



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Controle Ótimo Aplicado em um Modelo de Câncer

Eduardo Ramos

Orientadora: Profa. Dra. Cristiane Nespoli Morelato França

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Maio de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Controle Ótimo Aplicado em um Modelo de Câncer

Eduardo Ramos

Orientadora: Profa. Dra. Cristiane Nespoli Morelato França

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Maio de 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Ramos, Eduardo.
R142c Controle Ótimo Aplicado em um Modelo de Câncer / Eduardo Ramos. -
Presidente Prudente : [s.n], 2015
98 p. : il.

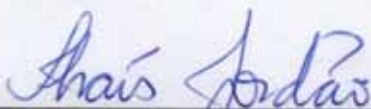
Orientador: Cristiane Nespoli Morelato França
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Controle Ótimo. 2. Modelo de câncer com quimioterapia. 3.
Regularidade para controles ótimos. I. Ramos, Eduardo. II. França, Cristiane
Nespoli Morelato. III. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências
e Tecnologia. IV. Controle Ótimo Aplicado em um Modelo de Câncer.

BANCA EXAMINADORA



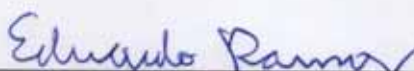
Prof. Dra. CRISTIANE NESPOLI MORELATO FRANÇA
ORIENTADORA



Prof. Dra. THAIS JORDÃO
USP/SÃO CARLOS



Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA
UNESP/FCT



EDUARDO RAMOS

Presidente Prudente (SP), 22 de maio de 2015.

Resultado: Aprovado

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Rita de Cássia e à minha avó Carmen que sempre me apoiaram; ao meu irmão Pedro e ao meu pai Luiz que me ajudaram em vários aspectos da tese; à minha tia Regina Célia que sempre me ajudou e à minha orientadora Cristiane Nespoli que me guiou durante essa extensa jornada. Agradeço também aos meus professores que sempre me inspiraram.

*“ Sempre me pareceu estranho que
todos aqueles que estudam seriamente esta ciência
acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma.
Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer
não é o conhecimento e sim a aprendizagem,
não é a posse, mas a aquisição,
não é a presença, mas o ato de atingir a meta.”*
Carl Friedrich Gauss

Resumo

No presente trabalho estudamos a teoria de Cálculo Variacional com o intuito de nos familiarizarmos com a teoria de Controle Ótimo. Estudamos também resultados da Teoria de Equações Diferenciais, com foco em Teoria da Medida, com o objetivo de demonstrarmos o Princípio Mínimo de Pontryagin, condição esta necessária para otimalidade de um controle. Por sua vez, condições de regularidade e existência para Controles Ótimos Lineares também foram estudadas, uma vez que são essenciais para determinação de controles ótimos. Por fim, utilizamos a teoria de Controle Ótimo acima indicada para a análise de um modelo de crescimento de câncer com quimioterapia com o objetivo de minimizar a quantidade de quimioterápico aplicada no tratamento.

Palavras-Chave: *Controle Ótimo, Controle de Câncer com Quimioterapia, Princípio do Mínimo de Pontryagin, Condições de Regularidade para Controles Ótimos.*

Abstract

In the worked here presented we study the theory of Optimal Control. We also studied results in Theory of Differential Equations focusing on Measure Theory, with the goal of proving the Pontryagin Minimum Principle, a necessary condition for optimality of a control. In turn, regularity and existence conditions for Optimal Linear Controls were also studied, since they are essential for determination of optimal controls. Finally, we used the theory of Optimal Control above mentioned for an analysis of a model of tumor with chemotherapy with the goal of minimizing the quantity of chemotherapy applied in the treatment.

Keywords: *Optimal Control, Control of Tumor with Chemotherapy, Pontryagin Minimum Principle, Regularity Conditions for Optimal Control.*

Lista de Figuras

3.1	Ilustração da construção de $u(t, \epsilon)$	32
4.1	Ilustração para o Teorema 16.	56
5.1	Retrato de Fase do Câncer sem Quimioterapia, com x e y normalizados. . .	60
5.2	Retrato de Fase do Câncer com Quimioterapia, com x e y normalizados. .	61
5.3	Pontos Finais para $c = 0.05$ e $d = 0.01$	63
5.4	Trajeto Ótimo Não-Singulares para $c = 0.05$ e $d = 0.01$	64
5.5	Pontos singulares com $0 \leq u(t) \leq 1$, e singulares críticos e supercríticos para $c = 0.05$ e $d = 0.01$	64
5.6	Trajeto Ótimo para $c = 0.05$ e $d = 0.01$	65
5.7	Arcos Chave para $c = 0.05$ e $d = 0.01$	65
5.8	Trajeto Ótimo para $(x_0, y_0) = (600, 0.2)$, para $c = 0.05$ e $d = 0.01$	65
5.9	Controle Ótimo para $(x_0, y_0) = (600, 0.2)$, para $c = 0.05$ e $d = 0.01$	66
5.10	Trajeto Ótimo para $c = 0.001$ e $d = 0.28$	66
5.11	Ilustração para demonstração do Lema 7.	68

Lista de Tabelas

5.1	Tabela das constantes utilizadas	62
-----	--	----

Lista de Notações

$L^1(X, Y)$: Funções Lebesgue integráveis partindo de $X \subset \mathbb{R}^n$ e chegando em $Y \subset \mathbb{R}$.

$\hat{C}(X, Y)$: Funções contínuas por partes partindo de $X \subset \mathbb{R}^n$ e chegando em $Y \subset \mathbb{R}$.

f é C^n : Indica f ser n vezes diferenciável com $f^{(n)}$ contínua no domínio de f .

PVI: Problema de Valor Inicial.

U_{ad} : Conjunto dos controles admissíveis.

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	9
Lista de Notações	13
Capítulos	
1 Introdução	17
2 Preliminares	21
2.1 Tópicos de Análise	21
2.2 Equações Diferenciais para funções Absolutamente Contínuas	23
3 Controle Ótimo	27
3.1 Controle Ótimo e o Princípio de Pontryagin	27
3.2 Problema de Controle Ótimo na forma Mayer	29
3.3 Demonstração do Princípio de Pontryagin	32
4 Problemas de Controle Ótimo Lineares	39
4.1 Aplicação do Princípio do Mínimo de Pontryagin	39
4.2 Teorema de Regularidade	42
4.3 Algoritmo de Determinação dos Controles Ótimos	53
4.4 Existência de Controle Ótimo	55
4.5 Condição Adicional para Ponto Final	57
5 Modelo de Câncer de Stepanova	59
5.1 Modelagem por Controle Ótimo	59
5.2 Análise do Problema pela Teoria de Controle Ótimo	61
5.3 Existência do Controle Ótimo	66
6 Conclusões e Propostas Futuras	71
Referências	71
Apêndices	

7	Apêndice A	75
7.1	Regra da Cadeia	75
7.2	Demonstração do Teorema 6	76
8	Apêndice B	81
8.1	Funções Adicionais	81
8.2	Algoritmos	82

Introdução

Sabemos que nas áreas matemáticas de Cálculo e Análise no \mathbb{R}^n a questão de minimização de funções é muito importante e encontra aplicação em diversas áreas. Da mesma forma, a minimização de funcionais, como por exemplo as integrais, tem também sua importância e esta tem sua teoria baseada em áreas da matemática como o *Cálculo Variacional* e o *Controle Ótimo*. Esta importância é maior ainda em certas áreas como a medicina onde a otimização no uso de medicações em doenças como o câncer são cruciais para que este não cause tantos danos.

Neste contexto, para a área de controle ótimo, foram desenvolvidas então diversas teorias para resolver seus problemas, dentre os quais destacamos uma condição necessária para otimalidade chamada de *Princípio Mínimo de Pontryagin*.

O objetivo principal deste trabalho consiste no estudo da teoria necessária para análise de modelos de tratamento de câncer com quimioterapia, vistos como um problema de controle ótimo. Neste sentido, a dissertação está estruturada como segue.

No Capítulo 2 apresentamos alguns conceitos de análise real como *função absolutamente contínua* e teoremas relacionados a esta definição. Também apresentamos um resumo envolvendo a teoria de equações diferenciais para funções absolutamente contínuas, teoria esta que será extensamente utilizada no decorrer deste trabalho.

No Capítulo 3 apresentamos a definição de um *Problema de Controle Ótimo*, focando nos problemas da seguinte forma:

- Dados $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m \subset \mathbb{R}^m$ e $D \subset \mathbb{R}^n$, para cada função $u \in L^1([0, T], \Omega)$, que chamamos de *controle*, tomamos uma função correspondente $x : [a, b] \rightarrow D$, que chamamos de *trajetória*, sendo esta definida pelo PVI em $[a, b]$

$$x'(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Queremos encontrar o controle u , que será chamado de *controle ótimo*, e o tempo final T que minimizem o custo

$$J(x, u) = \phi(x(T)) + \int_0^T L(x(t), u(t)) dt,$$

onde ϕ e L são funções de \mathbb{R}^n e $\mathbb{R}^n \times \Omega$, respectivamente, sobre \mathbb{R} .

Para o fim de encontrar tal controle ótimo u , apresentamos e provamos o *Princípio Mínimo de Pontryagin* para este tipo de problema, o qual diz que, para um controle

ótimo $(x(t), u(t))$, dado $H : D \times \mathbb{R}^n \times \Omega$ definido por $H(x, \lambda, u) = L(x, u) + \lambda f(x, u)$, deve existir $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que seja satisfeito o PVI em $[0, T]$

$$\lambda'(t) = -H_x(x(t), \lambda(t), u(t)), \quad \lambda(T) = \phi_x(x(T))$$

e a condição de minimalidade

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \min_{v \in \Omega} H(x(t), \lambda(t), v) \quad \text{q.c. em } [0, T]$$

Para provar este teorema supomos apenas que L , f e ϕ satisfaçam as seguintes condições:

- $L(x, u)$, $f(x, u)$ e $\phi_x(x, u)$ sejam mensuráveis em Ω para cada $x \in D$ fixado;
- $L_x(x, u)$, $f_x(x, u)$ e $\phi_{xx}(x, u)$ existam e sejam localmente limitadas em $D \times \Omega$.

Consideramos estas condições para o Princípio de Pontryagin bem fracas em comparação com as da literatura atual, as quais costumam exigir por exemplo que $L(x, u)$, $f(x, u)$ e $\phi_x(x, u)$ sejam contínuas em u . Por outro lado, o Princípio Mínimo de Pontryagin, com estas condições, pode ser encontrado em recente literatura, vide [20].

No Capítulo 4 tratamos de **Problemas de Controles Ótimos Lineares**, onde é feita a análise de seus controles ótimos através do Princípio de Pontryagin. Introduzimos e provamos então uma condição de regularidade para este tipo de problema, que é nova até onde vai nosso conhecimento da literatura atual. Mais especificadamente, demos condições para que um controle ótimo $u(t)$ seja **regular** (como definido no decorrer do capítulo) e também sejam contínuo por partes, sendo esta uma propriedade desejável para tal controle.

Na literatura atual, em comparação com esta condição de regularidade, Sussmann provou em [18] condições genéricas (como definido em [18] por exemplo) de regularidade para problemas de controles ótimos lineares com dimensão $n = 2$, enquanto Schattler provou em [15] condições genéricas de regularidade para problemas de controles ótimos lineares com dimensão $n = 3$. As hipóteses de nossas condições por outro lado são mais fracas do que estas duas, e acreditamos que elas sejam condições genéricas para problemas de controles ótimos lineares com dimensão $n = 4$. Utilizamos então tal condição de regularidade para criar um algoritmo que determine de forma exata todos os possíveis controles ótimos cujas trajetórias terminem num ponto final $z(T)$. Este algoritmo é útil por exemplo para análise gráfica dos controles ótimos. Criamos também um algoritmo para determinação aproximada de um possível controle ótimo $u(t)$ para um ponto inicial z_0 dado. Este algoritmo pode vir a ser especialmente útil pois notamos uma grande insatisfação na maioria dos artigos consultados, por parte dos autores, que utilizaram de métodos numéricos clássicos para obtenção de controles ótimos. De forma a complementar a utilização destes algoritmos, provamos também uma restrição nova para os pontos finais $z(T)$ da trajetória $z(t)$. Apresentamos também um teorema de existência clássico para problemas de controles ótimos lineares e introduzimos, e demonstramos, um resultado que consideramos útil para demonstrar a limitação de trajetórias, sendo esta uma propriedade exigida neste teorema de existência.

No Capítulo 5 apresentamos um modelo de crescimento de câncer com quimioterapia, devido a Stepanova [17], que corresponde ao conjunto de equações diferenciais

$$\begin{aligned} x' &= \mu_C x F(x) - \gamma xy - k_X u & \text{e} \\ y' &= \alpha - \delta y + \mu_I (x - \beta x^2) y - k_Y u, \end{aligned}$$

onde x representa a proporção de células tumorais no indivíduo, enquanto y representa a proporção de células imunocompetentes deste e u representa uma função que mede a dose de quimioterapia a ser aplicada. Em relação a este modelo, consideramos o problema de controle ótimo que consiste em minimizar o custo

$$J(u) = ax(T) - by(T) + \int_0^T cu(t) + d dt,$$

com $u \in L^1([0, T], [0, 1])$ e com a trajetória $(x(t), y(t))$ definida pelo PVI acima. Utilizamos então os resultados teóricos do Capítulo 4 para provar a existência de um controle ótimo $u(t)$ regular e contínuo por partes para este problema. Por fim, utilizamos os algoritmos abordados no Capítulo 4, para desenvolver um programa no software Matlab para determinação dos controles ótimos a partir dos possíveis pontos finais $z(T)$ e para analisar os resultados obtidos. Através de tais algoritmos, desenvolvemos também um programa para obter uma aproximação do controle ótimo $u(t)$ a partir de um dado ponto inicial $z(t)$.

A diferença entre a abordagem deste trabalho e a apresentada por Ledzewicz et. al em [7] é a de que aqui conseguimos utilizar a teoria para provar a existência de um controle ótimo regular e contínuo por partes, analisar graficamente o conjunto de controles ótimos e obtermos uma aproximação para um controle ótimo a partir de um ponto inicial (x_0, y_0) dado. Por sua vez, em [7] a teoria foi utilizada unicamente para análise gráfica de um conjunto de controles ótimos obtidos numericamente, sem justificativas dos algoritmos utilizados para tal determinação, ou prova da existência de tais controles ótimos.

Notamos também abordagens parecidas com a realizada em [7] pela maioria dos artigos que encontramos de controle ótimo aplicado em modelos de câncer. Entre estes citamos [12] (Matveev et. al.), [4] e [5] (Pillis et. al.) e [7] e [8], (Ledzewicz et. al.).

Preliminares

Este capítulo contém resultados preliminares que serão utilizados no decorrer do trabalho.

2.1 Tópicos de Análise

Durante o trabalho aqui apresentado, $\int f(t) dt$ indicará a integral de Lebesgue.

Definição 1 Dado $D \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que $f : [a, b] \rightarrow D$ é uma função **contínua por partes**, quando existem t_1, \dots, t_m , tais que f é contínua em (t_i, t_{i+1}) e os limites laterais $\lim_{t \rightarrow t_i^+} f(t)$ e $\lim_{t \rightarrow t_{i+1}^-} f(t)$ existem, para cada $1 \leq i < m$. Neste caso denotamos $f \in \hat{C}([a, b], D)$.

Definição 2 Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, diremos que $f(t)$ é **absolutamente contínua** em um intervalo $[a, b]$, caso exista $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo Lebesgue mensurável em $[a, b]$, tal que

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(s) ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Os teoremas seguintes podem ser vistos como os análogos, para integral de Lebesgue, do Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, pois tratam da derivação da integral de uma função.

Teorema 1 (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo para integral de Lebesgue) Sejam dadas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, tais que

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(s) ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Então, para cada $t \in [a, b]$, temos que $f'(t)$ existe com $f'(t) = g(t)$

Teorema 2 (Teorema de Diferenciação de Lebesgue) Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função Lebesgue integrável, tais que

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(s) ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Então, quase certamente em $[a, b]$, temos que $f'(t)$ existe com $f'(t) = g(t)$.

A definição a seguir nos dá uma aplicação deste teorema.

Definição 3 *Dada uma função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, b]$, dizemos que um ponto p é **regular** de g em $[a, b]$ quando $f(t) = \int_a^t g(s) ds$ for diferenciável em relação a t no ponto p , com $f'(p) = g(p)$.*

Assim, como consequência direta do Teorema 2, temos o corolário a seguir.

Corolário 1 *Dada $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, b]$, temos que p é ponto regular de $g(t)$ quase certamente em $[a, b]$.*

Outra aplicação do Teorema 2 é que, em especial, funções absolutamente contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ têm derivada $f'(t)$ quase certamente em $[a, b]$.

Quando uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ possuir derivada $f'(t)$, quase certamente em $[a, b]$, como as funções absolutamente contínuas, definiremos a função $f' : [a, b] \times \mathbb{R}^n$ como sendo a derivada de f em t , quando esta existir, caso contrário será 0.

Em relação a isto, temos o teorema a seguir, que pode ser visto como análogo, para integral de Lebesgue, do Segundo Teorema Fundamental do Cálculo, por tratar da integração da derivada de uma função.

Teorema 3 (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo para integral de Lebesgue)

Sendo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função absolutamente contínua em $[a, b]$, então $f'(t)$ é Lebesgue Integrável e

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) ds.$$

Os teoremas anteriores podem ser encontrados, por exemplo, em [13] (McShane, 1947, Teor. 33.2, Teor. 33.3 e Teor. 35.3), ou [6] (Folland, 1999, Teor. 3.21 e Teor. 3.35).

Por fim, introduzimos abaixo duas formas distintas da regra da cadeia. A primeira é uma forma econômica da regra da cadeia usual para funções diferenciáveis. Já a segunda é uma versão da regra da cadeia para funções absolutamente contínuas.

Proposição 1 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções tais que $x(t)$ e $y(t)$ sejam diferenciáveis num ponto $t_0 \in [a, b]$, tal que $f_y(x(t_0), y(t_0))$ exista, e $f_x(x, y)$ exista para todo x e y em $[a, b]$ e seja contínua no ponto $(x(t_0), y(t_0))$.*

Então $f(x(t), y(t))$ é diferenciável no ponto $t = t_0$ e vale a regra da cadeia

$$f'(x(t_0), y(t_0)) = f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0).$$

Proposição 2 *Dado $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $x : [a, b] \rightarrow D$ funções tais que $x(t)$ seja absolutamente contínua em $[a, b]$, e $f_x(x)$ exista e seja localmente limitada em D .*

Então $f(x(t))$ é absolutamente contínua em $[a, b]$ e vale a regra da cadeia

$$f'(x(t)) = f_x(x(t))x'(t).$$

Ambas proposições estão demonstradas no Apêndice A.

2.2 Equações Diferenciais para funções Absolutamente Contínuas

Nesta seção, tratamos da teoria de equações diferenciais para funções absolutamente contínuas. Para facilitar a escrita, dado $x : [a, b] \rightarrow D$, com $D \subset \mathbb{R}^n$, dizer que x satisfaz o PVI em $[a, b]$

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(\tau) = \rho, \quad (2.1)$$

significa que $x(t)$ é absolutamente contínua em $[a, b]$, que $\tau \in [a, b]$, $\rho \in D$ e que a igualdade na equação diferencial acima ocorre quase certamente em $[a, b]$.

Segundo os Teoremas 2 e 3, isto é equivalente a dizer que

$$x(t) = \rho + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in [a, b], \quad \text{com } \tau \in [a, b] \quad \text{e } \rho \in D.$$

Logo, utilizaremos ambas as formas de escrita para representar o mesmo fato.

Observamos que a equação (2.1) pode ser tanto uma equação de matrizes quanto de vetores linhas ou vetores colunas.

Para os próximos teoremas será útil a seguinte definição:

Definição 4 Dado $D \subset \mathbb{R}^n$, diremos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **localmente limitada** em D quando, para cada $y \in D$, existir um aberto $A \subset D$, com $y \in A$ e f limitado em A . Analogamente, dado $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, diremos que f é **localmente Lipschitziana** em $[a, b] \times D$ em relação a x caso, para cada $y \in D$, existir um aberto $A \subset D$ e $M > 0$, com $y \in A$, tal que $|f(t, x) - f(t, y)| < M(x - y) \forall t \in [a, b]$ e $\forall x, y \in A$,

O seguinte teorema nos fala sobre a existência local de soluções do PVI (2.1).

Teorema 4 (Existência Local) Dado D aberto em \mathbb{R}^n , seja $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$, tal que:

- $f(t, x)$ é mensurável em t para cada $x \in D$ fixado;
- $f(t, x)$ é localmente limitada em $[a, b] \times D$.

Então, existe $[c, d] \subset [a, b]$, $\tau \in (c, d)$ e $x : [c, d] \rightarrow D$ satisfaz o PVI em $[c, d]$

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(\tau) = \rho.$$

Por fim, o seguinte teorema, nos fala sobre a unicidade de soluções.

Teorema 5 (Unicidade) Dado D aberto de \mathbb{R}^n , seja $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de $(t, x) \in [a, b] \times D$, tal que:

- $f(t, x)$ é mensurável em t para cada $x \in D$ fixado;
- $f(t, x)$ é localmente Lipschitziana em $[a, b] \times D$ em relação a x .

Então, dado $[c, d] \subset [a, b]$, caso exista a solução $x : [c, d] \rightarrow D$ do PVI em $[c, d]$

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(\tau) = \rho,$$

então esta é única.

Tais teoremas podem ser encontrados por exemplo em [11] (Lukes, 1982, Teor. 9.2.1, Teor. 10.3.2 e Teor. 9.2.3).

Notemos que o Teorema 5 garante que, para cada condição inicial, $\rho \in \mathbb{R}^n$ teremos (caso exista), uma única solução x do PVI (2.1). Podemos então denotar esta solução por $x(t, \rho)$, ou seja, x depende de t e de sua condição inicial ρ .

Em relação à continuidade e diferenciabilidade de $x(t, \rho)$ em relação à condição inicial ρ temos o Teorema 6 abaixo, que também nos diz sobre a existência global destas soluções.

Teorema 6 *Dado D aberto em \mathbb{R}^n , seja $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$, tal que:*

- $f(t, x)$ é mensurável em t para cada $x \in D$ fixado;
- $f_x(t, x)$ existe para todo $(t, x) \in [a, b] \times D$ e é localmente limitada em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$.

Suponha ainda que exista uma solução $\psi : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ do PVI em $[a, b]$

$$\psi'(t) = f(t, \psi(t)), \quad \psi(\tau) = \rho_0.$$

Então, existe $\gamma > 0$ e $x : [a, b] \times B(\rho_0, \gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua em $[a, b] \times B(\rho_0, \gamma)$ satisfazendo o PVI em $[a, b]$

$$x'(t, \rho) = f(t, x(t, \rho)), \quad x(\tau, \rho) = \rho.$$

Além do mais, $x(t, \rho)$ será diferenciável em relação a ρ em $\rho = \rho_0$, com $\frac{dx(t, \rho_0)}{d\rho}$ (matriz Jacobiana $n \times n$ de $x(t, \rho)$ em relação a ρ) satisfazendo o PVI em $[a, b]$

$$\left(\frac{dx(t, \rho_0)}{d\rho} \right)' = f_x(t, x(t, \rho_0)) \frac{dx(t, \rho_0)}{d\rho}, \quad \frac{dx(\tau, \rho_0)}{d\rho} = I_n.$$

Este teorema pode ser encontrado em [13] (McShane, 1947, Sec. 69.4). Uma demonstração essencialmente mais curta do mesmo foi introduzida por nós no Apêndice A.

O corolário a seguir é apenas uma aplicação deste teorema.

Corolário 2 *Seja $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$, tal que:*

- $f(t, x)$ é mensurável em t para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado;
- $f_x(t, x)$ existe para todo $(t, x) \in [a, b] \times D$ e é localmente limitada em $[a, b] \times D$.

Seja dada também $\omega : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de $\epsilon \in (c, d) \subset \mathbb{R}$, diferenciável em $\epsilon_0 \in (c, d)$, tal que exista uma solução $\psi : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ do PVI em $[a, b]$

$$\psi'(t) = f(t, \psi(t)), \quad \psi(\tau) = \omega(\epsilon_0).$$

Então, existe $\delta > 0$ e $x : [a, b] \times B(\epsilon_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, contínua em $[a, b] \times B(\epsilon_0, \delta)$, satisfazendo o PVI em $[a, b]$

$$x'(t, \epsilon) = f(t, x(t, \epsilon)), \quad x(\tau, \epsilon) = \omega(\epsilon).$$

Além do mais, $x(t, \epsilon)$ será diferenciável em relação a ϵ em ϵ_0 para todo $t \in [a, b]$ com $\frac{dx(t, \epsilon_0)}{d\epsilon}$ sendo a solução do PVI em $[a, b]$

$$\left(\frac{dx(t, \epsilon_0)}{d\epsilon} \right)' = f_x(t, x(t, \epsilon_0)) \frac{dx(t, \epsilon_0)}{d\epsilon}, \quad \frac{dx(\tau, \epsilon_0)}{d\epsilon} = \omega'(\epsilon_0).$$

Demonstração. Pelo Teorema 6, temos que existem $\gamma > 0$ e $y : [a, b] \times B(\omega(e_o), \gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$, contínua, satisfazendo o PVI

$$y(t, \rho) = \rho + \int_a^t f(s, y(s, \rho)) ds. \quad (2.2)$$

Logo, basta tomarmos, por continuidade de ω em ϵ_0 , $\delta > 0$ tal que $\epsilon \in B(\epsilon_0, \delta)$ implique em $\omega(\epsilon) \in B(\omega(\epsilon_0), \gamma)$. Tomamos então $x : [a, b] \times B(\epsilon_0, \delta)$ definida por

$$x(t, \epsilon) = y(t, \omega(\epsilon)).$$

Por composição, $x(t, \epsilon)$ será contínua, e, pela equação (2.2), teremos que x satisfaz

$$x(t, \epsilon) = \omega(\epsilon) + \int_a^t f(s, y(s, \omega(\epsilon))) ds = \omega(\epsilon) + \int_a^t f(s, x(s, \epsilon)) ds.$$

Por fim, como $y(t, \rho)$ é diferenciável em relação a ρ em $\rho = \omega(\epsilon_0)$, utilizando a regra da cadeia usual, temos que $x(t, \epsilon) = y(t, \omega(\epsilon))$ é diferenciável em relação a ϵ em $\epsilon = \epsilon_0$ e sua diferencial satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{dx(t, \epsilon_0)}{d\epsilon} &= \frac{dy(t, \omega(\epsilon_0))}{d\rho} \omega'(\epsilon_0) \\ &= I_n \omega'(\epsilon_0) + \int_a^t f_x(s, y(s, \omega(\epsilon_0))) \frac{dy(s, \omega(\epsilon_0))}{d\epsilon} \omega'(\epsilon_0) ds \\ &= \omega'(\epsilon_0) + \int_a^t f_x(s, x(s, \epsilon_0)) \frac{dx(s, \epsilon_0)}{d\epsilon} ds. \end{aligned}$$

Assim, a demonstração está completa. ■

Notemos que neste corolário temos que $\frac{dx(s, \epsilon_0)}{d\epsilon}$ satisfaz um PVI linear de dimensão n . Para resolver este tipo de equação linear será muito importante o teorema a seguir.

Teorema 7 *Dado D aberto de \mathbb{R} , seja $A : [a, b] \rightarrow M_n(D)$ uma matriz com entradas em função de t , localmente limitada em $[a, b]$.*

Então, existe uma única solução $W : [a, b] \times [a, b] \rightarrow M_n(D)$ para o PVI em $[a, b]$

$$\frac{dW(t, \tau)}{dt} = A(t)W(t, \tau), \quad W(\tau, \tau) = I_n.$$

Além do mais, $W(t, \tau)$ será também a única solução do PVI em $[a, b]$ (agora em função de τ)

$$\frac{dW(t, \tau)}{d\tau} = -W(t, \tau)A(\tau), \quad W(\tau, \tau) = I_n.$$

A matriz $W(t, \tau)$ acima é chamada de **matriz elementar** de $A(t)$, podendo ser denotada por $W_A(t, \tau)$.

Como consequência deste teorema temos o corolário a seguir.

Corolário 3 *Dado D aberto de \mathbb{R} , seja $A : [a, b] \rightarrow M_n(D)$ uma matriz com entradas em função de t , localmente limitada em $[a, b] \subset M_n(D)$.*

Então, dado $(\tau, \rho) \in [a, b] \times D$, onde $\rho \in \mathbb{R}^n$ é um vetor coluna, existe uma única solução $x : [a, b] \rightarrow D$ para o PVI

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad x(\tau) = \rho.$$

No caso, $x(t)$ é dada por

$$x(t) = W_A(t, \tau)\rho.$$

Além do mais, dado $(\tau, \delta) \in [a, b] \times D$, onde $\delta \in \mathbb{R}^n$ é um vetor linha, existe uma única solução $y : [a, b] \rightarrow D$ para o PVI

$$y'(t) = -y(t)A(t), \quad y(\tau) = \delta.$$

No caso, $y(t)$ é dada por

$$y(t) = \delta W_A(\tau, t).$$

Vale observar que $x(t)$ corresponde a um vetor coluna de dimensão n , enquanto $y(t)$ corresponde a um vetor linha, também de dimensão n .

