

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Algumas Observações sobre a Característica de Euler: Uma Introdução de Elementos da História da Matemática no Ensino Médio.

Mônica de Cássia Siqueira Martines

Orientador: Prof. Dr. Sergio Roberto Nobre

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos e Científicos, para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro/SP
2009

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, em especial, ao meu marido Rogério, que não somente neste período, mas em particular nele, se mostrou compreensivo, paciente e atencioso. Aos meus pais, Ana Maria e Nilton Santos (em memória), que sempre me apoiaram e me confortaram com palavras de carinho e conforto. Aos meus irmãos, Nilton Junior e Patricia que me incentivaram a prosseguir os estudos. Meus sobrinhos, Nilton Neto, Victor Hugo e Anne Carolyne, e meu irmão caçula Artur, que me fizeram refletir sobre a Matemática ensinada no Ensino Fundamental, nas séries iniciais. Ao Meu orientador, Prof. Dr. Sergio R. Nobre, que acreditou e apostou em mim, dando-me a oportunidade de ingressar e concluir mais uma etapa da minha vida. À prof^a. Dr^a. Alice Kimie Miwa Libardi que me orientou durante a especialização e me incentivou a concluir o mestrado.

Muito obrigada a todos.

*“ O estudo dos trabalhos de Euler continuará a ser a melhor escola para os
diferentes campos da matemática e nada os poderá substituir.”*

Gauss

Resumo

Esta dissertação tem por objetivo trabalhar Topologia no Ensino Médio, usando como recurso pedagógico, a História da Matemática. Iniciaremos com o trabalho de Euler sobre as pontes de Königsberg, pois é com ele que se dá início as pesquisas neste ramo científico da Matemática. Em seguida resgataremos a descoberta de Euler acerca da “propriedade geral dos sólidos limitados por faces planas”, conhecida hoje como relação de Euler. Seu trabalho, intitulado *“Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita”*, surgiu do incômodo de demonstrar que existia uma propriedade geral para os sólidos limitados por faces planas, uma vez que a propriedade geral para os polígonos já era conhecida. Também iremos trabalhar com as obras de Cauchy e Lhuillier que contribuíram enormemente com a evolução da propriedade citada por Euler. Para encerrar, destacaremos algumas observações sobre a Característica de Euler, assunto que se desenvolveu a partir da preocupação deste e que hoje faz parte da Topologia Algébrica.

Palavras-chave: História da Matemática; Topologia; Educação; Característica de Euler.

Resumo

This dissertation aims to work topology in high school using as a teaching resource the History of Mathematics. We will start with Euler's work about the bridges of Königsberg, is with them that begins the research in this scientific branch of Mathematics. After that, we will redeem Euler's discovery about the "general property of the solids bounded by flat faces", known today as Euler's relation. His work, entitled "*Demonstratio nonnullarum Insignium proprietatum, quibus solida sunt hedras planis included praedita*" arose from the inconvenience of demonstrate that there was a general property for solid bounded by flat faces since the general property for the polygons was already known. We will also work with Cauchy and Lhuilier's works, which contributed a lot of the evolution of property mentioned by Euler. As closing, we will detach some observations about Euler's Characteristic, a subject that was develop from Euler's concerns and now is part of Algebraic Topology.

Keywords: History of Mathematics; Topology; Education; Euler characteristic.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	7
2	A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO PEDAGÓGICO	11
3	UMA INTRODUÇÃO A TOPOLOGIA	17
3.1	As pontes de Königsberg	18
3.2	Solução de Euler ao problema das pontes de Königsberg	23
4	RELAÇÃO DE EULER	36
4.1	Leonhard Euler	37
4.2	O anúncio da descoberta	41
4.2.1	Demonstração de Euler das propriedades das figuras retilíneas planas	45
4.2.2	Polígonos	48
4.2.3	Poliedros	52
4.2.4	Demonstração de Euler sobre a propriedade dos sólidos limi- tados por faces planas	57
4.3	Cauchy e suas investigações sobre a Propriedade de Euler	72
4.3.1	O matemático Cauchy	72
4.3.2	O trabalho de Cauchy: “ Recherches Sur Les Polyèdres”	73
4.4	Lhuillier e sua contribuição	78
4.4.1	Um pouco da vida de Lhuillier	78
4.4.2	Mémoire Sur La Polyèdrométrie: Anotações sobre as medidas de um poliedro.	79

5	ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE A CARACTERÍSTICA DE	
	EULER	86
5.1	Topologia Quociente	87
5.2	Poliedros, Superfícies e Triangulação	97
5.3	Superfícies	105
5.4	Soma Conexa	107
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	113

1 INTRODUÇÃO

A característica de Euler foi escolhida como tema dessa dissertação por ser assunto do Ensino Médio e também de pesquisas científicas realizadas por matemáticos, os quais usam suas generalizações nas áreas de Topologia Algébrica e Topologia Diferencial.

Segundo Katz¹, a Topologia teve início com dois trabalhos: “*Solutio Problematis ad Geometriam situs Pertinentis*”², o qual traz a solução do problema das pontes de Königsberg e “*Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*”³, que trata da “propriedade geral dos sólidos limitados por faces planas”, ambos do matemático Euler (1707-1783). Esta área da matemática foi sistematizada a partir dos estudos dos matemáticos Augustus Möbius (1790 – 1868) e Henri Poincaré (1854 – 1912) no século XIX.

No trabalho sobre a propriedade geral dos sólidos limitados por faces planas (“*Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*”) Euler verifica a possibilidade de existir uma propriedade para os sólidos, uma vez que para os polígonos já eram conhecidas, e desta forma, enuncia a propriedade: “Em todo sólido limitado por faces planas, o número de faces e o número de ângulos sólidos excede por dois o número de arestas, ou $H + S = A + 2$ ”. Euler comenta sua descoberta através de uma carta enviada ao amigo Goldbach no ano de 1750, antes da publicação do trabalho em si, como era de seu costume. Nesta carta Euler confessa ao amigo que não consegue demonstrar satisfatoriamente seu teorema, mas faz um alerta sobre sua importância. Embora não tivesse tido o conhecimento, o matemático René Descartes (1576–1650) também já havia trabalhado em tal questão, porém não fora tão inovador quanto Euler e não

¹Katz, p.512

²“ A solução de um problema relacionado à geometria de posição”.

³“ Demonstração de algumas propriedades notáveis dos sólidos limitados por faces planas”.

chegou a demonstrar nem a enunciar a propriedade para os sólidos.

O fato de Euler escrever a carta e enviar ao amigo Goldbach desencadeia outros acontecimentos relacionados à propriedade, ou ao teorema de Euler e, por este motivo, torna-se digno de memória, como afirma Mendes (2006, p.82),

Um fato histórico da matemática é digno de memória quando exerce ou exerceu, na sociedade, uma função desencadeadora de uma série de acontecimentos matemáticos úteis à humanidade e que ainda podem gerar muito mais.

Oito anos após a sua carta enviada ao amigo Goldbach, Euler publica o trabalho sobre a propriedade geral dos sólidos limitados por faces planas, no qual demonstra seus teoremas e suas proposições descobertos e anunciados anteriormente. Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), em seu *Éléments de Géométrie* publicado em 1794, faz uma demonstração para o teorema de Euler, de uma forma mais simples que seu descobridor. No ano de 1813, Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) chega a um caso mais geral do que o apresentado por Euler e publica um artigo no *Journal de l'École Polytechnique* sobre o assunto, intitulado *Recherches Sur Les Polyédres-Premier Mèmoire*. E em 1812/1813, Simon Antoine Jean Lhuillier (1750 – 1840) também discute a questão no *Annales de Mathématiques* 3, com o artigo *Mémoire Sur La Polyédrométrie*. Neste artigo, Lhuillier comenta sobre as exceções ao teorema de Euler.

Por ser um fato digno de memória, o trabalho sobre as pontes de Königsberg que marca o início da Topologia no ramo da teoria dos Grafos, a carta de Euler sobre a propriedade geral dos sólidos limitados por faces planas, que é a desencadeadora da série de acontecimentos matemáticos que culminam no assunto atual Característica de Euler, a demonstração de Euler sobre a propriedade e os artigos de Cauchy e de Lhuillier, que reproduzem a História do desenvolvimento de tal ramo matemático, podem ser incorporados a rotina da sala de aula, tornando-se assim uma introdução à História da Matemática no Ensino Médio, contemplando as competências e habi-

lidades previstas para este nível de ensino.

O objetivo desta dissertação, então, consiste na apresentação destes trabalhos explorando suas potencialidades Matemáticas e Históricas, para que, na sala de aula, sejam incorporadas à rotina dos alunos, sugerindo, assim, uma introdução de Elementos de História da Matemática na sala de aula.

A matemática é construída, incessantemente, sobre as bases já construídas. Em consequência, o aluno precisa, no processo de aprendizagem, repensar o que já foi pensado por outros, ou seja, é necessário que o aluno se aproprie do que já foi elaborado por matemáticos anteriores. (FOSSA, 2006, p.138).

O trabalho aqui apresentado é uma reconstrução, a partir dos fatos históricos, dos acontecimentos, tentando aproximar os pensamentos de ontem com o pensamento de hoje, sem abrir mão do conhecimento gerado pelo contato com obras de outras épocas.

O trabalho do historiador é localizar e compreender historicamente cada acontecimento ... O conhecimento histórico é uma reconstrução dos fatos a partir das fontes históricas, ou seja, é o nosso pensamento de hoje tentando alcançar o modo de pensar e de viver de outros tempos e de outros povos. (PETTA, 2005, p.9).

Dedicaremos um capítulo para o aprofundamento dos estudos nesta área da Matemática, como uma oportunidade para que os professores tenham um breve contato com o moderno, não para que demonstrem suas habilidades matemáticas e se exibam para seus alunos, e sim no sentido de fazer florescer sua criatividade. Trabalharemos com algumas observações à respeito da Característica de Euler, assunto da Topologia que surgiu com a evolução dos fatos narrados acima e que, de acordo com D'Ambrosio (1977, p.VIII), “ é a maneira moderna de se descrever espaço”, auxiliando os profissionais à compreenderem melhor o assunto abordado na

sala de aula, possibilitando uma assistência, quando estes preparam suas aulas e se deparam com problemas que fogem do conteúdo proposto a ser trabalhado.

O que estamos propondo aqui trata-se de uma sugestão de trabalho aos professores, para que os mesmos trabalhem com investigação matemática e usem como recurso pedagógico a História da Matemática, de forma que nossos alunos compreendam que a Matemática “ não caiu, e não cai, do céu,” que possam entender, a partir destes fatos históricos, como os matemáticos procediam em suas pesquisas, como surgiam suas idéias e como as publicavam.

Ao revelar a Matemática como uma criação humana, mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas em diferentes períodos históricos, estabelecer comparações entre conceitos matemáticos e processos do passado e presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver mais favoravelmente atitudes e valores para o estudante face ao conhecimento matemático.(GASPAR 2003, p.3).

2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO PEDAGÓGICO

A investigação da História da Matemática é uma atividade que envolve a compreensão e auxilia no desenvolvimento das competências e habilidades matemáticas definidas pela Secretaria Estadual da Educação (SEE) no estado de São Paulo.

De acordo com a SEE⁴, “competências cognitivas são as modalidades estruturais da inteligência. Modalidades, pois expressam o que é necessário para compreender ou resolver um problema” e habilidades pois, “funcionam como indicadores ou descritores das aprendizagens, possibilitam saber o que é necessário que o aluno faça para dar conta e bem do que foi solicitado fazer”⁵.

Também de acordo com a SEE, estão previstas as seguintes competências e habilidades a serem dominadas, a fim de demonstrá-las no Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar de São Paulo (SARESP) e que poderemos ajudar nossos alunos com o trabalho aqui apresentado:

- Competências para observar: permite ao aluno registrar o que está sendo proposto nos textos, imagens, tabelas ou quadros e interpretar este registro. Estas competências são desenvolvidas pelas habilidades de observar, identificar, localizar, constatar, reconhecer, indicar.
- Competências para realizar: são identificadas pela capacidade do aluno realizar procedimentos, que vão ajudá-lo em suas tomadas de decisão. As habilidades necessárias para desenvolver esta competência estão todas focadas nas ativi-

⁴São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. Matrizes de Referência para a avaliação Saresp, p. 14.

⁵São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. Matrizes de Referência para a avaliação Saresp, p.12.

dades dos alunos, no que e como fazem, tais como classificar, seriar, ordenar, conservar, compor, decompor, calcular, medir, interpretar.

- Competências para compreender: possibilitam realizações, através de procedimentos compreendidos, ou através de leituras. Possibilitam planejamento e escolha de estratégias para resolver problemas. Referem-se as operações mentais mais complexas. Para dominar esta competência o aluno deve possuir as habilidades de analisar fatos, acontecimentos ou possibilidades, observar padrões e valores, aplicar relações conhecidas em situações novas, formular julgamentos sobre proposições, criticar, analisar e julgar, formular ou compreender explicações causais, apresentar conclusões, fazer proposições, argumentar, fazer generalizações ou deduções que implicam bom domínio da lógica, apresentar justificativas ou explicações sobre acontecimentos.

Ao desenvolvermos o Tema Espaço e Forma⁶ proposto pela SEE, no Ensino Médio, a competência a ser desenvolvida nos alunos é a de “compreender as propriedades dos objetos e a sua posição relativa e desenvolver o raciocínio espacial por meio de construções e de formas”. As habilidades descritas para ajudar a construir esta competência e que poderão ser desenvolvidas com a nossa proposta de trabalho são:

- Aplicar as propriedades fundamentais dos polígonos regulares em problemas de pavimentação de superfícies. Estas propriedades são citadas por Euler na carta que escreveu à Goldbach e está presente em sua demonstração da propriedade geral dos sólidos limitados por faces planas.
- Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações. Indiretamente, Cauchy, em seu artigo, apresenta uma forma de planificação dos poliedros.

⁶SARESP: Matrizes de Referência para a Avaliação, p.66.

- Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema. Este é o teorema de Euler, que foi demonstrado pelo próprio Euler, por Cauchy e Lhuillier, entre outros, e que desencadeou o surgimento da Característica de Euler e, portanto, serão trabalhadas em toda a dissertação.

O uso da História da Matemática como recurso pedagógico vem sendo defendido por Educadores Matemáticos que realizaram pesquisas nesta área do conhecimento científico. Seus trabalhos confirmam que o ensino-aprendizagem da matemática pode ser melhorado com esta prática. Citamos inicialmente, Cardoso (1997, p.70), que afirma que

A História da Matemática é a história das teorias dominantes reconstruída racionalmente. A Reconstrução Racional mostra o processo heurístico de descoberta e desenvolvimento do conhecimento matemático.

Essa reconstrução racional que Cardoso comenta é o que sustenta nossa proposta de exercícios sobre a fórmula poliedral ou sobre as pontes de Königsberg. Temos o propósito de fazer com que nossos colegas professores, e conseqüentemente nossos alunos, percebam este processo heurístico e desenvolvam o conhecimento matemático mais favoravelmente.

As demonstrações de Euler sobre o problema das pontes e sobre a propriedade geral dos sólidos limitados por faces planas, devem ser trabalhadas ao final das intuições, verificações, constatações dos alunos quanto às respectivas soluções aos problemas levantados. Segundo Gaspar (2003, p.20)

(...) é necessário que também o aluno perceba e se aproprie das demonstrações e dos encadeamentos conceituais lógicos para validar intuições, dar sentido às técnicas associadas a esses conhecimentos, ajudando a enriquecer o universo de experiências e conhecimentos que servirão de base para novas intuições

quando ele se defrontar com novos problemas. A dimensão histórica pode facilitar esta percepção e a de que a matemática não é uma seqüência discreta de capítulos, mas um mover entre diferentes modos de pensar sobre os conceitos matemáticos.

Também de acordo com Fauvel (1991) apud Mendes (2006, p.86),

(...) são várias as razões para se usar a história em educação matemática: 1) a história aumenta a motivação para a aprendizagem da matemática; 2) humaniza a matemática; 3) mostra o seu desenvolvimento histórico através da ordenação e apresentação de tópicos no currículo; 4) os alunos compreendem como os conceitos se desenvolveram; 5) contribui para as mudanças de percepções dos alunos com relação à matemática; 6) a comparação entre o antigo e o moderno estabelece os valores das técnicas modernas a partir do conhecimento desenvolvido ao longo da história da sociedade; 7) ajuda a desenvolver uma aproximação multicultural para a construção do conhecimento matemático; 8) suscita oportunidades para a investigação matemática; 9) pode apontar os possíveis aspectos conceituais históricos da matemática que dificultam a aprendizagem dos estudantes; 10) contribui para que os estudantes busquem no passado soluções matemáticas para o presente e projetem seus resultados no futuro; 11) ajuda explicar o papel da matemática na sociedade; 12) faz da matemática um conhecimento menos assustador para os estudantes e para a comunidade em geral; 13) explora a história, ajudando a sustentar o interesse e a satisfação dos estudantes; 14) fornece oportunidades para a realização de atividades extracurriculares que evidenciem trabalhos com outros professores e/ou outros assuntos (caráter interdisciplinar da história da matemática).

Porém a História da Matemática apresentada nos livros didáticos nada tem a ver com o que estamos aqui defendendo. Aparece para ser utilizada como uma curiosi-

dade, algo que pode ser descartado, como uma maneira de “ fugir ” temporariamente da matemática. Segundo Fossa (2006, p.140)

Seu verdadeiro uso como um instrumento pedagógico, porém, somente ocorre quando conceitos e problemas históricos são integrados na rotina diária da sala de aula e se tornam parte da experiência matemática do aluno.

Narkilar, (apud Cardoso 1997, p.114) faz algumas recomendações sobre o ensino de Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias, que refletem o ponto de vista de pesquisadores científicos com relação à educação. Para ele, a educação científica deve se desenvolver em quatro níveis:

1. No Ensino Fundamental, o profissional deve estimular a curiosidade infantil para a observação dos fenômenos naturais.
2. No Ensino Médio os estudantes devem verificar as leis experimentalmente.

Levados a descobrir a história das ciências mediante métodos ao mesmo tempo teóricos e experimentais, os alunos perceberão como os cientistas progridem - através de erros e retificações - e fazem assim o saber humano avançar. (CARDOSO, p.114)

3. No Superior, o aluno deve complementar seu conhecimento com debates, pesquisa, etc., tendo consciência dos limites da pesquisa em seu campo de estudo.
4. Para a população em geral, a divulgação científica ajuda na adaptação da ciência às inovações tecnológicas e científicas, bem como a informação dos fracassos e dos limites científicos.

A observação de Narkilar sobre o ensino das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias com relação ao Ensino Médio vem ao encontro de nossa proposta de elaborar um material para ser usado neste nível de ensino. Mostrar que o matemático Euler, em sua elaboração da propriedade para os sólidos, se preocupou apenas com os sólidos limitados por faces planas, mas não explicitou em quais sólidos estava trabalhando para a verificação e, com isso, outros matemáticos, tais como Cauchy e Lhuillier, observaram o potencial desta propriedade e mostraram que novas hipóteses deveriam ser abordadas a partir do trabalho de Euler, fazendo assim, retificações em seu trabalho. Devemos mostrar à nossos alunos que “ O progresso em matemática se dá pela transformação de problemas. Há ampliação do campo estudado porque se analisam várias provas diferentes.” (CARDOSO, 1997, p.70).

3 UMA INTRODUÇÃO A TOPOLOGIA

Como o trabalho de Euler sobre as pontes de Königsberg e o trabalho sobre a fórmula poliedral deram origem ao ramo da matemática conhecido hoje por Topologia, optamos por iniciar nossa proposta de estudo e aplicação com estes, embora não sejam os primeiros em sua carreira.

O problema das sete pontes de Königsberg realizado e publicado por Euler em 1736, juntamente com os seus estudos sobre a fórmula poliedral, fazem parte de uma geometria que nos tempos de Euler era quase desconhecida. Euler⁷ classificou seus trabalhos como sendo pertencentes à uma geometria diferente, a qual Leibniz havia mencionado primeiro chamando-a de Geometria de Posição, na qual as relações entre os objetos estudados dependiam das posições por si só, não envolviam grandezas ou medidas.

Na afirmação de que as relações entre os objetos estudados dependiam das posições por si só, concluimos, então, que as propriedades de grandeza e medida, destes objetos se preservavam.

Segundo Dienes⁸, “ topologia é o estudo das propriedades que são invariantes nas transformações bi contínuas ”. Transformação bi contínua intuitivamente ocorre quando há uma transformação de A para B, sem perda das propriedades, e existe outra transformação de B para A, onde também não acontece a perda das propriedades. Por exemplo, se tomarmos uma bexiga cheia, os pontos interiores estão na parte interna da bexiga, os exteriores na parte externa e os pontos estão separados pela superfície da bexiga. Quando mudamos a aparência da bexiga, comprimindo-a, por exemplo (pois poderíamos tentar torcê-la, como fazem os palhaços com aquelas bexigas compridas, transformando-as em cachorros, espadas, chapéus, etc.) os

⁷Em sua obra “ *Solutio Problematis ad Geometriam situs Pertinentis* ”.

