



**Polinomios Ortogonais e
Análise de Frequência**

Pedro Alexandre da Cruz

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Polinômios Ortogonais e Análise de Frequência

Pedro Alexandre da Cruz

Dissertação apresentada no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Cleonice Fátima Bracciali

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Cleonice Fátima Bracciali

Professor Doutor - DCCE - IBILCE - UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Messias Meneguette Jr.

Professor Doutor - DMEC - FCT - UNESP - Presidente Prudente

Prof. Dr. Maurílio Boaventura

Professor Doutor - DCCE - IBILCE - UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto

Fevereiro de 2007

A Deus.

À minha família.

À minha namorada.

Aos meus amigos.

Dedico.

Agradecimentos

A Deus, por tudo.

Um agradecimento especial à Prof.^a Dr.^a Cleonice Fátima Bracciali, pela orientação, compreendendo as dificuldades e auxiliando nas dúvidas. Seu apoio foi de fundamental importância para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, co-orientador, pelo apoio, idéias e discussões sobre este trabalho, e pelo incentivo desde a Iniciação Científica.

Aos meus pais, Maria Lino da Cruz e Oseano Francisco da Cruz e também à minha irmã Alessandra Cruz Barbom que sempre me apoiaram.

À minha namorada, Leandra Crema pelo apoio e paciência.

A todos os professores de graduação e pós-graduação, em especial à Prof.^a Dr.^a Eliana X. L. de Andrade, ao Prof. Dr. Dimitar K. Dimitrov e ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto.

Aos meus amigos de república, Nilton, José, Fernando, Pedro, Reginaldo.

Aos amigos, Djalma, Carlos, Gustavo, Luciana, pelos momentos de descontração.

A todos os companheiros desde o início desta jornada.

Aos meus amigos pós-graduandos do DCCE e do Departamento de Matemática do IBILCE.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar o problema de análise de frequência, utilizando polinômios ortogonais no intervalo $[0,1]$. Para isto, vimos os polinômios ortogonais no círculo unitário, conhecidos como polinômios de Szegő, suas relações com as frações contínuas de Perron-Carathéodory e polinômios para-ortogonais. Estudamos, também, relações entre polinômios para-ortogonais e polinômios ortogonais no intervalo $[-1,1]$, e como são utilizados em análise de frequência.

Palavras-chave: Polinômios ortogonais, polinômios de Szegő, análise de frequência.

Abstract

The main purpose of this work is to study the frequency analysis problem using orthogonal polynomials on the interval $[0,1]$. For that, we study the orthogonal polynomials in the unit circle, known as Szegő polynomials, relations with the continued fractions of Perron-Carathéodory and para-orthogonal polynomials. We also study the relations between the para-orthogonal polynomials and orthogonal polynomials on the interval $[-1,1]$, and how they are used in the frequency analysis problem.

Keywords: Orthogonal polynomials, Szegő polynomials, frequency analysis.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Polinômios ortogonais na reta real	4
1.2 Quadratura Gaussiana	8
1.3 Polinômios núcleos	10
1.4 Medidas positivas em intervalos simétricos	11
1.5 Relações de recorrência relacionadas	14
1.6 Frações contínuas	16
2 Polinômios de Szegő e polinômios para-ortogonais	19
2.1 Polinômios de Szegő	19
2.2 HPC-fração	25
2.3 Funções de Carathéodory normalizadas	26
2.4 Polinômios para-ortogonais	27
2.5 Quadratura no círculo unitário	33
2.6 Relações entre polinômios para-ortogonais e polinômios ortogonais	36
2.7 Relação entre as fórmulas de quadratura	39
2.8 Avaliação numérica de P_n	41
3 Polinômios de Szegő em análise de frequência	44
3.1 O problema de análise de frequência	44
3.2 O N-processo	45
3.3 O R-processo	52

4	Polinômios ortogonais reais em análise de frequência	68
4.1	Polinômios ortogonais em $[-1, 1]$	68
4.2	Polinômios ortogonais em $[0, 1]$	75
4.3	Problema de análise de frequência	76
	Considerações finais	80
	Referências Bibliográficas	82

Introdução

Observações de muitos fenômenos naturais que podem ser modelados como sinais trigonométricos são compostos da superposição periódica de ondas com frequências $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_0}$ bem definidas. Tais sinais podem ser dados da forma

$$x(m) = \gamma_0 e^{im\pi} + \sum_{j=1}^I (\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}), \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

onde $I \in \mathbb{N}$, $\gamma_0 \geq 0$, com $n_0 = 2I + l < N$, onde

$$l = \begin{cases} 1, & \text{se } \gamma_0 > 0, \\ 0, & \text{se } \gamma_0 = 0, \end{cases}$$

ω_j são as frequências e γ_j são as amplitudes.

