Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Controlabilidade de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Marcos Pavani de Carvalho

Orientador: Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto - SP

Julho - 2008

MARCOS PAVANI DE CARVALHO

Controlabilidade de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Julio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Weber Flávio Pereira
Professor Doutor
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
Professor Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 14 de julho de 2008

Dedico à minha mãe,

à minha namorada, Liliane

e aos meus irmãos.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a DEUS por todas as oportunidads maravilhosas que obtive em minha vida.

Agradeço a minha mãe, Doraci Pavani da Silva, aos meus tios, Nelson Pavani da Silva e Roberto Pavani da Silva, aos meus irmãos e a Liliane Martinez Antonow, pelo amor, paciência, respeito e confiança.

Agradeço muito ao meu Orientador, Adalberto Spezamiglio, pela orientação, seriedade e atenção.

Agradeço a banca examinadora: Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos, ao Prof. Dr. Weber Flávio Pereira e a Prof Dr^{o}. Juliana Precioso, pela disponibilidade.

Agradeço ao Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi, por toda a ajuda nestes anos em Rio Preto e a Prof Dr^{o}. Ermínia de Lourdes Campello Fanti pela simpatia.

Agradeço aos meu professores queridos: Maria Isabel, Marisa Pina e Fábio.

Aos amigos da pós-graduação: Júlio, Marcus, Michele, Miriam, Aline, Anderson, Rafael, Pedro, Aguinaldo, Rodiak e Ana Paula.

Aos meus amigos do peito: Tarcísio, Rogério Silveira, Fábio Pereira, Wilsaner Gomes, Eder Sousa, Marcio Pavani, Tairo e Paulo.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

"Arriscar-se é perder o pé por algum tempo. Não se arriscar é perder a vida... "

(Soren Kiekegaard)

Resumo

Neste trabalho estudamos problemas clássicos de controle para sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares. O ponto de partida é a equivalência entre uma equação diferencial ordinária linear de ordem n e um sistema de n equações de primeira ordem. Problemas de controlabilidade completa, observabilidade e estabilização de equilíbrio são considerados.

Palavras chave: controle; equivalência; observabilidade; estabilização.

Abstract

We consider here classic problems on control for a system of ordinary differential equations. The starting point is the equivalence between a linear equation of n^{th} order of ordinary differential equation and a system of n equations of first order. Problems on complete controllability, observability and stabilization of equilibrium are considered.

Keywords: control; equivalence; observability; stabilization.

Sumário

Capítulo 1

Equivalência

1.1 Introdução

Uma equação diferencial ordinária linear não homogênea de ordem n

$$y^{(n)} + k_1 y^{(n-1)} + ... + k_n y = u(t), \tag{1.1}$$

com $k_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, ..., n,$ é equivalente, via definição padrão, ao sistema de n equações diferenciais de primeira ordem

$$z^{'} = Pz + qu(t) \tag{1.2}$$

onde $z = [y \;\; y^{'} \;\; ... \;\; y^{(n-1)}]^T$,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

e

$$q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T. \tag{1.4}$$

De fato,

$z^{'} = Pz + qu(t) \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} y^{'} \\ y^{''} \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y^{'} \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \Leftrightarrow$$

$y^{'} = y^{'}, \ \ . \ . \ . \ , \ \ y^{(n-1)} = y^{(n-1)}$ e $y^{(n)} = -k_n y - \ \ . \ . \ . \ \ - k_1 y^{(n-1)} + u(t)$, ou seja, $y^{(n)} + k_1 y^{(n-1)} + \ \ . \ . \ . \ \ + k_n y = u(t)$.

Estamos interessados na recíproca: quando pode um sistema linear com coeficientes constantes

$$x^{'} = Ax + bu(t) \tag{1.5}$$

onde A é $n \times n$ e b é $n \times 1$, ser levado para (1.2) por uma transformação linear não-singular $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $x \mapsto Tx = z$ onde T é uma matriz constante?

Se $z = Tx$, então $z^{'} = Tx^{'} = T(Ax + bu(t)) = TAx + Tbu(t) = TAT^{-1}(Tx) + (Tb)u(t)$. Logo, devemos ter $P = TAT^{-1}$, isto é, $P \sim A$ e $Tb = q$.

Assim é fácil ver que uma tal transformação linear nem sempre é possível. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Temos que (1.6) é da forma $x^{'} = Ix + bu(t)$, onde $u(t) \equiv 1$.

Afirmamos que não existe P na forma acima que seja semelhante a I.

De fato, se $P \sim I$ então existe T não-singular tal que $P = TIT^{-1} = TT^{-1} = I$, uma contradição.

Portanto P não é semelhante a I.

Em cursos avançados em dinâmica, o estudo de formas normais obtidas por mudanças de coordenadas é um tópico importante. Na literatura de Teoria do Controle matemático, questões alternativas sobre representação de sistemas têm sempre sido importantes. Entretanto, não sabemos de nenhum texto de equações diferenciais elementares fora a literatura da Teoria do Controle que sistematicamente conduz a questão de transformar (1.5) em (1.2).

O propósito básico deste trabalho é introduzir um círculo de idéias em Teoria do Controle. O acesso é via a questão da "equivalência"entre um sistema linear de primeira ordem n-dimensional como (1.5) e uma equação linear de ordem n como (1.1). A resposta completa para a questão de equivalência introduz conceitos centrais da Teoria do Controle moderno. Obtemos alguns resultados clássicos relacionados à controlabilidade e observabilidade, e também consideramos o relacionamento desses conceitos com outros importantes tópicos em controle, como a estabilização de equilíbrio, e linearização de sistemas não lineares usando mudança de coordenadas e retroalimentação.

1.2 Um Exemplo

Vamos começar de forma ingênua transformando um exemplo simples e então considerar uma definição precisa de equivalência de sistemas.

Exemplo 1.2.1 *Considere o sistema,*

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 2x_2 + u(t) & (a) \\ x_2' = x_1 - x_2 & (b) \end{cases} \tag{1.7}$$

na forma (1.5)*, com* $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Diferenciando (b) e substituindo nesta a equação (a), temos

$x_2^{''} = x_1^{'} - x_2^{'} = -2x_1 + 2x_2 + u(t) - x_2^{'} = -2(x_1 - x_2) + u(t) - x_2^{'} = -2x_2^{'} + u(t) - x_2^{'} = -3x_2^{'} + u(t) \Leftrightarrow x_2^{''} + 3x_2^{'} = u(t)$, que é uma equação da forma (1.1) com $n = 2$, que pode ser levada à forma (1.2) com

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Uma solução $x_2(t)$ da equação acima determina uma função $x_1(t)$ (usando $x_1 = x_2^{'} + x_2$), assim o sistema (1.7) pode ser resolvido. Logo, o sistema (1.7) pode ser dito equivalente à equação de segunda ordem $y^{''} + 3y^{'} = u(t)$.

Existe outra equação de segunda ordem da forma $y^{''} + k_1 y^{'} + k_0 y = u(t)$ que também é equivalente a (1.7)?

Vamos tentar formar uma equação de segunda ordem para x_1, usando o mesmo método acima.

Diferenciando (a) e substituindo nesta a equação (b), temos

$x_1^{''} = -2x_1^{'} + 2x_2^{'} + u'(t) = -2x_1^{'} + 2x_1 - 2x_2 + u'(t) = -2x_1^{'} - (-2x_1 + 2x_2) + u^{'}(t) = -2x_1^{'} - (x_1^{'} - u(t)) + u^{'}(t) = -3x_1^{'} + u(t) + u'(t)$ se, e somente se, $x_1^{''} + 3x_1^{'} - u'(t) = u(t)$, que não tem a forma (1.1).

Essa questão é tratada usando uma precisa definição de equivalência. Note que a equação

$y^{''} + 3y^{'} = u(t)$ tem a forma do sistema linear

$$z^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \tag{1.8}$$

Nós esperamos que exista uma transformação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, que transforma nosso sistema original (1.7) para a forma (1.8). Desde que as equações diferenciais são lineares, esperamos que a transformação seja linear, digamos $z = Tx$. Como vimos, a diferenciação nos dá $z^{'} = TAT^{-1}z + Tbu(t)$.

Definição 1.2.1 *O sistema* $x^{'} = Ax + bu(t)$ *é linearmente equivalente ao sistema* $z^{'} = Pz + qu(t)$ *se existe uma matriz* T *não-singular tal que*

$$TAT^{-1} = P, \quad Tb = q. \tag{1.9}$$

Obtemos do exemplo 1.2.1, a equação de segunda ordem para x_2, que foi ($x_2^{''} = -3x_2^{'} + 0x_2 + u(t)$).

Se colocarmos $z_1 = x_2$ e $z_2 = x_2^{'} = x_1 - x_2$, a transformação demonstrando a equivalência de (1.7) e (1.8) é dada por, $x \mapsto Tx = z$ onde $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

De fato, temos $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Colocando $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, temos

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = P \quad \text{e} \quad Tb = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = q.$$

Surge a natural questão sobre existência, unicidade, e cálculo de T. Antes de procedermos para a resposta dessas questões, é instrutivo tentar transformar o exemplo seguinte para a forma (1.2). Antes, temos o seguinte

Lema 1.2.1 *Sejam* $A, B \in M_n$. *Se* B *é semelhante à* A, *então o polinômio característico de* B *é o mesmo que o de* A.

Demonstração. Sejam p_A, p_B, polinômios característico de A e B, onde $A \sim B$.

Logo existe P não-singular tal que, $B = P^{-1}AP$.