⁸Dienes, 1975, p.4.

pontos interiores continuarão sendo interiores e os exteriores continuarão exteriores à bexiga. Nada mudará em relação aos pontos interiores e exteriores, somente a superfície da bexiga mudará de posição. Quando realizamos o processo inverso de descomprimir a bexiga os pontos continuarão na mesma posição, ou seja, interiores continuarão interiores e exteriores continuarão exteriores, e as propriedades da bexiga foram preservadas durante todo o processo. Dessa forma encontramos uma transformação bi contínua, mas existem outras formas de transformações.

Uma transformação bijetora acontece, por exemplo, numa tradução de linguagem. Segundo Lakatos, (Obs. 209, p.164) “ As mudanças na teoria dominante implicam a reorganização de todo o nosso conhecimento (...). A grande inovação de Descartes foi substituir a geometria pela álgebra”.

Na solução de Euler para o problema das pontes de Königsberg, há uma transformação bijetora. A transformação bijetora acontece através da tradução do problema. Euler sai do problema geométrico e o traduz para a álgebra, sem perder as propriedades da geometria. Depois ele volta ao problema geométrico, saindo da álgebra, sem perder qualquer propriedade algébrica conquistada. O problema é, então, topológico.

3.1 As pontes de Königsberg

Em Königsberg na Prússia, existe uma ilha A chamada “ Kneiphof ”. O rio que a circunda se divide em dois braços, como pode ser visto na figura abaixo, e estes braços são atravessados por sete pontes, a , b , c , d , e , f e g .

De acordo com Gaspar e Mauro (2005), existem várias lendas sobre as pontes, e uma delas é a que segue:

(...) para comemorar um evento foi planejada uma grande parada. As autoridades da cidade decidiram que cada ponte deveria ser atravessada pela parada uma única vez. A comissão Organizadora do Evento não conseguiu atender a

essa exigência e a partir de então, passou a ser tradição em Königsberg tentar andar, aos domingos, pela cidade atravessando cada uma das sete pontes uma única vez. Apesar de ninguém ter sido capaz de fazê-lo os habitantes da cidade acreditavam que o problema tinha solução. (GASPAR E MAURO, 2005, p.3)

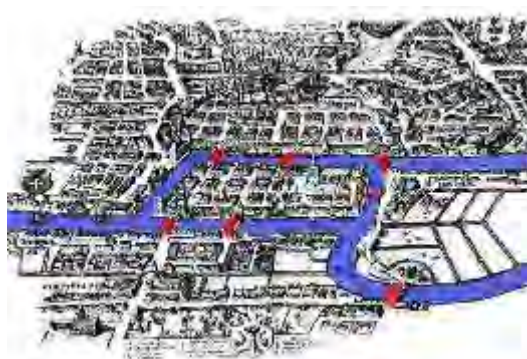


Figura 1: Königsberg

A seguir, poderemos sugerir que seja feita uma investigação ao problema proposto. Fazer uma investigação, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p.13) “é procurar conhecer o que não se sabe”, aqui o que se procura conhecer são os possíveis caminhos para se realizar a travessia das sete pontes uma única vez, que, neste caso, parte do problema proposto pelo professor. Reconhecida a situação problemática, os alunos passam a explorar a situação formulando questões. Depois de organizados os dados da pesquisa os alunos começam a fazer conjecturas e afirmações a respeito destas conjecturas. Depois fazem testes a respeito de suas afirmações e refinam as conjecturas. Por último justificam as conjecturas, avaliam o raciocínio ou o resultado do raciocínio.⁹

Para direcionar a investigação proposta, sugerimos as seguintes questões:

⁹Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), p.21.

Exercício 3.1. *Acreditando nesta lenda, façamos como os cidadãos de Königsberg, tentemos encontrar um caminho no qual se possa atravessar cada ponte uma e somente uma única vez.*

Exercício 3.2. *Retirando uma das sete pontes que interligam a cidade de Königsberg, seria possível traçar um caminho pelo qual fosse possível passar apenas uma vez em cada uma das pontes restantes?*

Exercício 3.3. *E se retirássemos duas pontes. Será que seria possível traçar um caminho que passasse uma única vez pelas cinco pontes?*

Exercício 3.4. *Verifique o que vai acontecendo se formos retirando as pontes até que fiquemos com apenas uma em cada região.*

Exercício 3.5. *O que acontece se ao invés de retirarmos as pontes, apenas trocássemos uma delas de lugar? O problema irá apresentar solução?*

Exercício 3.6. *Verifique a quantidade de pontes que levam, que nos conduzem, para cada região. Faça o registro em seu caderno de anotações.*

Exercício 3.7. *Para cada situação abaixo, verifique se há ou não solução, ou seja, se existe um caminho, para cada caso, em que se possa atravessar todas as pontes uma única vez.*

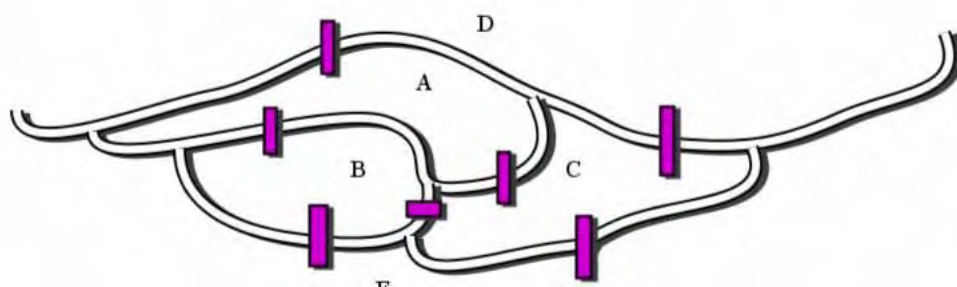


Figura 2: (a)

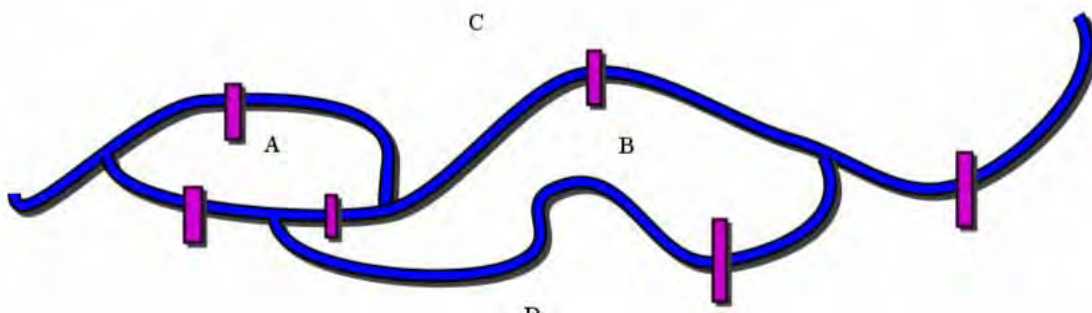


Figura 3: (b)

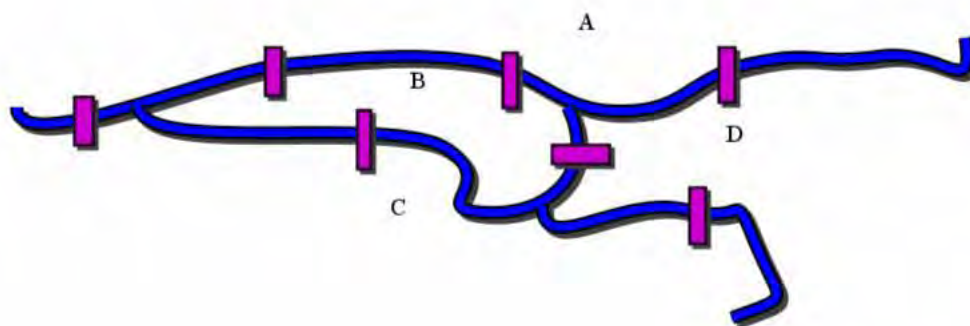


Figura 4: (c)

Exercício 3.8. No exercício anterior item (a), observamos que para a região *A* temos três pontes que dão acesso à ela. Um caminho para ser seguido é *BCE-BADCA*. Na descrição do caminho encontrado, a região *A* possui três pontes que a interligam com as outras regiões, porém na representação do caminho encontrado aparece somente duas vezes. A região *B* tem três pontes e aparece duas vezes, a região *C* tem quatro pontes e aparece duas vezes e a região *D* tem duas pontes e aparece somente uma vez. Observe a tabela abaixo:

Regiões	Pontes que levam às regiões	Número de vezes que a letra aparece na rota
<i>A</i>	3	2
<i>B</i>	3	2
<i>C</i>	4	2
<i>D</i>	2	1

Faça tabelas para os outros itens do exercício anterior (exercício 3.7, itens *b* e *c*).

Exercício 3.9. Focalize apenas em uma região, *A*, ou *B*. O que acontece com a rota a ser seguida quando o problema tem número ímpar de pontes que levam para este lugar?

Exercício 3.10. Focalize apenas em uma região, *C* ou *D*. O que acontece quando apresenta um número par de pontes que levam para uma região? O que você pode concluir?

Poderíamos propor outras investigações. Poderíamos sugerir ao aluno que fizesse uma pesquisa sobre a localização, hoje, da cidade de Königsberg. Será que ainda é conhecida por este nome? A cidade conserva as sete pontes citadas no problema? Depois destas sugestões de investigações, é importante que se conduza uma discussão dos fatos observados e das respostas encontradas. A seguir propomos que se faça uma leitura interpretativa da resolução apresentada por Euler em 1736.

3.2 Solução de Euler ao problema das pontes de Königsberg

Königsberg (Montanha do Rei) foi fundada em 1255 por Cavaleiros Teutônicos. De 1466 até 1656 Königsberg fazia parte da Polônia. Em 1656 foi anexada ao território da Prússia Oriental, onde até 1871 foi a sua capital e, a partir deste mesmo ano, passou a fazer parte do Império Alemão.

Na segunda Guerra Mundial, Königsberg foi arrasada e, das sete pontes citadas no problema, duas ficaram totalmente destruídas e outras duas tiveram que passar por reparos. Depois da II Guerra Mundial, a cidade passou a fazer parte da então União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS), quando foi reformada e rebatizada por Kaliningrado (nome sugerido devido ao nome do presidente do Comitê Central do Partido Comunista, Mikhail Kalinin). As sete pontes hoje são em número maior devido à expansão da cidade¹⁰.



Figura 5: Mapa da cidade de Königsberg

¹⁰Imagem capturada em 09 jun 2009, no site <<http://www.vintage-views.com/MeyersKonversations/Vol10/maps/images/0527386k6-Konigsberg2.jpg>>.

Abaixo observamos a localização geográfica de Kaliningrad no Continente Europeu¹¹.



Figura 6: Localização de Kaliningrad

Euler, em 1736, publica um trabalho, intitulado “*Solutio Problematis ad Geometriam situs Pertinentis*”, cujo conteúdo está distribuído em vinte e um itens e em seu prefácio traz uma importante justificativa da resolução do problema a ser incorporada ao novo ramo da geometria, denominada por ele **Geometria de Posição**. Trata, também, do problema inicial, sua generalização, a solução do problema original e a conseqüente solução para casos gerais.

Euler, escreve que uma solução para tal problema, de se fazer a travessia das setes pontes de Königsberg, passando uma única vez por cada uma, pode ser encontrada, assim como para qualquer problema deste tipo, desde que se faça uma exaustiva lista de rotas possíveis, e se verifique se satisfaz ou não o problema. Porém, como o próprio Euler afirma, isto seria muito trabalhoso, e num problema com o número de pontes maior, seria quase impossível obter resposta.

Então, Euler não tenta encontrar o caminho e sim observa se existe ou não uma maneira de atravessar todas as pontes uma única vez. Se verificar a possibilidade

¹¹Imagem capturada em 09 de junho de 2009, em <<http://en.wikipedia.org/wiki/K%C3%B6nigsberg>>.

de atravessar todas as pontes uma única vez, aí sim se preocupa em descobrir qual será a rota.

Começa então levando o problema para a Álgebra, usando letras maiúsculas A, B, C, D , para cada área de terra separada pelo rio, e letras minúsculas para representar as pontes a, b, c, d, e, f, g . Quando uma pessoa sai da área A e vai para a área B , e usa para isto qualquer uma das pontes a ou b , Euler representa esta travessia por AB . Agora se a pessoa sai da área B e vai para a área D usando a ponte f , a travessia até este momento será representada por ABD . Note que até este momento foram realizadas duas travessias de pontes, mas para representá-las foram necessárias três letras maiúsculas. Se continuarmos, saindo da área D para a área C pela ponte g , teremos $ABDC$ como representação da travessia e teremos passado por três pontes a, f, g . Continuando desta forma, Euler generaliza: então para representar a travessia das sete pontes, serão necessárias oito letras.

Para que as letras que representam a travessia possam ficar próximas, por exemplo, AB , é necessário que haja pelo menos uma ponte interligando estas áreas. No problema de Königsberg, as letras A e B deverão ficar próximas duas vezes, pois existem duas pontes interligando estas áreas, B e D uma vez, D e C uma vez, A e C duas vezes e A e D uma vez. Com isso, Euler reduz o problema de encontrar uma seqüência de oito letras, agrupadas conforme descrito.

Para encontrar tal possibilidade de arranjar uma seqüência de oito letras onde aparecem a quantidade de vezes especificadas, Euler inicia sua demonstração como se fosse por indução, apresenta um problema semelhante, porém com grau de dificuldade menor. O problema considerado, apresenta apenas duas áreas A e B com várias pontes a, b, c, d, e, f, g , etc:

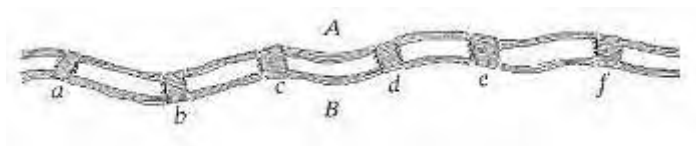


Figura 7: Duas Regiões

1. Considerando apenas uma ponte ligando as áreas A e B. Sendo assim, a rota seria representada por AB ou BA ; para uma ponte duas letras representariam a travessia, uma vez cada, não importando onde se inicia a travessia.

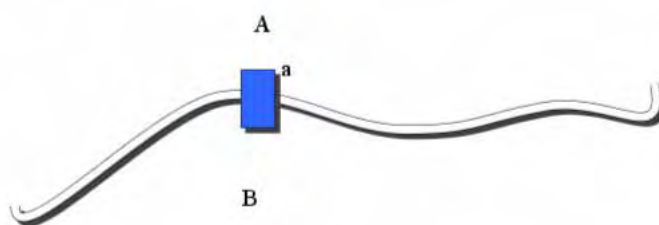


Figura 8

2. Considerando três pontes ligando A e B, a representação seria: $ABAB$ ou $BABA$; para três pontes quatro letras, onde cada letra aparecerá duas vezes, não importando onde se inicia a travessia.

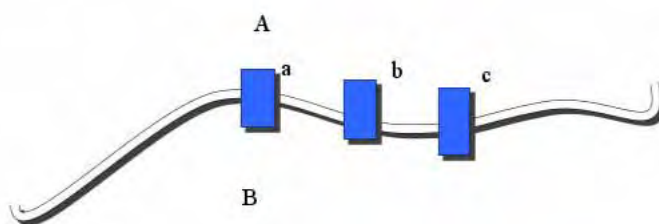


Figura 9

3. Considerando cinco pontes. A representação seria: $ABABAB$ ou $BABABA$; para cinco pontes seis letras aparecem, onde cada uma se repete três vezes, não importando onde se inicia a travessia.

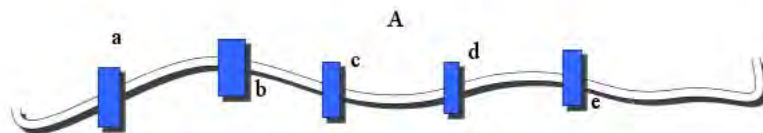


Figura 10

4. Por recorrência chega a conclusão que para qualquer número ímpar de pontes, não importa de qual área se sai e qual se deve chegar, se acrescenta uma unidade ao total de pontes e a ocorrência de A será metade deste número.

Depois desta conclusão Euler volta ao problema inicial e observa que a letra A deverá aparecer na seqüência de letras três vezes, pois são cinco pontes que dão acesso a área A ; a letra B deverá aparecer duas vezes, uma vez que são três pontes que dão acesso a esta área; a letra C deverá aparecer duas vezes, já que são três pontes que levam para a área C ; e a letra D deverá aparecer também duas vezes, pois são três pontes que conduzem para a área D . Somando a quantidade de vezes que cada letra deverá aparecer teremos $3A + 2B + 2C + 2D = 9$ letras. Mas anteriormente Euler observou que para ter solução eram necessárias oito letras. Sendo assim, o problema das pontes de Königsberg não apresenta solução.

Mas a intenção de Euler era também, dar um método geral para resolver qualquer problema relacionado a este de Königsberg. Desta maneira, prossegue com suas conclusões.

Então, para qualquer problema cujas áreas possuem um número ímpar de pontes, deve-se primeiramente verificar se a soma do número de vezes que cada letra deve acontecer na seqüência é igual ao número total de pontes adicionado a uma unidade.

Se for igual o problema poderá ser resolvido, mas se for uma unidade maior, a solução não será possível. Outra observação importante é que não importa, no caso da quantidade ímpar de pontes, de onde inicia ou termina a travessia das pontes. Agora, se o número de pontes que leva para uma determinada área for par, o caminho a ser percorrido deverá levar em consideração de onde se inicia a travessia. Euler volta, então, ao problema simples apresentado na Fig.7,

1. Tomemos apenas duas regiões A e B e duas pontes. Neste caso, se iniciarmos a travessia partindo da área A , esta letra deverá ocorrer duas vezes na seqüência ABA . Porém, se partirmos de B , a letra A ocorrerá apenas uma vez BAB .

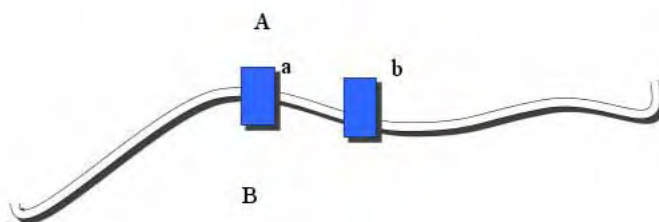


Figura 11

2. Depois, observe o que ocorre quando existem quatro pontes ligando as áreas A e B . Saindo de A , esta letra ocorrerá três vezes, $ABABA$, mas se sair de B aparecerá duas vezes $BABAB$.

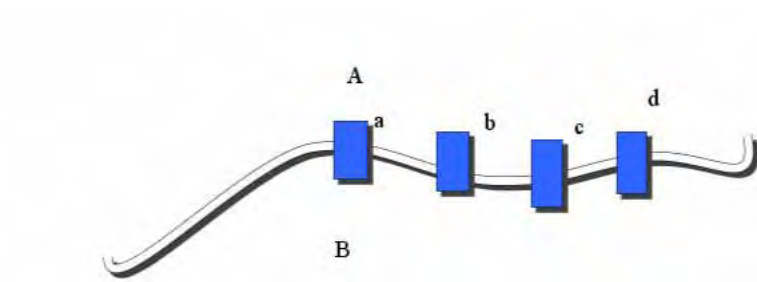


Figura 12

3. E também analise no caso de haver seis pontes: partindo da área A , a letra A aparecerá quatro vezes, $ABABABA$, se partir de B , três vezes, $BABABAB$.

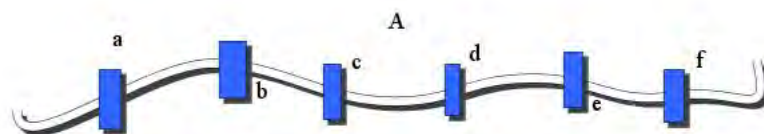


Figura 13

Generalizando a resposta, se obtém: se o número de pontes for par, o número de ocorrências de A , será metade deste número se a travessia não iniciar de A , ou será uma unidade maior que a metade do número de pontes se iniciar de A .

Em seguida, no décimo quinto item, apresenta uma solução geral:

1. Nomear as áreas delimitadas pelo braço do rio;

2. Observar o número total de pontes e adicione uma unidade, escrevendo o resultado num canto destacado;
3. Fazer uma tabela: primeira coluna escreva os nomes das áreas A , B , C , ..., na segunda coluna o número de pontes que deixa cada uma das áreas;
4. Marcar com asterisco as áreas que possuem número par de pontes;
5. Terceira coluna: calcular e escrever a metade do número se o valor correspondente na segunda coluna for par, se for ímpar adicione uma unidade e depois encontre a metade;
6. Fazer a soma dos números dispostos na terceira coluna;
7. Observar o valor encontrado anteriormente: se a soma for igual a soma do segundo item ou uma unidade menor, a travessia poderá ser realizada. Quando a soma for igual a obtida no item dois, deverá iniciar a travessia de uma das áreas não marcadas pelo asterisco. Já, se a soma dos números da terceira coluna for uma unidade menor, a travessia deve iniciar de uma das regiões marcadas com o asterisco.

