UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Campus de São José do Rio Preto

**Matheus Henrique Martins**

# Estudos sobre o índice de valor-ideal de Fadell-Husseini com aplicações à teoria do ponto fixo em espaços homogêneos

Rio Claro

2026

Matheus Henrique Martins

# Estudos sobre o índice de valor-ideal de Fadell-Husseini com aplicações à teoria do ponto fixo em espaços homogêneos

Tese apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Geometria e Sistemas Dinâmicos.
Linha de Pesquisa: Topologia Algébrica.

Orientadora: Profª. Drª. Thaís Fernanda Mendes Monis

Rio Claro

2026

M386e

Martins, Matheus Henrique
Estudos sobre o índice de valor-ideal de Fadell-Husseini com aplicações à teoria do ponto fixo em espaços homogêneos / Matheus Henrique Martins. -- São José do Rio Preto, 2026
55 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientadora: Thaís Fernanda Mendes Monis

1. Topologia algébrica. 2. Fibrados. 3. Teoria do ponto fixo. 4. Variedades grassmanianas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

Matheus Henrique Martins

**Estudos sobre o índice de valor-ideal de Fadell-Husseini com aplicações à teoria do ponto fixo em espaços homogêneos**

Tese apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Geometria e Sistemas Dinâmicos.
Linha de Pesquisa: Topologia Algébrica.

Data da defesa: 13/03/2026

Banca Examinadora:

Profª. Drª. Thaís Fernanda Mendes Monis
UNESP - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Campus de Rio Claro

Profª. Drª. Denise de Mattos
Universidade de São Paulo - Departamento de Matemática

Prof. Dr. João Peres Vieira
UNESP - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Campus de Rio Claro

Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo
Universidade Federal de São Carlos - Departamento de Matemática

Prof. Dr. Sérgio Tadao Martins
Universidade Federal de Santa Catarina - Departamento de Matemática

Rio Claro

2026

# RESUMO

Neste trabalho, estudamos a teoria de índice de valor-ideal de Fadell-Husseini, apresentando métodos e soluções para o cálculo de específicos índices de valor-ideal. Exploramos sua conexão com a questão de existência de aplicação equivariante, a qual se relaciona com o problema do ponto fixo de espaços homogêneos. Utilizando a teoria de índice de valor-ideal, apresentamos uma demonstração alternativa da propriedade do ponto fixo do espaço projetivo de dimensão par, $\mathbb{R}P^{2n}$ (ou $\mathbb{R}G_{1,2n}$). Dentro do contexto das variedades Grassmannianas, $\mathbb{R}G_{p,q}$, discutimos as dificuldades em aplicar a metodologia empregada sobre $\mathbb{R}G_{1,2n}$, a fim de explorar o problema em aberto da propriedade do ponto fixo das variedades $\mathbb{R}G_{2,3}$ e $\mathbb{R}G_{5,4}$.

**Palavras-chave:** topologia algébrica; fibrados; teoria do ponto fixo; variedades grassmanianas.

# ABSTRACT

This work explores the Fadell-Husseini ideal-valued index theory, presenting methods and solutions for the calculation of specific ideal-valued indices. We investigate its connection to the existence of equivariant maps, a question which relates to the fixed-point property of homogeneous spaces. Using the ideal-valued index theory, we provide an alternative proof of the fixed-point property for the even-dimensional real projective space, $\mathbb{R}P^{2n}$ (or $\mathbb{R}G_{1,2n}$). Within the context of Grassmannian manifolds, $\mathbb{R}G_{p,q}$, we discuss the difficulties of applying the methodology used for $\mathbb{R}G_{1,2n}$ to explore the open problem regarding the fixed-point property of the manifolds $\mathbb{R}G_{2,3}$ and $\mathbb{R}G_{5,4}$.

**Keywords:** algebraic topology; fiber bundles; fixed point theory; Grassmann manifolds.

# SUMÁRIO

**1 INTRODUÇÃO** **7**

**2 O ÍNDICE DE VALOR-IDEAL** **12**

2.1 CONCEITOS PRELIMINARES . . . . . 12

2.2 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DO ÍNDICE DE VALOR-IDEAL . . . . . 16

2.3 A SEQUÊNCIA ESPECTRAL DE SERRE . . . . . 22

2.4 O ÍNDICE $Ind^{T^n}(SO(2n+1),\mathbb{Q})$ . . . . . 25

**3 PROPRIEDADE DO PONTO FIXO DO ESPAÇO G/K** **29**

3.1 RESULTADOS GERAIS E EXEMPLOS . . . . . 29

3.2 PROPRIEDADE DO PONTO FIXO VIA ÍNDICE DE VALOR-IDEAL . . . . 36

**4 O CASO DAS VARIEDADES GRASSMANNIANAS REAIS** **43**

4.1 PONTOS FIXOS DA AÇÃO SOBRE $\mathbb{R}G_{p,q}$ . . . . . 43

**5 CONCLUSÃO** **53**

**REFERÊNCIAS** **54**

# 1 INTRODUÇÃO

O problema do ponto fixo, o qual consiste em resolver uma equação da forma $f(x) = x$, é fundamental em *toda* a matemática. O primeiro teorema dessa natureza é aquele equivalente ao *Teorema do Valor Intermediário*, de B. Bolzano, provado em 1817. Já em 1909, L.E.J. Brouwer provou a versão análoga para dimensões maiores, a qual afirma que toda função contínua $f : D^n \to D^n$ sobre o disco fechado de dimensão $n$ possui ao menos um ponto fixo. Posteriormente, S. Lefschetz, um dos pioneiros da Topologia Algébrica, contribuiu para o desenvolvimento de técnicas topológicas a fim de provar seu celebrado Teorema de ponto fixo de Lefschetz de 1921, uma generalização de longo alcance do Teorema de Brouwer. Não muito tempo depois, 1927, J. Nielsen desenvolveu uma teoria de ponto fixo um tanto mais refinada (hoje conhecida como teoria de ponto fixo de Nielsen) e K. Borsuk respondeu a uma questão colocada por S. Ulam, o que resultou no famoso Teorema de Borsuk-Ulam de 1933. Essas duas teorias clássicas, Teoria de Ponto Fixo e Teoria de Resultados do Tipo Borsuk-Ulam, possuem numerosas aplicações tais como existência de múltiplas soluções em equações diferenciais via teoria de Nielsen e existência de um número infinito de pontos críticos de funcionais, bem como soluções para problemas de equipartição na geometria combinatória via teoremas do tipo Borsuk-Ulam (ver, por exemplo, (1, 2, 3)). E novas relações com outros ramos da matemática continuam lançando novas luzes sobre esses dois temas clássicos da Topologia Algébrica.

Dado um espaço topológico $X$, dizemos que esse possui a *propriedade do ponto fixo* (ou p.p.f.) se *toda* função contínua $f : X \to X$ possui ao menos um ponto fixo. Assim, o resultado clássico de Brouwer nos diz que o disco $D^n$ de dimensão $n$ possui a propriedade do ponto fixo, para qualquer $n$. Usando a teoria de Lefschetz, concluímos que se $X$ possui o mesmo tipo de homotopia de $D^n$ então $X$ possui a p.p.f.

Saber se um dado espaço topológico $X$ possui a p.p.f. é uma questão fundamental em topologia. No entanto, a p.p.f. não é uma propriedade bem comportada. Por exemplo, se $X$ e $Y$ são variedades compactas, cada uma com a p.p.f., sabe-se (ver, por exemplo, (4)) que $X \times Y$ não precisa possuir a p.p.f. (para uma descrição da teoria de ponto fixo topológica até 1970, ver (5)).

Um problema difícil nesta área de pesquisa, ainda em aberto, é conhecer totalmente quais são as variedades bandeira que possuem a p.p.f. Por exemplo, a partir de ferramentas da topologia algébrica, é conhecido que os espaços projetivos de dimensão par (sobre os reais $\mathbb{R}$,

os complexos $\mathbb{C}$ ou os quatérnios $\mathbb{H}$) possuem todos a propriedade do ponto fixo. Na verdade, a prova é uma aplicação do Teorema de ponto fixo de Lefschetz: mostra-se que o número de Lefschetz $L(f)$ de qualquer auto-aplicação $f$ sobre tais espaços é um número diferente de zero e, assim, a conclusão é que $f$ tem ponto fixo. A técnica do uso do número de Lefschetz é essencialmente a única ferramenta da topologia algébrica usada a fim de estabelecer a p.p.f. quando os objetos são variedades compactas. Uma generalização natural dos espaços projetivos é a família das variedades bandeira (generalizadas). Seja $\mathbb{K}$ um dos corpos $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, ou o anel de divisão (*skew-field*) $\mathbb{H}$ dos números quaterniônicos. Denotamos por $U_{\mathbb{K}}(n)$ o grupo ortogonal ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), unitário ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ou simplético ($\mathbb{K} = \mathbb{H}$). Considere o subgrupo $U_{\mathbb{K}}(n_1) \times \cdots \times U_{\mathbb{K}}(n_k)$ de $U_{\mathbb{K}}(n)$ com $n = n_1 + \cdots + n_k$. Em (6), os autores demonstraram o seguinte resultado

**Teorema**((6), Theorem 1). Seja

$$M_{\mathbb{K}}(n_1, ..., n_k) = \frac{U_{\mathbb{K}}(n)}{U_{\mathbb{K}}(n_1) \times ... \times U_{\mathbb{K}}(n_k)}.$$

Se $M_{\mathbb{K}}(n_1, ..., n_k)$ possui a propriedade do ponto fixo então:

**(i)** $n_1, n_2, ..., n_k$ são distintos;

**(ii)** Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ então no máximo um dos $n_i$'s pode ser ímpar.

Além disso, os autores conjecturaram que a recíproca com respeito a $(i)$ é verdadeira. Tal recíproca é conhecida para o caso dos espaços projetivos, quando $k = 2$ e $n_1 = 1$, e para certas variedades Grassmanianas. Eles também demonstraram a recíproca para alguns casos especiais, um dos quais é o seguinte

**Teorema**((6), Theorem 3). Suponha $n_2 \neq n_3$ e ambos pares. Se $n_3 \geq 2n_2^2 - 1$ então $M_{\mathbb{C}}(1, n_2, n_3)$ possui a propriedade do ponto fixo.

A técnica básica usada em (6) é o cálculo do número de Lefschetz de uma auto-aplicação por meio do cálculo do endomorfismo induzido sobre o anel de cohomologia dessas variedades bandeira (ver também (7)). Desde então, outros autores têm se dedicado ao cálculo dos endomorfismos do anel de cohomologia dessas variedades induzidos por auto-aplicações. Algumas melhorias dos resultados de (6) foram obtidas (ver, por exemplo, (8, 9, 10)) mas a recíproca conjecturada em (6), em sua totalidade ainda não foi resolvida.

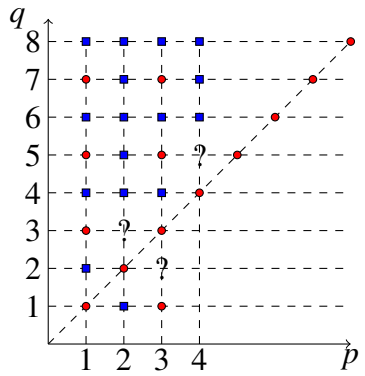
No caso específico das variedades grassmannianas, a literatura apresenta o seguinte:

**Teorema**((11), 1974). $M_{\mathbb{R}}(2,q) = \mathbb{R}G_{2,q}$ possui a p.p.f. para todo $q = 4k$ e $q = 4k+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

**Teorema**((12), 1978) Se $pq$ é par e

- $p \leq 7$ e $[q/2] > [p/2]$ ou
- $p > 7$ e $[q/2] > 2[p/2]^2 - [p/2] - 1$

então $\mathbb{R}G_{p,q}$ possui a p.p.f.




Na figura acima, temos que os pares $(p,q)$ indicados com uma bolinha vermelha são aqueles para os quais $\mathbb{R}G_{p,q}$ não possui a p.p.f.. Já os indicados por um quadrado azul, representam pares $(p,q)$ tais que $\mathbb{R}G_{p,q}$ possui a p.p.f.. Já os que apresentam interrogação, são aqueles para os quais ainda não se sabe. Por exemplo, $\mathbb{R}G_{2,3}$ e $\mathbb{R}G_{4,5}$ são variedades grassmannianas para as quais ainda não se têm a resposta se satisfazem ou não a p.p.f..

Dados a persistência do problema na literatura e que a técnica básica empregada até o momento foi o estudo dos endomorfismos induzidos por auto-funções contínuas dos espaços considerados e o cálculo do número de Lefschetz desses endomorfismos, e considerando que o problema de classificação desses endomorfismos ainda permanece e, portanto, o conhecimento de todos os números de Lefschetz passíveis de ocorrer, decidimos olhar para o problema sob outras óticas, e com outras ferramentas.

Em (5), o autor observa que a propriedade do ponto fixo de espaços homogêneos é equivalente a um problema do tipo Borsuk-Ulam, como segue. Seja $G$ um grupo de Lie conexo e compacto e $K$ um subgrupo fechado. Denote por $G/K$ o espaço das classes laterais à esquerda $\{gK\}$. O subgrupo $K$ age livremente sobre $G$ via $k \cdot g = gk^{-1}$ e $K$ age sobre

$M = G/K$ via $k * (gK) = kgK$. Para toda auto-aplicação $f : M \to M$, a função contínua associada $\varphi_f : G \to M$ dada por $\varphi_f(g) = g^{-1} f(gK)$ é uma função $K$-equivariante com respeito às $K$-ações sobre $G$ e sobre $M$ descritas acima. Analogamente, toda $K$-função $\varphi : G \to M$ gera uma auto-aplicação $f_\varphi : M \to M$ definida por $f_\varphi(gK) = g\varphi(g)$. Além disso, $f(gK) = gK$ se, e somente se, $\varphi_f(gK) = eK$, onde $e \in G$ é o elemento identidade. Assim, $M$ possui a propriedade do ponto fixo se, e somente se, $\varphi^{-1}(\{eK\}) \neq \emptyset$ para toda $K$-aplicação $\varphi : G \to M$.

Na década de 1950, Chung-Tao Yang usou teoria do índice cohomológico numérico para estabelecer resultados de não existência de aplicações equivariantes (ver (13, 14)). Posteriormente, Conner-Floyd (15), Krasnosel'skii (16), Fadell-Husseini (17, 18, 19) generalizaram tal teoria de índice com aplicações em teoria de pontos críticos e em análise não linear. Em 1988, Fadell e Husseini (20) introduziram um índice de valor-ideal $\mathrm{Ind}^G(X)$ para um $G$-espaço $X$, o qual se encontra no anel de cohomologia $H^*(BG)$ do espaço classificante $BG$ de $G$. Em particular, eles mostraram que se existe uma $G$-aplicação $\varphi : X \to Y$ entre dois $G$-espaços então $\mathrm{Ind}^G(Y) \subseteq \mathrm{Ind}^G(X)$. Essa teoria tem se mostrado bastante útil em resultados recentes com respeito a problemas do tipo Borsuk-Ulam.

Neste trabalho, fazemos um estudo acerca do índice de valor-ideal de Fadell-Husseini. Explicitamos o cálculo do índice para vários grupos de Lie de interesse, em particular, quando evidenciado a relação do problema do ponto fixo com o problema de existência de aplicação equivariante, conforme a observação dada em (5), para grupos que aparecem nesse problema no contexto das variedades grassmannianas reais. Por fim, fazemos uma análise das possibilidades de aplicação dessa teoria no problema de determinar a p.p.f. para a grassmanniana $\mathbb{R}G_{2,3}$.

Especificamente, no Capítulo 2 tratamos de expor o índice $Ind^G(X)$ de um $G$-espaço $X$ — isto é, o núcleo do homomorfismo induzido em cohomologia pela projeção $EG \times_G X \to BG$ de um fibrado com fibra $X$ e grupo estrutural $G$— que, por natureza possibilita algumas abordagens na sua investigação. Uma delas é por meio da sequência espectral de Serre, que decompõe esse homomorfismo explicitando relações entre as cohomologias dos espaços envolvidos, como por exemplo, através da sequência exata de Gysin. De modo complementar, com uma melhor descrição do espaço X, evidenciamos algumas identificações topológicas com o espaço $EG \times_G X$. Um outro aspecto interessante é a relação do índice com os pontos fixados pela ação, que se destaca pelo Critério de existência de ponto fixo, atribuído a A. Borel. A questão central e contribuição original do capítulo é estimar o índice $Ind^{T^n}(SO(2n+1))$ e prover o

material que se mostrou necessário para se estimar o índice do tipo $Ind^{T^n}(G/K - \{eK\})$.

No Capítulo 3 expomos o problema do ponto fixo sobre o espaço homogêneo $G/K$, no qual, como mencionado, verifica-se equivalente a situação em que $\varphi^{-1}(\{eK\}) \neq \emptyset$ para toda K-aplicação $\varphi : G \to G/K$. Assim, a fim de que $G/K$ possua a propriedade do ponto fixo é necessário e suficiente que não exista $K$-aplicação $G \to G/K - \{eK\}$, essa última condição é satisfeita quando ocorre a não inclusão $Ind^K(G/K - \{eK\}) \not\subset Ind^K(G)$. Refinado o resultado, partimos da premissa: Se, para os subgrupos $H \subset G$ e $L \subset K$, têm-se $Ind^L(G/K - \{eK\}) \not\subset Ind^L(H)$ então $G/K$ possui a propriedade do ponto fixo. Tal flexibilidade na hipótese possibilita concluir que a variedade $\mathbb{R}G_{1,2n}$ possui a propriedade do ponto fixo. Assim, finalizamos o Capítulo 3 com uma prova alternativa, e original, utilizando-se o índice de valor-ideal de Fadell-Husseini, para a propriedade do ponto fixo dos espaços projetivos reais de dimensão par.

