

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Propriedades dinâmicas de
mapeamentos não lineares

Luam Silva de Paiva

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO - SP

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

Luam Silva de Paiva

Propriedades dinâmicas de mapeamentos não lineares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Ricardo da Costa

**Rio Claro - SP
2022**

P149p Paiva, Luam Silva de
Propriedades dinâmicas de mapeamentos não lineares /
Luam Silva de Paiva. -- Rio Claro, 2022
51 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro
Orientador: Diogo Ricardo da Costa

1. Caos. 2. Dinâmica Não-linear. 3. Mapeamentos. 4.
Espaço de Parâmetros. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo
autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Luam Silva de Paiva

Propriedades dinâmicas de mapeamentos não lineares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Diogo Ricardo da Costa
Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira
Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

Resultado: APROVADO

Rio Claro - SP, 27 de Outubro de 2022

*A todos que me incentivaram para conquistar mais esse objetivo, vocês moram no meu
coração.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e a Nossa Senhora por possibilitar que eu chegasse a vivenciar este momento de minha vida e carreira.

A toda minha família, meus pais Otávio, Regina e meus irmãos Felipe e Diego que sempre me apoiaram e fizeram de tudo para que eu chegasse até aqui.

A minha namorada Julia por sempre acreditar em mim nos momentos de alegria e tristeza, além do constante apoio durante todo este período.

Ao meu orientador Professor Dr. Diogo Ricardo da Costa por sempre acreditar no meu potencial, além disso, por todas as conversas, ensinamentos e tempo dedicado a auxiliar o meu crescimento como pesquisador e também como ser humano.

A todos os professores que passaram pela minha formação. Aos amigos e colegas pelos momentos de estudo, aprendizado e descontração.

Ao grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear da Universidade Estadual Paulista (UNESP) de Rio Claro.

À UNESP pela oportunidade da realização do mestrado.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Nesta dissertação, estudaremos a composição dos mapas *Logistic-like* e Gauss. Tal mapeamento apresenta resultados fascinantes, como o aparecimento de curvas cíclicas em seu espaço de parâmetros, levando a estruturas de adição de períodos. Construímos o espaço de parâmetros alterando dois parâmetros de controle, enquanto o terceiro parâmetro permanece constante. Para cada combinação de parâmetros de controle, encontramos o respectivo expoente de Lyapunov. Uma paleta de cores específica é então usada para destacar os Conjuntos Complexos de Periodicidade (CSP). Ao alterar um parâmetro de controle, algumas regiões contendo estruturas CSP se deformam gradativamente até o aparecimento de regiões com alta estabilidade. Também usamos a teoria de curvas extremas e superestáveis para entender a organização das estruturas CSP no espaço de parâmetro. Por fim, obtemos os diagramas de bifurcação e os mapas de retornos para a dinâmica, que nos ajudam a entender detalhes sobre o espaço de parâmetro.

Palavras-chave: Caos, Dinâmica Não-linear, Mapeamentos, Espaço de Parâmetros.

Abstract

In this dissertation, we study the composition of Logistic-like and Gauss maps. Such mapping presents interesting results, such as the appearance of cyclic curves in its parameter space, leading to period addition structures. We get the parameter space by changing two control parameters while the third parameter remains constant. For each combination of control parameters, we find the respective Lyapunov exponent. A specific color palette is then used to highlight Complex Sets Periodicity (CSP). When changing a control parameter, some regions containing CSP structures gradually deform until regions with high stability. We also use the theory of extreme and superstable curves to understand the organization of CSP structures in the parameter space. Finally, we get bifurcation diagrams and return maps for dynamics, which help us understand details about the parameter space.

Keywords: Chaos, Nonlinear Dynamics, Mappings, Parameter Space.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Mapa de retorno X_1 vs. X_0 mostrando a convergência para o ponto fixo x_2^* . Sendo em (a) $\gamma = 4$ e em (b) $\gamma = 3$	16
1.2	Diagrama de bifurcação para $\gamma = 4$, com bifurcações do tipo forquilha e duplicação de período.	18
1.3	Diagrama de bifurcação para $\gamma = 3$, com bifurcações do tipo transcritical e duplicação de período.	19
1.4	Em (a) e (b) temos o diagrama de bifurcação para diferentes valores de γ . Já em (c) e (d) temos os expoentes de Lyapunov. Para (a) e (c) temos $\gamma = 3$, porém para (b) e (d) temos $\gamma = 4$	21
2.1	Diagrama de bifurcação para o mapa Gauss, com $\alpha = 4.9$	24
2.2	(a) Diagrama de bifurcação para o mapa Gauss, (b) Expoente de Lyapunov referente ao diagrama de bifurcação mostrado em (a).	24
3.1	Diagrama de bifurcação para o mapa <i>Logistic-Gauss</i> , com $\gamma = 2,3$ e $\delta = 1,5$	27
3.2	Em (a) temos o diagrama de bifurcação para o mapa <i>Logistic-Gauss</i> , com $\gamma = 2.3$ e $\delta = 1.5$ e (b) o expoente de Lyapunov para tais parâmetros.	28

3.3	Espaço de parâmetro γ vs. δ com $\beta = 0,1$ e $x_0 = 0,2$. A paleta de cores representa o expoente de Lyapunov λ , onde as órbitas periódicas ($\lambda < 0$) são coloridas como as regiões vermelho/amarelo, enquanto ($\lambda > 0$) as órbitas caóticas recebem as cores verde/azul.	29
3.4	Grafico X_1 vs. X_0 para diferentes valores de γ	31
3.5	Espaço de parâmetros γ vs. δ , onde o esquema de cores representa o valor do expoente de Lyapunov. As linhas tracejadas em (a) são chamadas de curvas superestáveis enquanto as linhas em (b) são as curvas extremas. . .	32
3.6	Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,1$ fixo. As linhas tracejadas em (a) são chamadas de curvas superestáveis enquanto as linhas em (b) são as curvas extremas. Os números destacados em (b) correspondem à periodicidade das estruturas CSP.	33
3.7	Mapa de retorno X_1 vs. X_0 , sendo (a,b) correspondente ao ponto azul, (c,d) ao ponto vermelho e (e,f) ao ponto verde, pontos estes que podem ser observados na figura 3.6.	34
3.8	Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,2$ fixo.	35
3.9	Diagrama de bifurcação X vs. β seguindo a linha tracejada mostrada na figura 3.8(d). A linha tracejada vermelha corresponde ao círculo vermelho destacado na figura 3.8(d).	36
3.10	Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,3$ fixo.	38
3.11	Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,5$ fixo.	39
3.12	Mapa de retorno X_1 vs. X_0 , sendo (a) correspondente ao ponto preto, (b) ao ponto magenta e (c) ao ponto verde, pontos estes que podem ser observados na figura 3.11.	40
3.13	Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,5$ fixo.	41
3.14	Diagrama de bifurcação X vs. β seguindo a curva extrema $(4)^{rm}$ destacada na figura 3.13(b). As linhas tracejadas corresponde aos pontos preto e ciano da figura 3.13(b).	42
3.15	Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,7$ fixo.	43

3.16	Diagrama de bifurcação X vs. β seguindo a curva extrema $(2)^{mr}$ mostrada na figura 3.15(b). As linhas tracejadas correspondem aos pontos destacados na figura 3.15(b).	43
3.17	Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,7$ fixo.	44

SUMÁRIO

Introdução	11
1 Propriedades dinâmicas do mapa <i>Logistic-like</i>	14
1.1 Sobre o mapeamento	14
1.2 Ponto fixo	14
1.3 Análise da estabilidade dos pontos fixos	15
1.4 Cálculo do Expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais	18
2 Propriedades dinâmicas do Mapa Gauss	22
2.1 Sobre o mapeamento	22
2.2 Ponto fixo	22
2.3 Expoente de Lyapunov	23
3 Composição dos mapas <i>Logistic-like</i> e Gauss	26
3.1 Composição dos mapas	26
3.2 Expoente de Lyapunov	27
3.3 Espaço de Parâmetros	28
3.3.1 Órbitas extremas e Superestáveis	29
3.4 Pontos de Máximos e Mínimos	30
3.5 Resultados numéricos	32

3.5.1	Resultados para $\beta = 0,1$	32
3.5.2	Resultados para $\beta = 0,2$	36
3.5.3	Resultados para $\beta = 0,3$	37
3.5.4	Resultados para $\beta = 0,5$	37
3.5.5	Resultados para $\beta = 0,7$	41
 Considerações Finais		 45
 Referências Bibliográficas		 47

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o estudo de caos em sistemas dinâmicos tem ganhado relevância na comunidade científica, sendo estudado por pesquisadores de diferentes áreas, como física, matemática, química, entre outras [1, 2, 3]. Tais estudos vêm se tornando cada vez mais frequentes e factíveis, e isso ocorre devido ao desenvolvimento de novas técnicas e principalmente ao uso dos computadores não mais como máquinas para calcular, mas sim como um ambiente de pesquisa científica [4, 5].

A primeira constatação da existência de sistemas determinísticos que apresentavam um comportamento dinâmico irregular foi realizada pelo matemático francês Henri Poincaré no século XIX, em seu estudo clássico do problema de três corpos. Nesse problema, Poincaré estudava o comportamento dinâmico de três corpos sujeitos a ação de força gravitacional em um plano, e através desse sistema, conseguiu perceber a existência de dinâmica irregular [6].

Sistemas caóticos contrariam nossas tentativas de domínio e previsibilidade, pois uma pequena mudança no início de um evento pode trazer consequências enormes e absolutamente desconhecidas no futuro, ou seja, apresentam sensibilidade às condições iniciais. Esse fenômeno foi metaforicamente ilustrado por Edward Lorenz pelo chamado “Efeito Borboleta” que diz “*Será que o bater de asas de uma borboleta no Brasil causaria um tornado no Texas?*”[7]. É de extrema importância que se tenha em mente que caos não é desordem, mas sim perda de previsibilidade [4]. Embora tratado por vários como “*Teoria*

do *Caos*", o que se denominou chamar de caos é um apanhado de resultados abstratos e métodos computacionais, sendo muitas vezes aplicáveis no estudo de equações diferenciais não lineares e mapeamentos [8].

No estudo de sistemas dinâmicos, muitas vezes são utilizados mapeamentos, podendo ser unidimensionais ou bidimensionais [9, 10, 11]. Um mapeamento unidimensional muito conhecido é o mapa Logístico, proposto pelo biólogo Robert May em 1976, com o intuito de modelar uma população de insetos [12], dado pela seguinte equação:

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n). \quad (1)$$

Embora seja uma equação simples, ele apresenta comportamentos dinâmicos muito relevantes, tais como, rotas para o caos, pontos fixos, crises, regularidade, diversos tipos de bifurcações, entre outros[13, 14].

Um estudo muito importante, para determinar o quão caótico é um sistema, foi desenvolvido pelo matemático Aleksandr Mikhailovich Lyapunov no fim do século XIX, onde ele estudava a transição de estabilidade para instabilidade [15, 16]. Ele buscava encontrar números que representassem essa transição de ordem para o caos, sendo na atualidade conhecido como expoente de Lyapunov ou números de Lyapunov. O mecanismo consiste em iterar duas condições iniciais distintas, porém muito próximas, e acompanhar o que ocorre com elas. Se após as iterações as órbitas se aproximarem, dizemos que essa condição inicial leva a uma órbita periódica ou regular. Caso a distância entre elas aumente exponencialmente, dizemos que a órbita é caótica [13, 14].

Recentemente, um instrumento que tem auxiliado no estudo de sistemas caóticos é a investigação do espaço de parâmetros [17, 18]. Os espaços de parâmetros consistem em variarmos dois parâmetros de controle, e para cada par de parâmetros escolhidos, calculamos o respectivo expoente de Lyapunov. Quando analisamos o espaço de parâmetros, podemos encontrar estruturas periódicas imersas em regiões caóticas. No presente estudo chamaremos tais estruturas periódicas de conjuntos complexos de periodicidade (CSPs), mas na literatura, pode-se encontrar referências onde essas estruturas são chamadas de camarões (*shrimps*), anzol, andorinha, janela composta [19, 20, 21], entre outros.

Para melhor compreender as estruturas CSPs, utilizaremos curvas extremas e superestáveis, que, por meio das suas intersecções obtemos informações relevantes sobre a dinâmica do sistema. Podemos, também, determinar o período da estrutura onde ocorre tal intersecção. Através do expoente de Lyapunov, as curvas superestáveis podem ser obtidas quando este tende a $-\infty$ e, para saber como estas se organizarão no espaço de parâmetros, estudaremos a intersecção das curvas extremas [22].

Nesta dissertação, estudaremos o mapa *Logistic-like* e o mapa Gauss, sendo o mapa *Logistic-like* uma generalização do mapa Logístico citado anteriormente. A partir desses dois mapas, criamos um novo mapeamento, sendo esse novo mapeamento uma composição dos dois anteriores. Este novo sistema guarda informações dos dois mapas originais, onde para combinações de seus parâmetros se pode notar transição entre os dois mapas, além de aumentar o grau do polinômio criado, o que faz aparecerem mais mínimos e máximos locais. Neste contexto, nossa proposta é investigar o espaço de parâmetros, assim como, as CSPs que surgem ao variarmos os parâmetros de controle desse novo modelo.

Para melhor entendimento dessa dissertação, organizamos a mesma em três Capítulos. No primeiro Capítulo descrevemos o estudo de algumas propriedades dinâmicas do mapa *Logistic-like*. No segundo Capítulo descrevemos o estudo de algumas propriedades dinâmicas do mapa Gauss. O terceiro Capítulo apresentamos a composição dos mapas *Logistic-like* e Gauss, sendo esta composição nomeada como mapa *Logistic-Gauss*, analisando também o espaço de parâmetros do mesmo. E por fim, apresentamos os comentários finais sobre o desenvolvimento e resultados do trabalho.

CAPÍTULO 1

PROPRIEDADES DINÂMICAS DO MAPA *LOGISTIC-LIKE*

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades do mapa *Logistic-like*, tais como, ponto fixo, análise de estabilidade e expoente de Lyapunov.

1.1 Sobre o mapeamento

Nessa seção vamos considerar o mapa *Logistic-like*, o qual é descrito pela seguinte equação

$$x_{n+1} = x_n R(1 - x_n^\gamma), \quad (1.1)$$

sendo este mapeamento uma generalização do conhecido mapa logístico de Robert May, utilizado para modelar o crescimento de uma população de insetos [12, 23]. Assim, temos que x_n é o número de indivíduos na n -ésima geração, onde $R \in [0, 4]$ e $\gamma \geq 0$ são parâmetros de controle.

1.2 Ponto fixo

O comportamento da dinâmica de um sistema geralmente tende ou se afasta de um certo ponto após sucessivas iterações. O fato de termos uma dinâmica dependente de um parâmetro variável, nos leva a resultados muito importantes, como a criação e destruição de pontos fixos, assim como um caminho para o caos determinístico. Desta maneira, seja um mapa unidimensional

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (1.2)$$

tal que $F(x_n)$ é uma função não linear de sua variável. Dizemos que x^* é um ponto fixo se satisfazer a seguinte relação

$$x^* = F(x^*). \quad (1.3)$$

Dessa forma, temos para nosso mapeamento que

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma) = F(R, x_n). \quad (1.4)$$

Para podermos calcular nossos pontos fixos devemos considerar que $x_{n+1} = x_n = x$, onde temos então que

$$Rx(1 - x^\gamma) = x \quad (1.5)$$

o que resulta em

$$x[1 - R(1 - x^\gamma)] = 0. \quad (1.6)$$

Desta maneira da equação (1.6) temos que o primeiro ponto fixo do mapeamento é $x_1^* = 0$.

Para encontrarmos o segundo ponto fixo basta resolvermos a equação a seguir, que corresponde a segunda solução da equação (1.6),

$$1 - R(1 - x^\gamma) = 0, \quad (1.7)$$

ao isolar x , encontramos

$$x = \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (1.8)$$

Logo o segundo ponto fixo é $x_2^* = \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$. Desta forma, foram encontrados os dois primeiros pontos fixos do mapeamento estudado, sendo eles $x_1^* = 0$ e $x_2^* = \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$, onde x_2^* depende do valor de γ podendo assim variar.