A partir daí, Euler mostra dois exemplos: o das sete pontes de Königsberg e outro problema com dezesseis pontes.

Exemplo 3.11. *Assim no problema de Königsberg, temos: número total de pontes 7, adicionando uma unidade obtemos 8.*

Nome das áreas	N° de pontes que deixa a área	Metades
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

Chega-se a conclusão de que, sendo a soma da última coluna igual a 9, que é maior do que a soma em destaque 8, então tal jornada não poderá ser realizada.

Exemplo 3.12. Suponha que existam duas ilhas A e B rodeadas por água como na Fig.14 abaixo. Quinze pontes a, b, c, d, etc. ligam as ilhas. Será possível determinar uma jornada a qual atravessa cada ponte exatamente uma vez?

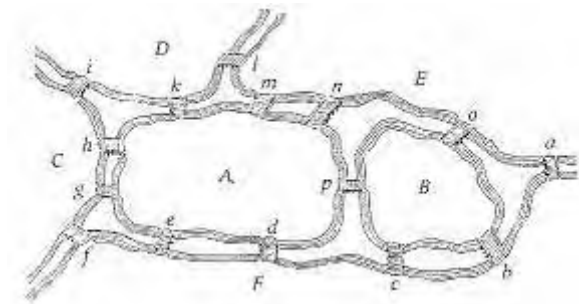


Figura 14: Segundo exemplo de Euler

Neste exemplo Euler descreve exatamente seis passos a serem seguidos:

1. Nomear todas as áreas separadas pelas águas como A, B, C, D, E, F. Neste caso, existem seis delas.
2. Acrescentar ao número de pontes (15) uma unidade e escreva o resultado (16) acima do esquema.
3. Escrever as letras A, B, C, etc. numa coluna e, próximo a cada uma, o número de pontes, as quais levam para a área correspondente, tal que oito pontes levem para A, quatro para B, e assim por diante.
4. Indicar com asterisco aquelas letras as quais tem um número par próximo a elas.
5. Escrever, na terceira coluna, as metades dos números pares da segunda coluna e adicione uma unidade aos números ímpares e, depois, calcule sua metade em cada caso.

6. Adicionar todos os números da terceira coluna.

Número total de pontes 15, adicionando uma unidade obtemos 16.

Nome das áreas	N° de pontes que deixa a área	Metades
A^*	8	4
B^*	4	2
C^*	4	2
D	3	2
E	5	3
F^*	6	3

Considerando que a soma da terceira coluna é igual ao número (16) escrito acima, entende-se que a jornada pode ser realizada se iniciada da área D ou E , uma vez que estas não estão marcadas com asterisco. A jornada pode ser feita como segue:

$$EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoELD$$

onde Euler escreve as pontes, as quais são atravessadas entre as letras maiúsculas correspondentes.

Ainda não satisfeito com a solução do problema, Euler, na décima sexta observação, verifica que se somarmos os números da segunda coluna da tabela, encontraremos o dobro do número total de pontes. E explica que isto acontece devido à forma de preencher esta coluna, pois contamos duas vezes cada ponte, uma vez para cada área que esta ponte liga. Conclui, também, que esta soma sempre será par e também conclui que, sempre que calcularmos a sua metade, esta resultará na quantidade total de pontes do problema. Como podemos observar nos exemplos dados: no *exemplo 1* a soma da segunda coluna é igual a 14 e sua metade é 7, igual ao número total de pontes. No *exemplo 2*, a soma da segunda coluna é 30, e sua metade 15, igual a quantidade total de pontes. Euler ainda observa que no primeiro

exemplo, existem quatro números ímpares na segunda coluna, e no segundo exemplo, existem dois números ímpares nesta coluna. Conclui que, para que o problema apresente solução, nesta segunda coluna devem aparecer apenas dois números ímpares, se aparecerem quatro, seis, oito, ..., o problema não poderá ser resolvido.

Para finalizar, na vigésima observação Euler apresenta três regras para identificar se qualquer problema envolvendo pontes e áreas poderão ser resolvidos:

- Se existe mais que duas áreas, as quais um número ímpar de pontes leva a elas, então tal jornada será impossível.
- Se, no entanto, o número de pontes for ímpar para exatamente duas áreas, então a jornada será possível se iniciada em qualquer destas áreas.
- Se, finalmente, não existem áreas para as quais um número ímpar de pontes leva a elas, então a jornada pedida pode ser realizada iniciando de qualquer área.

Com estas regras, o problema dado pode ser sempre resolvido.

O problema das pontes de Königsberg resolvido por Euler é uma fonte histórica rica e que proporciona, se trabalhado na sala de aula, a finalização da investigação proposta inicialmente aos alunos, mostrando como um matemático trabalha, como levanta questões, como as verifica, como testam as conjecturas e como chegam as conclusões.

O estudo deste problema deu origem ao que hoje denominamos “*Teoria de Grafos*”, um dos ramos da Topologia. O problema de Euler de encontrar uma sequência de oito símbolos com uma propriedade particular, é relacionada à existência de um tipo especial de caminho no grafo.

Definição 3.13. *Um grafo consiste de um conjunto finito de vértices, um conjunto finito de arestas, e uma regra que nos diz qual aresta liga qual par de vértices.*

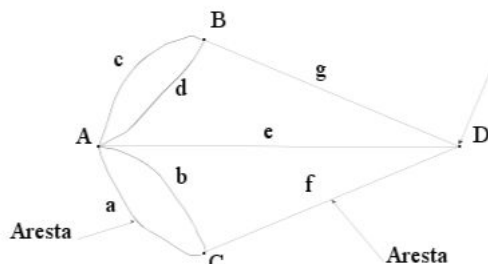


Figura 15: Grafo das sete pontes de Königsberg

Normalmente, uma aresta liga dois vértices distintos, mas excepcionalmente os dois vértices podem coincidir; no caso mais avançado, a aresta é dita ser um laço. No nosso exemplo particular existem quatro vértices, correspondentes às quatro grandes áreas A, B, C e D, e sete arestas, correspondendo às sete pontes.

Definição 3.14. *Um caminho no grafo é uma seqüência de vértices e arestas, $V_0, e_1, V_1, e_2, V_2, \dots, V_{r-1}, e_r, V_r$, onde cada aresta e_i liga os vértices V_{i-1} e V_i ($1 \leq i \leq r$).*

Podemos, agora, formular o problema das pontes de Königsberg usando a terminologia usada acima: o problema é encontrar um caminho no qual contenha cada aresta de um grafo uma, e somente uma, única vez. Um caminho deste tipo é chamado atualmente de Caminho Euleriano e Euler mostrou que o grafo de Königsberg não possui tal caminho.

Exercício 3.15. *Observe os desenhos abaixo. Eles representam caminhos Eulerianos? Se a resposta for afirmativa escreva a seqüência de vértices e arestas que representam tais caminhos.*

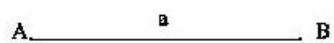


Figura 16: (a)

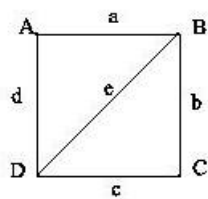


Figura 17: (b)

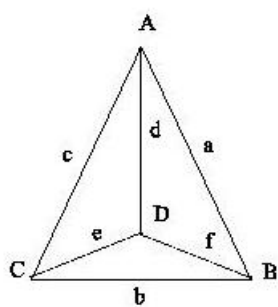


Figura 18: (c)

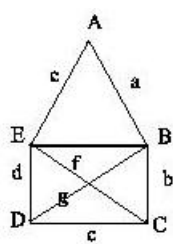


Figura 19: (d)

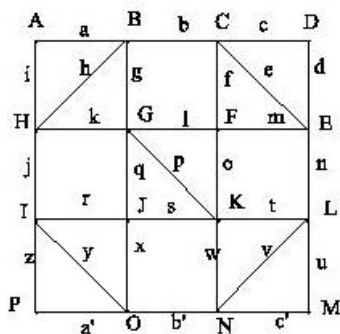


Figura 20: (e)

4 RELAÇÃO DE EULER

Nosso estudo iniciou-se com a leitura da obra de Lakatos (1978), “ A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações ”, em que Lakatos descreve a história da propriedade, enunciada por Euler, através de um diálogo investigativo entre professor e alunos. O professor percebe que os alunos estão interessados num problema e que estão conversando sobre ele, toma conhecimento do assunto e lança uma pergunta que desencadeia uma série de inquéritos. Os alunos passam a fazer conjecturas, encontram exemplos que verificam a propriedade, mas sempre aparece um aluno com um contra-exemplo que refuta a conjectura inicial, ou que refuta parte da conjectura. Assim, com pouca participação do professor, os alunos vão conquistando a resposta ao problema inicial. Durante a descrição da aula investigativa, o autor nos chama a atenção para as notas de rodapé, nas quais constam a História real pela qual passou a conjectura de Euler ($S + H = A + 2$).

Durante a leitura, iniciamos a busca pelo material original de Euler, que hoje

se encontra disponível em sites¹² ou livros¹³. O material original, em sua grande maioria, está escrito em Latim e alguns em alemão. Utilizamos as traduções destes trabalhos para o inglês, também disponíveis nos locais já citados.

A relação de Euler, tal como a conhecemos, na verdade passou por muitos matemáticos: Descartes, Euler, Cauchy,... Essa não foi, assim como muitos assuntos da matemática ou muitos assuntos científicos, uma propriedade criada, mas sim uma propriedade que surgiu da curiosidade, da investigação de uma pessoa, neste caso específico um matemático, e se desenvolveu em assunto importante dentro da Matemática.

4.1 Leonhard Euler

Leonhard Euler nasceu em Basiléia (Suíça) em 1707, filho de Paul Euler e Margarete Brucker. Paul foi ministro Protestante, graduado em Teologia pela Universidade de Basiléia. Durante o curso de graduação, fez amizade com Johann Bernoulli, e costumava freqüentar a casa dos Bernoulli. Dessa forma, foi capaz de dar uma educação elementar, incluindo matemática, para seu filho Leonhard. Nesta época, a família Euler havia se mudado para uma pequena vila chamada Riehen, próxima a Basiléia.

Leonhard Euler foi enviado à Basiléia para dar continuidade aos estudos, pois seu pai tinha esperança que este seguisse a tradição da família e se tornasse um ministro Protestante também. Morou com a avó materna em Basiléia, na fase do ginásio, estudando numa região pobre, onde a Matemática ensinada era muito elementar e Euler já tinha interesse por esta área devido aos ensinamentos de seu pai. Decidiu procurar alguém que pudesse o auxiliar na aprendizagem de uma Matemática mais complexa. Foi então que contratou um matemático amador, Johann Burckhardt,

¹²Como por exemplo: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Euler.html>. Acesso em 09 set. 2008.

¹³Biggs, Lloyd e Wilson. Graph Theory -1736 - 1936.

com quem teve aulas particulares.

No outono de 1720, Paul enviou seu filho para a Universidade de Basiléia, com o propósito de que este estudasse Filosofia. Johann Bernoulli era professor nesta Universidade e conduzia estudos elevados em Matemática e Física para aqueles que se interessavam. Aproveitando-se da oportunidade, Leonhard estudou todos os assuntos pedidos por Johann, mas isto não o satisfazia. Resolveu pedir aulas particulares a Johann, que negou o pedido, pois havia assumido muitos compromissos e não dispunha de tempo para tal tarefa. Mesmo assim, indicou alguns livros de Matemática avançada, para que estudasse sozinho e, no caso de dúvidas, deu permissão a ele para que o procurasse em sua casa nos sábados à tarde.

Em 1723, Euler completou seus estudos em Filosofia com um trabalho que comparava e contrastava as idéias filosóficas de Descartes e Newton. Apesar de Euler ter sido cristão a vida inteira, não se entusiasmava com os estudos e pesquisas teológicos. Ele mostrava grande interesse mesmo era pela Matemática e Física. Contando com a ajuda de Johann Bernoulli Euler, enfim, conseguiu o consentimento do pai para que estudasse Matemática.

Em 1726 terminou seus estudos na Universidade de Basiléia e, no outono deste mesmo ano, foi para a Academia de Ciências de São Petersburgo, na Rússia, a convite de seus amigos, filhos de Johann Bernoulli, Nikolaus II e Daniel, para ser professor adjunto na cadeira de Fisiologia, mas não chegou a lecionar nesta área. Foi indicado para a cadeira de Matemática e Física. Já em 1730, Euler fica com a cadeira de professor de Física da Academia. E em 1733, com a volta de Daniel Bernoulli para Basiléia, Euler fica com a cadeira de professor de Matemática.

Na Academia, Euler fez grandes amigos: Jakob Hermann, analista, geômetra, e especialista em mecânica teórica; Daniel Bernoulli, com interesse comum ao de Euler na área da Matemática Aplicada; Christian Goldbach, com quem Euler discutiu muitos problemas de análise e de teoria dos números; F. Maier, trabalhando na Trigonometria; o astrônomo e geógrafo J. N. Delisle. Euler costumava se correspon-

der com seus amigos matemáticos, para relatar suas descobertas matemáticas antes mesmo de publicá-las. Esta prática rendia maior fama à Euler e maior credibilidade em seus trabalhos, já que cada amigo se encontrava em centros de estudos diferentes, espalhados em vários países.

No final de 1733, Euler casou-se com Katharina Gsell, com quem teve treze filhos. O primeiro nasceu em 1734, Johann Albrecht. O segundo, Karl, em 1740. O terceiro, Christoph, em 1744 e, em seguida, duas meninas. Oito de seus treze filhos morreram ainda na infância. Em 1738 uma doença causou-lhe a perda da visão direita.

Abaixo podemos observar uma imagem de Euler¹⁴.



Figura 21: O matemático Euler.

Em 1771 perdeu totalmente a visão e, mesmo sem enxergar, conseguia fazer cálculos mentalmente. Contando com a ajuda de seus filhos Johann Albrecht e Christoph, dos acadêmicos W. L. Krafft e A. J. Lexell e dos dois novos discípulos N. Fuss e M. E. Golovin, os trabalhos foram executados. Os colaboradores tomavam nota das idéias de Euler e, posteriormente, as encaminhavam para a publicação.

Euler morreu vítima de uma hemorragia cerebral, na cidade de São Petersburgo (Rússia) em 18 de setembro de 1783, enquanto passava uma lição de Matemática para um de seus netos e discutia com Lexell e Fuss a recente descoberta do planeta Urano.

Entre suas mais de oitocentas publicações, entre livros e artigos, estão: “*Solutio Problematis ad Geometriam situs Pertinentis*”, e “*Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*”, que segundo Katz (1993) deram início aos estudos da Topologia, ramo da Matemática de

¹⁴Imagem capturada em 09/09/2008 no endereço <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Euler.html>.

grande importância para as ciências como um todo.

4.2 O anúncio da descoberta

Apesar de Euler ter estudado as obras filosóficas de Descartes, não há registros que comprovem a existência dos cálculos, ou anotações dos pensamentos, sobre a propriedade para os sólidos feitos, nesta época, por este último. Anos mais tarde, descobriu-se a existência de manuscritos, que não chegaram ao conhecimento de Euler porque Descartes não os publicou. Somente tornaram-se públicos quando Leibniz os copiou e assim, em 1860, foram publicados por Foucher de Careil¹⁵.

Então Euler, por ter realizado uma alteração revolucionária nos conceitos de vértices, arestas e faces nos sólidos limitados por faces planas, e publicando seus resultados obtidos, é considerado o primeiro a trabalhar com este resultado e, por este motivo leva o seu nome: “*Relação de Euler*”. Antes, porém, da publicação dos resultados, relatou a descoberta sobre as propriedades observadas para os sólidos em uma carta, como fazia comumente aos amigos e, neste caso, em especial a Goldbach.

(...) Um conhecimento histórico pode estar implícito nos problemas suscitados na atividade ou explícito nos textos históricos resgatados de fontes primárias (textos originais, documentos ou outros artefatos históricos). (MENDES, 2006, p.106)

Euler inicia a carta contando sobre sua determinação em encontrar a propriedade e também explicando que a idéia de encontrá-la, assim como a de concluir satisfatoriamente sua demonstração, deveria ter acontecido antes, já que a propriedade para os polígonos era conhecida.

Cita, então, as propriedades dos polígonos:

1. Em toda figura plana o número de lados é igual ao número de ângulos,

¹⁵Lakatos (1978, p.20, obs. 1).

2. A soma de todos os ângulos é igual ao número de ângulos retos os quais são quatro unidades menores que duas vezes o número de lados.¹⁶

Comentário: Podemos dar uma sugestão de investigação aos alunos.

Exercício 4.1. *O que são figuras retilíneas planas que Euler cita? Defina com suas palavras o que são figuras retilíneas planas.*

Exercício 4.2. *Verifique se as figuras a seguir representam figuras retilíneas planas. Explique o por quê de serem ou não figuras retilíneas planas.*

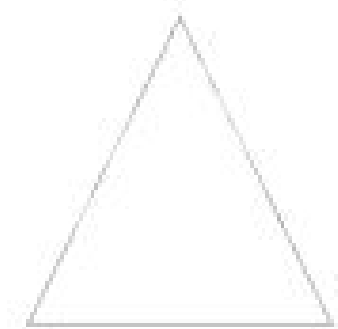


Figura 22: (a)



Figura 23: (b)

¹⁶As propriedades foram traduzidas para o português da tradução para o inglês da carta original de Euler à Goldbach disponível no site <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html>. Consulta realizada em 27/05/2009.

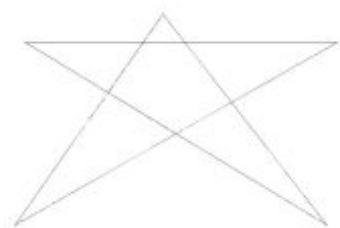


Figura 24: (c)



Figura 25: (d)



Figura 26: (e)

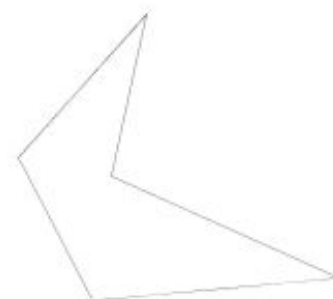


Figura 27: (f)

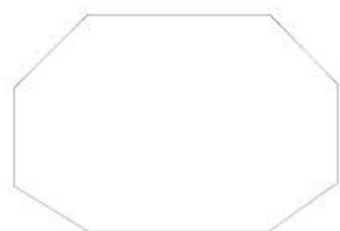


Figura 28: (g)

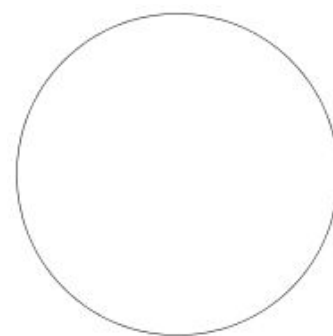


Figura 29: (h)

Exercício 4.3. *Verifique para as figuras acima, se a propriedade (1) (o número de*

lados é igual à quantidade de ângulos) se verifica. Observe que a propriedade só é válida para as figuras retilíneas planas.

Exercício 4.4. A segunda propriedade que Euler cita é

$$S = 2 \cdot n - 4$$

Como exemplo, verifiquemos para o triângulo que possui três lados. Logo, $n = 3$ e portanto

$$2 \cdot 3 - 4 = 2$$

assim, o triângulo possui dois ângulos retos. Utilize o mesmo procedimento e verifique a segunda propriedade para as figuras retilíneas planas do exercício 4.2.

Observação: No exercício dado acima, gostaríamos que os alunos chegassem as seguintes conclusões:

1. Para o triângulo temos,

$$180^\circ = 1 \cdot (2 \cdot 90^\circ) = 2 \text{ ângulos retos.}$$

2. O quadrado é formado por dois triângulos, logo

$$360^\circ = 2 \cdot (2 \cdot 90^\circ) = 4 \text{ ângulos retos.}$$

3. O pentágono possui três triângulos em seu interior, assim

$$540^\circ = 3 \cdot (2 \cdot 90^\circ) = 6 \text{ ângulos retos.}$$

4. O hexágono tem 4 triângulos,

$$720^\circ = 4 \cdot (2 \cdot 90^\circ) = 8 \text{ ângulos retos.}$$

Verificamos que o número que aparece antes do parênteses representa a quantidade de lados do polígono menos dois. Hoje, esta mesma propriedade é trabalhada

no Ensino Fundamental e revista no Ensino Médio nos referimos a ela como: a soma dos ângulos internos de um polígono convexo¹⁷ é dada por:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

onde S_i representa a soma dos ângulos internos de um polígono e n o número de lados.

