = e^{s_{p_2} t_2} e^{s_{p_1} t_1} e^{-s_{p_1} t_1} B_{p_2}(t_2) e^{s_{p_1} t_1} B_{p_1}(t_1) = e^{s_{p_2} t_2} e^{s_{p_1} t_1} \tilde{B}_{p_2}(t_2) B_{p_1}(t_1),$$

onde $\tilde{B}_{p_2}(t) := e^{-s_{p_1} t_1} B_{p_2}(t) e^{s_{p_1} t_1}$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{B}_{p_2}(t) &= e^{-s_{p_1} t_1} \dot{B}_{p_2}(t) e^{s_{p_1} t_1} \\ &= e^{-s_{p_1} t_1} e^{-s_{p_2} t} r_{p_2} e^{s_{p_2} t} B_{p_2}(t) e^{s_{p_1} t_1} \\ &= e^{-s_{p_1} t_1} e^{-s_{p_2} t} r_{p_2} e^{s_{p_2} t} e^{s_{p_1} t_1} e^{-s_{p_1} t_1} B_{p_2}(t) e^{s_{p_1} t_1} \\ &= e^{-s_{p_1} t_1} e^{-s_{p_2} t} r_{p_2} e^{s_{p_2} t} e^{s_{p_1} t_1} \tilde{B}_{p_2}(t). \end{aligned}$$

Desse modo

$$\Phi(t, 0) = e^{s_{p_2} t_2} e^{s_{p_1} t_1} \bar{B}(t), \quad (2.25)$$

onde $\bar{B}(t)$ é a matriz de mudança de um sistema alternante de tempo variável gerado pelas matrizes em $\bar{\mathbf{r}}$, isto é, $\frac{d}{dt} \bar{B}(t) = \bar{A}(t) \bar{B}(t)$ com $\bar{A}(t) \in \bar{\mathbf{r}} \quad \forall \quad t \geq 0$. A norma do primeiro termo no produto acima é limitada pela compacidade e a norma do segundo vai para zero exponencialmente pelo Teorema 2.3. O que completa a prova do teorema. $\square$

Observação 2.5. *A afirmação do Teorema 2.4 continua válida para qualquer decomposição de $\mathbf{g}$ na soma de um ideal $\mathbf{r}$ e uma subálgebra $\mathbf{s}$. Entre todas possíveis decomposições desse tipo, a decomposição acima dá o resultado forte. Se $\mathbf{g}$ é solúvel, então $\mathbf{s} = 0$ é naturalmente compacta, e recupera-se o Teorema 2.3 como um caso particular.*

Exemplo 2.1. *Suponha que as matrizes A_p , $p \in \mathcal{P}$, sejam da forma $A_p = -\lambda_p I + S_p$, onde $\lambda > 0$ e $S_p^T = -S_p$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Estas são automaticamente matrizes estáveis. Suponha também que I pertença ao $\text{span}\{A_p : p \in \mathcal{P}\}$. Então a condição do Teorema 2.4 é satisfeita. De fato, faça $r = \{\lambda I; \lambda \in \mathbb{R}\}$ e observe que a álgebra de Lie $\{S_p : p \in \mathcal{P}\}_{LA}$ é compacta porque as matrizes anti-simétricas tem autovalores imaginário puro.*

No Teorema 2.3 a propriedade de estabilidade exponencial uniforme foi deduzida da existência de uma função de Lyapunov quadrática comum. No presente caso foi mais conveniente obter diretamente o resultado desejado.

É interessante também notar que, embora a recíproca do Teorema 2.4 provada em [14] implica que estabilidade global exponencial uniforme sempre leva a existência de uma função de Lyapunov comum, em alguns casos não é possível encontrar uma tal função quadrática como acontece em [5]. Isto mostra claramente que a condição do Teorema (2.5) não é necessária para estabilidade exponencial uniforme do sistema linear alternante (2.2). Outra maneira de ver isto é notar que a propriedade de estabilidade exponencial uniforme é forte com respeito a pequenas perturbações dos parâmetros do sistema enquanto a condição do Teorema 2.4 não é. De fato, a condição álgebra de Lie considerada aqui não pode possuir a propriedade forte indicada. Isto segue do fato provado no Capítulo 1, Seção 1.12 que uma pequena vizinhança arbitrária de qualquer par de matrizes $n \times n$ existe um par de matrizes que gera a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ inteira.