Na figura 1.1 temos o mapa de retorno X_1 vs. X_0 , sendo $X_0 = 0,2$ a condição inicial. A linha em vermelho representa as iterações do mapeamento, ou seja, dado uma condição inicial X_0 iteramos o mapa uma vez e chegamos em um X_1 , e assim sucessivamente. Tal figura nos mostra a convergência para o ponto fixo x_2^* quando usamos dois valores distintos de γ . Na figura 1.1(a) temos o caso em que $\gamma = 4$, e para esse parâmetro se pode notar que o ponto fixo x_2^* converge para 0,6350. Já para $\gamma = 3$ (mostrado na figura 1.1(b)), x_2^* converge para 0,6929.

1.3 Análise da estabilidade dos pontos fixos

Na seção anterior calculamos dois pontos fixos para o mapa *Logistic-like*. A partir destes pontos fixos, determinaremos a estabilidade de cada um deles, onde estes pontos

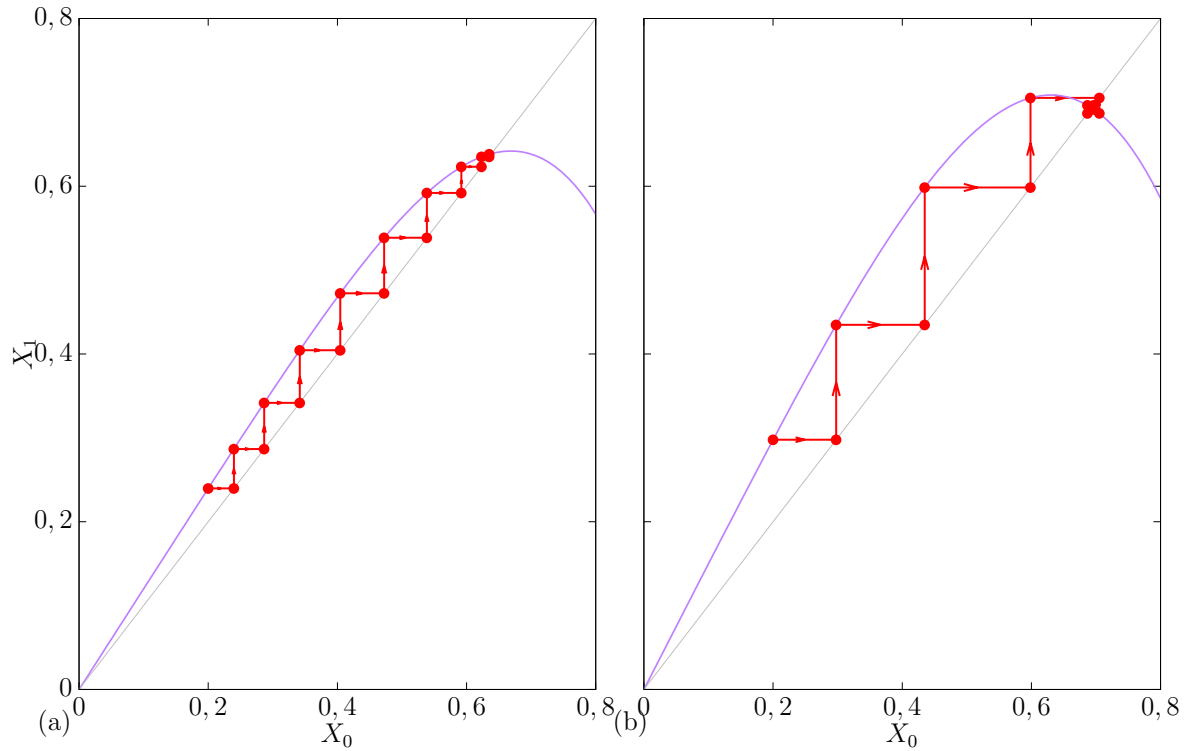


Figura 1.1: Mapa de retorno X_1 vs. X_0 mostrando a convergência para o ponto fixo x_2^* . Sendo em (a) $\gamma = 4$ e em (b) $\gamma = 3$.

fixos devem satisfazer a equação a seguir [14]

$$\left| \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{x=x^*} < 1, \quad (1.9)$$

sendo que

$$F(R, x) = Rx(1 - x^\gamma), \quad (1.10)$$

temos então que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = R - R(\gamma + 1)x^\gamma. \quad (1.11)$$

Calculamos a estabilidade para o primeiro ponto fixo, ou seja

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_1^*=0} = R. \quad (1.12)$$

Temos então que

$$|R| < 1, \quad (1.13)$$

o que nos leva a seguinte expressão

$$-1 < R < 1. \quad (1.14)$$

Como $R > 0$, desconsideramos os valores negativos, desta forma, temos então que $0 \leq R < 1$, concluindo assim que o ponto fixo x_1^* é assintoticamente estável para $R \in [0,1)$.

De modo análogo, analisaremos para o segundo ponto fixo x_2^* , porém, tal análise exige que separemos em dois casos, quando γ for par e quando for ímpar. Para o caso de γ par temos

$$x_2^* = \pm \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (1.15)$$

portanto, para este caso teremos dois pontos fixos. Analisando a estabilidade para estes pontos temos:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_2^* = \pm [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}} = R - R(\gamma + 1) \left[\pm \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]^\gamma. \quad (1.16)$$

Sabendo que γ é par e fazendo as devidas simplificações, encontramos que

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_2^* = \pm [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}} = 1 + \gamma - \gamma R, \quad (1.17)$$

o qual para ser assintoticamente estável deve satisfazer a equação (1.9), portanto

$$-1 < 1 + \gamma - \gamma R < 1, \quad (1.18)$$

ou de forma similar, temos que

$$\frac{2 + \gamma}{\gamma} > R > 1. \quad (1.19)$$

Portanto, x_2^* é assintoticamente estável para $R \in \left(1, \frac{2+\gamma}{\gamma}\right)$, onde em $R = 1$ temos uma bifurcação de forquilha que pode ser observada na figura 1.2.

Na figura 1.2 temos o diagrama de bifurcação para o mapa *Logistic-like* dado pela equação (1.1) com $\gamma = 4$. Nesse caso usamos duas condições iniciais distintas, sendo a primeira positiva ($x_0 = 0,2$), correspondendo a região preta e a segunda negativa ($x_0 = -0,2$), correspondendo a região em vermelho. Isso acontece pelo fato do mapeamento, para $\gamma = 4$, ter grau 5 (ímpar) e retornar x com mesmo sinal de x_0 . No entanto, a partir de um certo valor de R , uma condição inicial negativa pode visitar uma região positiva e vice-versa. Dessa forma, para alguns valores de R , os estados marcados de vermelho e preto coexistem.

Analisando agora o caso em que γ é ímpar teremos apenas um ponto fixo, que é dado por $x_2^* = \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$. Aplicando esse ponto na equação (1.11), temos

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_2^* = [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}} = 1 + \gamma - \gamma R. \quad (1.20)$$

Da mesma maneira, para ser assintoticamente estável, esta equação deve satisfazer a

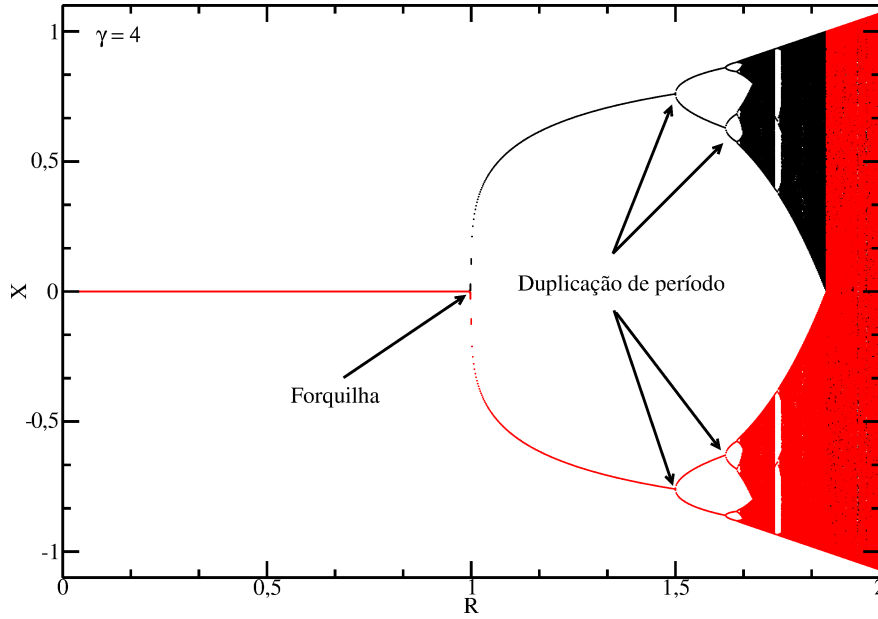


Figura 1.2: Diagrama de bifurcação para $\gamma = 4$, com bifurcações do tipo forquilha e duplicação de período.

equação (1.9), portanto

$$-1 < 1 + \gamma - \gamma R < 1, \quad (1.21)$$

resultando em

$$\frac{2 + \gamma}{\gamma} > R > 1. \quad (1.22)$$

Temos assim que, para o caso de γ ser ímpar, x_2^* é assintoticamente estável para $R \in \left(1, \frac{2+\gamma}{\gamma}\right)$. Para $R = 1$ ocorre uma bifurcação chamada transcítica, como pode ser observado na figura 1.3.

1.4 Cálculo do Expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais

O expoente de Lyapunov ou Número de Lyapunov evidencia um método muito eficiente para caracterizar se um sistema é caótico ou periódico. Tal expoente é utilizado como indicador de caos, sendo obtido a partir de uma distância das trajetórias de duas condições iniciais distintas. De acordo com [14] a definição de expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais, é dada da seguinte maneira.

Seja um mapa unidimensional dado por

$$x_{n+1} = F(x_n). \quad (1.23)$$

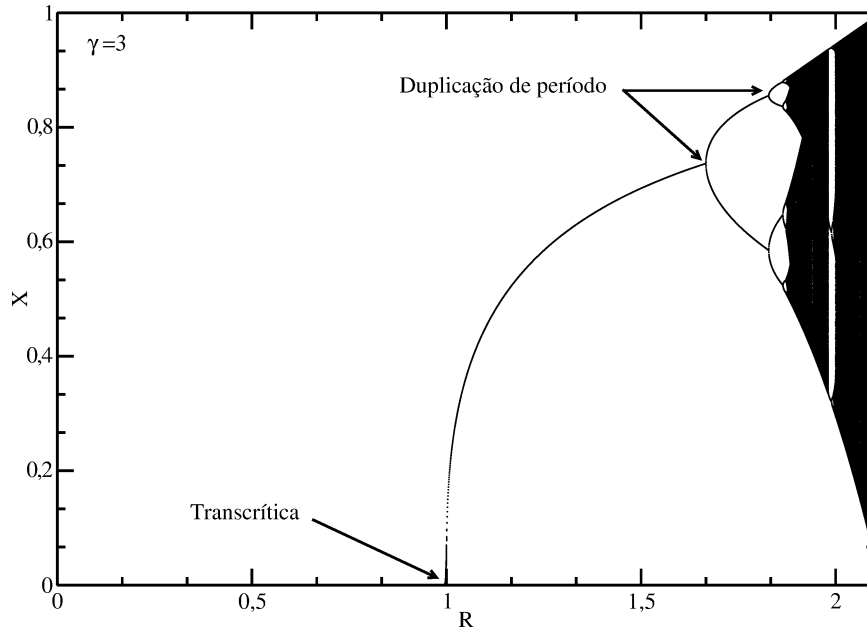


Figura 1.3: Diagrama de bifurcação para $\gamma = 3$, com bifurcações do tipo transcrítica e duplicação de período.

Consideremos dois pontos iniciais x_0 e y_0 e a distância inicial entre eles expressa por

$$D = |y_0 - x_0| . \quad (1.24)$$

Admitimos que após uma iteração a distância seja

$$D' = |y_1 - x_1| , \quad (1.25)$$

tal que

$$D' = e^L D , \quad (1.26)$$

onde L mede a taxa exponencial da expansão da distância D até a distância D' como resultado de uma única iteração. Temos que $x_1 = F(x_0)$ e $y_1 = F(y_0)$, onde a equação (1.25) pode ser reescrita como

$$D' = |F(y_0) - F(x_0)| , \quad (1.27)$$

que nos leva a seguinte expressão

$$D' = |F(x_0 + D) - F(x_0)| , \quad (1.28)$$

onde na última passagem foi utilizada a equação (1.24). Portanto, teremos que

$$e^L D = |F(x_0 + D) - F(x_0)| . \quad (1.29)$$

Iterando a equação (1.29) N vezes tem-se

$$L = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{F^N(x_0 + D) - F^N(x_0)}{D} \right|. \quad (1.30)$$

Sabendo que L depende de N e D , tomemos então uma distância infinitesimal ($D \rightarrow 0$) depois de um número infinito de iterações ($N \rightarrow \infty$). Desta maneira

$$\lambda(x_0) \equiv L(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{D \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(x_0 + D) - F^N(x_0)}{D} \right| \quad (1.31)$$

o que acarretará em

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{dF^N(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (1.32)$$

A equação (1.32) ainda pode ser escrita utilizando da regra da cadeia, ou seja,

$$\frac{d}{dx_0} F^N(x_0) = \frac{d}{dx_0} F(x_{N-1}) \frac{d}{dx_0} F(x_{N-2}) \cdots \frac{d}{dx_0} F(x_0) \quad (1.33)$$

sendo $x_i = F^i(x_0)$ o resultado da i -ésima iteração do mapa. Desta forma, substituindo a equação (1.33) na equação (1.32) chegamos que:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} \frac{d}{dx_0} f(x_i) \right|, \quad (1.34)$$

podendo ser reescrito da seguinte maneira

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |F'(x_i)|. \quad (1.35)$$

A equação (1.35) nos dá o expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais, o qual constitui uma medida de divergência exponencial ($\lambda > 0$) da órbita ou da contração ($\lambda < 0$) e quando ($\lambda = 0$) temos um ponto de bifurcação. Vale ressaltar que é possível fazer uma generalização para mapeamentos de dimensões maiores.

Calculado o expoente de Lyapunov, plotamos o gráfico representado pela figura 1.4, afim de compreendermos onde tal mapa apresenta regiões caóticas e periódicas(regulares). A figura 1.4 mostra o diagrama de bifurcação juntamente com o expoente de Lyapunov para o mapa *Logistic-like*, onde foram considerados dois valores distintos de γ , para a figura 1.4(a,c) $\gamma = 3$ e para a figura 1.4(b,d) $\gamma = 4$, onde as figuras 1.4(c,d) corresponde ao expoente de Lyapunov. Analisando a figura 1.4, nota-se que nos intervalos em que o expoente é menor que zero o sistema apresenta um comportamento regular/periódico, e quando é maior que zero o sistema apresenta um comportamento caótico, ou seja, perdemos a previsibilidade do sistema e por fim, quando o expoente de Lyapunov é igual a zero, ocorre as bifurcações do mapeamento em estudo.