Já no Capítulo 4, fazemos considerações sobre a Grassmanniana $\mathbb{R}G_{2,3}$ e possíveis cálculos de índices interessantes para se atacar a propriedade do ponto fixo para esse espaço, que sabe-se, é ainda um problema em aberto. Tais ponderações são formuladas a partir de alguns cenários. Baseado nas conclusões dos capítulos anteriores, a escolha que vinha sendo padrão como grupo atuante, $T^n$, deixa de surtir o efeito desejado, uma vez que o índice $Ind^{T^n}(\mathbb{R}G_{p,q} - [e])$ se mostra trivial. Por outro lado, dado como exemplo $\mathbb{R}G_{2,3}$, dentro de algumas variações possíveis e convenientes de escolha dos grupos $L$ e $H$, o índice $Ind^L(H)$ vem permitindo a inclusão de sua contraparte, $Ind^L(\mathbb{R}G_{2,3} - [e])$, mesmo que não a conhecemos. Ambas situações inviabilizam a não inclusão desejada. Nesse contexto, nos deparamos com algumas questões: Qual grupo $L \subset K$ devemos escolher? $H \subset G$, podendo, de modo geral, ser um $L$-espaço, qual seria? Ademais, a simples escolha de $L$ já carrega dificuldades na estimativa do índice de $\mathbb{R}G_{2,3} - [e]$. Esses são os impasses que tentamos elucidar. Todo o desenvolvimento do Capítulo 4 é uma contribuição original.

Finalizamos com o Capítulo 5, onde percorremos todo o trabalho, apresentando uma análise das contribuições dadas em cada um dos capítulos anteriores.

# 2 O ÍNDICE DE VALOR-IDEAL

## 2.1 CONCEITOS PRELIMINARES

Esta seção tem como objetivo introduzir brevemente alguns conceitos e resultados associados a Grupo de Transformações Topológicas, apresentados nas referências (21) e (22), nas quais se fundamentam, respectivamente, os argumentos relacionados a G-espaços e fibrações ao longo da tese. O intuito principal está em organizar informações sobre o espaço quociente $Y \times_G X$, de modo a melhor estimar o seu anel de cohomologia, especificamente quando $Y$ representa o espaço total $EG$ do $G$-fibrado universal $\omega_G = (EG,\ \pi,\ BG,\ G)$.

Por um grupo topológico $G$, entende-se que $G$ é um grupo, bem como um espaço de Hausdorff, de modo que as operações do grupo, representadas por $(g, h) \mapsto gh$ e $g \mapsto g^{-1}$, sejam contínuas.

Dado um grupo topológico $G$, dizemos que um espaço $X$ é um $G$-espaço à esquerda se existe uma função contínua $\lambda : G \times X \to X$ que satisfaz as condições: $\lambda(e, x) = x$ e $\lambda(g, \lambda(h, x)) = \lambda(gh, x)$, onde $e \in G$ denota o elemento neutro do grupo. De modo análogo, dizemos que um espaço $X$ é um $G$-espaço à direita se existe uma função contínua $\lambda : X \times G \to X$ satisfazendo as condições $\lambda(x, e) = x$ e $\lambda(\lambda(x, h), g) = \lambda(x, hg)$. Por simplicidade, é comum representar $\lambda(g, x)$ pela justaposição $gx$ dos elementos $g$ e $x$. Também denotamos $\lambda(x, g)$ por $xg$. Assim, no caso do $G$-espaço à esquerda, as condições sobre a função $\lambda$ são reescritas por $ex = x$ e $g(hx) = (gh)x$. Também dizemos que há uma ação de $G$ sobre $X$ ou que o grupo $G$ atua sobre o espaço $X$ se tal função $\lambda$ existe. Além disso, se, para todo $x \in X$, $gx = x$ implicar que $g = e$, dizemos que a ação de $G$ sobre $X$ é livre.

Em um $G$-espaço $X$, os elementos $x$ e $x_o$ são $G$-equivalentes se $gx = x_o$ para algum $g \in G$. Essa propriedade define uma relação de equivalência em $X$, da qual se obtém a partição $X/G = \{\, [x] \ :\ x \in X \,\}$ de $X$, onde o conjunto $[x] = \{\, gx \in X \ :\ g \in G \,\}$ é denominado classe de equivalência de $x$ e é frequentemente representado como $Gx$. Se $[x] = \{x\}$ (i.e., $gx = x$ para todo $g \in G$), dizemos que $x$ é um ponto fixo da ação de $G$ sobre $X$. Denotamos por $F(G,\ X)$ ou $X^G$ o conjunto de tais pontos.

A partir da associação $x \mapsto [x]$, denotada por $p : X \to X/G$, imbuímos $X/G$ com a topologia quociente. Assim, além de ser contínua, observamos que a função $p$ é sobrejetora e aberta. Desse modo, $X/G$ é um espaço topológico, chamado espaço das órbitas de $X$ com

respeito a $G$. Denominamos por órbita de $x$ sob $G$ o subespaço $[x] = Gx \subset X$.

Considerando os $G$-espaços $X$ e $Z$, uma função (contínua) $f : X \to Z$ é referida como ($G$-)equivariante ou como uma $G$-aplicação se $f$ comuta com as ações de $X$ e $Z$, isto é, se $f(gx) = gf(x)$ para todo $x \in X$ e todo $g \in G$. Ainda, dada uma $G$-aplicação $f : X \to Z$, define-se naturalmente a função $F : X/G \to Z/G$ por $F[x] = [f(x)]$.

Suponhamos que $X$ e $Y$ sejam $G$-espaços estabelecidos pelas ações $(g, x) \mapsto gx$ e $(y, g) \mapsto yg$, respectivamente, para quaisquer $x \in X$, $y \in Y$ e $g \in G$. Nesse contexto, dizemos que $X$ é um $G$-espaço à esquerda e $Y$ é um $G$-espaço à direita. Com isso, a função $(g,\ (y, x)\ ) \mapsto (yg^{-1}, gx)$ define uma ação (à esquerda) de $G$ sobre $Y \times X$, da qual denotamos o espaço das órbitas de $Y \times X$ sobre $G$ por

$$Y \times_G X = \left\{\ [y, x]\ :\ (y, x) \in Y \times X\ \right\}.$$

Além disso, dado uma $G$-aplicação $f : X \to Z$, segue-se que a função $(1_Y \times f) : Y \times X \to Y \times Z$, definida por $(1_Y \times f)(y, x) = (y, f(x))$, também é $G$-equivariante, de onde estabelecemos a aplicação $\tilde{F} : Y \times_G X \to Y \times_G Z$ por $\tilde{F}[y, x] = [y,\ f(x)\ ]$.

O seguinte resultado é uma coletânea de identificações entre os espaços definidos previamente.

**Proposição 2.1.** Sejam $X$ um $G$-espaço à esquerda e $Y$ um $G$-espaço à direita. São válidos os seguintes homeomorfismos:

1. $Y \times_G G \simeq Y$, definido pela associação $[y, g] \mapsto yg$, cuja inversa é dada por $y \mapsto [y, e]$;

2. $Y \times_G X \simeq (Y/G) \times X$, definido pela associação $[y, x] \leftrightarrow ([y], x)$, supondo que a ação de $G$ sobre $X$ é trivial, isto é, $gx = x$, $\forall x \in X$ e $\forall g \in G$;

3. $Y \times_G (X/H) \simeq (Y \times_G X)/H$, definido por $[y, [x]] \leftrightarrow [[y, x]]$, supondo que $X$ é um $H$-espaço à direita, cuja ação comuta com a ação de $G$, isto é, $(gx)h = g(xh)$, $\forall x \in X$, $\forall h \in H$ e $\forall g \in G$;

4. $Y \times_H G \simeq Y \times (G/H)$, definido por $[y, g] \mapsto (yg, [g])$ para qualquer subgrupo fechado $H$ de $G$.

*Demonstração.* De modo geral, sabe-se que, ao supor $p : U \to V$ uma função quociente e $f : U \to W$ uma função contínua e constante quando restrita ao conjunto $p^{-1}(p(u))$ para

todo $u \in U$, a função $g : V \to W$ definida por $g(p(v)) = f(v)$ é contínua. Sendo assim, a fim de garantir a continuidade das identificações propostas, esse argumento será utilizado implicitamente. Portanto, a exibição da lei de associação de cada função e sua respectiva inversa é suficiente para concluir a proposição.

(1) Seja $p : Y \times G \to Y \times_G G$ a projeção estabelecida por $(y, g) \mapsto [y, g]$. Como a ação $(y, g) \mapsto yg$ é constante quando restrita ao conjunto

$$p^{-1}([y, g]) = \{ (yh^{-1}, hg) \in Y \times G \ : \ h \in G \},$$

seja qual for $[y, g] \in Y \times_G G$, a função $\psi : Y \times_G G \to Y$ exibida por $\psi[y, g] = yg$ está bem definida, e sua inversa é apresentada por $\psi^{-1}(y) = [y, e]$, visto que $[y, g] = [yg, e]$.

(2) Dados $y \in Y$, $x \in X$ e $g \in G$ quaisquer, a partir das correspondências

$$(yg^{-1}, gx) \mapsto ( [yg^{-1}], gx) = ( [y], x) \quad \text{e} \quad ( yg, x) \mapsto [yg, x] = [y, gx] = [y, x],$$

que são constantes quando $y$ e $x$ estão fixados, estabelece-se a função $\varphi : Y \times_G X \to (Y/G) \times X$ por $\varphi[y, x] = ([y], x)$, e sua inversa por $\varphi^{-1}( [y], x) = [y, x]$.

(3) Por hipótese, a ação de $H$ em $Y \times X$, definida por $((y, x), h) \mapsto (y, x)h = (y, xh)$, composta com a projeção $Y \times X \to Y \times_G X$ é constante quando restrita ao conjunto $\{((yg^{-1}, gx), h) \ : \ g \in G\}$. Portanto, é natural que a relação induzida, $[y, x]h = [y, xh]$, apresente $Y \times_G X$ como $H$-espaço. De modo análogo, pela relação $g[x] = [gx]$, observamos $X/H$ como um $G$-espaço.

Seja $(Y \times_G X)/H = \left\{ [[y, x]] \ : \ [y, x] \in Y \times_G X \right\}$ o espaço das órbitas $Y \times_G X$ sobre $H$. A partir da associação $(yg^{-1}, gxh) \mapsto [y, xh] \mapsto [[y, x]]$ estabelecemos a função $[y, [x]] \mapsto [[y, x]]$ entre $Y \times_G (X/H)$ e $(Y \times_G X)/H$. Por outro lado, a relação $(yg^{-1}, gxh) \mapsto (yg^{-1}, [gx]) \mapsto [y, [x]]$ induz a função inversa $[[y, x]] \mapsto [y, [x]]$.

(4) Seja $G/H = \{ [g] \ : \ g \in G\}$ o espaço das classes laterais à esquerda de $H$ em $G$, onde $[g]$ denota o conjunto $\{gh \ : \ h \in H\}$. Assim, a partir da associação

$$(yh^{-1}, hg) \mapsto \big((yh^{-1})(hg), \ [hg]\big) = (yg, \ [g]),$$

definimos a função $[y, g] \mapsto (yg, \ [g])$ entre $Y \times_H G$ e $Y \times G/H$. Por outro lado, a função inversa $(y, [g]) \mapsto [yg^{-1}, g]$, é obtida da função $(y, hg) \mapsto (y(hg)^{-1}, hg) \mapsto [yg^{-1}, g]$.

□

Os principais exemplos e aplicações do que virá a ser desenvolvido terão como base espaços homogêneos e os grupos clássicos. Assim, finalizamos esta seção apresentado-os.

**Definição 2.1.** Seja $G$ um grupo de Lie e seja $K$ um subgrupo fechado de $G$. Nos referimos ao espaço das classes laterais à esquerda de $K$ em $G$,

$$G/K = \left\{ [g] = gK \ : \ g \in G \right\},$$

por espaço homogêneo. □

Além da notação usual de matriz, $u = (u_{ij})$, também denotamos por $u = (u_1, \ldots, u_n)$ as matrizes de ordem $n$, onde $u_i$ representa o $i$-ésimo vetor-coluna de $u$. Representamos o grupo das matrizes ortogonais de ordem $n$ por

$$O(n) = \left\{ u = (u_1, \ldots, u_n) \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ (u_i \,|\, u_j) = \delta_{ij} \right\},$$

onde $(u_i \,|\, u_j)$ define o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Sejam $u = (u_1, \ldots, u_p) \in O(p)$ e $v = (v_1, \ldots, v_q) \in O(q)$ quaisquer, consideramos as associações $u_i \mapsto \bar{u}_i$ e $v_i \mapsto \tilde{v}_i$ definidas, respectivamente, pelas inclusões

$$\mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{R}^p \times 0 \subset \mathbb{R}^{p+q} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^q \hookrightarrow 0 \times \mathbb{R}^q \subset \mathbb{R}^{p+q}.$$

Assim, a relação $(u, v) \mapsto u \times v = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_q)$ define um monomorfismo entre o produto direto $O(p) \times O(q)$ e $O(p+q)$. Portanto, $O(p) \times O(q)$ é naturalmente identificado como um subgrupo de $O(p+q)$, onde a operação induzida é caracterizada pela equação $(u \times v)(u_o \times v_o) = (uu_o) \times (vv_o)$. Além do mais, para a matriz identidade $1_n$ de ordem $n$, $1_n \times u$ e $u \times 1_n$ são duas representações de $u \in O(m)$ em $O(n+m)$.

O espaço quociente das classes laterais à esquerda de $O(p) \times O(q)$ em $O(p+q)$ é apresentado por

$$\frac{O(p+q)}{O(p) \times O(q)} = \left\{ \ [u] \ : \ u \in O(p+q) \ \right\},$$

onde $[u] = \left\{ uw \ : \ w \in O(p) \times O(q) \right\}$.

Denota-se por $SO(n)$ o subgrupo de $O(n)$ constituído das matrizes cujo determinante

é igual a 1. Em particular, denotamos por $T$ o grupo

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} \in O(2) \ : \ \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

constituído das matrizes de rotação e naturalmente identificado com o círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

Denotamos por $\langle v_1, \ldots, v_p \rangle$ o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos $p$ vetores $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$. A partir da relação que associa $v = (v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}) \in O(p+q)$, uma matriz ortogonal de ordem $p+q$, ao subespaço $\langle v_1, \ldots, v_p \rangle$ de $\mathbb{R}^{p+q}$ gerado pelos primeiros $p$ vetores-coluna dessa matriz, definimos o homeomorfismo,

$$[(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q})] \mapsto \langle v_1, \ldots, v_p \rangle,$$

entre o espaço quociente $O(p+q)/O(p) \times O(q)$ e a variedade grassmanniana

$$\mathbb{R}G_{p,q} = \left\{ \langle v_1, \ldots, v_p \rangle \subset \mathbb{R}^{p+q} \text{ subespaço } : \ v_i \in \mathbb{R}^{p+q} \ \text{ e } \ (v_i \,|\, v_j) = \delta_{ij} \right\}.$$

Em particular, chamamos $\mathbb{R}G_{1,n}$ de espaço projetivo real de dimensão $n$, denotado por $\mathbb{R}P^n$.

## 2.2 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DO ÍNDICE DE VALOR-IDEAL

Dado um $G$-espaço $X$, o índice cohomológico de valor-ideal, apresentado em (20), fornece um ideal do anel de cohomologia do espaço classificante $BG$. Sua característica de funtor contravariante, denominada de monotonicidade, desempenha um papel importante no estudo da propriedade do ponto fixo desenvolvida no próximo capítulo.

Sejam $X$ um $G$-espaço e $\omega_G = (EG, \pi, BG)$ o $G$-fibrado universal ($BG = EG/G$). A construção de Borel associada, $X_G$, é definida como o espaço das órbitas de $EG \times X$ por $G$, isto é, $X_G = EG \times_G X$. Também se define $\omega_G[X] = (EG \times_G X, \pi_X, BG, X, G)$ como a fibração associada a $X$ por $\omega_G$, onde $\pi_X[y, x] = \pi(y) = [y]$. Por vezes, a fibração $\omega_G[X]$ é referida como *fibração de Borel* associada ao $G$-espaço $X$.

Seja R um corpo arbitrário, a partir da fibração $\omega_G[X]$ obtemos o homomorfismo

$$\pi_X^* : H^*(BG, \mathrm{R}) \to H^*(X_G, \mathrm{R})$$

entre os anéis de cohomologia de $BG$ e $EG \times_G X$ com coeficientes em R. Comumente se denota

o anel $H^*(X_G, \mathrm{R})$ por $H^*_G(X, \mathrm{R})$.

**Definição 2.2** (*Fadell-Husseini*, (20))**.** O *índice de valor-ideal* do $G$-espaço X com coeficientes no corpo R, denotado por $Ind^G(X, \mathrm{R})$, refere-se ao núcleo do homomorfismo $\pi^*_X$ associado à fibração $\omega_G[X]$. □

*Exemplo* 1. Se $X = \{x\}$ é um $G$-espaço constituído por um único elemento, então a função $\pi_X : X_G \to BG$ define um homeomorfismo (item 2 da Proposição 2.1) e, por conseguinte, $\pi^*_X$ é um isomorfismo. Logo, o índice $Ind^G(X, \mathrm{R})$ é trivial.

□

*Exemplo* 2. Seja $X = G$ um grupo topológico. De acordo com o item 1 da Proposição 2.1 os espaços $EG \times_G G$ e $EG$ são homeomorfos. Assim, como $EG$ é um espaço contrátil, concluímos que

$$Ind^G(G, \mathrm{R}) = H^+(BG, \mathrm{R}) = \sum_{n>0} H^n(BG, \mathrm{R}).$$

□

**Teorema 2.2** (Monotonicidade do índice)**.** *Sejam X e Z $G$-espaços. Se existe uma $G$-aplicação de X em Z, então $Ind^G(Z, R) \subset Ind^G(X, R)$.*

*Demonstração.* Seja $f : X \to Z$ uma $G$-aplicação qualquer e consideremos a função induzida $F : EG \times_G X \to EG \times_G Z$ definida por $F[y, x] = [y, f(x)]$. Assim, como $\pi_Z \circ F = \pi_X$, segue-se do homomorfismo induzido

$$F^* \circ \pi^*_Z = \pi^*_X : H^*(BG, R) \to H^*_G(X, R),$$

que $\ker(\pi^*_Z) \subset \ker(\pi^*_X)$. Ou seja, $Ind^G(Z, R) \subset Ind^G(X, R)$. □

Fixado um grupo topológico $G$ e um corpo $R$, o índice de valor ideal pode ser interpretado como um functor definido entre a categoria dos $G$-espaços (cujo os morfismos são $G$-aplicações) e a categoria onde objetos são os ideais do anel $H^*(BG, R)$ e os morfismos são estabelecidos ou não de acordo com a ordem parcial definida pela inclusão entre os ideais. O teorema anterior evidencia que tal funtor é contravariante. Como exemplo prático, ao considerarmos o grupo $T = SO(2)$, temos o $T$-fibrado universal $\omega_T = (ET, \pi, BT) = (S^\infty, \pi, \mathbb{C}P^\infty)$, cuja cohomologia, com coeficientes racionais, do espaço classificante, $BT$, é dada por $H^*(BT, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t]$, onde $dim\, t = 2$ (vide (22)). Assim, a não inclusão de ideais $\langle t \rangle \not\subset \langle t^2 \rangle$ nos diz que se $X$ e $Z$ são

$T$-espaços cujos índices coincidem, respectivamente, com $\langle t^2 \rangle$ e $\langle t \rangle$ então, pela monotonicidade do índice, não existe $T$-aplicação de $X$ em $Z$. Esse exemplo ilustra a aplicação que faremos do índice de valor-ideal, isto é, exibir não inclusões de ideais a fim de concluir não existência de aplicações equivariantes.