Este teorema nos indica como resolver equações diferenciais lineares de vetores através da matriz elementar anteriormente definida.

O Teorema 7 e o Corolário 3 podem ser encontrados em [11] (Lukes, Teor. 6.3.2 e Teor. 6.4.1).

Controle Ótimo

3.1 Controle Ótimo e o Princípio de Pontryagin

Os problemas de controle ótimo tiveram origem por volta de 1965, através da teoria do Cálculo Variacional. Os principais pesquisadores que contribuíram para o início e desenvolvimento desta teoria foram Bellman [2] e Pontryagin [14]

Definiremos, em geral um problema de controle ótimo como um problema da forma:

$$\text{Problema Geral} \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(x, u) = \phi(T, x(T)) + \int_{t_0}^T L(t, x(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ u \in U_{ad}([t_0, T], \Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^m, \text{ com} \\ x : [t_0, T] \rightarrow D, \text{ para } D \subset \mathbb{R}^n, \text{ satisfazendo o PVI em } [t_0, T] \\ x'(t) = f(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_{t_0} \end{array} \right.$$

Acima, o tempo final T pode estar fixo ou estar livre (deixado a ser determinado).

Estará implícito na formulação acima que L , f e ϕ são funções de $D \times \Omega$ sobre \mathbb{R}^n . A função $u : [t_0, T] \rightarrow \Omega$ representa o controle que temos do sistema. A variável $x : [t_0, T] \rightarrow D$ representa a trajetória correspondente a cada controle u . Já $U_{ad}([t_0, T], \Omega)$ é um conjunto de funções de $[t_0, T]$ sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, representando as restrições impostas ao nosso controle u , a qual todo controle admissível u deve pertencer.

Para um controle $u \in U_{ad}([t_0, T], \Omega)$, com uma trajetória admissível $x(t)$, ambos satisfazendo as restrições do problema acima e minimizando o custo $J(x, u)$, damos o nome de **controle ótimo** do problema.

Notemos desde já que, caso tenhamos $u(t) = w(t)$ quase certamente em $[t_0, T]$, então ambos possuem a mesma trajetória $x(t)$ e mesmo custo $J(x, u) = J(x, w)$, de modo que, se $u(t)$ é um controle ótimo do problema acima, então $w(t)$ também o é, e vice-versa.

Podemos observar que, na literatura atual, é comum impor-se, além das condições acima, condições para o ponto final $x(T)$. Por exemplo, fixar $x(T) = w$ para algum $w \in \mathbb{R}^n$ ou tomar $\psi(x(T)) = 0$, de forma mais geral, para alguma função $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$, s natural. Por outro lado, para tais tipos de problemas, a teoria envolvida em sua análise se torna complexa e extensa, além de que tal generalidade não nos será útil nos modelos aqui estudados. Para referências neste assunto ver: [14] (Pontryagin, 1962, Sec. 1.3), [10] (Leitão, 2001, Cap. 3) e [16] (Schattler, 2012, Sec. 2.2).

Focaremos daqui em diante na versão autônoma do Problema Geral, apresentada na sequência.

Problema 1 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(x, u) = \phi(x(T)) + \int_0^T L(x(t), u(t)) dt \\ \text{com } T \text{ livre, sujeito a} \\ u \in L^1([0, T], \Omega), \Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m \subset \mathbb{R}^m, \text{ com} \\ x : [a, b] \rightarrow D, \text{ para } D \subset \mathbb{R}^n, \text{ satisfazendo o PVI em } [0, T] \\ x'(t) = f(x(t), u(t)), x(0) = x_0 \end{array} \right.$

onde os conjuntos $\Omega_i \subset \mathbb{R}$, com $i = 1, \dots, m$, representam os contra-domínios da i -ésima coordenada do controle u . A condição T livre significa que a minimização acima deve ocorrer para cada $T > 0$. Já $L^1(A, B)$, onde $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}^n$, indica o conjunto das funções $f : A \rightarrow B$ Lebesgue integráveis em A .

Na literatura atual, podemos encontrar este problema com restrições do controle na forma $u \in \hat{C}([0, T], \Omega)$, ao invés de $u \in L^1([0, T], \Omega)$. Se por um lado isto simplifica em muito a teoria envolvida em sua análise, por outro, não são conhecidos resultados úteis de existência compatíveis com esta restrição. Para referências neste assunto ver [3] (Boltyanski, 1990, Sec. 1.8), [19] (Troutman, 1983, Cap. 10).

A seguir apresentamos o princípio de Pontryagin para o Problema 1, o qual representa uma condição necessária para que um controle u seja ótimo. Este princípio constitui uma das mais importantes condições para determinação dos controles ótimos.

Teorema 8 (Pontryagin) *Dados D aberto em \mathbb{R}^n e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ compacto, sejam dadas as funções $L : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:*

- $L(x, u)$ e $f(x, u)$ sejam mensuráveis em Ω para cada $x \in D$;
- $L_x(x, u)$, $f_x(x, u)$ e $\phi_{xx}(x)$ existam e sejam localmente limitadas em seus domínios.

Suponha ainda que (x, u) seja um mínimo do Problema 1 e que a função $H : D \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ esteja definida por

$$H(x, \lambda, u) = L(x, u) + \lambda f(x, u).$$

Existe então uma função $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que é satisfeito o PVI em $[0, T]$

$$\lambda'(t) = -H_x(x(t), \lambda(t), u(t)), \quad \lambda(T) = \phi_x(x(T))$$

e a condição de minimalidade

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \min_{v \in \Omega} H(x(t), \lambda(t), v) \quad \text{q.c. em } [0, T].$$

Adicionalmente,

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = 0 \quad \text{q.c. em } [0, T],$$

com igualdade garantida para t , quando ocorrer $H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \min_{v \in \Omega} H(x(t), \lambda(t), v)$.

No teorema acima, considere o conjunto A dos pontos $t \in [0, T]$ tais que

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) \neq \min_{v \in \Omega} H(x(t), \lambda(t), v)$$

e $H(x(t), \lambda(t), v)$ admita um mínimo w em Ω . Pelo teorema acima, temos que A tem medida nula.

Definamos então um novo controle $u^* : [0, T] \rightarrow \Omega$, a partir de $u(t)$, tomando

$$u^*(t) = \begin{cases} u(t), & \text{para } t \in A^c \\ w, & \text{para } t \in A, \text{ onde } w \in \Omega \text{ minimiza } H(x(t), \lambda(t), v). \end{cases}$$

Assim, $u^*(t) = u(t)$ quase certamente em $[0, T]$, e

$$H(x(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{v \in \Omega} H(x(t), \lambda(t), v)$$

para todo t tal que $H(x(t), \lambda(t), v)$ admita um mínimo $w \in \Omega$.

Note ainda que, dado $u(t)$ regular, caso $H(x(t), \lambda(t), u)$ seja contínua em u , então esta sempre admitirá um mínimo $w \in \Omega$, de modo que vale

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \min_{v \in \Omega} H(x(t), \lambda(t), v) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Esta observação nos diz que, caso $H(x(t), \lambda(t), u)$ seja contínua em u , precisamos apenas procurar pelos controles ótimos $u(t)$ que sempre minimizem o Hamiltoniano, pois todos os outros vão diferir deste em apenas um conjunto de medida nula.

3.2 Problema de Controle Ótimo na forma Mayer

Chamaremos de um *Problema de Controle Ótimo na forma Mayer* (com T livre e ponto final livre) como todo problema na forma

$$\text{Problema 2} \begin{cases} \text{Minimizar } J(x, u) = x_n(T) \\ \text{com } T \text{ livre, sujeito a} \\ u \in L^1[0, T], \Omega = \Omega_1 \times \Omega_m \subset \mathbb{R}^m, \text{ com} \\ x : [a, b] \rightarrow D, \text{ para } D \subset \mathbb{R}^n, \text{ satisfazendo o PVI em } [0, T] \\ x'(t) = f(x(s), u(s)), x(0) = x_0. \end{cases}$$

Acima, x_n representa a n -ésima coordenada de x , sendo que x_n também está incluso na equação diferencial do PVI acima.

Notemos que este Problema é apenas um caso específico do Problema 1. Veremos adiante também que, apesar da simplicidade do Problema na forma Mayer, todo problema na forma do Problema 1 pode ser convertido na forma do Problema 2.

A seguir temos o Princípio de Pontryagin para o Problema 2.

Teorema 9 (Pontryagin) *Dados D aberto em \mathbb{R}^n e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ compacto, seja $f : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:*

- $f(x, u)$ é mensurável em Ω para cada $x \in D$,
- $f_x(x, u)$ exista e seja localmente limitada em $D \times \Omega$.

Suponha ainda que (x, u) seja um mínimo do Problema 2 e que a função $H : D \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ esteja definida por

$$H(x, \lambda, u) = \lambda f(x, u).$$

Existe então uma função $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que é satisfeito o PVI em $[0, T]$

$$\lambda'(t) = -H_x(x(t), \lambda(t), u(t)), \quad \lambda(T) = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

e a condição de minimalidade

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \min_{v \in \Omega} H(x(t), \lambda(t), v) \quad \text{q.c. em } [0, T].$$

Adicionalmente,

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = 0 \quad \text{q.c. em } [0, T],$$

com igualdade garantida para t , quando ocorrer $H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \min_{v \in \Omega} H(x(t), \lambda(t), v)$.

Note que este teorema é apenas uma aplicação direta do Teorema 8 para o problema na forma Mayer. Interessantemente, a recíproca também é verdadeira:

Lema 1 *O Teorema 8 é consequência do Teorema 9.*

Demonstração. De fato, vejamos como transformar o Problema 1 para a forma Mayer:

Dados x , f , L e ϕ satisfazendo o enunciado do Teorema 8, considere

$$\begin{aligned} g^*(x(t), u(t)) &= L(x(t), u(t)) + \phi_x(x(t))f(x(t), u(t)), \\ y^*(t) &= \phi(x_0) + \int_0^T g^*(x(t), u(t)) dt \end{aligned}$$

e defina: $g = (f_1, \dots, f_n, g^*)$, $y = (x_1, \dots, x_n, y^*)$ e $y_0 = (x_0, \phi(x_0))$.

Assim, pelas definições anteriores, temos que y satisfaz o PVI

$$y(t)' = g(y(t), u(t)), \quad y(0) = y_0. \quad (3.1)$$

Note que, por sua definição, $g(y(t), u(t))$ não depende realmente da variável y^* , e

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \phi(x(T)) + \int_0^T L(x(t), u(t)) \\ &= \phi(x(0)) + \int_0^T \phi'(x(t)) dt + \int_0^T L(x(t), u(t)) dt \\ &= \phi(x_0) + \int_0^T (L(x(t), u(t)) + \phi_x(x(T))f(x(t), u(t))) dt \\ &= \phi(x_0) + \int_0^T g^*(x(t), u(t)) dt = y(T). \end{aligned}$$

Ou seja, encontrar um mínimo (x, u) do Problema 1 corresponde a encontrar um mínimo (y, u) do Problema 2 (problema na forma Mayer), com $y : [a, b] \rightarrow D \times \mathbb{R}$ satisfazendo o PVI (3.1).

Assim, podemos aplicar o Teorema 9 a este novo problema, de modo que, sendo $W : (D \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $W(y, \mu, u) = \mu g(y, u)$ teremos que existe $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo o PVI

$$\mu'(t) = -W_x(y(t), \mu(t), u), \quad \mu(T) = (0, 0, \dots, 0, 1) \quad (3.2)$$

e a condição de minimalidade

$$W(y(t), \mu(t), u(t)) = \min_{v \in \Omega} W(y(t), \mu(t), v) \quad \text{q.c. em } [0, T], \quad (3.3)$$

além de que

$$W(y(t), \mu(t), u(t)) = 0 \quad \text{q.c. em } [0, T].$$

Provaremos agora a condição de minimalidade do Hamiltoniano.

(i) Da equação (3.2) segue que $\mu_{n+1}(t)$ satisfaz o PVI em $[0, T]$

$$\mu'_{n+1}(t) = H_{y^*}(y(t), \mu(t), u(t)), \quad \mu(t_0) = 1.$$

De modo que, sendo $H_{y^*}(y(t), \mu(t), u(t)) = \mu g_{y^*}(y(t), u(t)) = 0$ (pois $g(y, u)$ não depende de y^*) temos que $\mu'_{n+1}(t)$ satisfaz o PVI em $[0, T]$

$$\mu'_{n+1}(t) = 0, \quad \mu(t_0) = 1.$$

Ou seja, $\mu_{n+1}(t) = 1 + \int_0^T 0 dt = 1 \forall t \in [0, T]$.

Denote agora $\rho = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$. Então,

$$\begin{aligned} W(y(t), \mu(t), u(t)) &= \mu(t)g(y(t), u(t)) \\ &= \mu_{n+1}(t)g^*(x(t), u(t)) + \rho(t)f(x(t), u(t)) \\ &= L(x(t), u(t)) + \phi_x(x(t))f(x(t), u(t)) + \rho(t)f(x(t), u(t)) \\ &= L(x(t), u(t)) + (\phi_x(x(t)) + \rho(t))f(x(t), u(t)). \end{aligned}$$

Defina $\lambda(t) = \phi_x(x(t)) + \rho(t)$ e seja $H(x, \lambda, u) = L(x, u) + \lambda f(x, u)$ como no enunciado. Segue então que

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = W(y(t), \mu(t), u(t)), \quad (3.4)$$

de onde segue diretamente de (3.3) que

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \min_{v \in \Omega} H(x(t), \lambda(t), v) \quad \text{q.c. em } [0, T]$$

e que

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = 0 \quad \text{q.c. em } [0, T],$$

com igualdade garantida para t quando ocorrer $H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \min_{v \in \Omega} H(x(t), \lambda(t), v)$, como queríamos.

Agora provamos o PVI satisfeito por $\lambda(t)$.

(ii) De $g_x(x(t), \lambda(t), u(t)) = (f_x(x(t), u(t)), g_x^*(x(t), \lambda(t), u(t)))$ e da definição de ρ , temos que ρ satisfaz

$$\begin{aligned} \rho'(t) &= -\mu(t)g_x(x(t), \lambda(t), u(t)) = -g_x^*(x(t), u(t)) - \rho(t)f_x(x(t), u(t)) \\ &= -L_x(x(t), u(t)) - \phi_{xx}(x(t))f(x(t), u(t)) - \phi_x(x(t))f_x(x(t), u(t)) - \rho(t)f_x(x(t), u(t)), \end{aligned}$$

e $\rho(T) = 0$.

Além do mais, como $\phi_{xx}(x)$ existe e é localmente limitado por hipótese e $x(t)$ é absolutamente contínua em $[0, T]$, segue da Regra da Cadeia (Proposição 2) que $\phi_x(x(t))$ é absolutamente contínua em $[0, T]$ com

$$\phi'_x(x(t)) = \phi_{xx}(x(t))x'(t) = \phi_{xx}(x(t))f(x(t), u(t)).$$

Assim, de $\lambda(t) = \phi_x(x(t)) + \rho(t)$, temos que $\lambda(t)$ também é absolutamente contínua, e

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= \phi'_x(x(t)) + \rho'(t) = \phi_{xx}(x(t))f(x(t), u(t)) + \dots \\ &\dots - L_x(x(t), u(t)) - \phi_{xx}(x(t))f(x(t), u(t)) - \phi_x(x(t))f_x(x(t), u(t)) - \rho(t)f_x(x(t), u(t)) \\ &= -L_x(x(t), u(t)) - (\phi_x(x(t)) + \rho(t))f_x(x(t), u(t)) \\ &= -L_x(x(t), u(t)) - \lambda(t)f_x(x(t), u(t)), \end{aligned}$$

com $\lambda(T) = \rho(T) + \phi_x(x(T)) = \phi_x(x(T))$, ou seja, temos que $\lambda(T)$ de fato satisfaz o PVI

$$\lambda'(T) = -H_x(x(T), \lambda(T), u(T)), \quad \lambda(T) = \phi_x(x(T)),$$

como queríamos provar. ■

3.3 Demonstração do Princípio de Pontryagin

Esta é uma demonstração simples e rigorosa para o Teorema 8. A partir do Lema 1, para provar o Teorema 8 só precisamos provar o Teorema 9, o que faremos na sequência.

Demonstração. A demonstração seguirá em 4 partes:

- **Parte 1:** Definimos uma nova classe de controles $u(t, \epsilon)$ a partir de $u(t)$.
- **Parte 2:** Inferimos sobre as propriedades de diferenciação das trajetórias $x(t, \epsilon)$ correspondentes aos controles $u(t, \epsilon)$.
- **Parte 3:** Utilizamos os controles $u(t, \epsilon)$ para inferir os resultados principais do teorema, através da minimalidade de $J(u)$.
- **Parte 4:** Provamos as propriedades de nulidade do Hamiltoniano.

Parte 1:

Sejam fixados $v \in \Omega$ qualquer e τ um ponto regular de $f(x(t), u(t))$ em $[0, T]$.

Definimos o controle $u(t, \epsilon)$ para t em $[0, T]$ como sendo a função dada por

$$u(t, \epsilon) = \begin{cases} u(t) & \text{para } t \in [0, \tau - \epsilon] \\ v & \text{para } t \in (\tau - \epsilon, \tau) \\ u(t) & \text{para } t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

Tal construção é ilustrada como na Figura 3.1.

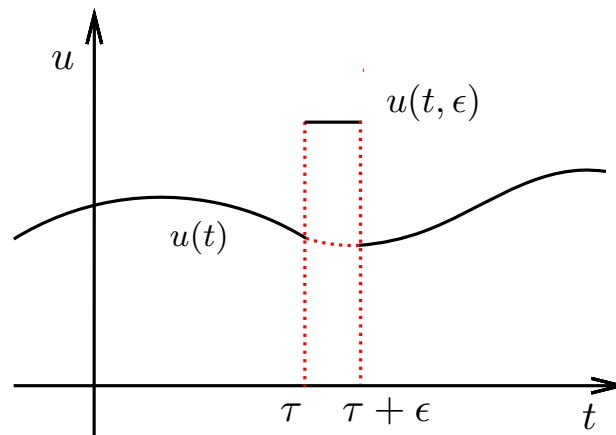


Figura 3.1: Ilustração da construção de $u(t, \epsilon)$.

Note que, por esta definição, $u(t, 0) = u(t)$.

Agora mostraremos que, para ϵ pequeno o bastante, existirá uma trajetória $x(t, \epsilon)$, definida num subconjunto de $D \times \Omega$, associada ao controle $u(t, \epsilon)$, tal que, para $x(t, \epsilon)$ seja solução do PVI em $[0, T]$

$$x(t, \epsilon) = x_0 + \int_0^t f(x(s, \epsilon), u(s, \epsilon)) ds. \quad (3.5)$$

Para isto basta mostrarmos a existência de $\delta > 0$, $x_1 : [\tau - \epsilon, \tau] \times [0, \delta]$ e $x_2 : [\tau, T] \times [0, \delta]$, satisfazendo, respectivamente, os PVI

$$\begin{aligned} x_1(t, \epsilon) &= x(\tau - \epsilon) + \int_{\tau - \epsilon}^t f(x_1(s, \epsilon), v) ds \quad \text{e} \\ x_2(t, \epsilon) &= x_1(\tau, \epsilon) + \int_{\tau}^t f(x_2(s, \epsilon), u(s)) ds. \end{aligned}$$

Assim, caso existam tais x_1 e x_2 , definindo $x : [0, T] \times [0, \delta]$ como

$$x(t, \epsilon) = \begin{cases} x(t) & \text{para } t \in [0, \tau - \epsilon] \\ x_1(t, \epsilon) & \text{para } t \in (\tau - \epsilon, \tau) \\ x_2(t, \epsilon) & \text{para } t \in [\tau, T], \end{cases} \quad (3.6)$$

temos, pela definição por partes de $u(t, \epsilon)$, que $x(t, \epsilon)$ satisfaz o PVI (3.5) em $[0, T]$.

Mostraremos a existência de tais x_1 e x_2 a seguir. Mostraremos também, a seguir, que $x(t, \epsilon)$, assim definido, será diferenciável em relação a ϵ em $\epsilon = 0$ e calcularemos sua derivada.

Parte 2

a) Existência e Diferenciabilidade de $x_1(t, \epsilon)$

(i) Existência.

Tomemos $f^* : [0, T] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f^*(t, x) = f(x, v)$ (note que f^* está em função de t , mas é constante em relação a este). Segue que f^* é mensurável em t e, por f^* ser contínua em relação a x e não depender de t , segue também que é localmente limitada em $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Temos então, pelo Teorema 4, que existe $\delta_0 > 0$ e $\psi_1 : [\tau - \delta_0, \tau + \delta_0] \rightarrow D$ solução do PVI em $[\tau - \delta_0, \tau + \delta_0]$

$$\psi_1(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^t f^*(s, \psi_1(s)) ds = x(\tau) + \int_{\tau}^t f(\psi(s), v) ds.$$

Assim, tomando $\omega_1(\epsilon) = x(\tau - \epsilon)$, podemos então aplicar o Teorema 6, implicando que existe $0 < \delta_1 < \delta_0$ e $y : [\tau - \delta_1, \tau + \delta_1] \times [-\delta_1, \delta_1] \rightarrow D$, contínua em (t, ϵ) e diferenciável em relação a ϵ em $\epsilon = 0$, satisfazendo o PVI em $[\tau - \delta_1, \tau + \delta_1]$

$$y(t, \epsilon) = \omega_1(\epsilon) + \int_{\tau}^t f(y(s, \epsilon), v) ds = x(\tau - \epsilon) + \int_{\tau}^t f(y(s, \epsilon), v) ds.$$

Agora basta definirmos $x_1 : [\tau - \delta_1, \tau] \times [0, \delta_1] \rightarrow D$ como $x_1(t, \epsilon) = y(t + \epsilon, \epsilon)$, para cada $(t, \epsilon) \in [\tau - \delta_1, \tau] \times [0, \delta_1]$ e segue, pelo teorema de mudança de variáveis na integral de Lebesgue, que $x_1(t, \epsilon)$ satisfaz, em $[\tau - \delta_1, \tau]$

$$\begin{aligned} x_1(t, \epsilon) &= x(\tau - \epsilon) + \int_{\tau}^{t+\epsilon} f(y(s, \epsilon), v) ds \\ &= x(\tau - \epsilon) + \int_{\tau - \epsilon}^t f(y(r + \epsilon, \epsilon), v) ds = x(\tau - \epsilon) + \int_{\tau - \epsilon}^t f(x_1(r, \epsilon), v) dr. \end{aligned}$$

Ou seja, x_1 satisfaz o PVI em $[\tau - \delta_1] \times [-\delta_1, \delta_1]$

$$x_1(t, \epsilon) = x(\tau - \epsilon) + \int_{\tau - \epsilon}^t f(x_1(s, \epsilon), v) ds,$$

como queríamos.

(ii) Diferenciabilidade.

Do fato de $y(t, \epsilon)$ ser contínua em relação a $(t, \epsilon) \in [\tau - \delta_0, \tau + \delta_0] \times [-\delta_1, \delta_1]$ segue, por composição, que $f(y(t, \epsilon), v)$ é também contínua em relação a (t, ϵ) . Assim, pelo Primeiro Teorema fundamental do Cálculo para Integral de Lebesgue (Teorema 1), de $y(t, \epsilon) = x(\tau - \epsilon) + \int_{\tau}^t f(y(s, \epsilon), v) ds$ temos que $y(t, \epsilon)$ é diferenciável em relação a t em $[\tau - \delta_0, \tau + \delta_0] \times [-\delta_1, \delta_1]$ com derivada

$$\frac{dy(t, \epsilon)}{dt} = f(y(t, \epsilon), v)$$

contínua em $[\tau - \delta_0, \tau + \delta_0] \times [-\delta_1, \delta_1]$. Em especial, temos que

$$\frac{dy(\tau, 0)}{dt} = f(y(\tau, 0), v) = f(x(\tau), v).$$

Temos também, pelo Corolário, 2 que $y(t, \epsilon)$ é diferenciável em relação a ϵ em $\epsilon = 0$, com a condição inicial

$$\frac{dy(t, 0)}{d\epsilon} = \omega'(0) = -x'(\tau) = -f(x(\tau), u(\tau)).$$

Assim, pela Regra da Cadeia (Proposição 1) temos que $x_1(\tau, \epsilon) = y(\tau + \epsilon, \epsilon)$ é diferenciável em relação a ϵ em $\epsilon = 0$ com

$$\frac{\partial x_1(\tau, 0)}{\partial \epsilon} = \frac{dy(\tau, 0)}{dt} + \frac{dy(\tau, 0)}{d\epsilon} = f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau)).$$

b) Existência e diferenciabilidade de $x_2(t, \epsilon)$

(i) Existência.

Note que, por definição, $x(t)$ satisfaz o PVI em $[\tau, T]$

$$x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^t f(x(s), u(s)) ds = x_1(\tau, 0) + \int_{\tau}^t f(x(s), u(s)) ds.$$

Logo, pelo Teorema 6, tomando $\omega_2(\epsilon) = x_1(\tau, \epsilon)$ em $[0, \delta_1]$, segue que existe $0 < \delta_2 < \delta_1$ e $x_2 : [\tau, T] \times [0, \delta_2] \rightarrow D$ satisfazendo o PVI em $[\tau, T]$

$$x_2(t, \epsilon) = \omega_2(\epsilon) + \int_{\tau}^t f(x_2(s, \epsilon), u(s)) ds = x_1(\tau, \epsilon) + \int_{\tau}^t f(x_2(s, \epsilon), u(s)) ds.$$

(ii) Diferenciabilidade.

Como acabamos de ver que $\omega_2(\epsilon) = x_1(\tau, \epsilon)$ é diferenciável em $\epsilon = 0$ temos do Corolário 2, que $x_2(t, \epsilon)$ satisfaz o PVI em $[\tau, T]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2(t, 0)}{\partial \epsilon} &= \omega_2'(0) + \int_{\tau}^T f_x(x_2(s, 0), u(s)) \frac{\partial x_2(s, 0)}{\partial \epsilon} ds \\ &= f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau)) + \int_{\tau}^T f_x(x(s), u(s)) \frac{\partial x_2(s, 0)}{\partial \epsilon} ds. \end{aligned}$$

Segue então pelo Corolário 3 que, tomando $W(t, \tau)$ como a solução do PVI em $[0, T]$

$$W'(t, \tau) = f_x(x(t), u(t))W(t, \tau), \quad W(0, \tau) = I_n.$$

Assim, temos que

$$\frac{\partial x_2(T, 0)}{\partial \epsilon} = W(T, \tau)(f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))),$$

e terminamos.

Juntando os itens anteriores, tomando $\delta = \delta_2$ segue que existe $x(t, \epsilon) : [0, T] \times [0, \delta]$ como definida em (3.6) satisfazendo (3.5) e

$$\left. \frac{\partial x(T, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0^+} = \frac{\partial x_2(T, 0)}{\partial \epsilon} = W(T, \tau)(f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))). \quad (3.7)$$

Parte 3

Definimos a função $\lambda(\tau) = (W(t, \tau))_n = e_n W(t, \tau)$, onde $(A)_n$ indica a n -ésima linha de uma matriz dada e $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ (n entradas). Assim, temos pelo Corolário 3 que

$$\lambda'(t) = -\lambda(t)f_x(x(t), u(t)), \quad \lambda(T) = e_n.$$

Ou seja,

$$\lambda'(t) = -H_x(x(t), u(t)), \quad \lambda(T) = (0, \dots, 0, 1).$$

Notemos agora que, por u ser mínimo de $J(x, u) = x_n(T)$, tem-se que

$$J(x, u, \epsilon) \geq J(x, u) \Leftrightarrow x_n(T, \epsilon) \geq x_n(T) = x_n(T, 0).$$

Desta forma, em relação a ϵ , temos que $\epsilon = 0$ é um ponto de mínimo da função $x_n(T, \epsilon)$ e

$$\left. \frac{\partial x_n(T, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0^+} \geq 0.$$

Como $x(T, \epsilon) = x_2(T, \epsilon)$, pela equação 3.7, isto se traduz em

$$\begin{aligned} & (W_{f_x}(T, \tau)(f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))))_n \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (W_{f_x}(T, \tau))_n f(x(\tau), u(\tau)) \leq (W_{f_x}(T, \tau))_n f(x(\tau), v) \\ & \Leftrightarrow \lambda(\tau) f(x(\tau), u(\tau)) \leq \lambda(\tau) f(x(\tau), v) \\ & \Leftrightarrow H(x(\tau), \lambda(\tau), u(\tau)) \leq H(x(\tau), \lambda(\tau), v). \end{aligned}$$

Assim, pelo fato de termos escolhido $v \in \Omega$ qualquer, devemos ter

$$H(x(\tau), \lambda(\tau), u(\tau)) = \min_{v \in \Omega} H(x(\tau), \lambda(\tau), v).$$

Por fim, como escolhemos $\tau \in [0, T]$ tal que τ seja ponto regular de $[0, T]$, pelo Teorema 2 segue que

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \min_{v \in \Omega} H(x(t), \lambda(t), v) \quad \text{q.c. em } [0, T].$$

Parte 4

No que segue, mostramos que, para o controle ótimo $(x(t), u(t))$ do Problema 1 e $\lambda(t)$ definido acima, temos

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = 0 \quad \text{q.c. em } [0, T].$$

Para começar, vamos criar um problema de controle ótimo auxiliar, através de nosso controle ótimo $(x(t), u(t))$ do Problema 1, definido da forma a seguir.

$$\text{Problema 3} \quad \begin{cases} \text{Minimizar } J((y, \tau), (v, \alpha)) = y_n(\hat{T}) \\ \text{para } \hat{T} \text{ livre, restrito à:} \\ (v, \alpha) \in L^2([0, \hat{T}], \Omega \times [0.5, 1.5]), \quad \Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m, \\ (y(s), \tau(s))' = (f(y(s), v(s))\alpha(s), \alpha(s)), \quad (y(0), \tau(0)) = (x_0, 0). \end{cases}$$

Acima, (v, α) , $v \in \Omega$, $\alpha \in [0.5, 1.5]$ é o nosso controle, enquanto (y, τ) é a trajetória correspondente. Vamos mostrar que o controle $(v^*(s), \alpha^*) = (u(s), 1)$ em $[0, T]$, com trajetória correspondente $(y^*(s), \tau^*(s)) = (x(s), s)$ em $[0, T]$ define um controle ótimo para o Problema 3.