As frequências ω_j são tais que,

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n_0} < 2\pi$$

e $\omega_{n_0+1-j} = 2\pi - \omega_j$ e as amplitudes $\gamma_j \in \mathbb{C}$, satisfazem $\bar{\gamma}_{n_0+1-j} = \gamma_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, I$.

O problema de análise de frequência consiste em determinar n_0 , as frequências ω_j e as amplitudes γ_j a partir de valores observados $\{x(m)\}_{-\infty}^{\infty}$, dados por

$$x(m) = \begin{cases} \gamma_0 e^{im\pi} + \sum_{j=1}^I (\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}), & m = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{para } m < 0 \text{ e } m > N-1. \end{cases}$$

Neste caso, o sinal trigonométrico é chamado de N -truncado.

A maior dificuldade está, então, em determinar as frequências ω_j e, uma vez encontradas estas frequências, as amplitudes γ_j são obtidas resolvendo-se o sistema linear

$$\gamma_0 e^{im\pi} + \sum_{j=1}^I (\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}), \quad I \in \mathbb{N}, \quad m = 1, 2, \dots, n_0.$$

Uma função $\psi(z)$ é uma medida positiva no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ quando $\psi(e^{i\theta})$, definida em $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é uma função real, limitada e não decrescente com infinitos pontos de aumento tal que os momentos

$$\mu_n = \int_{\mathcal{C}} z^n d\psi(z) = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

existem.

Com a medida $\psi(z)$, definimos um funcional integral

$$I_\psi[f(e^{i\theta})] = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}), \quad f \in \Lambda,$$

onde Λ denota o espaço de todos os L-polinômios.

Deste funcional definimos o produto interno

$$\langle f, g \rangle_\psi = I_\psi[f(e^{i\theta})\bar{g}(e^{-i\theta})] = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\bar{g}(e^{-i\theta}) d\psi(e^{i\theta}), \quad f, g \in \Lambda.$$

Consideremos seqüências $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ que satisfazem $\mu_n = \bar{\mu}_{-n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Correspondente a estas seqüências definimos como o determinate de Toeplitz, Δ_n , por

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \dots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \dots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \dots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots,$$

com $\Delta_{-1} = 1$.

Quando $\Delta_n \neq 0$, definimos como seqüência de polinômios ortogonais mônicos com relação à medida $\psi(z)$ os polinômios $\rho_n(\psi, z)$ que satisfazem

$$\langle \rho_n, z^m \rangle = \begin{cases} 0, & m = 0, 1, \dots, n-1, \\ \sigma_n \neq 0, & m = n. \end{cases}$$

Esta seqüência também é conhecida como seqüência de polinômios de Szegő com relação à medida $\psi(z)$ (ver [10, 20, 21]). Esses polinômios serão utilizados para resolver o problema de análise de freqüência. A idéia apresentada por Jones e outros em [11] é que os zeros dos polinômios de Szegő $\rho_n(\psi_N, z)$, com relação à medida ψ_N , são utilizados para aproximar os pontos de freqüência $e^{i\omega_j}$, com $N \rightarrow \infty$ e $n \geq n_0$, onde a medida $\psi_N(e^{i\theta})$ é dada por

$$\psi'_N(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi N} |X_N(e^{i\theta})|^2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{e} \quad X_N(z) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)z^{-m}.$$

Uma primeira motivação para esta idéia surge quando, para toda função contínua, f , a medida ψ_N converge “fracamente” para a medida discreta ψ , ou seja,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi_N(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}),$$

com ψ uma função escada com saltos $|\gamma_k|^2$ nos pontos ω_k .

Neste trabalho, inicialmente fizemos um estudo dos polinômios de Szegő baseados em Jones e outros [10]. A seguir abordamos os polinômios para-ortogonais e certos polinômios ortogonais obtidos de polinômios para-ortogonais pela transformação

$$x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2}), \quad \text{para } z = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad x \in [-1, 1],$$

estudada em Delsarte e Genin [7], e suas aplicações ao problema de análise de frequência. Finalmente, estendemos os resultados estudados para polinômios ortogonais no intervalo $[0,1]$ e vemos como podem ser utilizados para se aproximar as frequências.

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos básicos sobre polinômios ortogonais na reta real, frações contínuas, fórmulas de quadraturas, entre outros. Esses resultados serão necessários para os estudos aqui desenvolvidos.

No Capítulo 2, iniciamos com um estudo sobre polinômios de Szegő. Estudamos esses polinômios através de sua relação com as frações contínuas de Perron-Carathéodory. Em seguida, apresentamos um estudo sobre os polinômios para-ortogonais, onde observamos alguns resultados interessantes com respeito a localização de suas raízes. Temos ainda uma seção dedicada ao estudo das relações entre os polinômios para-ortogonais e os polinômios ortogonais em $[-1,1]$ através da transformação acima, e uma seção dedicada a relação entre as fórmulas de quadratura.