Assim, $\quad p_B(\lambda) = det(B - \lambda I) = det(P^{-1}AP - \lambda I) = det\{P^{-1}(A - \lambda I)P\} = detP^{-1} \cdot det(A - \lambda I) \cdot detP = det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$. ■

Exemplo 1.2.2 *Seja* $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *como no exemplo 1.2.1, mas seja* $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Mostre que o sistema* $x' = Ax + bu(t)$ *não pode ser transformado para a forma* (1.2).

De fato, seja $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 & -k_1 \end{bmatrix}$. Se $A \sim B$, temos que o polinômio característico de A é igual ao de P, isto é, $\lambda^2 + k_1\lambda + k_2 = p_P(\lambda) = p_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda$. Assim, $k_1 = 3$ e $k_2 = 0$. Logo,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ e daí podemos deduzir que } \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Portanto,}$$

$$Tb = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = q,$$

e o sistema não pode ser transformado para (1.2).

1.3 Equivalência e a Matriz Companheira P

O sistema (1.2) é muito especial, chamado de *sistema companheiro* e P é a *matriz companheira*. A matriz companheira é definida pela equação característica $\lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + ... + k_{n-1}\lambda + k_n = 0$. Um fato conhecido é que o polinômio característico de P é o que define a equação característica.

De fato,

$$p_P(\lambda) = det(P - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & (-k_1 - \lambda) \end{vmatrix}_{(n\times n)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\lambda)\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{n-1} & -k_{n-2} & -k_{n-3} & \cdots & (-k_1 - \lambda) \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} +$$

$$+\ 1(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-2} & -k_{n-3} & \cdots & (-k_1 - \lambda) \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = 0.$$

Assim, desenvolvendo o segundo determinante pela primeira coluna, obtemos

$$(-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{n-1} & -k_{n-2} & -k_{n-3} & \cdots & (-k_1 - \lambda) \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} + (-1)^n k_n = 0$$

Continuando, repetindo o raciocínio acima com o determinante de ordem $n-1$, teremos

$$(-\lambda)\cdot(-\lambda)(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{n-2} & -k_{n-3} & -k_{n-4} & \cdots & (-k_1-\lambda) \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} +$$

$$\lambda\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{n-1} & -k_{n-3} & -k_{n-4} & \cdots & (-k_1-\lambda) \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} + (-1)^n k_n \quad = 0$$

Desenvolvendo o último determinante pela primeira coluna obtemos

$$\lambda^2\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{n-2} & -k_{n-3} & -k_{n-4} & \cdots & (-k_1-\lambda) \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} - (-1)^{n-1}k_{n-1}\lambda + (-1)^n k_n = 0$$

Novamente, repetindo o raciocínio acima com o determinante de ordem $n-2$, teremos

$$-\lambda^3 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{n-3} & -k_{n-4} & -k_{n-5} & \cdots & (-k_1 - \lambda) \end{vmatrix}_{(n-3)\times(n-3)} +$$

$(-1)^{n-2}k_{n-2}\lambda^2 - (-1)^{n-1}k_{n-1}\lambda + (-1)^n k_n = 0.$

Assim, continuando o raciocínio até que a ordem do determinante seja $n-(n-1)$, teremos

$(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\det\begin{pmatrix} -\lambda - k_1 \end{pmatrix} + ... - (-1)^{n-1}k_{n-1}\lambda + (-1)^n k_n = (-1)^n\lambda^n + (-1)^n k_1 \lambda^{n-1} +$ ... - $(-1)^{n-1}k_{n-1}\lambda + (-1)^n k_n = 0$, ou seja,

$$\lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + ... + k_{n-1}\lambda + k_n = 0.$$

Vemos assim que a equação $p_P(\lambda) = 0$ coincide com a equação característica da equação diferencial de ordem n que deu origem à matriz P.

O exemplo 1.2.1, mostra que o sistema (1.5) pode ser equivalente ao sistema companheiro e vimos dois exemplos de (1.5) que não são equivalentes a um sistema companheiro, o exemplo 1.2.2 e o sistema (1.6) bi-dimensional com diagonal, tendo dois autovalores repetidos.

1.4 Uma Semelhança Invariante

É conveniente dar a definição a seguir.

Definição 1.4.1 *Um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é um vetor cíclico para uma matriz quadrada A de ordem n se os n vetores $x, Ax, A^2x, \ldots , A^{n-1}x$ são linearmente independentes.*

Exemplo 1.4.1 *O vetor* $q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$ *é cíclico para a matriz*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_1 \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{bmatrix} q & Pq & P^2q & \cdots & P^{n-1}q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 1 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix},$$

que é não-singular.

Portanto, q é vetor cíclico para P.

A existência de um vetor cíclico para uma matriz é invariante por semelhança, isto é, se $TAT^{-1} = P$ e q é cíclico para P, então A tem um vetor cíclico dado por $T^{-1}q$.

De fato:

$\{T^{-1}q, AT^{-1}q, A^2T^{-1}q, ..., A^{n-1}T^{-1}q\}$ é um conjunto linearmente independente pois, aplicando T a cada um deles, obtemos

$$\left\{\begin{array}{c} TT^{-1}q = q \\ TAT^{-1}q = Pq \\ TA^2T^{-1}q = P^2q \\ . \\ . \\ . \\ TA^{n-1}T^{-1}q = P^{n-1}q \end{array}\right\},$$

que é um conjunto linearmente independente, por hipótese. Como T é não-singular, segue, que o conjunto $\{T^{-1}q, AT^{-1}q, ..., A^{n-1}Tq\}$ é linearmente independente.

Portanto $T^{-1}q$ é vetor cíclico para a matriz A.

No que segue, utilizaremos os dois lemas abaixo. Lembramos que o polinômio mínimo de uma matriz A é o polinômio de menor grau que se anula em A, cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a 1.

Lema 1.4.1 *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio mínimo.*

Demonstração. Sejam q_A, q_B, polinômios mínimos de A e B, respectivamente, onde $A \sim B$.

Logo existe T não-singular tal que, $B = T^{-1}AT$.

Assim, $q_A(B) = q_A(T^{-1}AT) = T^{-1}q_A(A)T = 0$.

Logo, $gr(q_B(\lambda)) \leq gr(q_A(\lambda))$, onde "$gr$" significa "grau".

Por outro lado, $q_B(A) = q_B(TBT^{-1}) = Tq_B(B)T^{-1} = 0$.

Logo, $gr(q_A)(\lambda) \leq gr(q_B(\lambda))$.

Portanto esses dois polinômios têm o mesmo grau, se anulam em A e em B então eles devem ser idênticos por, $[3, teo : 3.3.1]$. ■

Lema 1.4.2 *Os polinômios característico e mínimo de uma matriz companheira P são idênticos.*

Demonstração.

Considere

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_1 \end{bmatrix}$$

e seja I a matriz identidade de ordem n.

Seja, $p_P(\lambda) = \lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + \cdots + k_{n-1}\lambda + k_n$ polinômio característico de P.

Observe que, se e_j representa o j-ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, então

$$e_1 I = (1, 0, \cdots, 0) = e_1 = e_1 I$$

$$e_1 P = (0, 1, 0, \cdots, 0) = e_2 = e_1 P$$

$$e_2 P = (0, 0, 1, 0, \cdots, 0) = e_3 = e_1 P^2$$

$$\vdots$$

$$e_{n-1} P = (0, 0, 0, 0, \cdots, 1) = e_n = e_1 P^{n-1}$$

$$e_n P = (-k_n, -k_{n-1}, \cdots, -k_1) = -e_1 k_n - e_2 k_{n-1} - \cdots - e_n k_1 \Leftrightarrow$$

$$e_1 P^n = -e_1 I k_n - e_1 P k_{n-1} - \cdots - e_1 P^{n-1} k_1 \Leftrightarrow$$

$$e_1 P^n + e_1 k_1 P^{n-1} + \cdots e_1 k_{n-1} P + e_1 k_n I = 0 \Leftrightarrow$$

$$e_1 (P^n + k_1 P^{n-1} + \cdots k_{n-1} P + k_n I) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e_1 p_P(P) = 0$$

Além disso, $e_k p_P(P) = e_1 P^{k-1} p_P(P) = 0$ para cada $k = 1, 2, \cdots, n$, desde que $e_k p_P(P) = 0$ para cada vetor e_k. Concluímos que $p_P(P) = 0$, e portanto $p_P(\lambda)$ é um polinômio de grau n que se anula em P.

Se existe um polinômio $q(t) = t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + t b_{m-1} + b_m$, com $m < n$ que se anula em P, então

$$
\begin{aligned}
0 &= e_1 q(P) \\
&= e_1 P^m + e_1 b_1 P^{m-1} + \cdots + e_1 b_{m-1} P + e_1 b_m I \\
&= e_{m+1} + b_1 e_m + \cdots + b_{m-1} e_2 + b_m e_1 \\
&\Leftrightarrow e_{m+1} = -b_1 e_m - \cdots - b_{m-1} e_2 - b_m e_1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow e_{m+1}$ é linearmente dependente com os vetores base $e_1, e_2, \cdots, e_m$, absurdo.

Portanto, $p_P(\lambda) = \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \cdots + k_{n-1}\lambda + k_n$ é também o polinômio mínimo.

■

Proposição 1.4.1 *Uma matriz A é semelhante à matriz companheira P definida pelo seu polinômio característico se, e somente se, os polinômios mínimo e característico de A são idênticos.*

Demonstração. Sabemos que matrizes semelhantes têm os mesmos polinômios mínimo e característico.

Supondo $A \sim P$, então $p_P(\lambda) = p_A(\lambda)$ e $q_P(\lambda) = q_A(\lambda)$ onde, p é o polinômio característico e q é o polinômio mínimo. Pelo Lema 1.4.2, $p_P(\lambda) = q_P(\lambda)$, e daí segue que os polinômios característico e mínimo de A são idênticos.