**Corolário 2.3.** Se $X$ e $Z$ são $G$-equivalentes então os índices de valor-ideal de Fadell-Husseini coincidem.

*Demonstração.* Suponhamos que $h : X \to Z$ seja um $G$-homeomorfismo de modo que $h^{-1}$ também seja $G$-equivariante. Pela monotonicidade do índice, $h$ e $h^{-1}$, respectivamente, implicam que $Ind^G(Z, R) \subset Ind^G(X, R)$ e $Ind^G(X, R) \subset Ind^G(Z, R)$. Portanto, $Ind^G(X, R) = Ind^G(Z, R)$. □

Da teoria de fibrações, uma vez que a ação de $G$ sobre $X$ possui ponto fixo $x$, a associação $[y] \mapsto [y, x]$ define uma seção $s : BG \to EG \times_G X$ da fibração $\omega_G[X]$. E, por conseguinte, a relação $\pi_X \circ s = 1_{BG}$ implica que o homomorfismo $\pi_X^*$ é injetor, isto é, o ideal $Ind^G(X, \mathrm{R})$ é trivial. De modo alternativo, temos o resultado:

**Corolário 2.4.** Se em um $G$-espaço $X$ o conjunto $X^G$ dos pontos fixos da ação não é vazio, então o índice $Ind^G(X, R)$ é trivial.

*Demonstração.* Para qualquer $x \in X^G$ a inclusão $\{x\} \hookrightarrow X$ é uma $G$-aplicação. Logo, pela monotonicidade do índice, $Ind^G(X, R) \subset Ind^G(\{x\}, R) = \{0\}$.

□

Por conta do corolário acima se observa que é conveniente investigar o conjunto dos pontos fixos da ação a fim de confirmar ou não a trivialidade do índice. O próximo resultado, devido a A. Borel e denominado critério para existência de ponto fixo, estabelece um método para detectar quando um índice não é trivial.

**Teorema 2.5** ((23))**.** *Suponhamos que o par ordenado $(G, R)$, constituído por um grupo topológico $G$ e um corpo $R$, coincida com $(T^n, \mathbb{Q})$ ou $(\mathbb{Z}_p^n, \mathbb{Z}_p)$. Seja $X$ um $G$-espaço paracompacto cuja cohomologia tem dimensão finita, isto é, existe um número natural $m$ tal que $H^i(X, R) = 0$ para todo $i > m$. Então o conjunto $X^G$ é vazio se, e somente se, o índice $Ind^G(X, R)$ não é trivial.*

Dado um $G$-fibrado universal $\mu = (E,\ \gamma,\ B)$, sabe-se que os anéis de cohomologia de $B$ e $BG$, pela equivalência de homotopia existente, são isomorfos. Assim, assumimos que $H^*(B,\ R) = H^*(BG,\ R)$. Disso, observamos que a definição do índice de valor-ideal depende da classe de isomorfismo do fibrado universal $\omega_G = (EG,\ \pi,\ BG)$. Portanto, como enunciado abaixo, podemos escolher o representante da classe mais adequado para calcular o índice.

**Lema 2.6.** Seja $\mu = (E, \lambda, B)$ um $G$-fibrado universal e seja $X$ um $G$-espaço. Então, tem-se que

$$Ind^G\,(X, R) = \ker\,\left(\,\lambda_X^* : H^*(B, R) \to H^*(E \times_G X, R)\,\right).$$

*Demonstração.* Como $\mu$ é um $G$-fibrado universal, existe uma função $f : BG \to B$ tal que o fibrado $\omega_G = (EG,\ \pi,\ BG)$ é isomorfo ao fibrado $f^{\#}\mu = (f^{\#}E,\ p,\ BG)$ induzido por $f$, que tem como espaço total e projeção definidos, respectivamente, por:

$$f^{\#}E = \left\{\,([y],\ e) \in BG \times E\ :\ f[y] = \lambda(e)\,\right\} \quad \text{e} \quad p([y], e) = [y].$$

Denotemos por $a : \omega_G \to f^{\#}\mu$ esse $BG$-isomorfismo de $G$-fibrados principais. Utilizando o mesmo argumento, existe uma função $g : B \to BG$ satisfazendo relação análoga, que exibimos pelo $B$-isomorfismo de $G$-fibrados principais $b : \mu \to g^{\#}\omega_G$.

$$\begin{array}{ccccc} EG & \xrightarrow{\ a\ } & f^{\#}E & \xrightarrow{\ \tilde{f}\ } & E \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} \\ BG & \xrightarrow[1_{BG}]{} & BG & \xrightarrow[f]{} & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\ b\ } & g^{\#}EG & \xrightarrow{\ \tilde{g}\ } & EG \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ B & \xrightarrow[1_B]{} & B & \xrightarrow[g]{} & BG \end{array}$$

Sendo assim, a partir da sequência de $G$-isomorfismos de fibrados principais

$$(f \circ g)^{\#}\mu \approx g^{\#}(f^{\#}\mu) \overset{a}{\approx} g^{\#}\omega_G \overset{b}{\approx} \mu \approx 1_B^{\#}\mu,$$

conclui-se que a composição $f \circ g$ é homotópica a função identidade de $B$, $1_B$, pois $\mu$ é universal. Repetindo o argumento para a composição $g \circ f$, obtemos que $f$ e $g$ são funções homotopicamente equivalentes.

Uma vez que as funções $\tilde{f} \circ a : EG \to E$ e $\tilde{g} \circ b : E \to EG$ são $G$-equivariantes, podemos considerar as funções induzidas $\alpha : EG \times_G X \to E \times_G X$, definida por $\alpha[y, x] = [(\tilde{f} \circ a)(y), x]$, e $\beta : E \times_G X \to EG \times_G X$, definida por $\beta[z, x] = [(\tilde{g} \circ b)(z), x]$. Assim, pela

comutatividade do diagrama acima, segue-se as relações $f \circ \pi_X = \lambda_X \circ \alpha$ e $g \circ \lambda_X = \pi_X \circ \beta$, pois $\pi_X : EG \times_G X \to BG$ é definida por $\pi_X[y, x] = \pi(y) = [y]$ e $\lambda_X : E \times_G X \to B$ é definida por $\lambda_X[z, x] = \lambda(z)$. Portanto, quando tais relações são induzidas em cohomologia,

$$\alpha^* \circ \lambda_X^* = \pi_X^* \circ f^* : H^*(B, R) \to H_G^*(X, R)$$

e

$$\beta^* \circ \pi_X^* = \lambda_X^* \circ g^* : H^*(BG, R) \to H^*(E \times_G X, R),$$

podemos observar que $f^*(\ker \lambda_X^*) \subset \ker \pi_X^*$ e $g^*(\ker \pi_X^*) \subset \ker \lambda_X^*$. Sendo assim, como $g^* = (f^*)^{-1}$, ao assumirmos a identificação $f^* : H^*(B, R) \approx H^*(BG, R)$, obtemos

$$Ind^G(X, R) = \ker \pi_X^* = \ker \lambda_X^*.$$

□

**Proposição 2.7** (Fórmula do produto de índices)**.** Seja $X_i$ um $G_i$-espaço, para $i = 1, 2$. Suponhamos que $R$ seja um domínio de ideais principais e, para $i = 1$ ou $i = 2$, os anéis $H_{G_i}^*(X_i, R)$ e $H^*(BG_i, R)$ sejam finitamente gerados localmente (i.e., $H^n(BG_i, R)$ e $H_{G_i}^n(X_i, R)$ são $R$-módulos finitamente gerados para todo $n$). Então, para $G = G_1 \times G_2$, verifica-se a seguinte igualdade:

$$Ind^G\,(X_1 \times X_2,\, R) = Ind^{G_1}\,(X_1,\, R) \otimes H^*(BG_2, R) \;+\; H^*(BG_1, R) \otimes Ind^{G_2}\,(X_2,\, R).$$

*Demonstração.* Sejam $\omega_{G_1} = (EG_1,\, \pi_1,\, BG_1)$ e $\omega_{G_2} = (EG_2,\, \pi_2,\, BG_2)$ fibrados universais e $X = X_1 \times X_2$ um $G$-espaço cuja ação é dada pela relação $(g_1, g_2) \cdot (x_1, x_2) = (g_1 x_1,\, g_2 x_2)$. Para $i = 1, 2$ denotemos por $\bar{\pi}_i : EG_i \times_{G_i} X_i \to BG_i$ a projeção associada a fibração $\omega_{G_i}[X_i] = (X_{G_i},\, \bar{\pi}_i,\, BG_i)$, isto é, $\bar{\pi}_i[y_i, x_i] = \pi_i(y_i)$.

Como o produto de fibrados $\omega_{G_1} \times \omega_{G_2} = (EG_1 \times EG_2,\, \pi_1 \times \pi_2,\, BG_1 \times BG_2)$ é um $G$-fibrado universal, o Lema 2.6 nos diz que $Ind^G\,(X, R) = \ker\,(\pi_1 \times \pi_2)_X^*$, onde por padrão

$$(\pi_1 \times \pi_2)_X[(y_1, y_2), (x_1, x_2)] = (\pi_1 \times \pi_2)(y_1, y_2) = (\pi_1(y_1), \pi_2(y_2)).$$

Sendo assim, como a associação $h[(y_1, y_2), (x_1, x_2)] = ([y_1, x_1], [y_2, x_2])$ define um homeomorfismo entre $(EG_1 \times EG_2) \times_G X$ e $(EG_1 \times_{G_1} X_1) \times (EG_2 \times_{G_2} X_2)$, que satisfaz a

relação $(\pi_1 \times \pi_2)_X = (\bar{\pi}_1 \times \bar{\pi}_2) \circ h$, segue-se que $\ker (\pi_1 \times \pi_2)^*_X = \ker (\bar{\pi}_1 \times \bar{\pi}_2)^*$.

Por outro lado, a fórmula de Künneth fornece os isomorfismos:

$$\psi : H^*(BG_1, R) \otimes H^*(BG_2, R) \approx H^*(BG_1 \times BG_2, R)$$

$$\varphi : H^*_{G_1}(X_1, R) \otimes H^*_{G_2}(X_2, R) \approx H^*((EG_1 \times_{G_1} X_1) \times (EG_2 \times_{G_2} X_2), R)$$

Das quais, a partir da comutatividade $(\bar{\pi}_1 \times \bar{\pi}_2)^* \circ \psi = \varphi \circ (\bar{\pi}_1^* \otimes \bar{\pi}_2^*)$, nos permite concluir que

$$\begin{aligned} Ind^G (X_1 \times X_2, R) &\approx \ker \bar{\pi}_1^* \otimes \bar{\pi}_1^* \\ &= \ker \bar{\pi}_1^* \otimes H^*(BG_2, R) + H^*(BG_1, R) \otimes \ker \bar{\pi}_2^* \\ &= Ind^{G_1} (X_1, R) \otimes H^*(BG_2, R) + H^*(BG_1, R) \otimes Ind^{G_2} (X_2, R). \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.8.** Se a relação $(g_1, g_2) \cdot x = g_1 x$ determina como o grupo $G = G_1 \times G_2$ atua sobre o espaço $X_1$, então

$$Ind^G (X_1, R) = Ind^{G_1} (X_1, R) \subset H^*(BG, R).$$

*Demonstração.* Considerando $X_2 = \{y\}$ um $G_2$-espaço, identificamos o espaço $X_1$ com $X_1 \times X_2$. Assim, por meio da equivariância da identificação, uma vez que a relação $(g_1, g_2) \cdot (x, y) = (g_1 x, g_2 y) = (g_1 x, y)$ define como $G$ atua sobre $X_1 \times X_2$, segue-se que

$$\begin{aligned} Ind^G (X_1, R) &= Ind^G (X_1 \times X_2, R) \\ &= Ind^{G_1} (X_1, R) \otimes H^*(BG_2, R) + H^*(BG_1, R) \otimes Ind^{G_2} (X_2, R) \\ &= Ind^{G_1} (X_1, R) \otimes H^*(BG_2, R) \\ &\approx Ind^{G_1} (X_1, R) \subset H^*(BG, R), \end{aligned}$$

onde, pelo isomorfismo apresentado na demonstração da Proposição 2.7, podemos tomar $Ind^{G_1} (X_1, R)$ como um ideal do anel $H^*(BG, R)$. □

*Exemplo* 3. Com $T = SO(2)$, o Exemplo 2 implica que

$$Ind^T (SO(2), \mathbb{Q}) = \langle t \rangle \subset \mathbb{Q}[t] = H^*(BT, \mathbb{Q}),$$

onde $t \in H^2(BT, \mathbb{Q})$. Assim, dados $u = u_1 \times \cdots \times u_n \in T^n$ e $v \in SO(2)$ quaisquer, a relação $u \cdot v = u_i v$ define uma ação de $T^n$ sobre $SO(2)$. Portanto, pelo corolário anterior, temos

$$Ind^{T^n}(SO(2), \mathbb{Q}) = \langle t_i \rangle \subset \mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_n] = H^*(BT^n, \mathbb{Q}),$$

onde $t_i \in H^2(BT, \mathbb{Q})$ para todo $i = 1, \ldots, n$. □

## 2.3 A SEQUÊNCIA ESPECTRAL DE SERRE

A Sequência espectral de Serre é constituída tendo como base uma fibração de Serre $(E,\ p,\ B)$, também conhecida como fibração de Hurewicz para $I^n$ com $n \geq 0$. Como toda fibração do tipo $(E,\ p,\ B,\ F,\ G)$ é uma fibração de Serre (Teorema 3.6 do capítulo 2 da referência (24)), os resultados que envolvem $p : E \to B$ se aplicam a projeção $\pi_X : EG \times_G X \to BG$ da fibração $\omega_G[X] = (EG \times_G X,\ \pi_X,\ BG,\ X,\ G)$.

Dado $(E,\ p,\ B)$ uma fibração de Serre, a sequência espectral de Serre associada $(E_r,\ d_r)$ é formada por $R$-álgebras bigraduadas $E_r = \sum_{p,q} E_r^{p,q}$, onde $p,\ q,\ r \in \mathbb{Z}$ com $r$ sendo não-negativo. Os homomorfismos $d_r$ são referidos como diferenciais de bigrau $(r, 1-r)$, apresentados por

$$d_r = d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p-r,q-r+1}$$

e satisfazem a relação $d_r \circ d_r = 0$.

Por construção $E_r^{p,q} = 0$ se $p < 0$ ou $q < 0$. Disso, a partir da identificação

$$E_{r+1}^{p,q} \approx H(E_r^{p,q}) = \frac{\ker\ d_r}{Im\ d_r},$$

conclui-se:

- $E_{r+1}^{p,q} = \ker\ d_r^{p,q}$ se $r > p$.
- $E_{r+1}^{p,q} = E_r^{p,q}/Im\ d_r^{p-r,q+r-1}$ se $r > q+1$.

Donde se adota a notação $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = \cdots = E_\infty^{p,q}$, dada a hipótese de que $r > max\ (p, q+1)$. Ainda, para $r > q+1$, a projeção $E_r^{p,q} \to E_r^{p,q}/Im\ d_r^{p-r,q+r-1}$ é simplesmente denotada por $E_r^{p,q} \to E_{r+1}^{p,q}$.

Associado a $(E_r,\ d_r)$ existe uma família $\{D^{p,q}\}$ de subgrupos de $H^{p+q}(E, R)$ que

satisfazem a sequência de inclusões

$$0 = D^{n+1,-1} \subset D^{n,0} \subset \cdots \subset D^{1,n-1} \subset D^{0,n} = H^n(E, R)$$

e permite a identificação $E_\infty^{p,q} = D^{p,q}/D^{p+1,q-1}$.

As propriedades citadas até então são intrínsecas de uma sequência espectral, mas quando se refere à de Serre temos que o termo $E_2^{*,*}$ é isomorfo ao anel de cohomologia do espaço $B$ com o sistema de anéis de coeficientes locais $\underline{H^*(F,R)} = \{H^*(F_b, R)\}_{b\in B}$, isto é, $E_2^{p,q} \approx H^p(B, \underline{H^q(F,R)})$. Quando o sistema $\underline{H^*(F,R)}$ é trivial se verifica o isomorfismo

$$H^p(B, \underline{H^q(F,R)}) \approx H^p(B, H^q(F,R)).$$

É suficiente que o espaço $B$ seja simplesmente conexo ou que o grupo topológico $G$ seja conexo por caminho a fim de garantir a trivialidade do sistema. Entre essas, há outras condições mencionadas em (24) nos Lemas 1.18 (p. 104) e 2.9 (p. 108) que cumprem o mesmo objetivo. Disso, dado a trivialidade do sistema, são válidos as identificações $E_2^{p,0} = H^p(B, R)$ e $E_2^{0,q} = H^q(F, R)$, se $B$ e $F$ forem espaços conexos por caminho.

O próximo resultado nos permite decompor o homomorfismo $\pi_X^* : H^*(BG, R) \to H_G^*(X, R)$ em cada dimensão, de modo que o núcleo $\ker \pi_X^*$ pode ser estimado diretamente da sequência espectral de Serre associada.