Façamos a relação entre a fórmula dada por Euler, $S = 2 \cdot n - 4$ e a fórmula encontrada nos livros didáticos atuais $S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$. Pela definição de Euler

$$S = 2 \cdot n - 4$$

ângulos retos.

$$S = 2 \cdot (n - 2)$$

ângulos retos

$$S = (n - 2) \cdot 2$$

ângulos retos, mas 2 ângulos retos é igual a 180° , assim

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Exercício 4.5. *Euler viveu no século XVIII e afirma que as propriedades das figuras planas já eram conhecidas e, portanto as figuras também. Desde quando estas figuras planas são conhecidas? Faça uma pesquisa.*

4.2.1 Demonstração de Euler das propriedades das figuras retilíneas planas

Euler inicia o trabalho publicado em 1758, comentando sobre a sua observação à respeito das propriedades válidas para a Geometria Plana e seu desapontamento

¹⁷Não comentamos ainda, sobre polígonos convexos. Será assunto da seção 4.2.2.

ângulos restantes na figura será igual a $A - 1$. Os dois lados CD e DE da figura foram removidos pelo corte, mas em seu lugar um novo lado CE foi adicionado, assim o número de lados será igual a $L - 1$.

Se outro ângulo for cortado, o número de ângulos agora será igual a $A - 2$ e o número de lados iguais a $L - 2$.

Se procedermos desta forma, até que n ângulos possam ser cortados, o número de ângulos na figura restante será igual a $A - n$ e o número de lados igual a $L - n$. Quando sobrar apenas um triângulo, $A - n = 3$ e $L - n = 3$, segue que $L = A$. Ou seja, em qualquer figura retilínea o número de lados é igual ao número de ângulos.

■

Provemos a segunda propriedade, ou seja, a soma dos ângulos é igual ao número de ângulos retos que são quatro unidades inferiores que duas vezes o número de lados.

Demonstração: Seja R o número de ângulos retos de todos os ângulos propostos na figura $ABCDEFGH$. Com a remoção de ângulo D , ou seja, na remoção do triângulo CDE , os três ângulos do triângulo CDE seriam removidos dos ângulos da figura. Mas os ângulos removidos são iguais a dois ângulos retos, e a soma dos ângulos da figura restante $ABCEFGH$ será igual a $R - 2$ ângulos retos. E o número de ângulos agora será igual a $A - 1$.

Se outro ângulo for cortado, o número de ângulos será igual a $A - 2$, e sua soma será igual a $R - 4$ ângulos retos.

Removendo n ângulos o número dos ângulos na figura restante será $A - n$ e a sua soma $R - 2n$ ângulos retos.

Quando a figura restante for um triângulo, teremos $A - n = 3$, a soma dos ângulos será igual a dois ângulos retos, logo $R - 2n = 2$.

Assim $2A - 2n = 6$, e se, subtrairmos a equação anterior, então $2A - R = 4$. Em outras palavras, $R = 2A - 4 = 2L - 4$. Em qualquer polígono a soma de todos

os ângulos é igual ao número de ângulos retos, que é quatro inferior a duas vezes o número de lados. ■

4.2.2 Polígonos

Com relação a Geometria Plana, os registros mostram que as antigas civilizações Egípcia, Babilônica e Chinesa já sabiam como calcular áreas de figuras simples, como áreas de retângulos ($A = b \times h$) e triângulos ($A = \frac{B \times h}{2}$).

As medidas da área do círculo e do comprimento da circunferência, no entanto, se tornaram um problema para estas civilizações. No papiro de Rhind¹⁸, mais exatamente no problema 48, observamos a preocupação de encontrar tais medidas. Neste problema é mostrada a figura de um octógono inscrito num quadrado de lado 9. Não existe uma resolução do problema, somente uma comparação entre os cálculos $8 \times 8 = 64$ e $9 \times 9 = 81$. Mas se nos esboços tivessem inscrito um círculo no mesmo quadrado, eles poderiam ter visto que sua área era, aproximadamente, a do octógono e, assim, poderiam ter prosseguido nos estudos e encontrado a solução para o problema.

Platão que viveu por volta de 429 - 347 a.C. fundou, em 385 a.C, uma academia em Atenas, a Academia de Platão. Nesta academia eram conduzidos seminários de matemática e filosofia. Platão e seus discípulos obtiveram conquistas significativas na questão da quadratura do círculo (que consiste em construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado) e da duplicação do cubo (que consiste em construir um cubo com o dobro do volume de um cubo dado), trabalhou com questões de incomensurabilidade e impulsionou os estudos sobre a teoria das proporções.

Observamos que os polígonos já eram muito utilizados pelos matemáticos, mas não existe registro de quando surgiram. Apenas estudos de algumas civilizações

¹⁸Data de cerca de 1650 anos antes de Cristo, é o mais extenso documento existente sobre a Matemática do Antigo Egito.

registrados em papiros. No entanto, o matemático Euclides¹⁹ escreveu treze livros, intitulados *Os Elementos*. Nesta obra ele “organizou” a geometria da época e a nossa também, tanto é que hoje estudamos Geometria Euclidiana e Geometrias não Euclidianas, tornando-se, assim, a obra matemática mais importante do Mundo Grego (e do mundo em geral, perdendo somente para a Bíblia como obra mais editada e traduzida), escrita por volta de 2300 anos atrás.

Definição 4.6. *Figura retilínea plana ou polígono é toda figura fechada, desenhada em superfície plana, formada apenas por segmentos de reta.*

Exemplos:

¹⁹Não sabemos sobre a vida deste matemático, o pouco se sabe de sua vida, e o que se conhece, data de 750 anos depois de sua passagem na Terra, num comentário feito por Proclus (410 a 485 a.C.), que dizia “ Não muito mais jovem que este Hermotimus de Colophon e Philippus de Medma é Euclides, quem colocou junto aos Elementos, muitas coleções de teoremas de Eudoxus, muitas melhorias de Theaetetus, e também trouxe a demonstração incontestável de coisas as quais foram somente algo vagamente provado pelos seus antecessores. Este homem viveu no tempo do primeiro Ptolomeu. Archimedes, quem veio imediatamente depois do primeiro Ptolomeu, fez menção à Euclides: e, além do mais, eles dizem que Ptolomeu uma vez questionou-o se existia na geometria qualquer caminho mais curto que os elementos, e ele respondeu que não existia nenhum caminho para a geometria real. Ele é então mais jovem que os discípulos de Platão, mas mais velho que Eratosthenes e Archimedes; para o último foi contemporâneo com o primeiro, como Eratosthenes disse.”

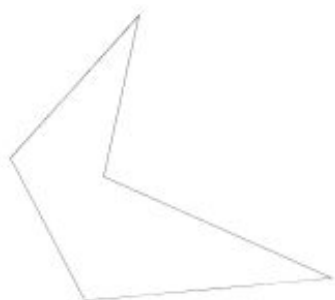


Figura 31: Polígono(a)

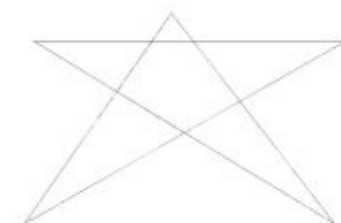


Figura 32: Polígono(b)

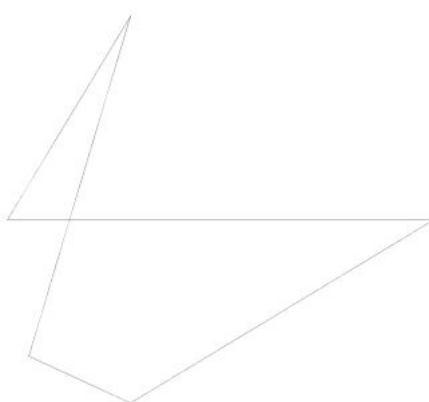


Figura 33: Polígono(c)

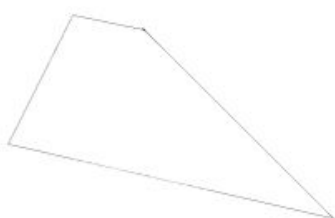


Figura 34: Polígono(d)

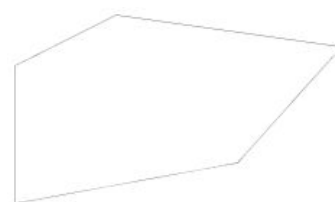


Figura 35: Polígono(e)

Observemos que as figuras acima, dadas como exemplos de polígonos, são de diferentes formas. Por este motivo são classificados em grupos que possuem as mesmas características.

- Polígonos cujos segmentos não se cruzam são denominados *Polígonos Simples*. Se possuírem segmentos que se cruzam, recebem o nome de *Polígonos não Simples*.

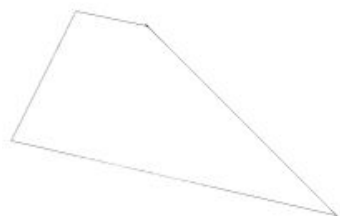


Figura 36: Polígono simples

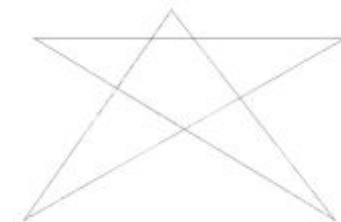


Figura 37: Polígono não simples

- São chamados de *Côncavos* os polígonos que apresentam mais de dois pontos ao passarmos uma reta por dois de seus lados. E se apenas encontrarmos dois pontos serão denominados *Polígonos Convexos*.

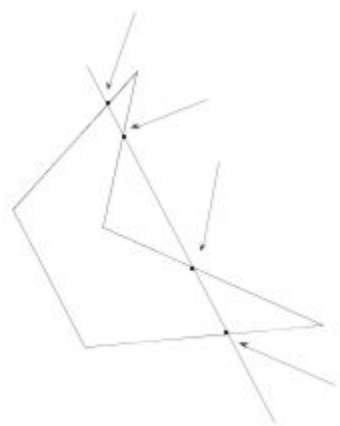


Figura 38: Polígono Côncavo

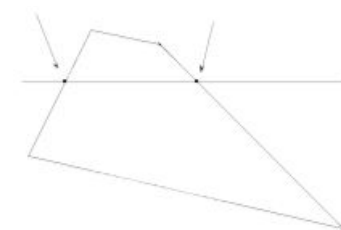


Figura 39: Polígono Convexo

- Polígonos simples, convexos, cujos lados são congruentes (possuem a mesma medida) e ângulos congruentes, são chamados de *Polígonos Regulares*. Polí-

gonos simples, convexos cujas medidas dos lados e dos ângulos não são congruentes, são denominados *Polígonos não Regulares*



Figura 40: Polígono regular

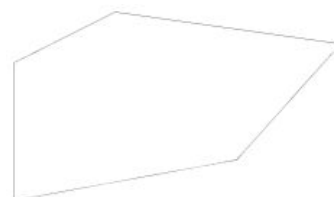


Figura 41: Polígono não regular

4.2.3 Poliedros

Voltando à carta de Euler, observamos que as suas considerações agora se voltam para os sólidos, e é aqui que está a inovação na propriedade. Euler inicia dizendo que “ Considerando que, para figuras planas, somente os lados e ângulos devem ser considerados, para o caso dos sólidos mais partes devem ser levadas em consideração, a saber:

- As faces, cujo número = H ;
- Os ângulos sólidos²⁰, cujo número = S ;
- A ligação onde duas faces vem juntas lado a lado, a qual, por falta de uma palavra melhor, chamarei “aresta”, cujo número = A ;
- Os lados de todas as faces, o número de todos somados = L ;

²⁰Ângulos sólidos são os ângulos dos sólidos, ou seja, os vértices do poliedro.

- Os ângulos planos de todas as faces, o número total = P ”.

Euler faz estas notações por considerar o trabalho com os sólidos algo novo, e realmente o é, no que diz respeito à esta propriedade, a qual está tentando provar ser verdadeira e, assim, considera elementos novos para os sólidos. É somente através destes elementos novos que foi possível determinar o caráter topológico do poliedro, e caracterizar a propriedade dos sólidos.

Euler ainda faz referência aos polígonos, pois considera somente os sólidos que são limitados por faces planas e, por este motivo, observa os lados de todas as faces, somando todos, e os ângulos planos, que são os vértices dos polígonos, o número total.

Com relação a estes cinco itens Euler conclui ao amigo Goldbach:

- É claro que $P = L$, desde que em cada face o número de ângulos, seja igual ao número de lados. Esta é a primeira propriedade dos polígonos.
- Também, $A = \frac{1}{2} \cdot P$, pois dois lados de faces diferentes devem estar juntos para formar uma aresta.
- Então o número de lados, ou de ângulos planos, de todas as faces cercando o sólido é sempre igual.

•

$$P = L \Rightarrow \begin{cases} L = 3H \text{ ou } L > 3H \\ P = 3S \text{ ou } P > 3S \end{cases}$$

Euler ainda comenta que as cinco primeiras propriedades são “óbvias”. Porém faz uma ressalva sobre as propriedades abaixo 1, 2, 3, 4, 5 e 6: “*Mas eu já não posso dar uma prova inteiramente satisfatória das seguintes proposições:*”

1. Em todo sólido limitado por faces planas, a soma do número de faces com o número de ângulos sólidos excede por dois o número de arestas, ou

$$H + S = A + 2$$

ou

$$H + S = \frac{1}{2}L + 2 = \frac{1}{2}P + 2.$$

2. É impossível que $A + 6 > 3H$ ou $A + 6 > 3S$.
3. É impossível que $H + 4 > 2S$ ou $S + 4 > 2H$.
4. Nenhum sólido pode ser formado cujas faces tenham 6 ou mais lados, nem cujos ângulos estejam unidos de seis ou mais ângulos planos.
5. A soma de todos os ângulos planos os quais ocorrem no sólido é igual para muitos ângulos retos como

$$4A - 4H.$$

6. A soma de todos os ângulos planos é igual a quatro vezes, como muitos ângulos retos, quanto há ângulos sólidos, menos oito, que é

$$P = 4S - 8$$

ângulos retos.



Figura 42: Prisma de Base Triangular

Exemplo 4.7. *Considere o prisma triangular acima, onde:*

1. O número de faces, $H = 5$;
2. O número de ângulos sólidos, $S = 6$;
3. O número de arestas ($ab, ac, bc, ad, be, cf, de, df, ef$), $A = 9$;
4. O número de lados e ângulos planos, $L = P = 18$. Este sólido é limitado por dois triângulos e três quadriláteros, então

$$L = P = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18.$$

5. Agora, de acordo com o Teorema 1:

$$H + S = A + 2$$

$$5 + 6 = 9 + 2$$

$$11 = 11$$

Além disso, a soma de todos os ângulos planos P é igual a 16 ângulos retos, pois dois triângulos possuem 4 ângulos retos e três quadriláteros, 12 ângulos retos. Assim:

$$P = 4(A - H) = 4S - 8$$

$$4(9 - 5) = 4 \cdot 6 - 8$$

$$16 = 16$$

ângulos retos.

Conclui a carta dizendo estar surpreso que tal resultado geral na geometria sólida não tenha sido previamente percebido por alguém. A seguir, sugerimos alguns exercícios que podem ser aplicados na sala de aula.

Exercício 4.8. *Construa um sólido limitado por faces planas ou como hoje denominamos, poliedro. Essas faces devem, inicialmente, ser formadas apenas por triângulos. Use a menor quantidade de triângulos possível para que o poliedro fique fechado.*

O aluno deve investigar se poderá usar, nesta atividade, qualquer triângulo e a quantidade de triângulos que ele deverá utilizar para formar o poliedro. Devemos tomar cuidado, pois os alunos tentam forçar uma construção com apenas três polígonos. Devemos lembrá-los que a face do poliedro não pode ficar deformada.

O aluno deve observar que não é qualquer tipo de triângulo que irá construir um poliedro. Devemos escolher um tipo em que as arestas tenham o mesmo tamanho e os ângulos as mesmas aberturas, isto é, devemos fazer uso dos polígonos regulares para formar o sólido. Observe também que com dois triângulos equiláteros não se consegue constituir um vértice de um poliedro, pois um ângulo sólido tem que ser constituído por pelo menos três planos. A partir daí propor novas atividades:

Exercício 4.9. *No sólido construído a partir de triângulos, verifique: o número de ângulos sólidos (vértices) S , o número de arestas A e o número de faces H . O teorema 1, $H + S = A + 2$, é válido para este sólido? Quantos ângulos retos possui?*

Exercício 4.10. *Ainda usando somente triângulos, construa outro poliedro. Identifique a quantidade de ângulos sólidos (vértices) S , de arestas A e de faces H . Podemos verificar o teorema 1? Quantos ângulos retos possui este sólido?*

Esta atividade pode ter como resultado um poliedro não regular. Os alunos devem investigar a quantidade de ângulos planos que formam cada ângulo dos poliedros construídos. Se a quantidade de ângulos planos, que formam o ângulo sólido, for igual é um poliedro regular. O contrário, é um poliedro não regular.

Exercício 4.11. *Agora tente usar o quadrado como faces que limitam o poliedro. Podemos verificar o teorema 1? Quantos ângulos retos possui este sólido?*

Exercício 4.12. *Usando o pentágono como polígono que limita o sólido, construa um poliedro. Podemos verificar o teorema 1? Quantos ângulos retos possui este sólido?*

Exercício 4.13. *Usando o hexágono, será possível construir um poliedro regular? Podemos verificar o teorema 1? Quantos ângulos retos possui este sólido?*

O 13º livro de *Os Elementos*, trata dos cinco então chamados de Poliedros de Platão, os quais, no entanto, não pertenciam à Platão. Três destas figuras são de direito natural dos Pitagóricos: o cubo, a pirâmide e o dodecaedro, enquanto o octaedro e o icosaedro são de direito de Theaetetus.

Theaetetus (que morreu por volta de 369 a.C.) foi o primeiro a escrever sobre estes dois últimos poliedros, o que não exclui a possibilidade de que outros matemáticos da época tenham escrito sobre o dodecaedro. No 13º livro de Euclides existe um estudo dedicado a estes sólidos, inclusive com as construções deles, usando somente régua e compasso, e uma demonstração de que realmente são apenas cinco os poliedros regulares.

No ano de 1758, Euler publica um novo trabalho, intitulado “*Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*” no qual descreve todas as onze propriedades encontradas e citadas na carta e dá o rigor matemático para a sua descoberta, como veremos a seguir.

4.2.4 Demonstração de Euler sobre a propriedade dos sólidos limitados por faces planas

Euler inicia sua demonstração assim como inicia sua carta ao amigo Goldbach, relatando as propriedades dos polígonos: “ Assim como as figuras planas, cuja natureza são investigadas na Geometria, apresentam algumas propriedades gerais bem conhecidas, tais como *o número de ângulos é igual ao número de lados* e que *a soma dos ângulos é igual ao número de ângulos retos*, os quais são quatro unidades

inferiores a duas vezes o número de lados, então, recentemente, tenho seguido os princípios de uma Geometria Sólida do mesmo tipo, incluindo propriedades semelhantes aos sólidos limitados por faces planas.”

No entanto, afirma que as propriedades gerais dos sólidos, que naquela época ainda careciam de prova, dependiam de uma propriedade que, se fosse possível demonstrá-la, então todos os princípios da Geometria Sólida²¹ que Euler propôs seria igualmente forte às da Geometria. A propriedade que Euler trabalha é:

“Em todo sólido limitado por faces planas, o número de ângulos sólidos, juntamente com o número de faces, excede o número de arestas por dois.”

A partir desta propriedade, afirma que outras, igualmente notáveis e comuns para todos os sólidos deste tipo (limitados por faces planas), se derivam, tais como:

Em todo sólido limitado por faces planas, a soma de todos os ângulos planos que formam o ângulo sólido é igual ao número de ângulos retos que é oito unidades inferior a quatro vezes o número de ângulos sólidos.

Comenta que as duas propriedades estão interligadas tal que, se uma for provada, então a outra também será. Também relata que chegou à provas semelhantes às usualmente utilizadas para as proposições análogas da Geometria. Começou com a propriedade relativa à soma dos ângulos de qualquer figura retilínea. Na Geometria, qualquer figura retilínea, em última análise, pode ser reduzida a um triângulo por sucessivas divisões de ângulos. Da mesma forma, dado um sólido qualquer delimitado por faces planas, observou que os ângulos sólidos podem ser continuamente divididos até que, finalmente, sobre apenas uma pirâmide triangular. Lembrando que uma pirâmide triangular é a figura mais simples entre os sólidos.

Percebeu que, com base em suas propriedades conhecidas, poderia generalizar para as propriedades de todos os sólidos. Em qualquer pirâmide triangular, o número de ângulos sólidos (S) são quatro, o número de faces (H) são quatro e o número de

²¹Euler chamou de Geometria Sólida a geometria que tratava dos sólidos, e chamou apenas de Geometria a que trata de figuras planas.

arestas (A) são seis, cujo dobro são doze, o que dá o número de ângulos planos, cuja soma é igual a oito ângulos retos.

Assim, da mesma maneira em que obteve, a partir dos cortes de figuras retilíneas, as duas propriedades fundamentais destas figuras, Euler inicia uma investigação para os sólidos. Comenta que por sucessivos cortes de ângulos sólidos, reduzirá todos os sólidos limitados por faces planas à pirâmides triangulares. E, desta forma, concluirá sua demonstração, como para os polígonos.