Por outro lado, se o polinômio mínimo e o polinômio característico de A são idênticos, então a forma canônica de Jordan de A deve conter exatamente um bloco de Jordan para cada autovalor distinto, e a ordem de cada bloco é igual à multiplicidade do autovalor correspondente como zero do polinômio característico (e mínimo) de A.

Pelo lema 1.4.2, os polinômios característico e mínimo da matriz companheira P são idênticos. Assim, a matriz companheira P tem os mesmos blocos de Jordan de A. Logo por transitividade segue que A é semelhante a P. ■

É fácil construir um exemplo de matriz que tem (ou não tem) vetores cíclicos. Os exemplos 1.2.1 e 1.2.2 possuem condição de semelhança onde o polinômio mínimo e característico de A é $p(\lambda) = \lambda(\lambda + 3)$. Concluímos que existe alguma outra obstrução no exemplo 1.2.2 para a equivalência com o sistema (1.2), e a obstrução deve envolver o vetor b. Assim, o problema com a transformação no exemplo 1.2.2 está relacionado à forma com que a função forçante u ingressa as equações. Examinaremos essas questões na próxima seção.

1.5 Unicidade da Transformação T

Assuma que temos uma matriz T não-singular tal que $TAT^{-1} = P$ e $Tb = q$.

Então, $TAT^{-1}q = TAb$, e $TA^k b = TA^k T^{-1} q = (TAT^{-1})^k q = P^k q$, para todo $k \geq 0$ inteiro.

A não-singularidade de T implica que, se q é cíclico para P,

$$\begin{aligned} n &= rank \begin{bmatrix} q & Pq & \cdots & P^{n-1}q \end{bmatrix} \\ &= rank \begin{bmatrix} Tb & TAb & \cdots & TA^{n-1}b \end{bmatrix} \\ &= rank \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso, T é determinada univocamente por suas ações na base definida pelos vetores $\left\{ b, \ Ab, \ \cdots \ A^{n-1}b \right\}$.

Assim, nós temos o resultado de unicidade a seguir e condição necessária.

Proposição 1.5.1 *Há no máximo uma transformação linear não-singular $z = Tx$, levando* (1.5) *para a forma companheira* (1.2)*. Tal T existe somente se*

$$rank \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n. \tag{1.10}$$

O exemplo 1.2.2 é explicado por este resultado pois, $\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$rank \neq 2$.

Voltaremos mais adiante ao exemplo 1.2.2 para estudo adicional.

A Proposição 1.5.1. também explica porque nós não podemos obter uma equação de segunda ordem da forma (1.1) para a variável x_1 no exemplo 1.2.1: a equação de segunda ordem para $y = z_1$ deve ser uma combinação linear única das componentes de x.

Mostraremos em seguida que a condição (1.10) é também suficiente para garantir a existência de uma transformação não-singular que leve (1.5) a (1.2). Mostraremos também como construir T por um método direto e simples.

1.6 A Condição do posto é Suficiente para Equivalência.

Referindo-se anteriormente pelo exemplo 1.2.1, a chave em transformar (1.5) para (1.2) é identificar a variável z_1 que satisfaz uma equação de ordem n equivalente a (1.1).

Note que,

$z_1 =$(primeira linha de T)$\cdot x$. Vamos denotar a primeira linha de T por τ.

Assim, desde que $Tb = q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$ e $TA^k b = P^k q$, devemos ter, $\tau b = 0,\ \tau A b = 0,\ \cdots,\ \ \tau A^{n-2} b = 0,\ \tau A^{n-1} b = 1$.

Escrevemos isso como

$$\tau \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = q^T. \tag{1.11}$$

Agora, se assumirmos $rank \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$, há uma única solução para τ em (1.11)

Novamente, a variável z_1 deve ser uma combinação linear única das coordenadas de x.

Seja agora z_2 =(segunda linha de T)$\cdot x = z_1^{'} = \tau x^{'} = \tau(Ax + bu(t)) = \tau Ax + \tau bu(t) = \tau Ax$.

Portanto, $z_2 = \tau Ax$.

Continuando desse modo, as equações que definem τ e a forma do sistema z implicam que,

$$T = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau A \\ \vdots \\ \\ \tau A^{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

Combinamos esse argumento com a Proposição 1.5.1, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.6.1 *O sistema $x^{'} = Ax + bu(t)$ com $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser transformado no sistema companheiro $z^{'} = Pz + qu(t)$, por uma transformação linear não-singular $z = Tx$ se, e somente se, rank $\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$. Neste caso, T é definida univocamente por* (1.12) *onde τ é a única solução de* (1.11).

O Teorema 1.6.1 responde nossa questão original. Se os fatos algébricos básicos relativos à existência de um vetor cíclico para a matriz companheira de A é entendida, então a situação relativa à equivalência entre (1.5) e (1.2) se torna transparente. Nossa questão original nos levou a esse ponto. Mas há muito mais envolvido aqui. Pense em variar o termo não homogêneo em (1.5). E se aplicarmos diferentes funções de entrada $u(t)$? Até onde isso pode afetar as soluções do sistema? Consideraremos a questão de variar a entrada $u(t)$ no próximo capítulo. Fazendo assim, obtemos um entendimento analítico, dentro da Teoria do Controle, da condição do *rank* no Teorema 1.6.1.

Capítulo 2

Controlabilidade

2.1 Controlabilidade Completa

O sistema (1.5) é freqüentemente chamado de sistema de entrada única porque a função de entrada u é escalar em vez de vetorial. Mostraremos nesta seção que um conceito natural de controlabilidade para o sistema de entrada única (1.5) coincide com o fato de b ser um vetor cíclico para A.

Em cursos de equações diferenciais elementares, o termo não-homogêneo em (1.1) é considerado fixo. Mas, perguntamos agora: o que acontece com a dinâmica do sistema quando mudamos u? Mais especificamente, até que ponto o vetor $x(t)$ pode ser influenciado, começando em um estado inicial x_0 e usando entradas arbitrárias $u(t)$? A próxima definição descreve um conceito de controlabilidade completa para (1.5). Antes de dar a definição, devemos especificar um conjunto $\mathcal{U}$ de funções de entrada admissíveis. As soluções de um sistema linear com coeficientes constantes de equações diferenciais ordinárias são definidas em toda a reta real, e geralmente queremos a mesma propriedade para a entrada $u(t)$. Porém, as entradas serão restringidas a um intervalo $[t_0, t_f]$. Portanto, com uma restrição apropriada do domínio quando necessário, podemos considerar vários casos de espaços vetoriais de funções para o conjunto $\mathcal{U}$, incluindo funções constantes por partes, contínuas, ou entradas localmente integrável.

Uma função de valores reais $u(t)$ é localmente integrável se $\int_{t_1}^{t_2} |u(s)|ds < \infty$, para cada $t_1 < t_2$. O conjunto de funções localmente integrável é o maior espaço vetorial de entradas para qual (1.5) faz sentido; então assumimos que nossas entradas são localmente integráveis.

Definição 2.1.1 *O sistema linear* (1.5) *é completamente controlável, se dados quaisquer $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$, existe um $t_f > 0$ e uma função controle $u(t)$ definida para $0 \leq t \leq t_f$, tais que a solução de* (1.5)*, com condição inicial $x(0) = x_0$, satisfaz $x(t_f) = x_f$.*

A solução para (1.5) com $x(0) = x_0$ é dada por,

$$x(t) = e^{tA}\left[x_0 + \int_0^t e^{-sA}bu(s)ds\right] \tag{2.1}$$

onde,

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots.$$

Pelo M-test de Weierstrass, esta série converge uniformemente e absolutamente se $|t| \leq t_f$ para t_f finito. O sistema (1.5) é completamente controlável se para quaisquer x_0, x_f dados, existe algum t_f e alguma função u localmente integrável em $0 \leq t \leq t_f$ tais que,

$$x(t_f) = e^{t_f A}\left[x_0 + \int_0^{t_f} e^{-sA}bu(s)ds\right] = x_f. \tag{2.2}$$

É uma surpresa que a solvabilidade de (2.2) para arbitrários x_0, x_f é determinada por um critério puramente algébrico. A explicação está no Teorema de Cayley-Hamilton: a matriz A satisfaz $p_A(A) = 0$, onde $p_A(\lambda)$ é o polinômio característico de A. A condição *rank* (1.10) é conhecida como *condição de controlabilidade do posto*, e a matriz $\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$ é chamada *matriz de controlabilidade*, por causa do Teorema 2.1.1 em seguida.

Antes, vejamos um lema.

Lema 2.1.1 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Para cada $k \geq n$, A^k pode ser escrita como uma combinação linear das potências $A, A^2, \cdots, A^{n-1}$.*

Demonstração. Seja $p_A(\lambda) = \lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + \cdots + k_{n-1}\lambda + k_n$ polinômio característico de A.

Pelo teorema de Cayley-Hamilton,

$p_A(A) = A^n + k_1A^{n-1} + \cdots + k_{n-1}A + k_nI = 0.$

Então,

$A^n = -k_1A^{n-1} - \cdots - k_{n-1}A - k_nI$, provando que para $k = n$ o resultado é verdadeiro.

Por indução, suponhamos que vale para $k \geq n$, ou seja, $A^k = \alpha_1A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}A + \alpha_nI$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Assim,

$$\begin{aligned}
A^{k+1} &= A^kA = (\alpha_1A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}A + \alpha_nI)A \\
&= \alpha_1A^n + \cdots + \alpha_{n-1}A^2 + \alpha_nA \\
&= \alpha_1(-k_1A^{n-1} - \cdots - k_{n-1}A - k_nI) + \alpha_2A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}A^2 + \alpha_nA \\
&= (\alpha_2 - \alpha_1k_1)A^{n-1} + (\alpha_3 - \alpha_1k_2)A^{n-2} + \cdots + (\alpha_n - \alpha_1k_{n-1})A - \alpha_1k_nI.
\end{aligned}$$

Logo A^{k+1} pode ser escrito como combinação linear das potências $A, A^2, \cdots, A^{n-1}$.