No Capítulo 3, abordamos um estudo sobre o problema de análise de frequência, onde apresentamos resultados sobre a abordagem desse assunto, utilizando polinômios de Szegő. Introduzimos métodos para aproximar as frequências, baseados, em trabalhos como [6, 9, 11, 12, 13, 14, 15].

Fizemos, no Capítulo 4, um estudo sobre o problema de análise de frequência, onde abordamos tal problema através do uso dos polinômios ortogonais no intervalo $[-1,1]$ devido aos polinômios para-ortogonais, ver [3]. Posteriormente fizemos o mesmo estudo do problema de análise de frequência mas com polinômios ortogonais no intervalo $[0,1]$, isto é possível devido ao uso de medidas simétricas, com isso encerramos este trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar principalmente, resultados e propriedades bem conhecidos dos polinômios ortogonais. Resultados que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. De forma breve, enunciaremos definições e propriedades, sem demonstrações, pois estes resultados são bastante conhecidos e podem ser encontrados com detalhes em textos clássicos, tais como Chihara [5] e Szegő [20].

1.1 Polinômios ortogonais na reta real

Definição 1.1. *Considere uma função $\psi(x)$ definida em um intervalo real $[a, b]$, limitada, não decrescente, de valores reais e com infinitos pontos de aumento. Chamamos $\psi(x)$ de função distribuição ou medida positiva ou, ainda, medida, se os momentos*

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

existem.

Denotamos por $\mathbb{P}_n$ o espaço dos polinômios de grau no máximo n e por $\mathbb{P}$ o espaço de todos os polinômios.

Consideremos, também, o produto interno definido da seguinte forma

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)d\psi(x), \quad f, g \in C[a, b].$$

Utilizando este produto interno temos a seguinte definição para uma seqüência de polinômios ortogonais.

Definição 1.2. Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios de grau n . Dizemos que esta seqüência é uma seqüência de polinômios ortogonais em $[a, b]$ com relação à medida $\psi(x)$ se

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_a^b P_m(x) P_n(x) d\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } n = m. \end{cases} \quad (1.2)$$

A relação acima também é equivalente a

$$\int_a^b x^m P_n(x) d\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (1.3)$$

Além disso, se $\rho_n = 1$ em (1.2), então $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência de polinômios ortonormais com relação a medida $\psi(x)$. Usaremos $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ para denotar a seqüência dos polinômios ortonormais.

É também conhecido (ver [5]) que se $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ são seqüências de polinômios ortogonais para uma mesma medida, então existem constantes $\zeta_n \neq 0$ tais que,

$$Q_n(x) = \zeta_n P_n(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Consideramos aqui os polinômios ortogonais na forma mônica, ou seja, polinômios cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a 1. Considerando $P_n(x)$ mônico, podemos obter a seguinte relação de recorrência de três termos

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (1.4)$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x - \beta_1$. Os coeficientes β_{n+1} e α_{n+1} satisfazem

$$\beta_{n+1} = \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad n \geq 0 \quad e \quad \alpha_{n+1} = \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}, \quad n \geq 1,$$

e ainda, arbitrariamente, $\alpha_1 = \mu_0$. Os coeficientes β_n e α_n são reais e $\alpha_n > 0$.

Considerando uma medida simétrica, isto é, se $\psi(x)$ é definida em $[-b, b]$ com $0 < b \leq \infty$ tal que $d\psi(x) = -d\psi(-x)$, então podemos mostrar que os momentos (1.1) satisfazem $\mu_{2n-1} = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Como consequência segue que os correspondentes polinômios ortogonais são simétricos, isto é, $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, ou seja, os polinômios de grau par são funções pares e os polinômios de grau ímpar são funções ímpares, e, ainda os coeficientes β_n são nulos.

Notemos que, a partir da definição de α_{n+1} , podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_a^b P_n^2(x) d\psi(x) &= \alpha_{n+1} \int_a^b P_{n-1}^2(x) d\psi(x) \\ &= \alpha_{n+1} \alpha_n \int_a^b P_{n-2}^2(x) d\psi(x) \end{aligned}$$

e assim por diante, chegamos à

$$\int_a^b P_n^2(x) d\psi(x) = \alpha_{n+1} \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1. \quad (1.5)$$

Citaremos agora uma interessante propriedade dos polinômios ortogonais a respeito de suas raízes, que será dada pelo seguinte teorema.

Teorema 1.1. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios ortogonais com relação a uma medida $\psi(x)$ em (a, b) . Então, todas as raízes de $P_n(x)$ são reais, distintas e estão no intervalo (a, b) .*

Uma outra propriedade importante é o seguinte resultado, que fornece informações a respeito do comportamento das raízes de polinômios de grau consecutivos.

Denotemos por $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}$ as raízes de $P_n(x)$, $n \geq 1$, em ordem crescente.