Proposição 4.14. *Dado um sólido fechado em todos os lados por faces planas, cortando um ângulo sólido do sólido, o número de ângulos sólidos no sólido resultante será menor por uma unidade.*

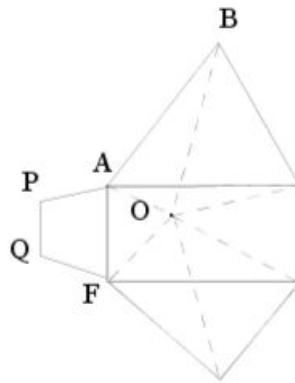


Figura 43: Sólido

Demonstração:

Seja O (Fig. 43) o ângulo sólido à ser cortado, onde as arestas AO , BO , CO , DO , EO , FO encontram-se de tal forma que O é formado pelos ângulos planos AOB , BOC , COD , DOE , EOF , FOA , e os pontos A , B , C , D , E , F que representam os ângulos sólidos da base do corpo que estão conectados por O através das linhas retas AO , BO , CO , DO , EO , FO . Uma parte deve ser separada do sólido, de modo que

o ângulo sólido O seja completamente removido, sem, no entanto, formar um novo ângulo sólido. Assim, o primeiro corte deve ser feito através de um ângulo da base.

Iniciemos por cortar o ângulo B , pelo plano ABC . Façamos um corte que atinja os ângulos A e C , depois, passando por O ao longo de AOC . Desta forma a pirâmide triangular $OABC$ será cortada do sólido. Fazendo o corte em AC , direcionado para o ângulo F através do plano AFC , cortemos o ângulo O corte ao longo de FOC tal que a pirâmide triangular $OACF$ seja separada. Em seguida, cortemos o sólido ao longo do plano CDF e outro corte de O à DF , retiraremos a pirâmide triangular $OCDF$. Finalmente, façamos um corte junto à DEF resultando na pirâmide triangular $ODEF$. E assim o ângulo sólido O terá sido completamente cortado. O restante dos ângulos sólidos permanecerão e nenhum novo ângulo sólido terá sido formado pelos cortes, o número de ângulos sólidos no sólido resultante será diminuído por um. ■

Em seguida, Euler enuncia seis corolários, que são consequências diretas da proposição provada, na sala de aula podem ser incorporados como forma de testar possíveis conjecturas.

Corolário 4.15. *Se o sólido for uma pirâmide triangular será completamente removida por um corte deste tipo de modo que nada será deixado. Mas, porque demos início a esse corte, a fim de reduzir o sólido para uma pirâmide triangular, e se já é uma pirâmide deste tipo não haverá, claramente, necessidade para o corte.*

Corolário 4.16. *Se um ângulo sólido O , for cortado a partir do sólido que é formado por apenas três ângulos planos, ou seja, se apenas três arestas se juntam nele, então ele será separado do sólido por um corte único e desta forma uma única pirâmide triangular será removida.*

Corolário 4.17. *Se o ângulo sólido O for formado por quatro ângulos planos e os mesmos número de arestas se juntam nele, então duas pirâmides triangulares devem*

ser cortadas, a fim de removê-lo. Isto pode ser feito de duas formas (Fig. 44): duas pirâmides serão cortadas, $OABC$ e $OACD$ ou $OABD$ e $OBCD$. E se os pontos A , B , C , D não estão no mesmo plano os sólidos resultantes terão uma forma diferente.

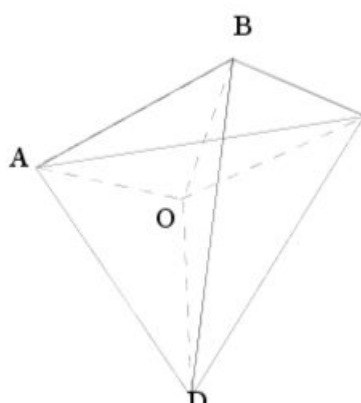


Figura 44: Corte de sólidos.

Corolário 4.18. Se o ângulo sólido for formado por cinco ângulos planos e as linhas retas que se encontram, são estendidas para cinco outros ângulos sólidos, então o ângulo O será cortado, separando três pirâmides triangulares. Isto pode ser realizado de cinco maneiras diferentes, que também dão origem a diferentes sólidos, salvo os cinco ângulos sólidos da base que estão situados no mesmo plano.

Corolário 4.19. O corte de um ângulo sólido pode ser realizado em qualquer ângulo do sólido proposto e, a menos que apenas três ângulos planos juntos formem o ângulo sólido, o corte pode ser realizado de várias maneiras. Portanto, é evidente que, a menos que já seja uma pirâmide triangular, qualquer corpo sólido pode ser desfalcado de um ângulo sólido de muitas maneiras.

Corolário 4.20. *Assim, não importa quantos ângulos sólidos o corpo proposto possui, desde que o número seja diminuído continuamente por um e desta forma, quando apenas quatro ângulos sólidos permanecer, terá sido reduzida a uma pirâmide triangular, porque cada parte que foi removida é uma pirâmide triangular. Por este método, o sólido inteiro será dividido em pirâmides triangulares.*

Estudo

Se o número de ângulos sólidos no corpo proposto for igual a S , então, depois que um deles for cortado da maneira indicada, o número de ângulos sólidos no corpo resultante será $S - 1$.

Se o sólido proposto for uma pirâmide triangular (Fig. 45), então quando um ângulo for cortado toda pirâmide será removida ao mesmo tempo e nada permanecerá. Pois, quando um corte é feito ao longo do plano ABC , que constitui a base da pirâmide $OABC$, a pirâmide inteira é cortada ao mesmo tempo. Mas neste caso, podemos deixar a base ABC para trás. Mesmo que seja um plano ou uma figura dotada de nenhuma espessura, pode ser considerada como a imagem de um sólido composto por apenas *três ângulos*, e que deve ser pensado como tendo *duas faces e três arestas*.

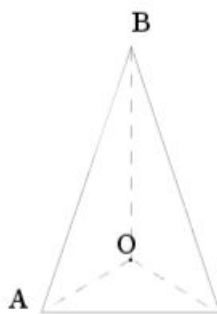


Figura 45: Pirâmide de base triangular.

Assim, teremos um prisma triangular sem altura em que as faces laterais diminuem a nada e a base superior, com seus ângulos, cai para a base inferior. Logo,

ambas as propriedades acima mencionadas dos sólidos permanecem em vigor.

Neste caso, o número de ângulos sólidos seria igual a três ($S = 3$), o número de faces (considerando a face de dentro do polígono e a de fora) igual a dois ($H = 2$), e o número de arestas igual a três ($A = 3$), é claro que $S + H = A + 2$.

Além disso, a soma dos ângulos planos contidos em cada face é igual a quatro ângulos retos, cujo número é igual a $4S - 8$. A mesma coisa acontece em todas as pirâmides.

Se um polígono de n lados for a imagem de um sólido, em que o número de ângulos sólidos fosse $S = n$, o número de faces $H = 2$, e o número de arestas $A = n$, então $S + H = A + 2$. Além disso, como cada face é um polígono de n lados, os ângulos serão iguais a

$$4n - 8 = 4S - 8$$

ângulos retos.

Definição 4.21. *Faces são as regiões que ficam limitadas pelas arestas.*

Exemplo 4.22. *O grafo de Königsberg possui 4 ângulos sólidos (vértices), 7 arestas e 5 faces. O que satisfaz*

$$S + H = A + 2$$

$$4 + 5 = 7 + 2$$

e também satisfaz

$$4 \cdot S - 8$$

$$4 \cdot 5 - 8 = 12$$

ângulos retos.

Exercício 4.23. *Complete a tabela a seguir usando as figuras planas, abaixo:*

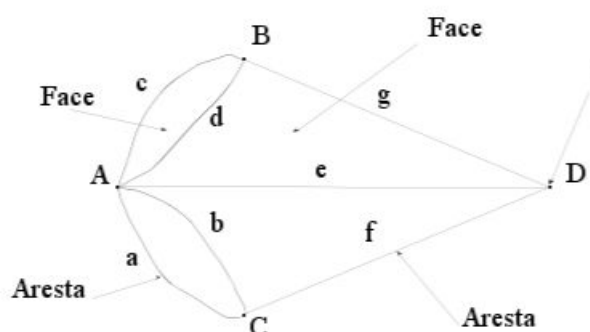


Figura 46

Polígono	Nº de Vértices (<i>S</i>)	Nº faces (<i>H</i>)	Nº arestas (<i>A</i>)	$S + H$	$A + 2$
<i>Triângulo</i>					
<i>Quadrado</i>					
<i>Pentágono</i>					
<i>Hexágono</i>					
<i>Heptágono</i>					

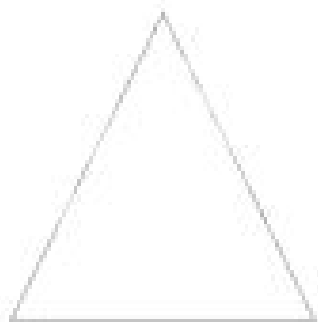


Figura 47: Triângulo

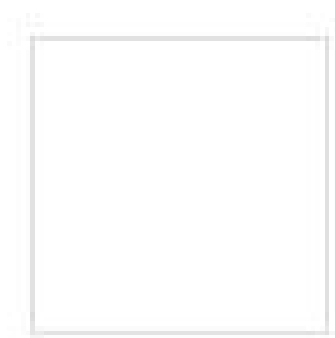


Figura 48: Quadrado



Figura 49: Pentágono

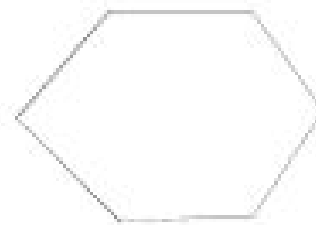


Figura 50: Hexágono

Se pensarmos em reduzir todos os sólidos à pirâmides triangulares, poderemos concluir que:

- Se os sólidos já forem uma pirâmide deste tipo, não haveria qualquer necessidade de remoção de qualquer ângulo.
- Se for uma pirâmide com uma base de muitos lados, então será conveniente não cortar o vértice do ângulo, mas um dos ângulos situado na base, que é formado por apenas três ângulos planos. Desta forma, após o corte, uma pirâmide permanecerá sempre, cujo número de ângulos sólidos será uma unidade menor.
- Em geral, para qualquer sólido proposto, ele sempre será adequado para o corte, começando pelo ângulo sólido que é formado de tantos ângulos planos quanto é possível, para que alguma parcela do sólido permaneça, até que chega na forma de uma pirâmide triangular.

Proposição 4.24. *Se qualquer ângulo sólido for removido de um sólido dado, da maneira explicada anteriormente, e se o número de ângulos sólidos for diminuído por um, determinar o número de faces e o número de arestas nos sólidos restantes, além de determinar o montante de todos os ângulos planos.*

Demonstração: Seja o número de ângulos sólidos iguais a S , o número de faces iguais a H , o número de arestas iguais a A e a soma de todos os ângulos planos igual a R ângulos retos.

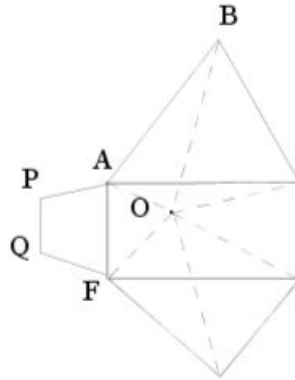


Figura 51: Sólido proposto por Euler.

Cortemos o ângulo sólido O (Fig. 51) tal que, o número de ângulos sólidos no sólido restante seja igual a $S - 1$. Com o corte do ângulo O , todos os ângulos contidos nos triângulos AOB , BOC , COD , DOE , EOF , e FOA serão subtraídos do cálculo dos ângulos planos, já que estes triângulos foram separados da superfície do sólido. Seja n o número desses triângulos. A soma dos ângulos subtraídos será $2n$ ângulos retos. Mas, quando esses triângulos forem removidos, as faces do sólido passarão a serem limitadas pelos triângulos ABC , ACF , CFD , e DFE cujo número será menor por duas unidades e, assim, é $n - 2$.

Os ângulos desses triângulos, cuja soma é $2n - 4$ ângulos retos, e a soma dos ângulos planos R , serão diminuídas por $2n$ ângulos retos, pois foram retirados dois triângulos, e então, serão aumentados por $2n - 4$ ângulos retos já que retirando o ângulo sólido passamos a ter uma figura plana. Assim, a diminuição total será de 4 ângulos retos.

Logo, no sólido resultante, a soma de todos os ângulos planos será igual a $R - 4$

ângulos retos. Desta forma, qualquer que seja o ângulo sólido cortado, a soma de todos os ângulos planos será diminuído por 4 ângulos retos.

Provemos a segunda parte da proposição.

Se todas as faces que estão juntas em O forem triangulares, cortando o ângulo O significa que todas essas faces serão removidas. Se o número dessas faces for n , o número de faces do sólido H será diminuída por n . Mas, no lugar dessas faces novas faces triangulares aparecerão na superfície do sólido novos triângulos ABC , ACF , CFD e DFE , cujo número será $n - 2$. Assim, o número de faces, que anteriormente era H , será agora

$$H - n + (n - 2) = H - 2.$$

Mas, se acontecer de dois ou mais destes triângulos ficarem situados no mesmo plano, como os triângulos ABC e ACF exibirão não duas faces triangulares, mas uma única face quadrilátera, tal que o número de faces será $H - 3$. Se os triângulos de duas faces caírem no mesmo plano μ vezes, o número de faces igualará $H - 2 - \mu$.

Mas, se nem todas as faces que se reúnem em O forem triangulares e uma, por exemplo, $AOFQP$, for formada por vários lados, no corte do triângulo AOF a face não será totalmente removida, mas a parte restante $AFQP$ ainda entrará na contagem de faces. Assim, o número de faces será $H - 2 - \mu + 1$. Se entre as faces que se reúnem em O não forem encontrados em μ faces não triangulares, o número de faces restantes será $H - 2 - \mu + v$.

Quanto ao número de arestas que permanecerão após o corte ao longo do ângulo O , suponhamos para o início da nossa investigação, que todos as faces que estão reunidas em O sejam triangulares. Seja o número de arestas OA , OB , OC , OD , etc., igual a n , que será subtraído do número de arestas do sólido. Mas em seu lugar surgirão novas arestas AC , CF , FD , cujo número será igual a $n - 3$. Assim, o número de arestas do sólido restante será

$$A - n + (n - 3) = A - 3,$$

Mas, se duas delas, ABC e ACF , estiverem situadas no mesmo plano e constituem uma única face, a aresta AC desaparecerá e o número de arestas será $A - 3 - 1$. Se acontecer que os triângulos de duas tais faces caírem sobre o mesmo plano μ vezes, como já descrito anteriormente, o número de arestas será $A - 3 - \mu$. Além do mais, se qualquer das faces que formam o ângulo O não for triangular, por exemplo a face $AOFQP$, com a separação do triângulo AOF uma nova aresta aparecerá, AF , e o número de arestas, neste caso, será aumentado por um. Mas se entre as faces reunidas em O , ν faces são encontradas sendo não triangulares, o número das arestas do sólido proposto após a remoção do ângulo O será $A - 3 - \mu + \nu$. ■

Corolário 4.25. *Assim, se num sólido limitado por faces planas um ângulo sólido for cortado, o número de ângulos sólidos restantes serão iguais a $S - 1$, enquanto que anteriormente era igual a S , a soma de todos os ângulos do plano será diminuída por quatro ângulos retos. Em outras palavras, inicialmente tínhamos R ângulos retos, depois do corte teremos $R - 4$ ângulos retos.*

Corolário 4.26. *O número de faces, que anteriormente era igual a H , após o corte do ângulo O ficará igual a $H - 2 - \mu + \nu$, é claramente possível que o número de faces deixadas de fora viria a ser maior. Isto acontecerá se $\nu > 2 + \mu$ onde μ e ν tem valores determinados na solução.*

Corolário 4.27. *É claro que a mesma coisa pode acontecer no número de arestas, que antes da remoção do ângulo O era igual a A , agora será encontrada a igualdade $A - 3 - \mu + \nu$. Esse número é maior do que o total se $\nu > \mu + 3$. Portanto, neste caso, o número de faces aumenta ainda mais.*

Corolário 4.28. *Desde que, na expressão $H - 2 - \mu + \nu$ e $A - 3 - \mu + \nu$, as letras μ e ν significam a mesma coisa, é evidente que a diminuição no número de arestas A é maior do que por uma diminuição do número de faces. Assim, após o corte ao*

longo de um ângulo sólido, se o número de faces torna-se igual a $H - \alpha$, o número de arestas irá tornar-se igual a $A - \alpha - 1$.

Corolário 4.29. *Portanto, conclui-se que a diferença entre o número de faces e o número de arestas, que no início era igual a $A - H$, agora, após a remoção de um ângulo sólido será igual a $A - H - 1$. Claro que, de qualquer modo que o sólido resultante for composto, a diferença sempre se tornará menor a um, através do cálculo das variáveis μ e ν .*

Teorema 4.30. *Em todo sólido limitado por faces planas, a soma de todos os ângulos planos é igual ao número de ângulos retos que é quatro vezes o número de ângulos sólidos menos oito; isto é, se o número de ângulos sólidos for igual a S , o somatório de todos os ângulos planos será igual a $4S - 8$ ângulos retos.*

Demonstração: Consideremos um sólido qualquer. Seja o número de ângulos sólidos, deste sólido, igual a S , e a soma de todos os ângulos planos igual a R ângulos retos. Assim, devemos provar que $R = 4S - 8$.

Utilizando o método de cortes, façamos um único ângulo sólido ser separado do sólido, de modo que o número de ângulos sólidos seja igual a $S - 1$, e a soma dos ângulos planos igual a $R - 4$ ângulos retos.

Se um ângulo sólido for novamente cortado, o número restante destes será $S - 2$, e a soma dos ângulos planos igual a $R - 8$.

Ao continuar neste caminho, teremos:

Número de ângulos sólidos	Soma de todos os ângulos planos
S	R
$S - 1$	$R - 4$
$S - 2$	$R - 8$
$S - 3$	$R - 12$
.	.
.	.
.	.
$S - n$	$R - 4n$

Ao chegarmos a $S - n$ ângulos sólidos, a soma dos ângulos planos será igual a $R - 4n$ ângulos retos. No entanto, quando finalmente chegarmos, a quatro ângulos sólidos, caso em que o sólido vai assumir a forma de uma pirâmide triangular, a soma de todos os ângulos planos será igual a 8 ângulos retos. Ou seja, se $S - n = 4$, então $R - 4n = 8$, ou $R = 4n + 8$. Assim, $n = S - 4$, e obtemos

$$R = 4S - 16 + 8 = 4S - 8.$$

Então, em qualquer sólido a soma dos ângulos planos será igual ao número de ângulos retos, que é quatro vezes o número de ângulos sólidos menos oito. ■

Euler assume que um segundo teorema depende deste primeiro. Portanto como este primeiro está provado, o outro também está. E enuncia o teorema:

Teorema 4.31. *Em todo sólido limitado por faces planas, o número de faces junto com o número de ângulos sólidos excede o número de arestas por dois.*

Demonstração: Consideremos um sólido qualquer. Logo:

- Número de ângulos sólidos = S ,
- Número de faces = H ,

- Número de arestas = A .

Como vimos anteriormente, cortando-se um ângulo sólido, o número S será reduzido por 1, ou seja, teremos $S - 1$ ângulos sólidos, então a diferença entre o número de arestas e o número de faces será igual a $A - H - 1$. Continuando este processo:

Número de ângulos sólidos	Excedente do número de arestas
S	$A - H$
$S - 1$	$A - H - 1$
$S - 2$	$A - H - 2$
$S - 3$	$A - H - 3$
.	.
.	.
.	.
$S - n$	$A - H - n$

Desta forma chegaremos a uma pirâmide triangular em que o número de ângulos sólidos será igual a 4, o número de faces será igual a 4, e o número de arestas será igual a 6, de modo que o excedente do número de arestas será igual a dois. É evidente que, se $S - n = 4$, então $A - H - n = 2$. Do que segue que $n = S - 4$, e portanto $n = A - H - 2$. Assim,

$$S - 4 = A - H - 2$$

ou,

$$H + S = A + 2.$$

Disto resulta que, para cada sólido limitado por faces planas, o número de faces H , juntamente com o número de ângulos sólidos S excede o número de arestas A , por dois. ■

Apesar de ser uma demonstração engenhosa e curiosa, esta não é considerada uma prova satisfatória para a propriedade de Euler. Usa um método que conduz à

resposta, ou seja, utiliza a intuição para chegar que $A - H - n$ é o número de arestas após sucessivos cortes até que se chega a uma pirâmide triangular. Mas será que para todo sólido limitado por faces planas conseguiremos fazer cortes, até chegarmos a uma pirâmide triangular? Desta forma, outros matemáticos, publicaram artigos, nos quais provam ou fazem novas conjecturas a respeito da “propriedade geral dos sólidos limitados por faces planas”. Vamos acompanhar os artigos de Cauchy e Lhuillier que trabalharam com esta questão.