2.4.2 Resultado Complementar

Já foi observado que a condição do Teorema 2.4 não é necessária para estabilidade exponencial uniforme do sistema alternante (2.2). É natural perguntar se esta condição pode ser melhorada. Uma questão mais geral é saber para qual dimensão a estrutura da álgebra de Lie pode ser usada para distinguir entre sistema alternante estável e instável. As conclusões dessa seção dará alguma luz para estas questões.

É útil introduzir uma álgebra de Lie $\hat{\mathbf{g}}$ maior possível pela adição de $\mathbf{g}$ com a matriz

identidade multiplicada por um escalar se necessário. Em outras palavras, definindo-se $\hat{g} = \hat{r} \oplus \mathbf{s}$ onde $\mathbf{r} \subseteq \hat{r}$. Assim $\hat{g}$ satisfaz a hipótese do Teorema (2.4) se e somente se $\mathbf{g}$ também satisfaz.

O objetivo aqui é mostrar que se esta hipótese não é satisfeita, então $\hat{g}$ pode ser gerada por uma família de matrizes estáveis a qual em princípio é diferente de $\{A_p; p \in \mathcal{P}\}_{LA}$ com a propriedade que o correspondente sistema linear alternante não é estável. Isto implica que, mesmo trabalhando corretamente com $\hat{g}$, não é possível obter um resultado forte como foi dado na seção anterior.

Também será visto que existe outro conjunto de geradores estáveis para $\hat{g}$, os quais conduzem a um sistema linear alternante uniformemente exponencialmente estável. Será mostrado que ambos conjuntos de geradores podem sempre ser escolhidos de tal maneira que ele contenha o mesmo número de elementos que o conjunto original que foi usado para gerar $\hat{g}$. Assim, se a álgebra de Lie não satisfaz a hipótese do Teorema 2.4, esta álgebra de Lie sozinha não fornece a informação suficiente para determinar se o sistema linear alternante original é ou não estável.

Seja $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ qualquer conjunto finito de geradores estáveis para $\hat{g}$. Se o conjunto de índices $\mathcal{P}$ é infinito, um subconjunto finito adequado pode sempre ser obtido dele. Vale o seguinte resultado.

Teorema 2.5. *Suponha que $\mathbf{s}$ não é uma álgebra de Lie compacta. Então existe um conjunto de m geradores estáveis de $\hat{g}$ tais que o sistema linear alternante correspondente não é uniformemente exponencialmente estável. Existe também outro conjunto de m geradores estáveis de $\hat{g}$ tal que o sistema linear alternante correspondente é globalmente uniformemente exponencialmente estável.*

Demonstração. Para demonstrar a segunda afirmação do teorema, basta subtraímos λI de cada um dos geradores $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$, onde $\lambda > 0$ é suficientemente grande. A saber, tomando λ igual a um número qualquer maior que o maior autovalor de $\frac{(A_i + A_i^T)}{2}$, para todo $i = 1, \dots, m$ então é fácil verificar que o sistema linear definido pelas matrizes $A_1 - \lambda I, A_2 - \lambda I, \dots, A_m - \lambda I$ todos possuem a função de Lyapunov comum $V(x) = x^T x$. Para mostrar que estas matrizes na verdade geram $\hat{g}$, é suficiente mostrar que o conjunto gerado por estas matrizes e seus colchetes de Lie contém a matriz identidade I . Sabe-se que I pode ser escrito como uma combinação linear das matrizes $A_1, \dots, A_m$, e desses adequados colchetes de Lie.