**Proposição 2.9** ((24))**.** Se na fibração $(E,\ p,\ B,\ F,\ G)$ o espaço $F$ é conexo por caminho e o sistema $\underline{H^*(F,R)}$ é trivial, então o homomorfismo $p^* : H^*(B,R) \to H^*(E,R)$ é descrito por

$$H^n(p) : H^n(B,R) = E_2^{n,0} \to E_3^{n,0} \to \cdots \to E_{n+1}^{n,0} = E_\infty^{n,0} = D^{n,0} \subset H^n(E,R),$$

onde $H^n(p)$ denota o homomorfismo $p^*$ restrito ao grupo $H^n(B,R)$, para $n \geq 0$.

Acima observamos que o homomorfismo $p^*$ é decomposto em sucessivas projeções seguido por uma inclusão. Portanto, se tais projeções são triviais (i.e., $E_2^{n,0} = E_{n+1}^{n,0}$), concluímos que $p^*$ é um monomorfismo. A recíproca também é verdadeira como estabelece o corolário:

**Corolário 2.10.** O homomorfismo $p^*$ é um monomorfismo se, e somente se, $E_2^{n,0} = E_{n+1}^{n,0}$ para todo $n \geq 0$.

*Exemplo* 4. Se $X$ é um $G$-espaço contrátil e o sistema $\underline{H^*(X,R)}$ é trivial, então $Ind^G\ (X,R) = 0$.

De fato, como $H^q(X,R) = 0$ para todo $q > 0$, $E_2^{p,q} = 0$ é trivial para todo $q > 0$. Sendo assim, pela relação $E_{r+1}^{p,q} = \ker\, d_r / Im\, d_r$, tem-se $E_2^{p,0} = E_{p+1}^{p,0}$. Logo, $\pi_X^*$ é um monomorfismo.

□

*Exemplo* 5. Para $G = O(4)$ e $K = O(1) \times O(3)$, como definido na Seção 1.1, o espaço quociente $G/K$ é homeomorfo a $\mathbb{R}P^3$. Assim, dado $l \in L = 1 \times SO(3)$ e $[g] \in G/K$, a relação $l[g] = [lg]$ estabelece como $L$ atua sobre $\mathbb{R}P^3_* := G/K - \{[e]\}$, observando que $l[g] = [e]$ implica $[g] = [e]$.

Agora, considerando a fibração associada a $\mathbb{R}P^3_*$ por $\omega_L$,

$$\mathbb{R}P^3_* \hookrightarrow EL \times_L \mathbb{R}P^3_* \xrightarrow{p} BL,$$

segue-se do corolário anterior que

$$Ind^L(\mathbb{R}P^3_*, \mathbb{Q}) = \ker\, p^* = 0,$$

pois $\mathbb{R}P^3_*$ é homotopicamente equivalente a $\mathbb{R}P^2$ e $H^*(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Explicitamente temos, para todo $m > 0$, $E_2^{0,m} = H^m(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Q}) = 0$ e, portanto, $E_2^{n,0} = E_{n+1}^{n,0}$, para todo $n \geq 0$.

□

**Teorema 2.11** (A sequência exata de Gysin, (24))**.** *Dado uma fibração* $(E,\ p,\ B,\ F,\ G)$ *com o sistema* $\underline{H^*(F,R)}$ *sendo trivial e* $H^*(F,R) = H^*(S^{n-1},R)$, *para* $n \geq 1$, *então a sequência*

$$\cdots \to H^{i+n-1}(E,R) \xrightarrow{\lambda} H^i(B,R) \xrightarrow{\varepsilon^*} H^{i+n}(B,R) \xrightarrow{p^*} H^{i+n}(E,R) \to \cdots$$

*é exata, onde* $\varepsilon^*(y) = y \cdot \varepsilon$ *e* $\varepsilon \in H^n(B,R)$ *é denominado classe de Euler da fibração.*

Pela exatidão da sequência de Gysin o núcleo do homomorfismo $p^*$ coincide com o ideal gerado pela classe de Euler da fibração, ou seja, $\ker\, p^* = \langle \varepsilon \rangle$.

*Exemplo* 6. $Ind^{\mathbb{Z}_2}(S^n,\ \mathbb{Z}_2) = \langle\, t^{n+1} \rangle \subset \mathbb{Z}_2[t],\ dim\, t = 1.$

A esfera unitária $S^n$ de dimensão $n$ é um $\mathbb{Z}_2$-espaço livre (tal ação associa um ponto ao seu antipodal). Sendo assim, como $S^n_{\mathbb{Z}_2} = E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} S^n$ e $S^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^n$ são homotopicamente equivalentes (vide (20)), segue-se que $H^*_{\mathbb{Z}_2}(S^n,\ \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[t]\ /\langle\, t^{n+1} \rangle$. Portanto constatamos que

$$Ind^{\mathbb{Z}_2}(S^n, \mathbb{Z}_2) = \ker\left(\pi^*_{S^n} : \mathbb{Z}_2[t] \to \mathbb{Z}_2[t]/\langle t^{n+1}\rangle\right)$$
$$= \langle t^{n+1}\rangle,$$

pois a sequência exata de Gysin aplicada à fibração

$$\omega_{\mathbb{Z}_2}[S^n] = (E\mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} S^n,\ \pi_{S^n},\ B\mathbb{Z}_2,\ S^n,\ \mathbb{Z}_2)$$

nos diz que

$$Ind^{\mathbb{Z}_2}(S^n, \mathbb{Z}_2) = \langle \varepsilon\rangle \subset \mathbb{Z}_2[t] = H^*(B\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2),$$

onde $dim\, t = 1$ e $dim\, \varepsilon = n + 1$.

Por outro lado, o Teorema 2.5 afirma que $Ind^{\mathbb{Z}_2}(S^n, \mathbb{Z}_2)$ não é trivial. Logo, utilizando a sequência exata de Gysin, também concluímos que $\varepsilon = t^{n+1}$.

Analisando o homomorfismo $\pi^*_{S^n} : \mathbb{Z}_2[t] \to \mathbb{Z}_2[t]/\langle t^{n+1}\rangle$ através da Proposição 2.9 e do corolário subsequente também é possível concluir que $\ker \pi^*_{S^n} = \langle t^{n+1}\rangle$. □

Supondo que a fibração $\omega_G[X]$ satisfaz as hipóteses do teorema acima, o exemplo anterior ilustra como a sequência exata de Gysin precisa a posição (i.e., dimensão) do gerador do ideal $Ind^G(X,\ R)$ mas não pode afirmar por si só que esse ideal é trivial ou não. Por exemplo, $\mathbb{R}P^3$ é um $SO(3)$-espaço (ver Exemplo 5) cujo índice é o ideal gerado pela classe de Euler $\varepsilon \in H^4(BSO(3), \mathbb{Q})$, visto que $H^*(\mathbb{R}P^3, \mathbb{Q}) \approx H^*(S^3, \mathbb{Q})$, mas tal ação possui ponto fixo. Logo $\varepsilon = 0$.

## 2.4 O ÍNDICE $Ind^{T^n}(SO(2n+1), \mathbb{Q})$

Sejam $G$ um grupo de Lie compacto e $H$ um subgrupo fechado. Com base no Lema 2.6, uma vez que $\mu = (EG,\ \lambda,\ EG/H)$ é um $H$-fibrado universal, segue-se que

$$Ind^H(G, R) = \ker\left(\lambda^*_G : H^*(BH,\ R) \to H^*(EG \times_H G,\ R)\right).$$

Com esse ponto de vista, utilizando os homeomorfismos apresentados na Seção 1, o resultado abaixo descreve o índice $Ind^H(G, R)$ em função da fibração $(EG/H,\ \rho,\ BG,\ G/H,\ G)$, também denotada simplesmente por $G/H \overset{i}{\hookrightarrow} BH \overset{\rho}{\to} BG$.

**Proposição 2.12.** Sejam $G$ um grupo de Lie compacto, $H$ um subgrupo fechado de $G$ e $R$ um domínio de ideais principais. Então

$$Im\,\rho^+ \subset Ind^H(G,R) = \ker i^* : H^*(BH,R) \to H^*(G/H,R),$$

onde $i^*$ é induzido pela inclusão $i : G/H \to BH$ da fibra $\rho^{-1}(b) \simeq G/H$ no espaço total $EG/H = BH$ com $b \in BG$ qualquer.

*Demonstração.* Associamos, a partir das projeções $\pi : EG \to EG/G$ e $\lambda : EG \to EG/H$, as funções $\pi_G : EG \times_G G \to BG$ e $\lambda_G : EG \times_H G \to EG/H$ definidas por $\pi_G[y,g] = [y]$ e $\lambda_G[y,g] = [y]$. Com isso, a função $\varphi : EG \times_H G \to EG \times_G G$, dada por $\varphi[y,g] = [y,g]$, estabelece a relação $\pi_G \circ \varphi = \rho \circ \lambda_G$. Sendo assim, utilizando os homeomorfismos $EG \times_G G \simeq EG$ (definido por $[y,g] \mapsto yg$) e $\eta : EG \times_H G \simeq EG \times G/H$ (definido por $[y,g] \mapsto (yg,[g])$), ambos apresentados na Proposição 2.1, tal relação é representada pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H^*(BG,\,R) & \xrightarrow{\quad\pi_G^*\quad} & H^*(EG\times_G G,\,R) = H^*(EG,\,R) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi^*} \\ H^*(BH,\,R) = H^*(EG/H,\,R) & \xrightarrow[\quad\lambda_G^*\quad]{} & H^*(EG\times_H G,\,R) = H^*(G/H,\,R) \end{array}$$

onde a igualdade inferior à direita segue da fórmula de Künneth seguido do fato que $H^*(EG,R) = R$.

Observa-se que a contratibilidade de $EG$ implica que o homomorfismo $\lambda_G^* \circ \rho^*$ é trivial quando restrito a dimensões positivas do anel graduado $H^*(BG,R)$. Ou seja, $Im\,\rho^+ \subset \ker \lambda_G^* = Ind^H(G,R)$, onde $\rho^+$ denota o homomorfismo $\rho^*$ restrito a $H^+(BG,R)$.

Por fim, a partir da inclusão $i_b : (\rho^{-1}(b) \simeq G/H) \hookrightarrow BH$, onde $b = [y] \in BG$, estabeleceremos que os homomorfismos $i_b^*$ e $\lambda_G^*$ são equivalentes e, por conseguinte, a igualdade $Ind^H(G,R) = \ker i^*$.

Dado $b = [y] \in BG$, fixamos $y \in EG$ um representante da classe e descrevemos o espaço $\rho^{-1}(b)$ em função de $y$ por: $yG = \left\{\, [yg] \in EG/H \,;\, g \in G \,\right\}$. Uma vez que a ação de $G$ sobre $EG$ é livre, a relação $g \mapsto yg^{-1}$ define um homeomorfismo $H$-equivariante entre $G$ e $yG$. Portanto, $G/H$ e $\rho^{-1}(b)$ são homeomorfos por meio da associação $[g] \mapsto [yg^{-1}]$, da qual estabelecemos o homeomorfismo $\varphi_b : \rho^{-1}(b) \to y \times G/H$ por $\varphi_b[yg] = (y,[g^{-1}])$.

Por outro lado, como $EG$ é contrátil, a inclusão $j_b : y \times G/H \to EG \times G/H$ é uma

equivalência de homotopia. Assim, a partir da função $\eta^{-1}(y,[g]) = [yg^{-1}, g]$, definimos $\gamma_b : \rho^{-1}(b) \to EG \times_H G$ pela composição $\eta^{-1} \circ j_b \circ \varphi_b$, isto é, $\gamma_b$ é descrita por $[yg] \mapsto [yg, g^{-1}]$. Logo, sendo $\gamma_b^*$ um isomorfismo, a relação $i_b = \lambda_G \circ \gamma_b$ nos diz que $i_b^*$ e $\lambda_G^*$ são equivalentes e, portanto, $\ker i_b^* = \ker \lambda_G^*$.

□

Considerando o grupo $SO(2n+1)$ e o toro maximal associado $T^n = SO(2)^n \times 1$, tem-se que $H^*(BT^n, R) = R[t_1, \ldots, t_n]$ é um anel graduado de polinômios sobre $R$, onde $t_i \in H^2(BT^n, R)$ para cada $i$, isto é, $dim\,(t_i) = 2$. Denotamos por $\sigma_i = \sigma_i(t_1, \ldots, t_n)$ e $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i(t_1^2, \ldots, t_n^2)$ os polinômios simétricos, de dimensões $dim\,(\sigma_i) = 2i$ e $dim\,(\bar{\sigma}_i) = 4i$, respectivamente, nas variáveis $t_1, \ldots, t_n$ e $t_1^2, \ldots, t_n^2$:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} t_i, \quad \sigma_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} t_i t_j\,, \ \ldots, \quad \sigma_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} t_{i_1} \cdots t_{i_k}, \ \ldots, \quad \sigma_n = t_1 t_2 \cdots t_n,$$

$$\bar{\sigma}_1 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2, \quad \bar{\sigma}_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} t_i^2 t_j^2\,, \ \ldots, \quad \bar{\sigma}_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} t_{i_1}^2 \cdots t_{i_k}^2, \ \ldots, \quad \bar{\sigma}_n = t_1^2 t_2^2 \cdots t_n^2.$$

Com esta notação, destacamos logo abaixo um item do Teorema 5.16 do Capítulo 3 da referência (24).

**Teorema 2.13.** *(24) Suponha que $G = SO(2n+1)$, $H = T^n$ e que $R$ seja um corpo de característica distinta de 2. Então, associado à fibração $G/H \xhookrightarrow{i} BH \xrightarrow{\rho} BG$, segue-se que o núcleo do homomorfismo $i^* : H^*(BH, R) \to H^*(G/H, R)$ coincide com o ideal $\langle \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \ldots, \bar{\sigma}_n \rangle$ gerado por $Im\,\rho^+$.*

Combinando o contexto da Proposição 2.12 com o do Teorema acima, obtemos de imediato:

**Corolário 2.14.** $Ind^{T^n}\,(SO(2n+1), \mathbb{Q}) = \langle\, \bar{\sigma}_1, \ \ldots, \ \bar{\sigma}_n \rangle \subset \mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_n]$.

Como consequência da Proposição 2.12, enunciamos o resultado a seguir, cujos itens são correspondentes aos Teoremas 5.5, 5.6, 5.9 e 5.16 do Capítulo 3 de (24):

**Teorema 2.15.** *Associado à fibração $G/H \xhookrightarrow{i} BH \xrightarrow{\rho} BG$, temos:*

1. *Para* $G = U(n)$ *e* $H = T^n$,

$$Ind^{T^n}(U(n), \mathbb{Z}) = \ker i^* = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle \subset \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n];$$

2. *Para* $G = Sp(n)$ *e* $H = T^n$,

$$Ind^{T^n}(Sp(n), \mathbb{Z}) = \ker i^* = \langle \bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n \rangle \subset \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n];$$

3. *Para* $G = O(n)$, $H = \mathbb{Z}_2^n$ $(O(1) \simeq \mathbb{Z}_2)$ *e* $R$ *um corpo de característica 2,*

$$Ind^{\mathbb{Z}_2^n}(O(n), R) = \ker i^* = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle \subset R[t_1, \ldots, t_n];$$

4. *Para* $G = SO(2n)$, $H = T^n$ *e* $R$ *um corpo de característica diferente de 2,*

$$Ind^{T^n}(SO(2n), R) = \ker i^* = \langle \bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_{n-1}, \sigma_n \rangle \subset R[t_1, \ldots, t_n].$$

# 3 PROPRIEDADE DO PONTO FIXO DO ESPAÇO G/K

## 3.1 RESULTADOS GERAIS E EXEMPLOS

Sejam $G$ um grupo topológico e $K$ um subgrupo fechado de $G$. Nesta seção, apresentamos uma relação biunívoca entre o conjunto $A$, constituído de todas as autofunções do espaço quociente $G/K$ (isto é, funções contínuas de $G/K$ em $G/K$), e o conjunto $E$, formado por todas as funções $K$-equivariantes de $G$ em $G/K$. A partir dessa bijeção, estabelecemos uma relação entre a propriedade do ponto fixo do espaço $G/K$ com o conjunto $E_0$, cujos elementos são as pré-imagens do ponto $[e] \in G/K$ pelas aplicações do conjunto $E$, onde $e$ denota o elemento neutro do grupo $G$. A saber, concluiremos que o espaço $G/K$ possui a propriedade do ponto fixo se, e somente se, o conjunto vazio $\emptyset$ não for um elemento de $E_0$.

Concluímos esta seção observando o seguinte: Para que $G/K$ possua a propriedade do ponto fixo, é necessário que a diferença entre o grupo normalizador de $K$ e o grupo $K$ seja vazia, isto é, $N(K) - K = \emptyset$. Dessa condição, extraímos alguns exemplos de espaços $G/K$ que não possuem a propriedade do ponto fixo.

Observamos que no conjunto $E$ consideramos $G$ e $G/K$ como $K$-espaços à esquerda a partir das associações

$$(k, g) \mapsto k * g = gk^{-1} \quad \text{e} \quad (k, [g]) \mapsto k[g] = [kg].$$

**Proposição 3.1.** Seja $G$ um grupo topológico e seja $K$ um subgrupo fechado de $G$. Então, existe uma bijeção $\Phi : A \to E$ entre o conjunto $A$, constituído de todas as autofunções do espaço quociente $G/K$, e o conjunto $E$, formado por todas as funções $K$-equivariantes de $G$ em $G/K$.

Para $F \in A$ qualquer, define-se $\Phi(F) : G \to G/K$ pela associação $g \mapsto g^{-1}F[g]$. Para $\varphi \in E$, $\Phi^{-1}(\varphi) : G/K \to G/K$ é definida por $\Phi^{-1}(\varphi)[g] = g\varphi[g]$.

*Demonstração.* Antes de estabelecer a função $\Phi$ observamos previamente que um dos argumentos que exprimem a continuidade das funções a serem definidas abaixo é derivado da continuidade da função que define $G/K$ como um $G$-espaço: $(g, [g_o]) \mapsto g[g_o] = [gg_o]$.

