

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

TRATAMENTO QUÂNTICO DO MODELO DE FERMI-ULAM

Gustavo Accurso Lobo

Prof. Dr. Florian Steffen Günther

Rio Claro (SP)

2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

GUSTAVO ACCURSO LOBO

TRATAMENTO QUÂNTICO DO MODELO DE FERMI-ULAM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel e Licenciado em Física.

Rio Claro (SP)

2025

L799t Lobo, Gustavo
Tratamento Quântico do Problema de Fermi-Ulam / Gustavo Lobo.
-- Rio Claro, 2025
32 p.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado e licenciatura -
Física) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Florian Steffen Günther

1. Caos Quântico. 2. Modelo de Fermi-Ulam. 3. Dinâmica não
Linear. 4. Mecânica Quântica. I. Título.

GUSTAVO ACCURSO LOBO

TRATAMENTO QUÂNTICO DO MODELO DE FERMI-ULAM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel e Licenciado em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Florian Steffen Günther

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Prof. Dr. Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos

Rio Claro, 13 de janeiro de 2025.

Assinatura do aluno

Assinatura do orientador

Dedico este trabalho ao meu irmão Guilherme (in memoriam). Dizem que o maior traço de um cientista é a sua curiosidade, então foi você quem me ensinou a ser um.

AGRADECIMENTOS

O começo desse trabalho coincidiu com um dos piores momentos da minha vida, quando meu irmão faleceu, e, desde então, meu coração está pesado. Esse sentimento é imprevisível; na maior parte do tempo, ele vem acompanhado de boas lembranças. Mas há momentos em que esse peso é insuportável, os momentos em que eu pensei que não conseguiria aguentar, os momentos em que eu pensei em desistir de tudo. É por esses momentos que eu sou grato às pessoas que eu vou citar, elas são o motivo de eu conseguir seguir em frente.

Primeiro, quero agradecer aos meus pais, Almiro e Roberta. Se hoje eu não tenho medo de cair, é porque eu sempre tive vocês para me segurar. Esse ano foi especialmente difícil, mas vocês me mantiveram no eixo, mesmo quando vocês mesmos estavam perdidos. Sei que não é fácil me sustentar e me apoiar em todos os meus erros, mas espero que meus acertos possam lhes dar orgulho. Amo vocês.

Outro agradecimento muito importante é para meus tios Egimar, Eliana, Eduardo e Karina, e para meus avós Antônio, Lucia e Suzeley. Vocês são a minha rede de apoio e foram imprescindíveis para eu poder chegar até aqui. Sei que não estou sozinho porque sei que estão do meu lado.

Também agradeço às amigas que sempre estiveram comigo, me dando forças, mesmo que de longe. Madu e Nicole, não consigo mais imaginar uma vida sem vocês.

Agora, um espaço para dois santuários que me acolheram durante toda a graduação. Primeiro, agradeço ao meu grupo de RPG, que me distraiu, me divertiu e me manteve são nessa jornada. Agradeço a cada um: ao Reis, meu melhor amigo nessa graduação, por estar comigo desde o início, nos meus momentos mais vulneráveis. Ao Kaynan, por toda a ajuda, as risadas e por ser o fundador desse grupo tão importante para mim. À Ashley, você me mostrou a importância de não esconder quem você realmente é. À Melina, pela amizade, que começou do nada e se tornou uma das mais importantes para mim. Ao membro mais recente do grupo, Farofa: mesmo estando com o grupo há pouco tempo, você também já se tornou muito importante para mim. Aqui também quero agradecer — mesmo não fazendo parte do RPG, mas que é parte desse grupo mesmo assim — à Catarina, por estar comigo desde o começo e ser um ponto de conforto no meio desse caos.

Meu outro santuário é a Bateria Porcaria, o que começou como uma curiosidade e acabou virando uma paixão. Foi com as pessoas que conheci aqui que vivi meus momentos favoritos. Em especial, agradeço à Juju, a minha dupla para tudo, quem me acompanhou em todos os momentos, bons e ruins. Aos balatuqueiros Fogão, Mafê, Sukita e Banguela,

que compartilham da minha paixão e estão comigo sempre. E às minhas duas codiretoras de agogô, Pêssega e Jess, por todos os momentos e ensinamentos.

Por fim, agradeço ao meu orientador, Florian Günther, pela sua paciência e por me fazer perceber que eu posso muito mais do que eu imaginava.

*“A cada momento da sua vida, você entra num novo universo. Com cada decisão que
toma.”*

Matt Haig

RESUMO

Este trabalho investiga a correspondência entre a mecânica clássica e a mecânica quântica, focando no modelo de Fermi-Ulam, um sistema dinâmico não linear. O objetivo central é analisar o comportamento quântico deste modelo, descrito como uma partícula em um poço de potencial infinito com uma de suas barreiras em movimento oscilatório, e comparar seus resultados com os mapeamentos clássicos. Dada a natureza probabilística da mecânica quântica e o princípio da incerteza, uma comparação direta das trajetórias clássicas no espaço de fases não é viável.

A abordagem metodológica parte das autofunções do estado estacionário do poço, introduzindo a dependência temporal na barreira móvel. Isso resulta em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que definem os coeficientes da função de onda. Para resolver este sistema numericamente, foi utilizada uma aproximação por truncamento, limitando a expansão da função de onda a um número finito de autoestados instantâneos. A implementação computacional foi validada comparando-a com o caso analiticamente solúvel do poço em contração constante.

No espaço de posições, a densidade de probabilidade da partícula ($|\Psi(x, t)|^2$) se mantém máxima próximo ao centro do poço, com oscilações ao seu redor. Para realizar a comparação com o modelo clássico, o estudo aplicou a transformada de Fourier à função de onda, mapeando-a para o espaço de momentos ($|\Phi(p, t)|^2$). Este mapeamento quântico, visualizado como um mapa de calor da densidade de probabilidade do momento em relação ao tempo, permitiu uma comparação direta com o diagrama de fase clássico.

A conclusão principal é que o mapeamento quântico exhibe estruturas análogas às observadas no domínio clássico. Foram identificadas características notavelmente similares, como as ilhas de estabilidade, os satélites e a região caótica. O estudo confirma, assim, a viabilidade de estabelecer correspondências entre sistemas dinâmicos clássicos e quânticos.

Palavras-chave: Caos Quântico; Modelo de Fermi-Ulam; Dinâmica não Linear; Mecânica Quântica.

ABSTRACT

This work investigates the correspondence between classical mechanics and quantum mechanics, focusing on the Fermi-Ulam model, a non-linear dynamical system. The central objective is to analyze the quantum behavior of this model, described as a particle in an infinite potential well with one of its barriers in oscillatory motion, and compare its results with classical mappings. Given the probabilistic nature of quantum mechanics and the uncertainty principle, a direct comparison of classical phase-space trajectories is not feasible.

The methodological approach begins with the stationary state eigenfunctions of the well, introducing time-dependence in the moving barrier. This results in a system of first-order ordinary differential equations that define the wave function coefficients. To solve this system numerically, a truncation approximation was used, limiting the wave function's expansion to a finite number of instantaneous eigenstates. The computational implementation was validated by comparing it with the analytically solvable case of the constantly contracting well.

In position space, the particle's probability density ($|\Psi(x, t)|^2$) remains maximal near the center of the well, with oscillations around it. To perform the comparison with the classical model, the study applied the Fourier transform to the wave function, mapping it into momentum space ($|\Phi(p, t)|^2$). This quantum mapping, visualized as a heatmap of the momentum probability density versus time, allowed for a direct comparison with the classical phase diagram.

The main conclusion is that the quantum mapping exhibits structures analogous to those observed in the classical domain. Notably similar features were identified, such as stability islands, satellites, and the chaotic region. The study thus confirms the feasibility of establishing correspondences between classical and quantum dynamical systems.

Keywords: Quantum Chaos; Fermi-Ulam Model; Nonlinear Dynamics; Quantum Mechanics.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
2.1	Modelo de Fermi-Ulam Clássico	12
2.2	O Caso Quântico	14
2.2.1	Fundamentos da Mecânica Quântica	14
2.2.2	Estados Estacionários	16
2.2.3	O Poço Quântico Infinito Independente do Tempo	17
2.2.4	O Poço Quântico Infinito com uma Parede em Movimento	18
3	RESULTADOS	20
3.1	O Método Numérico	20
3.2	Poço em Constante Contração	20
3.3	Modelo de Fermi-Ulam Quântico	22
3.4	O Modelo Quântico em Níveis Excitados de Energia	26
4	CONCLUSÃO	29
	REFERÊNCIAS	31

1 INTRODUÇÃO

O ano de 2025 foi oficialmente designado pela UNESCO como o Ano Internacional da Ciência e Tecnologia Quântica, em celebração ao centenário do desenvolvimento formal da teoria (1). Este marco global sublinha o impacto que a mecânica quântica exerceu não apenas na tecnologia moderna, mas na própria fundação do entendimento da física. E é essa reestruturação que define o ponto de partida deste trabalho.