Portanto, A^k pode ser escrita como uma combinação linear das potências

$A, A^2, \cdots, A^{n-1}$ para todo $k \geq n$.

$\blacksquare$

Lembramos que o espaço coluna de uma matriz $n \times n$ é o subespaço do $\mathbb{R}^n$ gerado pelas colunas da matriz, consideradas como vetores do $\mathbb{R}^n$. Também, se M é um subespaço vetorial de dimensão finita de um espaço normado E, então M é fechado em E.

Teorema 2.1.1 *O sistema linear $x' = Ax + bu(t)$ em (1.5) é completamente controlável se, e somente se, rank $\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{R}$ o espaço coluna de $\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$. Como $\mathcal{R}$ tem dimensão finita, $\mathcal{R}$ é um subespaço fechado do $\mathbb{R}^n$.

Pela definição de matriz exponencial temos

$$e^{-sA}b = Ib - sAb + \frac{s^2}{2!}A^2b - \frac{s^3}{3!}A^3b + \cdots + (-1)^k\frac{s^k}{k!}A^kb + \cdots.$$

Pelo lema 2.1.1 e do fato de que $\mathcal{R}$ ser subespaço fechado no $\mathbb{R}^n$, concluímos que $e^{-sA}b$ está em $\mathcal{R}$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Então a integral no lado direito, da expressão abaixo,

$$x(t) = e^{tA}\left[x_0 + \int_0^t e^{-sA}bu(s)ds\right],$$

está em $\mathcal{R}$, para todo s, já que é limite de uma sequência de elementos de $\mathcal{R}$.

Tomando $x_0 = 0$, os estados que são alcançados a partir da origem num tempo finito, por meio de alguma entrada $u(t)$, estão todos em $\mathcal{R}$.

Portanto, se a condição do *rank* não estiver satisfeita, então o sistema não será completamente controlável, porque existirão pontos em $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{R}$ que não poderão ser alcançados a partir de x_0.

Reciprocamente, suponha $\quad rank\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n.$

Mostraremos que $x^{'}(t) = Ax(t) + bu(t)$ é completamente controlável.

Seja $t_f > 0$ um tempo finito, e considere a matriz simétrica de ordem n,

$$M = \int_0^{t_f} e^{-sA}bb^Te^{-sA^T}ds.$$

Primeiro mostraremos que M é não singular.

Assim, suponhamos que $Mv = 0$ para algum $v \in \mathbb{R}^n$. Então, $v^TMv = 0$, o que implica que,

$$0 = \int_0^{t_f} v^Te^{-sA}bb^Te^{-sA^T}vds = \int_0^{t_f} v^Te^{-sA}b(v^Te^{-sA}b)^Tds = \int_0^{tf}(\psi(s))^2ds,$$

onde $\psi(s) = v^T e^{-sA} b$. Como $(\psi(s))^2$ é contínua e não negativa, concluímos que $\psi(s) \equiv 0$ em $[0, t_f]$.

Segue que,

$\psi(0) = v^T b = 0, \quad \psi^{'}(0) = -v^T A b = 0, \; \ldots, \quad \psi^{n-1}(0) = (-1)^n v^T A^{(n-1)} b = 0.$

Portanto v é perpendicular a $\mathcal{R}$.

Como por hipótese,

$$rank \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n,$$

só pode ser $v = 0$.

Portanto M é não singular.

Agora mostraremos que a não singularidade de M implica controlabilidade completa.

Dados $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$, definimos o controle $u(s) = b^T e^{-sA^T} x$ para $0 \leq s \leq t_f$, onde x será escolhido convenientemente.

A solução $x(t)$ com entrada u e condição inicial x_0 tem ponto final x_f no tempo t_f desde que x possa ser escolhido de modo que,

$$x(t_f) = e^{t_f A} \left[x_0 + \left(\int_0^{t_f} e^{-sA} b b^T e^{-sA^T} ds \right) x \right] = e^{t_f A}(x_0 + Mx) = x_f.$$

Mas, $e^{t_f A}$ é não singular e M é não singular, assim

$$x_f = e^{t_f A}(x_0 + Mx) \Leftrightarrow e^{-t_f A} x_f = x_0 + Mx \Leftrightarrow x = M^{-1}(e^{-t_f A} x_f - x_0)$$

Portanto qualquer x_0 pode ser direcionado para qualquer x_f em um tempo finito, e assim o sistema é completamente controlável.

$\blacksquare$

Ilustraremos o Teorema 2.1.1 e a idéia de controlabilidade re-examinando o exemplo 1.2.2.

Exemplo 2.1.1 *(Continuação do exemplo 1.2.2) O sistema é*

$$x^{'} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Note que $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda$, logo $\lambda = 0$ é autovalor de A e $b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ é um autovetor correspondente. Assim, a condição de controlabilidade do posto não se verifica, pois

$$\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entretanto, A é semelhante à sua matriz companheira $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Usando T calculada anteriormente e $z = Tx$, temos,

$$z^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

e daí,

$$\begin{cases} z_1' = z_2 + u(t) & (*) \\ z_2^{'} = -3z_2 & (**) \end{cases}.$$

Diferenciando $(*)$ e substituindo em $(**)$ obtemos, $z_1^{''} - 3z_1^{'} = 3u + u^{'}$, que não tem a forma (1.1) devido o termos $u^{'}$.

Uma integração produz uma equação de primeira ordem

$$z_1^{'} + 3z_1 = 3\int ud(s) + u,$$

que mostra que a ação de entradas arbitrárias u afetam a dinâmica em somente um espaço um-dimensional. A equação original para x usada leva a pensar que u poderia afetar completamente ambos x_1 e x_2, mas note que a equação para z_2 diz que u não afeta a dinâmica da diferença $x_1 - x_2 = z_2$. Somente se a condição inicial para z envolver $z_2(0) = 0$, u pode ser usado para controlar uma trajétoria.

Isto é, as entradas controlam completamente somente os estados que estão no subespaço,

$$span \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = span\{b\} = span \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Soluções partindo com $x_1(0) = x_2(0)$ satisfazem $x_1(t) = x_2(t) = \int_0^t ud(s) + x_1(0)$.

Pode-se conduzir ao longo da reta $x_1 = x_2$ de algum ponto inicial para algum ponto final $x_1(t_f) = x_2(t_f)$ em um tempo finito t_f por uma escolha apropriada de u. Por outro lado, se a condição inicial se encontra fora da reta $x_1 = x_2$, então a diferença $z_2 = x_1 - x_2$ decai exponencialmente. Assim, não existe possibilidade de conduzir para um estado final arbitrário em um tempo finito.

Quando um sistema é completamente controlável, geralmente existem muitas funções de entrada que podem fazer a transferência de x_0 para x_f. Essa flexibilidade pode ser explorada em algumas aplicações para otimizar o comportamento do sistema de alguma maneira, por exemplo, minimizando a medida do custo de executar a transferência. Em particular, se o custo da ação controle é medida pela integral

$$\int_{t_0}^{t_f} |u(s)|^2 d(s),$$

então um controle que minimiza esse custo pode ser determinado.

Capítulo 3

Observabilidade e Dualidade

3.1 O Sistema Linear e sua medida de saída

Suponha que temos o sistema (1.5) para o qual uma certa combinação linear das componentes x_i de x é medida diretamente, possivelmente por alguma combinação de instrumentos.

Escrevemos o sistema e sua medida de saída como

$$\begin{cases} x' = Ax + bu(t) & (a) \\ y = c^T x & (b) \end{cases} \tag{3.1}$$

onde c é um vetor constante. A função $y(t)$ é a saída conhecida.

Perguntamos, quando c^T é a primeira linha de uma transformação T para o sistema companheiro (1.2), onde y é a variável dependente em (1.1)?

Se tal T existe, T deve ter a forma,

$$T = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau A \\ \vdots \\ \\ \tau A^{n-1} \end{bmatrix}$$

com $\tau = c^T$.

Devemos ter $Tb = q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$.

Assim,

$$rank(T) = rank \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{3.2}$$

Além disso, desde que $Tb = q$ temos,

$$\begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^T \\ b^T A^T \\ \vdots \\ \\ b^T (A^{n-1})^T \end{bmatrix} c \tag{3.3}$$

Podemos checar que a equação diferencial para $z = [y \ y' \ ... \ y^{n-1}]^T$ realmente é a forma companheira (1.2), lembrando que A anula seu polinômio característico, $A^n + k_1 A^{n-1} + \cdots + k_{n-1} A + k_n I = 0$. Pelos resultados vistos anteriormente, temos a seguinte

Proposição 3.1.1 *Existe uma transformação T não singular transformando* (3.1*a*) *para a forma companheira* (1.2) *com $z_1 = c^T x$ se, e somente se, as condições* (3.2) *e* (3.3) *estão satisfeitas. Neste caso, T é univocamente determinada, e é a matriz em* (3.2).

Note que a matriz

$$\begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

tem o mesmo *rank* que a matriz $\begin{bmatrix} c & A^T c & \cdots & (A^{n-1})^T c \end{bmatrix}$. Assim, $y = c^T x$ satisfaz (1.1) se, e somente se, o sistema

$$x' = A^T x + cu \tag{3.4}$$

é completamente controlável, pelo Teorema 2.1.1.