Seja $F : G/K \to G/K$ uma função qualquer do conjunto $A$, definimos a função $\Phi$ sendo responsável por associar $F$ à função $\Phi(F) : G \to G/K$ definida por $\Phi(F)(g) = g^{-1}F[g]$,

onde a equivariância, por $K$, da função $\Phi(F)$ se segue da expressão:

$$\Phi(F)(k * g) = \Phi(F)(gk^{-1}) = (gk^{-1})^{-1}F[gk^{-1}] = kg^{-1}F[g] = k\Phi(F)(g).$$

Assim, observando que $\Phi(F)$ é contínua, concluímos que, de fato, $\Phi(F) \in E$.

Por outro lado, dado $\varphi : G \to G/K$ uma função $K$-equivariante (isto é, $\varphi(k * g) = k\varphi(g)$), a associação $[g] \mapsto g\varphi(g)$ está bem definida uma vez que, para todo $k \in K$, segue-se que

$$(gk)\varphi(gk) = (gk)\varphi(k^{-1} * g) = (gk)(k^{-1}\varphi(g)\,) = g(kk^{-1})\varphi(g) = g\varphi(g).$$

Portanto, definimos a função $\Psi : E \to A$ que relaciona $\varphi \in E$ com a função $\Psi(\varphi) : G/K \to G/K$ definida por $\Psi(\varphi)[g] = g\varphi(g)$.

Por fim, como para quaisquer $F \in A$, $\varphi \in E$ e $g \in G$, as expressões

$$\begin{aligned}[(\Phi \circ \Psi)(\varphi)](g) = \Phi\big(\,\Psi(\varphi)\,\big)(g) &= g^{-1}\big(\,\Psi(\varphi)[g]\,\big) \\ &= g^{-1}\big(\,g\varphi(g)\,\big) \\ &= \varphi(g)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}[(\Psi \circ \Phi)(F)][g] = \Psi\big(\,\Phi(F)\,\big)[g] &= g\big(\,\Phi(F)(g)\,\big) \\ &= g\big(\,g^{-1}F[g]\,\big) \\ &= F[g]\end{aligned}$$

são válidas, concluímos que $\Psi = \Phi^{-1}$ e, por conseguinte, $\Phi$ é uma bijeção.

□

Uma característica que se ressalta da bijeção $\Phi$, mencionada acima, é a relação entre um ponto fixo da função $F : G/K \to G/K$ com o conjunto $\Phi(F)^{-1}[e]$ da pré-imagem do ponto $[e] \in G/K$ pela função $\Phi(F) : G \to G/K$. Observaremos que $F$ possui ponto fixo se, e somente se, $\Phi(F)^{-1}[e] \neq \emptyset$. E, por consequência, poderemos estudar a propriedade do ponto fixo do espaço $G/K$ em função do conjunto $E_0 = \big\{\,\varphi^{-1}[e] \;:\; \varphi \in E\,\big\}$.

**Definição 3.1.** Fixado um espaço topológico $X$, dizemos que a função $f : X \to X$ possui ponto fixo se existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Além disso, dizemos que o espaço $X$ possui a propriedade

do ponto fixo (p.p.f.) se toda função de $X$ em $X$ possui ponto fixo.

□

**Proposição 3.2.** Seja $G$ um grupo topológico e $K$ um subgrupo fechado. O espaço quociente $G/K$ possui a propriedade do ponto fixo se, e somente se, o conjunto $\varphi^{-1}[e]$ não é vazio para toda função $\varphi : G \to G/K$ de $E$ (isto é, $\emptyset \notin E_0$).

*Demonstração.* Suponhamos que a função $F : G/K \to G/K$ possua ponto fixo $[g] \in G/K$. De imediato, concluímos que $\Phi(F)^{-1}[e]$, a imagem inversa do ponto $[e]$ pela aplicação $\Phi(F)$, não é um conjunto vazio, pois $\Phi(F)(g) = g^{-1}F[g] = g^{-1}[g] = [e]$.

Reciprocamente, dado $\varphi : G \to G/K$, uma $K$-aplicação, suponhamos que existe $g \in \varphi^{-1}[e]$. Assim, aplicando a função associada $\Phi^{-1}(\varphi) : G/K \to G/K$ no ponto $[g]$, obtemos

$$\Phi^{-1}(\varphi)[g] = g\varphi(g) = g[e] = [g],$$

isto é, $\Phi^{-1}(\varphi)$ possui ponto fixo.

Logo, a partir da bijeção $\Phi$ concluímos o resultado.

□

Como consequência da proposição anterior, obtemos uma relação entre o grupo normalizador $N(K) = \{ g \in G \ : \ gK = Kg \}$ de $K$ em $G$ e a propriedade do ponto fixo do espaço $G/K$.

**Corolário 3.3.** Se o espaço $G/K$ possui a propriedade do ponto fixo, então é necessário que o conjunto $N(K) - K$, dado pela diferença de $N(K)$ por $K$, seja vazio.

*Demonstração.* Suponhamos que $N(K) - K \neq \emptyset$. Para $g_o \in N(K) - K$ consideramos a função constante $\varphi : G \to G/K$ definida por $\varphi(g) = [g_o]$.

Como $g_o$ não pertence ao grupo $K$, sua classe de equivalência difere da classe do elemento neutro $e \in G$, ou seja, $[g_o] \neq [e]$. Logo $\varphi^{-1}[e] = \emptyset$. Além disso, como $g_o$ pertence ao grupo normalizador de $K$ em $G$ observamos que, para todo $k \in K$ e todo $g \in G$,

$$k\varphi(g) = k[g_o] = [kg_o] = [g_o k'] = [g_o] = \varphi(k * g).$$

Ou seja, $\varphi$ é $K$-equivariante.

Assim, concluímos que, se $N(K) - K \neq \emptyset$, então existe $\varphi \in E$ tal que $\varphi^{-1}[e] = \emptyset$ e, portanto, o espaço $G/K$ não possui a propriedade do ponto fixo.

□

*Exemplo* 7. A variedade de Stiefel $V_{k,n}(\mathbb{R})$ não possui a propriedade do ponto fixo.

Para $1 \leq k \leq n$, a variedade de Stiefel

$$V_{k,n}(\mathbb{R}) = \left\{ (v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \ : \ (v_i \mid v_j) = \delta_{ij} \right\}$$

é homeomorfo ao espaço das classes laterais $O(n)/1_k \times O(n-k)$. Considerando $v = (v_1, \ldots, v_n) \in O(n)$, tal relação é estabelecida pela função $[v] \mapsto (v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$.

Em particular, para $k = 1$ e $n$ arbitrário, $V_{1,n}(\mathbb{R})$ descreve a esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Nessa situação, definimos a aplicação $A : S^{n-1} \to S^{n-1}$, por $A(v) = -v$. Pelo homeomorfismo mencionado, isso se traduz na função

$$F : \frac{O(n)}{1 \times O(n-1)} \longrightarrow \frac{O(n)}{1 \times O(n-1)},$$

definida por $F[u] = [-u]$. Logo, considerando $G = O(n)$ e $K = 1 \times O(n-1)$ temos, no contexto da Proposição 3.1, que a função $\Phi(F) : O(n) \longrightarrow O(n)/1 \times O(n-1)$ é constante, dada por:

$$\Phi(F)(u) = u^{-1}F[u] = u^{-1}[-u] = [-u^{-1}u] = [-1_n].$$

Assim, como $[-1_n] \neq [1_n]$, segue-se que $\Phi(F)^{-1}[1_n] = \emptyset$ e, por conseguinte, $V_{1,n}(\mathbb{R})$ não possui a propriedade do ponto fixo, de acordo com a Proposição 3.2. Essa mesma conclusão é obtida apenas observando que a função $A$ não possui ponto fixo. Entretanto, essa abordagem mostra que, para $G = O(n)$ e $K = 1_k \times O(n-k)$, a função $\varphi : G \to G/K$, definida por $\varphi(u) = [-1_n]$, é $K$-equivariante, uma vez que $-1_n \in N(K) - K$ (vide demonstração do Corolário 3.3). Portanto, como $\varphi^{-1}[1_n] = \emptyset$, concluímos que $V_{k,n}(\mathbb{R}) \simeq G/K$ não possui a propriedade do ponto fixo.

□

*Exemplo* 8. Seja $G = O(n)$, consideremos o subgrupo

$$K = O(n_1) \times \cdots \times O(n_{i-1}) \times 1_{n_i} \times O(n_{i+1}) \times \cdots \times O(n_m)$$

de modo que $n_1 + \cdots + n_m = n$. Nessas condições, o espaço $G/K$ não possui a propriedade do ponto fixo de acordo com o Corolário 3.3, uma vez que $-1_n \in N(K) - K$. □

*Exemplo* 9. O espaço $\mathbb{R}G_{n,n}$ não possui a propriedade do ponto fixo.

Definindo $G = O(2n)$ e $K = O(n) \times O(n)$ considere a matriz

$$u_o = \begin{bmatrix} 0_n & 1_n \\ 1_n & 0_n \end{bmatrix} \in G,$$

onde $1_n$ e $0_n$ denotam, respectivamente, as matrizes identidade e nula de ordem $n$.

Como, para todo $k_1 \times k_2 \in K$, a igualdade $(k_1 \times k_2)u_o = u_o(k_2 \times k_1)$ é satisfeita e $u_o \notin K$, conclui-se que $u_o \in N(K) - K$. Logo, o espaço $G/K$ não possui a propriedade do ponto fixo de acordo com o Corolário 3.3.

Segundo a Proposição 3.1, associamos a função $\varphi : G \to G/K$, definida por $\varphi(u) = [u_o]$, à função $\Phi^{-1}(\varphi) : G/K \to G/K$ estabelecida pela lei:

$$\Phi^{-1}(\varphi)[u] = u\varphi[u] = u[u_o] = [uu_o].$$

O homeomorfismo $\eta : G/K \to \mathbb{R}G_{n,n}$ traduz $\Phi^{-1}(\varphi)$ na função que associa ao subespaço $U \in \mathbb{R}G_{n,n}$ seu ortogonal $U^\perp$, visto que $uu_o = (u_{n+1}, \ldots, u_{2n}, u_1, \ldots, u_n)$ quando $u = (u_1, \ldots, u_{2n}) \in O(2n)$.

$$U = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle \mapsto \langle u_{n+1}, \ldots, u_{2n} \rangle = U^\perp$$

□

Seja $R_n : O(n) \to O(n)$ o homeomorfismo definido por $R_n(u) = \alpha_n u \alpha_n$, onde $\alpha_n$ representa a matriz cujo o termo $(\alpha_n)_{ij}$ é igual a 1 se $j = n + 1 - i$ e igual a 0 caso contrário:

$$\alpha_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in O(n).$$

Observando que $\alpha_n^{-1} = \alpha_n$, destacamos duas propriedades de $R_n$: para quaisquer $u \in O(n)$ e $v \in O(m)$, temos que $R_n^2(u) = u$ e $R_{n+m}(u \times v) = R_m(v) \times R_n(u)$. Assim, nota-se que a matriz $u_o$, do exemplo anterior, pode ser descrita em termos da matriz $\alpha_n$ como $u_o = (\alpha_n \times \alpha_n)\alpha_{2n}$.

Com isso, a partir da função $R_n$, a generalização do exemplo acima é apresentada pelo seguinte:

*Exemplo* 10. Considerando $G = O(nm)$ e $K = O(n)^m = O(n) \times \cdots \times O(n)$, o espaço $G/K$ não possui a propriedade do ponto fixo.

Como $u_o = (\alpha_n \times \cdots \times \alpha_n)\alpha_{mn} \in G - K$ e, para qualquer $k_1 \times \cdots \times k_m \in K$, vale a identidade

$$\begin{aligned}(k_1 \times \cdots \times k_m)u_o &= (\alpha_n \times \cdots \times \alpha_n)\big(\, R_n(k_1) \times \cdots \times R_n(k_m)\,\big)\alpha_{mn} \\ &= u_o R_{mn}\big(\, R_n(k_1) \times \cdots \times R_n(k_m)\,\big) \\ &= u_o\big(\, R_n^2(k_m) \times R_n^2(k_{m-1}) \times \cdots \times R_n^2(k_1)\,\big) \\ &= u_o(k_m \times k_{m-1} \times \cdots \times k_1),\end{aligned}$$

constatamos que $u_o \in N(K) - K$. Logo, pelo Corolário 3.3, o espaço $G/K$ não satisfaz a p.p.f..

Dado $u = (u_1, \ldots, u_{mn}) \in O(mn)$, denotemos, para cada $i = 0, 1, \ldots, m-1$, a $n$-upla

$$u^i = (u_{in+1},\, u_{in+2}\, \ldots, u_{in+n}) \in (\mathbb{R}^{nm})^n.$$

Sendo assim, podemos reescrever $u$ como $(u^0,\, u^1,\, \ldots,\, u^{m-1})$ e, por conseguinte, a função $G/K \to G/K$, definida por $[u] \mapsto [uu_o]$, pode ser representada como

$$[(u^0,\, u^1,\, \ldots,\, u^{m-1})] \mapsto [(u^{m-1},\, u^{m-2},\, \ldots,\, u^1,\, u^0)].$$

□

*Exemplo* 11. Sejam $G = O(n)$ e $K = O(n_1) \times O(n_2) \times \cdots \times O(n_k)$ de modo que $n_1 + \cdots + n_k = n$. Se existem índices $i$ e $j$ distintos tais que $n_i = n_j$, então o espaço $G/K$ não possui a propriedade do ponto fixo.

Suponhamos que $1 \leq i < j \leq k$ e consideremos os valores $m_i = n_1 + \cdots + n_{i-1}$, $m_j = n_{j+1} + \cdots + n_k$, $m = n_{i+1} + \cdots + n_{j-1}$ e $m_o = m + 2n_i$. Dado $u_1 \times \cdots \times u_k \in K$, podemos reescrevê-lo como

$$\hat{u}_{m_i} \times u_i \times \hat{u}_m \times u_j \times \hat{u}_{m_j}$$

onde $\hat{u}_{m_i} = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{i-1} \in O(m_i)$, $\hat{u}_m = u_{i+1} \times u_{i+2} \times \cdots \times u_{j-1} \in O(m)$ e $\hat{u}_{m_j} = u_{j+1} \times u_{j+2} \times \cdots \times u_k \in O(m_j)$.

Assim, para $u_o = (\alpha_{n_i} \times \alpha_m \times \alpha_{n_j})\alpha_{m_o}$, temos válida a identidade

$$\begin{aligned}(u_i \times \hat{u}_m \times u_j)u_o &= (\alpha_{n_i} \times \alpha_m \times \alpha_{n_j})\big(R_{n_i}(u_i) \times R_m(\hat{u}_m) \times R_{n_j}(u_j)\big)\alpha_{m_o} \\ &= u_o R_{m_o}\big(R_{n_i}(u_i) \times R_m(\hat{u}_m) \times R_{n_j}(u_j)\big) \\ &= u_o\big(R^2_{n_j}(u_j) \times R^2_m(\hat{u}_m) \times R^2_{n_i}(u_i)\big) \\ &= u_o(u_j \times \hat{u}_m \times u_i).\end{aligned}$$

E, por conseguinte, para $v_o = 1_{m_i} \times u_o \times 1_{m_j}$, segue-se que

$$\begin{aligned}(u_1 \times \cdots \times u_k)v_o &= (\hat{u}_{m_i} \times u_i \times \hat{u}_m \times u_j \times \hat{u}_{m_j})(1_{m_i} \times u_o \times 1_{m_j}) \\ &= \hat{u}_{m_i} \times \big((u_i \times \hat{u}_m \times u_j)u_o\big) \times \hat{u}_{m_j} \\ &= \hat{u}_{m_i} \times \big(u_o(u_j \times \hat{u}_m \times u_i)\big) \times \hat{u}_{m_j} \\ &= (1_{m_i} \times u_o \times 1_{m_j})(\hat{u}_{m_i} \times u_j \times \hat{u}_m \times u_i \times \hat{u}_{m_j}) \\ &= v_o(\hat{u}_{m_i} \times u_j \times \hat{u}_m \times u_i \times \hat{u}_{m_j}).\end{aligned}$$

Sendo assim, observando que $v_o \notin K$, visto que $u_o \notin O(n_i) \times O(n_{i+1}) \times \cdots \times O(n_j)$, e $\hat{u}_{m_i} \times u_j \times \hat{u}_m \times u_i \times \hat{u}_{m_j} \in K$, constatamos que $v_o \in N(K) - K$. Logo, de acordo com o Corolário 3.3, o espaço $G/K$ não possui a propriedade do ponto fixo.

□

De modo geral, denotamos por

$$U(n, \mathbb{F}) = \big\{\, u = (u_1, \ldots, u_n) \in M_n(\mathbb{F}) \;:\; (u_i \,|\, u_j) = \delta_{ij} \,\big\}$$

o grupo das matrizes ortogonais, unitárias ou simpléticas, quando, respectivamente, temos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, onde $(u_i \,|\, u_j)$ representa o produto interno usual em $\mathbb{F}^n$. Assim, concluímos, a partir dos exemplos anteriores (i.e., $U(n, \mathbb{R}) = O(n)$), que o espaço

$$\frac{U(n, \mathbb{F})}{U(n_1, \mathbb{F}) \times U(n_2, \mathbb{F}) \times \cdots \times U(n_m, \mathbb{F})},$$

onde $\sum n_i = n$, não satisfaz a propriedade do ponto fixo nos seguintes casos:

1. Quando $n_i = n_j$,para índices distintos;
2. Quando substituímos $U(n_i, \mathbb{F})$ por $1_{n_i}$.

## 3.2 PROPRIEDADE DO PONTO FIXO VIA ÍNDICE DE VALOR-IDEAL

Em termos da Proposição 3.2, a questão de determinar se o espaço $G/K$ satisfaz ou não a propriedade do ponto fixo pode ser interpretada como um problema de existência de uma $K$-aplicação de $G$ em $G/K - [e]$ (notação para o complementar de $[e]$ em $G/K$). Esta seção é dedicada em apresentar esse ponto de vista, e como ele se conecta com a ideia de índice de valor-ideal apresentada no capítulo anterior.