4.3 Cauchy e suas investigações sobre a Propriedade de Euler

4.3.1 O matemático Cauchy

Augustin - Louis Cauchy, nasceu em 21 de Agosto de 1789 em Paris, França. Morreu em 22 de Maio de 1857 na cidade de Sceaux (próximo a Paris), França. Filho mais velho de Louis-François Cauchy e Marie-Madeleine Desestre, recebeu a educação elementar de seu pai, um funcionário de cargo elevado no parlamento de Normandy. Aos quinze anos completou seus estudos clássicos na École Centrale Du Panthéon. Em 1805, então com dezesseis anos, foi admitido na École Polytechnique e, dois anos depois, foi estudar na École des Ponts et Chaussées, formando-se, assim, em engenharia. Em 1810 foi para o porto de Cherbourg, onde Napoleão tinha iniciado a construção de uma base naval. Nesta ida para Cherbourg, Cauchy carregou consigo algumas obras matemáticas, tais como *Mécanique Céleste* de Laplace, *Traité des fonctions analytiques* de Lagrange e *Imitatio* de Vergil e Thomas. Retornou a Paris em 1813.

Sua carreira matemática iniciou em 1811 quando resolveu o problema que Lagrange havia dado a ele: os ângulos de um poliedro convexo poderiam ser determinados por suas faces? Em 1812 resolveu o problema de Fermat, relativo aos números poligonais. Também provou um teorema que, mais tarde, daria início a chamada “Teoria de Galois”. Em 1814 enviou à Academia da França um tratado, em que

definia a integral, que veio a ser a base da teoria das funções complexas.

Em 1818 casou-se com Alöise de Bure, com quem teve duas filhas. Antes, em 1815, Cauchy já tinha se tornado membro da Academia de Ciências como professor adjunto e depois, em 1816 veio a ser professor da École Polytechnique. Seus textos escritos para lecionar tornaram-se famosos e então, em 1830, tornou-se professor na Faculté des Sciences e do Collège de France.

4.3.2 O trabalho de Cauchy: “ Recherches Sur Les Polyèdres”

Destacamos o artigo “*Recherches Sur Les Polyèdres-Premier Mèmoire*” publicado no Journal de l’École Polytechnique 9 capítulo 16, 68-86, no ano de 1813, em que Cauchy trata do problema de Euler. A demonstração de Cauchy sobre a propriedade de Euler é muito engenhosa e é considerada como a melhor demonstração publicada sobre os sólidos limitados por faces planas. Daremos destaque para esta demonstração.

Cauchy inicia seu artigo lembrando que Euler foi o primeiro a determinar, nas anotações de Petersburgo em 1758, a relação entre os diferentes elementos que formam a superfície de um poliedro; e que Legendre, em seu “*Éléments de Géométrie*”, provou o teorema de Euler numa forma mais simples de considerar polígonos esféricos. Cauchy também relata que foi induzido por alguns pesquisadores à fazer uma nova prova do teorema, o que o levou a um caso mais geral do que aquele de Euler.

Teorema 4.32. *Se decompormos um poliedro em tantos outros, de forma a obter novos vértices em seu interior. Chamaremos de P o número de poliedros novos assim formados, por S o número total de vértices, incluindo os do poliedro original, o número total de faces por F , e o número total de arestas por A então:*

$$S + F = A + P + 1 \quad (1)$$

que representa a soma do número de vértices com o número de faces excedendo por

uma unidade a soma do número de arestas com o número do poliedro.

Cauchy comenta que é fácil ver que o teorema de Euler é um caso especial do teorema acima; basta, para isso, supormos que todo poliedro possa ser reduzido a um único, e então teremos

$$P = 1$$

e a equação (1) torna-se:

$$S + F = A + 2 \quad (2)$$

Além disso, deduz da equação (1) um segundo teorema relativo à geometria plana:

Teorema 4.33. *Supondo que todo poliedro pode ser reduzido a um único, destruímos neste último, a face que forma a base e projetando no plano todos os outros vértices, obtemos uma figura plana composta de vários polígonos fechados em um dado contorno. Seja F o número destes polígonos, S o número de seus vértices, e A o número de lados, obtemos a relação entre estes três números fazendo $P = 0$ na fórmula geral, e então temos:*

$$S + F = A + 1 \quad (3)$$

A partir disto concluímos que a soma do número de polígonos e o número de vértices excede por uma unidade o número de linhas retas, que formam os lados destes polígonos. Este último teorema é equivalente na geometria plana, do teorema geral da geometria de poliedros.

Comentário: Poderíamos fazer uso do teorema na sala de aula. Para isto propomos algumas investigações nos poliedros regulares.

Exemplo 4.34. *Seja o triângulo o contorno da figura dada. Dado o ponto O em seu interior ligue-o aos vértices A , B e C por segmentos de reta.*

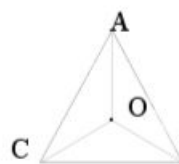


Figura 52: Contorno triangular.

Então $S = 4$, (A, O, B, C)

$F = 3$, (AOC, AOB, BOC)

$A = 6$, (AC, AB, BC, OC, OB, OA) .

Logo,

$$S + F = A + 1$$

$$4 + 3 = 6 + 1$$

o que verifica o teorema.

Exercício 4.35. Tome o quadrado como sendo o contorno de um poliedro. Verifique se teorema proposto é válido para este poliedro, ou seja, que $F + S = A + 1$.

Exercício 4.36. Tome o octógono como sendo o contorno de um poliedro. Verifique se teorema proposto é válido para este poliedro, ou seja, que $F + S = A + 1$.

Exercício 4.37. Tome o hexágono como sendo o contorno de um poliedro. Verifique se teorema proposto é válido para este poliedro, ou seja, que $F + S = A + 1$.

Exercício 4.38. Observe o que acontece com os números F e S nos exercícios resolvidos. Anote suas conclusões.

Exercício 4.39. O que aconteceu, em cada exercício, com a quantidade de lados do contorno e o número de arestas?

Cauchy faz um comentário sobre a demonstração do teorema proposto. Diz que poderíamos provar o teorema geral contido na equação (1) imediatamente e

deduzirmos dele, como corolários, os outros dois teoremas. Mas, para ficar mais clara a demonstração, inicia pelo último teorema, o que contém a equação (3).

Demonstração: Suponhamos que o contorno seja dado por um polígono de n lados, e que tomemos um ponto em seu interior, o qual ligamos aos n vértices do polígono através de linhas retas. Os n triângulos formados por estas ligações tornam o número de vértices igual a $S = n + 1$, e o número de lados igual a $2 \cdot n$; então $2 \cdot n$ aumentado por uma unidade é igual a soma de n e $n + 1$, o qual verifica o teorema.

Agora vamos passar para o caso geral. Supondo que o número F de polígonos seja limitado num contorno dado, seja S o número de vértices destes polígonos e A o número de linhas retas que formam seus lados. Decompondo cada polígono em triângulos, ligamos cada um de seus vértices a um vértice não adjacente pela diagonal. Se n é o número de diagonais desenhadas nos diferentes polígonos, $F + n$ será o número de triângulos resultantes na decomposição dos polígonos e $A + n$ será o número de lados destes triângulos. O número de seus vértices será o mesmo que o número de vértices do polígono, que é, S .

Agora, supondo remover os triângulos em volta, de tal forma a sobrar somente um. Começamos com aqueles adicionados ao contorno externo e, depois, removendo somente aqueles que tenham um ou dois lados ao longo daquele contorno. Seja h' o número de triângulos que possuem um lado em comum com o contorno externo, no momento eles serão removidos, e h'' o número de triângulos que possuem dois lados em comum com aquele contorno. A destruição de cada triângulo acarretará, no primeiro caso, a perda de um lado; e no segundo caso, a perda de dois lados e um vértice. Segue que, quando todos os triângulos exceto um tiverem sido destruídos, o número de triângulos destruídos será:

$$h' + h''$$

o número de lados removidos será

$$h' + 2h''$$

e o número de vértices removidos será

$$h''.$$

O número de triângulos restantes será então

$$F + n - (h' + h'') = 1 \quad (1)$$

o número de lados restantes será

$$A + n - (h' + 2h'') = 3 \quad (2)$$

e o número de vértices restantes será

$$S - h'' = 3 \quad (3).$$

Se adicionarmos à primeira equação a terceira e subtraímos a segunda, teremos

$$S + F - A = 1$$

ou

$$S + F = A + 1$$

o qual está demonstrado. ■

Cauchy não usa a intuição, mostra um caminho diferente para a demonstração, o caráter topológico da propriedade. Ao retirar a base dos poliedros e “esticá-los” notamos que os vértices, as aresta e as faces continuam a ser o que eram antes da deformação. E essa idéia é que é considerada importante na Matemática. As demonstrações vistas neste trabalho implicam, como Lakatos diz (1978, p.23), numa “experiência mental”. É neste sentido que propomos a leitura e sugerimos algumas atividades, a fim de que os alunos testem o que está escrito, conjecturem e investiguem sobre o assunto.

Observe que as provas de Cauchy e Euler estão baseadas nas propriedades de polígonos e que os poliedros usados por eles, para testarem seus teoremas, são os denominados poliedros regulares, embora não esteja explícita esta hipótese. Vejamos o que o matemático Lhuilier pode acrescentar.

4.4 Lhuilier e sua contribuição

4.4.1 Um pouco da vida de Lhuilier

Simon Antoine Jean Lhuilier nasceu em Genebra, Suíça, em 24 de Abril de 1750. Desde muito jovem demonstrava interesse pela matemática e, na escola secundária, obteve um brilhante desempenho. Teve aulas com um aluno formado por Leonhard Euler, Louis Bertrand, na Academia Calvin. Nesta mesma época frequentou um curso de Física ministrado por Georges-Louis Le Sage.

Pela influência de Le Sage, Lhuilier escreveu um texto sobre Física. Este texto foi muito elogiado pelo rei da Polônia, que convidou-o para ser tutor de seu filho. Lhuilier aceitou o convite e permaneceu na Polônia de 1777 à 1788. Neste período escreveu vários artigos, todos publicados pela Academia de Berlim. Em 1795 foi convidado à lecionar na Academia de Genebra. Neste mesmo ano, casou-se com Marie Cartier com quem teve dois filhos: um menino e uma menina. Entre 1810 e 1813, enquanto ocupava um cargo de alta reputação na Academia de Genebra, tornou-se editor do *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, onde publicou o trabalho sobre a fórmula poliedral de Euler, apontando algumas exceções para tal fórmula, o que contribuiu muito para o desenvolvimento da Topologia. Morreu em 28 de março de 1840 em Genebra, Suíça.²²

²²Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from the Dictionary of Scientific Biography. (1991). Também realizada em 03/06/2009, no endereço: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lhuilier.html>.

4.4.2 Mèmoire Sur La Polyédrométrie: Anotações sobre as medidas de um poliedro.

Em 1812/1813 Simon Antoine Jean Lhuillier (1750-1840) também discute a questão levantada e demonstrada não satisfatoriamente por Euler, também trabalhada por Cauchy, no Annales de Mathématiques 3, 169-189, com o artigo “ *Mémoire Sur La Polyédrométrie*”. Lhuillier comenta sobre as exceções ao teorema de Euler. Inicia propondo um “ teorema”, embora não use este termo para expressar a idéia a ser verificada e provada:

Teorema 4.40. *Se num poliedro todas as faces tem o mesmo número f de lados e todos os ângulos sólidos tenham o mesmo número S de arestas, então para determinar A , F e S temos as três equações:*

$$fF = 2A \quad (1)$$

$$sS = 2A \quad (2)$$

$$S + F = A + 2 \quad (3)$$

Se f e s , F e S , forem permutados, estas equações permanecem as mesmas, e concluímos que os poliedros deste tipo são recíprocos aos pares; então, nos dois membros dos pares, o número de arestas é o mesmo, e o número de vértices de cada um é igual ao número de faces do outro; assim um se inscreve ou circunscreve-se no outro. Destas equações obtemos:

$$A = \frac{2fs}{2(f+s) - fs} \quad (4)$$

$$F = \frac{4s}{2(f+s) - fs} \quad (5)$$

$$S = \frac{4f}{2(f+s) - fs} \quad (6)$$

A exigência de que f, s, F, S, A sejam inteiros positivos maiores que 2, restringe as soluções das equações como segue:

$$f = 3, 3, 4, 3, 5, 3, 6, 4,$$

$$s = 3, 4, 3, 5, 3, 6, 3, 4,$$

$$F = 4, 8, 6, 20, 12, \infty, \infty, \infty$$

$$S = 4, 6, 8, 12, 20, \infty, \infty, \infty$$

$$A = 6, 12, 12, 30, 30, \infty, \infty, \infty$$

Comentário: Lhuillier dá a definição de poliedros regulares, citando as propriedades destes poliedros pelas quais são divididos, embora não use este termo. É a partir deste matemático que a hipótese de Euler é então reformulada.

Exercício 4.41. *Sabendo que as equações (1) e (2) são verdadeiras, e utilizando a equação (3), verifique as equações (4), (5) e (6).*

Exercício 4.42. *Teste as combinações sugeridas por Lhuillier, e verifique se realmente serão possíveis somente as combinações propostas por ele.*

Lhuillier afirma que existem apenas cinco sólidos regulares, ou seja, somente cinco poliedros que possuem as características:

- Todas as faces possui o mesmo número de lados,
- Todos os ângulos sólidos possuem o mesmo número de arestas.

Observa também que a esfera pode ser considerada como um poliedro regular, com um número infinito de faces infinitamente pequenas, que podem estar ligadas por triângulos seis a seis, ou por hexágonos ligados três a três ou, finalmente, por quadrados ligados quatro a quatro.

Ainda reflète na questão de que um plano pode ser totalmente coberto com polígonos do mesmo tipo, reunidos com o mesmo número em torno de cada vértice. Neste caso, em somente três formas diferentes; com triângulos reunidos de seis em seis, com quadrados reunidos de quatro em quatro, e com hexágonos reunidos de três em três.

Nota, também, que o poliedro regular ocorre aos pares, o tetraedro com ele mesmo, o hexaedro com o octaedro, o dodecaedro com o icosaedro, a esfera coberta por hexágonos com a esfera coberta por triângulos, e a esfera coberta por quadrados com ela mesma.

Exercício 4.43. *Os sólidos abaixo são considerados limitados por faces planas? Por quê?*

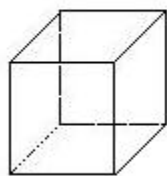


Figura 53: (a)

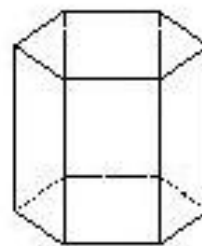


Figura 54: (b)

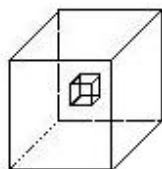


Figura 55: (c)

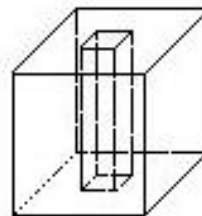


Figura 56: (d)

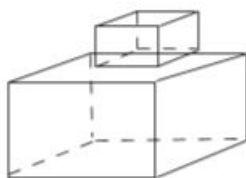


Figura 57: (e)

Exercício 4.44. *Verifique, para o caso dos sólidos limitados por faces planas do exercício acima, se a propriedade enunciada por Euler é válida.*

Como já afirmamos, Lhuillier se interessou por encontrar exceções ao teorema de Euler. Apresenta estas exceções e as classifica em dois tipos.

- O primeiro tipo de exceção ocorre quando o poliedro tem uma cavidade interior; isto é, se tem duas superfícies separadas e uma delas inteiramente fechada na outra.

Neste caso, sejam f, s, a os números de faces, vértices e arestas da superfície exterior; e sejam f', s', a' os números análogos da superfície interior; pela

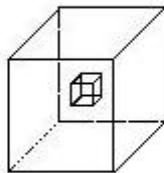


Figura 58: Primeira exceção.

propriedade de Euler temos:

$$f + s = a + 2$$

e

$$f' + s' = a' + 2$$

então

$$(f + f') + (s + s') = (a + a') + 4$$

denotando por F o número total de faces do poliedro, por S o número total de vértices, e por A o número total de arestas, obviamente temos:

$$f + f' = F$$

$$s + s' = S$$

$$a + a' = A$$

Segue que:

$$F + S = A + 4$$

Lakatos (1978, p.28) considerou esta excessão como um primeiro contra-exemplo à conjectura de Euler, já que este é um sólido limitado por faces planas e não se verifica a propriedade $F + S = A + 2$. Lhuillier foi o primeiro a publicar estas observações.

Assim, em tal poliedro, o número de faces somado ao número de vértices, excede por quatro unidades o número de arestas. Em geral, um sólido pode ter n superfícies poliédricas fechadas externas a uma outra, e uma superfície poliédrica fechando todas elas; então com a mesma notação acima, temos

$$F + S = A + 2 \cdot (n + 1)$$

- O segundo tipo de exceção ocorre quando o poliedro possui uma cavidade em seu interior, isto é, embora seja uma única superfície, existe uma passagem reta aberta de uma extremidade a outra.

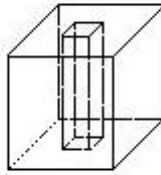


Figura 59: Segunda exceção.

Cortando tal superfície, através de uma secção plana. Então o número de faces será denotado por F' , o número de vértices por S' , e o número de arestas por A' , pela propriedade de Euler temos:

$$F' + S' = A' + 2.$$

Seja n o número de lados destas duas faces do corte, e vamos imaginar que estas duas faces serão soldadas para reconstruir o poliedro original. Então denotando por S, F, A as quantidades correspondentes àquelas denotadas por S', F', A' no poliedro cortado, nós encontramos, por razões semelhantes das dadas acima que

$$F + S - A = F' + S' - A' - 2 = 2 - 2 = 0$$

ou

$$F + S = A$$

isto é, num tal poliedro, o número de faces aumentado pelo número de vértices é precisamente igual ao número de arestas.

Em geral, um poliedro limitado por superfícies planas pode ser furado por um número arbitrário de aberturas distintas. Se n denota o número destes túneis, temos

$$F + S = A - 2(n - 1).$$

5 ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE A CARACTERÍSTICA DE EULER

De acordo com D'Ambrosio (1977, p.VII) “ Modernizar currículos exige que os professores, isto é, os licenciados, passem por uma formação mais moderna, onde possam sentir o saber da matemática de hoje”. Dedicamos então, este capítulo da dissertação, aos professores, licenciados, para que tenham uma noção da Matemática que está sendo produzida hoje nas Universidades, fazendo uma ligação com o assunto que foi sugerido para ser trabalhado no Ensino Médio usando como recurso pedagógico a História da Matemática.

Esta área a que estamos dedicando esta dissertação, a Topologia, tem como princípio descobrir se dois espaços topológicos são ou não homeomorfos. Recordemos que um homeomorfismo entre dois espaços topológicos X e Y acontece quando $f : X \rightarrow Y$ for uma aplicação bijetora e contínua, e existir $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também contínua, logo f se diz um homeomorfismo e X e Y se dizem homeomorfos.

A Característica de Euler, assunto da Topologia, é um invariante topológico, ou seja, é uma propriedade dos espaços topológicos que são invariantes por homeomorfismos, ou que não se alteram por homeomorfismos. Como notamos nas demonstrações estudadas, os números de faces, vértices e arestas dos sólidos não se alteraram, nem quando Euler “cortou” os ângulos sólidos, nem mesmo quando Cauchy, em sua demonstração, retirou a base e “esticou” o poliedro a fim de torná-lo plano. As faces, arestas e os vértices continuaram sem alterações em suas quantidades, e portanto são invariantes. Como Lakatos (1978, p.19, obs.1) afirma,

A chave para o resultado de Euler foi a invenção dos conceitos de vértice e aresta: foi ele quem primeiro observou que, além do número de faces, o número

de pontos e linhas na superfície do poliedro determina seu caráter (topológico).

Portanto, a questão levantada por Euler é assunto da Topologia e da Matemática atual. Faremos, então, algumas observações à respeito deste invariante topológico.

5.1 Topologia Quociente

Definição 5.1. *Sejam X um conjunto e τ uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo:*

1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau$,
2. a interseção de dois membros de τ está em τ ,
3. a união de um número qualquer de membros de τ está em τ .

A coleção τ de subconjuntos de X que satisfaz as propriedades acima é chamada uma topologia para X . O conjunto X com a topologia τ é chamado espaço topológico e é denotado por (X, τ) , que é freqüentemente abreviado por X . Os membros $U \in \tau$ são chamados conjuntos abertos de X .

Note que a condição (2) implica que a interseção de um número finito de membros de τ está em τ . Se $\mathcal{P}(X)$ denota o conjunto de todos subconjuntos de X então uma topologia para X é uma escolha de $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisfaz as condições (1-3) acima. Diferentes escolhas dão diferentes topologias para X .