Teorema 1.2. *Consideremos $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios ortogonais com relação a uma medida $\psi(x)$. Então,*

$$x_{n+1,j} < x_{n,j} < x_{n+1,j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Definição 1.3. *O intervalo fechado $[\xi_1, \eta_1]$, onde*

$$\xi_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,1} \quad e \quad \eta_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,n}$$

é chamado de verdadeiro intervalo de ortogonalidade da seqüência de polinômios ortogonais com relação a uma certa medida $\psi(x)$.

Teorema 1.3. *(Identidade de Christoffel-Darboux) Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios ortogonais. Então, eles satisfazem à seguinte identidade*

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}} = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x - y}. \quad (1.6)$$

A relação (1.4) pode também ser escrita como

$$xP_n(x) = \alpha_{n+1}P_{n-1}(x) + \beta_{n+1}P_n(x) + P_{n+1}(x). \quad (1.7)$$

Para a correspondente seqüência de polinômios ortonormais, $p_n(x)$, podemos escrever

$$p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{\langle P_n, P_n \rangle}} = k_n P_n(x),$$

mas por (1.5)

$$k_n = \frac{1}{\sqrt{\langle P_n, P_n \rangle}} = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1})^{-1/2}.$$

Neste caso, a fórmula de Christoffel-Darboux é dada por

$$\sum_{k=0}^n p_k(x)p_k(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y}. \quad (1.8)$$

Agora, tomando $y \rightarrow x$ em (1.6), obtemos a fórmula confluyente da identidade de Christoffel-Darboux,

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k^2(x)}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}}. \quad (1.9)$$

Daí, em termos polinômios ortonormais, a expressão (1.9) torna-se

$$\sum_{k=0}^n p_k^2(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} (p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)). \quad (1.10)$$

Além disso, de (1.4) a relação de recorrência para os polinômios ortonormais pode ser dada por

$$xp_n(x) = \sqrt{\alpha_{n+1}}p_{n-1}(x) + \beta_{n+1}p_n(x) + \sqrt{\alpha_{n+2}}p_{n+1}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.11)$$

onde $p_{-1}(x) = 0$. Fazendo $n = 0, 1, 2, \dots, m-1$ em (1.11), obtemos

$$x \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{m-2}(x) \\ p_{m-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \sqrt{\alpha_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha_2} & \beta_2 & \sqrt{\alpha_3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_3} & \beta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{m-1} & \sqrt{\alpha_m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_m} & \beta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{m-2}(x) \\ p_{m-1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{\alpha_{m+1}}p_m(x) \end{pmatrix}.$$

Logo, tomando $x = x_{m,j}$, $j = 1, 2, \dots, m$, as raízes do polinômio $p_m(x)$, o sistema acima torna-se

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_0(x_{m,j}) \\ p_1(x_{m,j}) \\ p_2(x_{m,j}) \\ \vdots \\ p_{m-2}(x_{m,j}) \\ p_{m-1}(x_{m,j}) \end{pmatrix}}_{u_{m,j}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 & \sqrt{\alpha_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha_2} & \beta_2 & \sqrt{\alpha_3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_3} & \beta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{m-1} & \sqrt{\alpha_m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_m} & \beta_m \end{pmatrix}}_{J_m} \underbrace{\begin{pmatrix} p_0(x_{m,j}) \\ p_1(x_{m,j}) \\ p_2(x_{m,j}) \\ \vdots \\ p_{m-2}(x_{m,j}) \\ p_{m-1}(x_{m,j}) \end{pmatrix}}_{u_{m,j}}, \quad (1.12)$$

onde a matriz J_m é chamada de matriz de Jacobi. Assim, de (1.12), concluímos que as raízes dos polinômios ortogonais são os autovalores da matriz de Jacobi, devido ao fato que $u_{m,j}$ é não nulo, pois $p_{m-1}(x_{m,j}) \neq 0$.

Um outro importante resultado da teoria dos polinômios ortogonais, é dado pelo seguinte teorema, conhecido como Teorema de Favard que pode ser encontrado em [5].

Teorema 1.4. *Sejam $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ seqüências de números reais, com $\alpha_n > 0$ para $n \geq 1$, e seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios definida pela relação de recorrência*

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x - \beta_1$. Então, existe uma medida $\psi(x)$ definida em $[a, b]$, onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, tal que

$$\int_a^b d\psi(x) = \alpha_1 \quad e \quad \int_a^b P_m(x)P_n(x)d\psi(x) = 0,$$

para $m \neq n$, onde $m, n \geq 0$.

1.2 Quadratura Gaussiana

Fórmulas de quadratura são aquelas que aproximam o valor de uma integral definida através de uma combinação linear de valores da função, ou seja, são fórmulas do tipo

$$\int_a^b f(x)d\psi(x) = \sum_{j=1}^n \tau_{n,j}f(x_{n,j}) + E_n(f) \quad (1.13)$$

onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e $E_n(f)$ é o erro na aproximação. Os valores distintos $x_{n,j}$ são chamados de nós e os valores $\tau_{n,j}$ são os pesos da fórmula de quadratura.

