

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

JOÃO VÍCTOR RODRIGUES DA SILVA LEITE

Estudo de Pseudoinversas na Teoria de Duais Espinoriais

Guaratinguetá

2019

João Vítor Rodrigues da Silva Leite

Estudo de Pseudoinversas na Teoria de Duais Espinoriais

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Bacharelado em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Bacharelado em Física .

Orientador: Prof^o Dr. Julio Marny Hoff da Silva

Guaratinguetá
2019

L533e	Leite, João Vítor Rodrigues da Silva Estudo de pseudoinversas na teoria de duais espinoriais / João Vítor Rodrigues da Silva Leite – Guaratinguetá, 2019. 55 f : il. Bibliografia: f. 41 Trabalho de Graduação em Bacharelado em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2019. Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva 1. Pseudoinversas. 2. Spinor - Análise. 3. Teoria quântica de campos. I. Título. CDU 530.145
-------	--

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

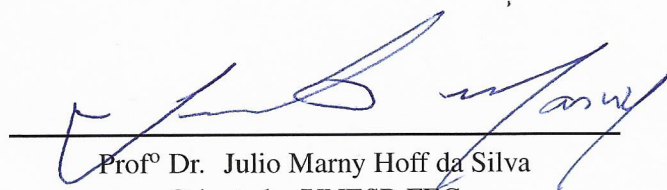
JOÃO VÍCTOR RODRIGUES DA SILVA LEITE

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM
BACHARELADO EM FÍSICA "

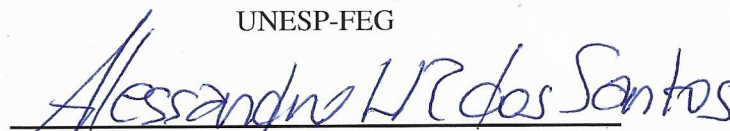
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
BACHARELADO EM FÍSICA

Profº Dr. MARCO AURÉLIO ALVARENGA MONTEIRO
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Profº Dr. Julio Marny Hoff da Silva
Orientador/UNESP-FEG


Profº Dr. Saulo Henrique Pereira
UNESP-FEG


Dr. Alessandro Luiz Ribeiro dos Santos
ITA

Dezembro , 2019

Este trabalho, assim como toda a minha graduação, é dedicado a minha mãe e minha vó, que com muito pouco fizeram muito pra eu chegar aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha mãe Andréia e minha vó Cida, por sempre terem feito o máximo para que eu tivesse um bom estudo e a liberdade de escolher fazer ciência. Obrigado por terem me criado com tanto carinho e dignidade.

Agradeço também a meu irmão, Julio e minha madrinha, Glória por todo apoio dado nestes anos de curso.

Agradeço ao meu orientador, Prof.Dr. Julio Marny Hoff da Silva, por todo o conhecimento compartilhado, pelo exemplo de profissionalismo e pela santa paciência no decorrer destes 4 anos de trabalho.

Agradeço em especial, minha namorada, Milena. Esta jornada seria extremamente dura se não fosse por sua companhia. Obrigado por todo carinho, companhia, paciência e por sempre acreditar em mim. Como sempre digo, “Eu não sei o que seria de mim sem você”.

Agradeço também a família de Milena por várias vezes me ajudar nessa vida de faculdade. Em especial, e com certa saudade, agradeço a Dona Geni (*In Memoriam*), por todo o afeto dado a mim durante estes anos (ela sempre falava que eu era muito esperto) e também por várias vezes nos ter salvado de tomar esse sol de Guará.

Por fim, agradeço aos meus grandes e bons amigos Caique, Julio, João Bosco, Ricardo, Gustavo e Dona Vera, que mesmo de longe sempre estiveram me incentivando e apoiando.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

*“Se podes olhar, vê. Se podes ver, repara”
(Livro dos conselhos)*

RESUMO

A definição de um espinor pode ser encontrada de várias formas na literatura e muito disso se deve ao seu desenvolvimento independente por parte de físicos e matemáticos. Dito isto, um espinor quando tratado como um objeto matemático que descreve um férmion, só fornece resultados observáveis físicos quando conjugado com seu dual. Para tanto, é necessária a construção desse mesmo correspondente dual. O presente trabalho descreve a construção do dual espinorial de um tipo de espinor, o autoespinor do operador de conjugação de carga ou ELKO (*um acrônimo de sua tradução em alemão*), explicitando todos os critérios de interesse físicos necessários para ser um invariante por transformações de Lorentz e tenha uma norma real. Consequentemente, algo que possa ser utilizado na composição do observável. Ainda no fim do trabalho é apresentado um problema envolvendo as somas de spin deste espinor que, devido ao aparecimento de uma matriz $\mathcal{G}(\phi)$, tem uma quebra de simetria relativística, fazendo-se necessário redefinir o dual previamente encontrado, utilizando-se das definições de pseudoinversas.

PALAVRAS-CHAVE: Dual espinorial. Conjugação de carga. Pseudoinversa.

ABSTRACT

The definition of a spinor can be found in many ways in the literature and much of this is due to its independent development by physicists and mathematicians. So, a spinor when treated as a mathematical object describing a fermion only get physical observable when associated to its dual. For this it is necessary the construction of such a dual. The present work describes the construction of the dual of a spinor type, the eigenspinors of the charge conjugation operator (ELKO), expliciting all the criteria of physical interests necessary to have a real norm and hence something useful in constructing an observable. At the end of the work a problem is presented involving the spin sums of the aforementioned spinor. When a given matrix $\mathcal{G}(\phi)$ appears, the relativistic symmetry breaks and it is necessary to redefine the previously found dual using the pseudo-inverse definitions.

KEYWORDS: Dual of spinor. Charge conjugation. Pseudo-inverse.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PSEUDOINVERSA DE PENROSE	12
2.1	DEFINIÇÃO DE PSEUDOINVERSA	12
2.2	DEFINIÇÃO DA PSEUDOINVERSA DE PENROSE	12
2.3	MÉTODOS PARA O CÁLCULO DA PSEUDOINVERSA DE PENROSE .	13
2.3.1	Método Usual	13
2.3.2	Método utilizando a Regularização de Thikhonov	14
2.3.2.1	Teorema da Regularização de Tikhonov para a pseudoinversa de Penrose . .	16
3	A CONSTRUÇÃO DO AUTOESPINOR DO OPERADOR DE CONJU- GAÇÃO DE CARGA	19
3.1	NOTAÇÃO E REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL DE WEYL	19
3.2	O OPERADOR DE PARIDADE E OS ESPINOES DE DIRAC	20
3.3	A ATUAÇÃO DO OPERADOR DE CONJUGAÇÃO DE CARGA	22
3.3.1	A estrutura dos Autoepinores do Operador de Conjugação de Cargas (ELKO)	22
3.3.2	Os Autoepinores do Operador de Conjugação de Cargas (ELKO)	23
3.3.2.1	Construção da Forma explícita do ELKO	23
4	O DUAL DO ELKO	27
4.1	A CONSTRUÇÃO DO NOVO DUAL ESPINORIAL	28
4.1.1	Determinando η como invariante de Lorentz:	28
4.1.2	O dual para $\lambda(p^\mu)$	30
4.2	O DUAL DO ELKO E O PROBLEMA NAS SOMAS DE SPIN	33
4.3	REDEFININDO A ESTRUTURA DO DUAL	34
4.3.1	O cálculo das pseudoinversas	35
4.3.1.1	A pseudoinversa de Penrose	35
4.3.1.2	A pseudoinversa de Penrose com regularização de Tikhonov	36
4.3.1.3	τ -deformação	37
5	CONCLUSÃO	41
	REFERÊNCIAS	43
	APÊNDICE A – NORMAS COM OS DUAIS À LA DIRAC	44

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é sobre espinores, mais precisamente sobre o seu dual, mas de forma bem modesta em relação a sua formalidade encontrada na literatura. Sobre sua formalidade, aliás, há quem diga que ninguém a compreende na sua totalidade, entre os motivos está a existência de diversas maneiras de se deparar com ela, seja matemática ou fisicamente falando.

Temos como noção matemática essencial e fundamental, ainda que sutil, que um espinor é um objeto matemático que necessita de duas rotações completas, ou seja 4π , para que retorne ao seu estado normal, o que significa que quando é rotacionado de 2π ele resulta em si mesmo, mas com valor negativo. Fisicamente, o estudo da estrutura algébrica dos espinores tem aplicações diversas, que vão de cosmologia à física de matéria condensada, mas aqui o que importa é que os objetos espinoriais descrevem “funções de ondas” fermiônicas, o que em outras palavras significa que o estudo da matéria usual deve muito a sua existência.

Sendo uma partícula de spin semi-inteiro, o férmion tem a sua dinâmica regida pelos postulados da mecânica quântica. Neste sentido é interessante traçar um paralelo lembrando que, no espaço de Hilbert, os autovalores de um ket, após a atuação de um operador hermitiano só serão reais se a norma a qual fora submetidos for relacionado ao seu correspondente dual (SAKURAI; NAPOLITANO, 2013), isto é, sendo $A^+ = A$, $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$ e $\langle a''|A = \langle a''|a''^*$, temos:

$$\langle a''|A|a'\rangle - \langle a''|A|a'\rangle = (a' - a''^*) \langle a''|a'\rangle = 0,$$

se $a' = a''^*$, logo $a' = a'^*$ e portanto $a' \in \mathbb{R}$. Este conceito pode ser estendido à probabilidade quântica de um estado $|\Psi\rangle$ ser encontrado em um autoestado $A|\Psi\rangle$, assim como também para o entendimento da probabilidade de encontrar observáveis físicos de um autoespinor. Assim sendo, pode-se afirmar que sem seu correspondente dual, o espinor sozinho não é observado. Tendo isso em mente, este trabalho tem como um dos objetivos demonstrar na prática que a construção do dual de um espinor deve ter sua importância reconhecida.

Neste processo, serão utilizados os autoespinores do operador de conjugação de cargas, que por sua vez é um novo espinor, uma partícula fermiônica “escura” de primeiros princípios, com spin 1/2 e que é também chamado de ELKO, um acrônimo de sua tradução em alemão (*Eigenspinoren des Ladungskojugationsoperator*)(AHLUWALIA, 2019).

Na tentativa de estender o conceito de espinores de Majorana a um conjunto completo de autoespinores do operador conjugação de carga surgem os ELKOs. Atuando então com o operador de conjugação de carga, $C\lambda(\mathbf{p}) = \pm\lambda(\mathbf{p})$, é possível encontrar um espinor que possui autovalores ± 1 sob a atuação de operador conjugação de carga, levando a um conjunto completo com quatro espinores: dois autoconjugados (com autovalor +1) e dois anti-autoconjugados (com autovalor -1). Por algumas razões, na maior parte por causa de sua construção, vê-se que $\lambda(\mathbf{p})$ não é autoespinor do operador de paridade, P , que é descrito por $m^{-1}\gamma_\mu p^\mu$ (SPERANÇA, 2014),

ou seja, o ELKO assim como o espinor de Majorana não satisfaz a equação de Dirac. Isso tem raiz no fato de que as componentes espinoriais do ELKO não estão relacionadas entre si pela simetria de paridade, mas sim pelas matrizes de Pauli.

No Capítulo 2 será definido o que é pseudoinversa, assim como a pseudoinversa de Penrose (PIP), e sua característica de unicidade. Mostraremos os métodos de se calcular a PIP, o usual e o método que envolve a regularização de Tikhonov, levando em consideração os lemas que o antecede.

No Capítulo 3 demonstraremos toda a construção dos autoespinores do operador de conjugação de carga, primeiramente na Seção 3.1 apresentando a notação necessária para o estudo, mais precisamente denotando os geradores de *boost* e rotação, e o espaço de representação espinorial de Weyl. Na seção 3.2 mostraremos a construção dos espinores de Dirac através do operador de paridade. Por fim, na Seção 3.3 é apresentado o operador de conjugação de carga, a estrutura do ELKO que envolve “a mágica das matrizes Pauli” e a obtenção da forma explícita de $\lambda(p^\mu)$.

No Capítulo 4 de fato construiremos os duais dos autoespinores do operador de conjugação de carga. Primeiramente é observado que a tentativa de se obter o dual do ELKO tal qual aos espinores de Dirac, incorre em normas nulas e imaginárias. Na Seção 4.1 é pensado uma maneira de generalizar um dual que respeite os requisitos,= como as da invariância de Lorentz, por exemplo. Feito isso, aplicamos o conceito da seção para o ELKO. Na Seção 4.2 será feita uma breve discussão sobre os problemas envolvendo este novo dual na somas de spin e a quebra da covariância relativística de Lorentz, gerada pelo aparecimento de $\mathcal{G}(\phi)$. Buscando a eliminação do termo que quebra a invariância de Lorentz são incrementados na redefinição do dual dois operadores, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, que, por sua vez, devem ser inversas de $[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]$ e $[\mathbb{I} - \mathcal{G}(\phi)]$, respectivamente. Acontece que o determinante de $[\mathbb{I} \pm \mathcal{G}(\phi)]$ é igual a 0 e, portanto, não tem inversa. Deste modo, em 4.3, desenvolveremos a solução utilizando as definições de pseudoinversa do Capítulo 2.