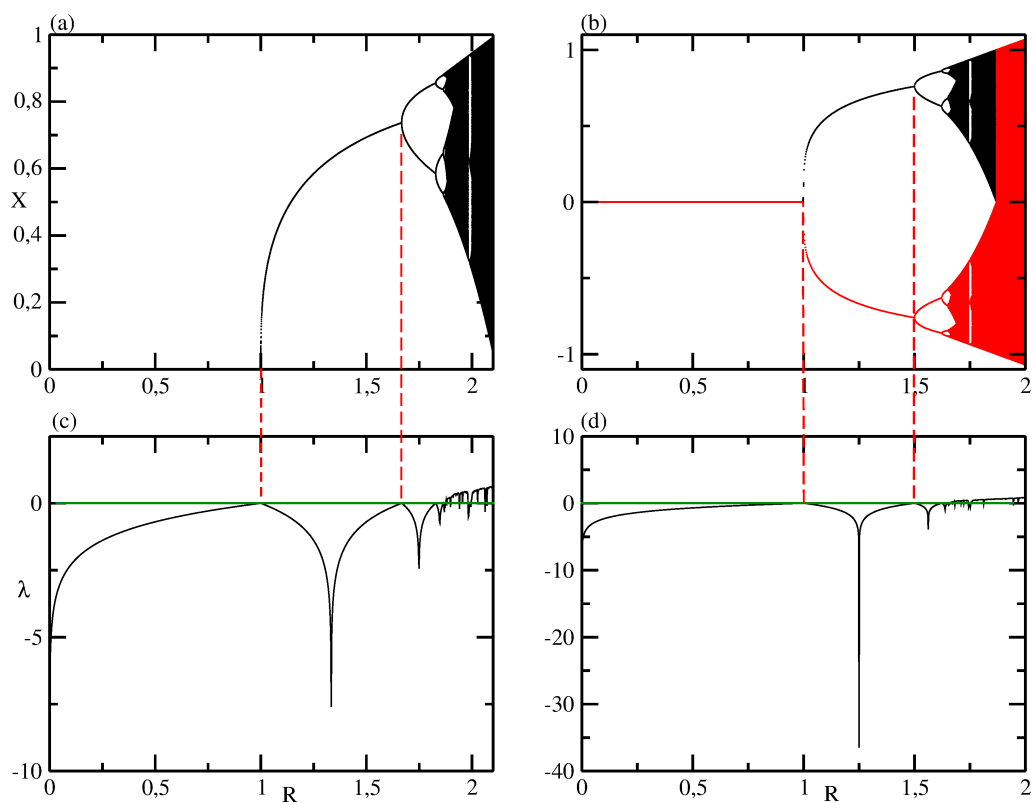


Figura 1.4: Em (a) e (b) temos o diagrama de bifurcação para diferentes valores de γ . Já em (c) e (d) temos os expoentes de Lyapunov. Para (a) e (c) temos $\gamma = 3$, porém para (b) e (d) temos $\gamma = 4$.

CAPÍTULO 2

PROPRIEDADES DINÂMICAS DO MAPA GAUSS

Nesse capítulo apresentaremos alguns resultados para o mapa Gauss, tais como, ponto fixo, análise de estabilidade e expoente de Lyapunov ou número de Lyapunov.

2.1 Sobre o mapeamento

Nesta seção, consideramos um mapa unidimensional dado da seguinte maneira:

$$x_{n+1} = e^{-\alpha x_n^\xi} + \beta, \quad (2.1)$$

sendo α , ξ e β parâmetros de controle do mapeamento em estudo e x uma variável dinâmica. Se tomarmos $\xi = 2$ obtemos o mapa Gauss, dado assim por

$$x_{n+1} = e^{-\alpha x_n^2} + \beta. \quad (2.2)$$

A equação gaussiana (2.2) é utilizada para estudar uma rede neural recorrente de um ciclo que é composta por um único neurônio caótico com auto-interação. Tal estudo pode ser observado em [24, 25].

2.2 Ponto fixo

Os pontos fixos deste mapa são obtidos utilizando a seguinte condição:

$$x^* = F(x^*). \quad (2.3)$$

Desta maneira, para encontrarmos os primeiros pontos fixos do mapa (2.2) devemos considerar que $x_{n+1} = x_n = x$, assim:

$$x = e^{-\alpha x^2} + \beta, \quad (2.4)$$

que pode ser reescrita como

$$e^{-\alpha x^2} + \beta - x = 0. \quad (2.5)$$

A equação (2.5) se trata de uma equação transcendental, tal tipo não se pode encontrar uma solução analítica. Desta forma, utilizaremos métodos numéricos para encontrar tais pontos. Primeiramente, podemos derivar a equação (2.2), sendo considerado $\alpha = 4.9$ e, em seguida, usamos a equação

$$\left(\frac{dx_{n+1}}{dx_n} \right)_{x_n=x^*} = 1. \quad (2.6)$$

Calculando a derivada da equação (2.6), temos

$$g(x) = -2\alpha x e^{-\alpha x^2} - 1. \quad (2.7)$$

A partir da equação (2.7) conseguimos encontrar os pontos fixos do mapeamento utilizando o método de Newton Raphson. Desta maneira, encontramos $x_1^* \approx -0,108$.

Encontrado o primeiro ponto fixo, podemos isolar β na equação (2.5) e encontramos onde está ocorrendo a primeira bifurcação do sistema. Feito isso, encontramos $\beta_1 \approx -1,05$, o índice 1 indica que estamos na primeira bifurcação da figura 2.1, caracterizada como bifurcação tangente.

Para encontrarmos nosso segundo ponto fixo, igualamos a equação (2.6) a -1 , dessa forma, chegamos que $x_2^* \approx 0,108$. Refazendo os calculos, temos que $\beta_2 \approx -0,83$, que indica que estamos na segunda bifurcação da figura 2.1, sendo esta caracterizada como duplicação de período.

2.3 Expoente de Lyapunov

Como visto na seção (1.4), o expoente de Lyapunov é calculado a partir de duas condições iniciais, onde ele nos mostra se tais condições se aproximam ou se afastam a partir de um certo número de iterações, caracterizando dessa maneira se o sistema é caótico ou não. Afim de verificar como o sistema se comporta, construímos o gráfico do expoente de Lyapunov para o mapa Gauss, conseguindo assim distinguir onde temos caos ou não.

A figura 2.2(a) mostra o diagrama de bifurcação para o mapa Gauss com $\alpha = 4,9$, enquanto a figura 2.2(b) mostra os expoentes de Lyapunov para o mapa em estudo, em que observamos os expoentes positivos e negativos. A linha verde ($\lambda = 0$) na figura 2.2(b),

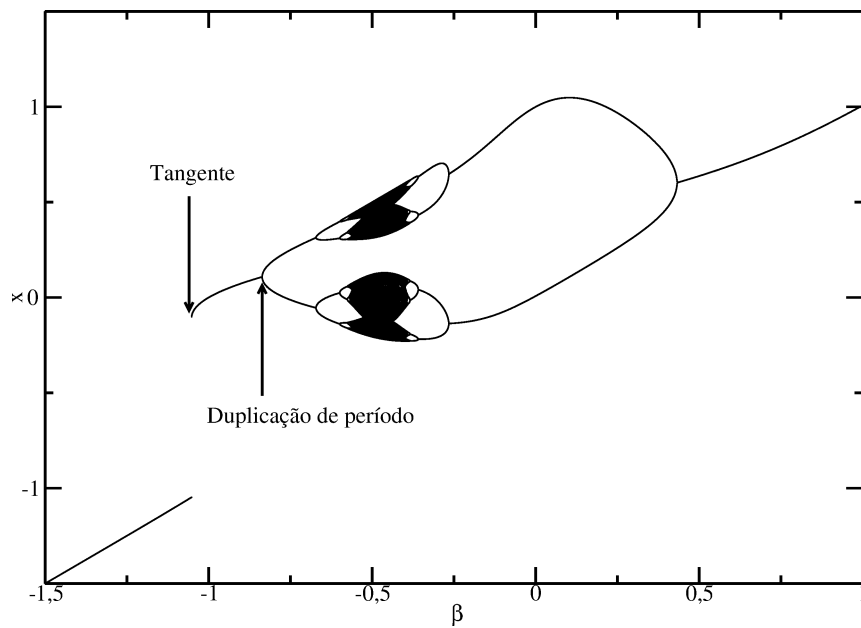
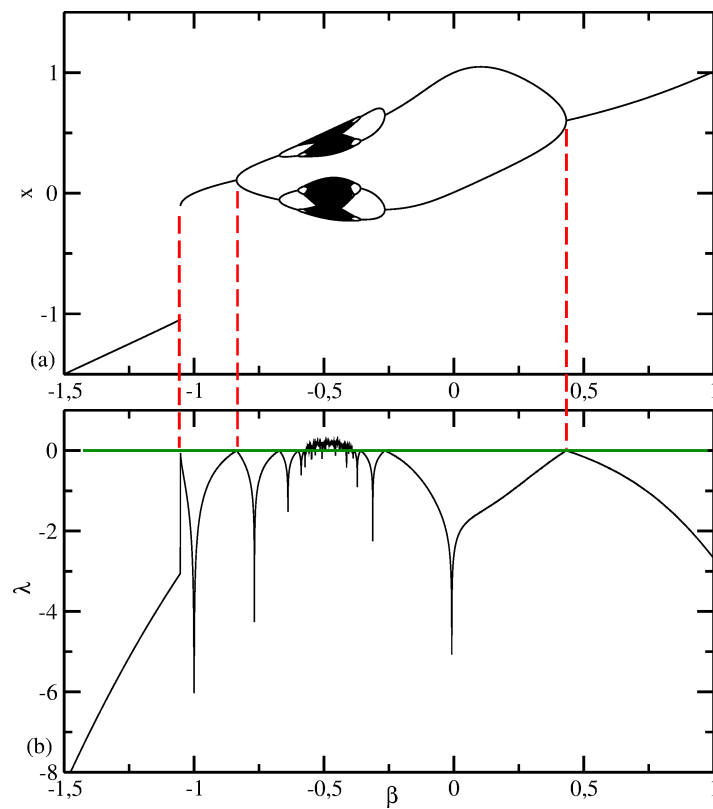

 Figura 2.1: Diagrama de bifurcação para o mapa Gauss, com $\alpha = 4.9$.


Figura 2.2: (a) Diagrama de bifurcação para o mapa Gauss, (b) Expoente de Lyapunov referente ao diagrama de bifurcação mostrado em (a).

quando tocada pela curva em preto, marca os pontos de bifurcações.

CAPÍTULO 3

COMPOSIÇÃO DOS MAPAS *LOGISTIC-LIKE* E GAUSS

Nesse capítulo será estudado a composição de dois mapeamentos unidimensionais, sendo eles os mapas *Logistic-like* e Gauss. Esse mapeamento nos mostra uma ampla gama de informações que podem ser vistas no artigo [26], dentre elas, é possível destacar as estruturas CSP (conjuntos complexos de periodicidade) e curvas cíclicas. Neste contexto, trazemos neste capítulo diagramas de bifurcações com seu respectivo expoentes de Lyapunov. Investigamos também o espaço de parâmetro para tal mapeamento, utilizando como ferramenta as órbitas extremas e superestáveis.

3.1 Composição dos mapas

Como visto na equação (1.1), o mapa *Logistic-like* é dado da seguinte maneira

$$x_c = x_n R(1 - x_n^\gamma), \quad (3.1)$$

sendo R e γ parâmetros de controle. O mapa Gauss é descrito como

$$x_{n+1} = e^{-\alpha x_c^2} + \beta. \quad (3.2)$$

onde α e β são parâmetros de controle do mapeamento. Fazendo a composição da equação (3.1) na equação (3.2) temos

$$x_{n+1} = e^{-\alpha [x_n R(1 - x_n^\gamma)]^2} + \beta, \quad (3.3)$$

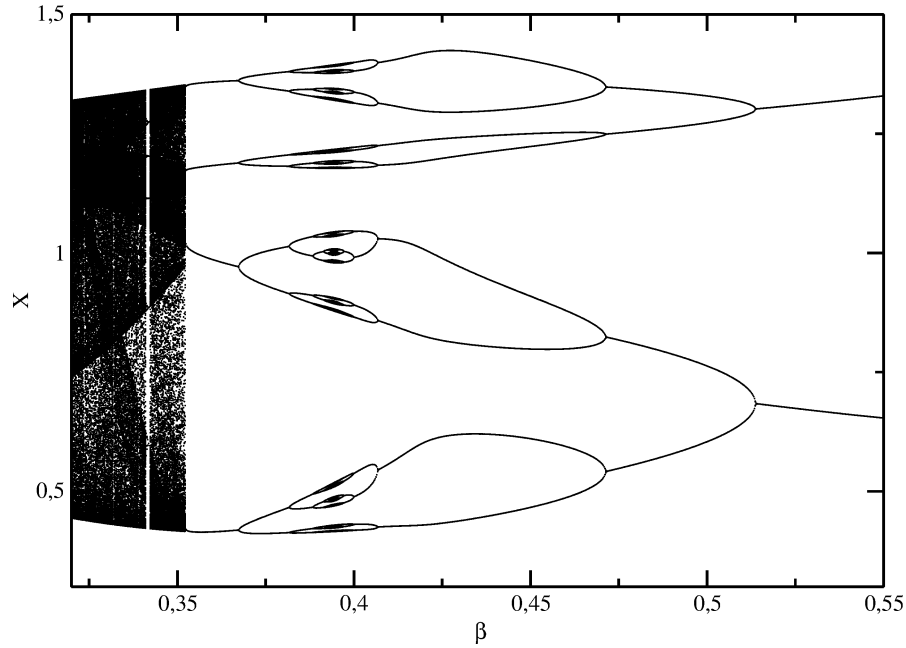


Figura 3.1: Diagrama de bifurcação para o mapa *Logistic-Gauss*, com $\gamma = 2,3$ e $\delta = 1,5$.

onde α, γ, β e R são parâmetros de controle do novo mapeamento. Tomemos $\delta = \alpha R^2$, sendo que δ é positivo e diferente de zero. Temos assim

$$x_{n+1} = e^{-\delta[x_n(1-x_n^\gamma)]^2} + \beta, \quad (3.4)$$

desta forma, temos três parâmetros de controle para o novo mapeamento sendo eles δ, γ e β . Chamaremos a composição dos mapas de *Logistic-Gauss* [26]. Vale ressaltar que tal mapeamento ainda é unidimensional.

Na figura 3.1 temos o diagrama de bifurcação para o mapeamento acoplado (3.4), utilizando os seguintes parâmetros de controle $\gamma = 2,3$ e $\delta = 1,5$. Neste diagrama observar-se que o novo mapeamento preserva algumas características dos dois modelos originais, tais como, áreas caóticas, janelas de periodicidade, entre outras.

3.2 Expoente de Lyapunov

Como a composição dos mapas *Logistic-like* e Gauss ainda se trata de um mapa unidimensional, podemos então utilizar o expoente de Lyapunov definido na seção (1.4) para denotarmos as regiões periódicas ou caóticas do sistema.

Na figura 3.2(a) temos o diagrama de bifurcação para os parâmetros de controle $\gamma = 2,3$ e $\delta = 1,5$, e na figura 3.2(b) corresponde ao expoente de Lyapunov para o composição dos mapas, sendo considerados os parâmetros citados anteriormente. As linhas pontilhadas em vermelho demarcam onde está havendo as bifurcações no diagrama. Tais bifurcações ocorrem onde o expoente de lyapunov é nulo (linha verde). Quando tal expoente é menor

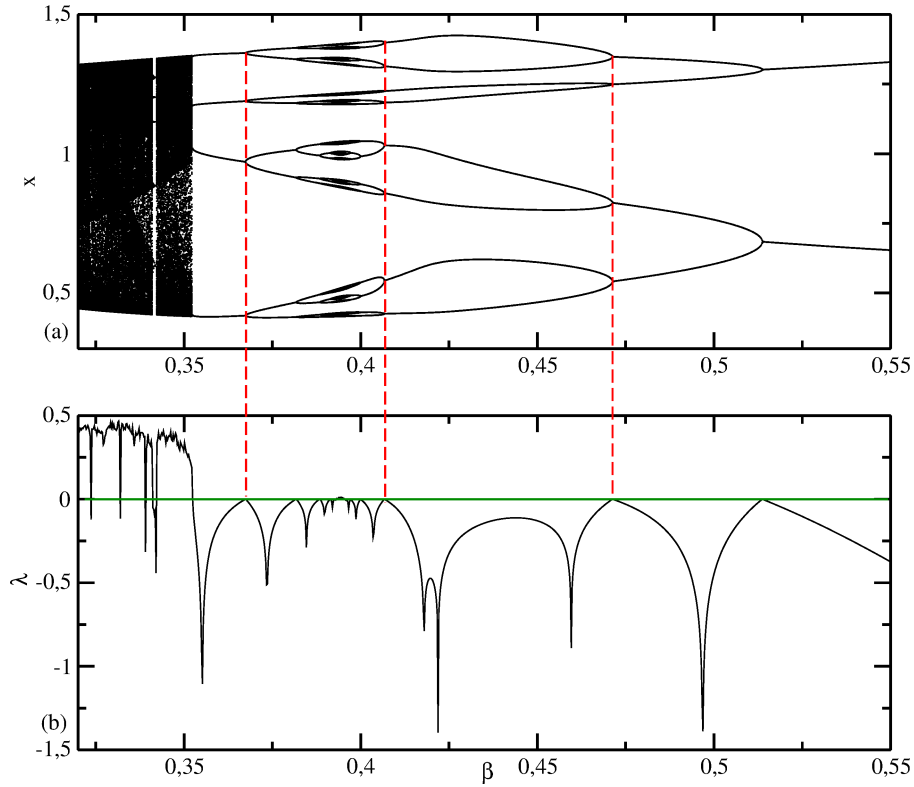


Figura 3.2: Em (a) temos o diagrama de bifurcação para o mapa *Logistic-Gauss*, com $\gamma = 2.3$ e $\delta = 1.5$ e (b) o expoente de Lyapunov para tais parâmetros.

que zero, as regiões são ditas periódicas. Em contra partida, valores maiores que zero correspondem a regiões caóticas. Nota-se então que o expoente de Lyapunov calculado na seção (1.4) funciona perfeitamente para o novo mapeamento.