Substituindo cada A_i nesta combinação linear por $A_i - \lambda I$, obtém-se uma matriz I multiplicada por um escalar. Se esta não é nula, acabou; caso contrário, acrescenta-se corretamente o valor de λ .

Com relação a primeira afirmação do teorema, como $\mathfrak{s}$ não é compacta, esta contém uma subálgebra que é uma representação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Uma tal representação pode ser construída como foi mostrado no Capítulo 1, Seção 1.10. A existência desta representação é a propriedade chave que será explorada.

Para provar o teorema, primeiro encontra-se um par de matrizes B_1 e B_2 estáveis que estão numa subálgebra que é uma representação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e tem uma combinação convexa instável (veja definição de combinação convexa no apêndice A2), e então elas serão usadas para construir um desejável conjunto de geradores para $\hat{\mathfrak{g}}$.

Como toda matriz representação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é uma soma direta de representações irredutíveis, sem perda de generalidade serão consideradas somente representações irredutíveis. Em particular sabe-se que qualquer representação irredutível de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ contém duas matrizes da seguinte forma

$$\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mu_r \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz $\tilde{B}_1$ tem entradas positivas $\mu_1, \dots, \mu_r$ imediatamente acima da diagonal principal e zeros em todas as outras entradas, e a matriz $\tilde{B}_2$ tem 1 imediatamente abaixo da diagonal principal e zero nas demais entradas.

Não é difícil verificar que a matriz não negativa $\tilde{B} := \frac{(\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2)}{2}$ é irredutível e como uma tal matriz satisfaz a afirmativa do Teorema de Perron-Frebenius (veja[13], capítulo 8). Segundo o teorema, $\tilde{B}$ tem um autovalor positivo. Então para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno a matriz $B := \tilde{B} - \varepsilon I$ também tem um autovalor positivo. Assim, tem-se $B = \frac{\tilde{B}_1 - \varepsilon I + \tilde{B}_2 - \varepsilon I}{2}$. Isto implica que um par de matrizes numa dada representação matricial irredutível de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ pode ser definida por $B_1 := \tilde{B}_1 - \varepsilon I$ e $B_2 := \tilde{B}_2 - \varepsilon I$. Na verdade, essas matrizes são estáveis, mas em geral B não é.

Para $\alpha \geq 0$, definindo $A_1(\alpha) := B_1 + \alpha A_1$ e $A_2(\alpha) := B_2 + \alpha A_2$. Se α é suficientemente pequeno, então $A_1(\alpha)$ e $A_2(\alpha)$ são matrizes estáveis, enquanto $\frac{(A_1(\alpha) + A_2(\alpha))}{2}$ é instável. Mas as matrizes $A_1(\alpha), A_2(\alpha), A_3, \dots, A_m$ fornecem um sistema alternante que não é

uniformemente exponencialmente estável. Além disso, não é difícil mostrar que para α suficientemente pequeno essas matrizes geram $\hat{\mathfrak{g}}$. Na verdade, considere uma base para $\hat{\mathfrak{g}}$ formada por $A_1, A_2, \dots, A_m$, e seus colchetes de Lie adequados. Substituindo A_1 e A_2 nestas expressões por $A_1(\alpha)$ e $A_2(\alpha)$ e escrevendo as coordenadas dos elementos relativos a esta base, obtém-se uma matriz quadrada $\Delta(\alpha)$. O determinante desta matriz é um polinômio em α cujos valores tendem para ∞ quando $\alpha \rightarrow \infty$, e portanto este não é identicamente zero. Mas $\Delta(\alpha)$ é não degenerado para todos os finitos valores de α ; em particular, fazendo α suficientemente pequeno tem-se uma base para $\hat{\mathfrak{g}}$. Isto completa a prova. $\square$