A transição da mecânica clássica para a mecânica quântica representa uma grande mudança conceitual dentro da física. A primeira, consolidada pelas leis de Newton, descreve um universo determinístico, no qual o conhecimento preciso das condições iniciais de um sistema permite a previsão exata de sua evolução temporal. Trajetórias das posições e dos momentos de todas as partículas do sistema são linhas contínuas e bem definidas. Em contrapartida, a mecânica quântica, fundamentada na equação de Schrödinger, introduz uma descrição inerentemente probabilística da natureza. O estado de uma partícula não é mais um ponto no espaço, mas sim uma função de onda, $\Psi(x, t)$, cujo quadrado de sua magnitude fornece a densidade de probabilidade de encontrar a partícula em uma determinada posição para um instante de tempo definido (2).

Essa mudança impõe desafios significativos ao tentar estabelecer uma correspondência entre as descrições clássica e quântica de um mesmo sistema físico. O obstáculo mais fundamental a uma comparação direta reside no princípio de incerteza de Heisenberg. Este princípio estabelece que é impossível determinar simultaneamente com precisão arbitrária a posição e o momento de uma partícula (3). Consequentemente, as trajetórias nítidas do espaço de fases clássico são substituídas, no domínio quântico, por distribuições de probabilidade difusas.

Neste contexto, uma pergunta fundamental emerge: "Quais observações do modelo clássico permanecem no modelo quântico?". Para explorar esta questão, o presente trabalho se concentra em um sistema dinâmico não linear: o modelo de Fermi-Ulam. Proposto originalmente por Enrico Fermi como uma tentativa de explicar a aceleração de raios cósmicos por meio de colisões com campos magnéticos errantes no meio interestelar, e posteriormente formalizado por Stanislaw Ulam, o modelo descreve, em sua forma mais simples, uma partícula que colide elasticamente entre uma parede fixa e uma parede móvel oscilante (4, 5). Esse é um sistema muito estudado na área de dinâmica caótica, tanto em sua versão mais simples, quanto em diferentes contextos como: introduzindo colisões inelásticas, introduzindo coeficientes de amortecimento e, o caso em destaque, estudando os efeitos quânticos desse sistema.

O objetivo central deste trabalho é, portanto, investigar o comportamento

quântico do modelo de Fermi-Ulam e comparar os resultados com os mapeamentos clássicos através de um estudo do seu espaço de momentos. A escolha do espaço de momentos para a análise é deliberada, pois permite uma comparação mais direta com o mapa de fases clássico do sistema, que tipicamente relaciona a velocidade (ou momento) da partícula com a fase da parede oscilante no instante da colisão. Ao analisar a distribuição de probabilidade de momento da partícula quântica e sua evolução temporal, busca-se identificar estruturas análogas às observadas no domínio clássico.

Para atingir tal objetivo, o sistema é estudado numericamente pela aproximação por truncamento descrita por Glasser et al. (6), que consiste em expandir a função de onda nos autoestados instantâneos do poço quântico infinito, introduzir condições de contorno periódicas e resolver a evolução temporal para os coeficientes dessa expansão.

Primeiro foi preciso validar a implementação computacional através do caso da apreensão se contraindo, que é solúvel analiticamente. Em seguida estudar a evolução temporal dos coeficientes e o impacto de ordens superiores na função de onda. Com isso é possível representar graficamente a densidade de probabilidade $|\Psi(x, t)|^2$ que demonstra como as oscilações modificam essa distribuição.

Finalmente, com o intuito de responder a questão motivadora deste trabalho, é aplicada uma Transformada de Fourier à função de onda para estudá-la em seu espaço de momentos. Assim é possível construir mapas de calor que representam a densidade de probabilidade do momento em relação ao tempo $|\Phi(p, t)|^2$, permitindo estabelecer uma comparação direta com os diagramas de fase clássicos do modelo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 MODELO DE FERMI-ULAM CLÁSSICO

O modelo de Fermi-Ulam é um sistema para o estudo de estocasticidade e transferência de energia em sistemas dinâmicos, ele é tradicionalmente descrito por uma partícula colidindo entre uma parede fixa e uma parede oscilante. Ele origina de uma tentativa por Enrico Fermi de descrever a aceleração de raios cósmicos e do trabalho subsequente de Stanislaw Ulam nas propriedades de sistemas dinâmicos.

Em 1949, Fermi introduziu uma teoria que explicava a origem da radiação cósmica. Ele propôs que os raios cósmicos eram acelerados no meio interestelar por colisões com campos magnéticos errantes. Ele descreveu o processo como partículas ganhando energia pela interação com objetos reflexivos de grande massa, que se movem com velocidades desordenadas. Esse mecanismo, conhecido como aceleração de Fermi, indica que uma partícula ganhará uma energia média por colisão proporcional à sua energia atual. O processo aumenta a energia até os valores máximos observados e explica a lei do inverso do quadrado no espectro de energia dos prótons (4).

Alguns anos depois, em 1961, Ulam fez um trabalho apresentando alguns sistemas dinâmicos simples, mostrando suas propriedades e os cálculos numéricos por trás desses problemas. Ele apresenta diversos modelos e, entre eles, a modelagem do acelerador de Fermi. Sua proposta é uma partícula confinada entre duas paredes pesadas e oscilantes que se move e colide elasticamente com elas, simulando a colisão dos raios cósmicos com os campos magnéticos em movimento (5).

O movimento é exemplificado na figura 1(a), é possível ver a trajetória da partícula pela linha colorida, ela bate na parede fixa (a linha azul contínua) e sua trajetória é refletida ao encontro da parede móvel (a linha azul senoidal).

Essa partícula terá sua velocidade vinculada à fase da parede oscilante sempre que ocorrer uma colisão com a mesma. Se o movimento da parede for a favor da direção do movimento da partícula ela perderá velocidade, e quando seu movimento for contrário ela ganhará velocidade.

A posição da parede oscilante pode ser descrita com um movimento harmônico simples:

$$L(t) = L_0 + \epsilon \sin(\omega t), \quad (2.1)$$

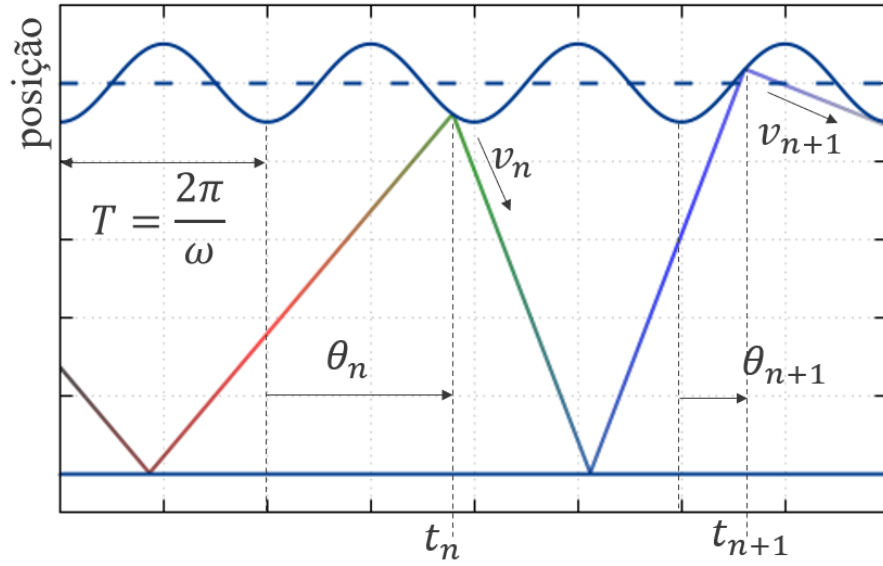
onde ϵ representa a amplitude do movimento e ω a sua velocidade.

A velocidade da partícula pode ser estudada pelas equações (7)

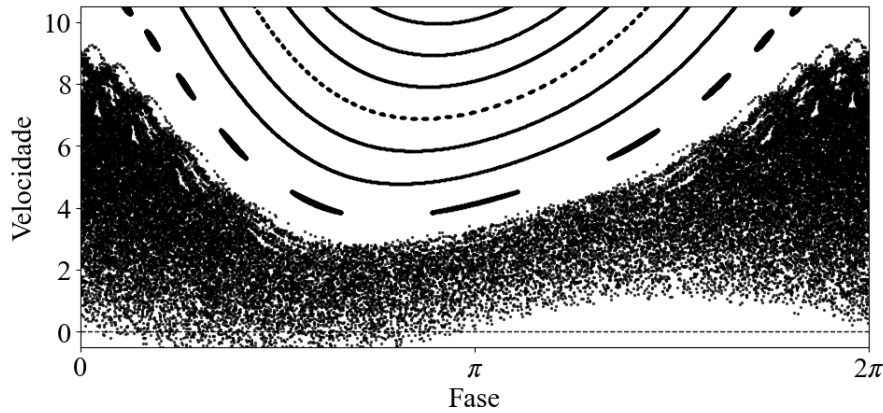
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2\dot{L}(t_n) + v_n \\ t_{n+1} &= t_n + \Delta t \\ \theta_{n+1} &= \omega t_{n+1} \bmod(2\pi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

θ representa a fase da parede no momento em que ocorre uma colisão. E Δt será definido a partir da equação transcendental:

$$\Delta t = \frac{L(t_n) \pm L(t_n + \Delta t)}{v_{n+1}} \quad (2.3)$$



((a)) Diagrama do modelo de Fermi-Ulam. A linha colorida indica a trajetória da partícula e as linhas sólidas azuis as paredes fixa e oscilante.