Além disso, (3.3) mostra que b^T é a primeira linha da transformação que leva (3.4) para a forma companheira.

A ligação da proposição 3.1.1 com o sistema (3.4) conduz para uma dualidade fundamental entre controlabilidade completa e o conceito de observabilidade completa. A condição do *rank* (3.2) é conhecida como a *condição de observabilidade do posto* e, a matriz

$$\begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

é chamada a matriz observabilidade para o sistema (3.1). A condição do posto implica que o sistema em x pode ser reconstruído a partir do conhecimento de y, u e de suas derivadas.

3.2 Observabilidade Completa

Definição 3.2.1 *O sistema* (3.1) *é completamente observável se para qualquer* $x_0 = x(0)$, *existe um tempo* $t_f > 0$ *finito tal que o conhecimento da entrada* u *e da saída* y *em* $[0, t_f]$ *são suficientes para determinar* x_0 *de maneira única.*

A saída do sistema para uma condição inicial $x(0) = x_0$ e uma entrada u é dada por,

$$y(t) = c^T e^{tA} x_0 + c^T \int_0^t e^{(t-s)A} bu(s) ds.$$

Logo, assumindo y e u conhecidos em um intervalo $[0, t_f]$, estudar observabilidade resume-se a obter x_0 a partir de $u(t)$ e $y(t)$. Vemos que a Definição 3.2.1 pode ser reformulada usando somente a entrada $u \equiv 0$.

Para ver como a determinação de x_0 é feita quando a condição de observabilidade do posto é satisfeita, diferenciamos a equação de saída (3.1b) $n-1$ vezes e fazemos $t = 0$ para obter

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y^{'}(0) \\ \vdots \\ \\ y^{n-1}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} x_0 + \text{ termos dependentes de } u. \tag{3.6}$$

De fato,

temos, $\begin{cases} x' = Ax + u(t) \\ y = c^T x \end{cases}$

Assim,

- $y(0) = c^T x(0) = c^T x_0$.

- $y^{'}(t) = c^T x^{'}(t) = c^T(Ax(t) + bu(t)) = c^T Ax(t) + c^T bu(t)$. Logo, $y^{'}(0) = c^T Ax(0) + c^T bu(0)$.

- $y^{''}(t) = c^T Ax^{'}(t) + c^T bu^{'}(t) = c^T A(Ax(t) + bu(t)) + c^T bu^{'}(t) = c^T A^2 x(t) + c^T Abu(t) + c^T bu^{'}(t)$ então, de onde se tem

$y^{''}(0) = c^T A^2 x_0 + c^T Abu(0) + c^T bu^{'}(0).$

$\vdots$

- $y^{n-1}(0) = c^T A^{n-1} x_0 + c^T A^{n-2} bu(0) + \ldots + c^T bu^{n-2}(0),$ por indução.

Pela condição de observabilidade do posto, os coeficientes de x_0 são não-singulares, e podemos resolver para x_0 em termos de u, y e suas derivadas.

Para exemplificar, considere o sistema do exemplo 1.2.2 com saída $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$.

Assim,

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y^{'}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ c^T b \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Portanto o sistema é completamente observável.

Teorema 3.2.1 *O sistema* (3.1) *é completamente observável se, e somente se, a condição de observabilidade do posto* (3.2) *é satisfeita.*

Demonstração. Já mostramos a suficiência da condição do posto (3.2).

Agora assuma que temos observabilidade completa. Devemos mostar que (3.2) é satisfeita.

Suponha,

$$rank \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} < n.$$

Então existe um vetor v diferente de zero tal que,

$$\begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} v = 0 \tag{3.7}$$

Usando a entrada $u \equiv 0$, temos a saída $y(t) = c^T e^{tA} x_0$. Tomando $x_0 = v$, temos

$$y(t) = (c^T I + tc^T A + \frac{t^2}{2!} c^T A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!} c^T A^k + \cdots)v.$$

Usando (3.7) e o lema 2.1.1, segue que,

$$\begin{aligned} c^T v &= 0 \\ tc^T A v &= t \cdot 0 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{t^k}{k!} c^T A^k v &= \frac{t^k}{k!} \cdot 0 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim $y \equiv 0$. Mas esta é também a saída quando $x_0 = 0$, com entrada zero. Isto contradiz a suposição de observabilidade completa.

Portanto, (3.2) é satisfeita.

■

Motivado pelos comentários em relação à proposição 3.1.1, definimos o sistema dual de (3.1) por,

$$\begin{cases} x' = A^T x + cu(t) & (a) \\ y = b^T x & (b) \end{cases} \tag{3.8}$$

Então, o dual do dual de um sistema é o sistema original. Com esta definição podemos reunir a discussão feita até agora com o seguinte enunciado:

Teorema 3.2.2 *O sistema* (3.1) *é completamente observável se, e somente se,* (3.8a) *é completamente controlável. O sistema* (3.1a) *é completamente controlável se, e somente se, o sistema* (3.8) *é completamente observável.*

3.3 As Formas Companheira e Diagonal de um Sistema

Obteremos duas formas de sistemas de entrada única definidas pela equação

$$y^{'''} - 2y^{''} + y^{'} - 2y = u. \tag{3.9}$$

(a) A forma companheira

Usando as variáveis de estado definidas acima, temos

$x_1 = y, \quad x_2 = y^{'} \quad$ e $\quad x_3 = y^{''}$, então

$$\begin{aligned} x_1^{'} &= x_2 \\ x_2^{'} &= x_3 \\ x_3^{'} &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 + u \end{aligned} \tag{3.10}$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ x_3^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{3.11}$$

e $\quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$

(b) A forma diagonal

O modo da escolha das variáveis abaixo pode não ser claro, mas esperamos que isto mude depois de ser trabalhado na seção 3.4. Sejam

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}y^{''} \\ x_2 &= \frac{1}{5}(2+i)y - \frac{1}{2}iy^{'} + \frac{1}{10}(-1+2i)y^{''} \\ x_3 &= \frac{1}{5}(2-i)y + \frac{1}{2}iy^{'} - \frac{1}{10}(1+2i)y^{''} \end{aligned} \tag{3.12}$$

(onde $i^2 = -1$).

Então

$$\begin{aligned} x_1^{'} &= \frac{1}{5}y^{'} + \frac{1}{5}y^{'''} \\ &= \frac{1}{5}y^{'} + \frac{1}{5}(2y^{''} - y^{'} + 2y + u) \\ &= \frac{2}{5}(y^{''} + y) + \frac{1}{5}u. \end{aligned}$$

Da mesma forma, obtém-se

$$x_2^{'} = ix_2 + \frac{1}{10}(-1+2i)u \quad \text{e} \quad x_3^{'} = -ix_3 - \frac{1}{10}(1+2i)u.$$

Na forma matricial escrevemos como

$$\begin{bmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ x_3^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 \\ -1+2i \\ -1-2i \end{bmatrix} u \tag{3.13}$$

e na adição das equações (3.12)

$$y = x_1 + x_2 + x_3 \tag{3.14}$$

isto é $\quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$

3.4 A Transformação da Forma Companheira para a Diagonal

Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = Px + qu(t) & (a) \\ y = c^T x & (b) \end{cases} \tag{3.15}$$

onde P é uma matriz de ordem n na forma (1.3), q e c são matrizes $n \times 1$.

Considere alguma matriz T não-singular de ordem n. Se

$$z = Tx, \tag{3.16}$$

as equações (3.15) podem ser escritas como

$$\begin{cases} z' = Dz + q_1 u(t) & (a) \\ y = c_1^T z & (b) \end{cases} \tag{3.17}$$

onde $D = TPT^{-1}$, $q_1 = Tq$ e $c_1 = (T^{-1})^T c$.

Como vimos, as matrizes P e D são semelhantes. Nosso interesse particular são nas transformações onde D é diagonal e P na forma companheira (1.3). Assumimos que a matriz P tem autovalores λ_1, λ_2, ..., λ_n distintos.

Correspondente aos autovalores λ_i existem os autovetores x_i tais que

$$Px_i = \lambda_i x_i \qquad (i = 1, 2 \ldots, n). \tag{3.18}$$

Definimos a matriz M tendo nas colunas os autovetores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, isto é

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

M é chamada "matriz modal"; ela é não-singular e pode ser usada para obter a T acima. Podemos escrever as n equações definidas pela equação (3.18) como

$$PM = DM \tag{3.19}$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

Pela equação(3.19) obtemos

$$D = M^{-1}PM, \tag{3.20}$$

e vemos que T é definida pela matriz M^{-1}.

A matriz P tem a forma companheira.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_1 \end{bmatrix}$$

Logo a equação característica é

$$\lambda^n + k_{n-1} + \dots + \dots k_1\lambda + k_0 = 0.$$

Resolvendo essa equação obtemos os autovalores λ_1, λ_2, $\dots$, λ_n. Os correspondentes autovetores têm uma forma interessante. Considere um dos autovalores λ e o correspondente autovetor

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Então a equação $Px = \lambda x$ corresponde para o sistema de equações

$$\alpha_2 = \lambda\alpha_1$$

$$\alpha_3 = \lambda\alpha_2 = \lambda^2\alpha_1$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n = \lambda\alpha_{n-1} = \lambda^{n-1}\alpha_1.$$

Pondo $\alpha_1 = 1$, obtemos $x = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix}$.

Considerando todos os autovalores, temos que a matriz modal neste caso tem a forma

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Nesta forma a matriz M é chamada matriz de Vandermond; ela é não-singular desde que os autovalores λ_1, λ_2, $\dots$, λ_n são distintos. Algum método para inversão de matrizes pode ser usado para calcular M^{-1}.