Observação 2.6. *Dadas as matrizes B_1 e B_2 como na demonstração acima, não é difícil construir um conjunto de geradores estáveis para um dado $\hat{\mathfrak{g}}$ levando para o sistema linear alternante que não é uniformemente exponencialmente estável: fazendo corretamente qualquer conjunto de geradores para $\hat{\mathfrak{g}}$ contendo $-I$, B_1 e B_2 , e fazendo esta estável pela subtração de um múltiplo positivo da identidade se necessário. A construção acima, embora seja a mais correta, tem a desvantagem de produzir um conjunto de geradores com o mesmo número de elementos que o original conjunto de geradores para $\hat{\mathfrak{g}}$.*

Os resultados já obtidos até agora levam ao importante fato: a propriedade de $\hat{\mathfrak{g}}$ a qual está sendo investigada aqui, a saber, estabilidade global uniformemente exponencial de qualquer sistema alternante cuja álgebra de Lie associada é $\hat{\mathfrak{g}}$, depende somente da estrutura de $\hat{\mathfrak{g}}$, ou seja, independente da escolha de uma particular representação.

2.5 Sistemas Alternantes não Lineares

Considere a família de sistemas não lineares

$$\dot{x} = f_p(x), \quad p \in \mathcal{P} \quad (2.26)$$

onde $f_p : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável com $f_p(0) = 0$ para cada $p \in \mathcal{P}$ e D é uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n$. Considere também a correspondente família de sistemas linearizados

$$\dot{x} = F_p x, \quad p \in \mathcal{P} \quad (2.27)$$

onde $F_p = \frac{\partial f_p}{\partial x}(0)$. Suponha que as matrizes F_p são estritamente estáveis, que $\mathcal{P}$ é um conjunto compacto, e que $\frac{\partial f_p}{\partial x}(x)$ depende continuamente de p para cada $x \in D$. Diz-se que uma função

suave $V : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de Lyapunov local comum para a família (2.26) se $V(0) = 0$, $V(x) > 0, \forall x \in D - \{0\}$, existe um conjunto aberto $\bar{D} \subset D$ contendo a origem tal que a derivada de V ao longo das soluções de cada sistema na equação (2.26) é negativa para todo $x \in \bar{D} - \{0\}$.

Se a álgebra de Lie $\{F_p : p \in \mathcal{P}\}_{LA}$ é solúvel, então a família (2.26) possui uma função de Lyapunov local comum. Na verdade, a presente condição garante que $\{F_p : p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto compacto de matrizes estritamente estáveis, aí de acordo com o Teorema 2.3 a família linearizada (2.27) possui uma função de Lyapunov quadrática comum. Pode-se então aplicar o primeiro método de Lyapunov [11] para mostrar que esta função é uma função de Lyapunov local quadrática comum para a família original (2.26).

Agora, considere o sistema não linear alternante

$$\dot{x} = f_\sigma(x) \quad (2.28)$$

onde $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}$ é uma mudança de sinal constante por parte. A seguinte proposição é uma imediata consequência do que foi visto acima.

Proposição 2.1. *Se a álgebra de Lie $\{F_p : p \in \mathcal{P}\}_{LA}$ é solúvel, então o sistema (2.28) é uniformemente exponencialmente estável.*

Considere a álgebra de Lie $\tilde{\mathbf{g}} := \{F_p : p \in \mathcal{P}\}_{LA}$ e a decomposição de Levi $\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{r}} \oplus \tilde{\mathbf{s}}$. A seguinte afirmação generaliza a Proposição 2.1.

Proposição 2.2. *Se $\tilde{\mathbf{s}}$ é uma álgebra de Lie compacta, então o sistema alternante (2.28) é uniformemente exponencialmente estável.*

Demonstração. Para cada $p \in \mathcal{P}$ podemos escrever

$$f_p(x) = F_p(x) + g_p(x)x$$

onde $g_p(x) = F_p(\lambda x) - F_p x$, com $\lambda \in (0, 1)$. Temos que $g_p(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$.