Lembremos que uma função f , de um espaço topológico X num espaço topológico Y é contínua se, e somente se, a imagem inversa de qualquer aberto de Y é aberta em X .

Seja S um subconjunto do espaço topológico X . Podemos dar a S uma topologia a partir da topologia de X .

Definição 5.2. *A topologia em S induzida pela topologia de X é a família de conjuntos da forma $U \cap S$, onde U é um conjunto aberto em X .*

Em outras palavras, se τ é a família de conjuntos abertos em X , então $\tau_S = \{U \cap S; U \in \tau\}$ é a família de conjuntos abertos em S . Para provar que τ_S é uma topologia para S temos que checar as três condições para uma topologia. Como $\emptyset = \emptyset \cap S$ e $S = X \cap S$, imediatamente temos a primeira condição. Para a segunda, sejam $U_1 \cap S$ e $U_2 \cap S$ dois elementos de τ_S ; então como $(U_1 \cap S) \cap (U_2 \cap S) = (U_1 \cap U_2) \cap S$, e $U_1 \cap U_2$ é aberto em X , este conjunto pertence a τ_S . Finalmente, se $\{U_j \cap S; j \in J\}$ é um conjunto arbitrário de elementos tomados de τ_S , então $\bigcup_{j \in J} (U_j \cap S) = (\bigcup_{j \in J} U_j) \cap S$ está em τ_S , pois $\bigcup_{j \in J} U_j$ é aberto em X .

A topologia induzida às vezes é referida como a topologia *relativa*. Se o subconjunto S de X tem a topologia induzida, dizemos que S é um *subespaço topológico* de X .

Definição 5.3. *Consideremos (X, τ) um espaço topológico, Y um conjunto e f uma aplicação sobrejetora de X em Y . Seja $\tau_f := \{B; f^{-1}(B) \in \tau\}$.*

Observemos que τ_f satisfaz as condições para uma topologia e é chamada topologia quociente:

De fato, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, então $\emptyset \in \tau_f$, e $f^{-1}(Y) = X$, então $Y \in \tau_f$; as outras condições seguem dos fatos que $f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$ e $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j)$. Note que após darmos a Y a topologia quociente a função $f : X \rightarrow Y$ é contínua.

Exemplo 5.4. *Consideremos o conjunto $RP^2 = \{\{x, -x\} / x \in S^2\}$, com a operação sobrejetora:*

$$\begin{aligned} \pi : S^2 &\rightarrow RP^2 \\ x &\mapsto \pi(x) = \{x, -x\} \end{aligned}$$

Este conjunto com a topologia quociente definida por π é chamado plano projetivo real.

Exemplo 5.5. *Vejamos o conjunto*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\},$$

com a topologia induzida. Seja $M = \{\{p, -p\} / p \in C\}$, o conjunto dos pares de pontos de C , da forma $\{p, -p\}$. Consideremos também uma função f tal que:

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\{p, -p\} \mapsto f(\{p, -p\}) = ((x^2 - y^2)(2 + xz), 2xy(2 + xz), yz)$$

onde $p = (x, y, z) \in C \subseteq \mathbb{R}^3$. Observemos que f é injetora: Seja $\{q, -q\} \in M$, onde $q = (a, b, c) \in C \subseteq \mathbb{R}^3$, e $q \neq p$ assim

$$f(\{q, -q\}) = ((a^2 - b^2)(2 + ac), 2ab(2 + ac), bc)$$

$$f(\{p, -p\}) = ((x^2 - y^2)(2 + xz), 2xy(2 + xz), yz)$$

Portanto $f(\{q, -q\}) \neq f(\{p, -p\})$. Vemos que M é homeomorfa a $f(M) \subseteq \mathbb{R}^3$ com a topologia induzida. A imagem de M é conhecida como faixa de Moëbius, cuja figura apresentamos abaixo:

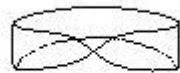


Figura 60: Faixa-Moëbius

Teorema 5.6. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função, e suponha que X tenha a topologia quociente em relação a f . Então a função $g : Y \rightarrow Z$, Z espaço topológico, é uma aplicação contínua se, e somente se $g \circ f$ é contínua.*

Demonstração: Como X tem a topologia quociente em relação a f , então temos que f é contínua. Por hipótese, g também é contínua, logo $g \circ f$ é contínua.

Suponhamos que $g \circ f$ seja contínua. Consideremos V um conjunto aberto qualquer em Z , como $g \circ f$ é contínua temos que $(g \circ f)^{-1}(V)$ é aberto em X , mas $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ e portanto $f^{-1}(g^{-1}(V))$ é aberto em X . Por hipótese X tem a topologia quociente em relação a f , assim $g^{-1}(V)$ é aberto em Y , o que prova que g é contínua. ■

Definição 5.7. Se X é um espaço topológico e $\sim$ é uma relação de equivalência em X , então o conjunto $X/\sim$ das classes de equivalências com a topologia quociente é freqüentemente dito ser obtido de X por identificação topológica.

Exemplo 5.8. Se $\sim$ é uma relação de equivalência em S^2 dada por

$$x \sim y \iff x = \pm y$$

então $S^2/\sim$ é o conjunto RP^2 .

Exemplo 5.9. A mesma relação de equivalência dada no exemplo anterior para o cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$, nos fornece o conjunto quociente $C/\sim$, que gera a faixa de Moëbius.

Exemplo 5.10. Consideremos o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x, y \leq 1\}$ com a topologia induzida e vamos definir uma relação de equivalência em X tal que:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x, y) = (x', y')$$

ou

$$\{x, x'\} = \{0, 1\} \quad e \quad y = y'.$$

Observemos que cada ponto que está no interior de X está sendo identificado com ele mesmo.

Logo $X/\sim$ com a topologia quociente é de fato homeomorfa ao cilindro.

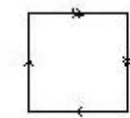


Figura 61: Identificação dos pontos

Exemplo 5.11. Tomando-se o mesmo conjunto X , onde $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x, y \leq 1\}$, com a topologia induzida e se definirmos em X uma relação de equivalência $\sim$, onde:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x, y) = (x', y')$$

ou

$$\{x, x'\} = \{0, 1\} \quad e \quad y = 1 - y',$$

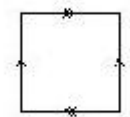


Figura 62: Identificação dos pontos

obtemos a faixa de Moëbius, por um processo semelhante.

Assim $X/\sim$ com a topologia quociente é homeomorfa à faixa de Moëbius.

Com a topologia de cada um dos retângulos dados acima, obtemos dois outros exemplos:

Exemplo 5.12. Com a relação de equivalência

$$(0, y) \sim (1, y) \quad e \quad (x, 0) \sim (x, 1)$$

obtemos o Toro (T^2).

O Toro é homeomorfo ao subespaço de $\mathbb{R}^3$ dado por M , onde

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / [\sqrt{(x^2 + y^2) - 2}]^2 + z^2 = 1\}.$$

Um homeomorfismo é dado por

$$[x, y] \rightarrow f[(x, y)] = ([2 + \cos(2\pi x)] \cos(2\pi y), (2 + \cos(2\pi x)) \sin(2\pi y), \sin(2\pi x))$$

A obtenção do toro pode ser visualizado abaixo:

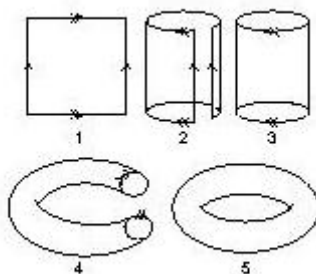


Figura 63: Toro obtido pela identificação.

Exemplo 5.13. Já com essa outra relação de equivalência

$$(0, y) \sim (1, y) \quad e \quad (x, 0) \sim (1 - x, 1)$$

obtemos a Garrafa de Klein (KB). Mas, para a garrafa de Klein, teríamos dificuldade em fazer a identificação, uma vez que a figura relacionada estaria em $\mathbb{R}^4$. Porém, vamos tentar dar uma idéia de como seria essa identificação.

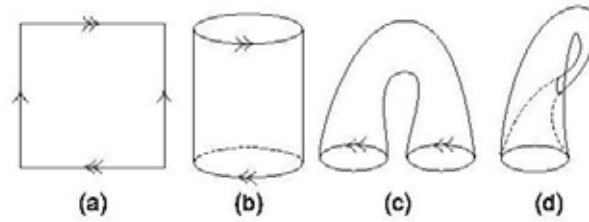


Figura 64: Garrafa de Klein obtida pela identificação.

Observemos, na figura acima, que no último processo aparecerá um círculo de intersecção, mas esse círculo não existe, só aparece porque estamos tentando visualizar em $\mathbb{R}^3$.

Cortando a figura com um plano, vemos que a garrafa de Klein é formada por duas faixas de Moëbius ligadas ao longo de suas fronteiras.

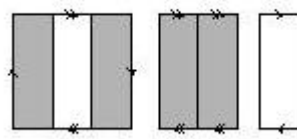


Figura 65: Faixa de Moëbius obtida pelo corte da Garrafa de Klein.

Exemplo 5.14. Lembremos que RP^2 pode ser definido como $S^2/\sim$, onde

$$x \sim x' \iff x = \pm x'.$$

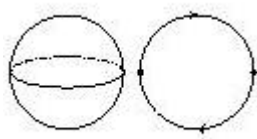


Figura 66: Identificação da Esfera.

Neste caso o hemisfério norte está identificado com o hemisfério Sul. Assim, podemos nos restringir ao estudo do hemisfério norte, no qual há um homeomorfismo f com o disco $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$, onde

$$\begin{aligned} f : S_+^2 &\longrightarrow D^2 \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) = (x, y) \end{aligned}$$

Assim RP^2 poderia ser reescrita como $D^2/\sim$, onde

$$x \sim x' \iff x = x'$$

ou

$$x, x' \in S^1 \subseteq D^2 \quad e \quad x = -x'.$$

Se removermos do plano projetivo uma pequena região homeomorfa ao disco (D^2), então a deixamos como a faixa de Moëbius costurado sobre um disco.

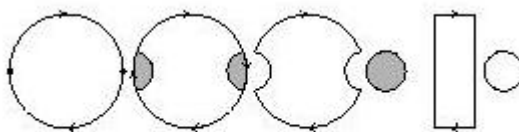


Figura 67

Teorema 5.15. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função entre os espaços topológicos X e Y . Suponha que em X e Y estejam definidas relações de equivalência $\sim_x$ e $\sim_y$, respectivamente, e que $x \sim_x x' \iff f(x) \sim_y f(x')$. Se f é um homeomorfismo então $X/\sim_x$ e $Y/\sim_y$ são homeomorfos.*

Demonstração: Devemos mostrar que $X/\sim_x$ e $Y/\sim_y$ são homeomorfos, ou seja, que existe uma função $F : X/\sim_x \longrightarrow Y/\sim_y$ tal que F seja contínua, bijetora e cuja inversa também seja contínua.

Vamos definir uma função

$$F : X/\sim_x \longrightarrow Y/\sim_y$$

onde $[x] \mapsto F([x]) = [f(x)] = [y]$.

Observemos que F está bem definida: sejam $[x], [x'] \in X/\sim_x$ tal que $[x] = [x']$. Mas $[x] = [x'] \iff x \sim_x x' \iff f(x) \sim_y f(x') \iff [f(x)] = [f(x')]$.

1. Mostremos que F é bijetora.

- F é injetora: tomando $F([x]) = F([x']) \iff [f(x)] = [f(x')] \iff f(x) \sim_y f(x') \iff x \sim_x x' \iff [x] = [x']$.
- F é sobrejetora: seja $[y]$ um elemento qualquer de $Y/\sim_y$, então como f é um homeomorfismo, existe $[x]$ em $X/\sim_x$ tal que $F([x]) = [f(x)] = [y]$.

2. F é contínua: consideremos as seguintes projeções naturais contínuas:

$$\begin{aligned} \pi_x : X &\longrightarrow X/\sim_x \\ x &\mapsto \pi_x(x) = [x] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_y : Y &\longrightarrow Y/\sim_y \\ y &\mapsto \pi_y(y) = [y] \end{aligned}$$

Para mostrarmos que F é contínua, verifiquemos que $F \circ \pi_x = \pi_y \circ f$.

De fato, seja x um elemento do domínio de π_x , então

$$F \circ \pi_x(x) = F(\pi_x(x)) = F([x]) = [f(x)] = [y]$$

Por outro lado temos:

$$\pi_y \circ f(x) = \pi_y(f(x)) = [f(x)] = [y].$$

Como π_y e f são contínuas, então $\pi_y \circ f$ é contínua, mas $F \circ \pi_x = \pi_y \circ f$, assim $F \circ \pi_x$ é contínua, logo F é contínua.

3. F^{-1} é contínua. Verifiquemos que $F^{-1} \circ \pi_y = \pi_x \circ f^{-1}$.

Tomemos y no domínio de π_y , temos

$$F^{-1} \circ \pi_y(y) = F^{-1}(\pi_y(y)) = F^{-1}([y]) = F^{-1}([f(x)]) = [x].$$

Por outro lado temos,

$$\pi_x \circ f^{-1}(y) = \pi_x(f^{-1}(y)) = \pi_x(x) = [x].$$

Mas $\pi_x \circ f^{-1}$ é contínua, pois π_x é a projeção natural que é contínua e f^{-1} também é contínua, já que f é homeomorfismo. Como $F^{-1} \circ \pi_y = \pi_x \circ f^{-1}$, então F^{-1} é contínua.

De 1, 2, 3 temos que F é um homeomorfismo, logo $X/\sim_x$ e $Y/\sim_y$ são homeomorfos. ■

Exemplo 5.16. Considere $\mathbb{R}^+ = (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ com a relação de equivalência $x \sim x' \iff \exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $x' = 3^n x$.

Considere, agora, $\mathbb{R}$ com a relação de equivalência $x \sim x' \iff \exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $x' = n + x$.

A função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow f(x) = \log_3(x)$, é um homeomorfismo e $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) \sim f(x')$.

Assim os espaços $\mathbb{R}^+/\sim$ e $\mathbb{R}/\sim$ são homeomorfos.

5.2 Poliedros, Superfícies e Triangulação

No Ensino Médio, costumamos ensinar aos alunos sobre a chamada “relação de Euler” que diz que em qualquer poliedro convexo vale a seguinte relação:

$$v - e + f = 2,$$

onde v denota o número de vértices, e o número de arestas e f o número de faces.

Definição 5.17. Um poliedro P é dito convexo quando o sólido é limitado por polígonos planos tais que:

- dois desses polígonos nunca estão em um mesmo plano;
- cada lado de um polígono é comum a dois e somente dois polígonos,
- o plano de cada polígono deixa os demais em um mesmo semi-espaço.

Definição 5.18. Definimos a característica de Euler de um poliedro P , denotada por $\chi(P)$, por:

$$\chi(P) = v - e + f.$$

A seguir apresentamos alguns cálculos da característica de Euler de alguns poliedros.

1. A característica de Euler de um cubo é dada por

$$\chi(P) = v - e + f$$

$$\chi(P) = 8 - 12 + 6$$

$$\chi(P) = 2$$

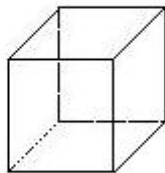


Figura 68: Cubo.

2. Agora, vamos calcular a característica de Euler de um prisma hexagonal:

$$\chi(P) = v - e + f$$

$$\chi(P) = 12 - 18 + 8$$

$$\chi(P) = 2$$

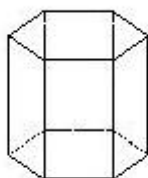


Figura 69: Prisma de base hexagonal.

3. Se considerarmos um cubo com outro cubo em seu interior, temos:

$$\chi(P) = v - e + f$$

$$\chi(P) = 16 - 24 + 12$$

$$\chi(P) = 4$$

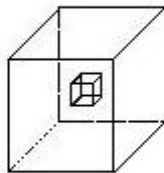


Figura 70

4. Se retirarmos um cubo inteiro do interior de um cubo:

$$\chi(P) = v - e + f$$

$$\chi(P) = 16 - 32 + 16$$

$$\chi(P) = 0$$

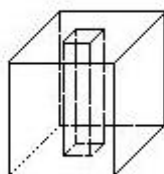


Figura 71

Observemos que, nos dois primeiros exemplos, a Característica de Euler é igual a 2, pois os sólidos usados como exemplo satisfazem a definição dada para poliedros convexos, o que não ocorre com os outros dois exemplos, onde o valor obtido para a Característica de Euler foi diferente de 2.

O próximo passo é calcular a característica de Euler de superfícies. Para isso, precisamos antes definir o que consideramos uma superfície e depois definir triangulação das mesmas. A ideia de triangular superfícies partiu da demonstração de Cauchy sobre a fórmula poliedral, como afirmam Biggs, Lloyd e Wilson (1986, p.81).

Definição 5.19. *Uma superfície é um espaço de Hausdorff, no qual cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa ao disco aberto 2-dimensional*

$$\overset{\circ}{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 / |x| < 1\}.$$

Definição 5.20. *Uma triangulação de uma superfície compacta S consiste de uma família de subconjuntos $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ que cobrem S e uma família de homeomorfismos $\varphi_i : T_i' \rightarrow T_i, i = 1, \dots, n$, onde cada T_i' é um triângulo do plano $\mathbb{R}^2$. Os subconjuntos T_i serão chamados triângulos. Também, os subconjuntos de T_i que são imagem de algum vértice do triângulo T_i' pela φ_i serão chamados vértices de T_i e os subconjuntos de T_i que são imagem de alguma aresta de T_i' pela φ_i serão chamados arestas de T_i' . Finalmente, exigiremos que cada dois triângulos T_i e T_j distintos sejam disjuntos ou tenham um único vértice em comum ou tenham uma única aresta em comum.*

Dada uma superfície compacta S , existe sempre uma triangulação para ela. Esse fato foi demonstrado em 1925 por Tibo Radó (1895 – 1965), depois da análise das obras dos matemáticos Riemman, Poicaré e Weyl que também trataram desta questão e, nesse ponto, o assumiremos como verdadeiro.

Como numa triangulação de uma superfície S dois triângulos disjuntos não podem possuir os mesmos vértices, podemos especificar completamente uma triangulação listando as triplas de vértices de um mesmo triângulo.

Toda triangulação de uma superfície compacta satisfaz as seguintes propriedades:

1. Cada aresta é aresta de exatamente dois triângulos.

2. Se v é um vértice da triangulação, então podemos arranjar o conjunto de todos os triângulos que contém v como vértice de maneira cíclica $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}, T_n = T_0$ onde T_i e T_{i+1} possuem uma aresta em comum, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Para justificar o item 1, notemos que se uma aresta fosse aresta de apenas um triângulo, pontos interiores desta aresta não possuiriam vizinhança homeomorfa ao disco aberto $\overset{\circ}{D}^2$, contrariando a definição de superfície. O caso em que a aresta pertence a mais de dois triângulos contraria a dimensão da superfície.

Para justificar o item 2, dado um vértice v existe um triângulo T_0 contendo v . Escolhemos uma aresta e_1 qualquer de T_0 que contenha v . Pelo item 1, existe um triângulo T_1 com a aresta e_1 em comum com T_0 . Tomemos a outra aresta de T_1 , e_2 , contendo v . Pelo mesmo argumento, existe um triângulo T_2 com a aresta e_2 em comum com T_1 . Aplicando esse processo sucessivamente, e lembrando que existe um número finito de triângulos com v como um de seus vértices, existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_n = T_0$.

Exemplo 5.21. *O tetraedro é uma superfície do espaço Euclidiano tridimensional homeomorfa a esfera S^2 . As quatro faces do tetraedro satisfazem todas as condições impostas na definição de triangulação. Assim, essa é uma triangulação para a esfera S^2 que possui quatro vértices e onde cada tripla de vértices é o conjunto de vértices de um triângulo. Assim*

$$\chi(S^2) = v - e + f$$

$$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4$$

$$\chi(S^2) = 2$$

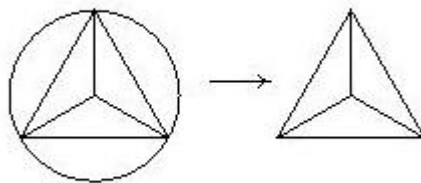


Figura 72: Triangulação da Esfera.

Exemplo 5.22. *Observemos o Toro (T^2).*



Figura 73: Toro

Uma triangulação para o toro é dada abaixo. Nessa triangulação existem 9 vértices e 18 triângulos:

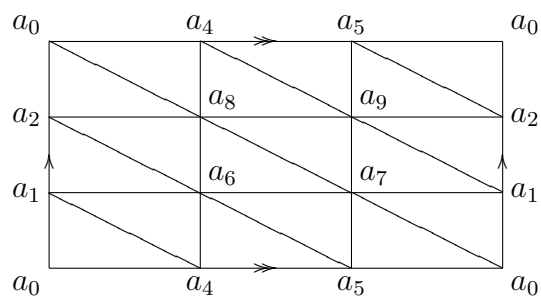


Figura 74: Triangulação do Toro

Podemos, então, calcular sua característica de Euler,

$$\chi(T^2) = v - e + f$$

$$\chi(T^2) = 9 - 27 + 18$$

$$\chi(T^2) = 0.$$

Exemplo 5.23. Tomemos a garrafa de Klein KB .