((b)) Mapa de fases do modelo de Fermi-Ulam. É possível ver três estruturas: uma região caótica nas velocidades mais baixas, as linhas contínuas representam as ilhas de estabilidade e na região entre as duas formam-se satélites.

Figura 1 – Representações do Modelo de Fermi-Ulam.

O movimento da partícula, na maior parte de sua trajetória é trivial, uma colisão perfeitamente elástica com uma parede fixa. O ponto interessante desse modelo é quando a partícula colide com a parede móvel, ocorrendo mudança em sua velocidade. Por isso seu estudo é feito levando em conta apenas esse momento.

Desse modelo seu mapeamento será feito com todas as velocidades no momento em que ocorre uma colisão com a parede móvel, em relação à fase da mesma (que indica sua posição). O espaço de fases é feito com diversas condições iniciais e mostra a formação de algumas estruturas.

Na figura 1(b), nos níveis menores de energia vê-se uma formação quase contínua de pontos, o mar de caos, nessa região a partícula apresenta um comportamento muito sensível, qualquer pequena mudança nas condições iniciais pode resultar em trajetórias completamente diferentes. Na parte superior e central são observadas linhas contínuas, em um mapa que leva em conta níveis maiores de energia essas linhas fazem parte de curvas concêntricas fechadas, representam órbitas regulares e previsíveis e são chamadas de ilhas de estabilidade. Entre essas duas regiões mencionadas existem pequenas estruturas regulares que são os chamados satélites (7).

2.2 O CASO QUÂNTICO

Na mecânica quântica o modelo de Fermi-Ulam deve ser estudado de uma outra forma. Diferente do caso descrito na seção 2.1, o objeto matemático de interesse agora é a função de onda da partícula, $\Psi(x, t)$. Ela vai ser o descritor do estado da partícula e com ela é possível determinar, a um certo nível de incerteza, as mesmas variáveis dinâmicas da mecânica clássica.

2.2.1 Fundamentos da Mecânica Quântica

A função de onda de uma partícula é obtida com a resolução da equação de Schrödinger (2)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi \quad (2.4)$$

Aqui i é a raiz quadrada de -1 e $\hbar$ é a constante de Planck reduzida. A solução dessa equação indica o estado do sistema, com as condições iniciais apropriadas é possível determinar $\Psi(x, t)$ para qualquer instante no tempo.

A maneira como essa função descreve uma partícula vem da interpretação estatística de Born. Ele formulou que a probabilidade de encontrar uma partícula no intervalo de a até b no instante t é dada por (8)

$$\int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = \mathcal{P}_{ab}(t) \quad (2.5)$$

Logicamente isso implica que a densidade de probabilidade medida para todo o intervalo que o sistema compreende tem que ser 1, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1, \quad (2.6)$$

que é a condição de normalização a ser aplicada em qualquer solução da equação de Schrödinger para que ela possa realmente representar o estado de uma partícula.

Aqui é importante destacar que todas as funções de onda na mecânica quântica formam um conjunto que representa um espaço de Hilbert (2). E, nesse espaço, o produto interno entre duas funções f e g se define como

$$\langle f|g \rangle \equiv \int_a^b f(x)^* g(x) dx \quad (2.7)$$

com $f(x)^*$ sendo o complexo conjugado da função $f(x)$.

Como uma consequência do estudo dessas partículas ser através de uma função de onda, para qualquer fenômeno ondulatório quanto mais precisa é a posição da onda, menos preciso é o comprimento de onda. E isso também será verdade na mecânica quântica. Só que nesse caso o comprimento de onda (λ) está associado ao momento da partícula pela fórmula de De Broglie (8)

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad (2.8)$$

Assim, quanto mais precisa é a medida do momento de uma partícula, menos precisa é a medida da sua posição e vice-versa. Matematicamente esse fenômeno é descrito por

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.9)$$

sendo σ_x o desvio padrão da medida de posição e σ_p o desvio padrão do momento. E é essa desigualdade o tão conhecido princípio de incerteza de Heisenberg (3).

Uma última consequência importante do uso de funções ondulatórias para a descrição dos problemas quânticos está na representação de seus valores dinâmicos. O momento da partícula, por exemplo, tem seu operador descrito como

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}, \quad (2.10)$$

que pode ser utilizado na seguinte equação de autovalores:

$$-i\hbar \frac{d}{dx} \phi_p(x) = p \cdot \phi_p(x). \quad (2.11)$$

As autofunções que satisfazem essa equação são o conjunto de ondas planas

$$\phi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \quad (2.12)$$

E, um resultado fundamental da análise de Fourier, qualquer função $\Psi(x, t)$ pode ser escrita como uma superposição contínua dessas ondas planas, ou seja,

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p, t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) dp, \quad (2.13)$$

sendo $\Phi(p, t)$ os coeficientes de expansão dessa base.

A equação (2.13) é essencialmente a Transformada de Fourier (9). Isso significa que podemos encontrar os seus coeficientes, utilizando o teorema de Plancherel, como:

$$\Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \Psi(x, t) dx \quad (2.14)$$

Essa quantidade é um resultado muito importante e a ela é dado o nome de "função de onda no espaço de momentos" (10). E, de acordo com a equação (2.5),

$$|\Phi(p, t)|^2 dp \quad (2.15)$$

é a probabilidade de uma medida de momento produzir um resultado no intervalo dp .

2.2.2 Estados Estacionários

De forma geral, se a energia potencial na equação de Schrödinger (2.4) não depender do tempo, pode-se obter $\Psi(x, t)$ pelo método de separação de variáveis (9),

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t), \quad (2.16)$$

simplificando o problema para um produto simples entre uma função que só depende da posição (ψ) e uma que só depende do tempo (φ). Agora a equação de Schrödinger fica

$$i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V. \quad (2.17)$$

Como os dois lados da equação são diferenciais que dependem de variáveis distintas, a única maneira de isso ser verdade é se elas forem constantes:

$$i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V = E,$$

ou

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{iE}{\hbar} \varphi \quad (2.18)$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V\psi = E\psi. \quad (2.19)$$

Com isso sobram duas equações diferenciais ordinárias para serem resolvidas. A equação (2.18) é simples de ser solucionada por integração,

$$\varphi(t) = \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right), \quad (2.20)$$

a constante será absorvida em ψ , como uma das condições é uma função normalizada e $|\varphi|^2 = 1$ sempre, é mais fácil se preocupar com a normalização apenas de ψ .

A segunda equação (2.19) é chamada de equação de Schödinger independente do tempo e só pode ser resolvida após a delimitação de um potencial. Mas, é interessante perceber que ela se dá pela soma do operador de momento e de um potencial da função de estado que formam a energia total do sistema, ou sua hamiltoniana, o que significa que o autoestado E representa a energia do sistema (2).

2.2.3 O Poço Quântico Infinito Independente do Tempo

O potencial para um poço infinito pode ser descrito como:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq L \\ \infty, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.21)$$

com L delimitando o tamanho do poço de potencial. Para esse caso, fora do poço $\psi(x) = 0$, a probabilidade de se encontrar uma partícula é nula. Já dentro do poço, pela equação (2.19)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi, \text{ onde } k \equiv \sqrt{E}. \quad (2.22)$$

Aqui o problema foi descrito em unidades reduzidas, $\hbar = 2m = 1$. Essa equação é conhecida, é um oscilador harmônico simples, cuja solução geral é

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad (2.23)$$

onde A e B são constantes arbitrárias que podem ser encontradas pelas condições de contorno do problema.