Seja $\bar{V}(x) = x^T Q x$, onde a matriz simétrica positiva definida, a função de Lyapunov comum para a família de sistemas lineares gerada pelas matrizes de $\bar{\mathbf{r}}$ em 2.24. Definindo $V(x) = \int_S \bar{V}(Sx) dS$. Aqui S é o grupo de Lie correspondente a $\tilde{\mathbf{s}}$ e a integral é com relação a medida de Haar, invariante por translação à direita em S . Não é difícil de verificar que $\frac{d}{dt}V(x(t)) < 0$ ao longo das trajetórias de (2.27) (veja [1]). Agora tome uma trajetória $x(\cdot)$ qualquer de (2.28). Temos que $\frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x(t))F_p(x(t)) < 0$ numa vizinhança

$\bar{D}$ adequada de zero. Assim V é uma função de Lyapunov comum local para a família de sistemas $\dot{x} = f_p(x)$, $p \in \mathcal{P}$, na vizinhança da origem, veja [11] Teorema 3.7). Portanto, o sistema alternante (2.28) é uniformemente exponencialmente estável em $\bar{D}$. $\square$

Conclusão

Inicialmente, foi feito um estudo sobre os principais conceitos da álgebra de Lie, que serviu para o desenvolvimento do Capítulo 2 onde foi feita a exposição de um estudo a respeito de sistemas alternantes.

Com relação aos sistemas alternantes, primeiramente foi apresentada a demonstração de que para todo sistema linear da forma $\dot{x} = A_p x$, $p = 1, \dots, N$, onde as matrizes A_p são assintoticamente estáveis e comutativas por par, existe uma função de Lyapunov quadrática comum.

Em seguida foi apresentada uma condição suficiente para estabilidade assintótica de um sistema que alterna entre os membros de uma família infinita de sistemas lineares assintoticamente estáveis.

Para isto foi apresentada a demonstração do Teorema 2.3, via prova da existência de uma função de Lyapunov quadrática comum para esta família, que um tal sistema é globalmente uniformemente exponencialmente estável quando a álgebra de Lie associada é solúvel. Esta condição de estabilidade é mais geral do que a condição apresentada por Gurvitz em [8].

Em seguida foi apresentada a demonstração do resultado que generaliza o Teorema 2.3, a saber, se a álgebra de Lie pode ser decomposta numa soma de um ideal solúvel e uma subálgebra com grupo de Lie compacto, então o sistema linear alternante é globalmente uniformemente exponencialmente estável.

Além disso, foi mostrado que se a álgebra de Lie não satisfaz a condição acima, então ela pode ser gerada por uma família de matrizes estáveis tais que o sistema linear alternante correspondente não é estável.

Os resultados de estabilidade local correspondentes para sistemas alternantes não lineares também foram apresentados.

Apesar de que a literatura relacionada à análise de sistemas alternantes é vasta e crescente, os métodos usando álgebra de Lie tem sido pouco explorados. Segundo Agrachev

e Liberzon, os assuntos trados em [1] e apresentados aquí, são o ponto de partida no sentido de preencher este espaço, o qual é considerado o mais clássico ramo do controle teórico.

Quanto aos problemas propostos na introdução deste trabalho, embora não tenha sido possível resolvê-los neste momento, os assuntos tratados aqui formam um conjunto de ferramentas que é o ponto de partida para a investigação de uma possível solução dos referidos problemas.

Apêndice A

A.1 Introdução

Neste apêndice serão apresentados alguns conceitos de álgebra linear, tais como cones, matrizes observáveis, detalhes sobre menores, e matrizes copositivas. Os resultados incluídos aqui foram obtidos de [4].

A.2 Cones

Definição A.1. *Seja X um espaço vetorial. Um subconjunto K de X é chamado convexo se para todo $x, y \in K$ e todo $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$. Diz-se que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ é uma combinação convexa de elementos x_i se $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.*

Definição A.2. *Dis-se que um conjunto não vazio $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é um cone se, para qualquer $x \in C$ e qualquer $t \geq 0$, tem-se $tx \in C$. Nota-se, que a origem é um elemento de todo cone. Um subconjunto C de X é um cone convexo com vértice 0 se para todo $x, y \in C$ e todo $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda x + \mu y \in C$. Se C é um cone convexo então um raio extremo de C é um conjunto da forma $S = \{tx; t \in \mathbb{R}^+\}$ onde x é um vetor não nulo dado em C o qual não pode ser expresso como uma combinação de pontos em $C - \{S\}$.*