Tomando outro controle $(v(s), \alpha(s))$ em $[0, \hat{T}]$ com trajetória correspondente $(y(s), \tau(s))$ em $[0, \hat{T}]$. Note que $\tau(s)$ é uma função contínua estritamente crescente e logo invertível em \mathbb{R} .

Agora, considere o par (x, u) definido por

$$w(t) = v(\tau^{-1}(t)) \quad \text{e} \quad z(t) = y(\tau^{-1}(t)) \quad \forall t \in [0, \hat{T}].$$

Por τ ser invertível, temos que $y(s) = z(\tau(s))$ e $v(s) = w(\tau(s))$ para todo $t \in [0, T]$, e, pelo teorema de mudança de variável na integração temos que

$$\begin{aligned} z(t) &= y(\tau^{-1}(t)) = y(0) + \int_0^{\tau^{-1}(t)} f(y(s), v(s))\alpha(s) ds \\ &= x_0 + \int_0^{\tau^{-1}(t)} f(z(\tau(s)), w(\tau(s))\tau'(s)) ds = x_0 + \int_0^t f(z(s), w(s)) ds. \end{aligned}$$

Logo o controle $w(t)$, com tempo final $\tau(\hat{T})$, é, afinal, um controle admissível do nosso Problema 2, com trajetória correspondente $z(t)$. Mas $u(t)$ é, por hipótese, um controle ótimo do nosso Problema 2, com trajetória correspondente $x(t)$. Assim,

$$x_n(T) = J(x, u) \leq J(z, w) = z_n(\tau(\hat{T})).$$

Ou seja, $y_n^*(T) \leq y_n(\hat{T})$, de onde o controle $(v^*, \alpha^*) = (u, 1)$, com trajetória (x, s) , é de fato um controle ótimo do Problema 3.

Desta forma, pelo que já provamos na **Parte 3** acima, dado

$$W((y, \tau), (\rho, \mu), (v, \alpha)) = (\rho, \mu) \cdot (f(y, v)\alpha, \alpha),$$

deve existir $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \mu'(s) &= -W_\tau((x(s), s), (\rho(s), \mu(s)), (u(s), 1)) = 0, \quad \mu(s) = 0 \quad \text{e} \\ \rho'(s) &= -W_y((x(s), s), (\rho(s), \mu(s)), (u(s), 1)) = -f_x(x(s), u(s)), \quad \rho(T) = (0, \dots, 0, 1), \end{aligned}$$

de onde segue que $\mu(s) = 0$ e, pelo Teorema 5, $\rho(s) = \lambda(s) \forall s \in [0, T]$.

Devemos ter também a condição de minimalidade

$$\begin{aligned} &W((x(s), s), (\rho(s), \mu(s)), (u(s), 1)) \\ &= \min_{\alpha \in [0.5, 1.5]} W((x(s), s), (\rho(s), \mu(s)), (u(s), \alpha)) \quad \text{q.c. em } [0, T] \\ &\Leftrightarrow \lambda(t)f(x(s), u(s)) \leq \alpha\lambda(s)f(x(s), u(s)) \quad \text{q.c. em } [0, T], \quad \alpha \in [0.5, 1.5]. \end{aligned}$$

Mas, como $\alpha \in [0.5, 1.5]$, isto deve implicar em

$$H(\lambda(s), x(s), u(s)) = \lambda(s)f(x(s), u(s)) = 0 \quad \text{q.c. em } [0, T],$$

como queríamos.

Por fim, suponhamos que, para algum $p \in [0, T]$, ocorra

$$H(x(p), \lambda(p), u(p)) = \min_{v \in \Omega} H(x(p), \lambda(p), v),$$

e provemos que $H(x(p), \lambda(p), u(p)) = 0$.

(i) Suponha por absurdo que $H(x(p), \lambda(p), u(p)) < 0$. Por continuidade da função $H(x(t), \lambda(t), u(p))$ em relação a t , segue, pela conservação de sinal, que existe $\delta > 0$ tal que, $t \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$ implique em

$$H(x(t), \lambda(t), u(p)) < 0.$$

Mas então, pela minimalidade quase certamente de $u(t)$ e pela nulidade quase certamente de $H(x(t), \lambda(t), u(t))$ (que acabamos de provar), deveria haver ao menos um $\tau \in (p - \delta, p + \delta)$ tal que

$$H(x(\tau), y(\tau), u(\tau)) = \min_{v \in \Omega} H(x(\tau), y(\tau), v) = 0 > H(x(\tau), \lambda(\tau), u(p)),$$

um absurdo.

(ii) Suponha por absurdo que $H(x(p), \lambda(p), u(p)) > 0$. Tomando $\theta = (x, \lambda) \in D \times \mathbb{R}^n$, temos que $H_\theta(x, \lambda, v)$ existe e é localmente limitada em $D \times \mathbb{R}^n \times \Omega$, pois $f_x(x, u)$ é localmente limitada em $D \times \Omega$ por hipótese.

Assim, dado $A = \{(x(t), \lambda(t)) \mid t \in [0, T]\}$, que é compacto pela continuidade de $(x(t), \lambda(t))$, temos pela Proposição 6 (Apêndice A) que $H_\theta(x, \lambda, v)$ é limitada no compacto $A \times \Omega$.

Segue então pelo teorema do valor médio, que $H(x, \lambda, v)$ é Lipschitziana em relação a $(x(t), \lambda(t))$ em $A \times \Omega$ com uma constante M .

Agora, por continuidade, dado $\epsilon/M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $|t - p| < \delta$ então

$$|(x(t), \lambda(t)) - (x(p), \lambda(p))| < \frac{\epsilon}{M}.$$

Logo, pela condição de ser Lipschitziana com constante M , segue que $|t - p| < \delta$ implica em

$$|H(x(t), \lambda(t), u(t)) - H(x(p), \lambda(p), u(t))| < M|(x(t), \lambda(t)) - (x(p), \lambda(p))| < \epsilon,$$

tomando então $\epsilon = H(p), \lambda(p), u(p)$ e tomando, pela nulidade quase certamente, algum $\tau \in (p - \delta, p + \delta)$ tal que $H(x(\tau), \lambda(\tau), u(\tau)) = 0$, teríamos então que

$$\begin{aligned} |H(x(p), \lambda(p), u(\tau))| &< H(p), \lambda(p), u(p) \\ \Rightarrow H(x(p), \lambda(p), u(\tau)) &< H(x(p), \lambda(p), u(p)), \end{aligned}$$

absurdo com a hipótese de minimalidade de $H(x(p), \lambda(p), u(p))$.

Portanto, de (i) e (ii), temos que $H(x(p), \lambda(p), u(p)) = 0$, o que completa a prova.

■

Problemas de Controle Ótimo Lineares

Vamos analisar o seguinte problema de controle ótimo linear:

$$\text{Problema 4} \begin{cases} \text{Minimizar } J(z, u) = \phi(z(T)) + \int_0^T (L + Ku(t)) dt \\ \text{com } T \text{ livre, sujeito a} \\ u \in L^1([0, T], [0, 1]) \text{ e} \\ z : [a, b] \rightarrow D, \text{ para } D \subset \mathbb{R}^n, \text{ satisfazendo o PVI em } [0, T] \\ z' = f(z) + g(z)u, \quad z(0) = z_0. \end{cases}$$

Supomos ainda que D é aberto; f , g e ϕ são de classe C^3 em D , e L e K são constantes.

4.1 Aplicação do Princípio do Mínimo de Pontryagin

Suponha que existe um controle ótimo $u \in L^1([0, T], [0, 1])$ do Problema 4. Note que, com as hipóteses acima, nosso problema satisfaz as condições do Teorema 8, ou seja, podemos aplicar o Princípio do Mínimo de Pontryagin para este controle $u(t)$.

Deste modo, sendo $H : D \times \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$H(z, \lambda, u) = (L + Ku) + \lambda(f(z) + g(z)u),$$

deve existir $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que sejam satisfeitos os PVIs

$$z'(t) = f(z(t)) + g(z(t))u(t), \quad z(0) = z_0,$$

$$\lambda'(t) = \lambda(f_z(z(t)) + g_z(z(t))u(t)), \quad \lambda(T) = (a, -b),$$

e a condição de minimalidade

$$H(z(t), \lambda(t), u(t)) = \min_{v \in [0, 1]} H(z(t), \lambda(t), v) = 0. \quad (4.1)$$

Agora, note que

$$H(z, \lambda, u) = L + Ku + \lambda(f(z) + g(z)u) = L + \lambda f(z) + (K + \lambda g(z))u,$$

ou seja, $H(z, \lambda, u)$ é linear em u . Assim, denotando $\Psi(t) = K + g(z(t))$, temos que a condição (4.1) de minimalidade do Hamiltoniano em u se traduz em

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{caso } \Psi(t) > 0, \quad e \\ 1, & \text{caso } \Psi(t) < 0. \end{cases}$$

Desta forma, caso tenhamos $\Psi(t) > 0$ ou $\Psi(t) < 0$ em algum intervalo $[t_1, t_2] \subset [0, T]$, então teremos que, respectivamente, $u(t) = 0$ ou $u(t) = 1$ em $[t_1, t_2]$. Caso por outro lado ocorra $\Psi(t) = 0$ em algum intervalo $[t_1, t_2]$, não teríamos como determinar $u(t)$ apenas com esta condição de minimalidade. Um controle $u(t)$ em que isto ocorra é chamado de **controle singular** e a trajetória $z(t)$ no intervalo $[t_1, t_2]$ é chamada de **trajetória singular**.

A proposição a seguir nos ajudará a analisar mais a fundo este tipo de caso.

Proposição 3 *Seja $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $h(z)$ de classe C^1 em z . Então, $\Phi(t) = \lambda(t)h(z(t))$ é absolutamente contínua em $[0, T]$, com*

$$\Phi'(t) = \lambda(t)[f + gu(t), h](z(t)),$$

onde $[P, Q](z) = Q_z(z)P(z) - P_z(z)Q(z)$ é uma notação chamada **colchete de Lie**.

Demonstração. Para a continuidade absoluta, denote $u(\lambda, z) = \lambda h(z)$. Assim, como $h(z)$ é classe C^1 em z , temos que $u(\lambda, z)$ será de classe C^1 em (λ, z) .

Desta forma, sendo $(\lambda(t), z(t))$ absolutamente contínua, segue, pela Proposição 2, que $\Phi(t) = u(\lambda(t), z(t))$ também será.

Para a diferenciação, basta notarmos, também pela Proposição 2, que $h(z(t))$ é absolutamente contínua de onde temos pela regra da cadeia que

$$h'(z(t)) = h_z(z(t))z'(t) = h_z(z(t))(f(z(t)) + g(z(t))u(t)).$$

Desta forma teremos que

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \lambda(t)h'(z(t)) + \lambda'(t)h(z(t)) \\ &= \lambda(t)h_z(z(t))(f(z(t)) + g(z(t))u(t)) - (f_z(z(t)) + g_z(z(t))u(t))h(z(t)) \\ &= \lambda(t)[f + gu(t), h](z(t)), \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Aplicando este resultado ao nosso problema, temos que $\Psi(t)$ será absolutamente contínua em $[0, T]$ e

$$\Psi'(t) = \lambda(t)([f + gu(t), g](z(t)) = \lambda(t)[f, g](z(t)).$$

Note também que $\Psi'(t)$ é contínua, de onde, pelo Teorema 1 (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo para Integral de Lebesgue), $\Psi(t)$ será diferenciável em $[0, T]$, com derivada contínua em $[0, T]$.

Assim, também pela Proposição 3, temos que $\Psi'(t) = \lambda(t)[f, h](z(t))$ é absolutamente contínua em $[0, T]$, com

$$\Psi''(t) = \lambda(t)([f + gu(t), [f, g]](z(t)) = \lambda(t)([f, [f, g]](z(t)) + u(t)[g, [f, g]](z(t))).$$

Neste sentido, definiremos a função $\Psi'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, 1]$ por

$$\Psi''(z, \lambda, u) = \lambda[f + gu, [f, g]](z) = \lambda([f, [f, g]](z) + u[g, [f, g]](z)),$$

a função $\Psi''' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, 1]$ por

$$\Psi'''(z, \lambda, u) = \lambda[f + gu, [f + gu, [f, g]]](z),$$

e assim recursivamente. Note que $\Psi''(t)$ e $\Psi''(z, \lambda, u)$ são funções distintas, apesar de utilizarem o mesmo símbolo Ψ'' .

Ainda, dado um controle ótimo $u(t)$ com trajetória $z(t)$, denotamos $\Psi''(t, u) = \Psi(z(t), \lambda(t), u)$ para cada $u \in [0, T]$. Deste modo temos que $\Psi''(t) = \Psi''(t, u)$ sempre. Da mesma forma, pela Proposição 3, segue também que, caso u seja constante em (t_1, t_2) , então $\Psi''(t)$ será diferenciável em (t_1, t_2) , com

$$\Psi'''(t) = \lambda(t)([f + gu, [f + gu, [f, g]](z(t)) = \Psi'''(z(t), \lambda(t), u).$$

Tais definições nos serão úteis na próxima seção.

O teorema a seguir nos diz que, sob certas circunstâncias, um controle $u(t)$ tal que $\Psi(t) = 0$ em um intervalo $[t_1, t_2]$, está unicamente definido neste intervalo, a menos de um conjunto de medida nula.

Proposição 4 *Suponha que $u(t)$ seja um controle ótimo do Problema 4, tal que $\Psi'(t) = 0$ em um intervalo $[t_1, t_2] \subset [0, T]$, onde $z(t_1)$ e $\lambda(t_1)$ (ou $z(t_2)$ e $\lambda(t_2)$) já estejam determinados. Suponha ainda que $\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) \neq 0$ em $[t_1, t_2]$.*

Então existe $u^ : [0, T] \rightarrow [0, 1]$, tal que $u^*(t) = u(t)$ quase certamente em $[0, T]$, u^* é de classe C^1 em $[t_1, t_2]$ e*

$$u^*(t) = -\frac{\lambda(t)[f, [f, g]](z(t))}{\lambda(t)[g, [f, g]](z(t))} \quad \text{em } [t_1, t_2],$$

onde $z(t)$ e $\lambda(t)$ estão unicamente determinados em $[t_1, t_2]$ pelo PVI em $[t_1, t_2]$

$$\begin{cases} z'(t) = H_\lambda(z(t), \lambda(t), S(z(t), \lambda(t))), & z(t_1) = z(t_1) \quad e \\ \lambda'(t) = -H_x(z(t), \lambda(t), S(z(t), \lambda(t))), & \lambda(t_1) = \lambda(t_1), \end{cases}$$

com $S : D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$S(z, \lambda) = -\frac{\lambda[f, [f, g]](z)}{\lambda[g, [f, g]](z)}.$$

Demonstração. Como supomos $\Psi(t) = 0$ em um intervalo $[t_1, t_2]$ e $\Psi(t)$ é diferenciável em $[t_1, t_2]$, segue que $\Psi'(t) = 0$ também em $[t_1, t_2]$, de onde $\Psi''(t) = 0$ quase certamente em $[t_1, t_2]$ pois $\Psi'(t)$ é absolutamente contínua. Assim, temos que

$$\lambda(t)([f, [f, g]](z(t)) + u(t)[g, [f, g]](z(t))) = 0 \quad \text{q.c. em } [t_1, t_2],$$

o que, pela hipótese de termos $[g, [f, g]](z(t)) \neq 0$ em $[t_1, t_2]$ implica em

$$u(t) = -\frac{\lambda(t)[f, [f, g]](z(t))}{\lambda(t)[g, [f, g]](z(t))} = S(z(t), \lambda(t)) \quad \text{q.c. em } [t_1, t_2].$$

Tomamos então $u^*(t) = S(z(t), \lambda(t))$ e temos que $u^*(t) = u(t)$ quase certamente em (t_1, t_2) . Como $u(t) = S(z(t), \lambda(t))$ quase certamente em $[t_1, t_2]$ podemos substituir $u(t)$ por $S(\lambda(t), z(t))$ nos PVIs que, pelo Princípio de Pontryagin, $z(t)$ e $\lambda(t)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} z'(t) &= H_\lambda(z(t), \lambda(t), S(z(t), \lambda(t))), & z(t_1) &= z(t_1) \quad e \\ \lambda'(t) &= -H_x(z(t), \lambda(t), S(z(t), \lambda(t))), & \lambda(t_1) &= \lambda(t_1). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Agora, sendo por hipótese $\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) \neq 0$ em $[0, T]$, então, para cada $t \in [t_1, t_2]$ existe um aberto $U_t \subset D \times \mathbb{R}^n$, com $(z(t), \lambda) \in U_t$, tal que $\lambda[g, [f, g]](z) \neq 0$ para todo

$(z, \lambda) \in U_t$. Tomando então o aberto $U = \bigcup_{t \in [t_1, t_2]} U_t$, temos que $(z(t), \lambda(t)) \in U \forall t \in [t_1, t_2]$, e que $\lambda(z)[g, [f, g]](z) \neq 0$ para todo $z \in U$.

Sendo $\lambda[g, [f, g]](z)$ e $\lambda[g, [f, g]](z)$ de classe C^1 em U , junto de $\lambda[g, [f, g]](z) \neq 0$ em U temos então que $S(z, \lambda)$ é também de classe C^1 em U , de onde, por composição, $H_\lambda(z, \lambda, S(z, \lambda))$ e $-H_x(z, \lambda, S(z, \lambda))$ também são de classe C^1 em U .

Por fim, notamos que para o PVI (4.2) acima temos que $(z(t), \lambda(t)) \in U$ para todo $t \in [t_1, t_2]$. Assim, como $H_\lambda(z, \lambda, S(z, \lambda))$ e $-H_x(z, \lambda, S(z, \lambda))$ são de classe C^1 em U , pelo Teorema 5, temos que $z(t)$ está unicamente determinado pelo PVI (4.2). Assim, $u^*(t) = S(z(t), \lambda(t))$ também está unicamente determinado, e, pela continuidade de $S(z(t), \lambda(t))$, segue que $u^*(t)$ é também contínuo. ■

Em vista deste teorema, no restante do trabalho aqui apresentado, caso $u(t)$ satisfaça as hipóteses do Teorema 4, tomaremos $u(t) = u^*(t)$ em (t_0, t_1) .

Definição 5 Diremos que $u(t)$ é um controle regular do Problema 4 quando:

(i) Existirem $t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T$, com $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, tal que, para cada $0 \leq i < n$, ocorra uma das três condições a seguir:

- $\Psi(t) > 0$ para todo $t \in (t_i, t_{i+1})$;
- $\Psi(t) < 0$ para todo $t \in (t_i, t_{i+1})$;
- $\Psi(t) = 0$ para todo $t \in (t_i, t_{i+1})$ (controle singular).

(ii) Caso ocorra $\Psi(t) = 0$ em (t_i, t_{i+1}) , tenhamos também que

$$\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) \neq 0 \text{ em } (t_i, t_{i+1})$$

O item (ii) acima é imposto apenas para que possamos utilizar a Proposição 4 para podermos determinar os controles singulares.

4.2 Teorema de Regularidade

Este capítulo se propõe a demonstrar o Teorema 10, que introduziremos logo abaixo. Este corresponde a uma condição de regularidade para problemas de controles ótimos lineares, e representa a principal contribuição deste trabalho.

Em comparação com esta condição de regularidade, na literatura atual, Sussmann provou em [18] condições genéricas (como definido em [18] por exemplo) de regularidade para problemas de controles ótimos lineares com dimensão $n = 2$, enquanto Schattler provou em [15] condições genéricas de regularidade para problemas de controles ótimos lineares com dimensão $n = 3$.

A condição dada por Schattler em [15] necessita que nenhum controle ótimo $u(t)$ tenha sua trajetória $z(t)$ passando por um ponto singular crítico (Definição 8). Esta condição não parece de fácil verificação para dimensão $n = 2$, de modo que não conseguimos verificá-la por exemplo no modelo apresentado no Capítulo 5. Já a condição de regularidade dada pelo Teorema 10 é de verificação mais fácil para dimensão $n = 2$, de modo que conseguimos aplicá-la por exemplo ao modelo estudado no Capítulo 5.

Pelo motivo de nossa condição ser menos restritiva do que as condições dadas por Schattler [15], acreditamos que estas sejam genéricas para $n = 4$, o que representaria um resultado interessante para esta área de pesquisa.

Notamos por outro lado, que os objetivos de Sussmann [18] e Schattler [15] vão além dos aqui almejados. Sua análise de regularidade tinha como fim criar para problemas de

controles ótimos uma **síntese regular** (ver [18] e [15]), sendo esta uma análise importante para se encontrar condições suficientes de otimalidade para um problema de controle ótimo. Desta forma, em tais literaturas foram buscadas formas mais fortes de regularidade das que aqui apresentamos.

Aqui por outro lado tal regularidade foi utilizada unicamente para justificar o algoritmo de obtenção de um controle ótimo, apresentado na seção 4.3.

Para demonstrar o Teorema 10 começamos com algumas definições.

Definição 6 Dizemos que $p \in D$ é um **ponto singular** do Problema 4 quando existir $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\begin{aligned} H(p, \lambda, 0) &= 0, \quad e \\ \Psi(p, \lambda) &= \Psi'(p, \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Definição 7 Dizemos que um ponto singular $p \in D$ é um **ponto singular crítico** do Problema 4 caso

$$\Psi''(p, \lambda, 0) = 0 \quad \text{ou} \quad \Psi''(p, \lambda, 1) = 0.$$

Caso um ponto singular crítico z satisfaça a primeira equação ($\Psi''(p, \lambda, 0) = 0$), este será dito um **ponto singular crítico de 1º tipo** e caso satisfaça a segunda ($\Psi''(p, \lambda, 1) = 0$), este será dito um **ponto singular crítico de 2º tipo**.

Definição 8 Dizemos um ponto singular p é um **ponto singular supercrítico** do Problema 4 caso

$$\frac{\Psi'''(p, \lambda, 1)}{\Psi''(p, \lambda, 1)^2} = \frac{\Psi'''(p, \lambda, 0)}{\Psi''(p, \lambda, 0)^2}.$$

Teorema 10 Seja um controle ótimo $u(t)$ com trajetória $z(t)$ tal que:

- (i) $z(0)$ e $z(T)$ não são pontos singulares.
- (ii) Todo ponto $z(\tau)$ que seja singular crítico ou supercrítico satisfaz

$$\lambda(\tau)[g, [f, g]](z(\tau)) < 0;$$

- (iii) Nenhum ponto singular crítico $p = z(\tau)$ satisfaz

$$\Psi'''(p, \lambda, u) = 0,$$

onde $u = 0$ e $u = 1$ para p ponto singular crítico de 1º e 2º tipo, respectivamente;

Então $u(t)$ será regular e também será contínuo por partes em $[0, T]$.

Durante este capítulo vamos supor válidas as hipóteses do Teorema 10 para provarmos sua tese. O teorema a seguir nos diz que $u(t)$ satisfaz a condição (ii) de regularidade.

Teorema 11 Dado o controle ótimo $u(t)$, suponha que $\Psi(t) = 0$ em um intervalo $[t_1, t_2] \subset [0, T]$, então

$$\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Demonstração. De fato, de $\Psi(t) = 0$ em $[t_1, t_2]$ temos que $\Psi'(t)$ em $[t_1, t_2]$ e $\Psi''(t) = 0$ em $[t_1, t_2]$.

Segue disto que, pela Proposição 3,

$$\lambda(t)[f, [f, g]](z(t)) + u(t)\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) = 0 \quad \text{q.c. em } [t_1, t_2].$$

Agora suponha, por absurdo, que $\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) = 0$ quase certamente em $[t_1, t_2]$. Disto seguiria que $\lambda(\tau)[g, [f, g]](z(\tau)) = 0$ e $\lambda(\tau)[f, [f, g]](z(\tau)) + u(\tau)\lambda(\tau)[g, [f, g]](z(\tau)) = 0$ para algum $\tau \in [t_1, t_2]$. Isto implicaria em $\Psi''(\tau, 0) = \lambda(\tau)[f, [f, g]](z(\tau)) = 0$, de onde $p = z(\tau)$ seria um ponto singular crítico. Por outro lado, pelo item (i) do Teorema 10, este fato implicaria que $\lambda(\tau)[g, [f, g]](z(\tau)) < 0$, de onde chegamos num absurdo.

Assim

$$\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) \neq 0 \quad \text{q.c. em } [t_1, t_2]$$

Agora tome $\tau \in [t_1, t_2]$, tal que $\lambda(\tau)[g, [f, g]](z(\tau)) \neq 0$.

Por continuidade, segue que $\lambda(\tau)[g, [f, g]](z(\tau)) \neq 0$ em $[\tau - \delta, \tau + \delta]$ para algum $\delta > 0$. Assim, também por continuidade, existe $\tau_1 > t_1$ tal que $\lambda(\tau)[g, [f, g]](z(\tau)) \neq 0$ em $(\tau_1, \tau_1 + \delta)$ e $\lambda(\tau_1)[g, [f, g]](z(\tau_1)) = 0$, ou $\lambda(\tau)[g, [f, g]](z(\tau)) \neq 0$ em $[t_1, \tau_1 + \delta]$.

Suponhamos, por absurdo, o primeiro caso.

Pelo fato de termos $\Psi(\tau_1) = \Psi'(\tau_1) = 0$ e $\lambda(\tau_1)[g, [f, g]](z(\tau_1))$, não podemos ter $\Psi'(\tau_1, 0) = \lambda(\tau_1)[f, [f, g]](z(\tau_1)) = 0$, pois caso contrário o item (ii) da hipótese do Teorema 10 seria falso.

Agora, do fato de que $\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) \neq 0$ em $(\tau_1, \tau_1 + \delta)$, segue pela Proposição 4 que

$$u(t) = -\frac{\lambda(t)[f, [f, g]](z(t))}{\lambda(t)[g, [f, g]](z(t))} \quad \text{q.c. em } [\tau_1, \tau_1 + \delta].$$

Assim, existe uma sequência $s_n \in (\tau_1, \tau_1 + \delta)$, tal que $s_n \rightarrow \tau_1$ e

$$u(s_n) = -\frac{\lambda(s_n)[f, [f, g]](z(s_n))}{\lambda(s_n)[g, [f, g]](z(s_n))} \in [0, 1].$$

Disto e de $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(s_n)[g, [f, g]](z(s_n)) = \lambda(\tau_1)[g, [f, g]](z(\tau_1)) = 0$ segue que:

$$\begin{aligned} \Psi'(\tau_1, 0) &= \lambda(\tau_1)[f, [f, g]](z(\tau_1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(s_n)[f, [f, g]](z(s_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(s_n)[g, [f, g]](z(s_n)) \frac{\lambda(s_n)[f, [f, g]](z(s_n))}{\lambda(s_n)[g, [f, g]](z(s_n))} = 0 \end{aligned}$$

Assim $z(\tau_1)$ é um ponto crítico singular. Logo, pelo item (ii) do Teorema 10 deveria ocorrer $\lambda(\tau_1)[g, [f, g]](z(\tau_1)) < 0$. Chegamos então num absurdo. Logo $\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) \neq 0$ em $[t_1, \tau + \delta]$.

Prova-se analogamente que $\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) \neq 0$ em $[\tau_\delta, t_2]$. Assim, $\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) \neq 0$ em $[t_1, t_2]$ e terminamos. ■

O restante desta seção se destinará em provar a condição (i) de regularidade para $u(t)$. Para este fim, começamos enunciando uma importante condição necessária de 2ª ordem para nosso controle ótimo $u(t)$, conhecida como condição de Legendre-Clebsh, que pode ser encontrado em [16] (Schattler, 2012, Cor. 4.6.1), por exemplo.