Na próxima seção, utilizaremos o espaço de parâmetros para melhor compreender o que acontece com nosso sistema, onde aplicaremos o método das órbitas extremas e superestáveis para descrever o que ocorre ao variarmos um dos parâmetros de controle.

3.3 Espaço de Parâmetros

Uma ferramenta muito utilizada nos dias atuais em sistemas dinâmicos são os espaços de parâmetros. No entanto, para ser construído, o sistema precisa ter no mínimo dois parâmetros de controle, onde são variados juntamente, e para cada par de combinações, é calculado o expoente de Lyapunov.

Na figura 3.3 mostramos o espaço de parâmetros para o mapeamento (3.4). Consideramos uma grade de 1000 por 1000 valores distintos para δ e γ , onde $\beta = 0,1$ é um valor constante, $\delta \in [0,15]$, e $\gamma \in [0,80]$. Para cada combinação de (δ, γ) , o mapeamento foi iterado 10^3 vezes, após isso, o expoente de Lyapunov foi calculado para as próximas 10^3 iterações.

Este expoente de Lyapunov nos fornece informações importantes sobre a dinâmica da

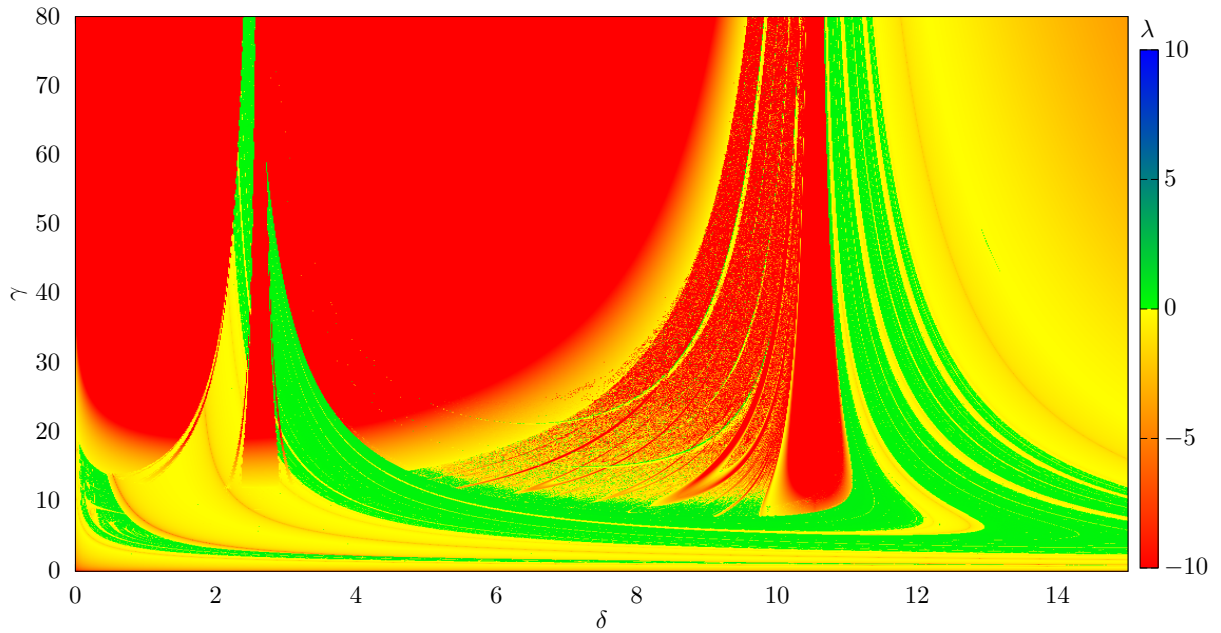


Figura 3.3: Espaço de parâmetro γ vs. δ com $\beta = 0,1$ e $x_0 = 0,2$. A paleta de cores representa o expoente de Lyapunov λ , onde as órbitas periódicas ($\lambda < 0$) são coloridas como as regiões vermelho/amarelo, enquanto ($\lambda > 0$) as órbitas caóticas recebem as cores verde/azul.

órbita. Por exemplo, na figura 3.3 temos uma paleta de cores que muda de vermelho para amarelo para expoentes Lyapunov negativos (órbitas periódicas), caso contrário, muda de verde para azul para expoentes Lyapunov positivos (órbitas caóticas). Nessa figura, as regiões periódicas estão inseridas nas regiões caóticas ($\lambda \ll 0$).

3.3.1 Órbitas extremas e Superestáveis

Quando falamos em espaço de parâmetros para mapeamentos unidimensionais, uma ferramenta muito utilizada para compreender seu comportamento são as órbitas extremas, sendo que tal método nos mostra claramente como são organizadas as estruturas que nele estão presentes.

Para melhor entender os próximos resultados, devemos saber o que é uma órbita. Tomemos uma condição inicial X_0 . Iterando o mapeamento estudado uma vez, temos $X_1 = F(X_0)$ (em outras palavras, aplicamos a transformação F uma vez). Seguindo essa ideia, temos $X_2 = F(F(X_0)) = F(X_1)$, $X_3 = F(F(F(X_0))) = F(X_2)$, e assim por diante. O conjunto de pontos $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ é então chamado de órbita. Desta maneira denotamos uma órbita extrema como trajetórias que conectam pontos de máximo e mínimos após u iterações, ou seja

$$X_{(i)} = F^{(u)}(X_{(j)}), \quad (3.5)$$

sendo $i \neq j$, onde i e j correspondem aos pontos de máximo e mínimo do sistema. Tais pontos, serão calculados mais a frente.

Enquanto uma órbita superestável é aquela que conecta um ponto de máximo ou mínimo a si própria após um certo numero de iterações. Portanto temos

$$X_{(i)} = F^{(u)}(X_{(i)}). \quad (3.6)$$

Portando para poder utilizar os dois mecanismo mencionados acima devemos encontrar os pontos de máximos e mínimos da equação (3.4), tal calculo será feito na próxima seção.

3.4 Pontos de Máximos e Mínimos

Para encontramos os pontos extremos (máximo e mínimo) do mapeamento, temos que calcular a primeira derivada e, posteriormente, iguala-la a zero. Portanto

$$\frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} = \frac{\partial(e^{-\delta[x_n(1-x_n^\gamma)]^2} + \beta)}{\partial X_n}, \quad (3.7)$$

que é igual a

$$\frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} = -2\delta x(1-x^\gamma)[1-(\gamma+1)]e^{-\delta[x(1-x^\gamma)]^2}. \quad (3.8)$$

Igualando o lado direito da equação (3.8) a zero, temos que

$$-2\delta x(1-x^\gamma)[1-(\gamma+1)x^\gamma]e^{-\delta[x(1-x^\gamma)]^2} = 0. \quad (3.9)$$

Para encontramos a solução da equação (3.9), vamos dividir em três casos. Primeiro

$$-2\delta x = 0 \Rightarrow x = 0. \quad (3.10)$$

O segundo caso é escrito como

$$(1-x^\gamma) = 0 \Rightarrow x^\gamma = 1 \Rightarrow x = 1. \quad (3.11)$$

Já para o terceiro caso, temos que

$$1-(\gamma+1)x^\gamma = 0, \quad (3.12)$$

que resulta em

$$x = (1+\gamma)^{\frac{-1}{\gamma}}. \quad (3.13)$$

Assim, das equações (3.10), (3.11) e (3.13), encontramos três extremos locais sendo

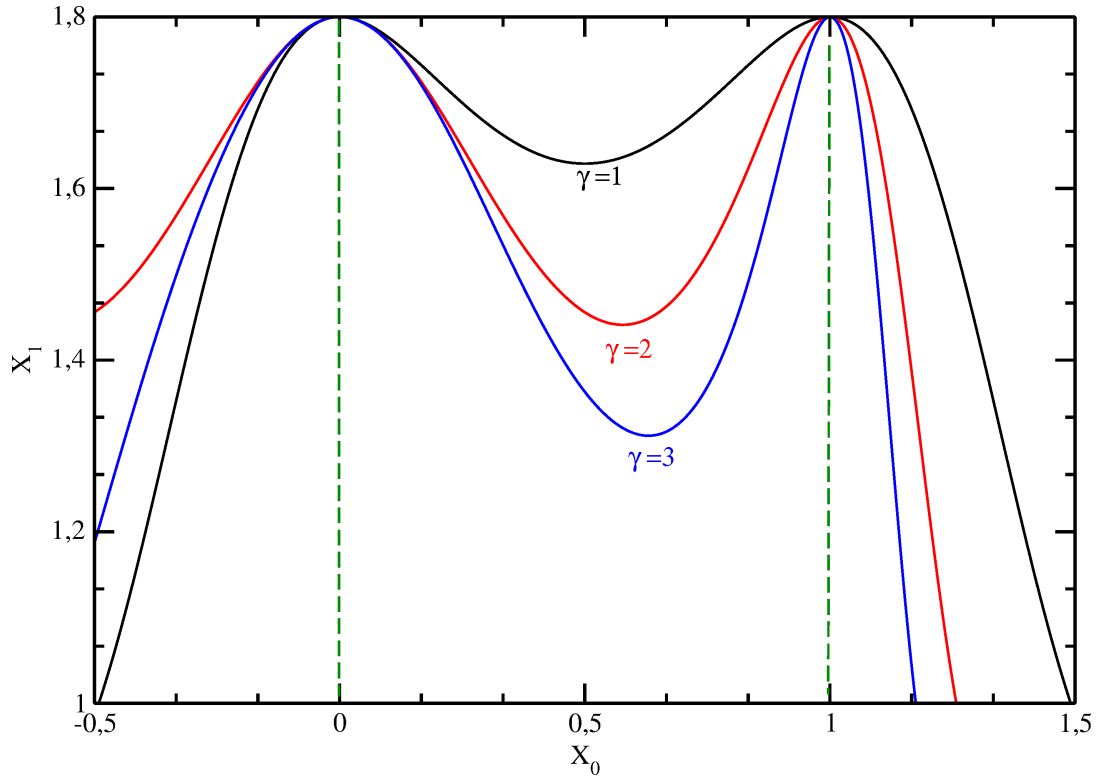


Figura 3.4: Gráfico X_1 vs. X_0 para diferentes valores de γ .

eles $X_l = 0$, $X_r = 1$ e $X_m = (1 + \gamma)^{-\frac{1}{\gamma}}$, sendo X_l e X_r pontos de máximo e X_m ponto de mínimo, desde que $\delta \neq 0$ e $\gamma \neq 0$.

Na figura 3.4 temos o gráfico X_1 vs. X_0 . Em tal figura variamos o valor de γ , onde a curva preta $\gamma = 1$, vermelha $\gamma = 2$ e azul $\gamma = 3$. Podemos notar que os pontos de máximo X_l e X_r não sofrem mudanças quando variamos o valor de γ , porém o ponto de mínimo X_m para cada valor de γ assume um valor diferente.

Calculados os pontos de máximo e mínimo do mapeamento, denotamos órbitas/curvas superestáveis como $[u]^i$, onde u é o período da órbita e o índice i é igual a l, m ou r , onde estes correspondem aos pontos de mínimos e máximos encontrados. Por exemplo na figura 3.5(a) temos a curva superestável $[3]^m$ e neste caso $u = 3$ e $i = m$. As órbitas/curvas extremas são denotadas por $(u)^{ij}$, onde u é o período da curva extrema, e os índices i e j correspondem aos pontos de máximo e mínimos encontrados. Se observarmos a figura 3.5(b), temos a curva extrema $(2)^{rm}$, ou seja $u = 2$, $i = r$ e $j = m$. Vale ressaltar que, diferente da notação de curva superestável que usamos os colchetes, para curvas extremas utilizamos de parênteses.

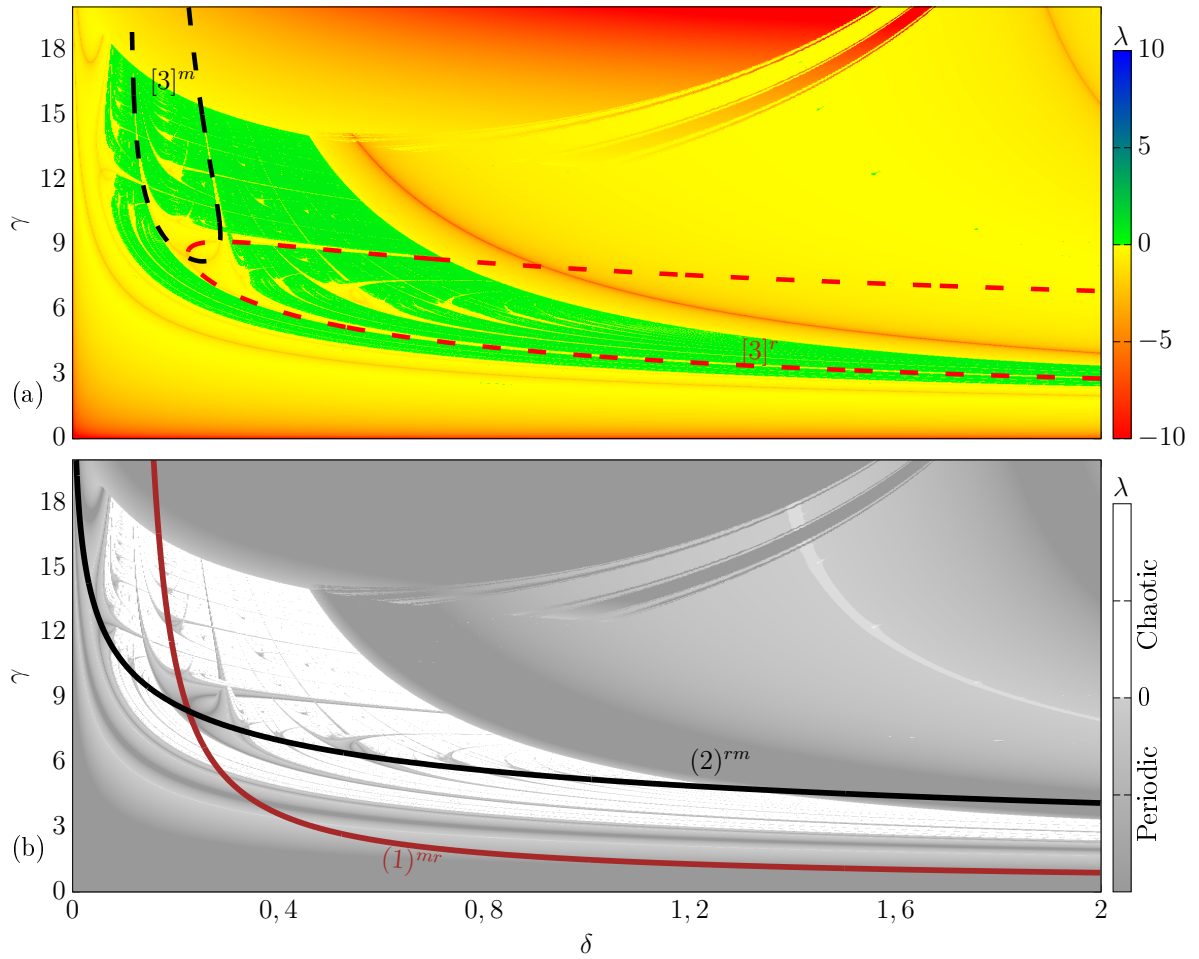


Figura 3.5: Espaço de parâmetros γ vs. δ , onde o esquema de cores representa o valor do expoente de Lyapunov. As linhas tracejadas em (a) são chamadas de curvas superestáveis enquanto as linhas em (b) são as curvas extremas.

3.5 Resultados numéricos

Nesta seção trazemos os resultados encontrados quando variamos o parâmetro de controle β . Começamos com o valor 0,1, e posteriormente finalizando com o valor 0,7.