2 PSEUDOINVERSA DE PENROSE

Neste capítulo será passada uma noção de pseudoinversa, assim como os métodos para seu cálculo, com base em (BARATA; HUSSEIN, 2012). Saliento ainda que os conceitos a seguir se valem de vários teoremas e/ou proposições, de forma que nem todos foram incluído neste trabalho, sendo indicadas referências onde os mesmos podem ser encontrados.

2.1 DEFINIÇÃO DE PSEUDOINVERSA

Seja $A : R^n \longrightarrow R^m$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita, munidos de um produto interno,

$$\begin{aligned} A : R^n &\longrightarrow R^m \\ x &\mapsto Ax = y, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde A é a matriz transformação linear, nas bases canônicas de R^n e R^m , que leva um vetor x , tal que $x \in R^n$, a um outro vetor y , $y \in R^m$. Ocorre que se y não pertence à imagem de A , $Im(A)$, o sistema $Ax = y$ evidentemente não possui solução, de modo que é sensato procurar em R^n um vetor x , tal que Ax esteja mais próximo de y , ou seja, que tenha a menor norma. A pseudoinversa de A é a correspondência $A^+ : R^m \longrightarrow R^n$, que associa a cada vetor $y \in R^m$, um vetor $A^+y = x \in R^n$, de menor norma com todos os vetores $x \in R^n$, $|y - Ax|$. Seja então $A \in Mat(\mathbb{C}, m, n)$, (uma matriz pertencente ao conjunto dos complexos, com m linhas e n colunas, sendo $m, n \in \mathbb{N}$), temos que uma matriz B , com $B \in Mat(\mathbb{C}, n, m)$, é dita ser a inversa generalizada, ou a pseudoinversa, de A se satisfaz as seguintes condições:

$$ABA = A, \tag{2.2}$$

$$BAB = B. \tag{2.3}$$

De modo que se a matriz A for uma matriz quadrada e não-singular, isto é com determinante não-nulo, $A \in Mat(\mathbb{C}, n)$, a inversa A^{-1} satisfaz estas condições trivialmente.

2.2 DEFINIÇÃO DA PSEUDOINVERSA DE PENROSE

A pseudoinversa de Penrose (PIP) foi desenvolvida de modo a garantir a singularidade da inversa generalizada e para que isso ocorra é conveniente que a definição usual de pseudoinversa seja reduzida. Seja então $A \in Mat(\mathbb{C}, m, n)$, uma matriz $A^+ \in Mat(\mathbb{C}, n, m)$ é dita ser a

pseudoinversa de Penrose se satisfaz as seguintes condições:

$$AA^+A = A, \quad (2.4)$$

$$A^+AA^+ = A^+, \quad (2.5)$$

$$AA^+ \in \text{Mat}(\mathbb{C}, m), \quad A^+A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n) \text{ são auto-adjuntas.} \quad (2.6)$$

Mais uma vez entende-se que, se a matriz A for uma matriz quadrada e não-singular, $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$, a inversa A^{-1} satisfaz estas condições de modo trivial.

Para mostrar a unicidade da pseudoinversa de Penrose de uma matriz $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$, vamos começar assumindo que exista esta singularidade. Sejam $A^+ \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n, m)$ e $B \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n, m)$ Pseudosinversas de Penrose de $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$, tais que:

- $ABA = A$ e $BAB = B$, com AB e BA auto-adjuntas;
- $M_1 = AB - AA^+ = A(B - A^+) \in \text{Mat}(\mathbb{C}, m)$.

Por hipótese M_1 é uma auto-adjunta, uma vez que é a diferença entre matrizes auto-ajuntas. Assim:

$$\begin{aligned} \|M_1\|^2 &= (AB - AA^+) \cdot A(B - A^+) = (ABA - AA^+A)(B - A^+) \\ &= (A - A)(B - A^+) = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sendo M_1 um auto-adjunto e $(M_1)^2 = 0$ temos então

$$\|M_1x\|^2 = \langle M_1x, M_1x \rangle = \langle x, (M_1)^2x \rangle = 0, \quad (2.8)$$

mostrando também que $M_1 = 0$. Isso nos revela que $AB = AA^+$. Seguindo os mesmos passos, é possível provar que $BA = A^+A$. Com tudo isso segue-se diretamente o fato que

$$A^+ = A^+AA^+ = A^+(AA^+) = A^+AB = (A^+A)B = BAB = B, \quad (2.9)$$

estabelecendo assim a unicidade da pseudoinversa de Penrose.

2.3 MÉTODOS PARA O CÁLCULO DA PSEUDOINVERSA DE PENROSE

2.3.1 Método Usual

As relações que providenciam uma importante sugestão para encontrar a pseudoinversa de Penrose de uma matriz A qualquer, com $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$, são:

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}, \quad (2.10)$$

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^*, \quad (2.11)$$

onde $A^* \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n, m)$ é dita ser a matriz adjunta de A . As matrizes (2.10) e (2.11) resultam em pseudoinversas diferentes, de modo que é necessário que se escolha a melhor matriz que se encaixa com o problema dado. É importante notar que A^+ , neste caso, só existe se AA^* ou A^*A forem invertíveis, ou seja, se seus determinantes forem não nulos.

2.3.2 Método utilizando a Regularização de Thikhonov

É fácil ver que se $(AA^*)^{-1}$ e $(A^*A)^{-1}$ existem, então $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ e $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ também existem. Entretanto, se essas inversas não existirem, há um procedimento alternativo para obter A^+ . Este é um dos procedimentos que existem para se calcular a pseudoinversa de Penrose quando as alternativas, dadas em (2.10) e (2.11), se mostram também singulares. É visto então, no estudo das vizinhanças de matrizes singulares (BARATA; HUSSEIN, 2012), a seguinte proposição:

Proposição: Seja $A \in \text{Mat}(C, n)$ uma matriz arbitrária e $B \in \text{Mat}(C, n)$ uma matriz invertível, existem constantes M_1 e M_2 (dependentes de A e de B) com $0 < M_1 \leq M_2$, tais que a matriz $A + \mu B$ é invertível para todo $\mu \in \mathbb{C}$, com $0 < |\mu| < M_1$ e para todo $\mu \in \mathbb{C}$ com $|\mu| > M_2$.

$$A + \mu B = (\mathbb{I}\mu + AB^{-1})B \quad (2.12)$$

Podemos escrever também $C \equiv -AB^{-1}$, sendo $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ as k raízes (não necessariamente distintas) do polinômio característico p_C da matriz C .

$$p_C = \det(C - \lambda \mathbb{I}) \quad (2.13)$$

- Se todas as raízes forem nulas, tomemos $M_1 = M_2 > 0$, arbitrários.
- Caso contrário, definamos M_1 como sendo o menor valor de $|\lambda_k|$ dentre as raízes não-nulas de p_C , $M_1 := \min\{|\lambda_k|, \lambda_k \neq 0\}$, e definimos M_2 como sendo o maior valor de $|\lambda_k|$ para todos os k 's, $M_2 := \max\{|\lambda_k|, k = 1, \dots, n\}$. Então, os conjuntos $\{\mu \in \mathbb{C} | 0 < |\mu| < M_1\}$ e $\{\mu \in \mathbb{C} | |\mu| > M_2\}$ não contêm raízes do polinômio característico de C e, portanto, para μ nesses conjuntos a matriz $\mu \mathbb{I} - C = \mu \mathbb{I} + AB^{-1}$ é invertível.

Logo, por exemplo, se $(AA^*)^{-1}$ não existe, a matriz $AA^* + \mu \mathbb{I}$ será invertível, para todo $\mu \in \mathbb{C}$, com $|\mu|$ suficientemente pequeno. Consequentemente, podemos conjecturar que as expressões $A^*(AA^* + \mu \mathbb{I})^{-1}$ e $(A^*A + \mu \mathbb{I})^{-1}A^*$ são bem definidas, para $\mu \neq 0$ e $|\mu|$ suficientemente pequeno, e que convergem para A^+ quando o limite de $\mu \rightarrow 0$ é tomado. A substituição provisória de uma matriz singular, AA^* ou A^*A , por uma não-singular, $AA^* + \mu \mathbb{I}$ ou $A^*A + \mu \mathbb{I}$ (com $\mu \neq 0$ e $|\mu|$ suficientemente pequeno), é um processo de regularização conhecido como “Regularização de Tikhonov”. Este processo foi introduzido por Tikhonov em sua busca por uma aproximação uniforme para as equações de Fredholm de primeira ordem. Como Tikhonov não menciona nada em relação a pseudoinversa de Penrose, é por meio dos Lemas seguintes que

se busca estabelecer que os limites, $\lim_{\mu \rightarrow 0} A^*(AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1}$ e $\lim_{\mu \rightarrow 0} (A^*A + \mu \mathbb{I}_n)^{-1}A^*$, descritos acima existem e são iguais (BARATA; HUSSEIN, 2012).

Lema 1: Seja $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$ e seja $\mu \in \mathbb{C}$, tais que $AA^* + \mu \mathbb{I}_m$ e $A^*A + \mu \mathbb{I}_n$ são não-singulares. Então, $A^*(AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1} = (A^*A + \mu \mathbb{I}_n)^{-1}A^*$. Pela proposição A.7-(BARATA; HUSSEIN, 2012), é visto que o conjunto dos autovalores de AA^* e os autovalores de A^*A diferem no máximo pelo elemento 0.

Prova do Lema 1: Sejam $B_\mu = A^*(AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1}$ e $C_\mu = (A^*A + \mu \mathbb{I}_n)^{-1}A^*$, então temos que:

$$\begin{aligned} A^*AB_\mu &= A^*[AA^*](AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1} \\ &= A^*[AA^* + \mu \mathbb{I}_m - \mu \mathbb{I}_m](AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1} \\ &= A^*(\mathbb{I}_m - \mu(AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1}) \\ &= A^* - \mu B_\mu, \end{aligned} \tag{2.14}$$

logo

$$\therefore (A^*A + \mu \mathbb{I}_n)B_\mu = A^*, \tag{2.15}$$

o que implica $B_\mu = (A^*A + \mu \mathbb{I}_n)^{-1}A^* = C_\mu$.

Lema 2: Para todo $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$ os limites $\lim_{\mu \rightarrow 0} A^*(AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1}$ e $\lim_{\mu \rightarrow 0} (A^*A + \mu \mathbb{I}_n)^{-1}A^*$, existem e são iguais, como mostrado pelo Lema 1, definindo um elemento de $\text{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$.

Prova do lema 2: Se AA^* e A^*A são matrizes nulas, A será identicamente nulo. Por exemplo, se $A^*A = 0$, $\forall x$, então tem-se que $0 = \langle x, A^*Ax \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2$, provando que $A = 0$. Consequentemente assumiremos que AA^* e A^*A são matrizes não-nulas. A matriz $AA^* \in \text{Mat}(\mathbb{C}, m)$ é evidentemente auto-adjunta. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ auto-valores distintos, pelo Teorema Espectral de matrizes, para operadores auto-adjuntos (Teoremas A.9, A.13-(BARATA; HUSSEIN, 2012)) podemos escrever:

$$AA^* = \sum_{a=1}^r \alpha_a E_a, \tag{2.16}$$

onde E_a são projetores espectrais de AA^* que satisfazem $E_a E_b = \delta_{ab}$, $E_a^* = E_a$ e $\sum_{a=1}^r E_a = \mathbb{I}_m$.

Portanto,

$$AA^* + \mu \mathbb{I}_m = \sum_{a=1}^r (\alpha_a + \mu) E_a \tag{2.17}$$

e, como consequência, para $\mu \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, tem-se pelo Teorema do Cálculo funcional A.10-

(BARATA; HUSSEIN, 2012):

$$(AA^* + \mu \mathbb{I}_n)^{-1} = \sum_{a=1}^r \frac{1}{\alpha_a + \mu} E_a \quad (2.18)$$

e

$$A^*(AA^* + \mu \mathbb{I}_n)^{-1} = \sum_{a=1}^r \frac{1}{\alpha_a + \mu} A^* E_a. \quad (2.19)$$

Desse modo, existem dois casos a se confirmar:

- **Caso 1:** zero não é um auto-valor de AA^* ;
- **Caso 2:** zero é um auto-valor de AA^* .

Caso 1: É uma forma clara de mostrar que o limite $\lim_{\mu \rightarrow 0} A^*(AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1} = \sum_{a=1}^r \frac{1}{\alpha_a} A^* E_a$.