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ gera um cone convexo que é obtido fazendo-se a combinação linear não negativa das colunas de A . Este cone, denotado por $\text{pos}A$, é dado por

$$\text{pos}A = \{q \in \mathbb{R}^m; q = Av\}$$

para algum $v \in \mathbb{R}_+^p$. Os vetores $q \in \text{pos}A$ tem a propriedade que o sistema de equações lineares $Av = q$ admite uma não negativa solução v .

O conjunto $\text{pos}A$ é chamado de um cone finito. As colunas da matriz A são chamadas de geradores de $\text{pos}A$. Quando A é quadrada e não singular, $\text{pos}A$ é chamado de cone simples. Note que neste caso, tem-se

$$\text{pos}A = \{q \in \mathbb{R}^m; \quad A^{-1}q \geq 0\}$$

para $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$; isto dá uma explícita representação de $\text{pos}A$ em termos de um sistema de inequações lineares.

Se C é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$, então o envoltório canônico de C é a interseção de todo cone convexo em $\mathbb{R}^n$ que contém C . Pode ser mostrado que o envoltório convexo de C é igual ao conjunto de todas as combinações lineares não negativa de todos os subconjuntos de pontos de C . Veja outros exemplos de cones.

i) Todo subespaço linear;

ii) Intersecção de cones.

A.3 Menores, Menores Principais e Principais Menores Principais

Suponha que numa matriz quadrada M de ordem n sejam especificadas quaisquer $k \leq n$ linhas e o mesmo número de diferentes colunas. Os elementos que aparecem na intersecção dessas linhas e colunas formam uma matriz de ordem k . O determinante dessa matriz é chamado menor de ordem k da matriz original de ordem n .

Um menor principal é qualquer determinante da submatriz $M_{j,j}$ obtida pela intersecção de qualquer linhas e mesmas colunas. Em outras palavras, o elemento da intersecção da linha e coluna deve estar na diagonal.

Os principais menores principais são somente os determinantes das submatrizes $M_{j,j}$ do canto superior esquerdo da matriz principal.

A.4 Matrizes Copositivas

Definição A.3. Uma matriz simétrica A de ordem n é denominada *positiva definida* quando $x^T A x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$;
positiva semidefinida quando $x^T A x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
negativa definida quando $-A$ é positiva definida.

Lema A.1. Todos os principais menores principais de uma matriz Hermitiana são reais. Uma matriz Hermitiana H é positiva definida (isto é $x^* H x > 0 \ \forall x \in C^n - \{0\}$) se e somente se todos estes principais menores principais são positivos.

Demonstração. Pode ser vista em [19] □

Definição A.4. Uma matriz simétrica A de ordem n é chamada de *copositiva* se $x^T A x \geq 0$ para $x \geq 0$. Esta é chamada *estritamente copositiva* se ela é copositiva e a igualdade é válida somente para $x = 0$.

De forma equivalente, pode-se definir copositividade e copositividade estrita da seguinte forma:

Definição A.5. Uma matriz A de ordem n é *copositiva* (*estritamente copositiva*) em relação a um cone C se $x^T A x \succeq 0$ ($x^T A x \succ 0$) para todo $x \in C$ não nulo.

Teorema A.1. A matriz A é *co-positiva* (*estritamente co-positiva*) se e somente se toda menor principal submatriz B de A não tem autovetor $v > 0$ com autovalor associado $\lambda < 0$ ($\lambda \leq 0$).

Embora o resultado apresentado seja uma condição necessária e suficiente, ele tem valor prática somente para matrizes de baixa ordem, pois o número de submatrizes principais de uma matriz de ordem p é aproximadamente 2^p . Outros métodos conhecidos para testar copositividade tem semelhantes desvantagem. Um resultado de Murty e Kabadi [15] de fato mostra que o problema geral de testar copositividade é NP-completo.