Teorema 12 (Legendre-Clebsh) *Dado o controle ótimo $u(t)$, suponha que $\Psi(t) = 0$, em um intervalo $[t_0, t_1] \subset [0, T]$, com $0 < u(t) < 1$, quase certamente em $[t_0, t_1]$, então*

$$\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

A definição a seguir será também crucial na demonstração da segunda condição de regularidade.

Definição 9 Dado $p \in (0, T]$ dizemos que p é um **ponto simples à direita**, caso exista δ tal que:

- $\Psi(t) > 0$ para todo $t \in (\tau, \tau + \delta]$ ou
- $\Psi(t) < 0$ para todo $t \in (\tau, \tau + \delta]$ ou
- $\Psi(t) = 0$ para todo $t \in (\tau, \tau + \delta]$.

Definimos analogamente um **ponto simples à esquerda** para $p \in [0, T)$.

Os três lemas a seguir (Lemas 2, 3 e 4) nos darão como resultado o Teorema 13.

Lema 2 Se $p = z(\tau)$ não é ponto singular, então p é simples à direita e à esquerda.

Demonstração. Provaremos apenas que p é um ponto simples à direita, sendo análogo provar que p simples à esquerda.

Se $\Psi(\tau) > 0$ ou $\Psi(\tau) < 0$, então, como $\Psi(t)$ é contínua, o teorema é verdadeiro diretamente da definição de ponto simples. Logo podemos supor que $\Psi(\tau) = 0$. Por p não ser ponto singular segue então que $\Psi'(\tau) \neq 0$.

Suponhamos que seja o caso de $\Psi'(\tau) > 0$. Por continuidade, segue que existe $\delta > 0$ tal que $\Psi'(t) > 0 \forall t \in [\tau - \delta, \tau]$. Mas isto quer dizer que $\Psi(t)$ é estritamente crescente em $[\tau - \delta, \tau]$, de onde, de $\Psi(\tau) = 0$, segue que $\Psi(t) < 0 \forall t \in [\tau - \delta, \tau)$. Logo, p é um ponto simples à direita.

Analogamente, prova-se que p é um ponto simples à direita para caso em que $\Psi'(\tau) > 0$. Assim, p é um ponto simples à direita e finalizamos a demonstração. ■

Lema 3 Se $p = z(\tau)$ é um ponto singular simples à direita ou simples à esquerda então

$$\Psi''(\tau, 0) \geq 0 \quad \text{ou} \quad \Psi''(\tau, 1) \leq 0.$$

Demonstração. Provaremos o teorema apenas para p simples à direita pois o caso à esquerda é totalmente análogo. Pela hipótese do enunciado e definição de ponto simples à direita temos que existe δ tal que:

- $\Psi(t) > 0$ para todo $t \in (\tau, \tau + \delta]$ ou
- $\Psi(t) < 0$ para todo $t \in (\tau, \tau + \delta]$ ou
- $\Psi(t) = 0$ para todo $t \in (\tau, \tau + \delta]$.

(i) Suponhamos o primeiro caso ($\Psi(t) > 0$ para todo $t \in (\tau, \tau + \delta]$).

Suponha por absurdo que $\Psi''(\tau) < 0$. Assim, por continuidade, existe $0 < \delta_1 < \delta$ tal que $\Psi''(t) > 0$ para todo $t \in [\tau, \tau + \delta_1]$ de onde $\Psi'(t)$ é estritamente decrescente em $[\tau, \tau + \delta_1]$. Como $\Psi'(\tau) = 0$, isto implica que $\Psi'(t) < 0$ em $(\tau, \tau + \delta_1]$. Portanto, $\Psi(t)$ é estritamente decrescente em $[\tau, \tau + \delta_1]$, o que, com $\Psi(\tau) = 0$, implica que $\Psi(t) < 0$ em $(\tau, \tau + \delta_1]$, um absurdo com a hipótese. Logo

$$\Psi''(\tau) = \Psi''(\tau, 0) \geq 0.$$

e a tese está satisfeita.

O segundo caso ($\Psi(t) < 0$ para todo $t \in (\tau, \tau + \delta]$) é análogo, bastando notar que, neste caso,

$$\Psi''(\tau) = \Psi''(\tau, 1).$$

(ii) Suponhamos, por fim, o terceiro caso ($\Psi(t) = 0$ para todo $t \in (\tau, \tau + \delta]$).

Caso houvesse alguma sequência $s_n \in (\tau, \tau + \delta]$ com $s_n \rightarrow \tau$ tal que $\Psi''(s_n, 0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou $\Psi''(s_n, 1) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então, por continuidade, teríamos que $\Psi''(\tau, 0) = 0$ ou $\Psi''(\tau, 1) = 0$, de onde a tese estaria satisfeita.

Desta forma, podemos supor que não existam tais sequências, ou seja, existe algum $\delta_1 > 0$ tal que $\Psi''(t, 0) \neq 0$ e $\Psi''(t, 1) \neq 0$ para todo $t \in (\tau, \tau + \delta_1]$. Assim,

$$\begin{aligned} \lambda(t)[f, [f, g]](z(t)) &\neq 0 \quad \forall t \in (\tau, \tau + \delta_1] \quad e \\ \lambda(t)[f, [f, g]](z(t)) + \lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) &\neq 0 \quad \forall t \in (\tau, \tau + \delta_1]. \end{aligned}$$

Logo,

$$u(t) = -\frac{\lambda(t)[f, [f, g]](z(t))}{\lambda(t)[g, [f, g]](z(t))} \in (0, 1) \quad \text{q.c. em } (\tau, \tau + \delta_1)$$

Desta forma, podemos aplicar o Teorema 12 (Legendre-Clebsch) ao intervalo $(\tau, \tau + \delta_1)$, obtendo

$$\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) \leq 0 \quad \forall t \in (\tau, \tau + \delta).$$

Por outro lado, de $\Psi(t) = 0$ em $(\tau, \tau + \delta_1)$, temos que

$$\begin{aligned} \Psi''(t) &= \lambda(t)[f, [f, g]](z(t)) + u(t)\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda(t)[f, [f, g]](z(t)) &= -u(t)\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) \quad \text{q.c. em } (\tau, \tau + \delta_1). \end{aligned}$$

Então, de $-u(t) \leq 0$ e $\lambda(t)[g, [f, g]](z(t)) \leq 0$, segue que

$$\Psi''(t, 0) = \lambda(t)[f, [f, g]](z(t)) \geq 0 \quad \text{q.c. em } (\tau, \tau + \delta_1)$$

Assim, por continuidade, segue que

$$\Psi''(\tau, 0) \geq 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 4 *Se $p = z(\tau)$ é um ponto singular que não é simples à direita ou não é simples à esquerda então*

$$\Psi''(\tau, 0) < 0 \quad e \quad \Psi''(\tau, 1) > 0.$$

Demonstração. Vamos analisar apenas o caso simples à esquerda, sendo o outro totalmente análogo.

Inicialmente, notemos que, como p é não simples à esquerda ou à direita, então pela Proposição 2 p é ponto singular. Mas também, dizer que p não é simples à esquerda significa que:

- Para algum $\delta > 0$, existem duas sequências $t_n \rightarrow \tau$, $s_n \rightarrow \tau$ em $[\tau - \delta, \tau)$ tais que $\Psi(t_n) < 0 \forall n \in \mathbb{N}$, e $\Psi(s_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ou
- Para algum $\delta > 0$, existem duas sequências $t_n \rightarrow \tau$, $s_n \rightarrow \tau$ em $[\tau - \delta, \tau)$ tais que $\Psi(t_n) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, e $\Psi(s_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ou
- Para algum $\delta > 0$, existem duas sequências $t_n \rightarrow \tau$ e $s_n \rightarrow \tau$ em $[\tau - \delta, \tau)$ tais que $\Psi(t_n) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, e $\Psi(s_n) < 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Provamos o teorema primeiramente para os dois primeiros casos.

(i) Suponha o primeiro caso ($\Psi(t_n) > 0$ e $\Psi(s_n) = 0$). Fixando temporariamente t_n , tome

$$t_0 = \sup\{t \in [\tau - \delta, t_n] \mid \Psi(t) = 0\} \quad e \quad t_1 = \inf\{t \in [t_n, \tau] \mid \Psi(t) = 0\}.$$

Por continuidade, $\Psi(t_0) = \Psi(t_1) = 0$ de onde, por hipótese, $\Psi(t) \geq 0$ em $[\tau - \delta, \tau]$. Assim, de $\Psi(t_0) = \Psi(t_1) = 0$ temos que t_0 e t_1 são pontos de mínimo local da função diferenciável $\Psi(t)$. Segue então que $\Psi'(t_0) = \Psi'(t_1) = 0$.

Agora, de $\Psi(t_0) = \Psi(t_1) = 0$, segue pelo Teorema de Rolle que existe $h \in (t_0, t_1)$ com $\Psi'(h) = 0$.

Assim, como $\Psi'(t)$ é diferenciável em $[t_0, t_1]$ e $\Psi'(t_0) = 0$, temos novamente pelo Teorema de Rolle que existe $h_0 \in (t_0, h)$ tal que $\Psi''(h_0) = 0$. Assim, de $\Psi'(t_1) = 0$, segue que existe $h_1 \in (h, t_1)$ tal que $\Psi''(h_1) = 0$.

Como $\Psi''(t)$ é também diferenciável em $[t_0, t_1]$, então, por fim, segue pelo Teorema de Rolle que existe $k_n \in (h_0, h_1)$ tal que $\Psi'''(k_n) = 0$, ou seja

$$\Psi'''(k_n) = \Psi'''(k_n, 0) = 0.$$

Como $k_n \rightarrow p$, então, por continuidade de $\Psi'''(t, 0)$, segue que

$$\Psi'''(\tau, 0) = 0,$$

um absurdo com o item (iii) do Teorema 10, pois p é ponto singular crítico com $\Psi''(\tau, 0) = 0$.

O segundo caso ($\Psi(t_n) < 0$ e $\Psi(s_n) = 0$) é totalmente análogo, notando apenas que, neste caso,

$$\Psi'''(k_n) = \Psi'''(k_n, 1),$$

de onde a igualdade obtida para p seria

$$\Psi'''(\tau, 1) = 0$$

que nos levaria novamente a um absurdo.

(ii) Suponha agora o terceiro caso ($\Psi(t_n) > 0$ e $\Psi(s_n) < 0$). Fixando temporariamente t_n tome

$$t_0 = \sup\{t \in [\tau - \delta, t_n] \mid \Psi(t) = 0\} \quad e \quad t_1 = \inf\{t \in [t_n, \tau] \mid \Psi(t) = 0\}.$$

Observe que, por definição, $\Psi(t) > 0$ para $t \in (t_0, t_1)$, mas, por continuidade, $\Psi(t_0) = \Psi(t_1) = 0$. Notemos que deve existir $k_0 \in (t_0, t_n)$, tal que $\Psi'(k_0) > 0$. Caso contrário teríamos $\Psi(t)$ decrescente em $[t_0, t_n]$, e logo, de $\Psi(t_0) = 0$, teríamos que $\Psi(t_n) \leq 0$. Isto é um absurdo, pois $\Psi(t_n) > 0$ por hipótese. Analogamente, prova-se que existe $k_1 \in (t_n, t_1)$ tal que $\Psi'(k_1) < 0$. Assim, temos que não pode ocorrer $\Psi''(t) \geq 0 \forall t \in (t_0, t_1)$, caso contrário teríamos $\Psi'(t)$ crescente em (t_0, t_1) , contradizendo o fato de que $\Psi(k_0) > 0$ e $\Psi(k_1) < 0$ com $t_0 < k_0 < k_1 < t_1$. Ou seja, existe $h_n \in (t_0, t_1)$ tal que

$$\Psi''(h_n) = \Psi''(h_n, 0) < 0. \tag{4.3}$$

Como $h_n \rightarrow \tau$, pela continuidade de $\lambda(t)[f, [f, g]](z(t))$, tomando $n \rightarrow \infty$ na inequação (4.3) temos que

$$\Psi''(\tau, 0) \leq 0.$$

Analogamente podemos construir s_0 e s_1 tal que $\Psi(s_0) = 0$, $s_n \in (s_0, s_1)$ $\Psi(t) < 0$ em (s_0, s_1) e podemos provar que existe $k_n \in (s_0, s_1)$ tal que

$$\Psi''(k_n) = \Psi''(k_n, 1) > 0. \tag{4.4}$$

De onde, tomando $n \rightarrow \infty$ na inequação 4.4 temos que

$$\Psi''(\tau, 1) \geq 0,$$

Agora, se supormos $\Psi''(\tau, 0) = 0$, então τ seria, por definição, ponto singular crítico, de onde pelo item (ii) do Teorema 10 teríamos que $\lambda(\tau)[g, [f, g]](z(\tau)) < 0$, de onde teríamos que

$$\Psi''(\tau, 1) = \Psi''(\tau, 0) + u(\tau)\lambda(\tau)[g, [f, g]](z(\tau)) < \Psi''(\tau, 0) = 0$$

absurdo com a inequação acima. Analogamente prova-se que não pode ocorrer $\Psi''(\tau, 1) = 0$, e finalizamos assim a demonstração.

como queríamos. ■

Dos Lemas 2, 3 e 4 temos como corolário direto o resultado a seguir.

Teorema 13 *Se p é simples à direita então p é simples à esquerda (e vice-versa).*

Demonstração. Caso p não for ponto singular, então pelo Lema 3 temos que p é tanto simples à esquerda quanto à direita, e logo o teorema está provado. Agora, supondo p ponto singular, notamos que as conclusões do Lema 3 e as conclusões do Lema 4 são exatamente a negação uma da outra, de modo que p não pode ser simples à direita e não-simples à esquerda, ou simples à esquerda e não-simples à direita, e logo o teorema está provado. ■

O lema a seguir servirá para provar o Lema 6, que por sua vez, servirá para provar o Teorema 14.

Lema 5 *Se $p = z(\tau)$ é não-simples à direita, então*

$$\frac{\Psi'''(\tau, 1)}{\Psi''(\tau, 1)^2} - \frac{\Psi'''(\tau, 0)}{\Psi''(\tau, 0)^2} \leq 0.$$

Se $p = z(\tau)$ é não-simples à esquerda, então

$$\frac{\Psi'''(\tau, 1)}{\Psi''(\tau, 1)^2} - \frac{\Psi'''(\tau, 0)}{\Psi''(\tau, 0)^2} \geq 0.$$

Demonstração. Seja $p = z(\tau)$ não simples à direita e suponha por absurdo que

$$\frac{\Psi'''(\tau, 1)}{\Psi''(\tau, 1)^2} - \frac{\Psi'''(\tau, 0)}{\Psi''(\tau, 0)^2} > 0.$$

Pelo Lema 4, por p ser não simples à direita, temos que

$$\Psi''(\tau, 0) < 0 \quad \text{e} \quad \Psi''(\tau, 1) > 0.$$

Mas, sendo ambas funções contínuas em $[0, T]$, segue que há $\delta_1 > 0$ tal que

$$\Psi''(t, 0) < 0 \quad \text{e} \quad \Psi''(t, 1) > 0, \tag{4.5}$$

para todo $t \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$.

Tome agora

$$g(a, b, c, d, e, f) = \frac{3\Psi'''(d, 1) - 2\Psi'''(c, 1)}{\Psi'(f, 1)^2} - \frac{3\Psi'''(b, 0) - 2\Psi'''(a, 0)}{\Psi'(e, 0)^2}.$$

Como $\Psi'(\tau, 1) \neq 0$ e $\Psi'(\tau, 0) \neq 0$, sabemos que esta função é contínua no ponto $(a, b, c, d, e, f) = (\tau, \tau, \tau, \tau, \tau, \tau)$ com

$$g(\tau, \tau, \tau, \tau, \tau, \tau) = \frac{\Psi'''(\tau, 1)}{\Psi''(\tau, 1)^2} - \frac{\Psi'''(\tau, 0)}{\Psi''(\tau, 0)^2} > 0.$$

Assim, por continuidade, existe δ_2 tal que a, b, c, d, e e f pertencerem a $(\delta_2 - \tau, \tau)$ implica em

$$g(a, b, c, d, e, f) > 0.$$

Tome $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que $\Psi(\tau - \delta) \leq 0$ (isto é possível pois por hipótese τ é não-simples à esquerda).

Seja então τ_0 definido por

$$\tau_0 = \inf\{t \in (\tau - \delta, \tau) \mid \Psi(t) \geq 0\}.$$

Note desta definição que $\Psi(\tau_0) = 0$. Note também que $\Psi'(\tau_0) \geq 0$ pois, caso $\Psi'(\tau_0) < 0$ então teríamos pela definição de τ_0 que $\tau(t) < 0$ em $(\tau - \delta, \tau)$, um absurdo com a hipótese de τ ser não-simples à esquerda.

Tomamos agora em (τ_0, τ) os seguintes conjuntos:

- $A = \{t \in (\tau_0, \tau) \mid \Psi(t) \neq 0\}$, e
- $B = \{t \in (\tau_0, \tau) \mid \Psi(t) = 0\}$.

Temos que $A \cup B = (\tau_0, \tau)$, logo, sendo $\Psi'(t)$ absolutamente contínua temos que

$$0 = \Psi'(\tau) = \Psi'(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \Psi''(t) dt = \Psi'(\tau_0) + \int_A \Psi''(t) dt + \int_B \Psi''(t) dt.$$

A seguir mostramos em **(i)** que $\int_A \Psi''(t) dt > 0$, e em **(ii)** que $\int_B \Psi''(t) dt = 0$. Isto, com o fato de que $\Psi(\tau_0) \geq 0$, implicará da equação acima que $0 = \Psi'(\tau) > 0$, um absurdo. Logo, basta provarmos os itens **(i)** e **(ii)** para a demonstração estar completa.

(i) Dado $\omega \in A$, mostraremos que é possível encontrar t_0, t_1 e t_2 tais que

$$\Psi(t_0) = \Psi(t_1) = \Psi(t_2) = 0,$$

$\Psi'(t_1) > 0$, $\Psi(t) > 0$ em (t_0, t_1) e $\Psi(t) < 0$ em (t_1, t_2) .

Para $\omega \in A$ supomos que $\Psi(\omega) > 0$, sendo o caso $\Psi(\omega) < 0$ análogo. Tomamos então:

$$\begin{aligned} t_0 &= \sup\{t \in (\tau_0, \omega) \mid \Psi(t) \leq 0\}, \\ t_1 &= \inf\{t \in (\omega, \tau) \mid \Psi(t) \leq 0\}, \text{ e} \\ t_2 &= \inf\{t \in (t_1, \tau) \mid \Psi(t) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Note que $\Psi(t_0) = \Psi(t_1) = \Psi(t_2) = 0$, e também $\Psi(t) > 0$ em (t_0, t_1) . Segue então que $z(t_1)$ é, por definição, um ponto simples à esquerda. Assim, pelo Teorema 13, $z(t_1)$ é também um ponto simples à direita, isto é, existe $\delta_0 > 0$ tal que $\Psi(t) > 0$, ou $\Psi(t) < 0$, ou $\Psi(t) = 0$ em $(t_1, t_1 + \delta_0]$.

Note que os casos $\Psi(t) > 0$, ou $\Psi(t) = 0$ em $(t_1, t_1 + \delta_0]$ são impossíveis pois, neste caso, teríamos $\Psi(t_1) = 0$ como ponto de mínimo local, ou seja, deveríamos ter que $\Psi'(t_1) = 0$. Mas então $z(t_1)$ seria um ponto crítico simples, logo satisfaria o Lema 3, o que nos dá uma contradição com as inequações em (4.5). Assim, temos que $\Psi(t) < 0$ em (t_1, t_2) .

Assim, de $\Psi(t) < 0$ em (t_0, t_1) , e $\Psi(t) > 0$ em (t_1, t_2) se conclui facilmente que $\Psi'(t_1) \geq 0$, mas vimos também que é impossível ocorrer $\Psi'(t_1) = 0$, logo temos que $\Psi'(t_1) < 0$.

Denotemos então $A_\omega = (t_0, t_1) \cup (t_1, t_2)$ e notemos que

$$\int_{A_i} \Psi''(t) dt = \int_{t_0}^{t_2} \Psi''(t) dt = \Psi'(t_2) - \Psi'(t_1).$$

Notemos também pela definição acima de t_0 , t_1 e t_2 que $\omega_2 \in A_{\omega_1}$ implica em $A_{\omega_1} = A_{\omega_2}$. Este fato é fácil de se visualizar geometricamente, sendo sua demonstração analítica apenas um exercício de formalidade.

Estimemos agora $\Psi'(t_2) - \Psi'(t_1)$.

Sendo $\Psi(t)$ de classe C^∞ , temos Pelo Teorema de Taylor com resto de Lagrange que existe $t_a \in (t_0, t_1)$ tal que

$$\Psi(t_1) = \Psi(t_0) + \Psi'(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{\Psi''(t_0, 0)}{2}(t_1 - t_0)^2 + \frac{\Psi'''(t_a, 0)}{6}(t_1 - t_0)^3.$$

Assim, de $\Psi(t_1) = \Psi(t_0)$ vem

$$\Psi'(t_0) = -\frac{\Psi''(t_0, 0)}{2}(t_1 - t_0) - \frac{\Psi'''(t_a, 0)}{6}(t_1 - t_0)^2.$$

Também, aplicando o Teorema de Taylor com resto de Lagrange sobre $\Psi'(t)$ temos que existe $t_b \in (t_0, t_1)$ tal que

$$\Psi'(t_1) = \Psi'(t_0) + \Psi''(t_0, 0)(t_1 - t_0) + \frac{\Psi'''(t_b, 0)}{2}(t_1 - t_0)^2.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \Psi'(t_1) + \Psi'(t_0) &= 2\Psi'(t_0) + \Psi''(t_0, 0)(t_1 - t_0) + \frac{\Psi'''(t_b, 0)}{2}(t_1 - t_0)^2 \\ &= \left(\frac{\Psi'''(t_b, 0)}{2} - \frac{\Psi'''(t_a, 0)}{3} \right) (t_1 - t_0)^2 = \left(\frac{3\Psi'''(t_b, 0) - 2\Psi'''(t_a, 0)}{6} \right) (t_1 - t_0)^2. \end{aligned}$$

De forma análoga, prova-se que existem t_c e t_d em (t_1, t_2) tal que

$$\Psi'(t_2) + \Psi'(t_1) = \left(\frac{3\Psi'''(t_d, 1) - 2\Psi'''(t_c, 1)}{6} \right) (t_2 - t_1)^2.$$

Desta forma, segue que

$$\begin{aligned} \Psi'(t_2) - \Psi'(t_0) &= \Psi'(t_2) + \Psi'(t_1) - (\Psi'(t_1) + \Psi'(t_0)) \\ &= \left(\frac{3\Psi'''(t_d, 1) - 2\Psi'''(t_c, 1)}{6} \right) (t_2 - t_1)^2 - \left(\frac{3\Psi'''(t_b, 0) - 2\Psi'''(t_a, 0)}{6} \right) (t_1 - t_0)^2. \end{aligned}$$

Agora, notemos que, também pelo Teorema de Taylor com resto de Lagrange que

$$\begin{aligned} \Psi(t_0) &= \Psi(t_1) + \Psi'(t_1)(t_0 - t_1) + \frac{\Psi''(t_e, 0)}{2}(t_0 - t_1)^2 \\ \Rightarrow t_1 - t_0 &= \frac{2\Psi'(t_1)}{\Psi''(t_e, 0)}. \end{aligned}$$

E, da mesma forma

$$\begin{aligned} \Psi(t_2) &= \Psi(t_1) + \Psi'(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{\Psi''(t_f, 1)}{2}(t_2 - t_1)^2 \\ \Rightarrow t_2 - t_1 &= -\frac{2\Psi'(t_1)}{\Psi''(t_f, 1)}. \end{aligned}$$

Assim, como t_a, t_b, t_c, t_d, t_e e t_f pertencem todos a $(\tau - \delta, \tau)$ e $\Psi'(t_1) \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned} \Psi'(t_2) - \Psi'(t_0) &= \frac{2\Psi'(t_1)^2}{3} \left(\frac{3\Psi'''(t_d, 1) - 2\Psi'''(t_c, 1)}{\Psi'(t_f, 1)^2} - \frac{3\Psi'''(t_b, 0) - 2\Psi'''(t_a, 0)}{\Psi'(t_e, 1)^2} \right) \\ &= \frac{2\Psi'(t_1)^2}{3} g(t_a, t_b, t_c, t_d, t_e, t_f) > 0. \end{aligned}$$

Logo $\Psi'(t_2) - \Psi'(t_0) > 0$.

Resumindo, provamos que

$$\int_{A_\omega} \Psi''(t) dt > 0,$$

para cada $\omega \in A$.

Voltando agora ao conjunto A . Dado $\omega \in A$, tomemos o conjunto dos conjuntos A_ω , dado por

$$Z = \{A_\omega \mid \omega \in A\},$$

e notemos que $A = \bigcup_{A_\omega \in Z} A_\omega$. Notemos agora que, como $\omega_2 \in A_{\omega_1}$ implica em $A_{\omega_1} = A_{\omega_2}$, então $A_{\omega_1} \neq A_{\omega_2}$ implica em $A_{\omega_1} \cap A_{\omega_2} = \emptyset$.

Desta forma, Z é um conjunto de abertos disjuntos de \mathbb{R} , onde, por serem abertos, cada um contém ao menos um número racional distinto. Assim, pela enumerabilidade dos racionais temos que Z têm também uma quantidade enumerável de elementos, dois a dois disjuntos, digamos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$.

Logo, temos a seguinte representação em união disjunta (dois a dois) para A :

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

de onde segue que

$$\int_A \Psi''(t) dt = \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \Psi''(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \Psi''(t) dt > 0,$$

pois, para cada $i \in \mathbb{N}$, vimos que $\int_{A_i} \Psi''(t) dt > 0$.

(ii) Como $\Psi(t) = 0$ para todo $t \in B$, poderíamos esperar que também vale $\Psi''(t) = 0$ para todo $t \in B$ caso B tenha pontos o bastante. Por outro lado, pode ocorrer tanto de B ter pontos isolados quanto de $\Psi'(t)$ nem mesmo ser diferenciável para algum $t \in B$. Neste sentido, faremos a seguir uma construção simples para contornar este problema.

Tomemos $B = I_B \cup B'$ onde:

- $I_B = \{t \in B \mid t \text{ não é ponto regular de } \Psi''(t) \text{ ou } t \text{ é ponto isolado de } B\}$, e
- $B' = B - I_B = \{t \in B \mid t \text{ é ponto regular de } \Psi''(t) \text{ e } t \text{ é ponto de acumulação de } B\}$.

Como o conjunto dos pontos isolados é enumerável, de onde tem medida nula, e o conjunto dos pontos não-regular tem medida nula, segue que I_B têm medida nula.

Notemos também que, dado $\omega \in B'$, temos que $\Psi(\omega) = 0$, e que ω_1 , por ser ponto de acumulação de B , é limite de uma sequência (ω_n) de B , de onde

$$\Psi'(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi(\omega_n) - \Psi(\omega)}{\omega_n - \omega} = \frac{0 - 0}{\omega_n - \omega} = 0.$$

Ou seja, $\Psi'(t) = 0$ para todo $t \in B'$.

Tome agora, analogamente, $B'' = B' \cup I_{B'}$, onde

- $I_{B'} = \{t \in B' \mid t \text{ é ponto isolado de } B'\}$, e
- $B'' = B - I_{B'} = \{t \in B' \mid t \text{ é ponto de acumulação de } B'\}$

Novamente segue que $I_{B''}$ é um conjunto de medida nula.

Também, dado $\xi \in B''$, como $\xi \in B'$, temos que ξ é ponto regular de $\Psi''(t)$, de onde, por definição de ponto regular, $\Psi''(t)$ é diferenciável em $t = \xi$. Mas, como $B'' \subset B'$, então também $\Psi'(\xi) = 0$ e além do mais ξ é, por ser ponto de acumulação de B' , limite de uma sequência (ξ_n) de B' , de onde

$$\Psi''(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi'(\xi_n) - \Psi'(\xi)}{\xi_n - \xi} = \frac{0 - 0}{\xi_n - \xi} = 0.$$

Ou seja, $\Psi''(t) = 0$ para todo $t \in B''$.

Em resumo, temos que $B = I_B \cup I_{B'} \cup B''$, onde $I_B \cup I_{B'}$ têm medida nula e $\Psi''(t) = 0$ em B'' , de onde

$$\int_B \Psi''(t) dt = \int_{I_B \cup I_{B'}} \Psi''(t) dt + \int_{B''} \Psi''(t) dt = 0 + \int_{B''} 0 dt = 0,$$

e terminamos a demonstração. ■

Lema 6 *Todo ponto $p = z(t)$ é simples à esquerda e à direita.*

Demonstração. Suponha por absurdo $p = z(\tau)$ um ponto não simples à esquerda ou à direita.