Consideremos agora a equação (3.9), e a obtenção da transformação da forma companheira para a forma diagonal. A equação

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = u$$

é escrita na forma companheira como

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

e a saída será

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Encontraremos a transformação que levará esta equação ao sistema na forma diagonal.

A equação característica de P é

$$|P - \lambda I| = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

isto é $(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) = 0$ daí $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$.

Da equação (3.21) a matriz modal é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & i & -i \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e sua inversa

$$M^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 8 + 4i & -10i & -2 + 4i \\ 8 - 4i & 10i & -2 - 4i \end{bmatrix}.$$

A transformação definida pela equação (3.16) é

$$z = M^{-1}x.$$

A escolha original para x na seção (3.3) foi

$$x = \begin{bmatrix} y & y' & y'' \end{bmatrix}^T.$$

Assim, a transformação $M^{-1}x$ fica definida por

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 8+4i & -10i & -2+4i \\ 8-4i & 10i & -2-4i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ y^{'} \\ y^{''} \end{bmatrix}$$

a qual, escrita nas suas componentes, é

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}y^{''} \\ z_2 &= \frac{1}{5}(2+i)y - \frac{1}{2}iy^{'} + \frac{1}{10}(-1+2i)y^{''} \\ z_3 &= \frac{1}{5}(2-i)y + \frac{1}{2}iy^{'} - \frac{1}{10}(1+2i)y^{''}. \end{aligned}$$

Assim obtemos o sistema (3.17), isto é,

$$\begin{aligned} z^{'} &= Dz + q_1 u(t) \\ y &= c_1^T z \end{aligned}$$

onde

$D = M^{-1}AM = diag\{2, i, -i\}$,

$$q_1 = M^{-1}q = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 \\ -1+2i \\ -1-2i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c_1 = (T^{-1})^T c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos também obter uma transformação para a forma companheira. Essa transformação é possível somente quando o sistema é controlável.

Capítulo 4

Retroalimentação, Estabilização, Observadores e Dualidade

4.1 Sistema Linear Estável

Um tema importante na Teoria do Controle é o uso da retroalimentação para modificar um sistema dinâmico e alcançar algum comportamento desejado, por exemplo, estabilizar um ponto de equilíbrio instável. Nesta seção indicaremos algumas vantagens de uma equivalência com o sistema companheiro (1.2) relacionadas a esse tema. Também apresentaremos uma conseqüência adicional da dualidade. As considerações nesta seção ajudam a mostrar que se pode fazer muito com o controle de sistemas lineares, e assim é desejável ter uma extensão da solução do problema de equivalência envolvendo o sistema (1.2) e (1.5) para o caso onde (1.5) é substituído por um sistema não linear de entrada única.

Definição 4.1.1 *O sistema linear $x^{'} = Ax$ é estável se todos autovalores de A estão no semi-plano esquerdo aberto do plano complexo.*

Da teoria das equações diferenciais ordinárias lineares, é conhecido que todas as soluções $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ se todos os autovalores de A têm parte real negativa. Neste caso, o equilíbrio na origem é assintoticamente estável.

Definição 4.1.2 *No sistema* (1.5)*, a retroalimentação linear é tomada por* $u = Kx$ *onde* K *é uma matriz real* $1 \times n$*. O correspondente sistema de laço fechado é* $x^{'} = (A + bK)x$*.*

Considere a forma companheira $z^{'} = Pz + qu(t)$. Usando uma retroalimentação $u = \widetilde{K}z$, é possível atribuir autovalores arbitrariamente para o sistema de laço fechado resultante, desde que os autovalores complexos de $A + bK$ ocorram em pares conjugados. Especificamente, pondo

$$u = \widetilde{K}z = \begin{bmatrix} -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \ldots & -\alpha_1 \end{bmatrix} z,$$

em $z^{'} = Pz + qu(t)$, obtemos o sistema de laço fechado $z^{'} = \widetilde{P}z$ onde $\widetilde{P}$ tem a forma de P, exceto a última linha de $\widetilde{P}$.

De fato,

$$z^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & . & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \ldots & -\alpha_1 \end{bmatrix} z.$$

Então,

$$z^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & . & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & . & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & . & \cdots & 0 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix} z.$$

Logo,

$$z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(k_n+\alpha_n) & -(k_{n-1}+\alpha_{n-1}) & \cdots & -(k_1+\alpha_1) \end{bmatrix} z = \widetilde{P}z.$$

Seja, $p_{\widetilde{P}}(\lambda) = \lambda^n + (k_1+\alpha_1)\lambda^{n-1} + \cdots + (k_{n-1}+\alpha_{n-1})\lambda + (k_n+\alpha_n)$ polinômio característico de $\widetilde{P}$. Suponha que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ são os coeficientes desejados do polinômio característico de $\widetilde{P}$. Como k_i são conhecidos e m_i são especificados, então, $\alpha_i = m_i - k_i$. Portanto os coeficientes do polinômio característico de $P + q\widetilde{K}$ podem ser escolhidos de modo que todas as raízes estejam no semi-plano esquerdo aberto, o mesmo acontecendo para $A + bK$. E a taxa de convergência exponencial de $z(t)$ para a origem pode incrementar-se, por exemplo, transladando as raízes para a esquerda no plano complexo.

Um sistema que não é estável poderia ser feito estável se modificado por uma retroalimentação apropriada.

Exemplo 4.1.1 *Considere o sistema* $x' = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$. *Sabemos que existe* $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *que leva nosso sistema na forma companheira*

$$z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Considere $u = \widetilde{K}z = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} z$, retroalimentação para o sistema companheiro.

Daí, $z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_2 & -3-\alpha_1 \end{bmatrix} z.$

Temos que, $p_{\widetilde{P}}(\lambda) = \lambda^2 + (3+\alpha_1)\lambda + \alpha_2$ é o polinômio característico, com $m_1 = 3 + \alpha_1$ e $m_2 = \alpha_2$.

Pondo $\lambda^2 + (3+\alpha_1)\lambda + \alpha_2 = 0$, sendo λ_1 e λ_2 as raízes da equação, temos $\lambda_1 + \lambda_2 = -3 - \alpha_1$ e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \alpha_2$

Podemos escolher λ_1 e λ_2 arbitrariamente, por exemplo, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -4$. Assim, $m_1 = 5$, $m_2 = 4$, $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 4$. Portanto $u = \begin{bmatrix} -4 & -2 \end{bmatrix} z$ é a retroalimentação desejada para o sistema companheiro.

Sabemos que $K = \widetilde{K}T = \begin{bmatrix} -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}$. Daí,

$u = Kx = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}$ é retroalimentação linear para, $x' = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x.$

Portanto, $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$, é o polinômio característico, -4 e -1 são autovalores.

4.2 Estabilização Completa

Definição 4.2.1 *O sistema linear $x' = Ax + bu(t)$ é estabilizável se existe uma matriz real K, $1 \times n$ tal que o sistema linear $x' = (A + bK)x$ é estável.*

Teorema 4.2.1 *Se $x' = Ax + bu$ é completamente controlável então é estabilizável e os autovalores de $x' = (A+bK)x$ podem ser determinados arbitrariamente (desde que os autovalores complexos ocorram em pares conjugados) por uma escolha apropriada de K.*

Demonstração. Examinamos a prova somente para o caso especial do sistema companheiro (1.2). Devemos mostrar que $x' = Ax + bu(t)$ é estabilizável. Isto é, existe uma matriz K, $1 \times n$ tal que o sistema $x' = (A + bK)x$ é estável. Ou seja, devemos mostrar que os autovalores da matriz $A + bK$ estão no semi-plano esquerdo aberto do plano complexo.

Pela controlabilidade completa de $x' = Ax + bu(t)$, exite uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, não singular, com $z = Tx$ tal que,

$z^{'} = Tx^{'} = T(Ax + bu(t)) = TAT^{-1}Tx + Tbu(t) = TAT^{-1}z + Tbu(t)$ é um sistema companheiro.

Então, com uma retroalimentação linear $u = \widetilde{K}z$ para o sistema companheiro $z^{'} = TAT^{-1}z + Tbu(t)$, temos

$z^{'} = TAT^{-1}z + Tb\widetilde{K}z = (TAT^{-1} + Tb\widetilde{K})z$, e assim os autovalores da matriz $TAT^{-1} + Tb\widetilde{K}$ podem ser determinados como desejados.

Agora, a semelhança

$TAT^{-1} + Tb\widetilde{K} = T(A + b\widetilde{K}T)T^{-1} = T(A + bK)T^{-1}; \quad K \equiv \widetilde{K}T$, mostra que os autovalores de $A + bK$ podem ser determinados por uma escolha apropriada da retroalimentação $u = Kx$. ■

4.3 Detectabilidade

Definição 4.3.1 *O sistema* (3.1) *é detectável se existe uma matriz* L $n \times 1$ *tal que o sistema* $x^{'} = (A + Lc^T)x$ *é estável.*

Como os autovalores de $A + Lc^T$ são os mesmos que os para $A^T + cL^T$, formar a matriz $A + Lc^T$ corresponde à retroalimentação $u = L^T x$ no sistema dual $x^{'} = A^T + cu(t)$. Portanto um sistema é detectável se, e somente se, o sistema dual é estabilizável. Uma interpretação analítica de detectabilidade deriva da implicação que a saída da retroalimentação linear pode ser usada para "detectar" trajétorias de forma assintótica por meio de uma construção conhecida como um *sistema observador*. Especificamente, considere o sistema

$$\xi'(t) = A\xi(t) + bu(t) - L(y(t) - c^T\xi(t)) \tag{4.1}$$

onde ξ é um estado auxiliar que pode ser iniciado em algum vetor $\xi(0)$. O estado auxiliar ξ tem como objetivo aproximar o estado verdadeiro x, e L, conhecida como "matriz erro de saída", deve ser escolhida de modo que ξ se aproxima de x. Defina o erro por

$$e = x - \xi.$$

O objetivo é escolher L de modo que $e \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$. Agora fazendo a diferença de (3.1a) e (4.1) obtemos,

$$x' - \xi' = Ax + bu - [A\xi + bu - L(y - c^T\xi)] = Ax - A\xi + Lc^T x - Lc^T\xi = (A + Lc^T)e,$$

onde $y = c^T x$.