No paper [6] Diananda conjecturou que toda matriz copositiva A é igual a soma de uma matriz semidefinida positiva S e uma matriz P não negativa (a matriz A é estritamente copositiva se S é positiva definida). Ela provou que a conjectura é verdadeira para matrizes de ordem no máximo 4.

As matrizes A representados como $S+P$ formam uma grande classe, a qual denotamos por $\mathcal{IP}$. Se for possível identificar os números de $\mathcal{IP}$ por um processo rápido, isto será uma contribuição útil para o problema geral de teste para copositividade. Em [9], é apresentado um tal procedimento na forma de um simples algoritmo.

A.5 Estabilidade de Sistemas Lineares

Diz-se que uma matriz M é Hurwitz se seus autovalores tem parte real negativa. Uma tal matriz é denominada matriz estável.

Definição A.6. Uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\bar{x} = \theta$ é um ponto de equilíbrio e U é uma vizinhança qualquer de $\bar{x} = \theta$, é denominada função de Lyapunov para o sistema $\dot{x} = f(x)$ quando satisfaz:

- i) V é contínua em U e continuamente diferenciável em $U - \{\theta\}$;
- ii) $V(\theta) = 0$, $V(x) > 0$ para todo $x \in U, x \neq \theta$;
- iii) $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ para todo $x \in U - \{\theta\}$.

Lema A.2. Sejam $U \in \mathbb{R}^{n,n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m,m}$ e $W \in \mathbb{R}^{n,n}$. Se U e Z são matrizes estáveis, então a solução única da equação matricial

$$UX + XZ + W = 0$$

$X \in \mathbb{R}^{n,n}$ é a matriz estável X definida por

$$X := \int_0^\infty e^{tU} W e^{tZ} dt.$$

Demonstração. Note que para $T > 0$ temos:

$$\begin{aligned} e^{TU} W e^{TZ} - W &= \int_0^T \frac{d}{dt} (e^{tU} W e^{tZ}) dt \\ &= \int_0^T (U e^{tU} W e^{tZ} + e^{tU} W V e^{tZ}) dt \\ &= \int_0^T (U e^{tU} W e^{tZ} + e^{tU} W e^{tZ} Z) dt \\ &= U \left(\int_0^T e^{tU} W e^{tZ} dt \right) + \left(\int_0^T e^{tU} W e^{tZ} dt \right) Z \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $T \rightarrow \infty$, segue que

$$X = \int_0^\infty e^{tU} W e^{tZ} dt$$

é solução da equação matricial $-W = UX + XZ$, ficando assim provada a existência da solução para provar a unicidade, suponha que X_1 e X_2 são ambas soluções de

$$UX + XZ = -W$$

e defina $\hat{X} := X_1 - X_2$. Logo, $\hat{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é solução de $U\hat{X} + \hat{X}Z = \Theta$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{tU} \hat{X} e^{tZ}) &= U e^{tU} \hat{X} e^{tZ} + e^{tU} \hat{X} Z e^{tZ} \\ &= e^{tU} (U \hat{X} + \hat{X} Z) e^{tZ} \\ &= \theta \end{aligned}$$

e integrando os dois membros, vem:

$$e^{tU} \hat{X} e^{tZ} - e^{0U} \hat{X} e^{0Z} = \theta.$$

Tomando o limite quando $t \rightarrow \infty$, obtemos $\hat{X} = \theta$, pois U e Z são estáveis. Portanto, $X_1 = X_2$. $\square$

Teorema A.2. *As condições abaixo são equivalentes:*

- i) *O sistema $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável;*
- ii) *A equação de Lyapunov $A^T P + PA = Q$ possui uma solução positiva definida P para qualquer matriz simétrica negativa definida Q*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) se o sistema $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável então a matriz A é estável, e a existência de P segue do Lema A.2 com $U = A^T$, $Z = A$ e $X = P$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Se P satisfaz $A^T P + PA = Q$, defina

$$V(x) := x^T P x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, a função diferenciável V satisfaz $V(\theta) = 0$, $V(x) > 0$, $\forall x \neq \theta$ e ainda