Seja $G$ um grupo topológico e $K$ um subgrupo fechado. Como mencionado anteriormente, consideramos $G$ como um $K$-espaço, cuja ação é definida em função da operação do grupo. No espaço $G/K$, estabelecemos a ação de $K$ pela associação $(k, g) \mapsto [kg]$. Portanto, ao observarmos que a igualdade $[kg] = [e]$ somente ocorre quando $[g] = [e]$, podemos considerar $G/K - [e]$ como um $K$-espaço, cuja ação induzimos da anterior. Sendo assim, para $i : G/K - [e] \hookrightarrow G/K$ denotando a função inclusão, a existência de uma $K$-aplicação $\varphi : G \to G/K - [e]$ implica que a composição $i \circ \varphi$ é $K$-equivariante e satisfaz a igualdade $(i \circ \varphi)^{-1}[e] = \emptyset$. Logo, pela Proposição 3.2, conclui-se que o espaço $G/K$ não possui a propriedade do ponto fixo. Como a implicação contrária também é válida, podemos reescrever a Proposição 3.2 por:

**O espaço G/K possui a propriedade do ponto fixo**

**se, e somente se,**

**não existe K-aplicação $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{G/K} - [\mathbf{e}]$.**

Conforme discutido no capítulo anterior, dado uma $K$-aplicação $\varphi : X \to Y$, a monotonicidade do índice (2.2) apresenta a inclusão $Ind^K(Y, R) \subset Ind^K(X, R)$. Portanto, se, para os $K$-espaços $X$ e $Y$, ocorrer a não inclusão $Ind^K(Y, R) \not\subset Ind^K(X, R)$, então, é correto afirmar, que não existe $K$-aplicação de $X$ em $Y$. Diante disso, a não inclusão dos índices $Ind^K(\, G/K - [e]\, , R) \not\subset Ind^K(G, R)$ garante a inexistência de uma $K$-aplicação de $G$ em $G/K - [e]$ que , por sua vez, implica que o espaço $G/K$ possui a propriedade do ponto fixo. Em resumo, ao combinarmos a Proposição 3.2 com o Teorema 2.2, estabelecemos o seguinte resultado:

**Proposição 3.4.** Se $Ind^K(\, G/K - [e]\, , R) \not\subset Ind^K(G, R)$, então $G/K$ possui a propriedade do ponto fixo.

**Corolário 3.5.** Seja $L$ um subgrupo de $K$ e seja $H$ um subespaço de $G$ $L$-invariante. Assim, se

$$Ind^L\,(G/K - [e],\, R) \;\not\subset\; Ind^L\,(H,\, R),$$

então o espaço $G/K$ possui a propriedade do ponto fixo.

*Demonstração.* Se $G/K$ não possui a p.p.f., então existe uma $K$-aplicação $\varphi : G \to G/K - [e]$. Assim, ao restringir a ação de $K$ a um subgrupo $L$ nos espaços envolvidos, a aplicação $\varphi$ torna-se naturalmente $L$-equivariante. Em particular, a restrição da função $\varphi$ ao subespaço $H$, denotada por $\varphi_| : H \to G/K - [e]$, também é $L$-equivariante. Portanto, de acordo com monotonicidade do índice (2.2), conclui-se que $Ind^L\,(G/K - [e],\, R) \subset Ind^L\,(H,\, R)$.

□

**Teorema 3.6.** *O espaço projetivo real $\mathbb{R}P^{2n}$ possui a propriedade do ponto fixo.*

*Demonstração.* Consideremos $G = O(2n+1)$, $K = O(1) \times O(2n)$, $H = SO(2n+1)$, $L = 1 \times SO(2)^n = T^n$ e $R = \mathbb{Q}$. A partir do corolário anterior, concluiremos que todo espaço projetivo real de dimensão par,

$$\mathbb{R}P^{2n} = \mathbb{R}G_{1,2n} \simeq G/K,$$

possui a propriedade do ponto fixo.

Como no capítulo anterior já tomamos ciência do índice $Ind^{T^n}\,(SO(2n+1),\, \mathbb{Q})$, resta-nos estimar o índice $Ind^L\,(G/K - [e],\, \mathbb{Q})$, a fim de concluir a não inclusão

$$Ind^L\,(G/K - [e],\, \mathbb{Q}) \not\subset Ind^L\,(H,\, \mathbb{Q}).$$

O primeiro passo para obter esse índice é conhecer a cohomologia do espaço $G/K - [e]$, que denotaremos por $\mathbb{R}P^{2n}_*$.

Os espaços $\mathbb{R}P^n_*$ e $\mathbb{R}P^{n-1}$ $(n > 1)$ são homotopicamente equivalentes. Esse fato é obtido, por indução ao quociente, da equivalência de homotopia entre $S^n_* := S^n - \{\pm(1, 0, \ldots, 0)\}$ e $S^{n-1}$. A partir das funções $r : S^n_* \to S^{n-1}$ e $j : S^{n-1} \to S^n_*$ — definidas, respectivamente, por

$$r(v) = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} \qquad \text{e} \qquad j(\bar{v}) = (0, \bar{v}),$$

onde, para $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n) \in S^n_*$ tem-se $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ — obtemos $r \circ j = 1_{S^{n-1}}$. Além

disso, a composição $j \circ r$ é homotópica à função identidade $1_{S^n_*}$, por meio da homotopia $H : S^n_* \times I \to S^n_*$ definida por

$$H(v,t) = \frac{((1-t)v_0, \bar{v})}{||\,((1-t)v_0, \bar{v})\,||}.$$

Sendo assim, estabelecemos a equivalência de homotopia a partir das funções $\tilde{r} : \mathbb{R}P^n_* \to \mathbb{R}P^{n-1}$, $\tilde{j} : \mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}P^n_*$ e $\tilde{H} : \mathbb{R}P^n_* \times I \to \mathbb{R}P^n_*$ definidas, respectivamente, por $\tilde{r}[v] = [r(v)]$, $\tilde{j}[\bar{v}] = [j(\bar{v})]$, e $\tilde{H}([v], t) = [H(v,t)]$.

Portanto,

$$H^*(\mathbb{R}P^{2n}_*, \mathbb{Q}) = H^*(\mathbb{R}P^{2n-1}, \mathbb{Q}) = H^*(S^{2n-1}, \mathbb{Q}).$$

Com esta informação, ao observarmos que o sistema de coeficientes locais $\underline{H^*(\mathbb{R}P^{2n}_*, \mathbb{Q})}$ da fibração $\omega[\mathbb{R}P^{2n}_*] = \left((\mathbb{R}P^{2n}_*)_{T^n},\ \pi,\ BT^n,\ \mathbb{R}P^{2n}_*,\ T^n\right)$ é trivial, visto que $T^n$ é conexo por caminho, podemos afirmar que

$$Ind^{T^n}(\mathbb{R}P^{2n}_*, \mathbb{Q}) = \ker\, \pi^* = \langle e \rangle,$$

onde $e \in H^{2n}(BT^n, \mathbb{Q})$ denota a classe de Euler da fibração, devido a Sequência exata de Gysin (2.11).

O segundo passo consiste em provar que o índice $Ind^{T^n}(\mathbb{R}P^{2n}_*, \mathbb{Q})$ não é trivial. Para isto, basta que satisfaçamos as hipóteses do Teorema 2.5. Nesse contexto, como o espaço $\mathbb{R}P^{2n}_* := \mathbb{R}P^{2n} - \left\{[1, 0 \ldots, 0]\right\}$ é paracompacto — pois ele é subvariedade aberta da variedade suave $\mathbb{R}P^{2n}$ — e $H^i(\mathbb{R}P^{2n}_*, \mathbb{Q}) = 0$, para todo $i > 2n-1$, resta verificar que a ação de $T^n$ sobre $\mathbb{R}P^{2n}_*$ não possui ponto fixo.

Denotemos por $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ os elementos de $S^{2n}$, onde $v_i = (x_{2i},\ x_{2i+1}) \in \mathbb{R}^2$, para $i = 1, \ldots, n$. Os elementos de $T^n \simeq (S^1)^n$, como estabelece o homeomorfismo entre $SO(2)$ e $S^1$, representaremos por $u = (u_1, \ldots, u_n)$, onde $u_i = (a_i,\ b_i) \in S^1$. Assim, a partir da relação

$$u_i v_i = (x_{2i}a_i - x_{2i+1}b_i,\ x_{2i}b_i + x_{2i+1}a_i),$$

a associação $(u, v) \mapsto u \cdot v = (v_0,\ u_1 v_1,\ \ldots, u_n v_n)$ define uma ação de $T^n$ sobre $S^{2n}_* := S^{2n} - \{\pm(1, 0, \ldots, 0)\}$, a qual induzimos sobre $\mathbb{R}P^{2n}_*$ ( $u[v] := [u \cdot v]$ ), por meio da projeção $S^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$. Esta ação é equivalente a ação de $L$ sobre $G/K - [e]$.

Supondo $u_i = (0, 1)$, segue-se que a igualdade $u_i v_i = \pm v_i$ implica $x_{2i} = x_{2i+1} = 0$,

isto é, $v_i = 0$. Logo, se $u_i = (0,1)$ para todo $i$, a relação $u \cdot v = \pm v$ só se verifica para $v = \pm(1,0,\ldots,0) \in S^{2n}$ e, por conseguinte, observamos que $u[v] = [v]$ somente para $[v] = [1,0,\ldots,0] \notin \mathbb{R}P^{2n}_*$. Assim, como existe $u \in T^n$ que não fixa nenhum ponto de $\mathbb{R}P^{2n}_*$, a ação de $T^n$ sobre $\mathbb{R}P^{2n}_*$ não possui ponto fixo.

Portanto, concluímos do Teorema2.5 que

$$0 \neq Ind^{T^n}(\mathbb{R}P^{2n}_*, \mathbb{Q}) = \ker \pi^* = \langle e \rangle.$$

O terceiro e último passo se utiliza da monotonicidade do índice para calcular a classe Euler $e$ a partir de uma família de funções $T^n$-equivariantes.

Dados $u = (u_1, \ldots, u_n) \in T^n$, com $u_j = (a_j, b_j)$, e $w = (y_1, y_2) \in S^1$ quaisquer, a relação

$$(u, w) \mapsto u_j w = (y_1 a_j - y_2 b_j,\ y_1 b_j + y_2 a_j)$$

define $n$ ações distintas de $T^n$ sobre $S^1$. Assim, observando que tais ações são as mesmas descritas no Exemplo 3, segue-se, respectivamente a cada uma das $n$ ações, que

$$Ind^{T^n}(S^1, \mathbb{Q}) = \langle t_j \rangle \subset \mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_n].$$

Além disso, com a $j$-ésima ação de $T^n$ sobre $S^1$, a função $\varphi_j : S^1 \to \mathbb{R}P^{2n}_*$, definida por

$$\varphi_j(y_1, y_2) = [0, \ldots, 0, \overset{(2j)}{y_1}, \overset{(2j+1)}{y_2}, 0, \ldots, 0],$$

é $T^n$-equivariante. Portanto, de acordo com a monotonicidade do índice, temos, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, a inclusão

$$\langle e \rangle = Ind^{T^n}(\mathbb{R}P^{2n}_*, \mathbb{Q}) \subset Ind^{T^n}(S^1, \mathbb{Q}) = \langle t_j \rangle,$$

e, por conseguinte, podemos concluir que $e = \sigma_n = t_1 t_2 \cdots t_n$, pois $e \in \langle t_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle t_n \rangle$, $e \in H^{2n}(BT^n, \mathbb{Q})$ e $t_j \in H^2(BT^n, \mathbb{Q})$.

Sendo assim, de acordo com o Corolário 3.5, constatamos, a partir da não inclusão

$$Ind^{T^n}(\mathbb{R}P^{2n}_*, \mathbb{Q}) = \langle \sigma_n \rangle \not\subset \langle \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \ldots, \bar{\sigma}_n \rangle = Ind^{T^n}(SO(2n+1)), \mathbb{Q})$$

que $\mathbb{R}P^{2n}$ possui a propriedade do ponto fixo. □

*Observação.* Na demonstração do teorema acima, especificamente no caso de $\mathbb{R}P^2$, a argumentação pode ser simplificada: a afirmação

$$0 \neq Ind^T(\mathbb{R}P^2_*, \mathbb{Q}) = \langle e \rangle \subset H^*(BT, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t]$$

implica $\langle e \rangle = \langle t \rangle$, pois $e,\ t \in H^2(BT, \mathbb{Q})$; logo, a relação

$$Ind^T(\mathbb{R}P^2_*, \mathbb{Q}) = \langle t \rangle \not\subset \langle t^2 \rangle = Ind^T(SO(3), \mathbb{Q}),$$

nos diz que o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^2$ possui a propriedade do ponto fixo. □

No mesmo sentido da observação, destacamos, pelo exemplo a seguir, que em cada caso podemos tomar diferentes abordagens.

*Exemplo* 12. $\mathbb{R}P^4$ possui a propriedade do ponto fixo. Denotamos por $\mathbb{R}P^4_*$ o espaço $G/K - [e] = \mathbb{R}P^4 - [(1,0,0,0,0)]$ e consideremos a relação

$$0 \neq Ind^{T^2}(\mathbb{R}P^4_*, \mathbb{Q}) = \langle e \rangle,$$

onde $e \in H^4(BT^2, \mathbb{Q}) = \left\{ at_1^2 + bt_1t_2 + ct_2^2 \ :\ a,\ b,\ c\ \in \mathbb{Q} \right\}$, visto que $H^*(BT^2, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t_1, t_2]$ com $t_1, t_2 \in H^2(BT^2, \mathbb{Q})$.

Diferente da observação acima, como $Ind^{T^2}(SO(5), \mathbb{Q}) = \langle t_1^2 + t_2^2,\ t_1^2t_2^2 \rangle$, nota-se que não temos informação suficiente para dizer que $e$ não pertence ao ideal $\langle t_1^2 + t_2^2,\ t_1^2t_2^2 \rangle$. Assim, a fim de melhor estimar o ideal $\langle e \rangle$, exibiremos duas funções $T^2$-equivariantes, representadas por $\varphi : SO(2) \to \mathbb{R}P^4_*$ e $\psi : SO(4) \to \mathbb{R}P^4_*$, das quais concluiremos, a partir da monotonicidade do índice, a inclusão

$$\langle e \rangle = Ind^{T^2}(\mathbb{R}P^4_*, \mathbb{Q}) \subset Ind^{T^2}(SO(2), \mathbb{Q}) \cap Ind^{T^2}(SO(4), \mathbb{Q}).$$

Comecemos por construir a função $\varphi$. Consideremos a matriz

$$u_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in O(3)$$

e a matriz $u = (u_{ij}) \in SO(2)$ qualquer, segue-se que o produto de $1 \times u \times 1_2$ por $u_0 \times 1_2$ não

pertence ao grupo $K = O(1) \times O(4)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{11} & u_{12} & 0 & 0 \\ 0 & u_{21} & u_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_{11} & u_{12} & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \notin K.$$

Logo, a classe desse produto difere da classe da matriz identidade $1_5$ em $G/K$, isto é, $[(1 \times u \times 1_2)(u_0 \times 1_2)] \neq [1_5]$ para qualquer $u \in SO(2)$. Com isso, definimos, pela associação $u \mapsto [(1 \times u \times 1_2)(u_0 \times 1_2)]$, a função $\varphi : SO(2) \to \mathbb{R}P^4_*$.

Para $u \in SO(2)$ e $v = 1 \times v_1 \times v_2 \in T^2$ quaisquer, estabelecemos uma ação de $T^2$ sobre $SO(2)$ através da relação $v \cdot u = v_1 u$, da qual podemos observar pela expressão

$$\begin{aligned} \varphi(v \cdot u) &= \varphi(v_1 u) = [(1 \times (v_1 u) \times 1_2)(u_0 \times 1_2)] = [(1 \times (v_1 u) \times v_2 v_2^{-1})(u_0 \times 1_2)] \\ &= [(1 \times v_1 \times v_2)(1 \times u \times v_2^{-1})(u_0 \times 1_2)] = [v(1 \times u \times 1_2)(u_0 \times 1_2)(1_3 \times v_2^{-1})] \\ &= v[(1 \times u \times 1_2)(u_0 \times 1_2)(1_3 \times v_2^{-1})] = v[(1 \times u \times 1_2)(u_0 \times 1_2)] \\ &= v\varphi(u), \end{aligned}$$

pois $1_3 \times v_2^{-1} \in K$, que $\varphi$ é uma função $T^2$-equivariante. Portanto, a monotonicidade do índice nos diz que é válido a inclusão

$$Ind^{T^2}(\mathbb{R}P^4_*, \mathbb{Q}) \subset Ind^{T^2}(SO(2), \mathbb{Q}) = \langle t_1 \rangle \subset \mathbb{Q}[t_1, t_2],$$

onde a igualdade presente na expressão acima foi apresentada no Exemplo 3.

De modo análogo à função $\varphi$, construímos $\psi$. Dado a matriz

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

observamos que o produto de $1 \times u \in 1 \times SO(4)$ por $v_0 \times 1_3$ não pertence ao grupo $K =$

$O(1) \times O(4)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ 0 & u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_{11} & 0 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & 0 & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & 0 & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, para $v = 1 \times v_1 \times v_2 \in T^2$ e $u \in SO(4)$, introduzimos uma ação de $T^2$ sobre $SO(4)$ por $v \cdot u = (v_1 \times v_2)u$, de onde concluímos que a função $\psi : SO(4) \to \mathbb{R}P^4_*$, definida por $\psi(u) = [(1 \times u)(v_0 \times 1_3)]$, é $T^2$-equivariante e, consequentemente, segue-se a inclusão

$$Ind^{T^2}(\mathbb{R}P^4_*, \mathbb{Q}) \subset Ind^{T^2}(SO(4), \mathbb{Q}) = \langle t_1^2 + t_2^2,\, t_1 t_2 \rangle.$$

Em resumo, constatamos que $\langle e \rangle \subset \langle t_1^2 + t_2^2,\, t_1 t_2 \rangle \cap \langle t_1 \rangle$. Logo, como $e \in H^4(BT^2, \mathbb{Q})$, segue-se:

$$Ind^{T^2}(\mathbb{R}P^4_*, \mathbb{Q}) = \langle t_1 t_2 \rangle.$$

Por fim, a não inclusão dos índices

$$Ind^{T^2}(\mathbb{R}P^4_*, \mathbb{Q}) = \langle t_1 t_2 \rangle \not\subset \langle t_1^2 + t_2^2,\, t_1^2 t_2^2 \rangle = Ind^{T^2}(SO(5), \mathbb{Q})$$

nos leva a concluir que $\mathbb{R}P^4$ possui a propriedade do ponto fixo.