Se aproximarmos a função f por um polinômio de interpolação sobre os pontos $x_{n,j}$ $j = 1, 2, \dots, n$, então o polinômio interpolador de Lagrange é dado por

$$L_n(x) = \sum_{j=1}^n f(x_{n,j})l_{n,j}(x),$$

onde os polinômios fundamentais da interpolação de Lagrange são dados por

$$l_{n,j}(x) = \frac{\pi_n(x)}{\pi'_n(x_{n,j})(x - x_{n,j})},$$

com $\pi_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_{n,j})$.

A propriedade $l_{n,j}(x_{n,k}) = \delta_{n,k}$, onde $\delta_{n,k}$ é o Delta de Kronecker, ou seja,

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = k \\ 0, & \text{se } n \neq k, \end{cases}$$

nos garante que o polinômio L_n é interpolador, pois

$$L_n(x_{n,j}) = f(x_{n,j}), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Integrando o polinômio $L_n(x)$, que tem grau $n - 1$, temos

$$\int_a^b L_n(x) d\psi(x) = \sum_{j=1}^n f(x_{n,j}) \int_a^b l_{n,j}(x) d\psi(x).$$

Quando f é um polinômio de grau $n - 1$ temos que $L_n(x) = f(x)$. Assim, os coeficientes de quadratura são dados por

$$\tau_{n,j} = \int_a^b l_{n,j}(x) d\psi(x),$$

a fórmula de quadratura (1.13) é interpolatória. Portanto, o erro na interpolação, $E_n(f)$, é nulo pelo menos para todo polinômio de grau menor ou igual a $n - 1$.

Se escolhermos os nós da fórmula de quadratura como sendo os zeros dos polinômios ortogonais de grau n relativamente à medida $\psi(x)$ encontra-se precisão maior.

Teorema 1.5. (*Quadratura de Gauss*) Se escolhermos os n nós da fórmula de quadratura como sendo os n zeros $x_{n,j}$ dos polinômios ortogonais com relação à medida $\psi(x)$ e se denotarmos os correspondentes coeficientes de quadratura por $W_{n,j}$, $1 \leq j \leq n$, então para todo polinômio π_{2n-1} de grau menor ou igual a $2n - 1$ temos

$$\int_a^b \pi_{2n-1}(x) d\psi(x) = \sum_{j=1}^n W_{n,j} \pi_{2n-1}(x_{n,j}),$$

onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Os coeficientes $W_{n,j}$ da fórmula de quadratura são positivos e são dados por

$$W_{n,j} = -\frac{k_{n+1}}{k_n p_{n+1}(x_{n,j}) p'_n(x_{n,j})} = \left(\sum_{k=0}^n p_k^2(x_{n,j}) \right)^{-1}. \quad (1.14)$$

Lembrando que $x_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, são os autovalores da matriz de Jacobi J_n dada em (1.12), podemos também calcular os pesos da fórmula de quadratura associada a uma sequência de polinômios ortonormais pela seguinte expressão

$$W_{n,j} = (\gamma_{j,1})^2 \mu_0, \quad (1.15)$$

onde $\gamma_{j,1}$ é a primeira componente do autovetor γ_j normalizado, isto é, $\gamma_j^T \gamma_j = 1$, associado ao autovalor $x_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Polinômios associados aos polinômios ortogonais

Definição 1.4. Dada uma seqüência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ definimos os polinômios associados a $P_n(x)$ por

$$Q_n(x) = \int_a^b \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x} d\psi(t), \quad (1.16)$$

para $n \geq 1$.

Um fato importante é que o grau dos polinômios associados $Q_n(x)$ é $n - 1$ e que eles satisfazem à mesma relação de recorrência dos polinômios ortogonais, ou seja,

$$Q_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})Q_n(x) - \alpha_{n+1}Q_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (1.17)$$

com condições iniciais $Q_0(x) = 0$ e $Q_1(x) = \mu_0$.

1.3 Polinômios núcleos

Assumimos nesta seção que $\phi(x)$ seja uma medida positiva, isto é, satisfaz a Definição 1.1 e os momentos definidos por

$$\mu_n^{(\phi)} = \int_a^b x^n d\phi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

existem. Seja $\{P_n(x)\}$ a seqüência de polinômios ortogonais mônicos com relação a $\phi(x)$.