Para o poço infinito a função de onda e a sua derivada são contínuas, o que nos força a escolher nos limites do poço $\psi(0) = \psi(L) = 0$. Isso só pode indicar que a contribuição do cosseno para a função também tem que ser nula, ou seja, $B = 0$, portanto

$$\psi(x) = A \sin(kx). \quad (2.24)$$

Como $A = 0$ leva à solução trivial $\psi = 0$ que não é interessante, é escolhido, para satisfazer as condições de contorno, $\sin(kL) = 0$, desse modo a função ainda é zero nos limites do poço, então

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \text{ com } n = 1, 2, 3... \quad (2.25)$$

Com isso os possíveis valores da energia serão

$$E_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}. \quad (2.26)$$

Para calcular A usamos a condição de normalização da função de onda pela equação (2.6):

$$\int_0^L |A|^2 \sin^2(kx) dx = |A|^2 \frac{L}{2} = 1, \text{ então } |A|^2 = \frac{2}{L}. \quad (2.27)$$

Assim a magnitude de A é determinada, mas é mais fácil escolher a raiz real positiva, já que a fase de A não tem significado físico: $A = \sqrt{2/L}$. Então as soluções dentro do poço são (2)

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (2.28)$$

2.2.4 O Poço Quântico Infinito com uma Parede em Movimento

Até agora a resolução de equação de Schrödinger se deu pelo fato de que o potencial não tinha uma dependência temporal, isso permitiu a separação da função de onda nas equações (2.18) e (2.19). Mas para esse caso o potencial é $V(x, t) = 0$ no intervalo $[0, L(t)]$.

O que pode ser feito é aproximar os estados estacionários para também terem uma contribuição temporal. O que transforma as equações (2.26) e (2.28) no par de autoestados (6)

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L(t)}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L(t)}\right) \quad \text{e} \quad E_k(t) = \frac{n^2 \pi^2}{L^2(t)}. \quad (2.29)$$

A partir deles pode-se escrever a solução geral da equação de Schrödinger como

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \psi_n(x, t). \quad (2.30)$$

Aqui a parte temporal dos estados estacionários determinada pela equação (2.18) pode ser absorvida pelos coeficientes lineares $A_n(t)$ que também terão uma dependência temporal.

A equação (2.30) pode então ser estudada pela equação de Schrödinger (2.4) para se obter

$$-\sum_n A_n(t) \frac{\partial^2 \psi_n(x, t)}{\partial x^2} = i \sum_n (\dot{A}_n \psi_n + A_n \dot{\psi}_n). \quad (2.31)$$

Como os autoestados são ortonormais é possível multiplicar essa equação por $\psi_k(x, t)$:

$$\sum_n \frac{2E_n}{L} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = i \sum_n \frac{2}{L} \dot{A}_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + A_n \dot{\psi}_n \psi_k \quad (2.32)$$

e integrá-la no intervalo $[0, L(t)]$ que resulta em

$$\dot{A}_k(t) + iE_k(t)A_k(t) = -\sum_n A_n(t) \int_0^{L(t)} \psi_k \dot{\psi}_n dx. \quad (2.33)$$

A integral na equação (2.33) pode ser resolvida e resulta em:

$$\int_0^{L(t)} \psi_k \dot{\psi}_n dx = -2 \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \frac{kn}{k^2 - n^2} (1 - \delta_{k,n}) = C_{k,n}. \quad (2.34)$$

Por conveniência pode-se introduzir a quantidade

$$f(t) = \int_0^t \frac{1}{L^2(t)} du, \quad (2.35)$$

a fim de eliminar a dependência de E_k na equação (2.33):

$$B_k(t) = (-1)^k A_k \exp(i\pi^2 k^2 f(t)). \quad (2.36)$$

Que, substituindo o coeficiente A_k , fica

$$(-1)^k \exp(-i\pi^2 k^2 f(t)) \dot{B}_k(t) = \sum_n^{\infty} C_{k,n} (-1)^n \exp(i\pi^2 n^2 f(t)) B_n(t)$$

resultando na família de equações diferenciais homogêneas acopladas de primeira ordem:

$$\dot{B}_k(t) = \sum_n^{\infty} D_{kn} B_n(t) \quad (2.37)$$

onde

$$D_{kn} = -2 \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \frac{kn}{k^2 - n^2} \exp[i\pi^2 (k^2 - n^2) f(t)] (1 - \delta_{k,n}) \quad (2.38)$$

A partir desse ponto é preciso resolver o problema por meio de uma aproximação. Nesse caso a aproximação por truncamento, onde a somatória será limitada a um número finito. Assim a equação (2.37) se torna (6)

$$\dot{B}_k(t) = \sum_n^N D_{kn} B_n(t), \quad (2.39)$$

consequentemente truncando a matriz descrita por (2.38).

Assim, é possível solucionar o sistema da equação (2.39), por meio de integrações numéricas, o que resulta nos valores dos coeficientes B_n . E, com eles, é possível recuperar os coeficientes A_n com a equação (2.36):

$$A_n = (-1)^n \cdot B_n^{-1} \cdot \exp(-i\pi^2 n^2 f(t)), \quad (2.40)$$

então a função de onda pode ser escrita, pela equações (2.30) e (2.29):

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^N (-1)^n \cdot B_n^{-1} \cdot \exp(-i\pi^2 n^2 f(t)) \psi_n(x, t). \quad (2.41)$$

A função de onda $\Psi(x, t)$ já é um resultado importante, pois com ela é possível descrever todo o sistema. Como este trabalho dá ênfase ao momento da partícula, ela será analisada também no espaço de momentos. Conforme a Equação (2.14), a Transformada de Fourier da função de onda no espaço de posições é, precisamente, a função de onda no espaço de momentos, $\Phi(p, t)$. Assim, aplica-se a transformação:

$$\Phi(p, t) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) (-1)^n \cdot B_n^{-1} \cdot \exp(-i\pi^2 n^2 f(t)) \psi_n(x, t). \quad (2.42)$$

3 RESULTADOS

3.1 O MÉTODO NUMÉRICO

Como a seção anterior mostrou, o Modelo de Fermi-Ulam Quântico será um problema que precisa ser resolvido numericamente. A solução foi desenvolvida no seguinte fluxo: primeiro o sistema de equações diferenciais descrito pela equação (2.39) foi solucionado por problema de valor inicial. Com os resultados, são montadas as equações para os coeficientes $A_n(t)$ e então encontra-se as funções de onda $\Psi(x, t)$ pelas equações (?). Por último foi feita a Transformada de Fourier da função no espaço de posições para a função no espaço de momentos, da equação (2.42), via integração numérica.

Todos os métodos numéricos foram feitos utilizando a linguagem de programação Python (11). A solução do valor dos coeficientes B_n foi feita utilizando o método de Runge-Kutta de ordem 4 do pacote SciPy (12). A integração numérica da função de momentos foi feita através da regra de Simpson, do mesmo pacote.

3.2 POÇO EM CONSTANTE CONTRAÇÃO

Os primeiros resultados foram testes para verificar se o algoritmo utilizado estava funcionando devidamente. No estudo de Glasser, et. al. (6) a comparação foi feita com resultados analíticos do problema da parede em constante contração estudados por Pinder em 1990 (13).

Este trabalho recriou os resultados que Glasser obteve para essa verificação. O sistema que foi considerado na simulação tem o movimento da barreira descrito como:

$$L(t) = 1 - t, \quad (3.1)$$

Com $0 \leq t < 1$. E as condições iniciais consideram o estado fundamental da partícula, ou seja,

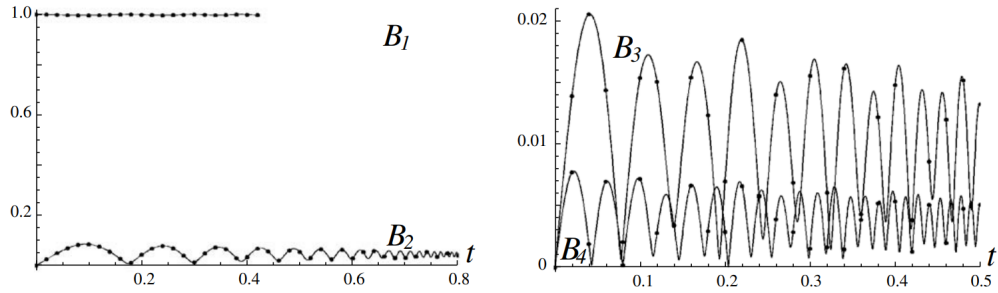
$$A_n(t) = \delta_{1,n} \text{ ou } B_n = -\delta_{1,n}. \quad (3.2)$$

E, para a aproximação por truncamento, o máximo considerado para a somatória da equação (2.39) foi $N = 10$.