Pelo Lema 2 segue que p é um ponto singular. Assim, do Lema 4 segue que

$$\Psi'(\tau, 0) < 0 \quad \text{e} \quad \Psi'(\tau, 1) > 0$$

de onde

$$\lambda(\tau)[g, [f, g]](p) = \Psi'(\tau, 1) - \Psi'(\tau, 0) > 0$$

Assim, temos que $\tau \neq 0$ e $\tau \neq T$ pois $z(0)$ e $z(T)$ são simples, por hipótese.

Logo, se um ponto τ é não-simples à direita ou à esquerda, este pertence ao intervalo $(0, T)$. Mas então, pelo Teorema 13 segue que τ é não-simples à direita e à esquerda.

Segue então do Lema 5 que

$$\frac{\Psi'''(\tau, 1)}{\Psi''(\tau, 1)^2} - \frac{\Psi'''(\tau, 0)}{\Psi''(\tau, 0)^2} = 0.$$

Logo p é um ponto singular supercrítico de onde deveríamos por hipótese ter que $\lambda(\tau)[g, [f, g]](p) < 0$ e chegamos num absurdo. ■

A seguinte definição será útil no teorema que a sucede.

Definição 10 *Dizemos que $z(\tau)$ é um **ponto chave** para um dado controle ótimo $u(t)$, quando não existir $\delta > 0$ tal que ocorra alguma das seguintes hipóteses:*

$\Psi(t) > 0$ para todo $t \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$ ou

$\Psi(t) < 0$ para todo $t \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$ ou

$\Psi(t) = 0$ para todo $t \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$.

Por fim, como corolário do Lema 6 temos o teorema a seguir, que era apenas o restava a se demonstrar do Teorema 10,

Teorema 14 $u(t)$ satisfaz a condição (i) de regularidade

Demonstração. Tome o conjunto $T = \{t \in [0, T] \mid z(t) \text{ é ponto chave}\}$ e mostremos que T é finito.

Se não fosse o caso, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, haveria uma sequência de pontos chave convergindo pela esquerda ou pela direita para um ponto p . Isto por outro lado, da definição de ponto simples, é um absurdo com o Teorema 6, de que p é simples à direita e à esquerda.

Assim o conjunto de pontos chave é finito, digamos $0 \leq \tau_0 \leq \dots \leq \tau_n \leq T$. Mas então através dos intervalos $[0, \tau_0]$, ..., $[\tau_n, T]$, da definição de pontos chave e da continuidade de $\Psi(t)$, segue que $u(t)$ é regular. ■

Juntando o Teorema 11 com o Teorema 14 obtemos que $u(t)$ é regular. O fato de $u(t)$ ser contínuo por partes segue diretamente pela definição de regularidade e pela Proposição 4.

Concluimos então a demonstração do Teorema 10.

4.3 Algoritmo de Determinação dos Controles Ótimos

Nesta seção iremos determinar as trajetórias $z(t)$ e os controles $u(t)$ em $[0, T]$ que satisfaçam o Princípio de Pontryagin através de seu ponto final $z(T)$, quando $u(t)$ for um controle regular.

Este algoritmo é especialmente útil, considerando a insatisfação dos autores que aqui consultamos, para a obtenção de controles ótimos por métodos numéricos tradicionais, devido a incerteza da convergência de tais métodos para um controle ótimo. Neste sentido, o novo algoritmo aqui apresentado pode, futuramente, fornecer uma alternativa mais segura e até viável para tal finalidade.

Supomos agora que o controle ótimo $u(t)$ seja regular e mostramos como determinar $u(t)$ e $z(t)$ através de seu ponto final $z(T)$. Notemos que o tempo ótimo T ainda não foi determinado. Assim começamos a procura dos controles ótimos a partir de um ponto final $z(S)$ para $S > 0$ qualquer e reparametrizamos o tempo t para $t_n = 0$ e $T = S - t_n$, depois de encontrado o tempo inicial t_n .

Seguindo esta ideia, introduzimos a seguir um algoritmo para determinação exata dos possíveis controles ótimos com ponto final $z(T)$.

Algoritmo 1 (Controle Ótimo pelo Ponto Final) *O algoritmo a seguir define os controles ótimos regulares possíveis através de um dado ponto final $z(S)$.*

Tome $t_0 = t_1 = S$, suponha definido $z(t_i)$, $\lambda(t_i)$ e $u(t)$ em (t_i, t_{i-1}) e defina t_{i+1} , $z(t_{i+1})$, $\lambda(z(t_{i+1}))$ e $u(t)$ em (t_{i+1}, t_i) da seguinte forma:

Caso 1) *Suponha que t_i não é ponto singular.*

- *Se for o caso de $\Psi(t_i) > 0$, ou de $\Psi(t_i) = 0$ e $\Psi'(t_i) > 0$. Então, podemos dizer que existe $\delta_i > 0$ tal que $u(t) = 0$ em $(t_i - \delta_i, t_i)$.*
- *Analogamente, se for o caso de $\Psi(t_i) < 0$, ou de $\Psi(t_i) = 0$ e $\Psi'(t_i) = 0$, então existe $\delta_i > 0$ tal que $u(t) = 0$ em $(t_i - \delta_i, t_i)$.*

Desta forma sendo $u(t) = 0$ ou $u(t) = 1$, podemos obter $z(t)$ e $\lambda(t)$ através de seus respectivos PVIs, regredindo com o tempo de t_i em direção 0, encontramos o primeiro t_{i+1} tal que $\Psi(t_{i+1}) = 0$.

Temos então que $u(t) = 0$ em (t_{i+1}, t_i) ou que $u(t) = 1$ em (t_{i+1}, t_i) para cada caso acima, respectivamente.

Caso 2) Suponha que t_i é ponto singular.

Como $u(t)$ é regular, há um $\delta_i > 0$ tal que $\Psi(t) > 0$ em $(t_i - \delta_i, t_i)$, ou $\Psi(t) < 0$ em $(t_i - \delta_i, t_i)$, ou $\Psi(t) = 0$ em $(t_i - \delta_i, t_i)$.

- Para as duas primeiras hipóteses, chegamos num caso análogo ao Caso 1, em que $u(t) = 0$ ou $u(t) = 1$ em (t_{i+1}, t_i) .
- Se ocorrer o terceiro caso, é possível, através de t_i , determinar unicamente $u(t)$, $z(t)$ e $\lambda(t)$ pela Proposição 4, regredindo o tanto de tempo que quisermos em direção a 0. Assim, podemos parar este processo em qualquer $t_{i+1} < t_i$, contanto que continue a ser $0 \leq u(t) \leq 1$ em (t_{i+1}, t_i) .

Para evitar repetição de soluções, caso já tivéssemos $\Psi(t) = 0$ em (t_i, t_{i-1}) , então definimos o controle através do primeiro caso.

Estes dois possíveis casos acima geram possíveis controles ótimos, sendo que o segundo gera infinitos possíveis controles ótimos com ponto final $z(T)$. Por este motivo, no segundo caso chamamos $z(t_i)$ de **ponto singular chave**.

Restrição Denote

$$J(x, u, \tau_0, \tau) = \phi(x(\tau_0)) + \int_{\tau_0}^{\tau} (L + K(x(s))u(s)) ds$$

como o custo para o controle $u(t)$ entre o ponto inicial τ_0 e o ponto final τ . Então devemos parar a iteração do algoritmo no primeiro ponto que ocorrer $J(x, u, \tau, S) - \phi(x(\tau)) = 0$, no sentido positivo para $t < \tau$.

Para justificar essa restrição, notemos que para $\tau < S$, caso durante a iteração acima tivermos $\phi(x(\tau)) < J(x, u, \tau)$, então nenhum $t \leq \tau$ pode ser o tempo inicial t_n do controle ótimo $u(t)$.

De fato, se por absurdo $t_n < \tau$ fosse o ponto inicial do controle ótimo, então teríamos que

$$\begin{aligned} J(x, u, t_n, \tau) &= \phi(x(\tau)) + \int_{t_n}^{\tau} (L + K(x(s))u(s)) ds \\ &< J(x, u, \tau) + \int_{t_n}^{\tau} (L + K(x(s))u(s)) ds \\ &= \phi(x(S)) + \int_{t_n}^S (L + K(x(s))u(s)) ds = J(x, u, t_n, S), \end{aligned}$$

o que representa um absurdo com a minimalidade de $J(x, u, t_n, S)$.

Através do Teorema 10, dado um conjunto Z_f de pontos finais possíveis $z(T)$, temos condições de mostrar que os controles ótimos com ponto final $z(T)$ são regulares, de onde poderemos usar o Algoritmo 1 para encontrar tais controles.

Por outro lado, na prática não podemos utilizar este algoritmo em todos os pontos finais $z(T)$, por serem infinitos. Assim, para encontrar um controle ótimo a partir de um ponto inicial z_0 , precisamos de algum algoritmo aproximativo, o que fazemos a seguir.

Dada um conjunto de pontos finais Z_f para controles ótimos, considere o conjunto de controles ótimos possíveis U_{optimal} com pontos finais em Z_f . Considere então o conjunto de pontos $\Theta = (z(t), \lambda(t), t)$, onde (z, λ) é o par trajetória/coestado correspondente a algum $u \in U_{\text{optimal}}$, e $t \in \text{Dom}_z$.

Defina então Θ_{chave} como o conjunto de pontos $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $(z, \lambda, \tau) \in \Theta$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e $\tau \in \mathbb{R}$ com $\Psi(\tau) = 0$ e $\Psi'(\tau) \neq 0$. Defina também Θ_{sing} como o conjunto de pontos $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $(z, \lambda, \tau) \in \Theta$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0, \infty)$ com $\Psi(\tau) = \Psi'(\tau) = 0$. Chamaremos Θ_{chave} de **arcos chave** e Θ_{sing} de **arcos singulares**, pois, em geral, estes conjuntos nos parecem ser dados pela união de arcos contínuos (ver Capítulo 5).

Algoritmo 2 (Controle Ótimo pelo Ponto Inicial) *Seja um ponto inicial z_0 e um subconjunto Z do conjunto de pontos finais Z_f .*

Passo 1 *Esperamos poder aproximar os conjuntos Θ_{chave} e Θ_{sing} sabendo apenas um conjunto finito de pontos destes. Para encontrar tal conjunto finito de pontos, basta encontrarmos, através do Algoritmo 1, o conjunto $U \subset U_{otimal}$ de controles ótimos $u(t)$ e suas funções correspondentes $z(t)$ e $\lambda(t)$ para o conjunto de pontos finais $Z \subset Z_f$ e então determinar os subconjuntos correspondentes em Θ_{chave} e Θ_{sing} .*

Passo 2 *Desta forma, dada um trajetória $z(t)$, não precisamos saber quanto vale $\lambda(t)$ para sabermos se $\Psi(t) \neq 0$ ou se $\Psi(t) = \Psi'(t) = 0$, de onde, apenas sabendo de $z(t)$ saberemos os intervalos de tempo em que o controle $u(t)$ é constante ou em que este é um controle singular. Logo, como z_0 não é um ponto singular por hipótese, poderemos supor que $u(0) = 0$ ou $u(0) = 1$, e descobrir a partir disto as possíveis trajetórias ótimas e controles ótimos correspondentes $z(t)$ e $u(t)$.*

4.4 Existência de Controle Ótimo

Em certas circunstâncias, a existência de um controle ótimo é garantida para $U_{ad} = L^1([0, T], \Omega)$. Como condição clássica de existência, temos o teorema a seguir, devido a Lyapunov, de [9] (Lee, 1986, Sec. 4.2, Cor. 2).

Teorema 15 *Considere o Problema 4, tal que admitamos apenas os controles $u : [0, T] \rightarrow \Omega$, para os quais $T \leq L$, onde L não depende do controle $u(t)$.*

Suponha que K, f, g e ϕ sejam de classe C^1 e suponha ainda que:

- (i) *Exista ao menos um controle $u(t)$ que tenha uma trajetória $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ correspondente,*
- (ii) *Toda trajetória $x(t)$ é limitada por alguma constante M , onde M é independente do controle $u(t)$ correspondente.*

Existe então um controle ótimo $u^ \in L^1([0, T], \Omega)$ minimizando $J(u)$.*

Destacamos que é especialmente problemática de se provar a condição (ii), de que $x(t)$ seja limitada independentemente de $u(t)$. Para provar esta condição para problemas de controle ótimo, descobrimos ser muito útil o resultado que introduzimos a seguir no Teorema 16. Na descrição do mesmo, para um dado $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, vamos denotar por $D_x \subset \mathbb{R}^n$ como a projeção do conjunto D sobre sua coordenada $x \in \mathbb{R}^n$ e por D_y como a projeção de D sobre sua coordenada $y \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 16 *Dado Ω compacto, seja $f : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ uma função de (x, y, u) , com $x \in D_x \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in D_y \subset \mathbb{R}$ e $u \in \Omega$, com f localmente Lipschitziana em (x, y) .*

Dado também $u(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \Omega$, suponha que $z(t) = (x(t), y(t))$ seja solução do PVI

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t f(z(s), u(s)) ds \quad \text{em } [t_0, t_1]$$

Seja também $r : D_x \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $r_x(x)$ exista, seja localmente limitada em D_x e:

- $(-r_x(x), 1) \cdot f(x, r(x), u) > 0$ para todo $(x, r(x), u) \in D \times \Omega$;
- $y(t_0) > r(x(t_0))$.

Então $y(t) > r(x(t))$ em $[0, T]$.

Este teorema possui origem geométrica, de modo que, mesmo que a tenhamos demonstrado formalmente a seguir, achamos importante ilustrá-la na Figura 4.1, onde em azul temos representado o retrato de fase do PVI. Note como na Figura 4.1 a trajetória não pode regredir para baixo de $r(x)$ após passar por ela, devido à direção quase normal em que o fluxo do PVI se encontra em relação à $r(x)$, de modo que o trajeto em vermelho na figura 4.1 é impossível.

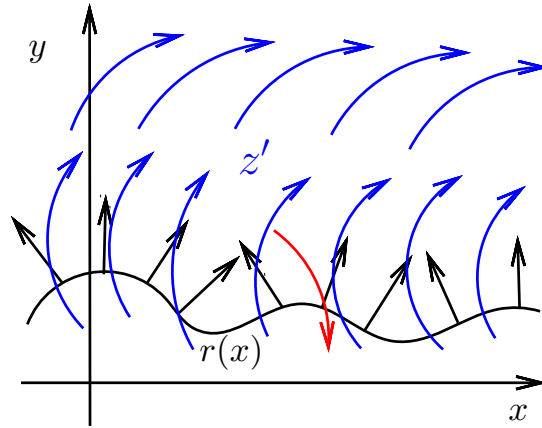


Figura 4.1: Ilustração para o Teorema 16.

Demonstração. Provemos inicialmente o resultado para $r(x) = 0$.

Suponha por absurdo que $y(t) < 0$ para algum $t \in [t_0, t_1]$. Como $y(t)$ é contínua e $y(t_0) > 0$, pelo Teorema do valor intermediário segue que existe ao menos um $s \in [t_0, t_1]$ tal que $y(s) = 0$. Assim, podemos tomar

$$\tau = \inf\{t \in [t_0, t_1] \mid y(t) = 0\} \in [t_0, t_1].$$

Como propriedade de \inf , temos que existe uma sequência (t_n) em A tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \tau$. Pelo fato de y ser contínua em $[t_0, t_1]$ segue disto que

$$y(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) = 0.$$

Tomando $\epsilon = f(x(\tau), y(\tau), u(\tau))$ temos por hipótese que $\epsilon > 0$. Agora, sendo $(x(t), y(t))$ contínua em $[t_0, t_1]$ então sabemos que $G = \{(x(t), y(t)) \mid t \in \mathbb{R}^n\}$ é compacto em $D \times E$, logo, existe $M > 0$ tal que $|f(x_2, y_2, u) - f(x_1, y_1, v)| < M|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)|$ para todo $(x_1, y_1) \in G$, $(x_2, y_2) \in G$, e u e $v \in \Omega$.

Em especial temos que

$$|f(x(t), y(t), u(t)) - f(x(\tau), y(\tau), u(\tau))| < M|(x(t), y(t)) - (x(\tau), y(\tau))|.$$

Assim, sendo $(x(t), y(t))$ contínua em τ segue que existe $\delta > 0$ tal que $t \in [\tau - \delta, \tau + \delta]$ implica em $|(x(t), y(t)) - (x(\tau), y(\tau))| < \frac{\epsilon}{2M}$. Segue então que, para $t \in [\tau - \delta, \tau + \delta]$, temos

$$|f(x(t), y(t), u(t)) - \epsilon| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ou seja, $f(x(t), y(t), u(t)) > 0$ em $[\tau - \delta, \tau + \delta]$. Desta forma, teríamos que

$$y(t_0) = y(\tau) - \int_{t_0}^{\tau} f(x(r), y(r), u(r)) dt < 0,$$

o que contradiz a hipótese. Assim o teorema está provado para $r(x) = 0$.

Para o caso geral basta tomarmos a mudança de variáveis $w(t) = y(t) - r(x(t))$.

Denotando $g(x, y, u) = (f_1, \dots, f_{n-1})$, então, pelo Teorema 2 e por hipótese do enunciado, temos que $r(x(t))$ é absolutamente contínua com

$$r'(x(t)) = r_x(x(t))x'(t) = r_x(x(t))g(x(t), y(t), u(t)).$$

E logo $w(t)$ também é absolutamente contínua com

$$\begin{aligned} w'(t) &= y'(t) - r'(x(t)) = f_n(x(t), y(t), u(t)) - r_x(x(t))g(x(t), y(t), u(t)) \\ &= (r_x(x(t)), -1) \cdot f(x(t), y(t), u(t)) \\ &= (r_x(x(t)), -1) \cdot f(x(t), w(t) + r(x(t)), u(t)) = h(x(t), w(t), u(t)), \end{aligned}$$

onde $h(x, w, z) = (r_x(x), -1) \cdot f(x, w + r(x), u)$.

Por Hipótese do enunciado temos então que $h(x, 0, u) > 0$ para todo $(x, u) \in D^* \times \Omega$, onde $D^* = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x, r(x)) \in D^*\}$. Note também que D^* é aberto pois é, por definição, a interseção dos abertos D_x e $r^{-1}(D_y)$. Também, por hipótese do enunciado, temos que

$$w(t_0) = y(t_0) - r(x(t_0)) > 0.$$

Assim, $w(t)$ satisfaz todos os requisitos da forma do teorema que acabamos de provar, de onde temos que $w(t) > 0$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Mas isso significa que $y(t) > r(x(t))$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, como queríamos provar. ■

4.5 Condição Adicional para Ponto Final

Segundo o Princípio de Pontryagin temos que $\lambda(T) = \phi_z(z(T))$. Assim, da nulidade do Hamiltoniano em T obtemos

$$H(z(T), \lambda(T), u(T)) = H(z(T), \phi_z(z(T)), u(T)) = 0.$$

Isto nos dá uma equação em $z(T)$, que logo reduz em muito os possíveis pontos finais $z(T)$ de nosso controle ótimo $u(t)$.

Por outro lado, sob certas suposições, descobrimos que podemos diminuir ainda mais o conjunto de pontos finais, através da análise da derivada de 2ª ordem da função custo em T . Isto é o que acontece na seguinte proposição:

Proposição 5 *Se $u(t)$ é constante em um intervalo $[t_1, T]$, onde $t_1 < T$, então*

$$\left. \frac{dH(z(t), \phi_z(z(t)), u(T))}{dt} \right|_{t=T} \geq 0.$$

Demonstração. Tome δ_0 qualquer tal que $[T - \delta_0, T] \subset [t_1, T]$. Se estendermos o domínio de $u(t)$ para $[0, T + \delta_0]$ tomando $u(t) = u(T)$ em $[T, T + \delta_0]$, pelo Teorema 4 (de existência), poderemos estender o domínio de $z(t)$ para $[0, T + \delta]$, para algum $\delta < \delta_0$, tal que continue valendo o PVI em $[0, T + \delta]$

$$z'(t) = f(z(t), u(t)), \quad z(t_0) = z_0.$$

Assim, tomando o custo $J(x, u, h)$ para o controle $u(t)$ com ponto final $h \in [T-\delta, T+\delta]$, teremos que

$$J(x, u, h) = \phi(z(h)) + \int_0^h L + Ku(t) dt.$$

Mas, pela hipótese de minimalidade de nosso ponto final T , temos que $J(x, u) \leq J(x, u, h)$. Ou seja, $J(x, u, h)$ admite um ponto de mínimo em h .

Também notamos, pela constância de $u(t)$ em $[T-\delta, T+\delta]$, que $L + Ku(t)$ é contínua em $[T-\delta, T+\delta]$, de onde, pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo para Integral de Lebesgue, temos que $J(x, u, h)$ é diferenciável em relação a h para todo $h \in [T-\delta, T+\delta]$, com

$$\frac{dJ(x, u, h)}{dh} = \phi_z(z(h))f(z(h), u(h)) + L + K(z(h))u(h) = H(z(h), \phi_z(z(h)), u(T)).$$

Por fim, pela minimalidade de $J(x, u, T)$, temos que a segunda derivada de $J(x, u, h)$ em $t = T$ deve ser não-negativa, ou seja

$$\left. \frac{d^2 J(x, u, t)}{d^2 h} \right|_{t=T} \geq 0 \Leftrightarrow \left. \frac{dH(z(t), \phi_z(z(t)), u(T))}{dt} \right|_{t=T} \geq 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

Modelo de Câncer de Stepanova

Neste capítulo apresentamos uma modelagem por controle ótimo de um modelo de crescimento de câncer que inclui atividade imunológica, chamado de modelo de Stepanova. A modelagem aqui apresentada é a mesma adotada por Ledzewicz et. al. [7] onde a variável a ser controlada consiste na quantidade de quimioterápico a ser utilizada no tratamento. No sistema sem controle, há uma separatriz entre a região maligna e a região benigna. O objetivo do tratamento consiste em mover uma condição inicial na região maligna para dentro da região benigna. Para tanto, na função objetivo, é incluído um termo de penalidade que aproxima essa separatriz por seu espaço tangente e sua minimização equivale a mover o estado do sistema através dessa fronteira.

A contribuição deste trabalho para a modelagem apresentada em [7] é a de que, auxiliado pelos resultados originais provados por nós na Seção 4, conseguimos no modelo em forma de problema de controle ótimo, não só provar a existência, mas também provar que o controle ótimo $u(t)$ obtido do Problema 4 será contínuo por partes, além de ser regular (segundo a Definição 5). Obtivemos então uma gama de possíveis controles ótimos que passem por um conjunto de pontos finais $z(T)$, utilizando o Algoritmo 1. Por fim conseguimos, dado um ponto inicial (x_0, y_0) , encontrar um controle ótimo que passa por (x_0, y_0) , utilizando o Algoritmo 2.

Por sua vez, em [7], foi apenas considerado que tal controle ótimo exista, sendo então encontrado (numericamente) um possível controle ótimo para um dado ponto inicial (x_0, y_0) .

Outras análises de modelos de tratamento de câncer vistos pela da teoria de controle foram feitas por Matveev et. al. em [12], de Pillis et. al. em [4] e [5] e por Ledzewicz et. al. em [8].

5.1 Modelagem por Controle Ótimo

O modelo de Stepanova para o câncer é composto de um PVI de duas equações. Apesar de sua simplicidade, este modelo envolve várias características biológicas do crescimento do volume do tumor e é muito bem aceito, sendo considerado um modelo básico para o câncer.

As equações são dadas por

$$\begin{aligned}x' &= \mu_C x F(x) - \gamma xy \quad \text{e} \\y' &= \alpha - \delta y + \mu_I (x - \beta x^2) y,\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde x denota o volume do tumor, y representa a densidade de células imunocompetentes, relacionadas a vários tipos de células T , enquanto μ_C , μ_I , α , β , γ e ϵ são coeficientes constantes.

A primeira equação, em x , representa o crescimento e decrescimento do tumor, onde:

- μ_C é um coeficiente relacionado com a taxa de crescimento cancerígeno;
- γ está relacionada com a eliminação do tumor através das células imunocompetentes;
- $F(x)$ é uma função a ser escolhida, a qual determina o modelo de crescimento de tumor a ser adotado.

A segunda equação, em y , representa o crescimento e decrescimento da quantidade de células imunocompetentes, onde:

- α representa uma taxa de crescimento natural de células imunocompetentes do organismo;
- δ representa uma taxa natural de morte das células;
- μ_I representa a dependência das células T em relação ao volume do tumor;
- β determina o estágio em que o tumor, devido ao seu tamanho, leva a diminuição da taxa de crescimento da quantidade de células imunocompetentes, ao invés de levar ao aumento desta taxa.

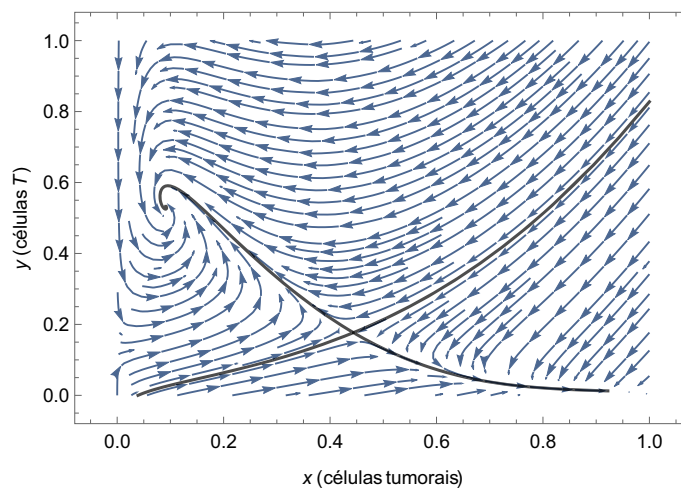


Figura 5.1: Retrato de Fase do Câncer sem Quimioterapia, com x e y normalizados.

Com a aplicação da quimioterapia, o PVI que determina x e y passa a ficar em função do controle u , relacionado à dosagem da quimioterapia, na forma

$$\begin{aligned}x' &= \mu_C x F(x) - \gamma xy - k_X x u, \\y' &= \alpha - \delta y + \mu_I (x - \beta x^2) y - k_X \epsilon y u.\end{aligned}$$

Na Figura 5.1 observamos a existência de três pontos singulares do PVI (5.1). Dois pontos são atratores e um é um ponto de sela.

Podemos observar que através do ponto de sela do PVI (5.1), passa uma separatriz entre a região benigna (a qual pertence o primeiro ponto atrator) e a região maligna (a qual pertence o segundo ponto atrator). Esta separatriz possui como vetor tangente $(a, -b)$, que pode ser calculado através dos autovetores do ponto de sela.

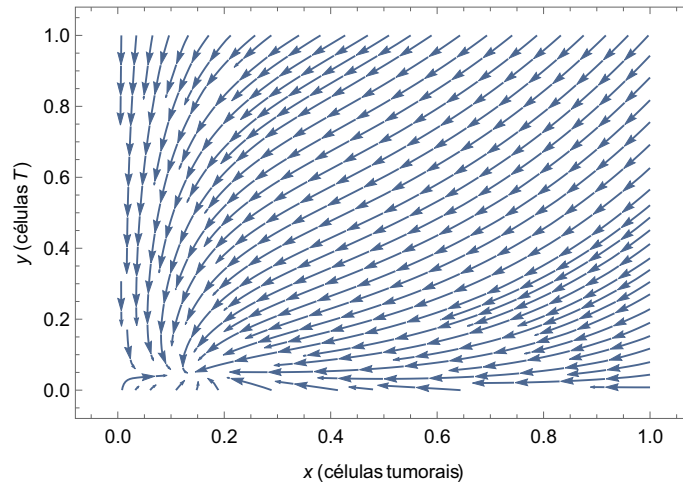


Figura 5.2: Retrato de Fase do Câncer com Quimioterapia, com x e y normalizados.

Desta forma, em nossa modelagem, o objetivo consiste em maximizar o ponto final T do tratamento em direção à região benigna, o que pode ser feito minimizando-se $ax(T) - by(T)$. Veja que minimizar $ax(T) - by(T)$ representa tentar minimizar $x(T)$ e maximizar $y(T)$. Ao buscar este objetivo, procuramos também minimizar o uso de quimioterapia, o que pode ser feito minimizando-se a integral $\int_0^T (cu(t) + d) dt$, onde c e d são constantes que podemos escolher, conforme acharmos mais útil para a modelagem.

Neste sentido, nossa função custo a ser minimizada será dada por

$$J(u) = ax(T) - by(T) + \int_0^T (cu(t) + d) dt.$$

Formalizando o problema na notação deste texto, o problema de controle ótimo a ser resolvido aqui é:

$$\text{Problema 5} \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(z, u) = (a, -b) \cdot z(t) + \int_0^T (cu(s) + d) ds \\ \text{com } T \text{ livre, sujeito a} \\ u \in L^1([0, T], [0, 1]), \text{ com} \\ z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ satisfazendo o PVI em } [0, T] \\ z' = f(z) + g(z)u, \quad z(0) = z_0, \end{array} \right.$$

onde aqui, $z = (x, y)$, $f(z) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ e $g(z) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ são definidos por

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \mu_C x F(x) - \gamma xy, \\ f_2(x, y) &= \mu_I (x - \beta x^2) y - \delta y + \alpha, \\ g_1(x, y) &= -k_X x, \\ g_2(x, y) &= -k_Y x. \end{aligned}$$

Na seção a seguir tomaremos $F(x) = -\log\left(\frac{x}{x_\infty}\right)$ e os valores para as constantes dadas pela Tabela 5.1.