Definimos agora os momentos dados por

$$\mu_{n,k}^* = \int_a^b (x - k)x^n d\phi(x), \quad k \in \mathbb{R} \quad (1.19)$$

desta maneira podemos observar que

$$\mu_{0,0}^* = \int_a^b x d\phi(x) = \mu_1^{(\phi)},$$

além disso, podemos observar também

$$\begin{aligned} \mu_{n,k}^* &= \int_a^b (x^{n+1} - kx^n) d\phi(x) \\ &= \int_a^b x^{n+1} d\phi(x) - k \int_a^b x^n d\phi(x) = \mu_{n+1}^{(\phi)} - k\mu_n^{(\phi)}. \end{aligned}$$

Seja

$$P_n^*(k; x) = \frac{1}{x - k} \left[P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(k)}{P_n(k)} P_n(x) \right], \quad n \geq 0,$$

com $k \neq x_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ raízes de $P_n(x)$. Assim, o polinômio

$$Q(x) = P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(k)}{P_n(k)} P_n(x),$$

é um polinômio mônico de grau $n + 1$, observando que $Q(k) = 0$, temos, então,

$$P_n^*(k; x) = \frac{1}{x - k} Q(x)$$

é mônico de grau n .

Teorema 1.6. *Se $k \neq x_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ raízes de $P_n(x)$, então a seqüência $\{P_n^*(k; x)\}$ é uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos para (1.19).*

Demonstração: Sabemos que $\{P_n^*(k; x)\}$ é um polinômio mônico de grau n . Logo, usando a equação de (1.19) temos

$$\begin{aligned} \int_a^b (x - k) x^s P_n^*(k; x) d\phi(x) &= \int_a^b (x - k) x^s \frac{1}{x - k} \left(P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(k)}{P_n(k)} P_n(x) \right) d\phi(x) \\ &= \int_a^b x^s P_{n+1}(x) d\phi(x) - \frac{P_{n+1}(k)}{P_n(k)} \int_a^b x^s P_n(x) d\phi(x) \\ &= -\frac{P_{n+1}(k)}{P_n(k)} \int_a^b P_n^2(x) d\phi(x) \delta_{n,s}, \quad 0 \leq s \leq n. \end{aligned}$$

■

1.4 Medidas positivas em intervalos simétricos

Seja $\varphi(x)$ uma medida positiva simétrica num intervalo simétrico $[-b, b]$ e seja também $\{S_n(x)\}_{n=0}^\infty$ seqüência de polinômios ortogonais mônicos com relação a medida positiva $\varphi(x)$, então sabemos que $S_n(-x) = (-1)^n S_n(x)$ e de (1.4) $\beta_n = 0$, logo

$$S_{n+1}(x) = x S_n(x) - \alpha_{n+1} S_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Definição 1.5. *Definimos a medida positiva $\phi(x)$ por*

$$\int_0^{b^2} x^n d\phi(x) = \int_{-b}^b x^{2n} d\varphi(x).$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} S_{2m}(x) &= x^{2m} + s_{2m,2m-2} x^{2m-2} + \dots + s_{2m,2} x^2 + s_{2m,0} \\ &= (x^2)^m + a_{m,m-1} (x^2)^{m-1} + \dots + a_{m,1} x^2 + a_{m,0} \\ &\vdots \\ &= P_m(x^2), \end{aligned}$$

onde $a_{m,j} = s_{2m,2j}$, $j = 0, 1, \dots, m$ e

$$P_m(x) = x^m + a_{m,m-1}x^{m-1} + \dots + a_{m,1}x + a_{m,0}.$$

Similarmente escrevemos

$$\begin{aligned} S_{2m+1}(x) &= x^{2m+1} + s_{2m+1,2m-1}x^{2m-1} + \dots + s_{2m+1,3}x^3 + s_{2m+1,1}x \\ &= x((x^2)^m + b_{m,m-1}(x^2)^{m-1} + \dots + b_{m,1}x^2 + b_{m,0}) \\ &\quad \vdots \\ &= xQ_m(x^2), \end{aligned}$$

onde $b_{m,j} = s_{2m+1,2j+1}$, $j = 0, 1, \dots, m$ e

$$Q_m(x) = x^m + b_{m,m-1}x^{m-1} + \dots + b_{m,1}x + b_{m,0},$$

com $P_m(x)$ e $Q_m(x)$ mônicos.

Como $\int_0^{b^2} \pi(x)d\phi(x) = \int_{-b}^b \pi(x^2)d\varphi(x)$ para todo polinômio $\pi(x)$, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^{b^2} P_m(x)P_n(x)d\phi(x) &= \int_{-b}^b P_m(x^2)P_n(x^2)d\varphi(x) \\ &= \int_{-b}^b S_{2m}(x)S_{2n}(x)d\varphi(x) = k_{2n}\delta_{m,n}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que a sequência $\{P_n(x)\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação à medida $\phi(x)$.

Usando a relação (1.19) com $k = 0$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^{b^2} xQ_m(x)Q_n(x)d\phi(x) &= \int_{-b}^b x^2Q_m(x^2)Q_n(x^2)d\varphi(x) \\ &= \int_{-b}^b xQ_m(x^2)xQ_n(x^2)d\varphi(x) \\ &= \int_{-b}^b S_{2m+1}(x)S_{2n+1}(x)d\varphi(x) = k_{2n+1}\delta_{m,n}. \end{aligned}$$

Daí concluímos que a sequência de polinômios ortogonais $\{Q_n(x)\} = \{P_n^*(0; x)\}$.