3.5.1 Resultados para $\beta = 0,1$

Na figura 3.6(a) destacamos algumas curvas superestáveis, nomeadas como $[2]^r$, $[2]^m$, $[3]^r$, $[3]^m$, $[4]^r$ e $[4]^m$. Observe que todas essas curvas estão dentro de regiões periódicas, em uma região com valores negativos de λ . Podemos notar que as curvas superestáveis $[3]^r$ e $[3]^m$ se cruzam exatamente no centro de uma estrutura CSP.

Na figura 3.6(b), modificamos a paleta de cores: as estruturas periódicas são destacadas em cinza $\lambda < 0$, enquanto as cores brancas mostram regiões caóticas $\lambda > 0$. Na figura 3.6(b) mostramos algumas curvas extremas. Essas curvas nos fornecem informações importantes sobre o que está acontecendo em nosso espaço de parâmetros. Uma das características

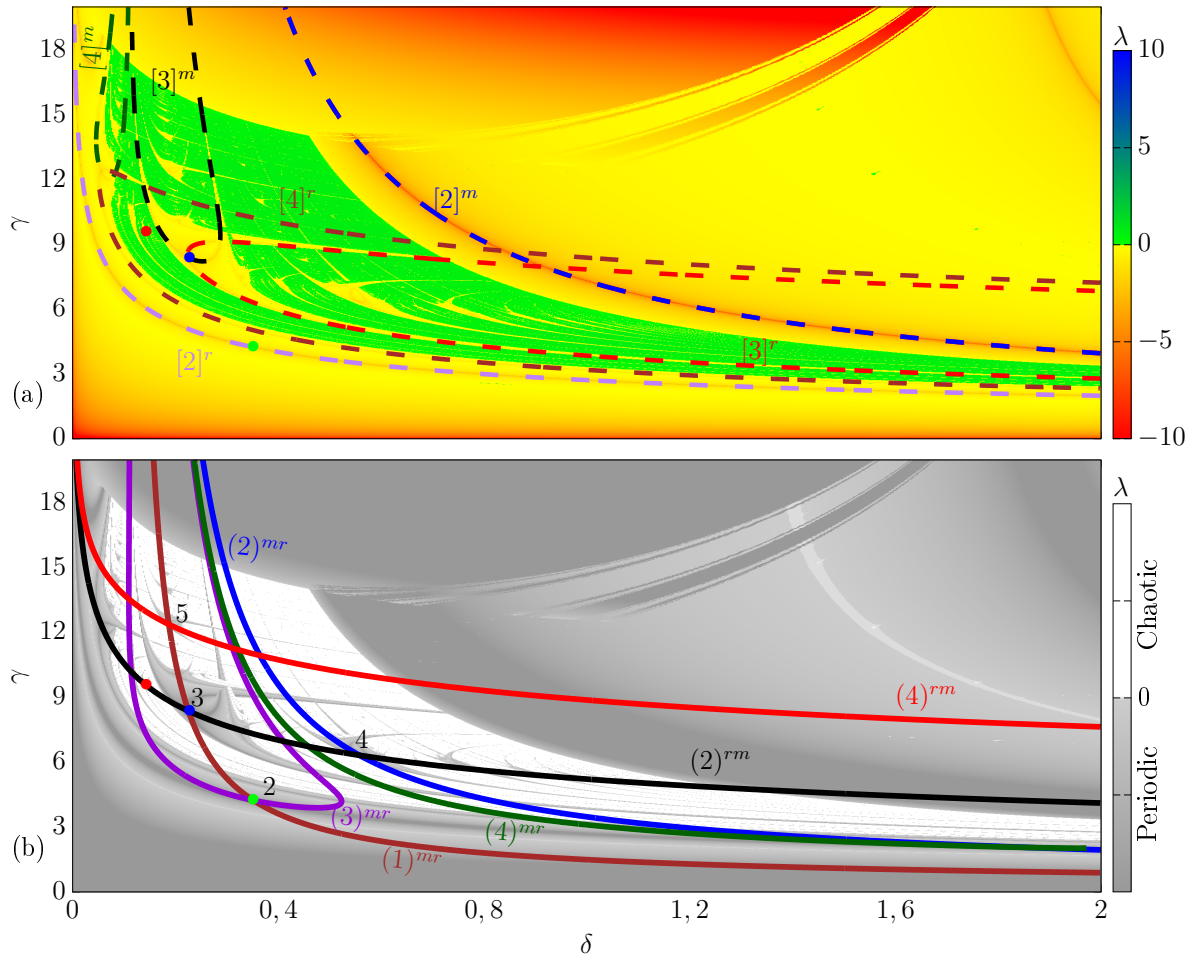


Figura 3.6: Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,1$ fixo. As linhas tracejadas em (a) são chamadas de curvas superestáveis enquanto as linhas em (b) são as curvas extremas. Os números destacados em (b) correspondem à periodicidade das estruturas CSP.

fundamentais das curvas extremas vem do fato de que a interseção entre elas sempre ocorre em regiões periódicas. Podemos notar isso ao acompanharmos a curva extrema $(1)^{mr}$ onde tal curva cruza com a curva $(2)^{rm}$, que está representada pelo ponto azul.

Para melhor compreender a diferença entre curvas extremas e superestáveis, consideramos o mapa de retorno X_0 vs. X_1 , que pode ser observado na figura 3.7. Para as figuras 3.7(a,b) foi considerado um conjunto de parâmetros de controle, sendo eles: $\delta = 0,2253$, $\gamma = 8,3763$ e $\beta = 0,1$, onde esses valores correspondem ao ponto azul nas figuras 3.6(a,b).

A figura 3.7(a) mostra um exemplo de curva extrema que conecta um máximo local $X_0 = X_{(r)}$ a um mínimo $X_2 = X_{(m)}$ após iterar o mapeamento duas vezes, então essa curva é chamada de $(2)^{rm}$. Na figura 3.7(b) observamos o que acontece quando iteramos o mapeamento após atingir o mínimo local $X_{(m)}$. Pode-se observar que a órbita azul, após uma iteração, retorna ao máximo local $X_{(r)}$, onde temos um exemplo de extremo denotado por $(1)^{mr}$. Além disso, pode-se notar que esta órbita sai de um máximo em $X_{(r)}$ e após três iterações retorna à mesma posição, então, temos uma superestável $[3]^r$. Algo semelhante

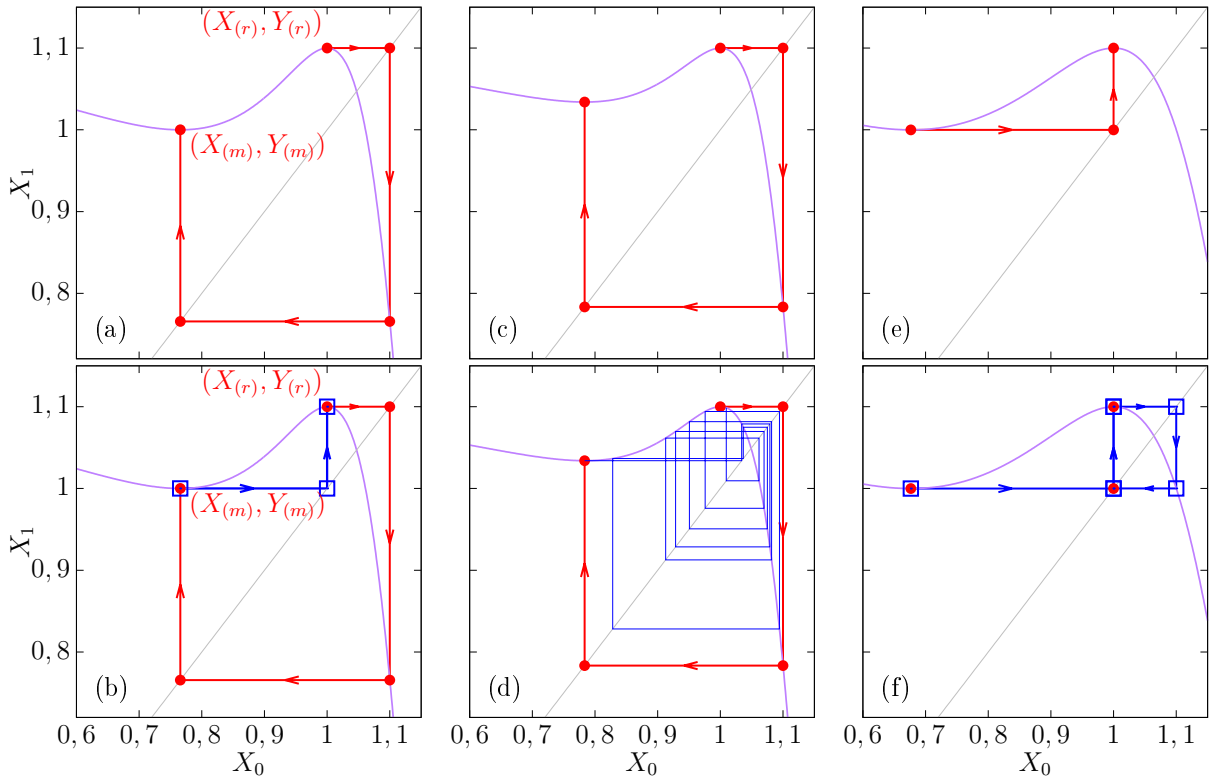


Figura 3.7: Mapa de retorno X_1 vs. X_0 , sendo (a,b) correspondente ao ponto azul, (c,d) ao ponto vermelho e (e,f) ao ponto verde, pontos estes que podem ser observados na figura 3.6.

acontece quando consideramos $X_0 = X_{(m)}$. Se iterarmos o mapeamento três vezes, veremos que a trajetória retorna ao mínimo em $X_{(m)}$, então temos uma curva superestável $[3]^m$. Portanto, a figura 3.7(b) nos mostra que existe a coexistência de duas órbitas extremas e duas superestáveis.

Podemos resumir o que acontece nas figuras 3.7(a,b) pela seguinte propriedade:

Propriedade 1. Sejam $(u)^{ij}$ e $(v)^{ji}$ duas curvas extremas com $i \neq j$. Se essas curvas extremas coexistem para uma determinada combinação de parâmetros de controle, é correto dizer que essas curvas também coexistem com duas outras curvas superestáveis $[u + v]^i$ e $[u + v]^j$. A seguinte expressão pode resumir essa propriedade:

$$(u)^{ij} + (v)^{ji} \xrightarrow{\text{cruza}} \begin{cases} [u + v]^i \\ \text{e} \\ [u + v]^j \end{cases} \quad (3.14)$$

Observe que o período das duas curvas superestáveis é a soma do período de ambos os extremos.

Se retornarmos às figuras 3.7(a,b) e considerando a Propriedade 1, podemos ver que os dois extremos $(2)^{rm}$ e $(1)^{mr}$ coexistem com duas curvas superestáveis de período 3, denominadas como $[3]^m$ e $[3]^r$, o que concorda com a equação (3.14).

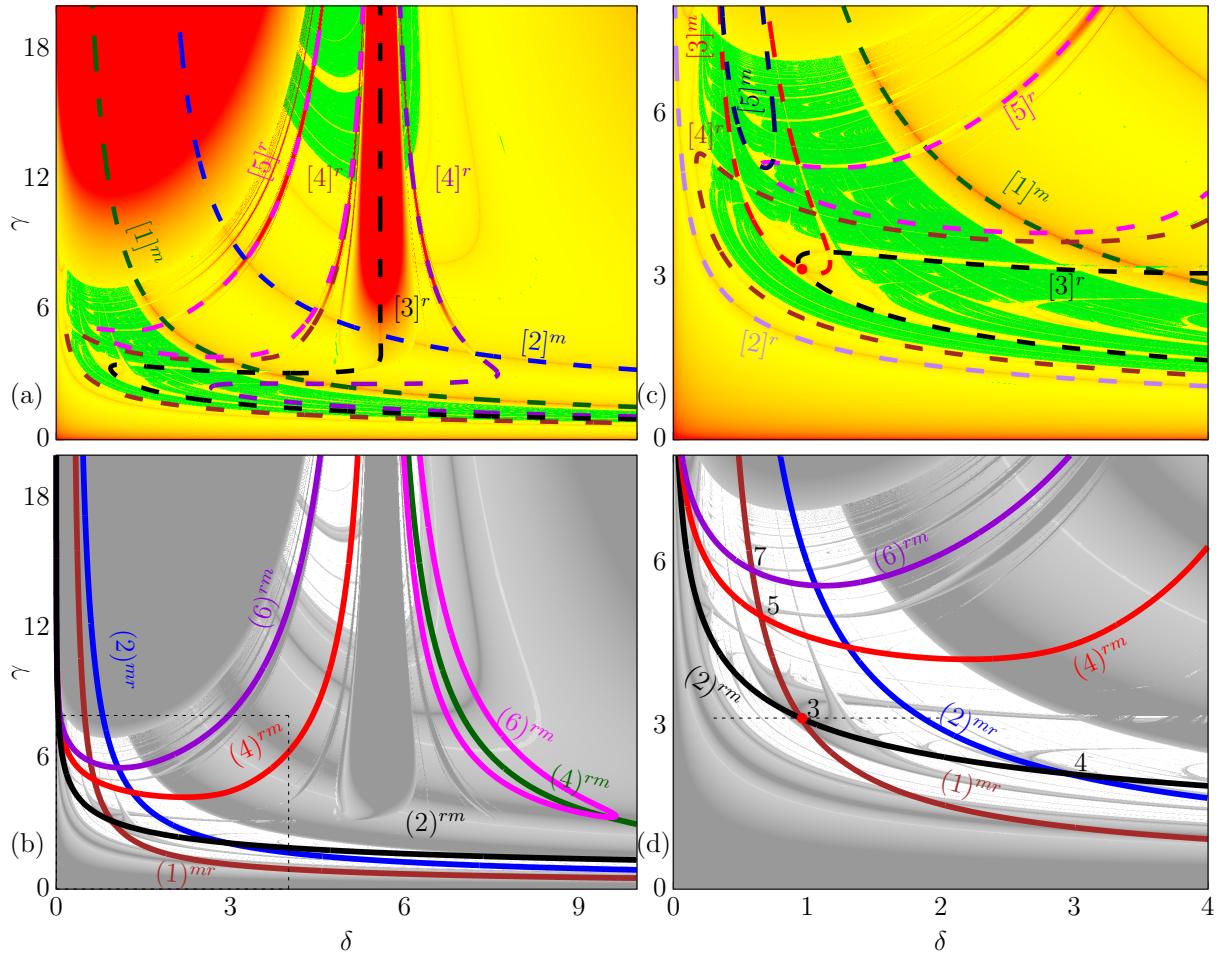


Figura 3.8: Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,2$ fixo.

Para gerar as figuras 3.7(c,d) foram considerados os seguintes parâmetros: $\delta = 0,1353$, $\gamma = 9,7165$ e $\beta = 0,1$ (esses parâmetros referem-se ao ponto vermelho no espaço de parâmetros mostrado nas figuras 3.6(a,b)). Na figura 3.7(c) a curva $(2)^{rm}$ é mostrada em vermelho, enquanto na figura 3.7(d) mostramos o que acontece quando iteramos o mapa algumas vezes. Nesse caso, as linhas azuis representam um atrator caótico. Portanto, essa combinação de parâmetros de controle nos leva à coexistência de uma órbita extrema com um atrator caótico. Observe que a Propriedade 1 não está errada porque temos apenas uma curva extrema.

Nas figuras 3.7(e,f) tomamos os seguintes parâmetros: $\delta = 0,35208$, $\gamma = 4,23532$ e $\beta = 0,1$ (onde esses parâmetros se referem ao ponto verde na (3.6)). A figura 3.7(e) mostra a curva $(1)^{mr}$ em vermelho, então essa curva conecta um mínimo $X_0 = X_{(m)}$ a um máximo $X_1 = X_{(r)}$ após uma iteração. Na figura 3.7(f) temos a curva $(3)^{mr}$ em azul, que após três iterações, deixa um mínimo $X_{(m)}$ e atinge um máximo $X_{(r)}$. Observe que existe um retângulo fechado que conecta o máximo local em $X_{(r)}$ a si mesmo após duas iterações. Este é um exemplo de órbita superestável nomeada como $[2]^r$. Com este exemplo em mente, propomos a seguinte propriedade:

Propriedade 2. Sejam $(u)^{ij}$ e $(v)^{ij}$ duas curvas extremas com $i \neq j$. Se essas curvas extremas coexistem para uma determinada combinação de parâmetros de controle, é correto dizer que essas curvas também coexistem com outra curva superestável $[uv]^j$. A seguinte expressão pode resumir esta propriedade:

$$(u)^{ij} - (v)^{ij} \xrightarrow{\text{cruza}} [u - v]^j. \quad (3.15)$$

Observe que o período da curva superestável é o resultado da subtração do período de ambas as curvas extremas.