Caso 2: temos que $\alpha_1 = 0$. O projetor espectral correspondente E_1 projetando no $Ker(AA^*)$:

$$Ker(AA^*) = \{u \in C^m | AA^*u = 0\}. \quad (2.20)$$

Então $A^*x = 0$, pois $0 = \langle x, AA^*x \rangle = \langle A^*x, A^*x \rangle = \|A^*x\|^2$. Portanto: $A^*E_1 = 0$ e consequentemente podemos escrever:

$$A^*(AA^* + \mu \mathbb{I}_n)^{-1} = \sum_{a=2}^r \frac{1}{\alpha_a + \mu} A^* E_a, \quad (2.21)$$

de onde

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} A^*(AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1} = \sum_{a=2}^r \frac{1}{\alpha_a} A^* E_a, \quad (2.22)$$

provando que o limite $\lim_{\mu \rightarrow 0} A^*(AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1}$ sempre existirá. Pelo Lema 1, o limite de $\lim_{\mu \rightarrow 0} (A^*A + \mu \mathbb{I}_n)^{-1} A^*$ também existe e coincide com o $\lim_{\mu \rightarrow 0} A^*(AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1}$.

2.3.2.1 Teorema da Regularização de Tikhonov para a pseudoinversa de Penrose

Teorema: Para todo $A \in Mat(\mathbb{C}, m, n)$, tem-se

$$A^+ = \lim_{\mu \rightarrow 0} A^*(AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1}, \quad (2.23)$$

$$A^+ = \lim_{\mu \rightarrow 0} (A^*A + \mu \mathbb{I}_n)^{-1} A^*, \quad (2.24)$$

como sendo as suas pseudoinversas de Penrose. Como a existência dos limites acima foi estabelecida para matrizes arbitrárias no Lema 1, este Teorema contém uma prova geral de existência da pseudoinversa de Penrose.

Prova do Teorema: As afirmações a se comprovarem são evidentes se tivermos uma matriz com todos os elementos nulos ($\mathbb{O}_{mn}$), uma vez que $(\mathbb{O}_{mn})^+ = \mathbb{O}_{nm}$, de modo que A será

assumido como uma matriz não-nula. Isto é equivalente a assumir que AA^* e A^*A são matrizes não-nulas. Para provar (2.23) são suficientes os lemas estudados anteriormente. Há agora, mais uma vez, dois casos para se considerar:

- **Caso 1:** zero não é um auto-valor de AA^* ;
- **Caso 2:** zero é um auto-valor de AA^* .

Caso 1: Da prova do Lema 2, temos que:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} A^*(AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1} = \sum_{a=1}^r \frac{1}{\alpha_a} A^* E_a = B.$$

Note agora que:

$$\begin{aligned} AB &= \sum_{a=1}^r \frac{1}{\alpha_a} AA^* E_a = \sum_{a=1}^r \frac{1}{\alpha_a} \left(\sum_{b=1}^r \alpha_b E_b \right) E_a = \sum_{a=1}^r \sum_{b=1}^r \frac{1}{\alpha_a} \alpha_b \delta_{ab} E_a \\ &= \sum_{a=1}^r E_a = \mathbb{I}_{mn}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

sendo, AB , então auto-ajunto e note também que

$$BA = \sum_{a=1}^r \frac{1}{\alpha_a} A^* E_a A, \quad (2.26)$$

é também auto-ajunto, pois $\alpha_a \in \mathbb{R}$, para todo a . Assim como $(A^* E_a A)^* = A^* E_a A$, para todo a , já que $E_a^* = E_a$.

De (2.25), segue-se que $ABA = A$ e de (2.26) segue-se que:

$$\begin{aligned} BAB &= \left(\sum_{a=1}^r \frac{1}{\alpha_a} A^* E_a A \right) \left(\sum_{b=1}^r \frac{1}{\alpha_b} A^* E_b \right) \\ &= \sum_{a=1}^r \sum_{b=1}^r \frac{1}{\alpha_a \alpha_b} A^* E_a (AA^*) E_b. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Agora, pela decomposição espectral para AA^* , e seguindo que $(AA^*)E_b = \alpha_b E_b$. Tem-se

$$BAB = \sum_{a=1}^r \sum_{b=1}^r \frac{1}{\alpha_a} A^* E_a E_b = \left(\sum_{a=1}^r \frac{1}{\alpha_a} A^* E_a \right) \left(\sum_{b=1}^r E_b \right) = B, \quad (2.28)$$

uma vez que $\sum_{b=1}^r E_b = \mathbb{I}_m$. Isto prova que $A = A^+$, quando 0 não é um auto-valor de AA^* .

Caso 2: Considerando o caso em que 0 é um auto-valor de AA^* , $\alpha_1 = 0$, tem-se:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} A^*(AA^* + \mu \mathbb{I}_m)^{-1} = \sum_{a=1}^r \frac{1}{\alpha_a} A^* E_a = B. \quad (2.29)$$

Usando $(AA^*)E_a = \alpha_a E_a$ e a decomposição espectral para AA^* , temos:

$$\begin{aligned} AB &= \sum_{a=2}^r \frac{1}{\alpha_a} AA^* E_a = \sum_{a=2}^r \frac{1}{\alpha_a} \alpha_a E_a \\ &= \sum_{a=2}^r E_a = \mathbb{I}_m - E_1, \end{aligned} \quad (2.30)$$

que também é auto-adjunto. Uma vez que E_1 é auto-adjunto, temos que

$$BA = \sum_{a=2}^r \frac{1}{\alpha_a} A^* E_a A, \quad (2.31)$$

é também auto-adjunto. De (2.30), segue-se que $ABA = A - E_1 A$. Note agora que $(E_1 A)^* = A^* E_1 = 0$, estabelecendo que $E_1 A = 0$ e que $ABA = A$. Com o somatório anterior segue-se que

$$\begin{aligned} BAB &= \left(\sum_{a=2}^r \frac{1}{\alpha_a} A^* E_a A \right) \left(\sum_{b=2}^r \frac{1}{\alpha_b} A^* E_b \right) \\ &= \sum_{a=1}^r \sum_{b=1}^r \frac{1}{\alpha_a \alpha_b} A^* E_a (AA^*) E_b. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Usando novamente $(AA^*)E_b = \alpha_b E_b$, tem-se:

$$\begin{aligned} BAB &= \sum_{a=2}^r \sum_{b=2}^r \frac{1}{\alpha_a} A^* E_a E_b \\ &= \left(\sum_{a=2}^r \frac{1}{\alpha_a} A^* E_a \right) \left(\sum_{b=2}^r E_b \right) \\ &= B - \sum_{a=2}^r \frac{1}{\alpha_a} A^* E_a E_1 \\ &= B, \end{aligned} \quad (2.33)$$

uma vez que $\sum_{b=2}^r E_b = \mathbb{I}_m - E_1$ e já que $E_a E_1 = 0$ para $a \neq 1$. Isto mostra que $BAB = B$.

Consequentemente, estabelece-se que $A = A^+$ também nos casos em que AA^* tem um auto-valor 0. Finalizando assim a prova do teorema que permite-nos escrever uma pseudoinversa de Penrose com uma regularização de Tikhonov. Tal possibilidade permite-nos descrever uma inversa para qualquer tipo de matriz, inclusive as com determinante nulo.

3 A CONSTRUÇÃO DO AUTOESPINOR DO OPERADOR DE CONJUGAÇÃO DE CARGA

3.1 NOTAÇÃO E REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL DE WEYL

É sabido que os espinores conhecidos de Dirac e Majorana podem ser descritos na representação de Weyl. Por sua vez, tais representações espaciais dos espinores de Weyl mão-direita e mão-esquerda sob uma transformação do boost de Lorentz são dadas respectivamente por:

$$\phi_R(p^\mu) = \exp\left(+\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) \phi_R(k^\mu) \text{ e } \phi_L(p^\mu) = \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) \phi_L(k^\mu), \quad (3.1)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ representa o conjunto de matrizes de Pauli ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) e $\boldsymbol{\varphi}$ o parâmetro de *boost*, definido para que $\exp(i\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varphi})$ atue no quadrimomento no referencial de repouso

$$k^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \left(m, \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}}{p}\right), \quad p = |\mathbf{p}|, \quad (3.2)$$

e leve ao quadrimomento geral padrão $p^\mu = (E, p \sin \theta \cos \phi, p \sin \theta \sin \phi, p \cos \theta)$. Temos assim os parâmetros de *boost* $\cosh \varphi = E/m$ e $\sinh \varphi = p/m$ com $\hat{\varphi} = \hat{\mathbf{p}}$, i.e., a direção do *boost* é a mesma do quadrimomento generalizado, com m sendo referente a massa. Tendo em vista que as transformações mais gerais de Lorentz são compostas por rotações e *boosts*, e como as teorias espinoriais seguintes buscam por sua vez serem invariantes por tais transformações, os geradores destas transformações e suas respectivas matrizes serão de grande importância no decorrer deste trabalho. Temos, então, que as matrizes 4×4 para os geradores de *boosts* no espaço de Minkowski são dadas por

$$\mathbf{K}_x = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{J}$ são as matrizes geradores de rotação,

$$\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{J}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{J}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As equações dadas em (3.1) seguem do fato de que $+i\boldsymbol{\sigma}/2$ são os geradores do *boost* para a representação mão-direita de Weyl, enquanto $-i\boldsymbol{\sigma}/2$ são os geradores do *boost* para a

representação espacial mão-esquerda de Weyl. Por soma direta das representações espaciais podemos escrever então que os geradores de *boost* e rotações como sendo respectivamente:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -i\sigma/2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & +i\sigma/2 \end{pmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \sigma/2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \sigma/2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

3.2 O OPERADOR DE PARIDADE E OS ESPINORES DE DIRAC

Nesta seção será mostrado como o operador de paridade afeta os espinores de Weyl e como gera, por assim dizer, a dinâmica de Dirac. Sabendo então que a definição de Paridade no espaço de Minkowski é dada pelo mapeamento

$$P : x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) \longrightarrow x'^\mu = (x^0, -\mathbf{x}), \quad (3.4)$$

e sabendo também que podemos escrever um espinor generalizado de quatro componentes como a soma direta das representações de Weyl, com $m \neq 0$, temos

$$\psi(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \psi(k^\mu). \quad (3.5)$$

Observa-se que sob atuação de P as matrizes de Pauli não sofrem nenhuma modificação ($\sigma \rightarrow \sigma$), enquanto que, como denotamos $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\mathbf{p}}$, temos que $\boldsymbol{\varphi} \rightarrow -\boldsymbol{\varphi}$. Portanto é obtido que o operador de paridade perfaz um intercâmbio das representações espaciais mão-direita e mão-esquerda de Weyl. Essa importante afirmação pode ser escrita na forma matricial, entendendo P como sendo uma matriz 4×4 :

$$P\psi(p^\mu) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \psi(p'^\mu) = \gamma_0 \psi(p'^\mu), \quad (3.6)$$

onde p' é p transformado pelo operador P , enquanto $\mathbb{O}$ e $\mathbb{I}$ são as matrizes nula e identidade, respectivamente, ambas matrizes 2×2 . Partindo então de que $\psi(p'^\mu)$ pode ser escrito como

$$\psi(p'^\mu) = \exp[i\mathbf{k} \cdot (-\boldsymbol{\varphi})] \psi(k^\mu), \quad (3.7)$$

e tirando de (3.5) que $\psi(k^\mu) = \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \psi(p^\mu)$, a equação acima pode ser reescrita na forma

$$\psi(p'^\mu) = \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \psi(p^\mu) = \exp(-2i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \psi(p^\mu). \quad (3.8)$$

Substituindo $\psi(p'^\mu)$ em (3.6), notando que γ_0 anti-comuta com cada um dos geradores de boost ($\mathbf{k}_i$) (o que implica $\gamma_0 \mathbf{k}_i = -\mathbf{k}_i \gamma_0$), encontramos que

$$P\psi(p^\mu) = \exp(2i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \gamma_0 \psi(p^\mu). \quad (3.9)$$

Tendo o objetivo de simplificar esta equação, é feita agora uma expansão em série de potência nesta exponencial, ainda levando em conta que uma das propriedades das matrizes de Pauli é $\sigma^2 = 1$. Desta forma temos:

$$e^{(2i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\varphi})}\gamma_0 = [\cosh \varphi + 2i\mathbf{k} \sinh \varphi]\gamma_0. \quad (3.10)$$

Recordando, portanto, que $\cosh \varphi = E/m$, $\sinh \varphi = p/m$ e que

$$2i\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

tem-se por fim

$$e^{(2i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\varphi})}\gamma_0 = m^{-1}\gamma_0 p^0 + m^{-1}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}, \quad (3.12)$$

à qual ainda podemos reescrever de forma mais compacta

$$e^{(2i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\varphi})}\gamma_0 = m^{-1}\gamma_\mu p^\mu, \quad (3.13)$$

onde $\gamma_\mu = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma})$ são as matrizes de Dirac na representação de Weyl

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbb{O} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Logo, substituindo (3.13) em (3.9), obtemos:

$$P\psi(p^\mu) = m^{-1}\gamma_\mu p^\mu \psi(p^\mu), \quad (3.15)$$

o que nos permite escrever P em abstrato como sendo $P = m^{-1}\gamma_\mu p^\mu$ (SPERANÇA, 2014). É interessante observar que o operador P é aplicado a todos os espinores, mas seus autoespinores são geralmente chamados de espinores de Dirac. Os autovalores destes autoespinores de P são iguais a ± 1 :

$$P\psi_\sigma^S(p^\mu) = +\psi_\sigma^S(p^\mu), \quad P\psi_\sigma^A(p^\mu) = -\psi_\sigma^A(p^\mu), \quad (3.16)$$

onde, aqui, σ é o índice de degenerescência (cada um deles tem uma dupla degenerescência), enquanto os outros índices, S e A , referem-se respectivamente a autoconjugação e a anti-autoconjugação de $\psi(p^\mu)$ sob a atuação de P . Reescrevendo de forma mais explícita, temos também:

$$(\gamma_\mu p^\mu - m\mathbb{I})\psi_\sigma^S(p^\mu) = 0; \quad (\gamma_\mu p^\mu + m\mathbb{I})\psi_\sigma^A(p^\mu) = 0. \quad (3.17)$$

Ou seja, os autoespinores do operador de paridade obedecem a equação de Dirac.