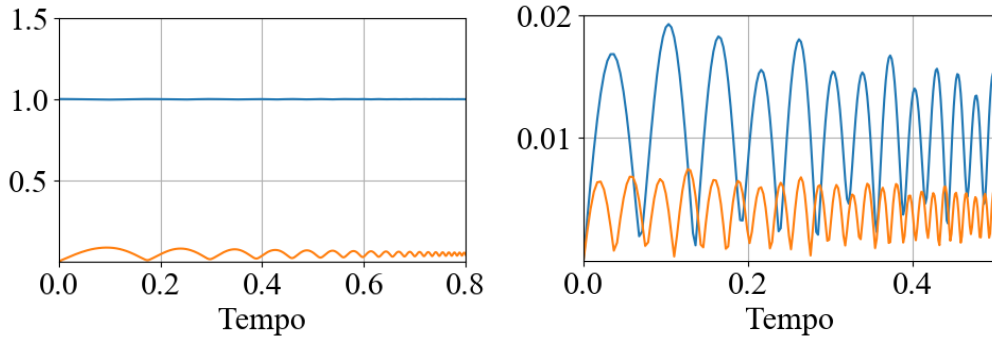
É possível ver a partir dos resultados que Glasser obteve em seu artigo, na figura (2(a)), que a aproximação por truncamento é bastante eficiente para tratar esse problema já que eles coincidem com os resultados analíticos de Pinder. E a simulação deste trabalho apresentou resultados que concordam com os do artigo.

Na figura 2 vê-se uma comparação entre os resultados da literatura com os obtidos na simulação. No primeiro gráfico da figura 2(b) a linha azul é o coeficiente B_1 e a

linha laranja o coeficiente B_2 , já o segundo gráfico, com uma escala bem menor, a linha azul é o coeficiente B_3 e a laranja o coeficiente B_4 .



((a)) Resultados obtidos por Glasser et.al. (6)



((b)) Resultados obtidos neste trabalho

Figura 2 – Coeficientes para o poço com uma parede em constante contração.

Analisando esses gráficos é possível verificar que B_1 é o componente dominante e B_2 , B_3 e B_4 têm cada vez menos impacto na função, mas ainda deixam traços na mesma. Os coeficientes de ordem superiores já se tornam muito pequenos e não apresentam muita significância.

Com esses coeficientes é possível utilizar a equação (2.41) e montar a função de onda das posições para ela ser estudada pelo intervalo de tempo da integração. Foi levado em consideração seu absoluto quadrado e pode-se gerar gráficos dos recortes temporais do sistema para as posições da parede em contração.

Na figura (3) vê-se uma sucessão de secções temporais das distribuições de densidade de probabilidade da posição da partícula, elas apresentam um formato parecido com as distribuições do poço infinito estático, mas possuem leves alterações.

O coeficiente B_1 mantém a probabilidade máxima próxima do centro do poço, como no caso estacionário. Mas, observando o pico em comparação com o meio do poço, delimitado pela linha verde pontilhada, é possível observar que ele tem uma ligeira oscilação, que é a ação dos coeficientes de maior ordem na função de onda.

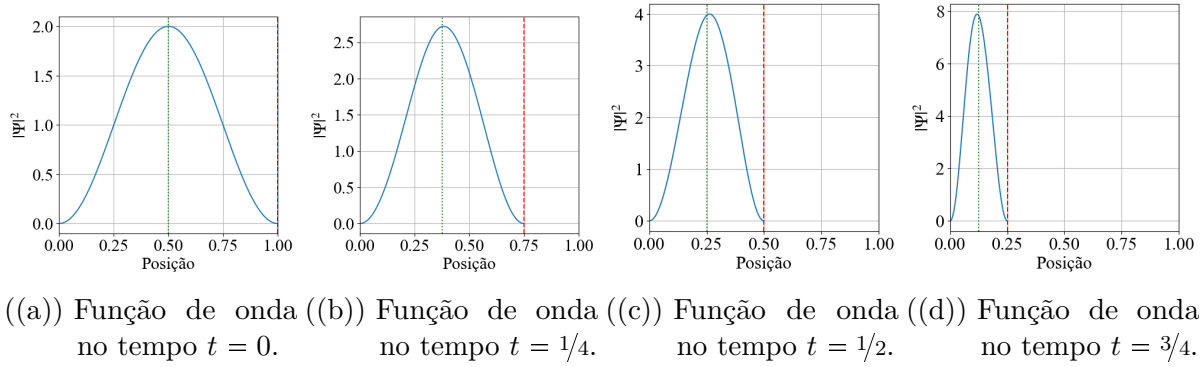


Figura 3 – Funções de onda para a parede contraindo em tempos sucessivos da integração. A linha pontilhada em vermelho indica a posição da parede e a linha pontilhada em verde o meio do poço.

3.3 MODELO DE FERMI-ULAM QUÂNTICO

Agora que foi verificado que o algoritmo tem resultados condizentes com os da literatura, é possível aplicá-lo no modelo de Fermi-Ulam quântico, que é o caso do poço infinito com uma das barreiras em oscilação harmônica.

O sistema para essa integração pode ser descrito com uma barreira oscilante tal que:

$$L(t) = 2 + \sin(\omega t). \quad (3.3)$$

Para as primeiras integrações mantém-se as condições iniciais descritas em (3.2). Como são as mesmas condições utilizadas por Glasser, podem proporcionar uma segunda camada de comparação dos resultados da integração.

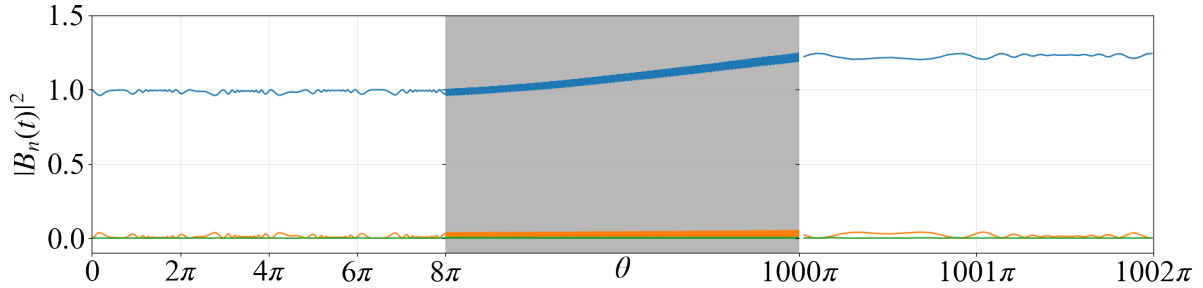
As primeiras integrações dos coeficientes concordaram com os resultados da literatura e compartilham alguns aspectos com as integrações do caso da parede em constante contração. Mas, quando foi levado em conta maiores tempos de integração, os coeficientes começaram a divergir, um problema advindo da aproximação por truncamento, que foi resolvido com integrações com maiores valores de N .

Isso é verificado na figura 4, que mostra uma comparação dos valores do absoluto quadrado dos coeficientes B_n para integrações em diferentes valores de N . A figura 2(a) mostra os coeficientes para uma integração com $N = 4$ em um gráfico de três regiões distintas, as primeiras oscilações e as últimas oscilações nas regiões brancas e o comportamento dos coeficientes no intervalo entre as duas na região cinza.

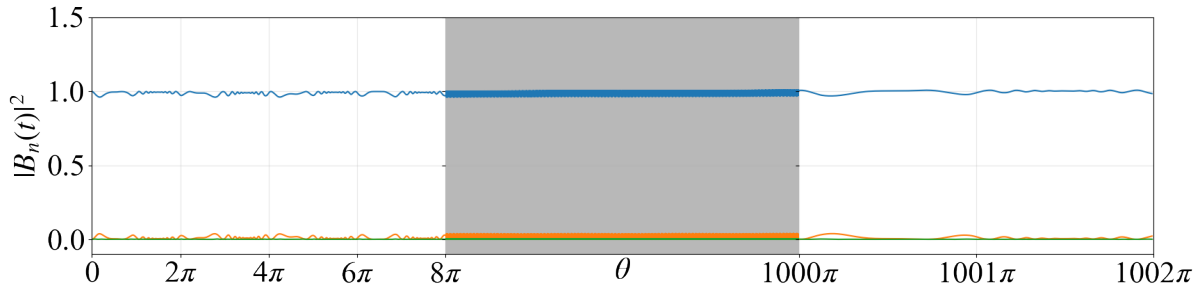
O começo da integração concorda com os resultados da literatura e descreve bem o comportamento dos coeficientes, mas eles começam a divergir para valores muito altos, como é possível ver nas últimas oscilações e na sua evolução mostrada na parte cinza do gráfico.

Isso se torna um problema porque os coeficientes acabam ultrapassando o valor

de 1, fazendo com que a função de onda deixe de ser normalizável como foi explicado na equação (2.6). Mas esse é um erro que se mostrou ser contornável, já que é um artefato da aproximação por truncamento. Na figura 4(b) as mesmas três regiões são destacadas, agora para uma integração com $N = 10$. As primeiras oscilações aparentam ser idênticas, mas, observando a sua evolução, a divergência dos resultados deixou de existir, ou seja, a função de onda voltou a ser normalizável e pode descrever o sistema durante toda a duração mostrada nas figuras.



((a)) Integração dos coeficientes para $N = 4$.



((b)) Integração dos coeficientes para $N = 10$.

Figura 4 – Módulos ao quadrado dos primeiros três coeficientes de B_n , com foco nas primeiras oscilações e para a milésima oscilação, para diferentes truncamentos.