Para resumir, nas figuras 3.7(e,f) temos a coexistência das curvas extremas $(3)^{mr}$ e $(1)^{mr}$ com a superestável $[2]^r$, que obedece à seguinte expressão:

$$(3)^{mr} - (1)^{mr} \xrightarrow{\text{cruza}} [2]^r \quad (3.16)$$

Observe que as Propriedades 1 e 2 são diferentes porque na primeira temos a curva extrema $(u)^{ij}$ cruzando $(v)^{ji}$, enquanto na segunda temos $(u)^{ij}$ cruzando o extremo $(v)^{ij}$.

3.5.2 Resultados para $\beta = 0,2$

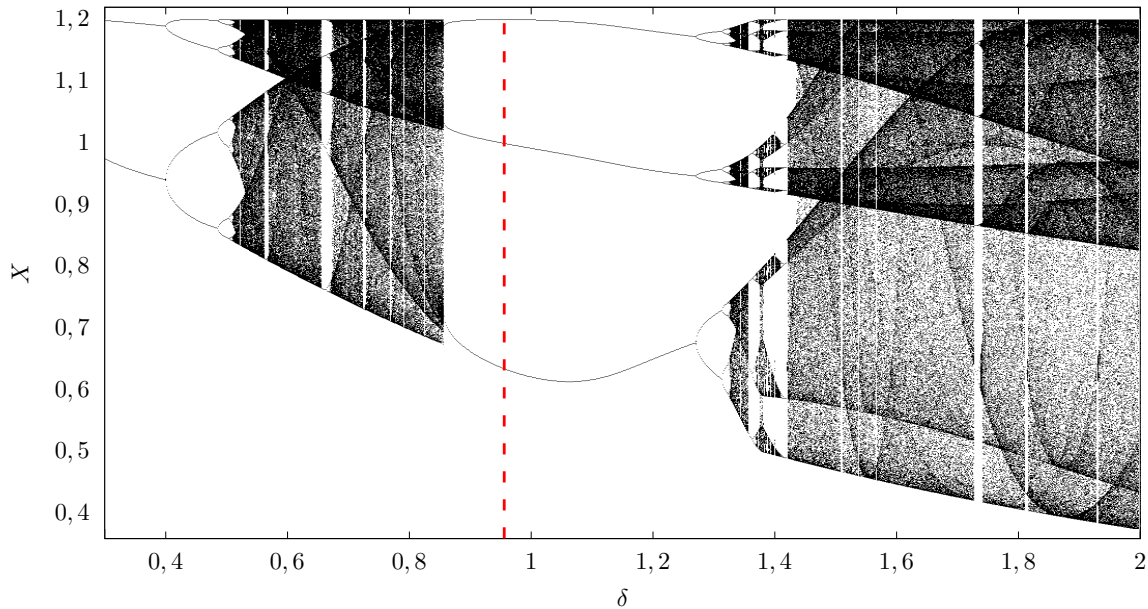


Figura 3.9: Diagrama de bifurcação X vs. β seguindo a linha tracejada mostrada na figura 3.8(d). A linha tracejada vermelha corresponde ao círculo vermelho destacado na figura 3.8(d).

Na figura 3.8, aumentamos o valor de β para 0,2. Podemos ver algumas curvas superestáveis como a curva $[3]^r$, que está inserida em uma região vermelha (região periódica). Tal curva, em ambos os lados (esquerdo e direito) é seguida por duas curvas superestáveis $[4]^r$. À esquerda delas, podemos notar duas curvas superestáveis, $[1]^m$ e $[2]^m$, que vão para a

mesma região vermelha (região periódica). A figura 3.8(b) mostra um gráfico semelhante da figura 3.8(a), mas agora usando uma paleta de cores diferente para distinguir regiões caóticas e periódicas usando a mesma cor da paleta de cores da (3.6)(b). Na figura 3.8(b) destacamos algumas curvas extremas, denominadas como $(1)^{mr}$, $(2)^{mr}$, $(2)^{rm}$, $(4)^{rm}$ e $(6)^{rm}$.

As figuras 3.8(c,d) referem-se à região marcada por um retângulo no canto inferior esquerdo da figura 3.8(b). Na figura 3.8(d) temos as seguintes curvas extremas: $(1)^{mr}$, $(2)^{mr}$, $(2)^{rm}$, $(4)^{rm}$ e $(6)^{rm}$. Também, nesta figura, é possível notar o alinhamento das estruturas CSP a partir da curva extrema $(1)^{mr}$, seguida das estruturas CSP com período 3, 5, 7 e assim sucessivamente acumulando em um domínio de periodicidade 2 (canto superior esquerdo da figura). Observe que, na figura 3.8(d), as curvas extremas $(1)^{mr}$ e $(2)^{rm}$ se cruzam em uma estrutura CSP de período 3 (ponto de cor vermelha). Essa interseção, de acordo com a Propriedade 1, ocorre no local exato onde também coexistem duas curvas superestáveis, que são denominadas como $[3]^r$ e $[3]^m$ na figura 3.8(c).

A figura 3.9 mostra o diagrama de bifurcação X vs. β para a linha tracejada na figura 3.8(d). Nesta figura, podemos ver que, da esquerda para a direita, há duplicações do período que iniciam com periodicidade 2, duplicam posteriormente para o período 4, 8 e assim por diante, seguindo essa sequência até acumular em um atrator caótico. Algumas janelas de periodicidade surgem entre atratores caóticos, correspondendo às nossas estruturas CSP. A linha tracejada vermelha mostra uma região de periodicidade 3, onde tal linha corresponde exatamente à interseção das curvas extremas $(2)^{rm}$ e $(1)^{mr}$, denotadas pelo ponto vermelho da figura 3.8(d).

3.5.3 Resultados para $\beta = 0,3$

Agora alteramos o valor de β para 0,3 e o resultado é mostrado nas figuras 3.10(a,b). Na figura 3.10(b) podemos ver o alinhamento dos CSPs, seguindo a curva extrema $(1)^{mr}$. Nessa figura, ainda temos outro alinhamento de CSPs com periodicidade 4, 6, 8 e assim por diante, que são organizados pela curva extrema $(2)^{mr}$. Essas estruturas seguem uma sequência de duplicações de período, levando ao caos através da Universalidade de Feigenbaum [27]. Na figura 3.10(a) podemos ver a interseção das curvas extremas $[3]^r$ com $[3]^m$ e $[4]^r$ com $[4]^m$, sendo ambas as interseções estruturas CSP com periodicidade 3 e 4, respectivamente.

3.5.4 Resultados para $\beta = 0,5$

A figura 3.11 considera $\beta = 0,5$, onde na figura 3.11(b) podemos notar a sequência de adição de período de CSPs seguindo a curva extrema $(2)^{mr}$, com periodicidades 6, 8, 10 e assim por diante, sempre somando duas unidades a periodicidade anterior. Destacamos também o cruzamento das curvas extremas $(1)^{mr}$ e $(4)^{rm}$, que ocorre em uma CSP de período 5. Observe que, de acordo com a Propriedade 1, essas curvas também interceptam duas curvas superestáveis, denominadas como $[5]^r$ e $[5]^m$, que podem ser observadas na

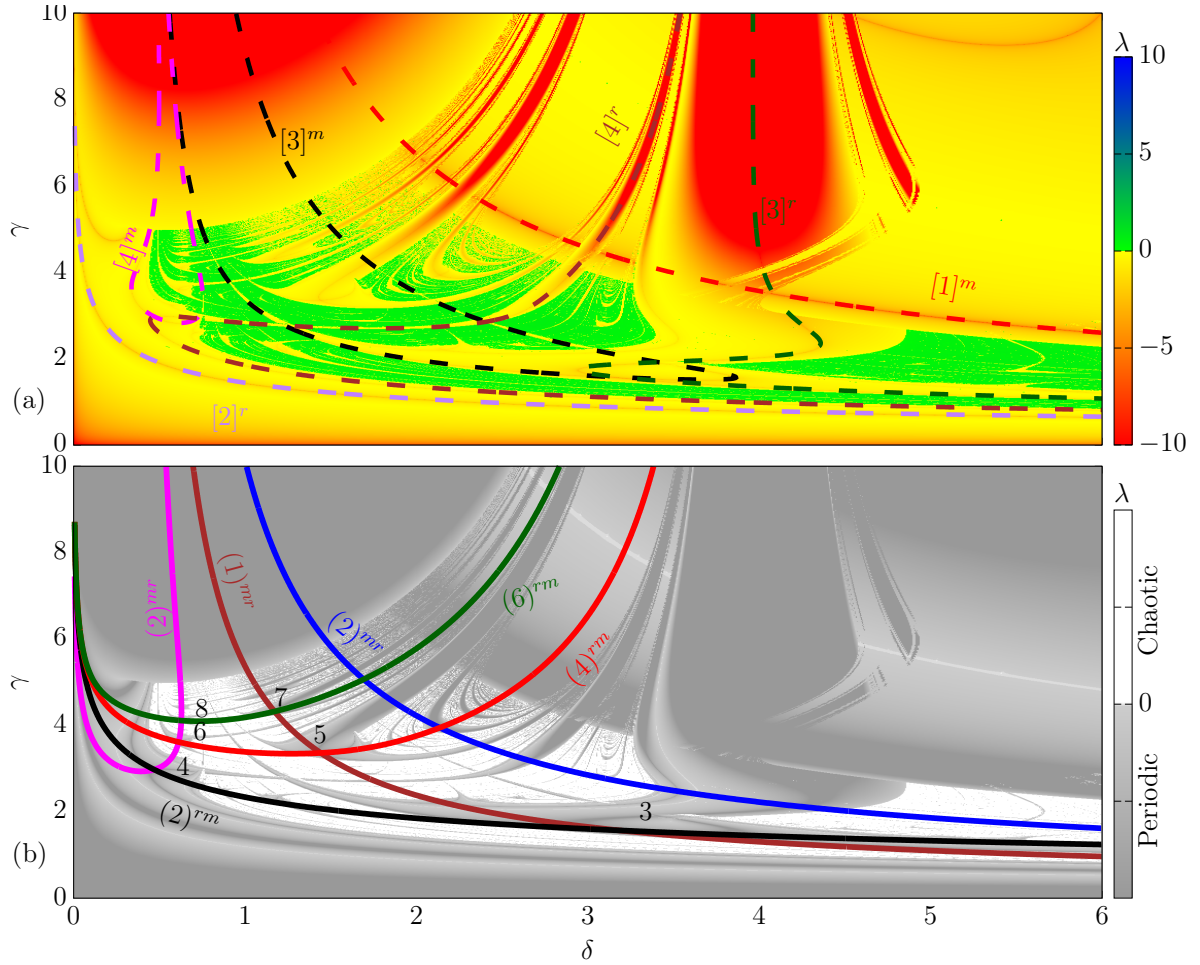

 Figura 3.10: Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,3$ fixo.

figura 3.11(a) pelo ponto azul.

A figura 3.11(a) nos mostra curvas superestáveis interessantes, como $[5]^r$, $[6]^r$ e $[8]^r$, onde todas essas curvas estão inseridas em regiões de cor vermelho intenso (regiões periódicas). Ainda temos as curvas $[6]^m$ e $[8]^m$ que se sobrepõem a partir de um determinado ponto.

Na figura 3.12 mostramos gráficos de X_1 vs. X_0 ao considerar as interseções mostradas na figura 3.11. Na figura 3.12(a) os seguintes parâmetros foram definidos: $\delta = 1,7645$, $\gamma = 3,5722$ e $\beta = 0,5$, onde esses valores correspondem ao círculo preto na figura 3.11(a,b). Nesta figura, mostramos a curva extrema $(4)^{rm}$ em vermelho, que conecta um máximo local $X_0 = X_r$ a um mínimo local X_m após quatro iterações. Em azul, mostramos a curva extrema $(2)^{mr}$, onde esta curva deixa um mínimo local X_m e atinge um máximo em X_r após iterar o mapeamento duas vezes. O fim do extremo $(2)^{mr}$ ocorre no início da curva extrema $(4)^{rm}$, então temos uma órbita fechada de período 6. Nesse cruzamento, as curvas superestáveis $[6]^m$ e $[6]^r$ coexistem, como visto na figura 3.11(a). É importante enfatizar que este resultado está de acordo com a Propriedade 1. Portanto, temos que

$$(4)^{rm} + (2)^{mr} \xrightarrow{\text{cruza}} [6]^r \text{ e } [6]^m \quad (3.17)$$

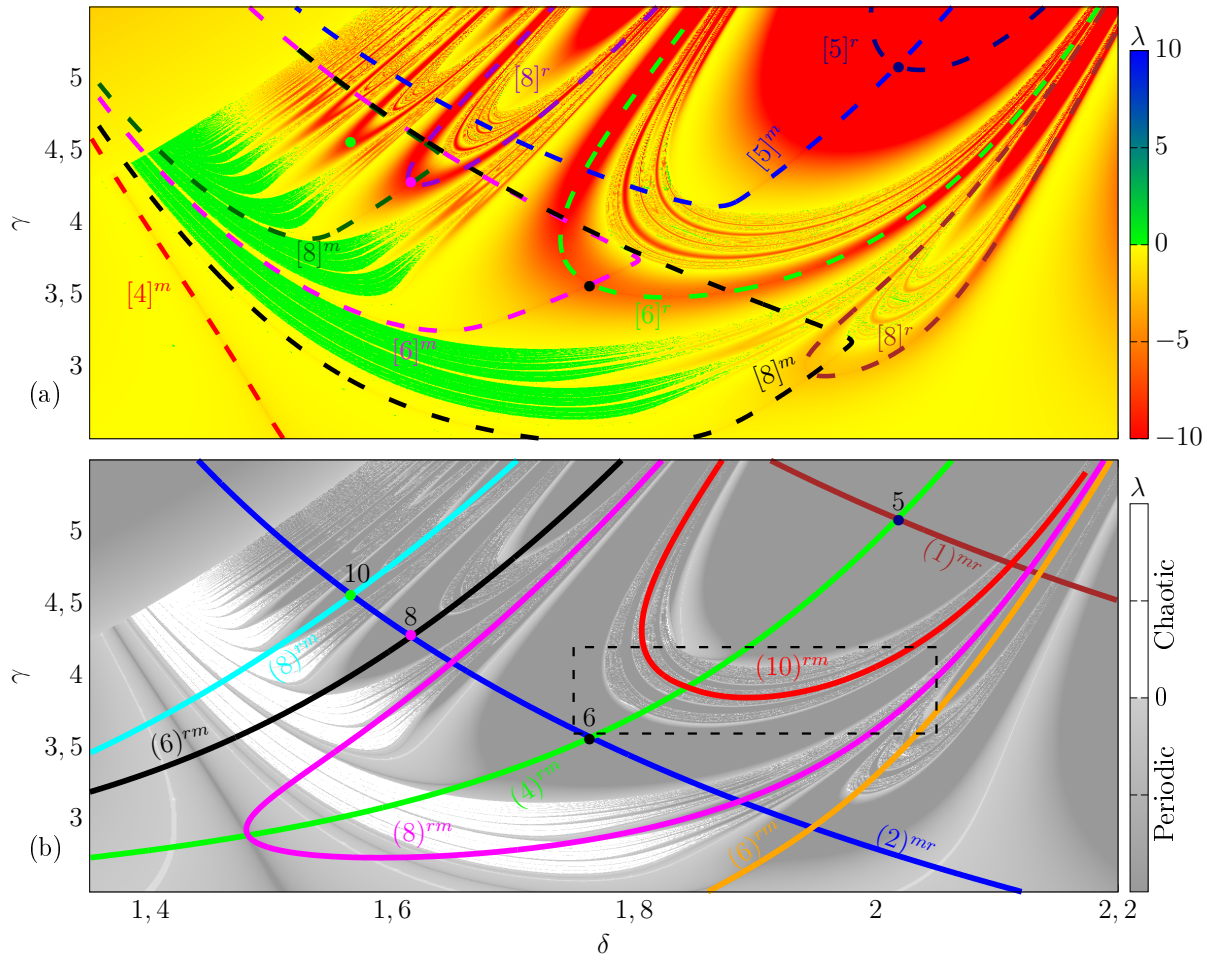


Figura 3.11: Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,5$ fixo.