3.3 A ATUAÇÃO DO OPERADOR DE CONJUGAÇÃO DE CARGA

Um operador que ao atuar em um espinor conjugue a sua carga produz:

$$C\psi(p) = \psi_c(p). \quad (3.18)$$

É visto em (AHLUWALIA, 2017) (RAMOND, 1997) que a construção de C se dá em função das matrizes do operador de reversão temporal de Wigner e do operador K , que tem a finalidade de tomar o complexo conjugado de qualquer quantidade que esteja a sua direita, tudo isso na forma:

$$C \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \mathbb{O} & i\Theta \\ -i\Theta & \mathbb{O} \end{pmatrix} K = \gamma_2 K. \quad (3.19)$$

O operador de reversão temporal de Wigner é, por sua vez, na sua representação para spin $1/2$, dado por:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

3.3.1 A estrutura dos Autoespinores do Operador de Conjugação de Cargas (ELKO)

Antes de entrar no mérito dos autoespinores é interessante observar uma das características das matrizes de Pauli, $\sigma_2 \sigma_i \sigma_2^* = \sigma_i^*$, que pode ser reescrita através do Operador de Wigner, dado em (3.20):

$$\Theta \sigma \Theta^{-1} = -\sigma^*, \text{ com } \Theta^{-1} = -\Theta. \quad (3.21)$$

Esta equação leva a um importante resultado, chamado de “mágica das matrizes de Pauli”, que é crucial para a construção dos autoespinores do operador de conjugação de carga, ELKO, e que se dá pelas seguintes relações:

1. Se $\phi_L(\mathbf{p}^\mu)$ se transforma como um espinor de mão esquerda, então $(\zeta_\lambda \Theta) \phi_L^*(\mathbf{p}^\mu)$ se transforma como um espinor de mão direita, com ζ_λ sendo uma fase ainda não especificada;
2. Se $\phi_R(\mathbf{p}^\mu)$ se transforma como uma componente de mão direita, então $(\zeta_\rho \Theta) \phi_R^*(\mathbf{p}^\mu)$ se transforma como mão esquerda, com ζ_ρ também sendo uma fase ainda não especificada.

A “mágica” acontece quando seguem-se os seguintes passos: primeiro tire o complexo conjugado de ambos os membros de (3.1), então multiplique à esquerda por Θ e use a característica do operador de Wigner, definida em (3.21). Essa sequência de manipulações acaba resultando em:

$$\begin{aligned} [\zeta_\lambda \Theta \phi_L^*(p^\mu)] &= \exp\left(+\frac{\sigma}{2} \cdot \varphi\right) [\zeta_\lambda \Theta \phi_L^*(k^\mu)], \\ [\zeta_\rho \Theta \phi_R^*(p^\mu)] &= \exp\left(-\frac{\sigma}{2} \cdot \varphi\right) [\zeta_\rho \Theta \phi_R^*(k^\mu)]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

É observado agora que as componentes mão direita e mão esquerda da representação espinorial de Weyl transformam-se através das matrizes de Pauli. Isto é, diferentemente do caso dos espinores de Dirac, onde as componentes espinoriais se transformavam sob a atuação do operador de paridade, enfatiza-se que aqui não se faz nenhuma alusão a um operador de simetria para a transformação das componentes, o único vínculo estabelecido entre elas é pelas matrizes de Pauli, e seu comportamento dado em (3.21).

Toda essa observação é essencial e também motiva a introdução de dois novos conjuntos de espinores de quatro componentes:

$$\lambda(p^\mu) = \begin{pmatrix} \zeta_\lambda \Theta \phi_L^*(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, \quad \rho(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \zeta_\rho \Theta \phi_R^*(p^\mu) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Entretanto, como os dois conjuntos de espinores fornecem o mesmo resultado, voltaremos nossa atenção somente para o conjunto $\lambda(p^\mu)$.

3.3.2 Os Autoepinores do Operador de Conjugação de Cargas (ELKO)

A presença de K na definição do operador de conjugação de carga (3.19) introduz uma liberdade na escolha do autovalores de C .

$$C\lambda(p^\mu) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & i\Theta \\ -i\Theta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_\lambda^* \Theta \phi_L(p^\mu) \\ \phi_L^*(p^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\Theta \phi_L^*(p^\mu) \\ -i\zeta_\lambda^* \Theta^2 \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\Theta \phi_L^*(p^\mu) \\ i\zeta_\lambda^* \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Ao nos limitarmos apenas a autovalores reais, esses espinores tornar-se-ão autoespinores do operador conjugação de carga com autovalores iguais à ± 1 . Então se a escolha de ζ_λ for $\pm i$, teremos

$$C\lambda^S(p^\mu) = +\lambda^S(p^\mu), \quad C\lambda^A(p^\mu) = -\lambda^A(p^\mu), \quad (3.25)$$

onde

$$\lambda(p^\mu) = \begin{cases} \lambda^S(p^\mu) = \begin{pmatrix} i\Theta \phi_L^*(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, & \text{para } \zeta_\lambda = +i; \\ \lambda^A(p^\mu) = \begin{pmatrix} -i\Theta \phi_L^*(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, & \text{para } \zeta_\lambda = -i. \end{cases} \quad (3.26)$$

O espinor $\lambda^S(p^\mu)$ é chamado de espinor autoconjugado, ou “Self-Conjugate”, enquanto o espinor $\lambda^A(p^\mu)$ é chamado de anti-autoconjugado, ou “Anti-Self-Conjugate”.

3.3.2.1 Construção da Forma explícita do ELKO

Para obter a forma explícita de $\lambda(p^\mu)$ é necessário antes tratar o espinor em seu referencial de repouso, $\lambda(k^\mu)$, e, posteriormente, transformá-lo atuando com *boost*, de modo que teremos:

$$\lambda(p^\mu) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \lambda(k^\mu), \quad (3.27)$$

sendo $\mathbf{k}$ o gerador de *boost* definido em (3.3). Assim sendo, temos que operador de *boost* acima pode ser escrito como

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) = \begin{pmatrix} e^{(\boldsymbol{\sigma}/2) \cdot \boldsymbol{\varphi}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & e^{-(\boldsymbol{\sigma}/2) \cdot \boldsymbol{\varphi}} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \mathbb{I} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

A fim de se obter a forma mais explícita dos autoespinores do operador de conjugação de carga é imposto:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi_L^\pm(k^\mu) = \pm \phi_L^\pm(k^\mu), \quad (3.29)$$

isto é, que a componente $\phi_L(k^\mu)$ seja um auto estado do operador de helicidade $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$. O conceito de helicidade, visto que o operador é produto interno entre o operador de projeção do spin e o momento, nos dá a informação sobre a projeção do spin na direção do movimento da partícula. Tal operador $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ na sua forma matricial é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Analisando primeiramente para a helicidade positiva, encontramos que

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{L1}^+ \\ \phi_{L2}^+ \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} \phi_{L1}^+ \\ \phi_{L2}^+ \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

leva-nos, após algum cálculo de trigonometria, a

$$\phi_L^+(k^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

De modo semelhante, faremos para a helicidade negativa, de modo que

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{L1}^- \\ \phi_{L2}^- \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \phi_{L1}^- \\ \phi_{L2}^- \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

nos leva a

$$\phi_L^-(k^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \cos(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

O fator de massa encontrado em (3.32) e (3.34) é colocado a mão, pois não podem existir partículas sem massa em repouso. Desta forma, no caso limite de partículas sem massa, $m \rightarrow 0$, os espinores em repouso nos espaço de representação de Weyl, mão direita e mão esquerda, desaparecem. A explicação do porquê deste fator de massa estar dentro de uma raiz é decerto complexo, encontrando sua explicação em segunda quantização, de modo que foge do escopo deste trabalho, e portanto será deixado de lado. Para calcular os autoestados de helicidade dos es-

pinos que se transformam como mão direita $\Theta[\phi_L^\pm(k^\mu)]^*$, são feitos os seguintes procedimentos: Primeiramente é obtida a conjugação de $\sigma \cdot \hat{p}[\phi_L^\pm(k^\mu)] = \pm \phi_L^\pm(k^\mu)$,

$$\sigma^* \cdot \hat{p}[\phi_L^\pm(k^\mu)]^* = \pm \phi_L^\pm(k^\mu)^*. \quad (3.35)$$

Agora, substituindo σ^* por (3.21), com $\Theta^{-1} = -\Theta$, e finalmente multiplicando pela esquerda por Θ , temos

$$\sigma \cdot \hat{p}[\Theta[\phi_L^\pm(k^\mu)^*]] = \mp [\Theta[\phi_L^\pm(k^\mu)^*]]. \quad (3.36)$$

Isso indica que a helicidade de $\Theta[\phi_L(k^\mu)]^*$ é oposta a de $\phi_L(k^\mu)$, o que mais uma vez contrasta com os espinos de Dirac, cujas componentes possuem mesma helicidade.

Com as componentes mão esquerda e mão direita de $\lambda(k^\mu)$ bem estabelecidas temos de forma mais explícita, dois espinos autoconjugados:

$$\lambda_{(-,+)}^S(k^\mu) = \begin{pmatrix} +i\Theta[\phi_L^+(k^\mu)^*] \\ \phi_L^+(k^\mu) \end{pmatrix}, \lambda_{(+,-)}^S(k^\mu) = \begin{pmatrix} +i\Theta[\phi_L^-(k^\mu)^*] \\ \phi_L^-(k^\mu) \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

e outros dois anti-autoconjugados:

$$\lambda_{(-,+)}^A(k^\mu) = - \begin{pmatrix} -i\Theta[\phi_L^+(k^\mu)^*] \\ \phi_L^+(k^\mu) \end{pmatrix}, \lambda_{(+,-)}^A(k^\mu) = \begin{pmatrix} -i\Theta[\phi_L^-(k^\mu)^*] \\ \phi_L^-(k^\mu) \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Importante notar que as quantidades entre parênteses ($\pm, \mp$) estão relacionadas com a helicidade, sendo a primeira entrada referente a helicidade da componente que se transforma como mão-direita, enquanto a segunda entrada refere-se a helicidade da componente que se transforma como mão-esquerda.

Desta forma, após determinarmos todos os espinos em repouso, $\lambda(k^\mu)$, é aplicado o *boost* como mostrado em (3.27), para se encontrar $\lambda(p^\mu)$. Sendo assim, temos que a aplicação de (3.28) nos leva a forma explícita de $\lambda(p^\mu)$:

$$\lambda_{(+,-)}^S(p^\mu) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left[1 - \frac{p}{E+m} \right] \lambda_{(+,-)}^S(k^\mu), \quad (3.39)$$

$$\lambda_{(-,+)}^S(p^\mu) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left[1 + \frac{p}{E+m} \right] \lambda_{(-,+)}^S(k^\mu), \quad (3.40)$$

$$\lambda_{(+,-)}^A(p^\mu) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left[1 + \frac{p}{E+m} \right] \lambda_{(+,-)}^A(k^\mu), \quad (3.41)$$

$$\lambda_{(-,+)}^A(p^\mu) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left[1 - \frac{p}{E+m} \right] \lambda_{(-,+)}^A(k^\mu). \quad (3.42)$$

Contrastando nitidamente com os autoespinos do operador de paridade, isto é, os espinos

de Dirac, os autoespinores do operador de conjugação de carga, $\lambda_{\pm}^{S,A}(p^{\mu})$, são simplesmente os espinores no referencial de repouso $\lambda(k^{\mu})$ escalonados pelos fatores de energias indicado.