Logo,

$$e' = (A + Lc^T)e.$$

Temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.1 *Se o sistema* (3.1) *é detectável então L pode ser escolhida no sistema* (4.1) *de modo que $e = x - \xi \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$, independentemente da condição inicial* $\xi(0)$.

Alguns comentários nessa construção devem ser feitos. O sistema observador (4.1) é uma alternativa para calcular as soluções do sistema (3.1) com um método numérico direto. Usando os conhecidos dados fornecidos por A, b e c, juntamente com y e u, o sistema (4.1) pode ser simulado numericamente com a garantia que o estado estimado assintoticamente reconstrói o sistema verdadeiro de estado x para (3.1), independentemente da condiçaõ inicial $\xi(0)$. Se por sorte tomarmos $\xi(0) = x(0)$, então a equação observadora (4.1) implica que $\xi(t) = x(t)$ para todo t, uma estimativa perfeita. Pode-se pensar de (4.1) como um sistema com entradas u e y e com saída ξ, a aproximação desejada. À estimativa ξ pode-se dar a retroalimentação via $u = K\xi$, no lugar do verdadeiro estado com a finalidade de estabilizar (3.1a), desde que (3.1a) seja estabilizável. Em outras palavras, os autovalores do sistema de laço fechado podem ser colocados em algum lugar no semi-plano esquerdo aberto mesmo se somente a saída y é mensurável. Além disso, uma importante característica dessa construção é que o controlador (matriz K) e o observador (matriz L) podem ser determinados independentemente enquanto que se garanta que o sistema observador/controlador inter-conectado seja estável.

Para ver isto, usando (3.1a) juntamente com (4.1), escrevemos o sistema combinado para (x, ξ) como

$$\begin{bmatrix} x' \\ \xi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & bK \\ -Lc^T & A + Lc^T + bK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Podemos obter o polinômio caracterítico para esse sistema usando a seguinte transformação de semelhança:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & bK \\ -Lc^T & A + Lc^T + bK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + bK & bK \\ 0 & A + Lc^T \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Assim o polinômio característico da matriz dos coeficientes em (4.1) é o produto dos polinômios característicos de $A + bK$ e de $A + Lc^T$, ou seja, os autovalores λ desse sistema são dados por:

$$det(A + bK - \lambda I) \cdot det(A + Lc^T - \lambda I) = 0$$

Isto significa que K pode ser determinada sem considerar o fato que somente o estado estimado será retroalimentado, e a matriz erro L pode ser determinada sem referência para o fato de que o estado estimado resultante seja retroalimentado com a finalidade de estabilização.

4.4 Exemplos, Estabilidade e Detectabilidade

Vamos considerar dois exemplos ilustrando estabilização e detectabilidade.

Exemplo 4.4.1 *Retornamos novamente ao exemplo 1.2.2, com a equação de saída* $y = x_1$. *Então as matrizes dos coeficientes são*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esse sistema é ao mesmo tempo estabilizável e detectável, usando a matriz K de retroalimentação e a matriz observadora L dadas por, $K = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

De fato,

• $A + bK = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Daí, $p_{A+bK}(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6$. Logo $A + bK$ tem autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$.

• $A + Lc^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Sendo diagonal, os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$.

Outras escolhas para K e L são possíveis.

De fato, se queremos que os autovalores do sistema de laço fechado $x' = (A+bK)x$ sejam $-1 \pm i$, com os comentários da definição (4.1.2), determinemos a retroalimentação K.

Sabemos que $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \sim P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Considere $u = \widetilde{K}z = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} z$, retroalimentação para o sistema companheiro.

Daí, $z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_2 & -3-\alpha_1 \end{bmatrix} z$.

Então, $p_{\widetilde{P}}(\lambda) = \lambda^2 + (3+\alpha_1)\lambda + \alpha_2$ e $m_1 = 3 + \alpha_1$, $m_2 = \alpha_2$.

$\lambda^2 + (3+\alpha_1)\lambda + \alpha_2 = 0$, sendo λ_1 e λ_2 as raízes da equação, temos,

$\lambda_1 + \lambda_2 = -3 - \alpha_1$ e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \alpha_2$

Sejam $\lambda_1 = -1 + i$ e $\lambda_2 = -1 - i$. Portanto $u = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} z$ é a retroalimentação para o sistema companheiro.

Sabemos que $K = \widetilde{K}T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}$, daí

$u = Kx = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}$ é a retroalimentação linear para, $x' = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x +$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} x.$

Portanto, $p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 4$, e $-3, -2$ são os autovalores.

Uma outra maneira para determinar a matriz K de retroalimentação é usar as consequências do sistema conbinado (x, ξ).

De fato,

$$A + bK - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} -2 - \alpha_2 - \lambda & 2 - \alpha_1 \\ 1 - \alpha_2 & -1 - \alpha_1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Logo, $det(A + bk - \lambda I) = \lambda^2 + (3 + \alpha_1 + \alpha_2)\lambda + 3\alpha_1 + 3\alpha_2$, de onde segue que, $\lambda_1 + \lambda_2 = -3 - \alpha_1 - \alpha_2$ e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 3\alpha_1 + 3\alpha_2$.

Podemos escolher λ_1 e λ_2 arbitrariamente. Sejam $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -2$. Daí, $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$, que implica $K = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & \alpha_2 - 2 \end{bmatrix}$.

• Com o mesmo racíocinio acima determinemos uma outra matriz observadora L para o sistema.

De fato,

$$A + Lc^T - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -2 + l_1 - \lambda & 2 \\ 1 + l_2 & -1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Logo, $det(A + Lc^T - \lambda I) = \lambda^2 + (3 - l_1)\lambda - l_1 - 2l_2$, de onde segue que, $\lambda_1 + \lambda_2 = l_1 - 3 \quad \text{e} \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -l_1 - 2l_2$.

Podemos escolher λ_1 e λ_2 arbitrariamente. Sejam $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -2$. Daí, $l_1 = l_2 = -2$, o que implica $L = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Se tivéssemos escolhido $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$ teríamos $L = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 4.4.2 *Estabilidade e detectabilidade não são garantidas. Considere o sistema linear, cujas matrizes dos coeficientes são:*

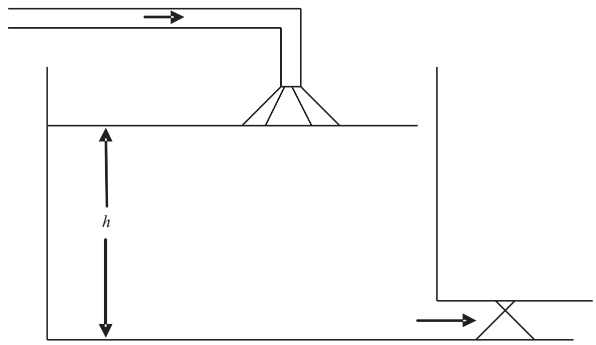
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, qualquer matriz K 1×2 de retroalimentação produz uma matriz de laço fechado $A + bK$ com um autovalor nulo. Portanto, não é estabilizável. Igualmente, qualquer matriz L 2×1 produz uma matriz com autovalor nulo. Portanto, o sistema não é detectável.

4.5 Aplicação

Para analisar o controle de um líquido em um tanque devemos considerar a entrada e saída regulares. A figura mostra um tanque com:

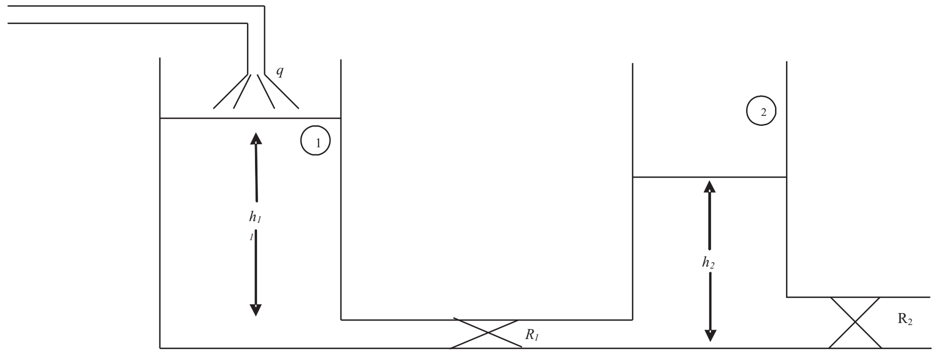
- taxa de vazão de entrada q_e
- taxa de vazão de saída q_0
- altura do líquido h
- Área da base do tanque S (suposto na forma de paralelepípedo reto-retângulo).



Se $q = q_e - q_0$ é a variação do líquido que entra no tanque ao longo de um período Δt e Δh correspondente a mudança no nível, então $q\Delta t = S\Delta h$ e no limite quando $\Delta t \longrightarrow 0$,

$$q = S\frac{dh}{dt}.$$

Para um sistema mais complicado, constituído de dois tanques interconectados, nós devemos obter explicitamente uma equação para a taxa de saída q_0 em termos da resistência oferecida pela válvula de saída. Estaremos supondo que a resistência R da válvula de saída é diretamente proporcional à altura do líquido. Especificamente, vamos supor que $q_i \cdot R_i = h_i$, $i = 1, 2$, onde q_i é a vazão de saída do tanque i, R_i é a resistência da válvula e h_i é a altura do líquido no tanque i.