Como $S_n(-x) = (-1)^n S_n(x)$, então o verdadeiro intervalo de ortogonalidade para a medida $\varphi(x)$ é da forma $[-\xi, \xi]$, pois se $\bar{x}$ for um zero de $S_n(x)$ então $S_n(-\bar{x}) = (-1)^n S_n(\bar{x}) = 0$, assim concluímos que os zeros são simétricos em relação à origem.

Sabemos que $P_m(x^2) = S_{2m}(x)$ então os zeros de $P_m(x)$ são sempre positivos, logo o verdadeiro intervalo de ortogonalidade para a medida ϕ é $[\xi_1, \xi^2]$, com $\xi_1 \geq 0$ e $0 < \xi^2 \leq \infty$.

Por outro lado, seja $\phi(x)$ uma medida positiva em um intervalo $[0, b^2]$.

Definição 1.6. Definamos para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ a medida positiva $\varphi(x)$ num intervalo simétrico $[-b, b]$ por

$$\int_{-b}^b x^{2n} d\varphi(x) = \int_0^{b^2} x^n d\phi(x)$$

$$\int_{-b}^b x^{2n+1} d\varphi(x) = 0.$$

Sejam $S_{2m}(x) = P_m(x^2)$ e $S_{2m+1}(x) = xQ_m(x^2)$, com $m = 0, 1, 2, \dots$, onde a sequência $\{P_n(x)\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais mônicos para a medida $\phi(x)$ e $Q_n(x) = P_n^*(0; x)$.

Assim

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b S_{2n}(x) S_{2m}(x) d\varphi(x) &= \int_{-b}^b \sum_{j=0}^n s_{2n,2j}(x^2)^j \sum_{i=0}^m s_{2m,2i}(x^2)^i d\varphi(x) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m s_{2n,2j} s_{2m,2i} \int_{-b}^b x^{2(j+i)} d\varphi(x) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m a_{n,j} a_{m,i} \int_0^{b^2} x^{j+i} d\phi(x) \\ &= \int_0^{b^2} P_n(x) P_m(x) d\phi(x) = L_n \delta_{m,n}, \end{aligned}$$

e, ainda

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b S_{2n}(x) S_{2m+1}(x) d\varphi(x) &= \int_{-b}^b \sum_{j=0}^n s_{2n,2j}(x^2)^j \sum_{i=0}^m s_{2m+1,2i+1} x^{2i+1} d\varphi(x) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m s_{2n,2j} s_{2m+1,2i+1} \int_{-b}^b x^{2(j+i)+1} d\varphi(x) = 0. \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b S_{2n+1}(x) S_{2m+1}(x) d\varphi(x) &= \int_{-b}^b \sum_{j=0}^n s_{2n+1,2j+1} x^{2j+1} \sum_{i=0}^m s_{2m+1,2i+1} x^{2i+1} d\varphi(x) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m s_{2n+1,2j+1} s_{2m+1,2i+1} \int_{-b}^b x^{2(j+i)+1} d\varphi(x) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m a_{n,j} a_{m,i} \int_0^{b^2} x^{j+i+1} d\phi(x) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m a_{n,j} a_{m,i} \int_0^{b^2} x x^{j+i} d\phi(x) \\ &= \int_a^b x Q_n(x) Q_m(x) d\phi(x) = L_n^* \delta_{m,n}. \end{aligned}$$

Podemos, então, formalizar estes resultados no seguinte teorema:

Teorema 1.7. *Se $\phi(x)$ e $\varphi(x)$ são duas medidas relacionadas por*

$$\int_{-b}^b x^{2n} d\varphi(x) = \int_0^{b^2} x^n d\phi(x)$$

$$\int_{-b}^b x^{2n+1} d\varphi(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sejam $\{P_n(x)\}$, $\{Q_n(x)\}$ e $\{S_n(x)\}$ dados por

$$S_{2m}(x) = P_m(x^2) \quad S_{2m+1}(x) = xQ_m(x^2).$$

Então, $\{S_m(x)\}$ é uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos para $\varphi(x)$ se, e somente se, $\{P_m(x)\}$ é uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos para $\phi(x)$ e a seqüência $\{Q_n(x)\} = \{P_n^(0; x)\}$.*

1.5 Relações de recorrência relacionadas

Aqui estudamos os coeficientes das relações de recorrência satisfeitas pelas três seqüências de polinômios ortogonais da seção anterior. Suponhamos que as relações de recorrência satisfeitas por $\{P_n(x)\}$, $\{Q_n(x)\}$ e $\{S_n(x)\}$, respectivamente, são

$$P_{n+1}(x) = (x - c_{n+1})P_n(x) - b_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.20)$$

onde $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$, $b_n \neq 0$, $b_1 = \mu_0^{(\phi)}$,

$$Q_{n+1}(x) = (x - d_{n+1})Q_n(x) - \zeta_{n+1}Q_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.21)$$

onde $Q_{-1}(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$, $\zeta_n \neq 0$, $\zeta_1 = \mu_{0,0}^*$ e $Q_n(x) = P_n^*(0; x)$,

$$S_{n+1}(x) = xS_n(x) - \alpha_{n+1}S_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

onde $S_{-1}(x) = 0$, $S_0(x) = 1$, $\alpha_n \neq 0$, $\alpha_1 = \mu_0^{(\varphi)}$.