4 O DUAL DO ELKO

A definição do dual do ELKO é de fato um dos objetivos deste trabalho. A existência do dual espinorial é importante para teoria mostrada anteriormente, uma vez que, como já dito, o efeito de um espinor nunca será probabilisticamente observado sem seu correspondente dual. Então, como uma primeira abordagem, será tomado o dual dos espinores de Dirac, $\bar{\psi}(p^\mu) = \psi^\dagger(p^\mu)\gamma_0$, como referência para construção dos duais dos espinores ELKO. É importante observar que esta escolha se faz pois a quantidade $\bar{\psi}(p^\mu)\psi(p^\mu)$ é um invariante sob transformações de Lorentz, ou seja um escalar, resultado que se quer reproduzir para os ELKOS. Deste modo uma primeira tentativa para o dual do ELKO se dá por:

$$\bar{\lambda}_\alpha^{S,A}(p^\mu) = [\lambda_\alpha^{S,A}(p^\mu)]^\dagger \gamma_0. \quad (4.1)$$

Entretanto, ao acoplar os espinores usuais e os duais, obtidos com o procedimento acima, surgem normas nulas e normas imaginárias¹, ou seja, normas indesejadas. De forma mais explícita, se o dual do ELKO tiver a mesma construção que o de Dirac, teremos as seguintes configurações, com normas nulas:

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^S(p^\mu)\lambda_{(\pm,\mp)}^S(p^\mu) = 0, \quad (4.2)$$

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^S(p^\mu)\lambda_{(\pm,\mp)}^A(p^\mu) = 0, \quad (4.3)$$

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^S(p^\mu)\lambda_{(\mp,\pm)}^A(p^\mu) = 0, \quad (4.4)$$

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^A(p^\mu)\lambda_{(\pm,\mp)}^A(p^\mu) = 0, \quad (4.5)$$

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^A(p^\mu)\lambda_{(\pm,\mp)}^S(p^\mu) = 0, \quad (4.6)$$

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^A(p^\mu)\lambda_{(\mp,\pm)}^S(p^\mu) = 0, \quad (4.7)$$

e as seguintes com normas imaginárias:

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^S(p^\mu)\lambda_{(\mp,\pm)}^S(p^\mu) = \mp 2im, \quad (4.8)$$

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^A(p^\mu)\lambda_{(\mp,\pm)}^A(p^\mu) = \pm 2im. \quad (4.9)$$

Veremos a seguir que é graças às normas imaginárias, dadas em (4.8) e (4.9), que se pode definir um novo dual, pelo qual conseguimos extrair a física associada aos campos quânticos dos espinores ELKO.

¹ Um exemplo de cada cálculo destas normas se encontra em detalhe no apêndice A

4.1 A CONSTRUÇÃO DO NOVO DUAL ESPINORIAL

A fim de encontrar um dual que assegure uma norma real, não nula e invariante por transformações de Lorentz, será considerado um espinor de forma genérica, chamando-o de $\varrho(p^\mu)$, para assim pensar em um dual mais geral, $\tilde{\varrho}_\alpha(p^\mu)$ e assim definindo então suas restrições necessárias. A forma geral do dual é definida então como:

$$\tilde{\varrho}_\alpha(p^\mu) \stackrel{def}{=} [\Xi(p^\mu)\varrho_\alpha(p^\mu)]^\dagger \eta, \quad (4.10)$$

sendo $\Xi(p^\mu)$ e η matrizes 4×4 , com elementos de $\eta \in \mathbb{C}$. A tarefa do operador $\Xi(p^\mu)$ é atuar em um dos espinores $\varrho_\alpha(p^\mu)$ e transformá-lo, a menos de uma fase, em um espinor $\varrho_\beta(p^\mu)$ que pertença ao mesmo conjunto de espinores que ele. Não é exigido que β e α sejam iguais. É exigido ainda, que $\Xi^2 = \mathbb{I}$, para que o mapa seja invertível, podendo escrever o usual em termos do espinor dual e também para que o dual do dual coincida com o espinor usual.

4.1.1 Determinando η como invariante de Lorentz:

Com a exigência de que para qualquer transformação arbitrária ocorra invariância por Lorentz do termo dual-usual, temos:

- Para boosts:

$$[\Xi(k^\mu)\varrho(k^\mu)]^\dagger \eta \varrho(k^\mu) = [\Xi(p^\mu)\varrho(p^\mu)]^\dagger \eta \varrho(p^\mu). \quad (4.11)$$

Ao levar em conta que $\varrho(p^\mu) = e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}} \varrho(k^\mu)$, sendo $\mathbf{k}$ os geradores de boosts dados em (3.3), e sabendo que estes mesmos geradores tem a seguinte característica, $\mathbf{k}^\dagger = -\mathbf{k}$, pode-se reescrever o lado direito de (4.11), como:

$$[\Xi(p^\mu)\varrho(p^\mu)]^\dagger \eta \varrho(p^\mu) = \varrho^\dagger(k^\mu) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}} \Xi^\dagger(p^\mu) \eta e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}} \varrho(k^\mu). \quad (4.12)$$

Usando ainda o fato que $\Xi(p^\mu) = e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}} \Xi(k^\mu) e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}}$, a equação (4.12) fica:

$$[\Xi(p^\mu)\varrho(p^\mu)]^\dagger \eta \varrho(p^\mu) = \varrho^\dagger(k^\mu) \underbrace{e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}}}_{=1} \Xi^\dagger(k^\mu) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}} \eta e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}} \varrho = [\Xi(k^\mu)\varrho(k^\mu)]^\dagger e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}} \eta e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}} \varrho(k^\mu), \quad (4.13)$$

que comparado com a equação (4.11), leva a

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}} \eta e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}} = \eta. \quad (4.14)$$

Em outras palavras, a matriz η deve anticomutar com cada um dos geradores de boosts k_i , dados em (3.3), com $i = x, y, z$:

$$\{k_i, \eta\} = 0. \quad (4.15)$$

- Para rotações:

Analogamente, ao implementar uma rotação para este mesmo espinor generalizado, o termo dual-usual fica

$$[\Xi(p^\mu)\varrho(p^\mu)]^\dagger \eta \varrho(p^\mu) = [\Xi(p'_\mu)\varrho(p'_\mu)]^\dagger \eta \varrho(p'_\mu), \quad (4.16)$$

de forma que $\varrho(p'_\mu)$ é dado como $\varrho(p'_\mu) = e^{i\zeta \cdot \theta} \varrho(p_\mu)$, sendo ζ os geradores de rotação dados em (3.3), com a seguinte característica $\zeta^\dagger = \zeta$. Ainda é oportuno dizer que $\Xi(p'_\mu)$ se transforma por $\Xi(p'_\mu) = e^{i\zeta \cdot \theta} \Xi(p^\mu) e^{-i\zeta \cdot \theta}$, sob rotações. Logo pode-se reescrever o lado direito de (4.16), como:

$$[\Xi(p'_\mu)\varrho(p'_\mu)]^\dagger \eta \varrho(p'_\mu) = [\Xi(p^\mu)\varrho(p^\mu)]^\dagger e^{-i\zeta \cdot \theta} \eta e^{i\zeta \cdot \theta} \varrho(p^\mu), \quad (4.17)$$

que ao ser comparado com o lado esquerdo de (4.16), fornece:

$$e^{-i\zeta \cdot \theta} \eta e^{i\zeta \cdot \theta} = \eta. \quad (4.18)$$

Ou seja, a matriz η deve comutar com cada um dos geradores de rotação ζ_i , também dados em (3.3), com $i = x, y, z$:

$$[\zeta_i, \eta] = 0. \quad (4.19)$$

Agora, com as restrições bem determinadas, é possível determinar a matriz η partindo de sua definição como uma matriz qualquer

$$\eta = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & l & m & n \\ p & q & r & s \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Como partida, toma-se a anticomutação de $\{k_z, \eta\} = 0$:

$$\{k_z, \eta\} = \begin{pmatrix} -ia & 0 & c & -id \\ 0 & +if & +ig & 0 \\ 0 & +il & +im & 0 \\ -ip & j & 0 & -is \end{pmatrix} = 0, \quad (4.21)$$

resultando na anulação de vários elementos de η .

$$a = d = f = g = l = m = p = s = 0, \quad (4.22)$$

de modo que se obtém:

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & b & c & 0 \\ e & 0 & 0 & h \\ j & 0 & 0 & n \\ 0 & q & r & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Posteriormente, fazendo $\{k_x, \eta\} = 0$, temos que:

$$\{k_x, \eta\} = \begin{pmatrix} -i\frac{(e+b)}{2} & 0 & 0 & -i\frac{(h-c)}{2} \\ 0 & -i\frac{(b+e)}{2} & -i\frac{(c-h)}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{(q-j)}{2} & i\frac{(r+n)}{2} & 0 \\ i\frac{(j-q)}{2} & 0 & 0 & i\frac{(n+r)}{2} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.24)$$

levando às seguintes igualdades:

$$b = -e \quad c = h \quad q = j \quad r = -n. \quad (4.25)$$

Agora finalizando as anticomutações de η com os geradores de boosts e fazendo:

$$\{k_y, \eta\} = \begin{pmatrix} \frac{(b-e)}{2} & 0 & 0 & \frac{(c-h)}{2} \\ 0 & \frac{(b-e)}{2} & \frac{(c-h)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(q-j)}{2} & \frac{(r-n)}{2} & 0 \\ \frac{(q-j)}{2} & 0 & 0 & \frac{(r-n)}{2} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.26)$$

podemos concluir que $b = e = r = n = 0$. Deste modo, como complemento, usando a relação de comutação $[\zeta_x, \eta] = 0$, obtemos que $n = 0$, assim podendo definir η como sendo:

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Este resultado é de fato interessante, uma vez que é obtido que a matriz pode ser reescrita com $\eta = (c/j)\gamma_0$, onde (c/j) é um valor constante a ser determinado.

4.1.2 O dual para $\lambda(p^\mu)$

Com base na subseção anterior é feita uma definição de $\Xi(p^\mu)$ para construir o novo dual para o ELKO, este é dado em função das relações dadas em (4.8) e (4.9) buscando assim respeitar as características impostas. Tal definição é dada por:

$$\Xi(p^\mu) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2m} (\lambda_{(+,-)}^S \bar{\lambda}_{(+,-)}^S + \lambda_{(-,+)}^S \bar{\lambda}_{(-,+)}^S - \lambda_{(+,-)}^A \bar{\lambda}_{(+,-)}^A - \lambda_{(-,+)}^A \bar{\lambda}_{(-,+)}^A), \quad (4.28)$$

que na forma matricial fica:

$$\Xi(p^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{ipsin\theta}{m} & \frac{-i(E+pcos\theta)e^{-i\phi}}{m} & 0 & 0 \\ \frac{i(E-pcos\theta)e^{i\phi}}{m} & \frac{-ipsin\theta}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-ipsin\theta}{m} & \frac{-i(E-pcos\theta)e^{-i\phi}}{m} \\ 0 & 0 & \frac{i(E+pcos\theta)e^{i\phi}}{m} & \frac{ipsin\theta}{m} \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

a partir de onde é possível se extrair as informações requeridas anteriormente, de que $\Xi^2 = \mathbb{I}$ e que também exista sua inversa. Esta matriz dada em (4.29) pode ser reescrita também como:

$$\Xi(p^\mu) = m^{-1}\mathcal{G}(\phi)\gamma_\mu p^\mu, \quad (4.30)$$

onde $\mathcal{G}(\phi)$ é dado por:

$$\mathcal{G}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & 0 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & 0 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

A análise em torno da restrição de $\Xi(p^\mu)$ em relação aos boosts permanece inalterada, de modo que se mantém a relação $\{k_i, \eta\} = 0$, com $i = x, y, z$. Entretanto é prudente fazer a análise para a restrição de rotação, tendo em vista explícita dependência em ϕ . Partindo então de:

$$[m^{-1}\mathcal{G}(\phi)\gamma_\mu p^\mu \lambda(p^\mu)]^\dagger \eta \lambda(p^\mu) = [m^{-1}\mathcal{G}(\phi)\gamma_\mu p'^\mu \lambda(p'^\mu)]^\dagger \eta \lambda(p'^\mu), \quad (4.32)$$

sendo $\lambda(p^\mu)$ qualquer um dos quatro espinores ELKO, com p'^μ representando a quantidade rotacionada. A respectiva equação, dada em (4.32), pode ser simplificada via utilização dos seguintes propriedades:

$$(i) [\mathcal{G}(\phi), \gamma_\mu p^\mu] = 0 \quad (ii) \mathcal{G}(\phi)\lambda(p^\mu) = \pm\lambda(p^\mu). \quad (4.33)$$