5.2 Análise do Problema pela Teoria de Controle Ótimo

Com o objetivo de encontrarmos um controle ótimo para o Problema 5, consideramos o procedimento do Algoritmo 1, exemplificando inicialmente este procedimento para as constantes $c = 0.05$ e $d = 0.001$.

Constantes	Valores
k_X	1
K_Y	0
a	0.00192
b	1
x_∞	780
μ_C	0.5618
μ_I	0.00484
γ	1
β	0.00264
δ	0.37451
α	0.1181

Tabela 5.1: Tabela das constantes utilizadas

Notemos que, para a aplicação do Princípio de Pontryagin, como na Seção 5, para o Hamiltoniano, temos o valor

$$H(z, \lambda, u) = d + \lambda f(z) + (d + \lambda g(z))u,$$

e para a função chave $\Psi(t)$ temos o valor

$$\Psi(t) = d + \lambda(t)g(z(t)).$$

Note também que, sendo $\phi(z(t)) = ax(t) - by(t) = (a, -b).z(t)$, temos pela condição de ponto final de $\lambda(t)$ que

$$\lambda(T) = \phi_z(z(T)) = (a, -b).$$

No Teorema 17 mostramos a existência de um controle ótimo para o Problema 5 caso ocorra $d > 0$ e $\frac{\mu_c}{\gamma} > \max \left\{ \mu_C - \delta, \frac{\mu_I}{4\beta\gamma} - \frac{\delta}{\gamma} \right\}$. No Apêndice B, através do programa apresentado verificamos que para as constantes da tabela 5.1 satisfazem a segunda equação, de modo que existe um controle ótimo $u(t)$ caso seja $d > 0$.

No Apêndice B, através do programa apresentado, verificamos que os pontos singulares críticos e os pontos supercríticos do Problema 5 satisfazem as hipóteses (ii) e (iii) do Teorema 10. Verificamos também que $\Psi(T) \neq 0$ para todo ponto final possível T , pois os fatos $\Psi(T) = 0$ e $H(z(T), \lambda(T), u(T)) = 0$ se traduzem nas equações

$$\begin{aligned} c + (a, -b)G(z(t)) &= 0, \\ d + (a, -b)f(z(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Por sua vez, o programa apresentado no Apêndice B encontrou apenas uma solução $p = z(T)$ para este sistema de equações e esta satisfaz $\Psi'(t) = \lambda(t)[f, g](p) > 0$, de onde $z(T)$ não é ponto singular. Assim contando que tomemos z_0 sendo um ponto não-singular, teremos também satisfeita a hipótese (i) do Teorema 10, e estando todas suas hipóteses satisfeitas, teremos que o controle ótimo $u(t)$ é regular.

Podemos então aplicar o Algoritmo 1 para encontrar nossos possíveis controles ótimos, através dos pontos finais $z(T)$.

Para encontrarmos as restrições para os pontos finais $z(T)$, primeiro notemos que, caso $\Psi(T) < 0$, ou seja, caso

$$c + (a, -b)g(z(T)) < 0 \Leftrightarrow x(T) > \frac{c}{a},$$

então $u(T) = 1$. Analogamente, caso $x(T) \leq \frac{c}{a}$, temos que $u(T) = 0$.

Temos também as seguintes restrições de ponto final:

- A nulidade do Hamiltoniano que nos dá

$$H(z(T), \lambda(T), u(T)) = c + f(z(T)) + (d + (a, -b)g(z(T)))u(T) = 0.$$

- A Proposição 5 que nos dá

$$\left. \frac{dH(z(t), (a, -b), u(T))}{dt} \right|_{t=T} = f_z(z(T)) + (a, -b)g_z(z(T))u(T) \geq 0.$$

Como acabamos de ver que $u(T) = 1$ para $x(T) > \frac{c}{a}$, e $u(T) = 0$ para $x(t) \leq \frac{c}{a}$, então substituindo tais valores nas restrições acima, em função de $x(t)$, temos o conjunto de possíveis pontos finais. Calculamos estes pontos finais num conjunto igualmente espaçado, representados em azul e vermelho na figura 5.3.

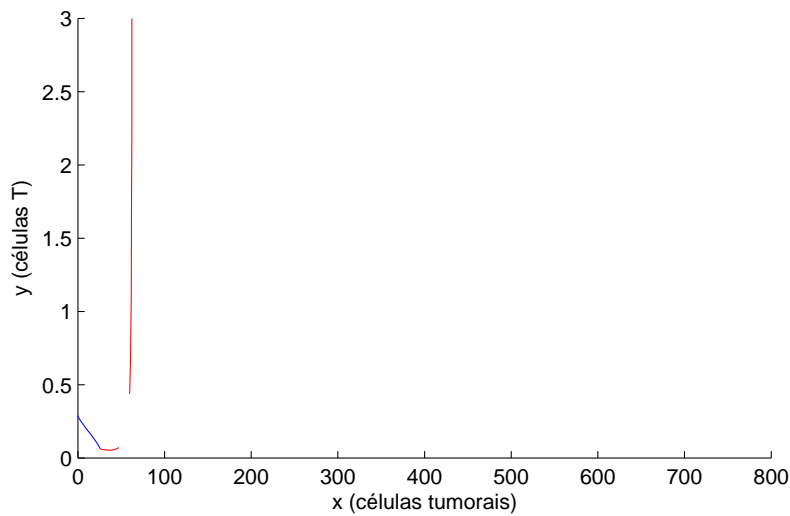


Figura 5.3: Pontos Finais para $c = 0.05$ e $d = 0.01$.

Regredindo $u(t)$, $z(t)$ e $y(t)$, conforme descrito no Caso 1 do Algoritmo 1, dados pela Figura 5.3, obtivemos a Figura 5.4. Nesta figura, em azul, temos a trajetória em que o controle é dado por $u(t) = 0$ (sem uso de quimioterapia), e em vermelho temos a trajetória em que o controle é dado por $u(t) = 1$ (uso total de quimioterapia).

Na figura 5.5 observamos os pontos singulares em preto com $0 \leq u(t) \leq 1$, os singulares críticos em azul (crítico de primeiro tipo) e vermelho (crítico de segundo tipo), e um ponto singular supercrítico em rosa.

Notamos na figura 5.4, em preto, um ponto de descontinuidade num dos arcos chave, que é também um ponto singular da figura 5.5. Isto indica a existência de um **ponto singular chave** $z(\tau)$, representando como um ponto preto nas figuras 5.4 e 5.5. Através do Caso 2 do Algoritmo 1, segue que $z(\tau)$ gera uma infinidade de controles ótimos com controle singular, como vemos na Figura 5.6. Desta forma, temos na Figura 5.6 uma representação de um conjunto de possíveis controles ótimos, obtidos por nossas restrições.

Por outro lado, notamos que, por alguns pontos iniciais (x_0, y_0) , passam dois controles, de modo que é provável que um destes controles não seja o controle ótimo. Notamos por outro lado, por termos utilizado da Restrição do Algoritmo 1, que todo ponto inicial (x_0, y_0) pelo qual passa algum controle, passa um controle ótimo que não seja o controle trivial (com instante $T = 0$).

Notamos por fim que, para estes valores de c e d , temos que, para a maior parte dos pontos iniciais (x_0, y_0) o tratamento é dado por três alternações entre o uso total de

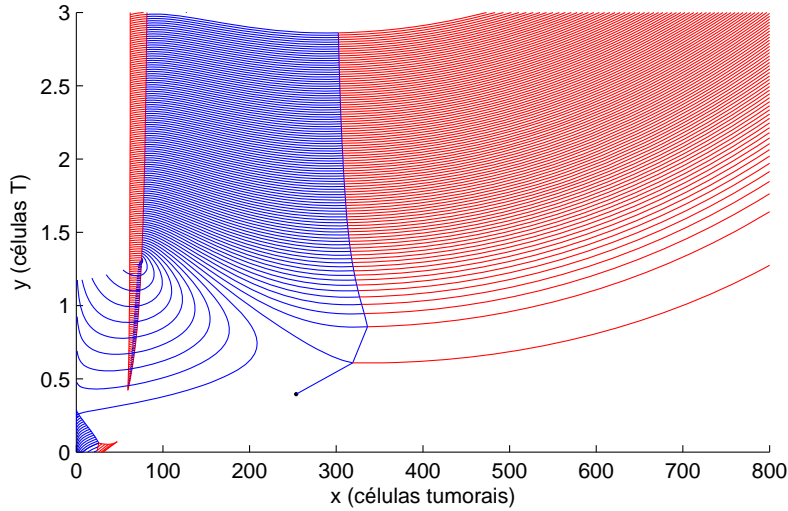


Figura 5.4: Trajetos Ótimos Não-Singulares para $c = 0.05$ e $d = 0.01$.

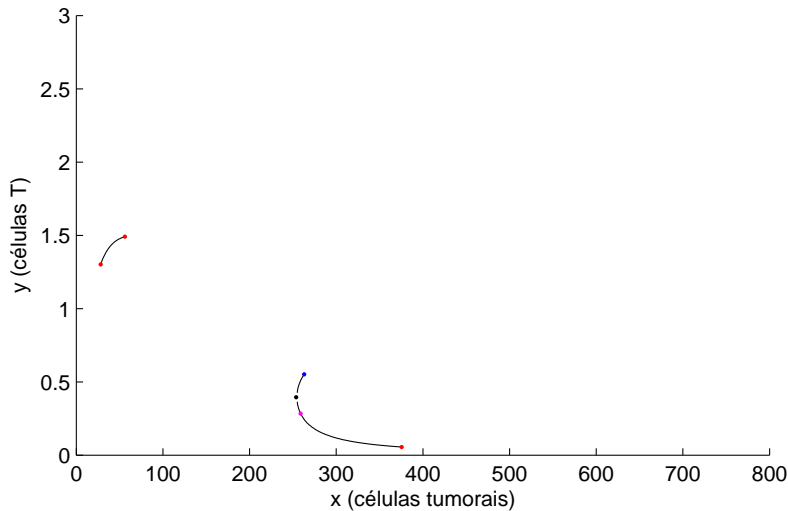


Figura 5.5: Pontos singulares com $0 \leq u(t) \leq 1$, e singulares críticos e supercríticos para $c = 0.05$ e $d = 0.01$.

quimioterapia ($u(t) = 1$), e o não uso de quimioterapia ($u(t) = 0$), sendo que em alguns casos a transição entre o não uso e o uso é dado por um controle singular. Depois destas alterações o tratamento é parado, e o estado do paciente se encontra na região benigna, em que o câncer se encontra controlado.

Agora, em relação ao problema de encontrar um ótimo a partir de um ponto inicial dado, seguindo o Algoritmo 2, através das trajetórias calculadas na Figura 5.6 teremos aproximações para os arcos chave Θ_{chave} e arcos singulares Θ_{sing} , como na Figura 5.7, em que Θ_{chave} está representado pelos pontos azuis e vermelhos, e Θ_{sing} pelos pontos em rosa.

Desta forma, dado um ponto inicial (x_0, y_0) , podemos encontrar seu controle ótimo através dos arcos chave acima, pelo Algoritmo 2. Na Figura 5.8 exemplificamos este processo para $(x_0, y_0) = (600, 0.2)$, mostrando sua trajetória ótima, e na Figura 5.5 apresentamos o controle ótimo $u(t)$ (dosagem de quimioterapia) correspondente.

Por fim, exemplificamos a análise dos controles ótimos através dos pontos finais, também com os valores $c = 0.001$ e $d = 0.28$ na Figura 5.10. Podemos observar que, aparentemente, não existem controles singulares para este caso, e, para a maior parte dos pontos

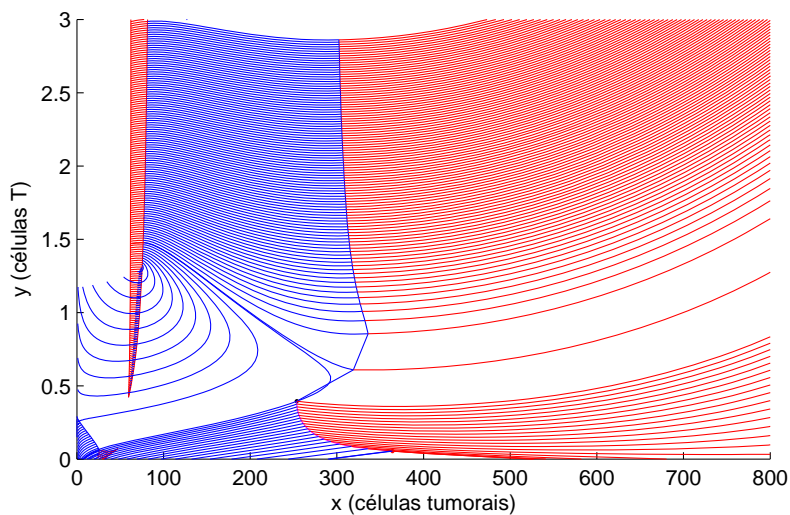


Figura 5.6: Trajetos Ótimos para $c = 0.05$ e $d = 0.01$.

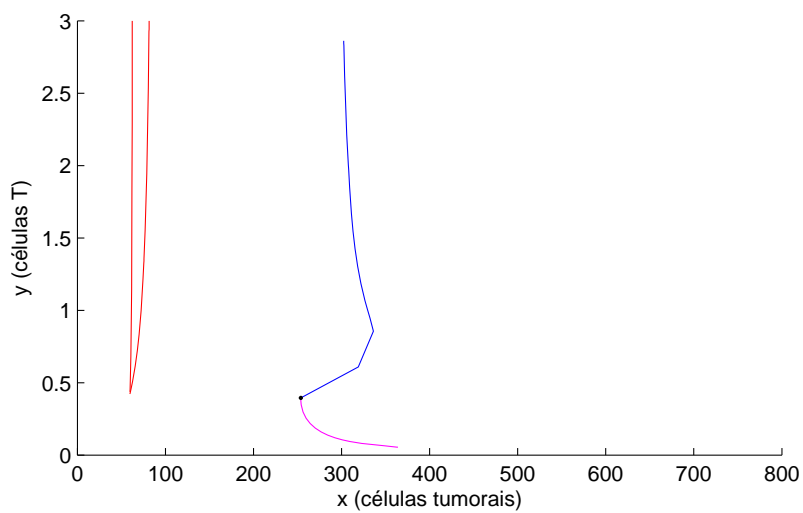


Figura 5.7: Arcos Chave para $c = 0.05$ e $d = 0.01$.

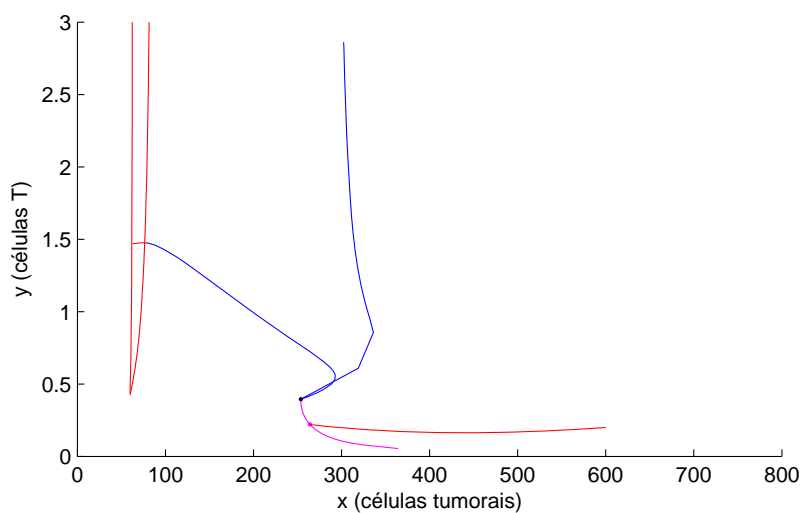


Figura 5.8: Trajeto Ótimo para $(x_0, y_0) = (600, 0.2)$, para $c = 0.05$ e $d = 0.01$.

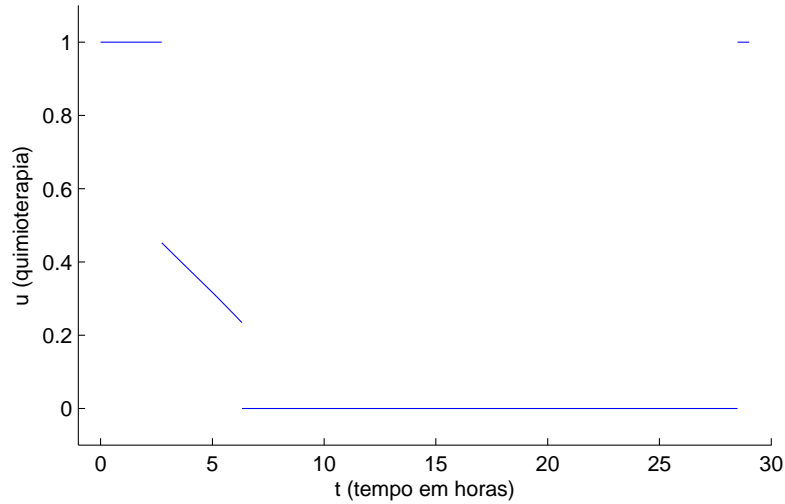


Figura 5.9: Controle Ótimo para $(x_0, y_0) = (600, 0.2)$, para $c = 0.05$ e $d = 0.01$.

iniciais, o tratamento consiste apenas no uso total de quimioterapia ($u(t) = 1$) até certo ponto da região começa, em que paramos o tratamento. Isto vem do fato de termos neste caso c muito pequeno em relação às outras constantes, o que simboliza o fato do uso de quimioterapia não trazer grandes danos.

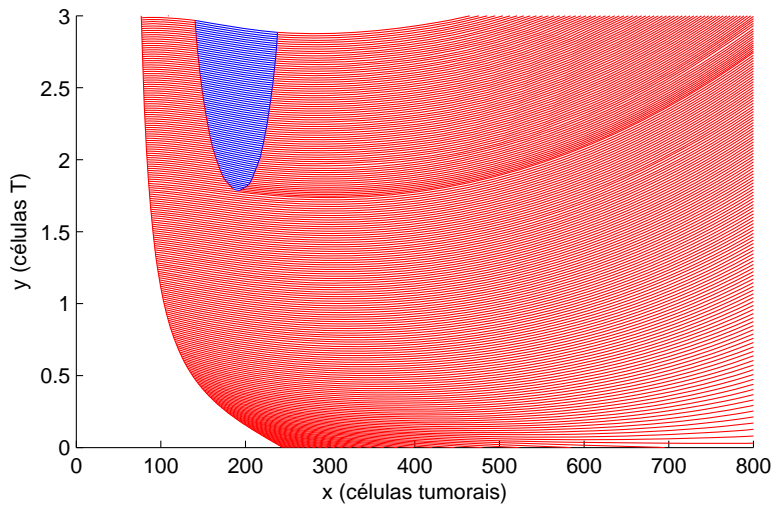


Figura 5.10: Trajetos Ótimos para $c = 0.001$ e $d = 0.28$.

5.3 Existência do Controle Ótimo

Limitação Uniforme da Trajetória

Seja dada uma função $u(t) \in L^1([0, T], [0, 1])$ e consideremos o PVI em $[0, T]$

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\mu_C x(t) \log\left(\frac{x(t)}{x_\infty}\right) - \gamma xy - k_X x(t) u(t), \\ y'(t) &= \mu_I (x(t) - \beta x(t)^2) y(t) - \delta y(t) + \alpha - k_Y y(t) u(t). \end{aligned}$$

Veja que a função acima não está definida em todo domínio, pois a função $\log(x)$ só é definida para valores positivos de x .

Por outro lado, a aplicação do Teorema 15 necessita que a função esteja definida em todo \mathbb{R}^2 . Com este intuito, faremos uma mudança de variável $w(t) = -\log(x(t)/x_\infty)$.

Pelo teorema de mudança de variáveis temos que

$$\begin{aligned} w(t) &= w(0) + \int_0^t \frac{x'(s)}{x(s)} ds = w(0) + \int_0^t \mu_C \log\left(\frac{x(s)}{x_\infty}\right) + \gamma y(s) + k_X u(s) ds \\ &= z(0) + \int_0^t -\mu_C w(s) + \gamma y(s) + k_X u(s) ds. \end{aligned}$$

Assim, denotando

$$k(w) = \mu_I(x_\infty e^{-w} - \beta x_\infty^2 e^{-2w}) - \delta,$$

temos que $(w(t), y(t))$ satisfaz o PVI em $[0, T]$

$$\begin{aligned} w(t) &= w_0 + \int_0^t f_1(w(s), y(s), u(s)) dt, \\ y(t) &= y_0 + \int_0^t f_2(w(s), y(s), u(s)) dt, \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde

$$\begin{aligned} f_1(w, y, u) &= -\mu_C w + \gamma y + k_X u, \quad e \\ f_2(w, y, u) &= k(w)y + \alpha - k_Y y u. \end{aligned}$$

O lema a seguir nos dá então condições para $(w(t), y(t))$ ser limitada.

Lema 7 *A trajetória $(w(t), y(t))$ definida pela equação (5.2) será limitada em $[0, T]$, uniformemente em T , para qualquer $(w_0, y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, bastando que seja satisfeita a desigualdade*

$$\frac{\mu_C}{\gamma} > \max \left\{ \mu_C - \delta, \frac{\mu_I}{2\beta\gamma} - \frac{\delta}{\gamma} \right\}.$$

Sua demonstração, realizada a seguir, e está ilustrada na Figura 5.11 a seguir, em que representamos em azul o retrato de fase do PVI acima e em vermelhos as retas à serem utilizadas como no Teorema 16. Note que ao cercarmos o fluxo do PVI por retas, caso ocorra como na figura, teremos provado sua limitação através do Teorema 16.

Demonstração. Vamos supor que $r(x)$ representa uma função diferente em cada item a seguir.

(i) Primeiramente, para aplicação do Teorema 16, notemos que $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f = (f_1, f_2)$ é C^1 , de onde é também localmente Lipschitziana.

Tomando então $r(w) = 0$, teremos que

$$(-r_w(w), 1) \cdot f(w, r(w), u) = f_2(w, 0, u) = \alpha > 0.$$

Assim, podemos aplicar o Teorema 16, de onde segue que, caso tenhamos $y_0 > 0$, teremos $y(t) > 0$ para todo $t \in [0, T]$.

(ii) Pelo resultado (i) podemos restringir f a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \Omega$. Como essa restrição continuará sendo localmente Lipschitziana, poderemos aplicar novamente o Teorema 16.

Tomando $r(y) = 0$, teremos que

$$(1, -r_y(y)) \cdot f(r(y), y, u) = f_1(0, y, u) = \gamma y + k_X u > 0,$$

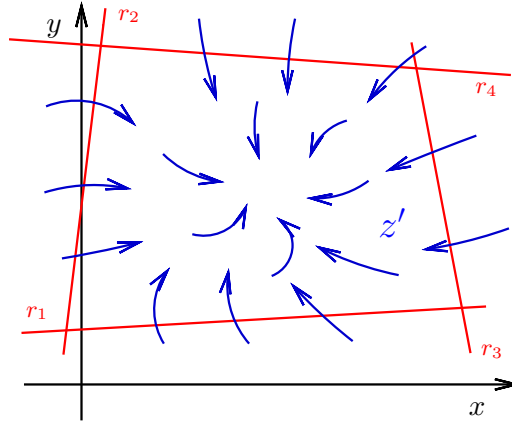


Figura 5.11: Ilustração para demonstração do Lema 7.

pois $y > 0$ e $u \geq 0$. Assim, aplicando o Teorema 16, segue que para $w_0 > 0$ teremos que $w(t) > 0$ para todo $t \in [0, T]$.

(iii) Pelos resultados anteriores, podemos restringir f a $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \Omega$ e essa restrição continua a ser Lipschitziana.

Seja y_c ainda a ser determinado, e h uma constante qualquer tal que

$$\frac{\mu_C}{\gamma} > h > \max \left\{ \mu_C - \delta, \frac{\mu_I}{4\beta\gamma} - \frac{\delta}{\gamma} \right\}.$$

Veremos o motivo de tal escolha mais adiante. Tomamos então $r(w) = y_c + hw$ e logo

$$\begin{aligned} & (-r_w(w), 1) \cdot f(w, r(w), u) \\ &= -h(-\mu_C w + \gamma(y_c + hw) + k_X u) + (k(w)(y_c + hw) + \alpha - k_Y(y_c + hw)u) \\ &= (k(w) - h\gamma)y_c + (k(w) + \mu_C - h)hw + \alpha - (hk_X + K_Y y_c + hw)u \\ &\leq (k(w) - h\gamma)y + (k(w) + \mu_C - h)hw + \alpha. \end{aligned}$$

Note que $\lim_{w \rightarrow \infty} k(w) = -\delta$, de modo que, como $h > \mu_C - \delta$ teremos $\lim_{w \rightarrow \infty} k(w) + \mu_C - h < 0$ e logo

$$\lim_{w \rightarrow \infty} (k(w) + \mu_C - h)w = -\infty.$$

Assim, por continuidade, $(k(w) + \mu_C)hw$ possui um valor máximo em $[0, \infty]$, ou seja é limitado em $[0, \infty]$. Notemos agora que, sendo $v = -\log(x/x_\infty)$, temos que

$$k(w) = k(-\log(x/x_\infty)) = \mu_I(x - \beta x^2) - \delta,$$

de onde, por análise de função quadrática, podemos ver facilmente que $k(w)$ possui um máximo $k(w_{\max}) = \frac{\mu_I}{4\beta} - \delta$.

Assim, como também $h > \frac{k(w_{\max})}{\gamma} = \frac{\mu_I}{4\beta\gamma} - \frac{\delta}{\gamma}$, teremos que $k(w) - h\gamma < 0$, o que, somado ao fato de $(k(w) + \mu_C)hw$ ser limitado implica que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (k(w) - h\gamma)y + (k(w) + \mu_C)hw + \alpha = -\infty.$$

Segue então que existe $y_c > 0$ tal que

$$(-r_w(w), 1) \cdot f(w, r(w), u) < 0.$$

Tomando então tal y_c , pelo Teorema 16, segue que para $y_0 < r(w) = y_c + hw$ temos que $y(t) < y_c + hw(t) \forall t \in [0, T]$.

(iv) Restringimos agora f a $D \times \Omega$ onde $D = \{(y, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid y < y_c + hw\}$

Tomemos então $r(y) = w_c$, onde w_c é uma constante ainda a ser determinada. Dado $(r(y), y) \in D$ temos então que

$$\begin{aligned} (1, -r_y(y)).f(r(y), y, u) &= f_1(r(y), y, u) \\ &= -\mu_C w_c + \gamma y + k_X u < -\mu_C w_c + \gamma(y_c + hw_c) + K_X + \gamma \\ &= (\gamma h - \mu_C)w_c + \gamma + K_X. \end{aligned}$$

Como tomamos $h < \frac{\mu_C}{\gamma}$ segue que, tomando $w_c > -\frac{\gamma + K_C}{\gamma h - \mu_C}$ teremos que

$$(1, -r_y(y)).f(r(y), y, u) < 0.$$

Desta forma, pelo Teorema 16, segue que para $w_0 < w_c$ temos que $w(t) < w_c \forall t \in \mathbb{R}$. Desta forma, temos também que $y(t) < y_c + hw_c \forall t \in [0, T]$.

Concluimos assim, dos itens anteriores que $(w(t), y(t)) \in (0, w_c] \times (0, y_c + hw_c] \forall t \in [0, T]$. Note também que o valor das constantes w_c , y_c e h não dependem do tempo final T mas apenas do ponto inicial (w_0, z_0) . Portanto, concluimos assim que a trajetória $z(t) = (x(t), y(t))$ é limitada uniformemente em T . ■

Limitação Uniforme do Tempo

Juntamente com o Lema 7, para podermos utilizar o Teorema 15 basta provarmos o lema a seguir.

Lema 8 *Suponha que $d > 0$, então existe $L > 0$ tal que um controle $u(t)$ é ótimo para o Problema 5, para T livre, se e somente se $u(t)$ for um controle ótimo para o Problema 5 para $T < L$.*

Demonstração. Para demonstrar este resultado, primeiramente veja que

$$J(u) = g(z(T)) + \int_{\tau}^t cu(t) + d = g(z(t)) ds = T + g(z(T)) + \int_{\tau}^t cu(t) ds \geq T + g(z(T)).$$

Agora, sendo $z(t)$ limitada em um compacto para $t \in [0, \infty)$ e $g(z(t))$ contínua em z , segue que g será também limitada por uma constante M neste compacto. Assim, $g(z(t))$ será limitada pela constante M para $t \in [0, T]$.