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), Ax \rangle &= \langle Px + P^T x, Ax \rangle \\ &= \langle Px, Ax \rangle + \langle P^T x, Ax \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle Ax, Px \rangle + \langle P^T x \rangle Ax \\
 &= \langle x, A^T Px \rangle + \langle x, PAx \rangle \\
 &= \langle x, (A^T P + PA)x \rangle \\
 &= \langle x, (A^T P + PA)x \rangle \\
 &= \langle x, Qx \rangle \\
 &= x^T Qx < 0.
 \end{aligned}$$

Assim, a definição A.6 garante que $V(x) := \langle x^*, Px \rangle$ é uma função de Lyapunov para o sistema $\dot{x} = Ax$. Portanto, o sistema $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] AGRACHEV, A. A.; LIBERZON, D. Lie-Algebraic Stability Criteria For Switched Systems. SIAM J. Control Optim. v.40, p. 253-269, 2001.
- [2] AUBIN, J. P.; CELLINA, A. Differential Inclusions. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [3] ÇAMLIBEL, M. K.; SCHUMACHER, J. M. Problem 6.1 Copositive Lyapunov Functions. In Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory. Edited by Vicent D. Blondel and Alexandre Megretski, 2004. p. 189-193.
- [4] COTTLE, R. W.; PANG, I. S.; STONE, R. E. The Linear Complementary Problem. Boston: Academic press, 1992.
- [5] DAYAWANSA, W. P.; MARTIN, C. F. A converse Lyapunov Theorem for a Class of Dynamical Systems Which Undergo Switching, IEEE Trans. Automat. Control, v. 44, n. 4, p. 751-760, 1999.
- [6] DIANA, P. H. On Non-negative Forms in Real Variables Same or all of Which are Non-negative, Proc. Cambridge Philos. Soc. v. 58, p. 17-25, 1962.
- [7] FILIPPOV, A. F. Differential Equations With Discontinuous Right-hand Side. Moscow: Nauka, 1985.
- [8] GURVITZ, L. Stability of Discrete Linear Inclusion, Linear Algebra Applications. v. 231, p. 47-85, 1995.
- [9] KAPLAN, W. A Copositivity Probe. Linear Algebra and Applications, v.337, p. 237-251, 2001.
- [10] KATO, T. Perturbation Theory for Linear Operators, New York: Springer, 1977.
- [11] KHALIL, H.K. Nonlinear Systems, New York: Macmillan, 1992.

- [12] LIBERZON, D.; HESPAHHA, J. P.; MORSE, A. S. Stability of Switched Systems, a Lie-algebraic Condition. *Systems Control Lett.* v.37, n. 3, p. 117-122, 1999.
- [13] GANTMACHER, F. R. *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea Publishing, 1960.
- [14] MOLCHANOV A. P.; PYATNITSKIY, Y. S. Criteria of absolute Stability of Differential and Difference Inclusions Encountered in Control Theory, *Systems Control Lett.* v. 13 ,p. 59-64, 1989.
- [15] MURTY, K. ; KABADI, S. N. Some NP-complete Problem in Quadratic and Nonlinear Programming, *Math. Programming* v. 39, p. 117-129, 1987.
- [16] NARENDRA, K. S.; BALAKRISHNAN, J. A Common Lyapunov Function For Stable LTI Systems With Commuting A-matrices, *IEEE Trans. Automat. Control.* v. 39 , n. 12, p. 2469-2471, 1994.
- [17] SAMELSON, H. *Notes on Lie Algebras*, New York: Van Nostrand Reinhold, 1969.
- [18] SAN-MARTIN, L. A. B. *Álgebras de Lie*. Campinas-SP - Editora da Unicamp, 1999.
- [19] SHILOV, G. E. *Linear Algebra*. New York: Prentice - Hall, 1971.