Aqui o sinal (+) é correspondente aos espinores $\lambda^S(p^\mu)$ e o sinal (−) é correspondente aos espinores $\lambda^A(p^\mu)$. Logo, (4.32) é reescrita como:

$$[\gamma_\mu p'^\mu \lambda(p'^\mu)]^\dagger \eta \lambda(p^\mu) = [\gamma_\mu p'^\mu \lambda(p'^\mu)]^\dagger \eta \lambda(p'^\mu). \quad (4.34)$$

Ao expressar $\lambda(p'^\mu) = e^{i\zeta \cdot \theta}$, sabendo que $\zeta^\dagger = \zeta$ e que $\gamma_\mu p'^\mu$ se transforma como $e^{i\zeta \cdot \theta} \gamma_\mu p^\mu e^{-i\zeta \cdot \theta}$, o lado direito da equação a cima fica:

$$[\gamma_\mu p'^\mu \lambda(p'^\mu)]^\dagger \eta \lambda(p'^\mu) = \lambda^\dagger(p'^\mu) \underbrace{e^{-i\zeta \cdot \theta} e^{+i\zeta \cdot \theta}}_{=1} (\gamma_\mu p'^\mu)^\dagger e^{-i\zeta \cdot \theta} \eta e^{i\zeta \cdot \theta} \lambda(p'^\mu) = [\gamma_\mu p^\mu \lambda(p^\mu)]^\dagger e^{-i\zeta \cdot \theta} \eta e^{i\zeta \cdot \theta} \lambda(p^\mu). \quad (4.35)$$

Logo, ao comparar com o lado esquerdo da equação (4.32) nota-se que é obtido

$$e^{-i\zeta \cdot \theta} \eta e^{i\zeta \cdot \theta} = \eta, \quad (4.36)$$

o mesmo resultado encontrado em (4.18), significando que assim como para o dual do espinor arbitrário, $\tilde{\varrho}(p^\mu)$, a matriz η , associada ao dual construído para os espinores, deve comutar com cada um dos geradores de rotação ζ_i , com $i = x, y, z$. Desta forma, é fácil conjecturar que esta mesma η deva ter a mesma forma que em (4.27),

$$\eta = (c/j)\gamma_0. \quad (4.37)$$

Para os espinores ELKO é escolhido, com o propósito de garantir que η tenha norma invariante e real, que $c = j = 1$. Além disso, tal escolha garante que as componentes mão direita e mão esquerda, da representação de Weyl dos espinores, transformem-se de forma simétrica. Conclui-se então que:

$$\eta = \gamma_0. \quad (4.38)$$

Agora, tendo em mente os resultados apresentados no começo deste capítulo, (4.2)-(4.9), temos que a atuação de $\Xi(p^\mu)$ no conjunto dos espinores nos fornece como resultado

$$\Xi(p^\mu)\lambda_{(+,-)}^S(p^\mu) = \frac{1}{2m}\lambda_{(-,+)}^S(p^\mu) \underbrace{\bar{\lambda}_{(-,+)}^S(p^\mu)\lambda_{(+,-)}^S(p^\mu)}_{=2im} = i\lambda_{(-,+)}^S(p^\mu). \quad (4.39)$$

Como pode ser verificado, a matriz $\Xi(p^\mu)$ faz o seguinte mapeamento:

$$\Xi(p^\mu)\lambda_{(+,-)}^S = +i\lambda_{(-,+)}^S, \quad (4.40)$$

$$\Xi(p^\mu)\lambda_{(-,+)}^S = -i\lambda_{(+,-)}^S, \quad (4.41)$$

$$\Xi(p^\mu)\lambda_{(+,-)}^A = +i\lambda_{(-,+)}^A, \quad (4.42)$$

$$\Xi(p^\mu)\lambda_{(-,+)}^A = -i\lambda_{(+,-)}^A. \quad (4.43)$$

Notavelmente, a escolha do operador feita em (4.28) tem como principal função a troca de helicidade. Somando isso ao fato de já saber que η pode ser escrito como γ_0 , é concebível agora escrever o novo dual para o ELKO, como em (4.10), de forma que os novos duais são dados por:

$$\tilde{\lambda}_{(+,-)}^{S/A}(p^\mu) = -i[\lambda_{(-,+)}^{S/A}(p^\mu)]^\dagger \gamma_0, \quad (4.44)$$

$$\tilde{\lambda}_{(-,+)}^{S/A}(p^\mu) = +i[\lambda_{(+,-)}^{S/A}(p^\mu)]^\dagger \gamma_0, \quad (4.45)$$

permitindo então que se obtenha as seguintes relações de ortonormalidade:

$$\tilde{\lambda}_\alpha^S(p^\mu)\lambda_{\alpha'}^S(p^\mu) = 2m\delta_{\alpha\alpha'}, \quad (4.46)$$

$$\tilde{\lambda}_\alpha^A(p^\mu)\lambda_{\alpha'}^A(p^\mu) = -2m\delta_{\alpha\alpha'}, \quad (4.47)$$

$$\tilde{\lambda}_\alpha^S(p^\mu)\lambda_{\alpha'}^A(p^\mu) = 0 = \tilde{\lambda}_\alpha^A(p^\mu)\lambda_{\alpha'}^S(p^\mu). \quad (4.48)$$

A nova estrutura contorna os problemas envolvendo as normas nulas e imaginárias do começo do capítulo, tornando possível a busca por quantidades físicas associadas aos espinores ELKO. Interessante é notar a diferença em relação aos espinores de Dirac, onde a estrutura de seu dual, $\bar{\psi}_\alpha = \psi_\alpha^\dagger \gamma_0$, com $\Xi(p^\mu) = \mathbb{I}$, não necessita da troca de helicidade, menos ainda do aparecimento de uma unidade imaginária, para que a norma do espinor seja invariante e real.

4.2 O DUAL DO ELKO E O PROBLEMA NAS SOMAS DE SPIN

O resultado obtido na seção anterior à primeira vista parece satisfatório, mas ao analisar as somas de spin que decorrem dessa nova formulação, e fazemos isto tendo em vista que para os espinores de Dirac a estrutura dual não impõe nenhuma limitação (ROGERIO, 2014), é encontrado:

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha^S(p^\mu)\tilde{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) = \lambda_{(+,-)}^S(p^\mu)\tilde{\lambda}_{(+,-)}^S(p^\mu) + \lambda_{(-,+)}^S(p^\mu)\tilde{\lambda}_{(-,+)}^S(p^\mu) = \quad (4.49)$$

$$\underbrace{\left[\frac{E+m}{2m} \left(1 - \frac{p^2}{(E+m)^2} \right) \right]}_{=1} \underbrace{\left(i\lambda_{(+,-)}^S(k^\mu)[\lambda_{(-,+)}^S(k^\mu)]^\dagger - i\lambda_{(-,+)}^S(k^\mu)[\lambda_{(+,-)}^S(k^\mu)]^\dagger \right)}_{m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & 1 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & 1 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \gamma_0,$$

e

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha^A(p^\mu)\tilde{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) = \lambda_{(+,-)}^A(p^\mu)\tilde{\lambda}_{(+,-)}^A(p^\mu) + \lambda_{(-,+)}^A(p^\mu)\tilde{\lambda}_{(-,+)}^A(p^\mu) = \quad (4.50)$$

$$\underbrace{\left[\frac{E+m}{2m} \left(1 - \frac{p^2}{(E+m)^2} \right) \right]}_{=1} \underbrace{\left(i\lambda_{(+,-)}^A(k^\mu)[\lambda_{(-,+)}^A(k^\mu)]^\dagger - i\lambda_{(-,+)}^A(k^\mu)[\lambda_{(+,-)}^A(k^\mu)]^\dagger \right)}_{m \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & -1 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & -1 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \gamma_0.$$

De forma mais compacta, escrevemos as somas de spin como:

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}) \tilde{\lambda}_{\alpha}^S(p^{\mu}) = m[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)], \quad (4.51)$$

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}) \tilde{\lambda}_{\alpha}^A(p^{\mu}) = -m[\mathbb{I} - \mathcal{G}(\phi)], \quad (4.52)$$

onde $\mathcal{G}(\phi)$, é a mesma matriz apresentada em (4.31). O aparecimento de $\mathcal{G}(\phi)$ nas equações (4.51) e (4.52), implica uma dependência nas somas de spin de uma direção espacial, o que faz existir uma quebra da covariância relativística, uma quebra de simetria de Lorentz. Para contornar este problema, há dois caminhos possíveis: um deles é por meio da Very Special Relativity (VSR), uma teoria relativística baseada em um subgrupo do grupo de Lorentz. Por transformações deste subgrupo as somas de spin são covariantes. Uma boa discussão deste caminho é encontrado no apêndice C de (ROGERIO, 2018) e também em (AHLUWALIA; HORVATH, 2010). O outro caminho, tendo como premissa que os espinores ELKO sejam invariantes por transformações de Lorentz, é por meio de uma nova redefinição do dual, isto é, da análise da possibilidade da existência de alguma liberdade deixada na definição da estrutura dual. Veremos uma redefinição possível, que busca sanar os problemas constatados nas somas de spin e (como as somas de spin aparecem no cerne da estrutura do propagador associado ao campo dos espinores) que por sua vez está ligada a interpretação de partícula e localidade. Esta nova redefinição também buscará determinar uma nova estrutura para os duais sem alterar as informações físicas carregada por estes espinores.

4.3 REDEFININDO A ESTRUTURA DO DUAL

A presente seção terá como objetivo, então, definir uma nova estrutura para os duais do espinores ELKO, preservando a invariância por meio das transformações de Lorentz de ortonormalidade e buscando determinar a invariância das somas de spin. Deste modo, é introduzida a nova definição do dual como sendo:

$$\tilde{\lambda}_{\alpha}^S(p^{\mu}) \longrightarrow \bar{\lambda}_{\alpha}^S(p^{\mu}) = \tilde{\lambda}_{\alpha}^S(p^{\mu}) \mathcal{A}, \quad (4.53)$$

$$\tilde{\lambda}_{\alpha}^A(p^{\mu}) \longrightarrow \bar{\lambda}_{\alpha}^A(p^{\mu}) = \tilde{\lambda}_{\alpha}^A(p^{\mu}) \mathcal{B}, \quad (4.54)$$

onde as quantidades $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tem a elas atreladas as seguintes propriedades:

- Os espinores $\lambda_{\alpha}^S(p^{\mu})$ e $\lambda_{\alpha}^A(p^{\mu})$ devem ser autoespinores de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente, com autovalor +1:

$$\mathcal{A} \lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}) = \lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}), \quad \mathcal{B} \lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}) = \lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}), \quad (4.55)$$

- Os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, devem assegurar:

$$\tilde{\lambda}_{\alpha}^S(p^{\mu}) \mathcal{A} \lambda_{\alpha'}^A(p^{\mu}) = 0, \quad \tilde{\lambda}_{\alpha}^A(p^{\mu}) \mathcal{B} \lambda_{\alpha'}^S(p^{\mu}) = 0. \quad (4.56)$$

Com esta redefinição, as relações de ortonormalidade, definidas em (4.46)-(4.48), devem se manter intactas, isto é:

$$\bar{\lambda}_\alpha^S(p^\mu)\lambda_{\alpha'}^S(p^\mu) = 2m\delta_{\alpha\alpha'}, \quad (4.57)$$

$$\bar{\lambda}_\alpha^A(p^\mu)\lambda_{\alpha'}^A(p^\mu) = -2m\delta_{\alpha\alpha'}, \quad (4.58)$$

$$\bar{\lambda}_\alpha^S(p^\mu)\lambda_{\alpha'}^A(p^\mu) = 0 = \bar{\lambda}_\alpha^A(p^\mu)\lambda_{\alpha'}^S(p^\mu). \quad (4.59)$$

Já as somas de spin, com a redefinição da estrutura devem ficar:

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha^S(p^\mu)\bar{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) = m[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]\mathcal{A}, \quad (4.60)$$

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha^A(p^\mu)\bar{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) = -m[\mathbb{I} - \mathcal{G}(\phi)]\mathcal{B}. \quad (4.61)$$

Ao requisitar a existência de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, que satisfaçam (4.55) e (4.56) e que ao mesmo tempo retornem uma soma de spin invariante por transformações de Lorentz, nota-se que tais operadores devem ser, a menos de uma constante, inversa de $[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]$ e $[\mathbb{I} - \mathcal{G}(\phi)]$, respectivamente. Entretanto, $\det[\mathbb{I} \pm \mathcal{G}(\phi)] = 0$, isto é, as respectivas matrizes são singulares e para calcular as suas inversas lançaremos mão do estudo descrito no Capítulo 2.