Para o tanque 1,

$$S_1\frac{dh_1}{dt} = q - \frac{1}{R_1}(h_1 - h_2) \quad \text{ou}$$

$$h_1^{'} = \frac{1}{S_1}q - \frac{1}{S_1R_1}h_1 + \frac{1}{S_1R_1}h_2 \tag{4.4}$$

onde $h_1^{'} = \dfrac{dh_1}{dt}$.

Para o tanque 2,

$S_2\dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{1}{R_1}(h_1 - h_2) - \dfrac{1}{R_2}h_2$ ou

$$h_2^{'} = \frac{1}{S_2R_1}h_1 - \frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)h_2 \tag{4.5}$$

onde $h_2^{'} = \dfrac{dh_2}{dt}$.

Nós podemos escrever (4.4) e (4.5) em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} h_1^{'} \\ h_2^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1R_1} & \frac{1}{S_1R_1} \\ \frac{1}{S_2R_1} & -\frac{1}{S_2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} q$$

que tem a forma

$$h^{'} = Ah + bq \tag{4.6}$$

onde $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1R_1} & \frac{1}{S_1R_1} \\ \frac{1}{S_2R_1} & -\frac{1}{S_2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Podemos também escrever simultâneamente as equações de primeira ordem (4.4) e (4.5) como uma equação diferencial de segunda ordem.

Diferenciando (4.5) e substituindo nesta a equação (4.4), temos

$$\begin{aligned}
h_2^{''} &= \frac{1}{S_2R_1}h_1^{'} - \frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)h_2^{'} \\
&= \frac{1}{S_2R_1}\left(\frac{1}{S_1}q - \frac{1}{S_1R_1}h_1 + \frac{1}{S_1R_1}h_2\right) - \frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)h_2^{'} \\
&= \frac{1}{S_1S_2R_1}q - \frac{1}{S_1S_2R_1^2}h_1 + \frac{1}{S_1S_2R_1^2}h_2 - \frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)h_2^{'} \\
&= \frac{1}{S_1S_2R_1}q - \frac{1}{S_1R_1}\left[h_2^{'} + \frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)h_2\right] + \frac{1}{S_1S_2R_1^2}h_2 - \frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)h_2^{'}
\end{aligned}$$

$$= -\left[\frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{S_1R_1}\right]h_2^{'}+\left[\frac{1}{S_1S_2R_1^2}-\frac{1}{S_1S_2R_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]h_2+$$
$$\frac{1}{S_1S_2R_1}q.$$

Assim obtemos,

$$h_2^{''}+\left[\frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{S_1R_1}\right]h_2^{'}-\left[\frac{1}{S_1S_2R_1^2}-\frac{1}{S_1S_2R_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]h_2=\frac{1}{S_1S_2R_1}q.$$

É uma equação diferencial de ordem 2 da forma $y^{''}+k_1y^{'}+k_0y=u(t)$. Logo podemos analisar a controlabilidade e observabilidade da situação descrita no tanque.

De fato,

$$rank\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} & -\frac{1}{S_1^2R_1} \\ 0 & \frac{1}{S_1S_2R_1} \end{bmatrix} = 2.$$

Então é completamente controlável, pelo Teorema 2.1.1.

Isso significa que, partindo de alturas iniciais h_1^0, h_2^0, e pré-fixadas duas alturas arbitrárias h_1^f, h_2^f, existe uma vazão de entrada no primeiro tanque que, num tempo finito, produzirá as alturas h_1^f e h_2^f.

Consideremos a saída $y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}h$.

Assim,

$$c^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1R_1} & \frac{1}{S_1R_1} \\ \frac{1}{S_2R_1} & -\frac{1}{S_2}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}) \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$rank\begin{bmatrix} c^T \\ c^TA \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{S_1R_1} & \frac{1}{S_1R_1} \end{bmatrix} = 2$$

Então o sistema é completamente observável, pelo Teorema 3.2.1. Isto é, conhecendo-se a vazão de entrada q e as alturas dos tanques, pode-se determinar o nível inicial (h_1^0, h_2^0) do tanque de maneira única.

4.6 Comentários

4.6.1 Uma breve nota sobre extensões

Vamos descrever brevemente uma extensão da nossa discussão dos sistemas de entrada única nos capítulos $2-4$ para o caso de sistemas lineares com entrada e saída múltiplas,

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu(t) & (a) \\ y = Cx, & (b) \end{cases} \tag{4.7}$$

onde $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, e assim B é $n \times m$ e C é $p \times n$. Como observado antes, o teste do *rank* para controlabilidade e observalidade permite uma dualidade algébrica entre esses conceitos, uma vez que identificamos um sistema dual apropriado. O mesmo princípio extendido para (4.7).

A Definição 2.1.1 (Controlabilidade Completa) faz sentido para o caso de m-entradas. As funções admissíveis para controle serão funções $u(t)$ com valores em $\mathbb{R}^m$ tal que toda coordenada seja localmente integrável.

A caracterização de controlabilidade completa no Teorema 2.1.1 pode ser transportada diretamente para (5.1a) sem nenhuma mudança. Neste caso, a matriz de controlabilidade $\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ tem ordem $n \times nm$ e a prova procede a partir de (2.1). Com atenção para as dimensões envolvidas, a mesma prova funciona. A matriz M é ainda $n \times n$ enquanto ψ é $1 \times m$.

Observabilidade completa do sistema (4.7) é definida exatamente como na definição 3.2.1, e o sistema (4.7) é completamente observável se e só se a matriz,

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

que é agora $pn \times n$, tiver $rank = n$. Uma prova do Teorema 3.2.1 é obtida como antes.

O sistema dual de (4.7) é definido por

$$\begin{cases} x^{'} = A^T x + C^T u(t) & (a) \\ y = B^T x, & (b) \end{cases} \tag{4.8}$$

com as dimensões das matrizes determinadas naturalmente, por (4.7). O Teorema 3.2.2, o qual documenta a dualidade algébrica da observabilidade completa e controlabilidade completa, é também válido quando aplicado para (4.7) e seu dual.

A extensão do Teorema 4.2.1 para o caso de sistema controlável de m-entradas pode ser baseado no resultado de entrada única (ver [7, *pp* 49 − 51]).

As Definições 4.2.1 e 4.3.1 têm extensões diretas para o caso das m-entradas e p-saídas. O Teorema 4.3.1 na construção observável é facilmente extendido para (4.7); a extensão é basicamente notacional.

Se considerarmos sistemas lineares com as matrizes dos coeficientes dependente de t, técnicas adicionais são necessárias para observabilidade, controlabilidade, e sua dualidade, embora várias extensões têm sido feitas. Essas definições envolvem o tempo inicial t_0, o particular estado inicial x_0 considerado, e o intervalo de tempo sobre o qual o controle age. O leitor interessado nesse assunto é convidado a explorar as referências. Vejamos um exemplo para ilustrar que tais sistemas requerem alternativas apropriadas a fim de descrever propriedades de controlabilidade.

Exemplo 4.6.1 *Considere o sistema* $x^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix} u$

A solução geral é $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(x_1(0) + \int_0^t e^{-s} b_1(s)u(s)ds) \\ e^{2t}(x_2(0) + \int_0^t e^{-2s} b_2(s)u(s)ds) \end{bmatrix}.$

Se b_1 e b_2 são constantes, então o Teorema 2.1.1 garante que o sistema é completamente controlável. Suponha agora que $b_1 = e^s$ e $b_2 = e^{2s}$; a solução é então,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(x_1(0) + \int_0^t u(s)ds) \\ e^{2t}(x_2(0) + \int_0^t u(s)ds) \end{bmatrix}.$$

Portanto, soluções que partem da reta $x_2 = x_1$ quando $t = 0$, sempre satisfazem a condição $x_2(t) = e^t x_1(t)$, e desta condição podemos concluir que o sistema não é completamente controlável de acordo com a definição 2.1.1. De fato, se $x_1(0) = x_2(0)$, então o movimento é limitado ao primeiro ou terceiro quadrantes, desde que x_1 e x_2 têm o mesmo sinal. Em particular, o conjunto de pontos acessíveis a partir da origem está dentro desses dois quadrantes. Se considerarmos a condição de controlabilidade do *rank* de modo pontual, isto é, se considerarmos a seguinte matriz para cada instante t,

$$\begin{bmatrix} B(t) & AB(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^t \\ e^{2t} & 2e^{2t} \end{bmatrix},$$

obtemos uma matriz não-singular. Este exemplo mostra que uma interpretação pontual da condição controlabilidade do posto do Teorema 2.1.1 não conduz a um critério satisfatório para controlabilidade completa de um sistema linear dependente de t.

Referências Bibliográficas

[1] Burghes, D.; Graham, A. *Control and Optimal Control Theories with Applications*. Chichester: Horwood, 2004.

[2] Coelho, F. U.; Lourenço M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

[3] Figueiredo, D. G.; Neves, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

[4] Horn, R. A.; Johnson, C. R. *Matrix Analysis*. New York: Cambridge Uneversity Press, 1999.

[5] Lima. E. L. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

[6] Monteiro, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

[7] Nering. E. D. *Linear Algebra and Matriz Theory*. New york: John Wiley, 1970.

[8] Terrell, W. J. *Some Fundamental Control Theory I: Controllability, Observability, and Duality*. American Mathematical Monthy, v.106, n.8, p.705-719, 1999.

[9] Wonham. W. M. *Linear Multivariable Control*. Third Edition, Springer-Verlag, 1985.