Da mesma forma que no caso da parede oscilante, tendo os coeficientes, é possível estudar a evolução temporal da densidade de probabilidade da posição da partícula. Isso pode ser feito sobrepondo as funções sucessivas para uma mesma fase da parede oscilante.

Na figura 5 são destacadas quatro fases distintas da parede oscilante, que têm sua posição marcada pela linha pontilhada vermelha. Nesses recortes a função de onda foi plotada para cada uma dessas fases nos diversos ocorrências sucessivas, sinalizadas pela barra de cores indicando a ordem das ocorrências.

No resultado, assim como na parede se contraindo, é possível observar que o coeficiente B_1 causa uma máxima perto do centro do poço. Mas as contribuições de B_2 e B_3 resultam em uma assimetria da função de onda. Também é importante destacar que os eventos sucessivos resultaram em funções de onda diferentes.

Com uma função de onda definida, é possível estudar a função no espaço de momentos via Transformada de Fourier, utilizando a equação 2.42. Isso permitirá uma comparação mais direta com o mapeamento clássico do modelo de Fermi-Ulam.

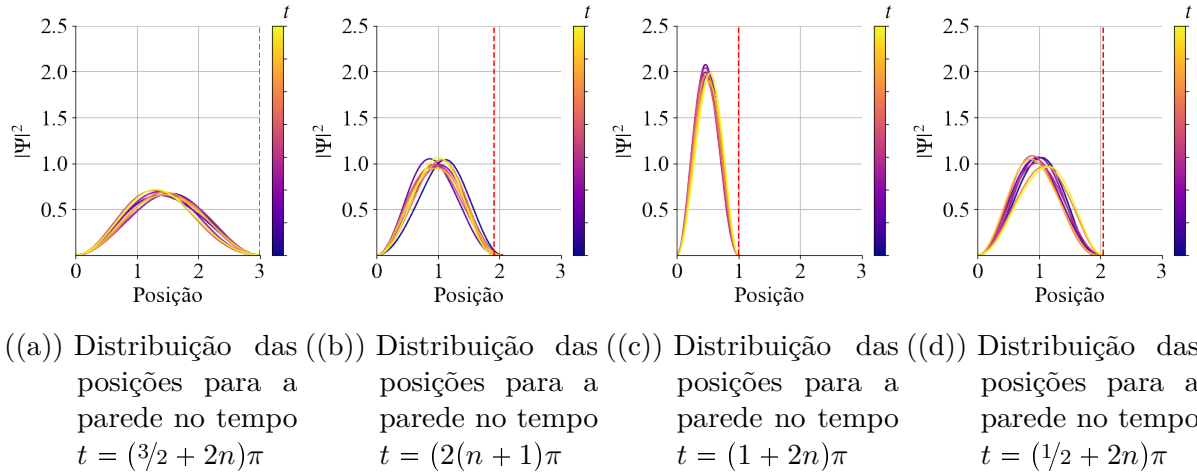


Figura 5 – Densidades de probabilidade da posição da partícula em tempos sucessivos sobrepostas para cada fase igual da parede.

Alguns recortes de tempo foram colocados em um gráfico da densidade de probabilidade pelo momento para dois eventos sucessivos de uma mesma fase da parede, visto na figura (6).

O momento da partícula percorre todo o eixo positivo, mas tem uma amplitude que decai rapidamente, por conta da escolha de condições iniciais que considera a partícula em seu estado fundamental de energia. Por isso foi o eixo das densidades foi estudado em escala logarítmica.

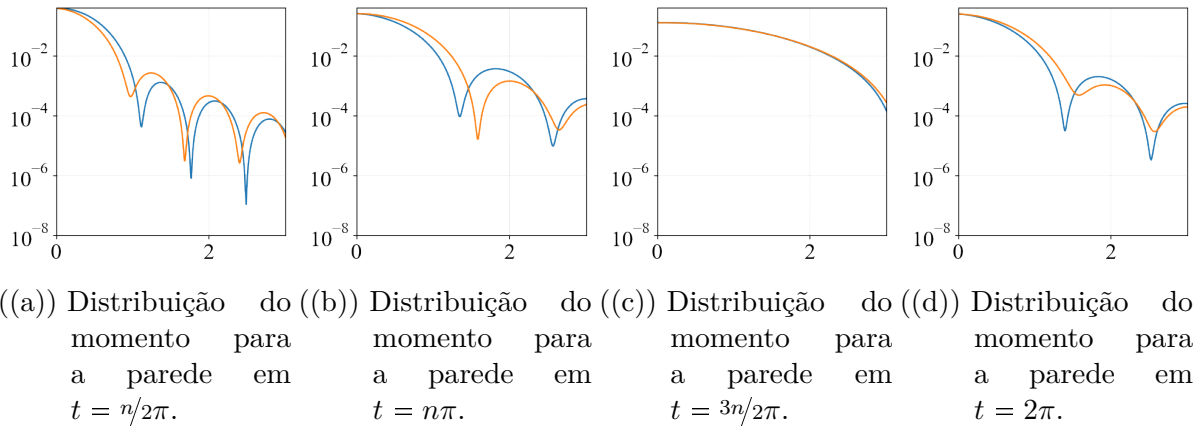


Figura 6 – Densidade de probabilidade do momento em escala logarítmica para dois recortes temporais sucessivos (azul e laranja) de uma mesma fase da parede.

Vê-se realmente distribuições que têm valores mais baixos de momento sendo favorecidas, as linhas percorrem o eixo de momentos e apresentam algumas quedas nos valores. Fazendo uma comparação desses vales, com foco nos valores de $t = n\pi$ e $t = 2\pi$, é possível ver um comportamento espelhado nas ocorrências sucessivas. O primeiro evento (a linha azul) tem seus vales menos acentuados em $t = n\pi$, enquanto tem quedas dos valores mais bruscas em $t = 2\pi$. O contrário ocorre para o segundo evento (a linha laranja) que

tem vales muito acentuados em $t = n\pi$, mas tem uma distribuição suave em $t = 2\pi$.

Uma maneira de visualizar como a densidade de probabilidade varia no tempo é colocando o eixo da densidade de probabilidade em uma escala de cores, como visto na figura (7). O decaimento visto na figura 6 ainda pode ser recuperado nesse mapeamento.

Também é possível ver nesse mapa de calor que para os valores mais baixos de momento existe uma área bem difusa das probabilidades. Com o aumento dos valores do momento, é visível a formação de estruturas regulares. E, o comportamento dos momentos apresenta uma regularidade temporal, as mesmas estruturas se repetem com a oscilação da parede, mas apresentam uma defasagem.

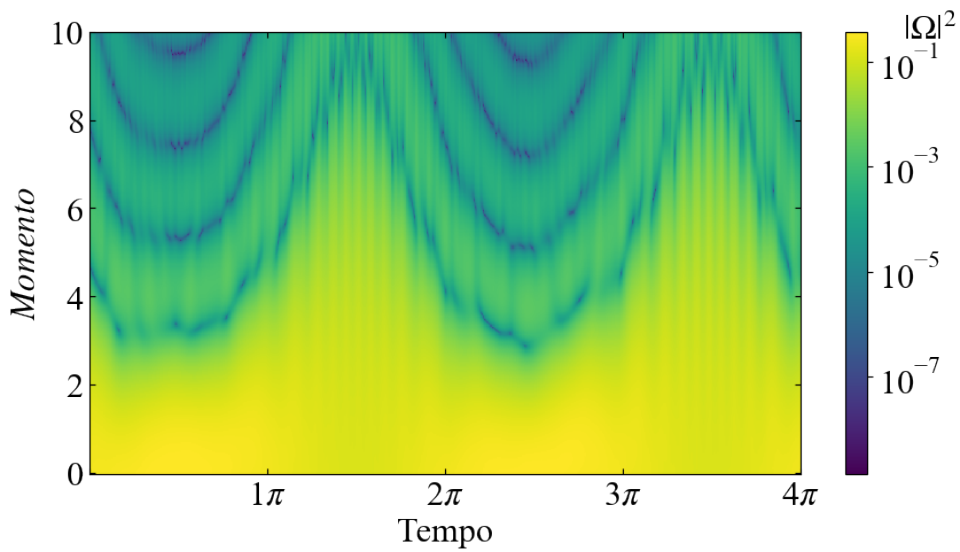


Figura 7 – Mapa de calor em da densidade de probabilidade da partícula em relação ao tempo

Para uma comparação mais direta é possível limitar o eixo temporal para uma única oscilação que, quando posta lado-a-lado com o mapeamento clássico, é possível verificar algumas similaridades entre os dois mapas, como é mostrado na figura 8.