Vale observar que sem a inclusão de índices determinada por $\psi$ já poderíamos concluir que $e \notin Ind^{T^2}(SO(5), \mathbb{Q})$ e, por consequência, afirmar que $\mathbb{R}P^4$ possui a p.p.f., pois até então a função $\varphi$ nos diz que

$$e \in H^4(BT^2, \mathbb{Q}) \cap \langle t_1 \rangle = \left\{ a t_1^2 + b t_1 t_2 \,:\, a, b \in \mathbb{Q} \right\} \not\subset \langle t_1^2 + t_2^2,\, t_1^2 t_2^2 \rangle.$$

□

# 4 O CASO DAS VARIEDADES GRASSMANNIANAS REAIS

Sabendo que a variedade grassmanniana $\mathbb{R}P^{2n-1} = \mathbb{R}G_{1,2n-1}$ não possui a propriedade do ponto fixo, o próximo passo é verificar se as ferramentas, até então apresentadas, conseguem detectar se a variedade $\mathbb{R}G_{p,q}$ possui a propriedade do ponto fixo, para $p \geq 2$ e $q \geq 3$. Visando as hipóteses do Corolário 3.5 e do Teorema 2.5, veremos que, ao considerarmos o grupo $L \subset O(p) \times O(q)$ como um cópia do toro maximal de $SO(p+q)$, o índice $Ind^L(\mathbb{R}G_{p,q} - [e], \mathbb{Q})$ é trivial.

## 4.1 PONTOS FIXOS DA AÇÃO SOBRE $\mathbb{R}G_{p,q}$

Como exemplo para ilustrar o contexto, consideremos $\mathbb{R}G_{2,3}$. A fim de satisfazer as hipóteses do Corolário 3.5, consideremos o $L$-espaço $G/K - [e]$, sendo $L$ um subgrupo de $K$, onde $G = O(5)$ e $K = O(2) \times O(3)$. Assim, em um primeiro momento, suponhamos $L = SO(2) \times 1 \times SO(2) \subset K$ e $R = \mathbb{Q}$; verifiquemos se existe algum ponto de $G/K - [e]$ fixado pela ação de $L$.

Dado o operador $T \in O(3)$, suponhamos que $\{ z_1, z_2, z_3 \}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$, de modo que $Tz_1 = \pm z_1$. Disso, o espaço $\langle z_2, z_3 \rangle$, gerado por $z_2$ e $z_3$, coincide com o espaço $\langle Tz_2, Tz_3 \rangle$, gerado por $Tz_2$ e $Tz_3$. Em particular, para todo operador $T \in 1 \times SO(2) \subset O(3)$, ao considerarmos $\{ e_1, e_2, e_3 \}$, a base canônica de $\mathbb{R}^3$, observamos que $Te_1 = e_1$ e $\langle e_2, e_3 \rangle = \langle Te_2, Te_3 \rangle$. Ou seja, o espaço $\langle e_2, e_3 \rangle$ é invariante em relação a $T$.

Por outro lado, a aplicação dos operadores $S = U \times T \in SO(2) \times \big(1 \times SO(2)\big)$ nos espaços $\langle x_1, x_2 \rangle$ de $\mathbb{R}G_{2,3} - [e]$ ($\simeq G/K - [e]$), apresentada por $S \cdot \langle x_1, x_2 \rangle = \langle Sx_1, Sx_2 \rangle$, descreve a ação já introduzida por $L$, mas permite observar que, quando $x_1, x_2 \in 0^2 \times \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^5$, tem-se:

$$Sx_i = (U \times T)x_i = (1_2 \times T)x_i \qquad (i = 1, 2)$$

e, por conseguinte,

$$S \cdot \langle x_1, x_2 \rangle = (1_2 \times T) \cdot \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Portanto, como os espaços $\langle e_2, e_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$ e $\langle e_4, e_5 \rangle \subset \mathbb{R}^5$ são identificados pela associação $(x, y, z) \mapsto (0, 0, x, y, z)$, concluímos que $\langle e_4, e_5 \rangle$ é invariante em relação a qualquer

$S \in L$, isto é,

$$S \cdot \langle e_4,\, e_5\rangle = \langle e_4,\, e_5\rangle.$$

Ou seja, a partir de identificação de $\eta : G/K - [e] \simeq \mathbb{R}G_{2,3} - [e]$, apresentada na Seção 1 do Capítulo 1, concluímos que a classe da matriz

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é um ponto fixo da ação por $L$, pois $\eta[u_1] = \langle e_4,\, e_5\rangle$. Logo, pelo Teorema 2.5,

$$Ind^{T^2}(\mathbb{R}G_{2,3} - [e], \mathbb{Q}) = Ind^{L}(G/K - [e], \mathbb{Q}) = 0.$$

Ao considerarmos $L = SO(2) \times SO(2) \times 1$ em vez de $SO(2) \times 1 \times SO(2)$, um argumento análogo ao anterior apresenta a classe da matriz

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

como sendo um ponto fixo da respectiva ação ($\eta[u_2] = \langle e_3,\, e_4\rangle$).

Conforme será mostrado adiante, de modo geral, quando $T$, o toro maximal de $SO(p+q)$, é um subgrupo de $K = O(p)\times O(q)$ de modo análogo ao que vem sendo apresentado, o índice $Ind^T\,(\mathbb{R}G_{p,q} - [e]), \mathbb{Q})$ é trivial, pois o conjunto $(\mathbb{R}G_{p,q} - [e])^T$ dos pontos fixos da ação não é vazio.

Baseado nos exemplos da Seção 3.1, ao considerarmos os grupos $K_n = O(2)^n$ e $K_{n,i} = K_{i-1} \times O(1) \times K_{n-i+1}$, para $1 \leq i \leq n+1$, segue-se que:

- Para $(p, q) = (2a, 2b)$, com $b \geq a \geq 1$, a classe da matriz

$$u_0 = (\alpha_p \times \alpha_q) \cdot \alpha_{p+q}$$

é um ponto fixo da ação de $K_a \times K_b = K_{a+b} \subset K$ sobre $G/K - [e]$.

- Para $(p,q) = (2a, 2b+1)$, com $b \geq a \geq 1$, a classe da matriz

$$u_i = (\alpha_p \times (v_i \alpha_q)\,) \cdot \alpha_{p+q},$$

onde $v_i = 1_{2(i-1)} \times \big(\,(1 \times \alpha_{q-2i+1})\alpha_{q-2i+2}\big)$, é um ponto fixo da ação de $K_a \times K_{b,i} \subset K$ sobre $G/K - [e]$.

- Para $(p,q) = (2a+1, 2b+1)$, com $b > a \geq 0$, a classe da matriz

$$u_j = (\alpha_p \times (v_j \alpha_q)) \cdot \alpha_{p+q},$$

onde $v_j = \big(\,(\alpha_{2(j-1)} \times 1) \cdot \alpha_{2(j-1)+1}\,\big) \times 1_{q-2j+1}$, é um ponto fixo da ação de $K_{a,i} \times K_{b,j} \subset K$ sobre $G/K - [e]$.

Assim, considerando o homeomorfismo $\mathbb{R}G_{p,q} \simeq \mathbb{R}G_{q,p}$, concluímos que a ação de $T$, quando identificado de modo natural como um subgrupo de $K_n$ ou $K_{n,i}$, sobre $\mathbb{R}G_{p,q} - [e]$ possui ponto fixo.

No caso particular $(p,q) = (2,3)$, mencionado acima, respectivamente aos grupos $SO(2) \times 1 \times SO(2)$ e $SO(2) \times SO(2) \times 1$, temos

$$u_1 = (\alpha_2 \times (v_1 \alpha_3)\,)\alpha_5 = (\alpha_2 \times 1 \times \alpha_2)\alpha_5 \qquad \text{e} \qquad u_2 = (\alpha_2 \times (v_2 \alpha_3)\,)\alpha_5 = (\alpha_2 \times \alpha_3)\alpha_5,$$

onde $v_1 = (1 \times \alpha_2)\alpha_3$ e $v_2 = 1_3$.

Seja $R_n : O(n) \to O(n)$ o homeomorfismo definido por $R_n(u) = \alpha_n u \alpha_n$, onde

$$\alpha_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in O(n).$$

Como $\alpha_n^{-1} = \alpha_n$, segue-se que, para quaisquer $u \in O(n)$ e $v \in O(m)$, $R_n^2(u) = u$ e $R_{n+m}(u \times v) = R_m(v) \times R_n(u)$. Assim, respectivamente aos três casos acima, como exemplos, seguem as verificações:

*Exemplo* 13. Para $G = O(p+q)$ e $K = O(p) \times O(q)$, onde $(p,q) = (2a, 2b)$ e $b \geq a \geq 1$, a ação de $K_a \times K_b = K_{a+b} \subset K$ sobre $G/K$, induzida por $K$, possui ponto fixo.

Considerando $u_0 = (\alpha_p \times \alpha_q)\alpha_{p+q} \in O(p+q)$, e dado $w = v \times u \in K_a \times K_b$ qualquer, onde $v = v_1 \times \cdots \times v_a$ e $u = u_1 \times \cdots \times u_b$, a igualdade

$$\begin{aligned} w \cdot u_0 &= (v \times u)(\alpha_p \times \alpha_q)\alpha_{p+q} \;=\; (\alpha_p \times \alpha_q)(\alpha_p \times \alpha_q)(v \times u)(\alpha_p \times \alpha_q)\alpha_{p+q} \\ &= (\alpha_p \times \alpha_q)(\, R_p(v) \times R_q(u)\,)\alpha_{p+q} \;=\; (\alpha_p \times \alpha_q)\alpha_{p+q}\alpha_{p+q}(\, R_p(v) \times R_q(u)\,)\alpha_{p+q} \\ &= (\alpha_p \times \alpha_q)\alpha_{p+q} \cdot R_{p+q}(\, R_p(v) \times R_q(u)\,) \;=\; u_0 \cdot R_{p+q}(\, R_p(v) \times R_q(u)\,) \\ &= u_0 \cdot (\, R_q^2(u) \times R_p^2(v)\,) \\ &= u_0 \cdot (u \times v) \end{aligned}$$

implica que $w[u_0] = [u_0]$. Logo, como $[u_0] \neq [e]$, concluímos que a ação de $K_a \times K_b$ sobre $G/K - [e]$ possui ponto fixo.

□

*Exemplo* 14. Para $G = O(p+q)$ e $K = O(p) \times O(q)$, onde $(p,q) = (2a, 2b+1)$ e $b \geq a \geq 1$, a ação de $K_a \times K_{b,i} \subset K$ sobre $G/K$ possui ponto fixo, para todo $i$.

Para $i$ qualquer, considere $u_i = (\alpha_p \times (v_i \alpha_q)\,) \cdot \alpha_{p+q}$ com

$$v_i = 1_{2(i-1)} \times (\,(1 \times \alpha_{q-2i+1})\alpha_{q-2i+2}) \in O(q).$$

Assim, para qualquer $u = (u_1 \times \cdots \times u_{i-1}) \times 1 \times (u_i \times \cdots \times u_b) = u' \times 1 \times u'' \in K_{b,i}$, segue-se que $(1 \times u'') \cdot v_i = v_i \cdot (u'' \times 1)$ e, por conseguinte, $(v \times u) \cdot u_i = u_i \cdot (\,(u' \times u'' \times 1) \times v\,)$, para $v \in K_a$ qualquer. Como $b \geq a$, observamos que $(u' \times u'' \times 1) \times v \in K_a \times K_{b,b-a+1} \subset K$. Logo, concluímos que $w[u_i] = [u_i]$, para todo $w \in K_a \times K_{b,i}$. Ou seja, $[u_i]$ é um ponto fixo da ação de $K_a \times K_{b,i}$ sobre $G/K - [e]$.

□

*Exemplo* 15. Para $G = O(p+q)$ e $K = O(p) \times O(q)$, onde $(p,q) = (2a+1, 2b+1)$ e $b > a \geq 0$, a ação de $K_{a,i} \times K_{b,j} \subset K$ sobre $G/K$, induzida por $K$, possui ponto fixo.

Dado $u \times v \in K_{a,i} \times K_{b,j}$ qualquer, denotemos $v$ por $v' \times 1 \times v'' \in K_{b,j} = K_{j-1} \times O(1) \times K_{b-j+1}$ e consideremos $u_j = (\alpha_p \times (v_j \alpha_q)) \cdot \alpha_{p+q}$, onde

$$v_j = (\,(\alpha_{2(j-1)} \times 1) \cdot \alpha_{2(j-1)+1}\,) \times 1_{q-2j+1} \in O(q).$$

Assim, como $(u \times v) \cdot u_j = u_j \cdot (1 \times v' \times v'' \times u)$ e $(1 \times v' \times v'' \times u) \in K$, concluímos que $w[u_j] = [u_j]$, para todo $w \in K_{a,i} \times K_{b,j}$. Ou seja, $[u_j]$ é um ponto fixo da ação de $K_{a,i} \times K_{b,j}$ sobre $G/K - [e]$.

□

Se considerarmos um subgrupo $L \subset K$ qualquer, ainda temos a questão de como determinar o conjunto $F(L,\, G/K - [e])$ dos pontos do espaço $G/K - [e]$ fixados pela ação de $L$. Lembrando que se tal conjunto não é vazio o índice é trivial.

Abaixo segue um meio de como determinar todos os pontos fixos da ação por $T^2$ sobre $\mathbb{R}G_{2,3}$, através do qual podemos tirar conclusões do conjunto dos pontos fixos da ação por $L \subset K$ quando $T^2 \subset L$.

Para $G = O(5)$ e $K = O(2) \times O(3)$ temos a identificação entre o quociente $G/K$ e o espaço $\mathbb{R}G_{2,3}$, cujos elementos são os 2-planos em $\mathbb{R}^5$, que denotamos por $\langle v_1, v_2 \rangle$ onde $(v_1, v_2) \in V_2(\mathbb{R}^5)$, isto é, $v_1, v_2 \in S^4$ e $(v_1 \,|\, v_2) = 0$. Assim, a ação por um subgrupo $L \subset K$ sobre $G/K$ — definida por $l[g] = [lg]$, para $l \in L$ e $g \in G$ — pode ser escrita sobre $\mathbb{R}G_{2,3}$, via identificação, como $l \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = \langle lv_1, lv_2 \rangle$, uma vez que $l \in L$ também é interpretado como um operador de $\mathbb{R}^5$, isto é, $l : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$.

Supondo $L = SO(2) \times SO(2) \times 1 = T^2 \times 1 \simeq T^2$, vamos determinar o conjunto

$$F(L,\, \mathbb{R}G_{2,3}) = \left\{ v \in \mathbb{R}G_{2,3} \,:\, l \cdot v = v,\, \forall\, l \in L \right\}$$

dos pontos de $\mathbb{R}G_{2,3}$ fixados pela ação de $L$. Como

$$F(L,\, \mathbb{R}G_{2,3}) = \bigcap_{l \in L} F(l,\, \mathbb{R}G_{2,3})$$

pode ser descrito em função de $l \in L$, por meio dos conjuntos $F(l,\, \mathbb{R}G_{2,3}) = \left\{ v \in \mathbb{R}G_{2,3} \,:\, l \cdot v = v \right\}$, bastará que determinemos os conjuntos indexados por específicos $l \in L$.

Fixado o elemento $l = l_1 \times 1_3 \in L$ tal que $l_1 \neq \pm 1_2$, vamos obter o conjunto

$F(l, \mathbb{R}G_{2,3})$. Suponhamos que $v = \langle v_1, v_2\rangle \in F(l, \mathbb{R}G_{2,3})$ e que $l$ seja descrito por

$$l = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in O(5), \quad \text{onde} \quad l_1 = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \in SO(2)$$

com $(c, s) = (cos\,\theta, sen\,\theta)$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Como $l \cdot v = v$, destacamos que as pertinências $lv_1, lv_2 \in \langle v_1, v_2\rangle$ e $(lv_1, lv_2) \in V_2(\mathbb{R}^5)$ implicam na existência de reais $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazendo a igualdade $a^2 + b^2 = 1$ e um dos seguintes sistemas:

$$\begin{cases} lv_1 = av_1 + bv_2 \\ lv_2 = -bv_1 + av_2 \end{cases} \tag{1}$$

ou

$$\begin{cases} lv_1 = av_1 + bv_2 \\ lv_2 = bv_1 - av_2 \end{cases} \tag{2}$$

Para $v_1 = (v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{41}, v_{51})$ e $v_2 = (v_{12}, v_{22}, v_{32}, v_{42}, v_{52})$, analisemos o sistema (1). Este pode ser subdividido em 2 tipos. O primeiro é dado pela restrição sobre as duas primeiras coordenadas do sistema:

$$\begin{cases} l_1(v_{11}, v_{21}) = a(v_{11}, v_{21}) + b(v_{12}, v_{22}) \\ l_1(v_{12}, v_{22}) = -b(v_{11}, v_{21}) + a(v_{12}, v_{22}) \end{cases}$$

Reescrevendo esse sistema, obtemos uma expressão equivalente em notação matricial:

$$\begin{cases} (l_1 - a1_2)(v_{11}, v_{21}) - b(v_{12}, v_{22}) = 0 \\ (l_1 - a1_2)(v_{12}, v_{22}) + b(v_{11}, v_{21}) = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} c-a & -s & -b & 0 \\ s & c-a & 0 & -b \\ b & 0 & c-a & -s \\ 0 & b & s & c-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0.$$

Com isso observamos que, por um lado $(a, b)$ depende de $l$ e $v$, mas por outro $v$ deve

satisfazer o sistema determinado por $l_1$ e algum par $(a, b)$. Assim, ao utilizarmos as substituições $b = \pm\sqrt{1-a^2}$ e $s = \pm\sqrt{1-c^2}$, obtemos, independentemente do sinal, que o determinante da matriz acima é dado por $4(c-a)^2$ e, consequentemente:

- Se $a \neq c$, é necessário que $(v_{11}, v_{21}, v_{12}, v_{22}) = 0$;
- Se $a = c$, temos como solução

$$\begin{cases} (v_{11}, v_{21}, -v_{21}, v_{11}), & \text{se } b = s \\ (v_{11}, v_{21}, v_{21}, -v_{11}), & \text{se } b = -s. \end{cases}$$

Ainda no sistema (1), o segundo tipo da subdivisão é descrito para cada coordenada $i = 3, 4, 5$ por:

$$\begin{cases} v_{i1} = av_{i1} + bv_{i2} \\ v_{i2} = -bv_{i1} + av_{i2} \end{cases} \iff \begin{cases} (1-a)v_{i1} - bv_{i2} = 0 \\ (1-a)v_{i2} + bv_{i1} = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1-a & -b \\ b & 1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{bmatrix} = 0.$$

Assim, a partir da relação

$$det \begin{bmatrix} 1-a & -b \\ b & 1-a \end{bmatrix} = (1-a)^2 + b^2 = 0 \iff a = 1 \quad \text{para } b = \pm\sqrt{1-a^2},$$

concluímos que:

- Se $a \neq 1$ então $v_{i1} = v_{i2} = 0$;
- Se $a = 1$ então $(v_{i1}, v_{i2})$ pode ser qualquer.