4.3.1 O cálculo das pseudoinversas

4.3.1.1 A pseudoinversa de Penrose

A primeira escolha aqui será dada pela pseudoinversa de Penrose, calculada com o método usual. Desta maneira, como visto na seção 2.3.1, a pseudo inversa de uma matriz singular A pode ser dada como $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ ou $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$. Logo, para a matriz $[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]$, temos:

$$[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^+ = [\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger \left([\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)][\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger \right)^{-1}, \quad (4.62)$$

ou

$$[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^+ = \left([\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger [\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)] \right)^{-1} [\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger. \quad (4.63)$$

Entretanto, o que se vê é que as matrizes $\left([\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)][\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger \right)$ e $\left([\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger [\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)] \right)$ são iguais a:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2ie^{-i\phi} \\ 0 & 2 & 2ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -2ie^{-i\phi} & 2 & 0 \\ 2ie^{i\phi} & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)], \quad (4.64)$$

e portanto, também não possuem inversa, o que inviabiliza o cálculo da pseudoinversa por este método.

4.3.1.2 A pseudoinversa de Penrose com regularização de Tikhonov

Como alternativa, em 2.3.2, é mostrado que se os métodos usuais para o cálculo da pseudoinversa de Penrose não funcionam, o método com regularização de Tikhonov, que introduz um parâmetro de “deformação” μ no cálculo, a ser recuperado tomando um limite adequado pode ser bastante adequado. Sendo então A uma matriz singular, sua pseudoinversa com a regularização de Tikhonov é dada por $A^+ = \lim_{\mu \rightarrow 0} A^*(AA^* + \mu\mathbb{I}_m)^{-1}$, ou $A^+ = \lim_{\mu \rightarrow 0} (A^*A + \mu\mathbb{I}_n)^{-1}A^*$. Aplicando tal método ao problema das somas de spin, temos:

$$[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^+ = \lim_{\mu \rightarrow 0} [\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger \left([\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)][\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger + \mu\mathbb{I} \right)^{-1}, \quad (4.65)$$

de modo que a matriz a ser invertida fica:

$$\left([\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)][\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger + \mu\mathbb{I} \right) = \begin{pmatrix} 2 + \mu & 0 & 0 & -2ie^{-i\phi} \\ 0 & 2 + \mu & 2ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -2ie^{-i\phi} & 2 + \mu & 0 \\ 2ie^{i\phi} & 0 & 0 & 2 + \mu \end{pmatrix}, \quad (4.66)$$

com $\det([\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)][\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger + \mu\mathbb{I}) = 8\mu^2 + 32\mu$, que proporciona uma matriz inversa²,

$$\left([\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)][\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger + \mu\mathbb{I} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4+\mu} & 0 & 0 & \frac{-ie^{-i\phi}}{4+\mu} \\ 0 & \frac{1}{4+\mu} & \frac{+ie^{i\phi}}{4+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{-ie^{-i\phi}}{4+\mu} & \frac{1}{4+\mu} & 0 \\ \frac{+ie^{i\phi}}{4+\mu} & 0 & 0 & \frac{1}{4+\mu} \end{pmatrix}. \quad (4.67)$$

Isso nos leva à pseudoinversa de $[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]$ escrita na forma:

$$[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^+ = \lim_{\mu \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{2}{4+\mu} & 0 & 0 & \frac{-2ie^{-i\phi}}{4+\mu} \\ 0 & \frac{2}{4+\mu} & \frac{+2ie^{i\phi}}{4+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{-2ie^{-i\phi}}{4+\mu} & \frac{2}{4+\mu} & 0 \\ \frac{+2ie^{i\phi}}{4+\mu} & 0 & 0 & \frac{2}{4+\mu} \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Verificando agora então se (4.68) é de fato inversa de $[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]$, multiplicaremos $[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^+$ pela esquerda por $[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]$ e tomaremos o limite de $\mu \rightarrow 0$, de forma que obtemos

$$[\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)][\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)]^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & 1 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & 1 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [\mathbb{I} + \mathcal{G}(\phi)], \quad (4.69)$$

² Lembrando que o cálculo da matriz inversa de uma matriz qualquer B é dado por $B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B)}{\det(B)}$.

que é mais uma vez um resultado indesejado.

Persistindo ainda na procura de uma matriz que possa ser dada como inversa dos termos encontrados nas equações (4.51) e (4.52) que quebram a invariância de Lorentz das somas de spin, nos deparamos com um método conhecido como τ -deformação, que se baseia no estudo da vizinhança de matrizes singulares.

4.3.1.3 τ -deformação

Neste procedimento é feita a τ -deformação nas matrizes $\mathcal{G}(\phi)$, determinando claramente um limite adequado para tal. Veremos que o estudo da vizinhanças de matrizes singulares para $[\mathbb{I} + \tau\mathcal{G}(\phi)]$ corroborará, nos cálculos, a determinação deste limite adequado ($\tau \rightarrow 1$), de modo a nos fornecer um suporte matemático adicional para o procedimento. A deformação começa com

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(p^{\mu}) = m [\mathbb{I} + \tau\mathcal{G}(\phi)] \mathcal{A} \Big|_{\tau \rightarrow 1}, \quad (4.70)$$

e

$$\sum_{\alpha} \lambda_h^A(p^{\mu}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(p^{\mu}) = -m [\mathbb{I} - \tau\mathcal{G}(\phi)] \mathcal{B} \Big|_{\tau \rightarrow 1}. \quad (4.71)$$

A corroboração matemática para a deformação, assim como a determinação do limite $\tau \rightarrow 1$, vem do mesmo protocolo utilizado em (BARATA; HUSSEIN, 2012) para a determinação do método para o cálculo da pseudoinversa de Penrose com a regularização de Tikhonov. Isto é, utilizaremos das mesmas proposições que tratam da vizinhança de matrizes singulares, proposição A.4, e da similaridade de matrizes, proposição A.5, tiradas de (BARATA; HUSSEIN, 2012). Dito isto, partimos para o procedimento do fato que as matrizes $\mathbb{I}$ e $\mathcal{G}(\phi)$ são ambas não singulares. Então existem constantes r_1 e r_2 que dependem de $\mathbb{I}$ e $\mathcal{G}(\phi)$, com a condição $0 < r_1 \leq r_2$, tal que $[\mathbb{I} + \tau\mathcal{G}(\phi)]$ é invertível para $\tau \in \mathbb{C}$, com $0 < |\tau| < r_1$ e para todo $\tau \in \mathbb{C}$, com $|\tau| > r_2$. Desta forma

$$\mathbb{I} + \tau\mathcal{G}(\phi) = [\mathbb{I}\tau + \mathcal{G}^{-1}(\phi)] \mathcal{G}(\phi), \quad (4.72)$$

de maneira que $[\mathbb{I} + \tau\mathcal{G}(\phi)]$ é invertível se, e somente se, $[\mathbb{I}\tau + \mathcal{G}^{-1}(\phi)]$ for não singular. Definimos agora $Z \equiv -\mathcal{G}^{-1}(\phi)$ e também $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \in \mathbb{C}$, como sendo as k raízes não necessariamente distintas do polinômio característico $p_z = \det[Z - \lambda\mathbb{I}]$ ³. Fazendo então a substituição em (4.72):

$$\mathbb{I} + \tau\mathcal{G}(\phi) = -[Z - \mathbb{I}\tau] \mathcal{G}(\phi). \quad (4.73)$$

Se todas as raízes de p_z forem nulas, tomaremos $r_1 = r_2 > 0$, arbitrariamente. De outra forma, é definido que r_1 como o menor valor de $|\lambda_k|$ dentre as raízes não nulas de p_z , $r_1 \equiv \min\{|\lambda_k|, \lambda_k \neq 0\}$, e r_2 definido o maior valor de $|\lambda_k|$, para todos os k 's, $r_2 \equiv \max\{|\lambda_k|\}$. Assim

³ É necessário observar que, apesar de ser denotado pela mesma letra grega λ , este conjunto de raízes não tem qualquer relação direta com o espinor ELKO visto neste trabalho.

sendo, temos dois possíveis conjuntos de valores para τ , para os quais τ permite $[\mathbb{I}\tau + \mathcal{G}^{-1}(\phi)]$ ser uma inversa de uma matriz não singular, de modo a garantir que $[\mathbb{I} + \tau\mathcal{G}(\phi)]$ seja invertível. Esses conjuntos de valores permitidos estão entre $\{\tau \in \mathbb{R}, 0 < |\tau| < r_1\}$ e $\{\tau \in \mathbb{R}, |\tau| > r_2\}$. Com isso, temos

$$p_z = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & +ie^{-i\phi} \\ 0 & -\lambda & -ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & +ie^{-i\phi} & -\lambda & 0 \\ -ie^{i\phi} & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1, \quad (4.74)$$

resultando em raízes iguais a ± 1 , ambas com multiplicidade 2. Desta forma, com a observação das restrições dos valores permitidos acima, vemos que $\{\tau \in \mathbb{R}, 0 < |\tau| < 1 \text{ e } |\tau| > 1\}$. Assim, o limite $\tau \rightarrow 1$ é válido para os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, que por sua vez devem fornecer de fato a inversa de (4.70) e (4.71), respectivamente. Agora, finalmente, é feito cálculo dos operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, de forma que:

- Para $\mathcal{A}$ temos que, $\det [\mathbb{I} + \tau\mathcal{G}(\phi)] = (1 - \tau^2)^2$ e portanto sua inversa é dada por:

$$\mathcal{A} = 2 [\mathbb{I} + \tau\mathcal{G}(\phi)]^{-1} = 2 \left(\frac{\mathbb{I} - \tau\mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2} \right). \quad (4.75)$$

- Para $\mathcal{B}$ temos que, $\det [\mathbb{I} - \tau\mathcal{G}(\phi)] = (1 - \tau^2)^2$ e portanto sua inversa é dada por:

$$\mathcal{B} = 2 [\mathbb{I} - \tau\mathcal{G}(\phi)]^{-1} = 2 \left(\frac{\mathbb{I} + \tau\mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2} \right). \quad (4.76)$$

Agora verificando se tais inversas encontradas há pouco se fazem válidas, retornaremos $\mathcal{A}$ à equação (4.70) e $\mathcal{B}$ à equação (4.71), usando ainda do fato que $\mathcal{G}^2(\phi) = \mathbb{I}$. Temos então

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}) \bar{\bar{\lambda}}_{\alpha}^S(p^{\mu}) &= 2m [\mathbb{I} + \tau\mathcal{G}(\phi)] \left(\frac{\mathbb{I} - \tau\mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2} \right) \Bigg|_{\tau \rightarrow 1} \\ &= 2m \underbrace{\mathbb{I} \left(\frac{1 - \tau^2}{1 - \tau^2} \right)}_{=1} \Bigg|_{\tau \rightarrow 1} = 2m\mathbb{I}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}) \bar{\bar{\lambda}}_{\alpha}^A(p^{\mu}) &= -2m [\mathbb{I} - \tau\mathcal{G}(\phi)] \left(\frac{\mathbb{I} + \tau\mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2} \right) \Bigg|_{\tau \rightarrow 1} \\ &= -2m \underbrace{\mathbb{I} \left(\frac{1 - \tau^2}{1 - \tau^2} \right)}_{=1} \Bigg|_{\tau \rightarrow 1} = -2m\mathbb{I} \end{aligned} \quad (4.78)$$