Nessa comparação é possível ver que as estruturas, já conhecidas do modelo clássico, tem formações similares no mapeamento quântico. A área difusa do mapeamento é o que seria o mar de caos. Também vê-se linhas contínuas nos valores de maior momento que são comparáveis às ilhas de estabilidade. E, entre essas duas formações, algumas estruturas regulares menores aparecem, assim como os satélites aparecem no mapa clássico. Então é possível dizer que os dois casos apresentam comportamentos similares.

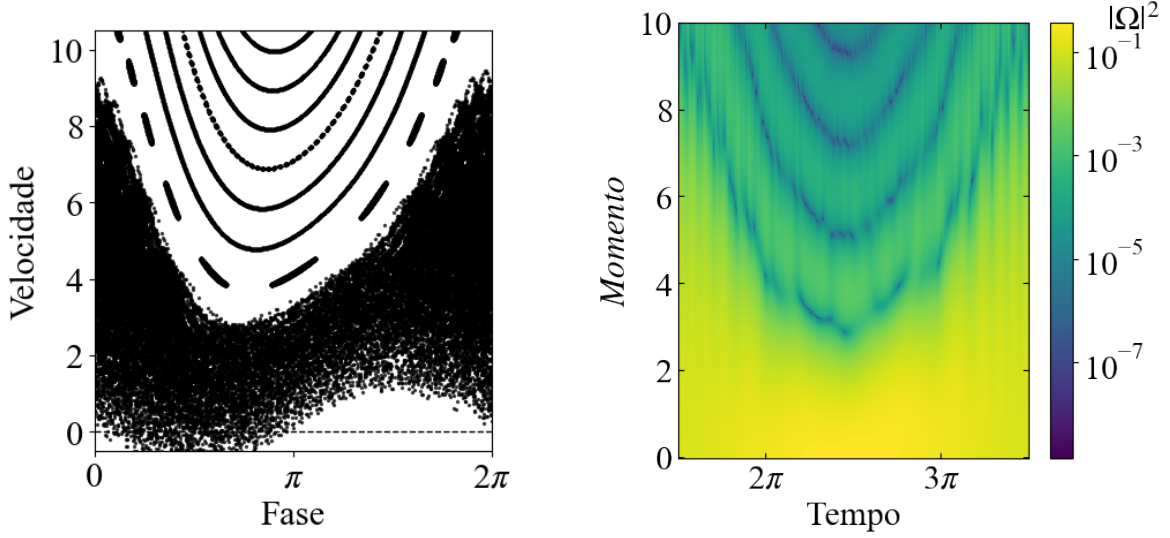


Figura 8 – Comparação direta entre o mapeamento clássico do problema de Fermi-Ulam e o mapeamento feito para a partícula quântica em escala logarítmica.

3.4 O MODELO QUÂNTICO EM NÍVEIS EXCITADOS DE ENERGIA

Como últimos resultados obtidos, buscou-se utilizar essa aproximação para estudar partículas em estados excitados de energia. Mais especificamente os casos onde

$$A_n = \delta_{n,2} , \quad A_n = \delta_{n,3} \text{ e } \quad A_n = \delta_{n,4} \quad (3.4)$$

Analisando as densidades de probabilidade no espaço de posições para esses estados excitados nas figuras 9, 10 e 11, observa-se que as características gerais da evolução temporal são similares às vistas no estado fundamental visualizado na figura 5. Como esperado, a função de onda inicial possui um número de nós correspondente ao nível de energia k da condição inicial ($A_n = \delta_{n,k}$).

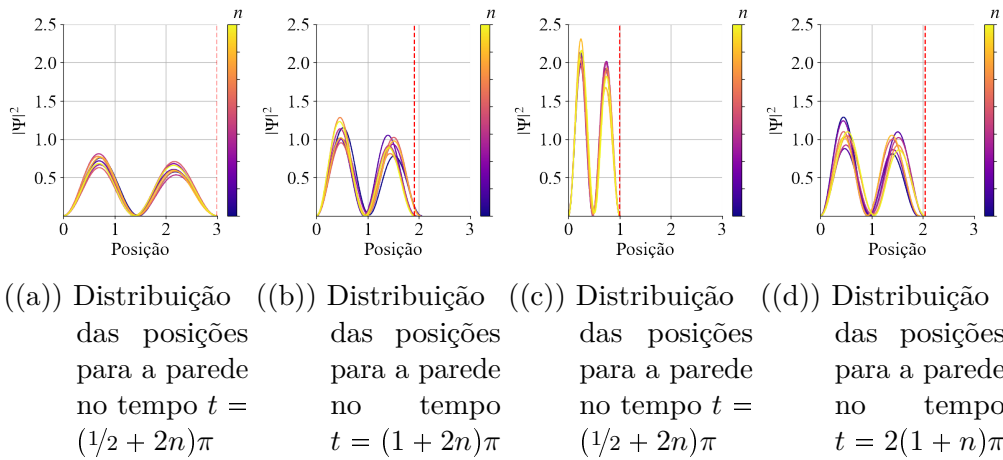


Figura 9 – Densidades de probabilidade da posição da partícula em tempos sucessivos sobrepostas para cada fase igual da parede para a condição inicial $\delta_{n,2}$.

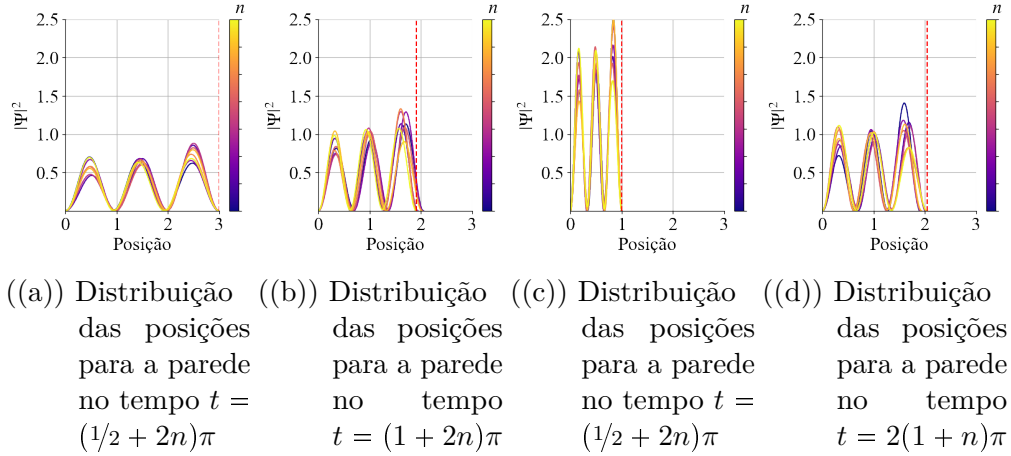


Figura 10 – Densidades de probabilidade da posição da partícula em tempos sucessivos sobrepostas para cada fase igual da parede para a condição inicial $\delta_{n,3}$.

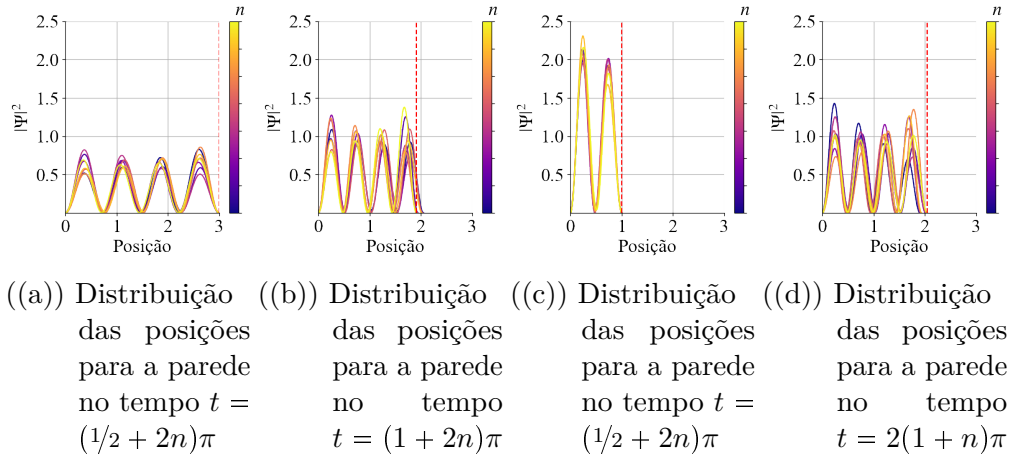


Figura 11 – Densidades de probabilidade da posição da partícula em tempos sucessivos sobrepostas para cada fase igual da parede para a condição inicial $\delta_{n,4}$.

Uma característica notável que emerge é uma assimetria na distribuição de probabilidade, cuja direção depende da paridade do estado inicial. É possível perceber que os picos das funções de onda tendem para a direita nos casos em que k é par, nas figuras 9 e 11 onde $k = 2$ e $k = 4$, respectivamente. Em contrapartida, para k ímpar, na figura 10 em que $k = 3$, essa tendência se dá para a esquerda.