Na figura 3.12(b), foram considerados os seguintes parâmetros: $\delta = 1,6156$, $\gamma = 4,2739$ e $\beta = 0,5$, que correspondem ao círculo magenta da figura 3.11(a,b). Destacamos, nesta figura, a curva extrema $(6)^{rm}$ em vermelho, onde esta curva extrema deixa um máximo local $X_0 = X_r$ e, após seis iterações, atinge um mínimo local X_m . Em azul, temos a curva extrema $(2)^{mr}$, e esta curva tem o mesmo comportamento descrito na figura 3.12(a). A união dos dois extremos cria uma órbita fechada com período 8. Portanto, a interseção das duas curvas extremas ocorre na mesma posição da interseção entre as curvas superestáveis $[8]^r$ e $[8]^m$.

Na figura 3.12(c) foi considerado os seguintes parâmetros: $\delta = 1,5668$, $\gamma = 4,5606$ e $\beta = 0,5$, parâmetros estes que correspondem aos círculos verdes nas figuras 3.11(a,b). Em vermelho destacamos a curva extrema $(8)^{rm}$, ou seja, após oito iterações, essa órbita passa de um máximo local em $X_{(r)}$ para um mínimo local $X_{(m)}$. Em azul destacamos a curva $(2)^{mr}$ e esta curva se comporta de forma análoga conforme discutido na figura 3.12(a,b). A união dessas duas curvas extremas (vermelho e azul) cria uma órbita fechada, onde, de

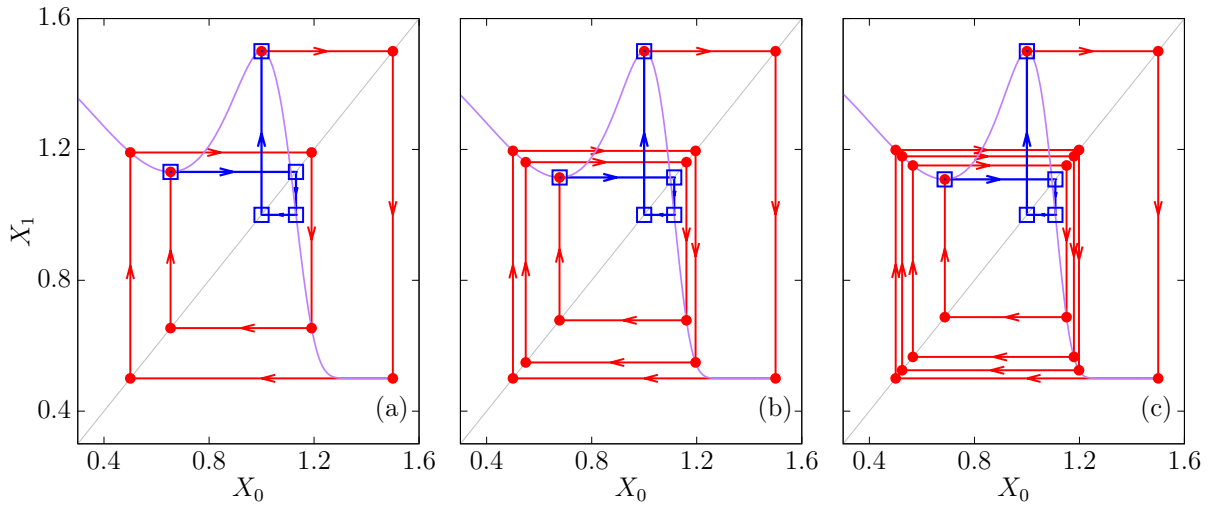


Figura 3.12: Mapa de retorno X_1 vs. X_0 , sendo (a) correspondente ao ponto preto, (b) ao ponto magenta e (c) ao ponto verde, pontos estes que podem ser observados na figura 3.11.

acordo com a Propriedade 1, temos

$$(8)^{rm} + (2)^{mr} \xrightarrow{\text{cruza}} [10]^r \text{ e } [10]^m. \quad (3.18)$$

Então, temos uma CSP de período 10.

A figura 3.13 é uma ampliação do retângulo pontilhado mostrado na figura 3.11. Esta figura nos dá uma visão melhor do que acontece naquela região. Na figura 3.13(b) temos a curva extrema $(4)^{rm}$, onde esta curva cruza duas outras curvas extremas, denominadas como $(3)^{mr}$ e $(5)^{mr}$. Pode-se ver mais claramente, na figura 3.13(a), que temos a interseção das curvas superestáveis $[7]^r$ com $[7]^m$ e também da interseção das curvas $[9]^r$ com $[9]^m$, obedecendo novamente a Propriedade 1.

Na figura 3.14 destacamos o diagrama de bifurcação X vs. β ao seguir a curva extrema $(4)^{rm}$ (mostrada na figura 3.13(b)). Nesta figura, da esquerda para a direita, pode-se observar que nosso diagrama começa com o período 6, o que confirma o que pode ser visto na figura 3.13(a), onde a curva superestável $[6]^m$ passa pelo canto inferior esquerdo. Após aumentar o valor de δ , entramos em regiões caóticas com algumas janelas de periodicidade, até chegar a uma região com período 7, onde esta região é mostrada como uma linha tracejada preta. Observe que esta linha corresponde ao círculo preto na figura 3.13(a,b). Após esta região, entramos novamente em atratores caóticos com janelas de periodicidade até atingir uma região de período 9, que é plotada como a linha tracejada verde. Esta linha corresponde ao círculo verde na figura 3.13(a,b).

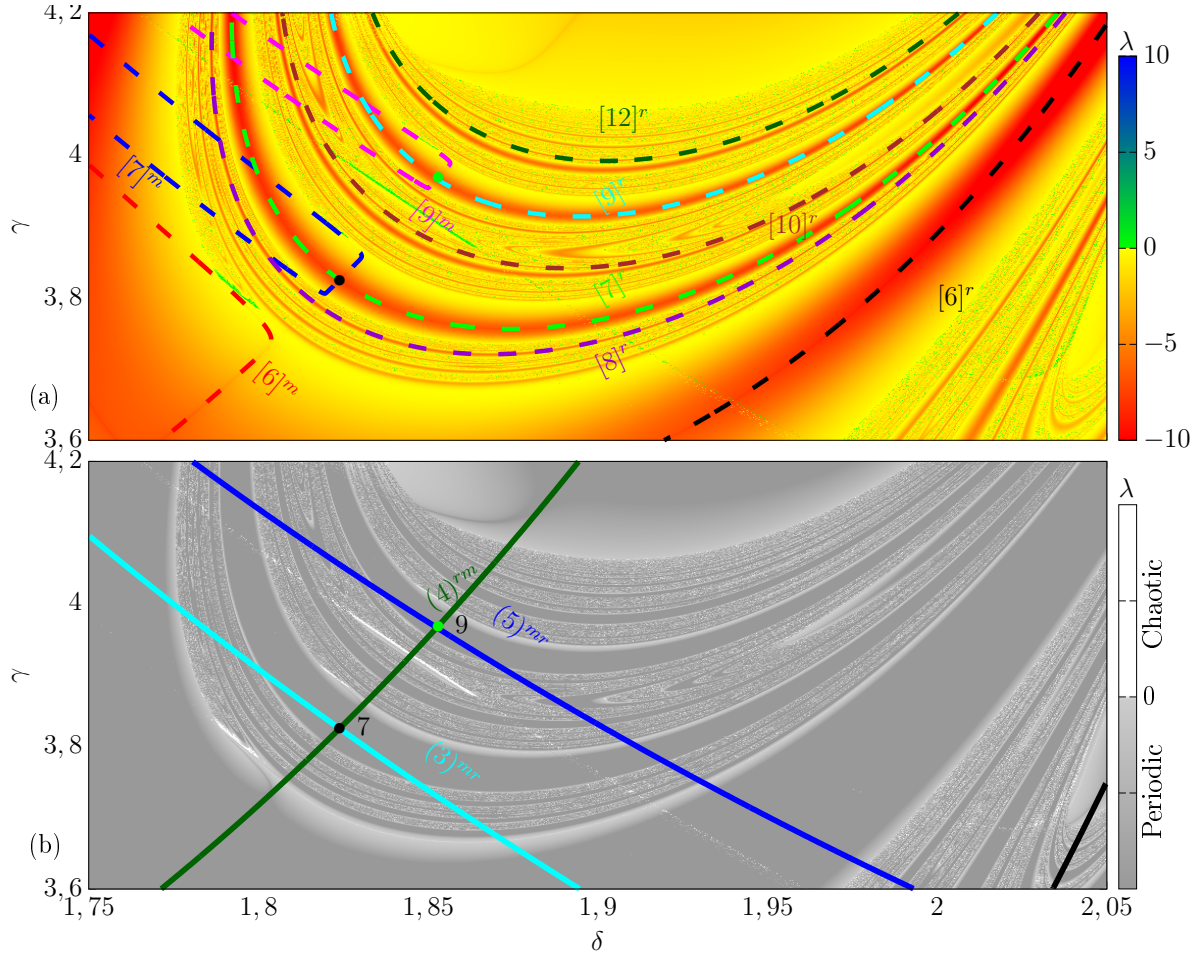


Figura 3.13: Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,5$ fixo.

3.5.5 Resultados para $\beta = 0,7$

A figura 3.15 mostra o resultado encontrado para $\beta = 0,7$. Na figura 3.15(b) destacamos a curva extrema $(2)^{mr}$, onde tal curva cruza as seguintes curvas extremas $(4)^{rm}$, $(6)^{rm}$, $(8)^{rm}$, $(10)^{rm}$, e assim por diante, atingindo uma região periódica. A organização das CSPs segue uma sequência de adição de períodos, iniciando com uma estrutura de período 6, depois 8, 10, 12 e assim sucessivamente, sempre somando duas unidades à periodicidade da estrutura anterior. Na figura 3.15(a), confirmamos a periodicidade das CSPs destacadas na figura 3.15(b), onde temos as seguintes curvas superestáveis se cruzando: $[6]^r$ com $[6]^m$, $[8]^r$ com $[8]^m$ e $[10]^r$ com $[10]^m$. É notável que as curvas superestáveis $[6]^m$, $[8]^m$ e $[10]^m$, estão sobrepostas com a curva superestável $[8]^m$. Observe que as regiões de cor vermelha, com expoente de Lyapunov menor que -10 , tornam-se mais evidentes.

Na figura 3.16 mostramos o diagrama de bifurcação X vs. δ ao seguir a curva $(2)^{mr}$, mostrada na figura 3.15. Este diagrama nos traz informações importantes, onde confirma os resultados encontrados na figura 3.15. Se observarmos nosso diagrama de bifurcação, da direita para a esquerda, temos o seguinte comportamento: começamos com o período 8, depois entramos em regiões caóticas com janelas periódicas, até chegar a uma região

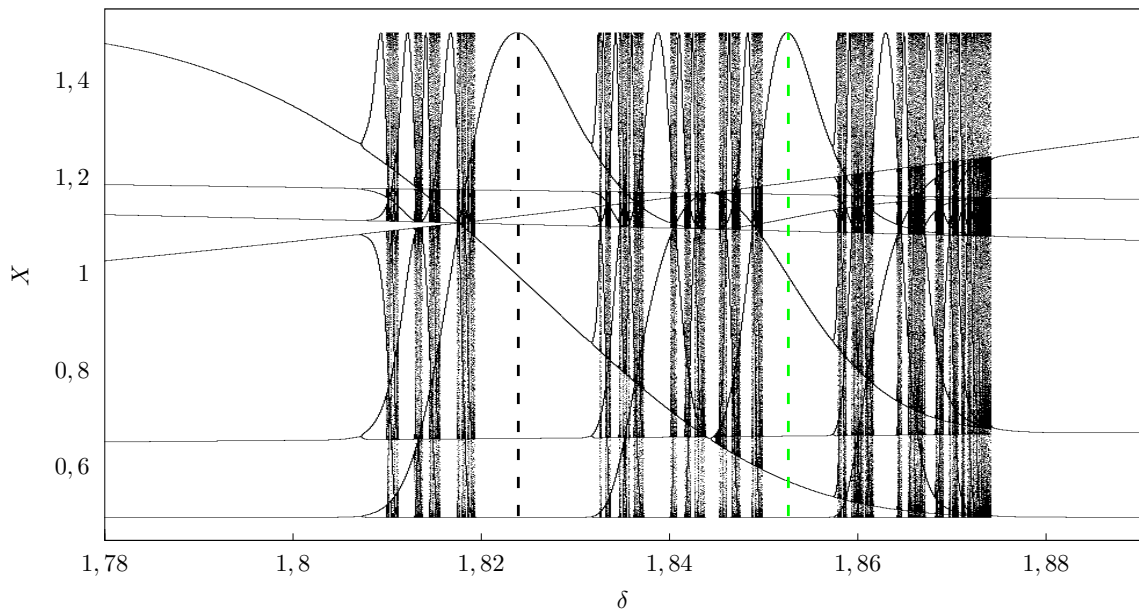
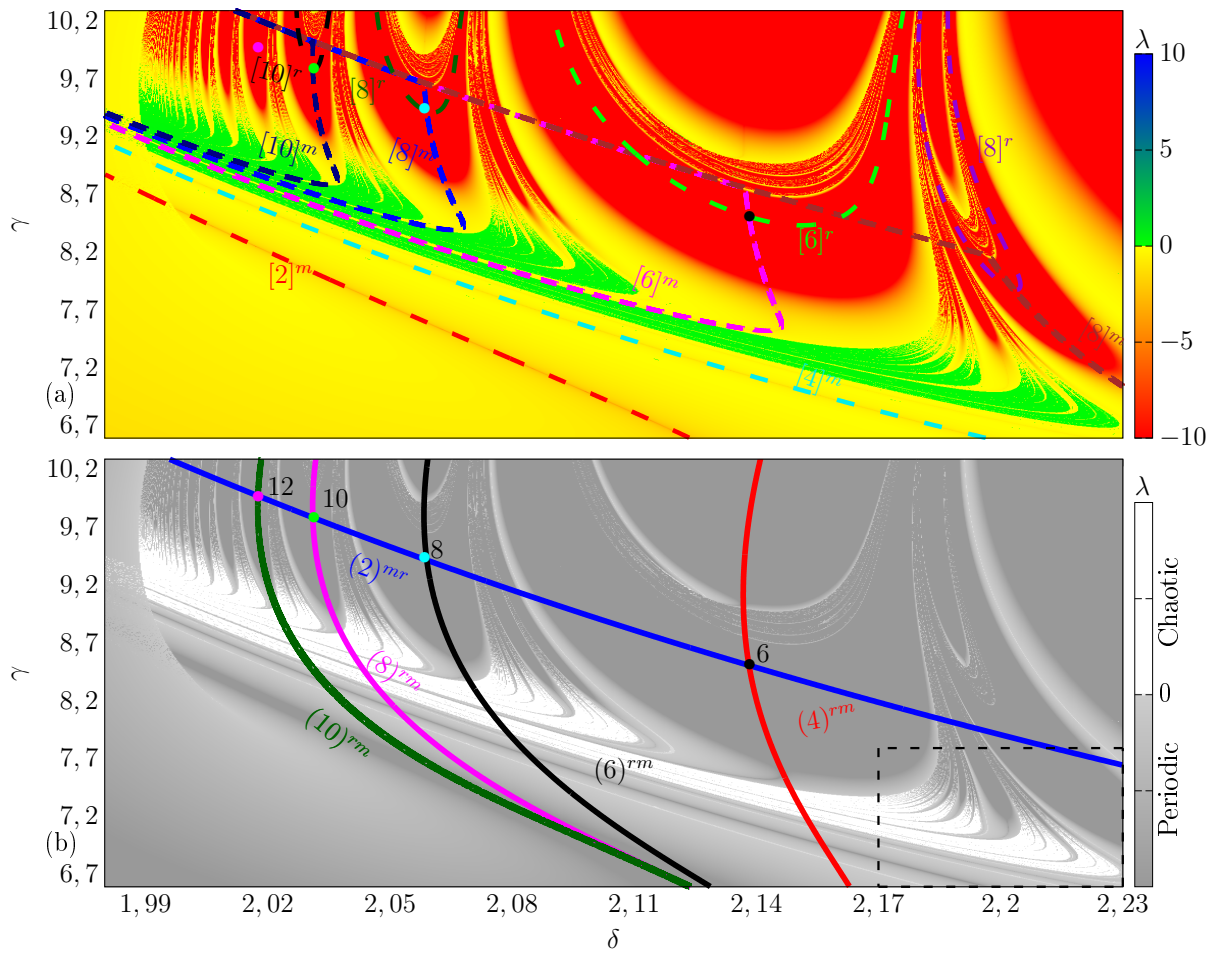
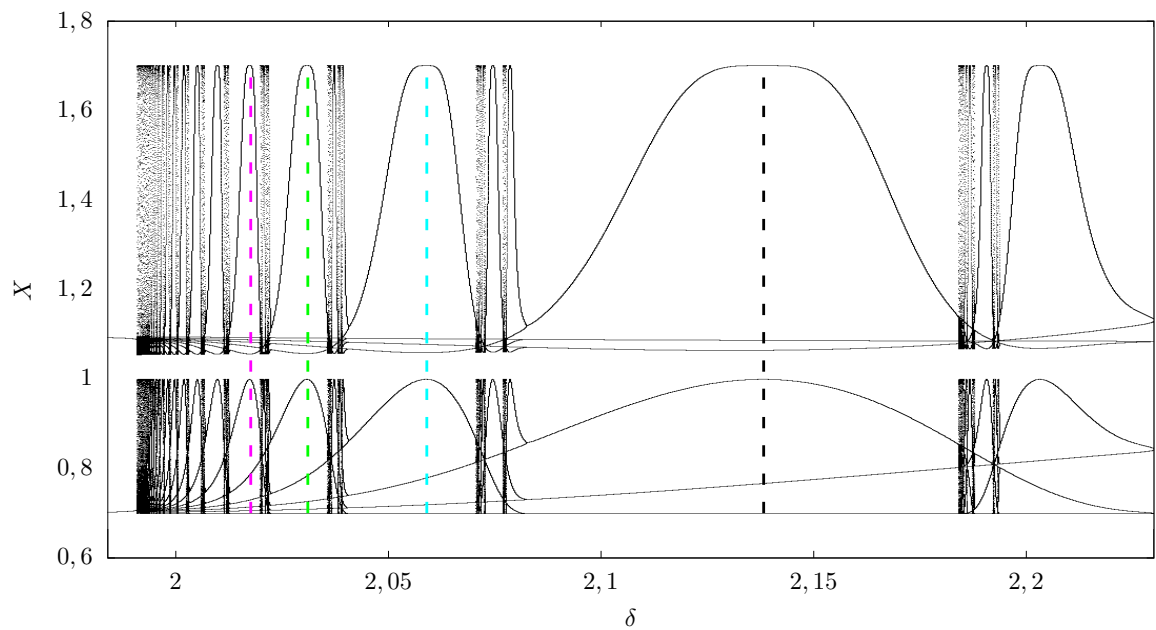