Portanto, do sistema (1), podemos analisar $v = \langle v_1, v_2 \rangle \in F(l, \mathbb{R}G_{2,3})$ do seguinte modo: se $v_{i1} \neq 0$ ou $v_{i2} \neq 0$, para algum $i = 3, 4, 5$, então é necessário que $a = 1$. Sendo assim, como por hipótese $c \neq 1$, também é necessário que $(v_{11}, v_{21}, v_{12}, v_{22}) = 0$. Portanto, para qualquer $(v_1, v_2) \in V_2(\mathbb{R}^5)$ tal que $v_1, v_2 \in 0^2 \times \mathbb{R}^3$, tem-se $\langle v_1, v_2 \rangle \in F(l, \mathbb{R}G_{2,3})$. Por outro lado, se $v_{i1} = v_{i2} = 0$, para todo $i = 3, 4, 5$, então é imediato que $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$, pois $(v_1, v_2) \in V_2(\mathbb{R}^5)$. Logo,

$$F(l, \mathbb{R}G_{2,3}) \supset \{\langle e_1, e_2 \rangle\} \bigcup \{ \langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{R}G_{2,3} \ : \ v_1, v_2 \in 0^2 \times \mathbb{R}^3 \}.$$

De modo análogo ao sistema (1), obtemos do sistema (2) a matriz que satisfaz a relação

$$\begin{bmatrix} c-a & -s & -b & 0 \\ s & c-a & 0 & -b \\ -b & 0 & c+a & -s \\ 0 & -b & s & c+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0,$$

cujo determinante é dado por $4(1-c^2)$. Assim, se o par $(v_1, v_2)$ satisfaz o sistema (2), como $c \neq \pm 1$, é necessário que $v_1, v_2 \in 0^2 \times \mathbb{R}^3$ e

$$\begin{cases} v_{i1} = av_{i1} + bv_{i2} \\ v_{i2} = bv_{i1} - av_{i2}, \end{cases}$$

para cada $i = 3, 4, 5$, onde $a^2 + b^2 = 1$. Analisando $v_1$ e $v_2$ em função de $a$, constatamos:

- Se $a = 0$, então $v_2 = 0$;
- Se $a = 0$ e $b = 1$, então $v_2 = v_1$;
- Se $a = 0$ e $b = -1$, então $v_2 = -v_1$;
- Se $a \neq 0, 1$, então $v_2 = \frac{b}{1+a} v_1$.

Ou seja, em todos os casos concluímos que $(v_1, v_2) \notin V_2(\mathbb{R}^5) = \left\{ (v_1, v_2) \in (\mathbb{R}^5)^2 \ : \ (v_1 \mid v_2) = \delta_{ij} \right\}$.

Logo, para $l = l_1 \times 1_3 \in L$ com $l_1 \neq \pm 1_2$, $l \cdot v = v$ se, e somente se, existe $(a, b) \in S^1$ tal que

$$\begin{cases} lv_1 = av_1 + bv_2 \\ lv_2 = -bv_1 + av_2. \end{cases}$$

Consequentemente, constatamos que

$$F(l, \mathbb{R}G_{2,3}) = \left\{ \langle e_1, e_2 \rangle \right\} \bigcup \left\{ \ \langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{R}G_{2,3} \ : \ v_1, v_2 \in 0^2 \times \mathbb{R}^3 \ \right\}.$$

Quando $l_1 = \pm 1_2$, o sistema (1) é satisfeito para $\langle e_1, e_2 \rangle$, $\langle e_3, e_4 \rangle$: basta considerar $(a, b) = (-1, 0)$ quando $l_1 = -1_2$ e $\langle e_1, e_2 \rangle$, e nos demais casos, $(a, b) = (1, 0)$. Portanto, $\langle e_1, e_2 \rangle$, $\langle e_3, e_4 \rangle \in F(l, \mathbb{R}G_{2,3})$.

Utilizando argumentos semelhantes, para $l' = 1_2 \times l_2 \times 1$ com $l_2 \neq \pm 1_2$, concluímos:

$$F(l', \mathbb{R}G_{2,3}) = \{\langle e_3, e_4\rangle\} \bigcup \{\ \langle v_1, v_2\rangle \in \mathbb{R}G_{2,3}\ :\ v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \times 0^2 \times \mathbb{R}\ \}.$$

Disso, uma vez que $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2 \times 0^2 \times \mathbb{R}$ e $e_3, e_4 \in 0^2 \times \mathbb{R}^3$, segue-se:

$$F(l, \mathbb{R}G_{2,3}) \cap F(l', \mathbb{R}G_{2,3}) = \{\langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_3, e_4\rangle\}.$$

Agora, seja $l'' = l_1 \times l_2 \times 1$ de modo que

$$l_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{bmatrix} \neq \pm 1_2 \quad \text{e} \quad l_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{bmatrix} \neq \pm 1_2,$$

onde $(c_i, s_i) = (cos\,\theta_i,\ sen\,\theta_i)$ para $i = 1, 2$. Nesse caso, de acordo com o que já foi argumentado, $\langle v_1, v_2\rangle \in F(l'', \mathbb{R}G_{2,3})$ se $v_{51} = v_{52} = 0$. Além disso, se $(v_{11}, v_{21}, v_{12}, v_{22}) \neq 0$ é necessário que $a = c_1$ (quando analisamos um sistema análogo ao estudado acima) e disso decorre que, se $c_2 \neq c_1$, $(v_{31}, v_{41}, v_{32}, v_{42}) = 0$ e, consequentemente, $\langle v_1, v_2\rangle = \langle e_1, e_2\rangle$. Analogamente, se $(v_{31}, v_{41}, v_{32}, v_{42}) \neq 0$, teremos $a = c_2$ e, se $c_2 \neq c_1$, $\langle v_1, v_2\rangle = \langle e_3, e_4\rangle$. Portanto:

- Se $c_1 \neq c_2$, $F(l'', \mathbb{R}G_{2,3}) = \{\langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_3, e_4\rangle\}$;
- Se $c_1 = c_2$, $F(l'', \mathbb{R}G_{2,3}) \supset \{\langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_3, e_4\rangle\}$.

Além disso, para $c_1,\ c_2 = \pm 1$, a escolha apropriada do par $(a, b) = (\pm 1, 0)$ implica $\langle e_1, e_2\rangle$, $\langle e_3, e_4\rangle \in F(l'', \mathbb{R}G_{2,3})$.

Como $l, l'$ e $l''$ descrevem todos os elemento de $L$, podemos dizer que

$$\begin{aligned} F(L, \mathbb{R}G_{2,3}) &= F(l, \mathbb{R}G_{2,3}) \cap F(l', \mathbb{R}G_{2,3}) \cap F(l'', \mathbb{R}G_{2,3}) \\ &= \{\langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_3, e_4\rangle\}. \end{aligned}$$

Ou seja, como a identificação $G/K \simeq \mathbb{R}G_{2,3}$ relaciona $[e]$ com $\langle e_1, e_2\rangle$, temos

$$F(L, G/K - [e]) = F\big(L, \mathbb{R}G_{2,3} - \{\langle e_1, e_2\rangle\}\big) = \{\langle e_3, e_4\rangle\},$$

para $L = SO(2) \times SO(2) \times 1 = T^2 \times 1 \simeq T^2$.

De modo semelhante, quando tomamos $L = SO(2) \times 1 \times SO(2) \simeq T^2$, concluímos

$$F(L, G/K - [e]) = F\big(L, \mathbb{R}G_{2,3} - \{\langle e_1, e_2\rangle\}\big) = \big\{\langle e_4, e_5\rangle\big\}.$$

Sendo assim, no contexto estabelecido pelo conjunto $F(T^2, \mathbb{R}G_{2,3}) = \{\langle e_1, e_2\rangle, \langle e_3, e_4\rangle\}$, a aplicação do Teorema 2.5 fornece:

$$Ind^{T^2}\big(\mathbb{R}G_{2,3} - \{\langle e_1, e_2\rangle\}, \mathbb{Q}\big) = 0$$

e

$$Ind^{T^2}\big(\mathbb{R}G_{2,3} - \{\langle e_1, e_2\rangle, \langle e_3, e_4\rangle\}, \mathbb{Q}\big) \neq 0.$$

Considerando $\mathbb{R}G_{2,3}$ como um $L = SO(2) \times SO(3)$-espaço, constatamos que

$$F\big(L, \mathbb{R}G_{2,3}\big) = \bigcap_{l \in L} F\big(l, \mathbb{R}G_{2,3}\big) = \{\langle e_1, e_2\rangle\},$$

pois $L$ contém as duas identificações de $T^2$ mencionadas acima, o que nos diz que

$$F\big(l_1 \times l_2 \times 1, \mathbb{R}G_{2,3}\big) \cap F\big(l_1' \times 1 \times l_2', \mathbb{R}G_{2,3}\big) = \big\{\langle e_1, e_2\rangle\big\}$$

e, para $l_1 \times l_2 \in L$ qualquer, tem-se $\langle e_1, e_2\rangle \in F\big(l_1 \times l_2, \mathbb{R}G_{2,3}\big)$. Ou seja, a ação de $SO(2) \times SO(3)$ sobre $\mathbb{R}G_{2,3} - \{\langle e_1, e_2\rangle\}$ não possui ponto fixo, mas em contrapartida o Teorema 2.5 não se aplica.

# 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, fizemos um estudo do índice de valor-ideal de Fadell-Husseini, bem como possíveis aplicações no estudo de propriedade do ponto fixo para espaços homogêneos.

Para $SO(k)$ sob a ação de um seu toro maximal $T^{[k/2]}$ via multiplicação de matrizes, calculamos o índice de valor-ideal de Fadell-Husseini $Ind^{T^{[k/2]}}(SO(k), \mathbb{Q})$, bem como $Ind^{T^n}(U(n), \mathbb{Z})$, $Ind^{T^n}(Sp(n), \mathbb{Z})$ e $Ind^{\mathbb{Z}_2^n}(O(n), \mathbb{Z}_2)$ (ver Teoremas 2.13 e 2.15).

Como o cálculo de $Ind^{T^{[k/2]}}(SO(k), \mathbb{Q})$ podemos obter uma demonstração alternativa para a propriedade do ponto fixo dos espaços projetivos reais de dimensão par.

A motivação para a busca de uma tal demonstração alternativa vem do problema em aberto que é o de classificar totalmente as variedades grassmaniannas com a propriedade do ponto fixo.

Finalizamos o trabalho exibindo as dificuldades de se adaptar a abordagem realizada no contexto dos espaços projetivos para a variedade grassmanianna $\mathbb{R}G_{2,3}$.

Em trabalhos futuros, pretendemos atacar essas dificuldades com o intuito de contorná-las.

# REFERÊNCIAS


1 ANDRES, J. A nontrivial example of application of the Nielsen fixed-point theory to differential systems: problem of Jean Leray. **Proceedings of the American Mathematical Society**, Providence, v. 128, n. 10, p. 2921–2931, 2000. DOI: 10.1090/S0002-9939-00-05324-7. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-00-05324-7. Acesso em: 1 mar. 2026.

2 BLAGOJEVIĆ, P.; BLAGOJEVIĆ, A.; MCCLEARY, J. Spectral sequences in combinatorial geometry: cheeses, inscribed sets, and Borsuk-Ulam type theorems. **Topology and its Applications**, Amsterdam, v. 158, n. 15, p. 1920–1936, 2011. DOI: 10.1016/j.topol.2011.06.035. URL: https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.06.035. Acesso em: 1 mar. 2026.

3 AXELROD-FREED, I.; SOBERÓN, P. Bisections of mass assignments using flags of affine spaces. **Discrete & Computational Geometry**, Heidelberg, v. 72, n. 2, p. 550–568, 2024. DOI: 10.1007/s00454-022-00465-x. URL: https://doi.org/10.1007/s00454-022-00465-x. Acesso em: 1 mar. 2026.

4 HUSSEINI, S. The products of manifolds with the f.p.p. need not have the f.p.p. **American Journal of Mathematics**, Baltimore, v. 99, n. 5, p. 919–931, 1977. DOI: https://doi.org/10.2307/2373991. URL: https://www.jstor.org/stable/2373991. Acesso em: 1 mar. 2026.

5 FADELL, E. Recent results in the fixed point theory of continuous maps. **Bulletin of the American Mathematical Society**, Providence, v. 76, n. 1, p. 10–29, 1977. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1970-12358-8. URL: https://pubs.ams.org/journals/bull/1970-76-01/S0002-9904-1970-12358-8. Acesso em: 1 mar. 2026.

6 GLOVER, H.; HOMER, W. Fixed points on flag manifolds. **Pacific Journal of Mathematics**, Los Angeles, v. 101, n. 2, p. 303–306, 1982. DOI: 10.2140/pjm.1982.101.303. URL: https://msp.org/pjm/1982/101-2/p03.xhtml. Acesso em: 1 mar. 2026.

7 GLOVER, H.; HOMER, W. Self-maps of flag manifolds. **Transactions of the American Mathematical Society**, Providence, v. 267, n. 2, p. 423–434, 1981. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1981-0626481-9. URL: https://pubs.ams.org/journals/tran/1981-267-02/S0002-9947-1981-0626481-9. Acesso em: 1 mar. 2026.

8 HOFFMAN, M. Endomorphisms of the cohomology of complex Grassmannians. **Transactions of the American Mathematical Society**, Providence, v. 281, n. 2, p. 745–760, 1984. DOI: https://doi.org/10.2307/2000083. URL: https://www.jstor.org/stable/2000083. Acesso em: 1 mar. 2026.

9 HOFFMAN, M. Noncoincidence index, free group actions, and the fixed point property for manifolds. **Pacific Journal of Mathematics**, Los Angeles, v. 136, n. 1, p. 129–144, 1989. DOI: 10.2140/pjm.1989.136.129. URL: https://msp.org/pjm/1989/136-1/p09.xhtml. Acesso em: 1 mar. 2026.

10 DUAN, H. Self-maps of the Grassmannian of complex structures. **Compositio Mathematica**, Netherlands, v. 132, n. 2, p. 159–175, 2002. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1015885227445. URL: https://www.cambridge.org/core/journals/compositio-mathematica/article/selfmaps-of-the-grassmannian-of-complex-structures-dedicated-to-professor-boju-jiang-on-his-65th-birthday/4DE4AE0E956431BE02D067CFD68E9198. Acesso em: 1 mar. 2026.

11 O'NEILL, L. **On the f.p.p. for Grassmann manifolds**. Tese (Doutorado em Matemática) – Ohio State University, Columbus, 1974.

12 GLOVER, H.; HOMER, W. Endomorphisms of the cohomology ring of finite grassmann manifolds. In: BARRATT M.; MAHOWALD, M. (Ed.). **Geometric Applications of Homotopy Theory I**. Heidelberg: Springer, 1978. v. 657. (Lecture Notes in Math.). p. 170–193. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0069234. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0069234. Acesso em: 1 mar. 2026.

13 YANG, Chung-Tao. On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson. I. **Annals of Mathematics**, Princeton, v. 60, n. 2, p. 262–282, 1954. DOI: 10.2307/1969632. URL: https://doi.org/10.2307/1969632. Acesso em: 1 mar. 2026.

14 YANG, Chung-Tao. On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson. II. **Annals of Mathematics**, Princeton, v. 62, n. 2, p. 271–283, 1955. DOI: 10.2307/1969681. URL: https://doi.org/10.2307/1969681. Acesso em: 1 mar. 2026.

15 CONNER, P.; FLOYD, E. **Differentiable periodic maps**. Heidelberg: Springer, 1964.

16 KRASNOSEL'SKII, M. **Topological methods in the theory of nonlinear integral equations**. Oxford: Pergamon Press, 1964.

17 FADELL, E.; HUSSEINI, S. Relative cohomological index theories. **Advances in Mathematics**, Amsterdam, v. 64, n. 1, p. 1–31, 1987. DOI: 10.1016/0001-8708(87)90002-8. URL: https://doi.org/10.1016/0001-8708(87)90002-8. Acesso em: 1 mar. 2026.

18 FADELL, E.; HUSSEINI, S. Index theory for $G$-bundle pairs with applications to Borsuk-Ulam type theorems for $G$-sphere bundles. In: RASSIAS, Th. (Ed.). **Nonlinear analysis**. Singapore: World Scientific, 1987. p. 307–336. ISBN 9971-50-140-6.

19 FADELL, E.; RABINOWITZ, P. Generalized cohomological index theories for Lie group actions with an application to bifurcation questions for Hamiltonian systems. **Inventiones Mathematicae**, Heidelberg, v. 45, n. 2, p. 139–174, 1978. DOI: 10.1007/BF01390270. URL: https://doi.org/10.1007/BF01390270. Acesso em: 1 mar. 2026.

20 FADELL, E.; HUSSEINI, S. An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge, v. 8, n. 8, p. 73-85, 1988. DOI: https://doi.org/10.1017/S0143385700009342. URL: https://doi.org/10.1017/S0143385700009342. Acesso em: 1 mar. 2026.

21 BREDON, G. **Introduction to Compact Transformations Groups**. New York: Academic Press, 1972.

22 HUSEMOLLER, D. **Fibre Bundles**. 3th ed. New York: Springer-Verlag, 1993.

23 HSIANG, W. **Cohomology Theory of Topological Transformation Groups**. New York: Springer-Verlag, 1975.

24 MIMURA, M.; TODA, H. **Topology of Lie Groups, I and II**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1991.