Os resultados foram mapas em que o pico da densidade de probabilidade foi se deslocando cada vez para uma região de momentos maiores que o anterior, como é visto na figura (12).

Essa dependência da paridade se estende ao espaço de momentos, visualizado na figura 12. Naturalmente, ao iniciar a simulação em níveis de energia mais altos, os mapas de calor resultantes mostram a densidade de probabilidade concentrada em regiões de momento correspondentemente maiores. Contudo, a estrutura da distribuição também

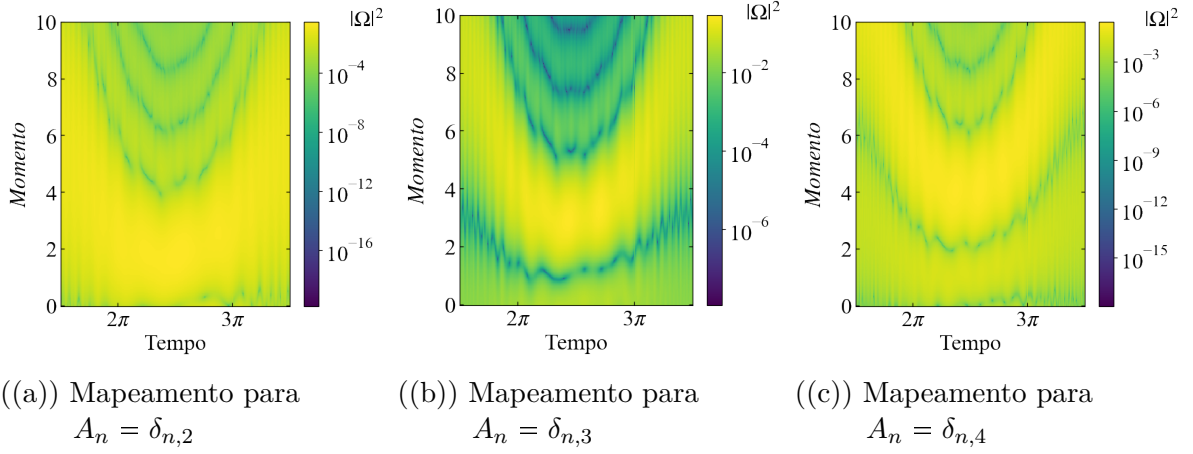


Figura 12 – Densidade de probabilidade dos momentos para condições iniciais diferentes do estado fundamental da partícula.

reflete essa paridade: os mapeamentos para $k = 2$ e $k = 4$, nas figuras 12(a) e 12(c)), guardam uma similaridade estrutural entre si, que é visivelmente distinta da distribuição para $k = 3$, mostrado na figura 12(b). Isso sugere que a paridade do estado inicial influencia diretamente a forma como as estruturas análogas às clássicas se manifestam no domínio quântico.

4 CONCLUSÃO

Este trabalho de pesquisa investigou a relação entre as descrições clássica e quântica de um sistema dinâmico não linear, utilizando como objeto de estudo o modelo de Fermi-Ulam. A motivação central foi explorar maneiras de representar um sistema classicamente caótico, como no domínio quântico, um problema dificultado pelo Princípio da Incerteza, que impede uma comparação direta das trajetórias no espaço de fases.

Para realizar essa investigação, o modelo clássico foi traduzido para a mecânica quântica como uma partícula confinada em um poço de potencial infinito, onde uma das barreiras oscila em movimento harmônico. A natureza dependente do tempo deste potencial exigiu uma abordagem metodológica específica. A função de onda da partícula, $\Psi(x, t)$, foi expandida em uma base de autoestados instantâneos do poço. Esta abordagem transformou a Equação de Schrödinger em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas para os coeficientes da expansão.

A solução numérica deste sistema infinito foi viabilizada através de uma aproximação por truncamento, limitando a expansão a um número finito N de estados. A validação desta implementação computacional foi realizada pela sua aplicação ao caso analiticamente solúvel do poço em contração constante. Os resultados numéricos obtidos demonstraram excelente concordância com os dados da literatura, confirmando a precisão do algoritmo.

Ao aplicar o método validado ao modelo de Fermi-Ulam, foi necessário garantir a estabilidade numérica em longos períodos de integração. Demonstrou-se que um truncamento baixo, com $N = 4$, levava a divergências e perda de normalização, um artefato do método, enquanto um truncamento maior, com $N = 10$, corrigiu essa instabilidade, permitindo simulações fisicamente coerentes.

A análise dos resultados iniciou-se no espaço de posições. Para a partícula no estado fundamental, observou-se que a densidade de probabilidade, embora centrada perto do meio do poço, apresentava oscilações e assimetrias sutis induzidas pelo movimento da parede. O estudo foi então estendido para condições iniciais em estados excitados. Nestes casos, além do esperado aumento no número de nós da função de onda, a evolução da distribuição de probabilidade exibe uma assimetria cuja direção depende da paridade do estado inicial. Verificou-se que os picos da função de onda tendem a se inclinar para a direita para k par e para a esquerda para k ímpar.

O resultado principal do trabalho foi obtido ao mapear a função de onda do espaço de posições para o espaço de momentos, $\Phi(p, t)$, através da Transformada de Fourier. Esta etapa foi fundamental, pois permitiu uma comparação direta com o mapa de fases

clássico. Ao visualizar a densidade de probabilidade de momento $|\Phi(p, t)|^2$ como um mapa de calor, as estruturas dinâmicas do sistema clássico revelaram análogos quânticos. A região difusa de alta probabilidade em baixos momentos correspondeu ao "mar de caos" clássico, enquanto as estruturas curvas de baixa probabilidade em momentos mais altos foram comparáveis às "ilhas de estabilidade". Além disso, a mesma dependência da paridade, observada no espaço de posições, manifestou-se nas distribuições do espaço de momentos.

Em conclusão, este trabalho implementou com sucesso um método numérico para estudar a dinâmica quântica de um potencial temporalmente dependente, e confirmou a viabilidade de estabelecer correspondências entre sistemas dinâmicos clássicos e quânticos. Ainda apresentou características para o caso quântico do modelo de Fermi-Ulam, como a paridade dos resultados obtidos em diferentes níveis de energia.

REFERÊNCIAS

- 1 QUANTUM 2025. 2025. <https://quantum2025.org/>. Acessado em 6 de novembro de 2025.
- 2 GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica*. 2. ed. [S.l.]: Pearson Education do Brasil.
- 3 HEISENBERG, W. *The Physical Principles of the Quantum Theory*. New York: Dover Publications, 1949.
- 4 FERMI, E. On the origin of the cosmic radiation. v. 75, n. 8, p. 1169–1174. ISSN 0031-899X. Publisher: American Physical Society (APS). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.75.1169>.
- 5 ON SOME STATISTICAL PROPERTIES OF DYNAMICAL SYSTEMS. In: CONTRIBUTIONS to Astronomy, Meteorology, and Physics. University of California Press. v. 4, p. 315–320. ISBN 978-0-520-32343-8. Disponível em: <https://www.degruyterbrill.com/document/doi/10.1525/9780520323438-017/html>.
- 6 GLASSER, M.; MATEO, J.; NEGRO, J.; NIETO, L. Quantum infinite square well with an oscillating wall. v. 41, n. 4, p. 2067–2074. ISSN 0960-0779. Publisher: Elsevier BV. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0960077908003718>.
- 7 LEONEL, E. D. *Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares*. São Paulo: Editora Blucher, 2019.
- 8 EISBERG, R. M.; RESNICK, R. *Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1979.
- 9 BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1968.
- 10 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Mecânica Quântica Moderna*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- 11 Python Core Team. *Python: A dynamic, open source programming language*. [S.l.], 2019. Disponível em: <https://www.python.org/>.
- 12 Virtanen, P.; Gommers, R.; Oliphant, T. E.; Haberland, M.; Reddy, T.; Cournapeau, D.; Burovski, E.; Peterson, P.; Weckesser, W.; Bright, J.; van der Walt, S. J.; Brett, M.; Wilson, J.; Jarrod Millman, K.; Mayorov, N.; Nelson, A. R. J.; Jones, E.; Kern, R.; Larson, E.; Carey, C.; Polat, .I.; Feng, Y.; Moore, E. W.; VanderPlas, J.; Laxalde, D.; Perktold, J.; Cimrman, R.; Henriksen, I.; Quintero, E. A.; Harris, C. R.; Archibald, A. M.; Ribeiro, A. H.; Pedregosa, F.; van Mulbregt, P.; Contributors, S. . SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 2020.
- 13 PINDER, D. N. The contracting square quantum well. v. 58, n. 1, p. 54–58. ISSN 0002-9505, 1943-2909. Publisher: American Association of Physics Teachers (AAPT). Disponível em: <https://pubs.aip.org/ajp/article/58/1/54/1053487/The-contracting-square-quantum-well>.