mostrando-se assim importantes resultados para a teoria de redefinição da estrutura dos duais, uma vez que acaba com a quebra de simetria relativística nas somas de spin, oriunda da presença de $\mathcal{G}(\phi)$ nas equações (4.51) e (4.52). Agora, para de fato finalizarmos toda discussão em torno dos operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, retornaremos para verificar as condições requisitadas, para manutenção da ortonormalidade anteriormente adquirida, no início desta seção. Primeiramente, verificaremos as condições (4.55). É interessante lembrar antes as propriedades da atuação de $\mathcal{G}(\phi)$ nos espinores ELKO, $\mathcal{G}(\phi) \lambda_\alpha^S = +\lambda_\alpha^S$ e $\mathcal{G}(\phi) \lambda_\alpha^A = -\lambda_\alpha^A$, de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \lambda_\alpha^S(p^\mu) &= 2 \left(\frac{\mathbb{I} - \tau \mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2} \right) \lambda_\alpha^S(p^\mu) = 2 \left(\frac{1 - \tau}{1 - \tau^2} \right) \lambda_\alpha^S(p^\mu) \\ &= \left(\frac{2}{1 + \tau} \right) \bigg|_{\tau \rightarrow 1} \lambda_\alpha^S(p^\mu) = \lambda_\alpha^S(p^\mu), \end{aligned} \quad (4.79)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \lambda_\alpha^A(p^\mu) &= 2 \left(\frac{\mathbb{I} + \tau \mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2} \right) \lambda_\alpha^A(p^\mu) = 2 \left(\frac{1 - \tau}{1 - \tau^2} \right) \lambda_\alpha^A(p^\mu) \\ &= \left(\frac{2}{1 + \tau} \right) \bigg|_{\tau \rightarrow 1} \lambda_\alpha^A(p^\mu) = \lambda_\alpha^A(p^\mu). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Sendo mais uma vez satisfatórios os resultados. Agora, retornando à (4.56), temos as seguintes respostas para os espinores ELKO autoconjugados:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) \mathcal{A} \lambda_{\alpha'}^A(p^\mu) &= 2 \tilde{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) \left(\frac{\mathbb{I} - \tau \mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2} \right) \lambda_{\alpha'}^A(p^\mu) = 2 \tilde{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) \left(\frac{1 + \tau}{1 - \tau^2} \right) \lambda_{\alpha'}^A(p^\mu) \\ &= 2 \left(\frac{1}{1 - \tau} \right) \bigg|_{\tau \rightarrow 1} \underbrace{\tilde{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) \lambda_{\alpha'}^A(p^\mu)}_{=0} = 0, \end{aligned} \quad (4.81)$$

e as seguintes para os anti-autoconjugados

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) \mathcal{B} \lambda_{\alpha'}^S(p^\mu) &= 2 \tilde{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) \left[\frac{\mathbb{I} + \tau \mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2} \right] \lambda_{\alpha'}^S(p^\mu) = 2 \tilde{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) \left(\frac{1 + \tau}{1 - \tau^2} \right) \lambda_{\alpha'}^S(p^\mu) \\ &= 2 \left(\frac{1}{1 - \tau} \right) \bigg|_{\tau \rightarrow 1} \underbrace{\tilde{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) \lambda_{\alpha'}^S(p^\mu)}_{=0} = 0. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Claramente se vê que as equações (4.81) e (4.82) são iguais a 0 pelo fato de terem quantidades que se anulam bem antes de que qualquer limite seja aplicado.

Tais demonstrações provam que, apesar de não existir soluções possíveis para o caso $\tau = 1$, temos um resultado deveras satisfatório na vizinhança infinitesimalmente próxima de 1, tanto no limite pela esquerda quanto no limite a direita deste valor (ROGERIO; SILVA, 2017). Assim sendo, confirmam-se a possibilidade da redefinição da estrutura dual, de modo que se recupera

todas as condições de ortonormalidade já encontradas e sana os problemas da quebra de simetria de Lorentz encontradas nas somas de spin. Tudo isso torna a teoria dos espinores ELKO invariante por transformações de Lorentz.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi feito um estudo sistemático das principais características da definição de pseudoinversa, seja ela usual ou Penrose (PIP), e uma construção algébrica do espinor ELKO. Em ambos os estudos foram demonstrados, passo a passo, os argumentos que revelam a natureza exótica de suas definições.

A PIP mostra-se uma ferramenta algébrica altamente versátil e maleável na busca por soluções de problemas envolvendo matrizes singulares, aquelas que tem o determinante nulo, e matrizes não quadráticas. Na sua definição são inseridas duas condições na descrição usual de pseudoinversa, $AA^+ \in Mat(\mathbb{C}, m)$ e $A^+A \in Mat(\mathbb{C}, n)$. Tais inserções garantem, além da unicidade da pseudoinversa, a possibilidade de se aplicar o método do cálculo da PIP envolvendo a regularização de Tikhonov, que por sua vez generaliza a possibilidade de inversa para qualquer tipo de matriz.

Com o estudo do ELKO, fora demonstrado a construção de um novo conjunto completo dos autoespinores do operador conjugação de carga. É interessante observar que a diferença entre este espinor e o espinor de Dirac, o espinor do modelo padrão, começa na sua construção, passa pelos diferentes sinais de suas helicidades e chega no modo de construção dos respectivos correspondentes duais. Primordialmente, para o ELKO temos que através da “mágica da matrizes de Pauli”, podemos reescrever as componentes espinoriais que se transformam como objetos de mão direita e objetos de mão esquerda no espaço de representações de Weyl. O único vínculo estabelecido entre tais componentes é exatamente pelas matrizes de Pauli, de modo que não se faça nenhuma alusão a um operador de simetria para a transformação das componentes, o que difere estruturalmente do espinor de Dirac, que tem suas componentes espinoriais se transformando por paridade. Além disso, pode ser visto que os espinores ELKO, na sua forma mais explícita, possuem componentes espinoriais com sinais opostos, enquanto os espinores padrão possuem mesmos sinais.

Ainda sobre a construção do ELKO, mais precisamente falando da construção de seu dual, é visto que a analogia com o dual de Dirac não fornece normas que nos permitem observar a física associada ao espinor. Eis que na generalização de um novo dual, sugere-se uma matriz Ξ , que como restrição tinha que mapear os espinores do mesmo conjunto e ser invertível, de modo que $\Xi^2 = 1$. Quando comparamos com o dual de Dirac era verificado que $\Xi = 1$, o que satisfaz as condições impostas. Para o ELKO, temos que esta matriz que é dada por $\Xi = m^{-1}\mathcal{G}(\phi)\gamma_\mu p^\mu$, fora construída em função das normas imaginárias encontradas em (4.8) e (4.9), de modo que seu mapeamento faz a troca de helicidade dos espinores, para assim assegurar uma norma real, não nula e invariante por transformações de Lorentz.

O que parecia satisfatório mostrou-se mais uma vez incompleto, dado que ao fazer as somas de spin com os duais na nova estrutura, encontrou-se nas respostas a matriz $\mathcal{G}(\phi)$, que implica nestas somas uma dependência com uma direção espacial, quebrando, por assim dizer, a simetria

de Lorentz. Como solução, outra redefinição do dual é sugerida, desta vez usando da liberdade de definição do próprio dual e então incorporando a eles os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, pela direita. Com o papel de não perder nenhuma informação adquirida previamente e tornar invariante por Lorentz as somas de spin, é observado que os operadores citados devem ser inversas de $[\mathbb{I} \pm \mathcal{G}(\phi)]$. Este foi, afinal, o ponto chave deste trabalho: a aplicação do cálculo de pseudoinversas é necessária, pois tais matrizes citadas são singulares. Entretanto a forma encontrada para se contornar este problema foi lançando mão de duas proposições encontradas no estudo sobre a vizinhanças de matrizes singulares, uma vez que a aplicação das definições de pseudoinversa encontradas no capítulo não resolve o problema de quebra de simetria. O procedimento redentor nos permite aplicar uma "deformação" τ na matriz $\mathcal{G}(\phi)$ e assim estudar a região infinitesimalmente próxima a ela. Estabelece-se, então, que somente em $\tau \neq 1$ a quantidade $[\mathbb{I} \pm \tau \mathcal{G}(\phi)]$ é invertível, nos fornecendo de forma bem comportada para qualquer valor de τ , inclusive nos valores infinitesimalmente próximos a 1, uma soma de spin invariante por transformações Lorentz, sem perder as informações físicas previamente estabelecidas.

Com tudo isso temos que a teoria dos autoespinores do operador de conjugação de carga se completa, pelo menos no nível de seu alicerce, com um dual que lhe permite buscar informações realmente físicas. Temos ainda que o estudo completo das propriedades das pseudoinversas permite-nos, de forma clara e elegante, redefinir o dual de modo a garantir sua invariância nas somas de spin, que está no cerne do propagador do seu campo, e que por sua vez nos dá a informação de sua localidade.

REFERÊNCIAS

- AHLUWALIA, D. V. The theory of local mass dimension one fermions of spin one half. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Springer, v. 27, n. 3, p. 2247–2285, 2017.
- AHLUWALIA, D. V. **Mass Dimension One Fermions**. New York: Cambridge University Press, 2019.
- AHLUWALIA, D. V.; HORVATH, S. Very special relativity as relativity of dark matter: the elko connection. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2010, n. 11, p. 78, 2010.
- BARATA, J. C. A.; HUSSEIN, M. S. The moore–penrose pseudoinverse: a tutorial review of the theory. **Brazilian Journal of Physics**, Springer, v. 42, n. 1-2, p. 146–165, 2012.
- LIMA, E. L. **Álgebra linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- RAMOND, P. **Field theory: a modern primer**. Colorado: Westview press, 1997.
- ROGERIO, R. B.; SILVA, J. H. da. The local vicinity of spin sums for certain mass-dimension-one spinors. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, Bristol, v. 118, n. 1, p. 10003, 2017.
- ROGERIO, R. J. B. **Campos espinoriais ELKO**. 2014. 28 f. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá, São Paulo - Brasil, 2014.
- ROGERIO, R. J. B. **Aspectos clássicos e quânticos de espinores de dinâmica não-usual: espinores de dimensão de massa um**. 2018. 102 f. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá, São Paulo - Brasil, 2018.
- SAKURAI, J.; NAPOLITANO, J. **Mecânica quântica moderna**. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- SPERANÇA, L. D. An identification of the dirac operator with the parity operator. **International Journal of Modern Physics D**, v. 23, 2014.

APÊNDICE A – NORMAS COM OS DUAIS À LA DIRAC

Neste apêndice serão exemplificados os cálculos de normas utilizando os espinores ELKO obtidos no Capítulo 3, com o dual *à la* Dirac, referenciado no início do Capítulo 4. Temos então:

$$(i) \quad \bar{\lambda}_{(+,-)}^S(p^\mu) \lambda_{(+,-)}^S(p^\mu) = \frac{(E+m)}{2m} \left(1 - \frac{p}{E+m}\right)^2 \lambda_{(+,-)}^{S\dagger}(k^\mu) \gamma_0 \lambda_{(+,-)}^S(k^\mu), \quad (\text{A.1})$$

onde a multiplicação dos espinores em repouso é dada como

$$\begin{aligned} \lambda_{(+,-)}^{S\dagger}(k^\mu) \gamma_0 \lambda_{(+,-)}^S(k^\mu) &= \\ &= m \begin{pmatrix} i \cos(\theta/2) e^{+i\phi/2} & i \sin(\theta/2) e^{-i\phi/2} & -\sin(\theta/2) e^{+i\phi/2} & \cos(\theta/2) e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) e^{-i\phi/2} \\ \cos(\theta/2) e^{+i\phi/2} \\ -i \cos(\theta/2) e^{-i\phi/2} \\ -i \sin(\theta/2) e^{+i\phi/2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Realizando-se as multiplicações das matrizes indicadas, temos

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{(+,-)}^S(p^\mu) \lambda_{(+,-)}^S(p^\mu) &= \\ &= \underbrace{\frac{(E+m)}{2m} \left(1 - \frac{p}{E+m}\right)^2}_{(E-p)} m \underbrace{\left(-2i \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) + 2i \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)\right)}_{\substack{2i \sin(\theta/2 - \theta/2) \\ =0}}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Portanto, temos que o resultado desta norma é:

$$\bar{\lambda}_{(+,-)}^S(p^\mu) \lambda_{(+,-)}^S(p^\mu) = 0. \quad (\text{A.4})$$

De modo análogo, para os espinores com helicidades diferentes, temos

$$(ii) \quad \bar{\lambda}_{(-,+)}^S(p^\mu) \lambda_{(+,-)}^S(p^\mu) = \underbrace{\frac{(E+m)}{2m} \left(1 - \frac{p^2}{(E+m)^2}\right)}_{=1} \lambda_{(-,+)}^{S\dagger}(k^\mu) \gamma_0 \lambda_{(+,-)}^S(k^\mu), \quad (\text{A.5})$$

sendo que a multiplicação das matrizes, referente aos espinores em repouso, é dada por:

$$\begin{aligned} \lambda_{(-,+)}^{S\dagger}(k^\mu) \gamma_0 \lambda_{(+,-)}^S(k^\mu) &= \\ &= m \begin{pmatrix} i \sin(\theta/2) e^{+i\phi/2} & -i \cos(\theta/2) e^{-i\phi/2} & \cos(\theta/2) e^{+i\phi/2} & \sin(\theta/2) e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) e^{-i\phi/2} \\ \cos(\theta/2) e^{+i\phi/2} \\ -i \cos(\theta/2) e^{-i\phi/2} \\ -i \sin(\theta/2) e^{+i\phi/2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

resultando por fim em

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda}_{(-,+)}^S(p^\mu) \lambda_{(+,-)}^S(p^\mu) &= m \underbrace{\left(-i \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) - i \sin^2(\theta/2) - i \cos^2(\theta/2) \right)}_{=-2i} \quad (\text{A.7}) \\
 &= -2im.
 \end{aligned}$$