Figura 3.14: Diagrama de bifurcação X vs. β seguindo a curva extrema $(4)^{rm}$ destacada na figura 3.13(b). As linhas tracejadas corresponde aos pontos preto e ciano da figura 3.13(b).

com periodicidade 6, que é plotada como a linha tracejada preta, correspondente aos círculos pretos na figura 3.15(a,b). Novamente entramos em regiões caóticas com janelas periódicas, até chegarmos a uma região de periodicidade 8, mostrada pela linha tracejada ciano, correspondente ao círculo ciano da figura 3.15(a,b). Tal comportamento é repetido sucessivamente, até atingir uma região de periodicidade 2. Confirmando assim a existência de uma sequência de adição de período, que é organizada pela curva extrema $(2)^{mr}$.

A figura 3.17 refere-se a uma ampliação do retângulo no canto inferior direito da figura 3.15(b). Observe que, em (3.17)(b), destacamos algumas curvas extremas, denominadas como $(6)^{rm}$, $(8)^{rm}$, $(10)^{rm}$ e $(12)^{rm}$. Nesta figura, temos apenas curvas extremas que vão dos máximos locais X_r aos mínimos locais X_m . Isso acontece porque, nesta região, não temos nenhuma estrutura CSP completa como visto nas imagens anteriores. Este fato pode ser verificado se observarmos a figura 3.17(a), onde temos apenas curvas superestáveis que vão do mínimo local X_m até o próprio, após um certo número de iterações. Portanto, todas as estruturas da figura 3.15, que são semelhantes a esta região destacada na figura 3.17, terão o mesmo comportamento.


 Figura 3.15: Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,7$ fixo.

 Figura 3.16: Diagrama de bifurcação X vs. β seguindo a curva extrema $(2)^{mr}$ mostrada na figura 3.15(b). As linhas tracejadas correspondem aos pontos destacados na figura 3.15(b).

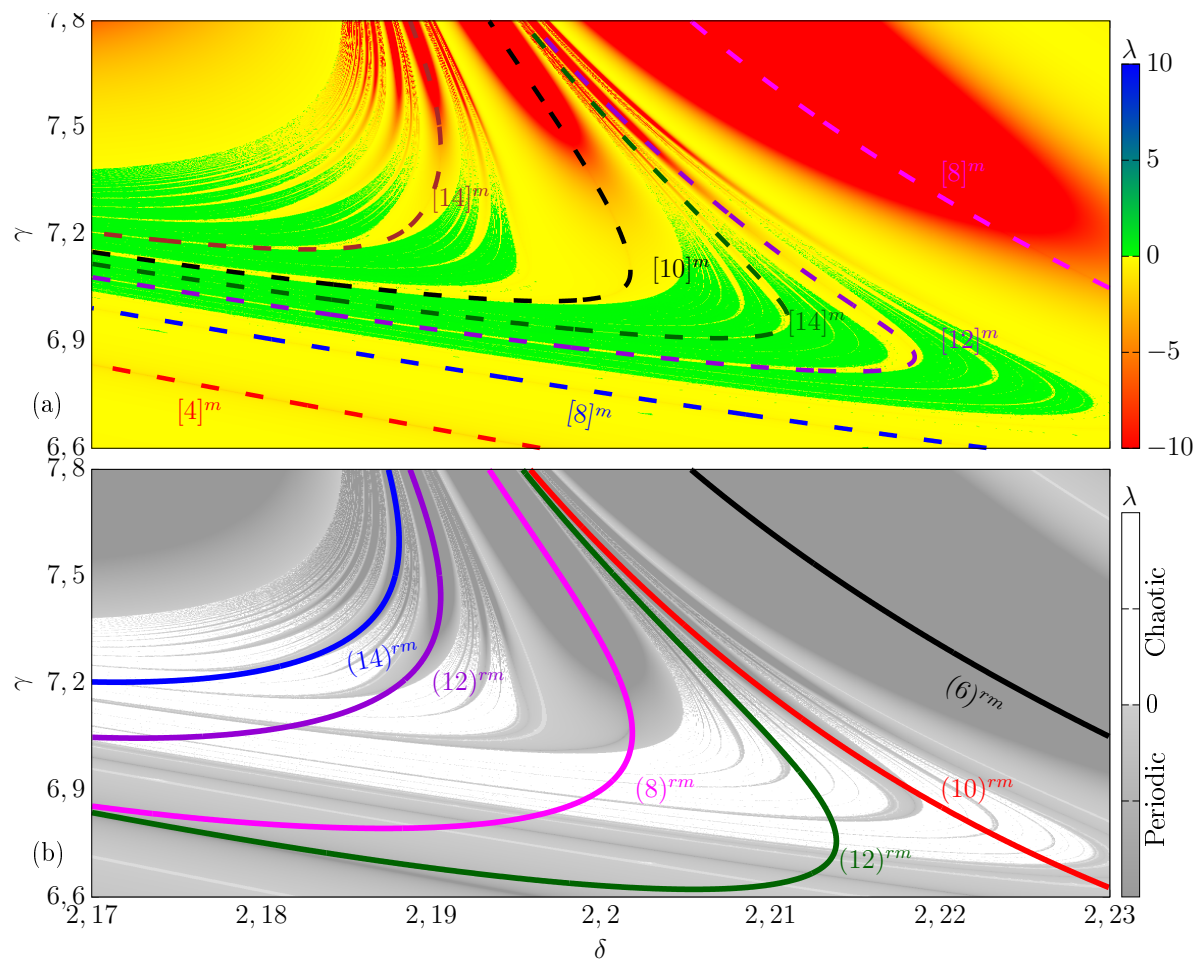


Figura 3.17: Espaço de parâmetros γ vs. δ para $\beta = 0,7$ fixo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

No presente trabalho, consideramos dois mapas unidimensionais. Primeiramente, estudamos algumas propriedades dinâmicas para o mapa *Logistic-like*, onde encontramos os pontos fixos e analisamos a estabilidade de tais pontos. Construímos o mapa de retorno, mostrando a convergência para o ponto fixo x_2^* . Foram construídos também diagramas de bifurcações e, para caracterizar o comportamento de determinadas regiões como sendo periódicas ou caóticas, utilizamos o expoente de Lyapunov ou número de Lyapunov.

Posteriormente, estudamos algumas propriedades do mapa Gauss, onde encontramos dois pontos fixos utilizando o método de Newton Raphson, uma vez que a equação do mapa em estudo se trata de uma equação transcendental. A partir desses dois pontos fixos, podemos encontrar onde ocorre as primeiras bifurcações do mapa, sendo a primeira uma bifurcação tangente e a segunda de duplicação de período.

Nosso principal objetivo nessa dissertação foi investigar o espaço de parâmetros do mapa *Logistic-Gauss*, sendo o mesmo uma composição dos mapas *Logistic-like* e Gauss. Conforme mostrado na literatura, este mapeamento apresenta algumas curvas cíclicas extremas/superestáveis que explicam como nascem as cascatas de adição de período de CSPs (conjunto complexo de periodicidade). A construção do espaço de parâmetro nos permitiu entender o que acontece ao alterar os parâmetros de controle, onde notamos a deformação de alguns CSPs. Também observamos o surgimento de regiões com alta estabilidade (regiões de cor vermelha intensa).

Utilizando a teoria das curvas extremas, explicamos o que acontece no espaço de parâmetros. Aqui, sugerimos duas propriedades importantes, que podem explicar o que acontece quando temos a interseção de duas curvas extremas. Sendo a primeira a coexistência de duas curvas extremas com duas curvas superestáveis, tal propriedade pode ser observada na figura 3.6, onde a curva extrema $(1)^{mr}$ se intersecta com a curva extrema $(2)^{rm}$, e

nesta interseção coexiste com duas curvas superestáveis, sendo elas as curvas $[3]^r$ e $[3]^m$. A segunda propriedade diz que a interseção de duas curvas extremas coexiste com uma única curva superestável, tal propriedade pode também ser observada na figura 3.6, onde a interseção das curvas extremas $(1)^{mr}$ e $(3)^{mr}$ coexistem com uma única curva superestável $[2]^r$.

Mostramos alguns diagramas de bifurcações, os quais foram utilizados para caracterizar o que acontece com as órbitas. Mostramos também o que ocorre quando seguimos algumas órbitas extremas, onde temos uma sequência de duplicações de período, levando ao caos através da Universalidade de Feigenbaum.

Com base em alguns dos resultados aqui encontrados, pretendemos escrever e submeter um artigo científico para uma revista internacional assim como poder estender esta dinâmica para outros mapeamentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] M. Kesmia, S. Boughaba, and Sabir Jacquir. Nonlinear dynamics of two-dimensional cardiac action potential duration mapping model with memory. *Journal of mathematical biology*, 78(5):1529–1552, 2019.
- [2] Shoma Tanabe and Naoki Masuda. Complex dynamics of a nonlinear voter model with contrarian agents. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 23(4):043136, 2013.
- [3] Adriane S. Reis, Kelly C. Iarosz, Fabiano AS. Ferrari, Iberê L. Caldas, Antonio M. Batista, and Ricardo L. Viana. Bursting synchronization in neuronal assemblies of scale-free networks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 142:110395, 2021.
- [4] Franciele Fey and J. Rosa. Teoria do caos: a ordem na não-linearidade. *Universo Acadêmico*, 5(1):217–32, 2012.
- [5] Ian Stewart. *Será que Deus joga dados?: a nova matemática do caos*. Rio de Janeiro: ZAHAR, 1991.
- [6] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, volume 3. Paris: Gauthier-Villars, 1899.
- [7] Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [8] Philip Holmes. Nonlinear Dynamics, Chaos, and Mechanics. *Applied Mechanics Reviews*, 43(5S):S23–S39, 1990.
- [9] Caroline GL. Martins, R. Egydio De Carvalho, Ibere Luiz Caldas, and Marisa Roberto. The non-twist standard map with robust tori. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(17):175501, 2010.

-
- [10] Jason AC. Gallas. Structure of the parameter space of the h  non map. *Physical Review Letters*, 70(18):2714, 1993.
- [11] Juliano A. de Oliveira, Hans MJ. de Mendon  a, Diogo R. da Costa, and Edson D. Leonel. Effects of a parametric perturbation in the hassell mapping. *Chaos, Solitons & Fractals*, 113:238–243, 2018.
- [12] R.M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560):459–467, 1976.
- [13] Edson Denis Leonel. *Invari  ncia de Escala em Sistemas Din  micos N  o Lineares*. S  o Paulo: Editora Blucher, 2019.
- [14] Nelson Fiedler-Ferrara and Carmen P Cintra do Prado. *Caos: uma introdu  o*. Editora Blucher, S  o Paulo, 1994.
- [15] Jean Mawhin. Alexandr mikhailovich lyapunov, thesis on the stability of motion (1892). In *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, pages 664–676. Elsevier, 2005.
- [16] Luiz Henrique Alves Monteiro. *Sistemas din  micos*. S  o Paulo: Editora Livraria da F  sica, 2002.
- [17] V. I. Arnold. Small denominators. I. Mapping the circle onto itself. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 25:21–86, 1961.
- [18] Ronilson Rocha and Rene Orlando Medrano-T. Stability analysis and mapping of multiple dynamics of chua’s circuit in full four-parameter spaces. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(13):1530037, 2015.
- [19] S. Fraser and R. Kapral. Analysis of flow hysteresis by a one-dimensional map. *Phys. Rev. A*, 25:3223, 1982.
- [20] R. Vitolo, P. Glendinning, and J. A. C. Gallas. Global structure of periodicity hubs in Lyapunov phase diagrams of dissipative flows. *Phys. Rev. E*, 84:016216, 2011.
- [21] C. Mira. *Chaotic dynamics*. Singapore: World Scientific, 1987.
- [22] Diogo Ricardo Da Costa, Matheus Hansen, Gustavo Guarise, Rene O Medrano-T, and Edson D Leonel. The role of extreme orbits in the global organization of periodic regions in parameter space for one dimensional maps. *Physics Letters A*, 380(18-19):1610–1614, 2016.
- [23] Rivania M.N. Teixeira, Danilo S. Rando, Felipe C. Geraldo, R.N. Costa Filho, Juliano A. de Oliveira, and Edson D. Leonel. Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation. *Physics Letters A*, 379(18):1246–1250, 2015.

-
- [24] Zuohan Zhou, Weifeng Shi, Yan Bao, and Ming Yang. A gaussian function based chaotic neural network. In *2010 International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCASM 2010)*, volume 4, pages V4–203. IEEE, 2010.
 - [25] Juliano A de Oliveira, Hans MJ de Mendonça, Anderson AA da Silva, and Edson D Leonel. Critical slowing down at a fold and a period doubling bifurcations for a gauss map. *Brazilian Journal of Physics*, 49(6):923–927, 2019.
 - [26] Diogo Ricardo da Costa, Julia G.S. Rocha, Luam S. de Paiva, and Rene O. Medrano-T. Logistic-like and gauss coupled maps: The born of period-adding cascades. *Chaos, Solitons & Fractals*, 144:110688, 2021.
 - [27] Mitchell J. Feigenbaum. Universal behavior in nonlinear systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 7(1-3):16–39, 1983.