Assim $g(z(T)) \geq -M$ para algum M constante e logo

$$J(u) = T + g(z(T)) + \int_{\tau}^t cu(t) \geq T - M + 0 = T - M.$$

Desta forma, tomando $T > M + g(z_0)$, segue que

$$J(u) > g(z_0) = g(z_0) + \int_0^0 cu(t) + d ds.$$

Para $T > M + g(z_0)$ não pode haver controles ótimos e assim $T \leq M + g(z_0)$ (veja que esta constante não depende de $u(t)$), o que encerra a demonstração. ■

Teorema 17 *Supondo que $d > 0$ e $\frac{\mu_C}{\gamma} > \max\left\{\mu_C - \delta, \frac{\mu_I}{4\beta\gamma} - \frac{\delta}{\gamma}\right\}$, então existe um controle ótimo para o Problema 5.*

Conclusões e Propostas Futuras

Concluimos neste trabalho que a abordagem de controle ótimo pode ajudar a controlar o câncer e é ainda possível de ser analisada formalmente.

Inicialmente, desenvolvemos a teoria necessária para demonstrar o Teorema de Pontryagin, com hipóteses fracas, para problemas de controle ótimo com ponto final final e tempo final livre, sendo este a principal condição necessária para controles ótimos.

Passamos então a fazer a análise de problemas de controles ótimos lineares. Conseguimos para este tipo de problema provar condições novas de regularidade, que se mostraram úteis neste artigo, e que podem ainda vir a esclarecer questões ainda em aberto nesta área de estudo. Através desta condição criamos um novo algoritmo útil para análise gráfica e um novo algoritmo para determinação dos controles ótimos de tais tipos de problema, a partir de um ponto inicial (x_0, y_0) dado, algoritmo este pode se tornar especialmente útil pela escassez de algoritmos especializados neste tipo de problema. Apresentamos também um teorema clássico sobre existência de controles ótimos para problemas deste tipo, e introduzimos um teorema que nos auxiliou na utilização desta condição de existência.

Apresentamos então um modelo de câncer devido a Stepanova [17] e mostramos um problema de controle ótimo, relacionado a este modelo, que visa minimizar o custo da quimioterapia e diminuir o câncer levando ainda em conta preservar as células autoimunes. Utilizamos então os resultados clássicos e novos, aqui apresentados, para provar a existência de um controle ótimo para tal problema para certos parâmetros, assim como provar a regularidade de tal controle e obtê-lo numericamente a partir de um ponto inicial (x_0, y_0) dado.

Nossa abordagem do problema se mostrou mais completa do que a maioria das abordagens de modelos parecidos, como em Matveev et. al. em [12], de Pillis et. al. em [4] e [5] e por Ledzewicz et. al. em [7] e [8].

No futuro, pretendemos investigar se as condições de regularidade de controles ótimos lineares aqui obtidos são de fato genéricas para dimensão $n = 4$. Pretendemos também investigar se tais condições novas nos dão de fato a base teórica necessária para provar resultados em relação a síntese regular de controles ótimos para dimensão $n = 4$, sendo esta uma análise importante para demonstração de condições suficientes de otimalidade.

Pretendemos também investigar em relação a instabilidade e convergência do novo algoritmo para obtenção de controle ótimo para problemas lineares, aqui apresentada.

Por fim, procuraremos analisar modelos de tratamento de câncer, visto como um problema de controle ótimo, que sejam mais fidedignos da realidade do que o modelo aqui apresentado, demonstrando novamente condições de regularidade e existência, como fizemos durante este trabalho.

Referências

- [1] C. D. Aliprantis. *Integration*. Academic Press, Indianapolis, third edition, 1998.
- [2] R. Bellman. *Dymanic Programming*. NJ, Princeton, 1957.
- [3] V. Boltyanski et al. *Geometric Methods and Optimization Problems*. Springer Media, Dordrecht, first edition, 1999.
- [4] L. G. de Pillis and A. Radunskaya. The dynamics of an optimally controlled tumor model - a case study. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 37, p. 1221-1244, 2003.
- [5] L. G. de Pillis and A. Radunskaya. Chemotherapy for tumors - an analysis of the dynamycs and a study of quadratic and linear optimal controls. *Mathematical Biosciences*, v. 209, p. 292-315, 2007.
- [6] G. B. Folland. *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, New York, second edition, 1999.
- [7] U. Ledzewicz et al. An optimal control approach to cancer treatment under immunological activity. *Applicationes Mathematicae*, v. 38, p. 17-31, 2011.
- [8] U. Ledzewicz et al. Optimal controls for a mathematical model of tumor-immune interactions under targeted chemotherapy with immune boost. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, v. 18, n. 4, p. 1031-1051, 2013.
- [9] E. B. Lee. *Foundations of Optimal Control Theory*. Wiley, New York, 1 edition, 1986.
- [10] A. Leitao. *Calculo Variacional e Controle Otimo*. IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- [11] D. L. Lukes and U. Ledzewicz. *Differential Equations: Classical to Controlled*. Academic Press, New York, 1982.
- [12] A. S. Matveev and Andrey V. Savkin. Application of optimal control theory to analysis of cancer chemotherapy regimens. *Systems and Control Letters*, v. 46, p. 311-321, 2002.
- [13] E. J. McShane. *Integration*. Princeton University Press, Princeton, second edition, 1947.
- [14] L. S. Pontryagin et al. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. NY, New York, 1965.
- [15] H. Schattler. The local structure of time-optimal trajectories in dimension three under generic conditions. *SIAM J. Control and Optimization*, v. 26, n. 4, p. 899-918, 1988.

-
- [16] H. Schattler and U. Ledzewicz. *Geometric Optimal Control*. Springer, New York, 2012.
- [17] N.V. Stepanova. Course of the immune reaction during the development of a malignant tumour. *Biophysics*, v. 24, p. 917-923, 1980.
- [18] H. J. Sussmann. The structure of time-optimal trajectories for single-input systems in the plane - the *cnfty* nonsingular case. *SIAM J. Control and Optimization*, v. 25, n. 2, p. 433-465, 1987.
- [19] J. L. Troutman. *Variational Calculus and Optimal Control - Optimization with Elementary Convexity*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1983.
- [20] R. Vinter. *Optimal Control*. Birkhauser, Boston, first edition, 2010.

Apêndice A

7.1 Regra da Cadeia

Demonstração para Regra da Cadeia 1. Note que

$$\begin{aligned} & \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t), y(t_0))}{t - t_0} \\ &= \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t))}{t - t_0} + \frac{f(x(t_0), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0}. \end{aligned}$$

Mas, pelo teorema do valor médio usual em uma variável, temos que

$$\frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t))}{t - t_0} = f_x(x(t_\epsilon), y(t)) \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0},$$

onde $t_\epsilon \in [t_0, t]$ caso $t_0 \leq t$ e $t_\epsilon \in [t, t_0]$ caso $t \leq t_0$.

Segue então, pela continuidade de x e y em t_0 e da continuidade de $f_x(x, y)$ em $(x(t_0), y(t_0))$, que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t))}{t - t_0} = f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0).$$

Da hipótese do enunciado temos também que $y(t)$ é diferenciável em y_0 e $f(x(t_0), y)$ é diferenciável em relação a y em $y = y(t_0)$, logo segue da regra da cadeia usual para uma variável que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x(t_0), y(t_0)) - f(x(t_0), y(t))}{t - t_0} = f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} f'(x(t_0), y(t_0)) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t))}{t - t_0} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x(t_0), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} \\ &= f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0). \end{aligned}$$

■

Damos a seguir uma definição alternativa à Definição 2 para continuidade absoluta.

Definição 11 Dizemos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é **absolutamente contínua** em $[a, b]$ quando, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, sendo $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ subintervalos disjuntos de $[a, b]$, tenhamos que

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta \text{ implique em } \sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon.$$

No importante teorema de análise a seguir, vemos que as definições 2 e 11 dadas são equivalentes.

Teorema 18 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua, segundo a definição 11, se e somente se existe $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrável, tal que

$$f(t) = \int_a^t g(s) ds \quad \forall t \in [a, b]$$

Note que esta condição é exatamente a Definição 2 para continuidade absoluta. Para uma demonstração, ver [1] (Aliprantis, Teor. 39.15, pág. 382).

Desta definição, mais tratável para continuidade absoluta, sairá a versão da regra da cadeia em \mathbb{R}^n para funções absolutamente contínuas, dada pela Proposição 2.

Demonstração para Regra da Cadeia 2. Tome f e x como no enunciado. Sendo x contínua, segue que sua imagem $x([a, b]) \subset D$ é compacta. Desta forma, sendo f_x limitada localmente em D , segue pela Proposição 6, da próxima seção, que f_x é limitada uniformemente no compacto $x([a, b])$ por uma constante M . Logo, pelo Teorema do valor médio, f é Lipschitziana em $x([a, b])$ pela mesma constante M .

Segue então que, por hipótese de x ser absolutamente contínua, deve existir $\delta > 0$ tal que, para $\frac{\epsilon}{M} > 0$, sendo $(t_1, s_1), \dots, (t_n, s_n)$ subconjuntos disjuntos de $[a, b]$ tenhamos que

$$\sum_{i=1}^n (s_i - t_i) < \delta \text{ implique em } \sum_{i=1}^n |x(s_i) - x(t_i)| < \frac{\epsilon}{M}.$$

Mas então, para tais intervalos temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (s_i - t_i) < \delta \text{ implica em} \\ \sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \leq M|x(s_i) - x(t_i)| < \epsilon. \end{aligned}$$

E segue que $f(x(t))$ é, também, por definição, absolutamente contínua.

Note agora que, como $x(t)$ é diferenciável quase certamente em $[a, b]$, e f é diferenciável sempre em D , temos pela Regra da Cadeia usual em \mathbb{R}^n que

$$f'(x(t)) = f_x(x(t))x'(t) \quad \text{q.c. em } [a, b],$$

e terminamos a demonstração. ■

7.2 Demonstração do Teorema 6

Provaremos neste Apêndice o Teorema 6.

Primeiramente, notemos o fato a seguir.

Proposição 6 *É válido que:*

- (i) *Sendo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ localmente limitada em D , então f é limitada em qualquer C , onde C é subconjunto compacto de D ;*
- (ii) *Sendo $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}$, com $t \in [a, b]$ e $x \in D$, localmente Lipschitziana em D em relação a x , então f é Lipschitziana em qualquer $[a, b] \times C$, onde C é subconjunto compacto de D .*

Demonstração. Seja C um subconjunto compacto de D .

Sendo f localmente limitada em D temos que para cada ponto $c \in C$ existe M_c aberto de D com $c \in M_c$ tal que $|f(x)| \leq M_j \forall c \in C$. Como $c \in M_c \forall c \in C$ segue que $C \subset \cup_{c \in C} M_c$. Assim, pela definição de compacto segue que existem c_1, \dots, c_n tal que $C \subset \cup_{c_i \in C} M_{c_i}$, $1 \leq i \leq n$.

Tome $M = \max\{M_{c_1}, \dots, M_{c_n}\}$. Assim, dado $x \in C$, segue que $x \in M_{c_i}$ para algum $1 \leq i \leq n$, de onde $|f(x)| \leq M_{c_i} \leq M$, e terminamos.

A demonstração do item (ii) é análoga ao item (i). ■

Agora introduzimos o seguinte teorema:

Proposição 7 *Sendo $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em relação a x e localmente limitada, temos que*

$$g(t, x) = \int_a^t f(s, x) ds$$

é uma função contínua em $[a, b] \times D$.

Demonstração. Primeiramente mostraremos que $g(t, x)$ é contínua em relação a x para cada $t \in [a, b]$. De fato, fixado $t \in [a, b]$ suponha que $g(t, x)$ é descontínua em um $x \in \mathbb{R}^n$. Então, deve existir uma sequência x_n com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rightarrow x$ mas tal que $g(t, x_n) = \int_a^t f(s, x_n) ds$ não convirja para $g(t, x) = \int_a^t f(s, x) ds$

Por outro lado, dado $y_n(t) = f(t, x_n)$ e $y(t) = f(t, x)$ temos por hipótese que $y_n(t)$ é limitada e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y(t)$. Assim, pelo Teorema da convergência limitada devemos ter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^t y_n(s) ds = \int_a^t \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(s) ds = \int_a^t y(s) ds = g(t, x),$$

um absurdo.

Agora, dado $\epsilon > 0$, note que

$$|g(t, x) - g(t_0, x_0)| \leq |g(t, x) - g(t_0, x)| + |g(t_0, x) - g(t_0, x_0)|.$$

Assim, sendo M a constante pela qual f é limitada, supondo $t \geq t_0$ temos que

$$|g(t, x) - g(t_0, x)| = \left| \int_t^{t_0} f(s, x) ds \right| \leq \int_t^{t_0} |f(s, x)| ds \leq \int_t^{t_0} M ds = M|t - t_0|.$$

Supondo $t \leq t_0$, analogamente prova-se que

$$|g(t, x) - g(t_0, x)| \leq M|t - t_0|.$$

Por outro lado, da continuidade de $g(t, x)$ em relação a x , segue que existe $\delta_0 > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta_0$ implica em $|g(t_0, x) - g(t_0, x_0)| < \epsilon/2$

Tome então $\delta < \max\{\epsilon/(2M), \delta_0\}$ e teremos que

$$|(t, x) - (t_0, x_0)| < \delta \text{ implica em } |t - t_0| < \delta < \epsilon/(2M) \Rightarrow |g(t, x) - g(t_0, x)| < \epsilon/2 \quad \text{e}$$

$$|(t, x) - (t_0, x_0)| < \delta \text{ implica em } |x - x_0| < \delta < \delta_0 \Rightarrow |g(t_0, x) - g(t_0, x_0)| < \epsilon/2.$$

Ou seja,

$$|(t, x) - (t_0, x_0)| < \delta \text{ implica em } |g(t, x) - g(t_0, x_0)| < \epsilon.$$

Assim, por definição $\lim_{(t,x) \rightarrow (t_0,x_0)} g(t, x) = g(t_0, x_0)$, e terminamos. ■

Relacionado a este teorema temos também a seguir um Teorema de Medida, conhecido em sua versão para Integral de Riemann como Teorema de Leibnz.

Proposição 8 *Dado $U \subset \mathbb{R}$ aberto limitado, seja $f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de $(t, x) \in [a, b] \times U$, tal que:*

- $f(t, x)$ é mensurável em t para cada $x \in U$ fixado;
- $f_x(t, x)$ existe para todo $(t, x) \in [a, b] \times U$ e é limitada por uma constante M em $[a, b] \times U$.

Então temos que $\phi(\epsilon) = \int_a^b f(t, \epsilon) dt$ é diferenciável em ϵ_0 , com

$$\phi'(\epsilon_0) = \int_a^b \frac{\partial f(t, \epsilon_0)}{\partial \epsilon} dt.$$

Este é um corolário quase direto do Teorema da Convergência Limitada, podendo ser encontrado, por exemplo, em [13] (McShane, 1947, sec. 39.2).

Agora provamos o Teorema 6.

Demonstração. Primeiramente provaremos a existência da função $\phi(t, \rho)$ e então provaremos sua diferenciabilidade em relação a ρ .

(i) Existência

Primeiro notemos que, como $f_x(t, x)$ é localmente limitada em $[a, b] \times D$, D aberto, então, pelo Teorema do valor médio, $f(t, x)$ será localmente Lipschitziana em relação a x em $[a, b] \times D$. Assim o Teorema 5 de unicidade de soluções se aplica a este.

Agora, dado $\rho_0 > 0$, seja $\psi(t)$ a solução do PVI em $[a, b]$

$$\psi(t) = \rho_0 + \int_{\tau}^t f(s, \psi(s)) ds.$$

Como $\psi(t)$ é uma função contínua em $[a, b]$, então sua imagem $E = \{\psi(t) \mid t \in [a, b]\}$ é compacta em \mathbb{R}^n , de onde esta é limitada por alguma bola aberta C .

Tomamos então $B = C \cap D$, aberto.

Como B^c é fechado, por Análise sabemos que $d(E, B^c) = \inf_{e \in E, b \in B^c} |e - b|$ é finito e $d(E, B^c) = |e_0 - b_0|$ para algum $e_0 \in E$, $b_0 \in B^c$. Como E e B^c são disjuntos segue que $d(E, B^c) > 0$. Tomando então $\delta = d(E, B^c) > 0$, segue pela definição de $d(E, B^c)$ que $|x - \psi(t)| < \delta$, para algum $t \in [a, b]$, implica em $x \in B$.

Defina então o aberto $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \psi(t)| < \delta\}$ e tome

$$A = \bigcup_{t \in [a, b]} A_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \psi(t)| \text{ para algum } t \in [a, b]\},$$

que é também aberto (união de abertos), com $A \subset B \subset D$.

Sendo A limitado, temos pela Proposição 6 que $|f_x(t, x)| < M$ em $[a, b] \times A$ para alguma constante $M > 0$.

Tome então $\delta_1 < e^{-M|b-a|}\delta$ e defina as aproximações sucessivas $x_j : [a, b] \times B(\rho_0, \delta_1)$ definidas pela seguinte recorrência em $[a, b]$

$$\begin{aligned} x_0(t, \rho) &= \psi(t), \\ x_{j+1}(t, \rho) &= \rho + \int_{\tau}^t f(s, x_j(s, \rho)) ds. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Provemos por indução que $x_j(t, \rho) \in A$ para todo $(t, \rho) \in [a, b] \times B(\rho_0, \delta_1)$.

(i) Temos que

$$|x_1(t, \rho) - \psi(t)| = \left| \rho + \int_{\tau}^t f(s, \psi(s)) ds - \psi(t) \right| = |\rho - \rho_0| < \delta_1. \quad (7.2)$$

Como $\delta_1 \leq \delta$ então a propriedade é válida para $k = 0$.

(ii) Supondo verdadeiro para $k = j$, temos

$$|x_{j+1}(t, \rho) - x_j(t, \rho)| = \left| \int_{\tau}^t f(s, x_j(s, \rho)) - f(s, x_{j-1}(s, \rho)) ds \right| \quad (7.3)$$

$$\leq \int_{\tau}^t |f(s, x_j(s, \rho)) - f(s, x_{j-1}(s, \rho))| ds \quad (7.4)$$

$$\leq M \int_{\tau}^t |x_j(s, \rho) - x_{j-1}(s, \rho)| ds. \quad (7.5)$$

Assim, pelas equações 7.2 e 7.3, prova-se facilmente por recorrência que

$$|x_{j+1}(t, \rho) - x_j(t, \rho)| \leq \frac{M^j |t - \tau|^j}{j!} |x_1 - x_0| < \frac{M^j |t - \tau|^j}{j!} \delta_1.$$

Assim,

$$|x_{j+1}(t, \rho) - \psi(t)| \leq |x_1(t, \rho) - x_0(t, \rho)| + \cdots + |x_{j+1}(t, \rho) - x_j(t, \rho)| \quad (7.6)$$

$$\leq \left(1 + M|t - \tau| + \cdots + \frac{M^j |t - \tau|^j}{j!} \right) \delta_1 \leq e^{M|b-a|} \delta_1 < \delta. \quad (7.7)$$

Logo, $x_{j+1}(t, \rho) \in A$ para todo $(t, \rho) \in [a, b] \times U$, e terminamos a hipótese de indução.

Agora, pela equação 7.6, temos que $x_j : [a, b] \times B(\rho_0, \delta_1) \rightarrow A$ é uma sequência de funções uniformemente de Cauchy, de onde esta converge para uma função $x : [a, b] \times B(\rho_0, \delta_1) \rightarrow A$.

Agora, pela continuidade da integral em relação à convergência uniforme temos que $x(t, \rho)$ satisfaz

$$x(t, \rho) = \rho + \int_{\tau}^t f(s, x(s, \rho)) ds,$$

e a existência está provada.

(ii) Diferenciabilidade

Provemos por indução que $x_k(t, \rho)$, para $(t, \rho) \in [a, b] \times B(\rho_0, \delta_1)$, é derivável (derivada parcial) em relação a ρ_i (i -ésima coordenada de ρ) em $\rho \in U$ com esta derivada contínua em relação a ρ , em $B(\rho_0, \delta_1)$, e ainda limitada por um M_k em $[a, b] \times U$.

(i) Para $k = 0$ temos que $\phi_0(t, \rho) = \psi(t)$ não depende de ρ logo as propriedades são válidas trivialmente.

(ii) Suponha então a propriedade válida para $k = j$. Assim, pela regra da cadeia $f(s, x_j(s, \rho))$ é diferenciável em relação a ρ_i e

$$\frac{\partial f(s, x_j(s, \rho))}{\partial \rho_i} = f_x(t, x_j(s, \rho)) \frac{\partial x_j(s, \rho)}{\partial \rho_i}.$$

Como $f_x(s, \rho)$ e $\frac{dx_j(s, \rho)}{d\rho_i}$ são limitados em $[a, b] \times U$ segue por esta equação que $\frac{\partial f(s, x_j(s, \rho))}{\partial \rho_i}$ também o é.

Assim, da Proposição 8 segue que $\int_{\tau}^t f(s, x_j(s, \rho)) ds$ é diferenciável em relação a ρ_i , com derivada $f(t, x_j(t, \rho))$ contínua em relação a p em $B(\rho_0, \delta_1)$, pela Proposição 7.

Assim pela equação (7.1), $x_{j+1}(t, \rho)$ também é diferenciável em relação a ρ_i em ρ , com

$$\frac{\partial x_{j+1}(t, \rho)}{\partial \rho_i} = 1 + \int_{\tau}^t \frac{\partial f(s, x_j(s, \rho))}{\partial \rho_i} ds = 1 + \int_{\tau}^t f_x(s, x_j(s, \rho)) \frac{\partial x_j(s, \rho)}{\partial \rho_i} ds.$$

contínua em relação a ρ em $B(\rho_0, \delta_1)$.

Também temos que

$$\left| \frac{\partial x_{j+1}(t, \rho)}{\partial \rho_i} \right| \leq 1 + |t - \tau| MM_j \leq 1 + |b - a| MM_j,$$

de onde esta também é limitada por uma constante $M_{j+1} = 1 + |b - a| MM_j$ em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, e terminamos o passo indutivo.

Mostremos agora que $\frac{\partial x_j(t, \rho)}{\partial \rho_i}$ também converge uniformemente. Isto é fácil, pois pela mesma indução feita no começo desta prova temos que

$$\left| \frac{\partial x_{j+1}(t, \rho)}{\partial \rho_i} - \frac{\partial x_j(t, \rho)}{\partial \rho_i} \right| \leq \frac{M^j |t - \tau|^j}{j!} \left| \frac{\partial x_1(t, \rho)}{\partial \rho_i} - \frac{\partial x_0(t, \rho)}{\partial \rho_i} \right| = \frac{M^j |t - \tau|^j}{j!}$$

Assim segue pela convergência uniforme que $x(t, \rho)$ também é diferenciável em relação a cada ρ_i em U com esta derivada contínua em relação a ρ .

Sendo todas as derivadas parciais de $x(t, p)$ contínuas em $B(\rho_0, \delta_1)$ segue por fim que $x(t, p)$ é diferenciável em relação a ρ em $B(\rho_0, \delta_1)$ e as condições do teorema estão provadas.

■

Apêndice B

8.1 Funções Adicionais

Nesta seção apresentamos a programação utilizada durante o texto, desenvolvida no software MatLab.

Antes de iniciarmos a linha de comandos, é necessário criar duas funções não existentes no MatLab.

A seguinte função serve para dividir um arco qualquer em pedaços com tamanho aproximadamente igual à *dist* e deve ser salva com o nome

```
arc_division
```

na pasta principal do MatLab.

```
function [af,bf] = arc_division(a,b,dist,ra,rb)

da = diff(a);
db = diff(b);
m = ((da/ra).^2 + (db/rb).^2).^(1/2);
mt = sum(m);
n = ceil(mt/dist);
med = mt/n;
m_div = 0:mt/n:mt;

m_acum = 0;
for i = 1:numel(m)
    m_acum(i+1) = m_acum(i) + m(i);
    r = find(m_div <= m_acum(i+1));
    kf(i) = r(end);
end
ki = [1 kf(1:(end-1))+1];

count = 1;
for j = 1:numel(ki)
    for i = ki(j):kf(j)
        div(count) = (m_div(count) - m_acum(j))/m(j);
        af(count) = a(j) + da(j)*div(count);
        bf(count) = b(j) + db(j)*div(count);
    end
end
```

```

        count = count+1;
    end
end

```

Já a seguinte função serve para encontrar a intersecção entre dois arcos quaisquer e deve ser salva com o nome

`arc_intersection`

na pasta principal do MatLab.

```

function [xint,yint,iint,jint] = arc_intersection(a,b,e,f)

da = diff(a);
db = diff(b);
de = diff(e);
df = diff(f);

xint = [];
yint = [];
iint = [];
jint = [];

count = 1;
for i=1:(numel(a)-1)
for j=1:(numel(f)-1)
    change1(i,j) = (df(j)*(a(i+1) - e(j)) - de(j)*(b(i+1) - f(j)))*...
        (df(j)*(a(i) - e(j)) - de(j)*(b(i) - f(j))) <= 0;
    change2(i,j) = (db(i)*(e(j+1) - a(i)) - da(i)*(f(j+1) - b(i)))*...
        (db(i)*(e(j) - a(i)) - da(i)*(f(j) - b(i))) <= 0;
    if change1(i,j) && change2(i,j)
        r = de(j)*db(i) - df(j)*da(i);
        ref = e(j+1)*f(j) - f(j+1)*e(j);
        rab = a(i+1)*b(i) - b(i+1)*a(i);
        xint(count) = (da(i)*ref - de(j)*rab)/r;
        yint(count) = (db(i)*ref - df(j)*rab)/r;
        iint(count) = i;
        jint(count) = j;
        count = count+1;
    end
end
end
end

```

8.2 Algoritmos

A linha de comandos **1 - Funções Base**, é a linha base do comando principal. Nela, apenas declaramos as funções para resolução do problema de controle ótimo e também para a determinação dos arcos singulares e dos pontos não-ordinários críticos.

A linha de comandos **2 - Pontos Finais** serve para determinar a partir das restrições da Seção 6.2 os pontos finais $z(T)$, dividi-los em arcos conexos e dividir cada arco em partes aproximadamente iguais a mesma distância *dist*.

Já a linha de comandos **3 - Controles Ótimos**, que deve suceder a linhas de comandos anterior, nos dá um conjunto de possíveis controles ótimos possíveis, através dos possíveis pontos finais $z(T)$, como descrito no Algoritmo 1.

A seguinte linha de comandos **4 - Controle Ótimo à Partir do Ponto Inicial**, que deve suceder a linha de comandos anterior, serve para, dado um ponto inicial (x_0, y_0) escolhido, encontrar, através do Algoritmo 2, um controle ótimo passando por este.