Figura 75: Garrafa de Klein

Para calcularmos a $\chi(KB)$ temos que primeiro triangular sua superfície. Assim:

$$\chi(KB) = v - e + f$$

$$\chi(KB) = 9 - 27 + 18$$

$$\chi(KB) = 0.$$

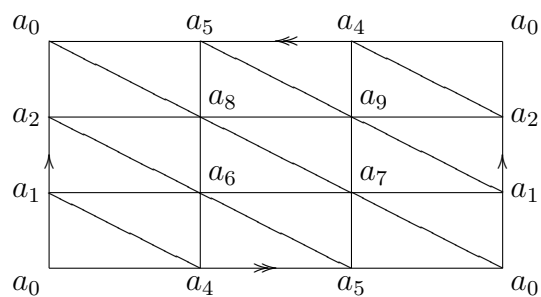


Figura 76: Triangulação da Garrafa de Klein

Exemplo 5.24. A figura a seguir mostra uma triangulação para o plano projetivo considerado como quociente do disco fechado D^2 por identificação dos pontos do bordo opostos diametralmente.

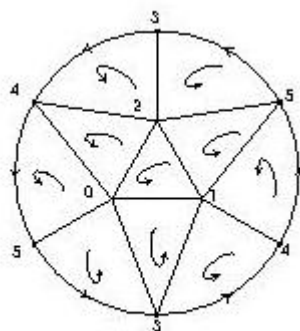


Figura 77: Triangulação do Plano Projetivo

Essa triangulação possui 6 vértices e 10 triângulos.

$$\chi(RP^2) = v - e + f$$

$$\chi(RP^2) = 6 - 15 + 10$$

$$\chi(RP^2) = 1.$$

Esses exemplos nos sugerem que a característica de uma superfície depende apenas da superfície e não da triangulação, o que de fato ocorre. Isso pode ser demonstrado usando teoria de homologia.

5.3 Superfícies

Definição 5.25. *Seja n um número inteiro não negativo. Uma superfície n -dimensional é um espaço de Hausdorff, no qual cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa ao disco aberto 2-dimensional*

$$\overset{\circ}{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 / |x| < 1\}.$$

Exemplos de superfícies

1. Como $\mathbb{R}^0$ é formado por um único ponto, segue que qualquer espaço X com a topologia discreta é uma 0-superfície. Pois, um espaço com a topologia discreta é de Hausdorff o que significa que para $x \in X$, escolhemos $\{x\}$ um conjunto aberto contendo x , o qual é homeomorfo à $\mathbb{R}^0$.
2. Consideremos $\mathbb{R}^2$ ou $\overset{\circ}{D}^2$. Estes são exemplos de superfícies. Qualquer subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ também é uma superfície. Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e seja $u \in U$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $u \in B_\epsilon(u) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^2$ e claro que $B_\epsilon(u) \cong \overset{\circ}{D}^2$.

3. Vejamos que $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} = \{\exp(2\pi it)/t \in I\}$ é uma superfície.

Se $x \in S^1$, então $x = \exp(2\pi i\theta), \theta \in I$. Logo,

$$\begin{aligned} S^1 - \{-x\} &= S^1 - \{\exp(2\pi i(\theta - \frac{1}{2}))\} = \\ &= \{\exp(2\pi it)/\theta - \frac{1}{2} < t < \theta + \frac{1}{2}\} \cong (\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}) \cong (0, 1) \cong \overset{\circ}{D}^1. \end{aligned}$$

Então cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa ao $\overset{\circ}{D}^1$. Além disso, S^1 é de Hausdorff e, portanto S^1 é uma superfície.

Para mostrarmos que S^2 é uma superfície, daremos uma idéia de projeção estereográfica que é um homeomorfismo entre $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ e $\mathbb{R}^2$.

Mostremos o homeomorfismo: consideremos $f : S^2 - \{(0, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto de $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ um ponto do plano $\mathbb{R}^2$.

Sejam $N = (0, 0, 1)$ e $P = (a, b, c) \in S^2 - \{(0, 0, 1)\}$. A reta que passa por estes dois pontos intercepta o plano em um único ponto $Q = (x, y, 0)$. Assim $Q = N + \lambda \overrightarrow{NP}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos então que $(x, y, 0) = (0, 0, 1) + \lambda(a, b, c - 1)$ e $(x, y, 0) = (\lambda a, \lambda b, 1 + \lambda(c - 1))$.

Assim,

$$\lambda = \frac{-1}{c-1}, x = \frac{-a}{c-1}, y = \frac{-b}{c-1}.$$

Então a função f é definida por

$$\begin{aligned} f : S^2 - \{(0, 0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b, c) &\mapsto f(a, b, c) = \left(\frac{-a}{c-1}, \frac{-b}{c-1} \right). \end{aligned}$$

Vamos definir $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 - \{(0, 0, 1)\}$.

Devemos encontrar um ponto $P = (a, b, c)$ que é a intersecção da reta que passa por $N = (0, 0, 1)$ e $X = (x, y, 0)$ com a $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$.

Seja $P = N + \lambda \overrightarrow{XN}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $(a, b, c) = (0, 0, 1) + \lambda(x, y, -1)$, $\lambda \neq 0$ e $(a, b, c) = (\lambda x, \lambda y, 1 - \lambda)$. Mas $(a, b, c) \in S^2 - \{(0, 0, 1)\}$, assim, $(\lambda x, \lambda y, 1 - \lambda) \in S^2 - \{(0, 0, 1)\}$.

Portanto, $\lambda = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$ e teremos

$$a = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, b = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \quad \text{e} \quad c = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Logo, a aplicação g será definida por

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^2 - \{(0, 0, 1)\} \\ (x, y) &\mapsto g(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Notemos que f e g são contínuas e como

$$g \circ f(x, y, z) = g(f(x, y, z)) = g\left(\frac{-x}{z-1}, \frac{-y}{z-1}\right) = (x, y, z)$$

e

$$f \circ g(x, y) = f(g(x, y)) = f\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right) = (x, y),$$

segue que ambas são bijetoras.

5.4 Soma Conexa

Nesse capítulo, apresentaremos uma técnica para obter novas superfícies e em seguida, mostraremos como calcular a característica de Euler.

Intuitivamente, a soma conexa de duas superfícies disjuntas, S_1 e S_2 , denotada por $S_1 \# S_2$ é formada removendo-se um disco aberto de cada superfície e colando ao longo dos bordos.

Por exemplo o bi-toro é a soma conexa de dois toros.

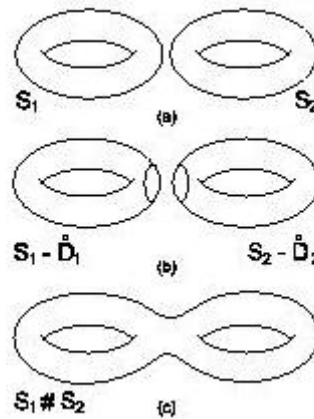


Figura 78: (a)Dois Toros,(b)Retirando um disco aberto de cada Toro, (c)Soma Conexa

Para uma definição mais formal, tomemos $D_1 \subseteq S_1$ e $D_2 \subseteq S_2$ de tal forma que D_1 e D_2 sejam homeomorfos a D^2 . Seja x um ponto qualquer de uma das superfícies, então x tem uma vizinhança N e um homeomorfismo $h : N \rightarrow \overset{\circ}{D}^2$. O subespaço $h^{-1}(D_{1/2}^2) \subseteq N$, onde $(D_{1/2}^2) \subseteq \overset{\circ}{D}^2$ é um disco fechado de raio $1/2$, é homeomorfo a D^2 pelo homeomorfismo

$$\begin{aligned} f : h^{-1}(D_{1/2}^2) &\longrightarrow D^2 \\ y &\mapsto 2h(y) \end{aligned}$$

Retomemos a definição: Sejam $D_1 \subseteq S_1$ e $D_2 \subseteq S_2$ subespaços homeomorfos à D^2 . Consideremos $h_1 : D_1 \rightarrow D^2$; $h_2 : D_2 \rightarrow D^2$ homeomorfismos. Definimos $S_1 \# S_2$ como o conjunto

$$\frac{(S_1 - \overset{\circ}{D}_1) \cup (S_2 - \overset{\circ}{D}_2)}{\sim}$$

onde $\sim$ é uma relação de equivalência, à qual não é trivial somente nos bordos, ou seja, $\partial(S_1 - \overset{\circ}{D}_1) \cup \partial(S_2 - \overset{\circ}{D}_2) = \partial D_1 \cup \partial D_2$, e $\sim$ é dada por $x \sim h_2^{-1}h_1(x)$ para $x \in \partial D_1$.

A definição de soma conexa é independente da escolha dos discos D_1 , D_2 e dos homeomorfismos h_1 e h_2 , pois uma variedade é homogênea, no sentido de que para quaisquer dois pontos possuem respectivas vizinhanças que podem se deformar uma na outra através de um difeomorfismo. Notemos ainda que esta soma é uma superfície.

Vejamos intuitivamente como obtemos a garrafa de Klein como soma conexa de dois planos projetivos.

Dados dois planos projetivos:

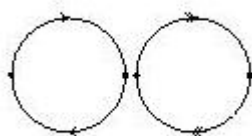


Figura 79

Vamos remover dois discos abertos destes planos:

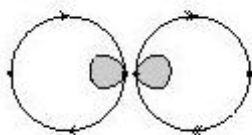


Figura 80

o qual pode ser representado por:

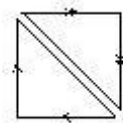


Figura 81

“Colando” as partes, segundo as identificações obtemos a figura(a). Fazendo um novo corte, temos (b). Identificando novamente, teremos (c). Encontramos então, a garrafa de Klein, figura (d).

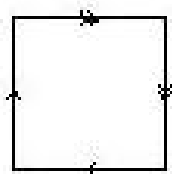


Figura 82: (a)

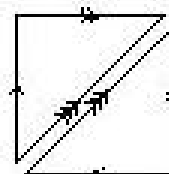


Figura 83: (b)

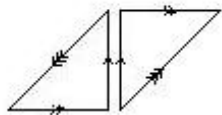


Figura 84: (c)

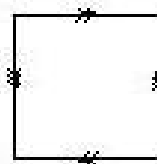


Figura 85: (d)

Veremos, agora, como a característica da soma conexa de duas superfícies é obtida.

Proposição 5.26. *Sejam S_1 e S_2 superfícies compactas. A característica de Euler da soma conexa $S_1 \# S_2$ de S_1 e S_2 é dada por*

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Demonstração: Tomemos S_1 e S_2 duas superfícies compactas trianguladas. Temos:

$$\chi(S_1) = v_1 - e_1 + f_1$$

e

$$\chi(S_2) = v_2 - e_2 + f_2.$$

Para fazermos a soma conexa de S_1 e S_2 , removemos de cada uma dessas superfícies o interior de um triângulo e então as conectamos pelos bordos desses, de modo a identificarmos os vértices e as arestas. Temos então que:

$$v_{S_1 \# S_2} = v_1 + v_2 - 3$$

pois três vértices de S_1 foram identificados com três vértices de S_2 .

$$e_{S_1 \# S_2} = e_1 + e_2 - 3$$

pois três arestas de S_1 foram identificados com três arestas de S_2 .

$$f_{S_1 \# S_2} = f_1 + f_2 - 2$$

pois tiramos um triângulo de S_1 e um triângulo de S_2 .

Logo,

$$\begin{aligned} \chi(S_1 \# S_2) &= v_{S_1 \# S_2} - e_{S_1 \# S_2} + f_{S_1 \# S_2} \\ &= (v_1 + v_2 - 3) - (e_1 + e_2 - 3) + (f_1 + f_2 - 2) \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\chi(S_1 \# S_2) &= \{v_1 - e_1 + f_1\} + \{v_2 - e_2 + f_2\} - 3 + 3 - 2 \\ &= \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.\end{aligned}$$

■

Usando o resultado da proposição e o fato de que toda superfície compacta ou é uma esfera, ou é uma soma conexa de toros ou é soma conexa de planos projetivos²³, obtemos todos os valores para a característica de Euler de todas as superfícies compactas possíveis:

Superfície	Característica de Euler
Esfera	2
Soma conexa de n toros	$2 - 2n$
Soma conexa de n planos projetivos	$2 - n$
Soma conexa de 1 plano projetivo e n toros	$1 - 2n$
Soma conexa de 1 garrafa de Klein e n toros	$-2n$

²³Massey, 1967, p.33

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A propriedade citada por Euler gerou uma série de acontecimentos, não só os descritos aqui, conforme nos revela Lakatos (1978, p.158, obs.200), “ a relação foi redescoberta cerca de doze vezes entre 1812 e 1890”. Aqui decidimos destacar a demonstração de Euler por ter sido seu descobridor, a de Cauchy por se tratar de uma demonstração bem aceita no mundo Matemático, e a de Lhuilier, por ter sido o primeiro a publicar as exceções à relação.

Estudar as obras de Euler, Cauchy e Lhuilier como propusemos aqui, nos ofereceu uma oportunidade de mergulhar no mundo geométrico em que estes matemáticos se encontravam em suas respectivas épocas. Suas demonstrações a respeito da Relação de Euler nos levaram a investigar, antes mesmo que elas se apresentassem. Interessante entender como Euler comparou as propriedades de polígonos e formulou a propriedade para os sólidos. Notar que sua demonstração foi totalmente baseada neste fato. Aqui conseguimos notar o trabalho de um profissional matemático, e concluirmos que a Matemática não é divina, e sim humana.

A análise das demonstrações nos incentivaram a leitura e interpretação Matemática, que permanece tão esquecida nesta ciência. Nossos alunos não conseguem mais interpretar problemas, quanto menos resolvê-los, mas como Educadores devemos incentivar a leitura, a discussão dos problemas, como uma forma de pelo menos seguir o que está estipulado nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+ Ensino Médio),

(...)disciplinas da área científica e matemática, ou da humanista, devem também desenvolver o domínio de linguagens. Explicitamente, disciplinas da área de linguagens e códigos e da área de ciências da natureza e matemática devem

também tratar de aspectos histórico-geográficos e culturais, ingredientes da área humanista, e, vice-versa, as ciências humanas devem também tratar de aspectos científico-tecnológicos e das linguagens. (PCN+ ENSINO MÉDIO, 2002, p.16).

Neste sentido, desenvolvemos aqui algumas propostas que auxiliam no domínio de linguagem dentro da área da Matemática, buscando também interagir com outras áreas, tais como História e Geografia. Mostrando que a Matemática é um elemento importantíssimo na sociedade em geral. Fora importante para Euler, para Cauchy, Lhuilier..., mas também é importante nos dias atuais para que possamos compreender as relações humanas, desenvolvermos a criatividade, nos posicionarmos de forma crítica perante desafios, sabermos levantar hipóteses e justificarmos, com bons argumentos, nossos pontos de vistas, o que nos levam à sermos cidadãos críticos, uma das bandeiras da Educação Nacional.

Referências

- [1] BIGGS, Norman L.; LLOYD, E. Keith e WILSON, Robin J. - *Graph Theory -1736 - 1936*. New York: Oxford University Press, 1986.
- [2] *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from the Dictionary of Scientific Biography*. New York: Charles Scribner's sons, 1991.
- [3] CARDOSO, Virgínia C. *As Teses Falibilista e Racionalista de Lakatos e a Educação Matemática*. Dissertação de Mestrado, UNESP - Rio Claro/SP, 1997.
- [4] CARREIRA, Ana S. N.; ANDRADE, Carlos A. D. *Geometria a várias dimensões*. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/fm-euler.htm>>. Acesso em 09 set. 2008.
- [5] CAUCHY, Augustin L. *Recherches Sur Les Polyèdres*. In: *Oeuvres complètes*. Disponível em <<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k901917.r=Cauchy.langPT>>. Acesso em 09 de junho de 2009.
- [6] D'AMBROSIO, Ubiratan. *Métodos da Topologia: Introdução e Aplicação*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1977.
- [7] DIENES, Zoltan P. *A Geometria pelas transformações I Topologia, Geometria Projetiva e Afim*. São Paulo: EPU; Brasília: INL, 1975.
- [8] EUCLID. *The Thirteen Books of The Elements. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath*. 2. ed. New York: Dover Publications. Vol. 1, 2 and 3.
- [9] EULER, Leonhard. *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*. Disponível em <http://math.dartmouth.edu/euler/>. Acesso em 06/10/2008.

- [10] EULER, Leonhard. *Solutio Problematis ad Geometriam situs Pertinentis*. Disponível em <http://math.dartmouth.edu/euler/>. Acesso em 06/10/2008.
- [11] FOSSA, John A. *Recursos Pedagógicos para o ensino da matemática da Antigüidade*. In: A história como um agente de cognição na Educação Matemática. Porto Alegre: Sulina, 2006.
- [12] GASPAR, Maria T. e MAURO, Suzeli. *Contando histórias da matemática e ensinando matemática*. In: Coleção História da Matemática para Professores. SBHMat, 2005.
- [13] GASPAR, Maria T. J. *Aspectos do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico em Algumas Civilizações e Povos e a Formação de Professores*. Tese de Doutorado, UNESP - Rio Claro/SP, 2003.
- [14] KATZ, Victor J. *A History of Mathematics - An Introduction*. USA: Harper-Collins College Publishers, 1993.
- [15] KOSNIOWSKI, C. - *A First Course in Algebraic Topology*. Cambridge University Press (1980).
- [16] LAKATOS, Imre. *A Lógica do Descobrimento Matemático - Provas e Refutações*. Rio de Janeiro: Zahar editores, 1978.
- [17] LONGEN, Adilson. *Matemática*. Curitiba: Positivo, 2004. V.2-(Coleção Nova Didática).
- [18] LOPES, Antonio J. *Geometria dos cortes de sabão*. Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/autor/artigos/artigos-publicados.asp?aux=Sabao>. Acesso em 09 set. 2008.
- [19] LHUILIER, Simon A. J. *Démonstration immédiate d'un théoreme fondamental d'Euler sur les polyèdres, et ex-*

- ceptions dont ce théorème est susceptible..* Disponível em <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k902142.r=Lhuillier.langPT>. Acesso em 12 de junho de 2009.
- [20] MARTINS, Arsélio. *Iniciação a teoria de grafos*. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/adam/grafos/doi12.htm>. Acesso em 09 set. 2008.
- [21] MASSEY, W. S. - *Algebraic Topology: An Introduction*. Harbrace College Mathematics Series.(1967)
- [22] MEC: Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias./ Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.
- [23] MENDES, Iran A. *A investigação histórica como agente de cognição matemática na sala de aula*. In: *A história como um agente de cognição na Educação Matemática*. Porto Alegre: Sulina, 2006.
- [24] Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília, volume 2, 2008.
- [25] MORI, Iracema e Onaga, Dulce S. *Matemática Idéias e Desafios, 5ª série*. 14ª edição. São Paulo: Saraiva, 2006.
- [26] O´CONNOR, J.J. e ROBERTSON, E.F. . *Mac Tutor Cauchy, biography*. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy.html> > Acesso em 12 jun. 2009.
- [27] O´CONNOR, J.J. e ROBERTSON, E.F. . *Mac Tutor, Leonhard Euler, summary*. Disponível em www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Euler.html > Acesso em 12 jan. 2007.

- [28] O'CONNOR, J.J. e ROBERTSON, E.F. *Mac Tutor, Leonhard Euler, biography*. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Euler.html> Acesso em 09 set. 2008.
- [29] O'CONNOR, J.J. e ROBERTSON, E.F. . *Mac Tutor, History Topics Index* <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html> Acesso em 12 jan 2007.
- [30] O'CONNOR, J.J. e ROBERTSON, E.F. . *Mac Tutor Lhuillier, biography*. < <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lhuillier.html> > Acesso em 03/06/2009.
- [31] PETTA, Nicolina L. de; Ojeda, Eduardo A. B.; Delfini, Luciano. *História: Uma Abordagem Integrada*. Volume Único, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2005.
- [32] PONTE, João P.; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélio. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. 1ª edição, 2ª reimpressão - Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- [33] São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. *Matrizes de referência para a avaliação Saesp: documento básico*. Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2009.
- [34] SIQUEIRA, Mônica C. M. *Algumas Observações sobre a Característica de Euler*. Dissertação de Especialização, Unesp-Rio Claro, 2007.
- [35] TEIXEIRA, Mário T. et al. *Redes e Mapas*. Projeto: Novos Materiais para o ensino da geometria (5ª a 8ª séries), 1979.
- [36] SANDIFER, E. *How Euler did it* página do autor. (2004)
- [37] WAGNER, Eduardo. *$V - A + F = 2$ Existe o poliedro?* Revista do professor de matemática 47, 2001.

- [38] WIKIPEDIA, < <http://en.wikipedia.org/wiki/K%C3%B6nigsberg> > Acesso em 09/06/2009.