Por fim, a linha de comandos **5 - Pontos Singulares**, que pode ser usada de forma independente das outras linhas de comando, devendo apenas suceder a linha de comandos **1 - Funções Base**, serve para calcular os pontos singulares críticos e supercríticos, e os arcos singulares, verificando também se estes satisfazem as hipóteses do Teorema 10 de regularidade.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 1 - Funções Base
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clc
clf
clear
hold on
axis([0 800 0 3])
xlabel('x (células tumorais)')
ylabel('y (células T)')

disp('- 1 -')
disp('Montando Funções Base')

% Controles
dist = 0.005;

% Constantes
a = 0.00192;
b = 1;
c = 0.05;
d = 0.01;
kx = 1;
ky = 0;
muc = 0.5618;
gamma = 1;
mui = 0.00484;
beta = 0.00264;
delta = 0.37451;
alpha = 0.1181;
xinfty = 780;

% Gerando Variáveis
x = sym('x');
y = sym('y');
t = sym('t');
J = sym('J');
l1 = sym('l1');

```

```

l2 = sym('l2');
f1 = muc*x*(-log(x/xinfty)) - gamma*x*y;
f2 = (mui*(x - beta*x^2) - delta)*y + alpha;
g1 = -kx*x;
g2 = -ky*y;
y1 = muc*(-log(x/xinfty))/gamma;
y2 = -alpha/(mui*(x - beta*x^2) - delta);

% Definindo Funções
for uc = 1:2
    u = uc-1;
    F1(uc) = f1 + g1*u;
    F2(uc) = f2 + g2*u;
    dl1(uc) = -l1*diff(F1(uc),x) - l2*diff(F2(uc),x);
    dl2(uc) = -l1*diff(F1(uc),y) - l2*diff(F2(uc),y);
    F(:,uc) = [F1(uc); F2(uc)];
    dl(:,uc) = [dl1(uc); dl2(uc)];
    dJ(uc) = -c*u - d;
    %Função para condição de ponto final de 1ª ordem
    K1(uc) = c*u + d + a*F1(uc) - b*F2(uc);
    K1y(uc) = diff(K1(uc),y);
    K1x(uc) = subs(K1(uc),y,0);
    yfans(uc) = -K1x(uc)/K1y(uc);
    %Função para condição de ponto final de 2ª ordem
    dF1(uc) = diff(F1(uc),x)*F1(uc) + diff(F1(uc),y)*F2(uc);
    dF2(uc) = diff(F2(uc),x)*F1(uc) + diff(F2(uc),y)*F2(uc);
    K2(uc) = a*dF1(uc) - b*dF2(uc);
end

% Funções Chave
phi = a*x - b*y;
Psi{1} = l1*g1 + l2*g2 + c;
Psi{2} = -Psi{1};
Psixy{1} = a*g1 - b*g2 + c;
Psixy{2} = -Psixy{1};

% Gerando Psi'(t)
A = [g1, g2; f1, f2];
B = [-c; -d];
lxy = linsolve(A,B);
l1xy = lxy(1);
l2xy = lxy(2);
dPsi1 = diff(g1,x)*f1 + diff(g1,y)*f2 - diff(f1,x)*g1 - diff(f1,y)*g2;
dPsi2 = diff(g2,x)*f1 + diff(g2,y)*f2 - diff(f2,x)*g1 - diff(f2,y)*g2;
dPsi = l1xy*dPsi1 + l2xy*dPsi2;
yx = solve(dPsi,y);
dPsix = subs(dPsi,y,yx);

% Gerando Psi''(t)
u = sym('u');

```

```

H1 = f1 + g1*u;
H2 = f2 + g2*u;
ddPsi1 = diff(dPsi1,x)*H1 + diff(dPsi1,y)*H2 - diff(H1,x)*dPsi1 + ...
        -diff(H1,y)*dPsi2;
ddPsi2 = diff(dPsi2,x)*H1 + diff(dPsi2,y)*H2 - diff(H2,x)*dPsi1 + ...
        - diff(H2,y)*dPsi2;
ddPsi = l1xy*ddPsi1 + l2xy*ddPsi2;
ddPsit = subs(ddPsi,u,1);
ddPsiu1 = subs(ddPsi,u,0);
ddPsiu2 = ddPsit - ddPsiu1;
ut = -ddPsiu1/ddPsiu2;

% Gerando Psi'''(t)
dddPsi1 = diff(ddPsi1,x)*H1 + diff(ddPsi1,y)*H2 - diff(H1,x)*ddPsi1 + ...
        - diff(H1,y)*ddPsi2;
dddPsi2 = diff(ddPsi2,x)*H1 + diff(ddPsi2,y)*H2 - diff(H2,x)*ddPsi1 + ...
        - diff(H2,y)*ddPsi2;
dddPsi = l1xy*dddPsi1 + l2xy*dddPsi2;
dddPsit = subs(dddPsi,u,1);
dddPsiu1 = subs(dddPsi,u,0);
dddPsiu2 = dddPsit - dddPsiu1;
simple = dddPsiu1/ddPsiu1^2 - dddPsit/ddPsit^2;

xsing = [];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 2 - Pontos Finais
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp('- 2 -')

% Valores Iniciais
xs = [];
intv{1} = 1:dist*20:800;
intv{2} = 1:dist*20:800;
options = optimset('Display','off');
str{1} = 'Achando Pontos Finais para u = 0';
str{2} = 'Achando Pontos Finais para u = 1';
color{1} = 'blue';
color{2} = 'red';
div{1} = 1:5:ceil(c/(a*kx));
xd{1} = double(solve(K1y(1)));
xd{1} = sort(xd{1})';
condition = 0 < xd{1} & xd{1} < c/(a*kx);
xd{1} = [0, xd{1}(condition), c/(a*kx)];
yd{1} = double(subs(yfans(1),x,xd{1}));
div{2} = ceil(c/(a*kx)):5:800;
xd{2} = double(solve(K1y(2)));
xd{2} = sort(xd{2})';

```

```

condition = xd{2} > c/(a*kx);
xd{2} = [c/(a*kx), xd{2}(condition), 800];
yd{2} = double(subs(yfans(2),x,xd{2}));

for u = 1:2

    disp(str{u})
    rootinx{1} = matlabFunction(yfans(u)-0);
    rootinx{2} = matlabFunction(yfans(u)-3);
    rootinx{3} = matlabFunction(subs(K2(u),y,yfans(u)));

    % Encontrando Pontos de Encontro com y = 0, y = 3 e K2 = 0
    for j = 1:3
        for i = div{u}
            xans{j,u}(i) = fsolve(rootinx{j},i,options);
        end
        yans{j,u} = double(subs(yfans(u),x,xans{j,u}));
        issolution = double(subs(rootinx{j},x,xans{j,u}));
        condition = xans{j,u} > 0 & abs(issolution) < 0.01 & ...
            abs(imag(issolution)) < 0.01 & ...
            (3-yans{j,u}).*yans{j,u} >= -0.01 & ...
            double(subs(Psixy{u},{x,y},{xans{j,u},yans{j,u}})) > 0;
        xans{j,u} = xans{j,u}(condition);
        yans{j,u} = yans{j,u}(condition);
        for i=1:3
            if numel(xans{j,u})>=i
                condition = ((xans{j,u} - xans{j,u}(i))/800).^2 + ...
                    ((yans{j,u} - yans{j,u}(i))/3).^2 < 0.01;
                condition(i) = 0;
                xans{j,u}(condition) = [];
                yans{j,u}(condition) = [];
            end
        end
    end
end

% Encontrando arcos de Pontos Finais
[xpoints{u}, I]= sort([xd{u}, xans{1,u}, xans{2,u}, xans{3,u}]);
ypoints{u} = [yd{u}, yans{1,u}, yans{2,u}, yans{3,u}];
ypoints{u} = ypoints{u}(I);
xcoord{u} = [];
ycoord{u} = [];
count = 1;
for i = 1:(numel(xpoints{u})-1)
    xtest{u}(i) = (xpoints{u}(i) + xpoints{u}(i+1))/2;
    ytest{u}(i) = double(subs(yfans(u),x,xtest{u}(i)));
    K2test{u}(i) = double(subs(K2(u),{x,y},...
        {xtest{u}(i),ytest{u}(i)}));
    if ytest{u}(i)*(3-ytest{u}(i)) >= 0 && K2test{u}(i) >= 0
        xcoord{u}(:,count) = [xpoints{u}(i),xpoints{u}(i+1)];
        ycoord{u}(:,count) = [ypoints{u}(i),ypoints{u}(i+1)];
    end
end

```

```

        count = count+1;
    end
end

% Gerando Pontos Finais Uniformemente Espacionados
if numel(xcoord{u})>0
    for i = 1:numel(xcoord{u}(1,:))
        condition = xcoord{u}(1,i) <= intv{u} & ...
            intv{u} <= xcoord{u}(2,i);
        intv_fa{u} = [xcoord{u}(1,i) intv{u}(condition) ...
            xcoord{u}(2,i)];
        xfmt{u} = intv_fa{u};
        yfmt{u} = double(subs(yfans(u),x,xfmt{u}));
        [xfmt{u}, yfmt{u}] = arc_division(xfmt{u}, yfmt{u}, ...
            dist, 800, 3);
        plot(xfmt{u},yfmt{u},color{u})
        cond = yfmt{u}>0;
        xfmt{u} = xfmt{u}(cond);
        yfmt{u} = yfmt{u}(cond);
        xft{i,u} = xfmt{u};
        yft{i,u} = yfmt{u};
    end
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 3 - Controles Ótimos
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp('pressione alguma tecla para continuar')
pause

% 3.1 - Controles Ótimos Não-Singulares
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp('- 3 -')

xfm = [];
yfm = [];

% Criando evento comum
eventual = [y, 3-y, x-1, 800-x];
matlabFunction(eventual, [1,1,1,1], [0,0,0,0], 'file', 'event.m', ...
    'vars', {t, [x; y; l1; l2; J]}, ...
    'outputs', {'value', 'isterminal', 'direction'});
options = odeset('Events', @event, 'Refine', 10);

% Criando as Funções para o PVI
matlabFunction([F(:,1); dl(:,1); dJ(1)], 'file', 'diffn', 'vars', ...
    {t, [x; y; l1; l2; J]});

```

```

matlabFunction([F(:,2); d1(:,2); dJ(2)], 'file', 'diffq', 'vars', ...
    {t, [x; y; l1; l2; J]});
pvi = {@diffn, @diffq};
eventual = [y, 3-y, x-1, 800-x, J-(a*x-b*y)];
matlabFunction(eventual, [1,1,1,1,1], [0,0,0,0,1], 'file', 'event', ...
    'vars', {t, [x; y; l1; l2; J]}, ...
    'outputs', {'value', 'isterminal', 'direction'});
optionspvi = odeset('Events', @event, 'Refine', 10);

xf{3} = [];

disp('Achando Controles Ótimos Não-Singulares')

for u = 1:2
    for k = 1:numel(xft(:,u))
        if u == 1
            xnf = xft{k,u};
            ynf = yft{k,u};
            l1nf = a*ones(1,numel(xnf));
            l2nf = -b*ones(1,numel(xnf));
            Jnf = a*xnf - b*ynf;

            xf{1} = [];
            yf{1} = [];
            l1f{1} = [];
            l2f{1} = [];
            Jf{1} = [];
        elseif u == 2
            xf{1} = xft{k,2};
            yf{1} = yft{k,2};
            l1f{1} = a*ones(1,numel(xf{1}));
            l2f{1} = -b*ones(1,numel(xf{1}));
            Jf{1} = a*xf{1} - b*yf{1};

            xnf = [];
            ynf = [];
            l1nf = [];
            l2nf = [];
            Jnf = [];
        end

        % Resolvendo a EDO q1 e n1
        for uc = 1:3
            if uc == 1
                xq = xf{1};
                yq = yf{1};
                l1q = l1f{1};
                l2q = l2f{1};
                Jq = Jf{1};
            elseif uc == 2 && (numel(xft(:,1)) || numel(xf{2})) > 0

```

```

    xq = [xnf xf{2}];
    yq = [ynf yf{2}];
    l1q = [l1nf, l1f{2}];
    l2q = [l2nf, l2f{2}];
    Jq = [Jnf, Jf{2}];
elseif uc == 3 && numel(xf{3}) > 0
    xq = xf{3};
    yq = yf{3};
    l1q = l1f{3};
    l2q = l2f{3};
    Jq = Jf{3};
else
    xq = [];
    yq = [];
    l1q = [];
    l2q = [];
    Jq = [];
end
xf{uc+1} = [];
yf{uc+1} = [];
l1f{uc+1} = [];
l2f{uc+1} = [];
Jf{uc+1} = [];
ur = rem(uc,2)+1;
count = 1;
for i = 1:length(xq)
    [~,Z] = ode45(pvi{ur},[0 -20],...
        [xq(i) yq(i) l1q(i) l2q(i) Jq(i)],optionspvi);
    Zh = double(subs(Psi{ur},{x,y,l1,l2},...
        {Z(:,1),Z(:,2),Z(:,3),Z(:,4)}));
    Zhmem{i,uc+1} = Zh;
    r = find(Zh(2:end)<=0) + 1;
    if numel(r) > 0;
        ratio = -Zh(r(1)-1)/(Zh(r(1))-Zh(r(1)-1));
        xf{uc+1}(count) = Z(r(1)-1,1) + ...
            ratio*(Z(r(1),1)-Z(r(1)-1,1));
        yf{uc+1}(count) = Z(r(1)-1,2) + ...
            ratio*(Z(r(1),2)-Z(r(1)-1,2));
        l1f{uc+1}(count) = Z(r(1)-1,3) + ...
            ratio*(Z(r(1),3)-Z(r(1)-1,3));
        l2f{uc+1}(count) = Z(r(1)-1,4) + ...
            ratio*(Z(r(1),4)-Z(r(1)-1,4));
        Jf{uc+1}(count) = Z(r(1)-1,5) + ...
            ratio*(Z(r(1),5)-Z(r(1)-1,5));
        plot(real([Z((1:r(1)-1),1); xf{uc+1}(count)']),...
            real([Z((1:r(1)-1),2); yf{uc+1}(count)']),...
            color{ur});
        count = count+1;
    else
        plot(real(Z(:,1)),real(Z(:,2)),color{ur})

```

```

        end
    end
    plot(xf{uc+1},yf{uc+1},color{ur});
end

% 3.2 - Controles Ótimos Singulares
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

intv_edos = 0:-30*dist:(-5);

% Encontrando interseção com Arco Crítico
xsing1 = [];
ysing1 = [];
xsing2 = [];
ysing2 = [];
xsing = [];
ysing = [];
if numel(xf{3}) > 1;
    px1 = poly2sym(polyfit(xf{3}(1:2),yf{3}(1:2),1));
    critic = matlabFunction(yx(1)-px1);
    options = optimset('Display','off');
    xsing1 = fminbnd(critic, 250, 260, options);
    ysing1 = real(double(subs(yx(1),x,xsing1)));
    px2 = poly2sym(polyfit(xf{3}(end-1:end),yf{3}(end-1:end),1));
    critic = matlabFunction(yx(1)-px2);
    options = optimset('Display','off');
    xsing2 = fminbnd(critic, 250, 260, options);
    ysing2 = real(double(subs(yx(1),x,xsing2)));
    if (((xsing1-xf{3}(1))/800)^2+...
        ((ysing1-yf{3}(1))/3)^2)^(1/2) < 0.1
        xsing = xsing1;
        ysing = ysing1;
        l1sing = double(subs(l1xy,{x,y},{xsing,ysing}));
        l2sing = double(subs(l2xy,{x,y},{xsing,ysing}));
        Jsing = 0;
        plot(xsing, real(ysing),'black. ');
        plot([xsing xf{3}(1)], [ysing yf{3}(1)],'blue');
    elseif (((xsing2-xf{3}(end))/800)^2+...
        ((ysing2-yf{3}(end))/3)^2)^(1/2) < 0.1
        xsing = xsing2;
        ysing = ysing2;
        l1sing = double(subs(l1xy,{x,y},{xsing,ysing}));
        l2sing = double(subs(l2xy,{x,y},{xsing,ysing}));
        Jsing = 0;
        plot(xsing, real(ysing),'black. ');
        plot([xsing xf{3}(1)], [ysing yf{3}(1)],'blue');
    end
end

if numel(xsing) > 0

```

```

disp('pressione alguma tecla para continuar')
pause
disp('Achando Controles Ótimos Singulares')

% Plotando EDO ponto crítico até ponto final
% u = 0
[T,Z] = ode45(@diffn,[0 20],[xsing ysing ...
    l1sing l2sing Jsing],options);
xsingn = Z(:,1);
ysingn = Z(:,2);
[xsingnc, ysingnc, int, ~] = ...
    arc_intersection(xsingn,ysingn,xf{2},yf{2});
if numel(xsingnc) > 0
    ratio = ((xsingnc-xsingn(int))^2+...
        (ysingnc-ysingn(int))^2)/...
        ((xsingn(int+1)-xsingn(int))^2 + ...
        (ysingn(int+1)-ysingn(int))^2);
    xsingnc = Z(int,1) + ratio*(Z(int+1,1)-Z(int,1));
    ysingnc = Z(int,2) + ratio*(Z(int+1,2)-Z(int,2));
    l1singnc = Z(int,3) + ratio*(Z(int+1,3)-Z(int,3));
    l2singnc = Z(int,4) + ratio*(Z(int+1,4)-Z(int,4));
    Jsingnc = Z(int,5) + ratio*(Z(int+1,5)-Z(int,5));
    Tsingnc = T(int) + ratio*(T(int+1)-T(int));
    xsingn = [Z(1:int,1)', xsingnc];
    ysingn = [Z(1:int,2)', ysingnc];
end
plot(xsingn,ysingn,'blue')
if numel(xsingnc) > 0
    % u = 1;
    [T,Z] = ode45(@diffq,[0 20],[xsingnc ysingnc ...
        l1singnc l2singnc Jsingnc],options);
    xsingq = Z(:,1);
    ysingq = Z(:,2);
    [xsingqc, ysingqc, int, ~] = ...
        arc_intersection(xsingq,ysingq,xf{1},yf{1});
    if numel(xsingqc) > 0
        ratio = ((xsingqc-xsingq(int))^2+...
            (ysingqc-ysingq(int))^2)/...
            ((xsingq(int+1)-xsingq(int))^2 + ...
            (ysingq(int+1)-ysingq(int))^2);
        xsingqc = Z(int,1) + ratio*(Z(int+1,1)-Z(int,1));
        ysingqc = Z(int,2) + ratio*(Z(int+1,2)-Z(int,2));
        l1singqc = Z(int,3) + ratio*(Z(int+1,3)-Z(int,3));
        l2singqc = Z(int,4) + ratio*(Z(int+1,4)-Z(int,4));
        Jsingqc = Z(int,5) + ratio*(Z(int+1,5)-Z(int,5));
        Tsingqc = T(int) + ratio*(T(int+1)-T(int));
        xsingq = [Z(1:int,1)', xsingqc];
        ysingq = [Z(1:int,2)', ysingqc];
    end
end
plot(xsingq,ysingq,'red')

```

```

        Jsing = a*xsingqc-b*ysingqc + Jsingqc;
    end
end

if numel(xsing) > 0

    % Gerando Função para EDO singular
    F1s = f1 + g1*ut;
    F2s = f2 + g2*ut;
    Js = - c*ut - d;
    Fs = [F1s; F2s];
    matlabFunction([Fs; Js], 'file', 'diffs.m', 'vars', ...
        {t, [x; y; J]});
    eventualsi = [y, 3-y, x-1, 800-x, ut-1, J-(a*x-b*y)];
    matlabFunction(eventualsi, [1,1,1,1,1,1], [0,0,0,0,0,1], ...
        'file', 'eventsi.m', 'vars', {t, [x; y; J]}, ...
        'outputs', {'value', 'isterminal', 'direction'});
    optionssi = odeset('Events', @eventsi, 'Refine', 3);

    % Encontrando Arco Singular
    z = [xsing ysing Jsing];
    [T,Z,~,Ze,Ie] = ode45(@diffs,intv_edos,z,optionssi);
    xs = Z(:,1)';
    ys = Z(:,2)';
    Js = Z(:,3)';
    Ts = T;
    l1s = double(subs(l1xy,{x,y},{xs,ys}));
    l2s = double(subs(l2xy,{x,y},{xs,ys}));
    plot(xs,ys,'magenta');
    if numel(Ze) > 0 && Ie == 5
        plot(Ze(1),Ze(2),'red. ');
    end
    % Resolvendo EDO Singular u = 0
    for i = 1:length(xs)
        [T,Z] = ode45(@diffq,[0 -10],[xs(i) ys(i) ...
            l1s(i) l2s(i) Js(i)],optionspvi);
        plot(real(Z(:,1)),real(Z(:,2)),'red')
    end

    % Resolvendo EDO Singular u = 1;
    for i = 1:length(xs)
        [T,Z,Te,Ze,Ie] = ode45(@diffn,[0 -20],[xs(i) ys(i) ...
            l1s(i) l2s(i) Js(i)],optionspvi);
        plot(real(Z(:,1)),real(Z(:,2)),'blue')
    end

end
disp('pressione alguma tecla para continuar')
pause
end

```

```

    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 4 - Controle Ótimo a Partir do Ponto Inicial
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp('- 4 -')

clf
hold on
axis([0 800 0 3])
xlabel('x (células tumorais)')
ylabel('y (células T)')

disp('Plotando Arcos Chave')

xf{3} = [xsing xf{3}];
yf{3} = [ysing yf{3}];
plot(xnf, ynf, 'blue');
plot(xf{1}, yf{1}, 'red');
plot(xf{2}, yf{2}, 'red');
plot(xf{3}, yf{3}, 'blue');
if numel(xs) > 0
    plot(xs, ys, 'magenta');
    ust = double(subs(ut, {x, y}, {xs, ys}));
end
if numel(xsing) > 0
    plot(xsing, real(ysing), 'black. ');
end

disp('pressione alguma tecla para continuar')
pause
disp('Encontrando Trajetória Ótima')

x0 = 600;
y0 = 0.2;
x0qc = [];
y0qc = [];
x0nc = [];
y0nc = [];
trat = [];
trats = [];

% Criando os arquivos para (u=0)
matlabFunction(F(:, 2), 'file', 'diffq0.m', 'vars', {t, [x; y]});
eventualq = [y, 3-y, x-1, 800-x];
matlabFunction(eventualq, [1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0], 'file', 'eventq0.m', ...
    'vars', {t, [x; y]}, ...
    'outputs', {'value', 'isterminal', 'direction'});

```

```

optionsq0 = odeset('Events',@eventq0,'Refine',10);

% Criando os arquivos para (u=1)
matlabFunction(F(:,1),'file','diffn0.m','vars',{t,[x; y]});
eventualn = [y, 3-y, x-1, 800-x];
matlabFunction(eventualn,[1,1,1,1],[0,0,0,0],'file','eventn0.m',...
    'vars',{t,[x; y]},...
    'outputs',{'value','isterminal','direction'});
optionsn0 = odeset('Events',@eventn0,'Refine',10);

% Resolvendo a EDO q0->n0
[T,Z] = ode45(@diffq0,[0 20],[x0 y0],optionsq0);
x0q = Z(:,1)';
y0q = Z(:,2)';
[x0qc, y0qc, int, ~] = arc_intersection(x0q,y0q,xf{3},yf{3});
if numel(x0qc)>0
    ratio = ((x0qc-x0q(int))^2+(y0qc-y0q(int))^2)/...
        ((x0q(int+1)-x0q(int))^2 + (y0q(int+1)-y0q(int))^2);
    T1 = T(int) + ratio*(T(int+1) - T(int));
    trat = [trat T1];
    plot(x0qc,y0qc,'blue. ')
    plot([x0q(1:int),x0qc],[y0q(1:int),y0qc],'red');
end

% Resolvendo a EDO q0->n0 (caso singular)
if numel(xsing)>0
    [x0sc, y0sc, iint, jint] = arc_intersection(x0q,y0q,xs,ys);
    if numel(x0sc)>0
        ratio = ((x0sc-x0q(iint))^2+(y0sc-y0q(iint))^2)/...
            ((x0q(iint+1)-x0q(iint))^2 + (y0q(iint+1)-y0q(iint))^2);
        T1 = T(iint) + ratio*(T(iint+1) - T(iint));
        plot(x0sc,y0sc,'magenta. ')
        plot([x0q(1:iint),x0sc],[y0q(1:iint),y0sc],'red');
        plot(xsingn,ysingn,'blue');
        plot(xsingq,ysingq,'red');
        utrat1 = [1 1];
        Ttrat1 = [0 T1];
        ratio = ((x0sc-xs(jint))^2+(y0sc-ys(jint))^2)/...
            ((xs(jint+1)-xs(jint))^2 + (ys(jint+1)-ys(jint))^2);
        T1s = Ts(jint) + ratio*(Ts(jint+1) - Ts(jint));
        u1st = ust(jint) + ratio*(ust(jint+1) - ust(jint));
        Ttrats = flip([Ts(1:jint)' T1s]) - T1s + T1;
        utrats = flip([ust(1:jint) u1st]);
        T2 = Tsingnc;
        Ttrat2 = [0 Tsingnc] + Ttrats(end);
        utrat2 = [0 0];
        if numel(xsingnc)>0
            T3 = Tsingqc;
            Ttrat3 = [0 Tsingqc] + Ttrat2(end);
            utrat3 = [1 1];
        end
    end
end

```

```

        trats = [T1 T1s T2 T3];
    else
        trats = [T1 T1s T2];
    end
end
end

% Resolvendo a EDO n0->q1
if numel(x0qc)>0
    [T,Z] = ode45(@diffn0,[0 20],[x0qc y0qc],optionsn0);
    x0n = Z(:,1)';
    y0n = Z(:,2)';
    [x0nc, y0nc, int, ~] = arc_intersection(x0n,y0n,xf{2},yf{2});
    if numel(x0nc)>0
        ratio = ((x0nc-x0n(int))^2+(y0nc-y0n(int))^2)/...
            ((x0n(int+1)-x0n(int))^2 + (y0n(int+1)-y0n(int))^2);
        T2 = T(int) + ratio*(T(int+1) - T(int));
        plot(x0nc,y0nc,'red.')
        plot([x0n(1:int),x0nc],[y0n(1:int),y0nc],'blue');
        trat = [trat T2];
    else
        plot(x0n,y0n,'blue')
    end
end

% Resolvendo a EDO q1->qf
if numel(x0nc)>0
    [T,Z] = ode45(@diffq0,[0 20],[x0nc y0nc],optionsq0);
    xq = Z(:,1)';
    yq = Z(:,2)';
    [x3, y3, int, ~] = arc_intersection(xq,yq,xf{1},yf{1});
    if numel(x3)>0
        ratio = ((x3-xq(int))^2+(y3-yq(int))^2)/...
            ((xq(int+1)-xq(int))^2 + (yq(int+1)-yq(int))^2);
        T3 = T(int) + ratio*(T(int+1) - T(int));
        trat = [trat T3];
        plot(x3,y3,'blue.')
        plot([xq(1:int),x3],[yq(1:int),y3],'red');
    else
        plot(xq,yq,'red')
    end
end

disp('pressione alguma tecla para continuar')
pause
disp('Encontrando Controle Ótimo')

clf
axis([-1 0.11*24*Ttrat3(end)+1 -0.1 1.1])
xlabel('t (tempo em horas)')

```

```

ylabel('u (quimioterapia)')

hold on
plot(0.11*24*Ttrat1,utrat1)
plot(0.11*24*Ttrats,utrats)
plot(0.11*24*Ttrat2,utrat2)
plot(0.11*24*Ttrat3,utrat3)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 5 - Pontos Singulares
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp('pressione alguma tecla para continuar')
pause
disp('- 5 -')

clf
hold on
axis([0 800 0 3])
xlabel('x (células tumorais)')
ylabel('y (células T)')

% Intervalos Singular
intv_as = 1:0.5:800;
intv_pc1 = 1:50:800;
intv_pc2 = 1:50:800;
intv_psc = 1:100:800;

% 5.1 - Plotando Arcos Singulares
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp('Plotando Arcos Singulares')
xnum = intv_as;
for i = 1:numel(yx)
    ynum = double(subs(yx(i),x,xnum));
    condition1 = double(subs(ddPsiu2,{x, y}, {xnum, ynum}));
    condition2 = double(subs(ut,{x,y}, {xnum, ynum}));
    istrue = (condition1 <= 0) & (condition2 >= 0) & (condition2 <= 1) ...
        & (abs(imag(ynum))<0.001) & ynum > 0;
    change1=[0,1];
    change2=[1,0];
    v = [0 istrue 0];
    t1=strfind(v,change1);
    t2=strfind(v,change2);
    xnum2 = [];
    ynum2 = [];
    for j = 1:numel(t1)
        xnum2 = [xnum2 xnum(t1(j):(t2(j))-1)];
        ynum2 = [ynum2 ynum(t1(j):(t2(j))-1)];
    end
end

```

```

        plot(real(xnum(t1(j):(t2(j)-1))),real(ynum(t1(j):(t2(j)-1))),...
            'black');
    end
end

% 5.2 - Encontrando pontos Singulares Críticos
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp('pressione alguma tecla para continuar')
pause
disp('Encontrando pontos Singulares Críticos')

% Encontrando Pontos Singulares Críticos 1
j1 = 0;
for j = intv_pc1;
    j1 = j1+1;
    for i = 1:numel(yx);
        ddPsix1 = subs(ut,y,yx(i));
        ddPsix1 = matlabFunction(ddPsix1);
        options = optimset('Display','off');
        xsolfinal1(j1,i) = fsolve(ddPsix1,j,options);
        ysolfinal1(j1,i) = double(subs(yx(i),x,xsolfinal1(j1,i)));
    end
end
c1ea = abs(double(subs(dPsi,{x,y},{xsolfinal1, ysolfinal1})));
c1eb = abs(double(subs(ut,{x,y},{xsolfinal1, ysolfinal1})));
c1ra = abs(imag(xsolfinal1));
c1rb = abs(imag(ysolfinal1));
c1i = double(subs(ddPsix2,{x, y}, {xsolfinal1, ysolfinal1}));
isvalid1 = c1ea < 0.01 & c1eb < 0.01 & c1ra < 0.01 & c1rb < 0.01 & ...
    real(ysolfinal1) > 0;
cond1 = [c1ea, c1eb, c1ra, c1rb, c1i];
c1valid = real(c1i(isvalid1));
xsolfinal1b = xsolfinal1(isvalid1);
ysolfinal1b = ysolfinal1(isvalid1);
plot(real(xsolfinal1b),real(ysolfinal1b),'blue.');
```

```

% Encontrando Pontos Singulares Críticos 2
j2=0;
for j = intv_pc2;
    j2 = j2+1;
    for i = 1:numel(yx);
        ddPsix2 = subs(ut-1,y,yx(i));
        ddPsix2 = matlabFunction(ddPsix2);
        options = optimset('Display','off');
        xsolfinal2(j2,i) = fsolve(ddPsix2,j,options);
        ysolfinal2(j2,i) = double(subs(yx(i),x,xsolfinal2(j2,i)));
    end
end
c2ea = abs(double(subs(dPsi,{x,y},{xsolfinal2, ysolfinal2})));

```