Tomando $n + 1 = 2m$ em (1.22) temos

$$S_{2m}(x) = xS_{2m-1}(x) - \alpha_{2m}S_{2m-2}(x), \quad m = 1, 2, \dots,$$

mas, isto é equivalente a

$$P_m(x^2) = x^2Q_{m-1}(x^2) - \alpha_{2m}P_{m-1}(x^2), \quad m \geq 1,$$

onde, fazendo $x^2 = x$, obtemos

$$P_m(x) = xQ_{m-1}(x) - \alpha_{2m}P_{m-1}(x), \quad m \geq 1. \quad (1.23)$$

Similarmente, em (1.22) fazendo $n + 1 = 2m + 1$, $m \geq 0$ temos

$$S_{2m+1}(x) = xS_{2m}(x) - \alpha_{2m+1}S_{2m-1}(x), \quad m \geq 0,$$

que é equivalente a

$$xQ_m(x^2) = xP_m(x^2) - \alpha_{2m+1}xQ_{m-1}(x^2), \quad m \geq 0,$$

onde, fazendo $x^2 = x$, obtemos

$$Q_m(x) = P_m(x) - \alpha_{2m+1}Q_{m-1}(x), \quad m \geq 0. \quad (1.24)$$

De (1.24) obtemos

$$P_m(x) = Q_m(x) + \alpha_{2m+1}Q_{m-1}(x), \quad m \geq 0, \quad (1.25)$$

daí substituindo em (1.23) temos

$$\begin{aligned} Q_m(x) + \alpha_{2m+1}Q_{m-1}(x) &= xQ_{m-1}(x) - \alpha_{2m}P_{m-1}(x) \\ &= xQ_{m-1}(x) - \alpha_{2m}[Q_{m-1}(x) + \alpha_{2m-1}Q_{m-2}(x)] \end{aligned}$$

e, então

$$Q_m(x) = Q_{m-1}(x)[x - \alpha_{2m} - \alpha_{2m+1}] - \alpha_{2m-1}\alpha_{2m}Q_{m-2}(x), \quad m \geq 1. \quad (1.26)$$

Daí tomando $m = n + 1$ em (1.26) obtemos

$$Q_{n+1}(x) = [x - (\alpha_{2n+2} + \alpha_{2n+3})]Q_n(x) - (\alpha_{2n+1}\alpha_{2n+2})Q_{n-1}(x), \quad n \geq 0. \quad (1.27)$$

Similarmente usando o fato de que

$$xP_m(x) = xQ_m(x) + \alpha_{2m+1}xQ_{m-1}(x), \quad m \geq 1$$

de (1.25) temos

$$\begin{aligned} xP_m(x) &= P_{m+1}(x) + \alpha_{2m+2}P_m(x) + \alpha_{2m+1}(P_m(x) + \alpha_{2m}P_{m-1}(x)) \\ P_{m+1}(x) &= P_m(x)[x - (\alpha_{2m+2} + \alpha_{2m+1})] - \alpha_{2m}\alpha_{2m+1}P_{m-1}(x), \end{aligned}$$

logo

$$P_{n+1}(x) = [x - (\alpha_{2n+1} + \alpha_{2n+2})]P_n(x) - (\alpha_{2n}\alpha_{2n+1})P_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (1.28)$$

com

$$P_1(x) = (x - \alpha_2)P_0(x)$$

que vem de (1.23) quando $m = 1$.

Agora, comparando os coeficientes de (1.20) e (1.21) com os coeficientes em (1.27) e (1.28) encontramos as relações desejadas

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha_2, & c_{n+1} &= \alpha_{2n+1} + \alpha_{2n+2}, & b_{n+1} &= \alpha_{2n}\alpha_{2n+1}, & n &\geq 1 \\ d_{n+1} &= \alpha_{2n+2} + \alpha_{2n+3}, & n &\geq 0, & \zeta_{n+1} &= \alpha_{2n+1}\alpha_{2n+2}, & n &\geq 1. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Observemos que se introduzirmos $\alpha_0 = 1$, então

$$\begin{aligned} b_1 &= \mu_0^{(\phi)} = \mu_0^{(\varphi)} = \alpha_1\alpha_0 \\ \zeta_1 &= \mu_{0,0}^* = \int_a^b x d\phi(x). \end{aligned}$$

Mas sabemos que $x = P_1(x) + \alpha_2$, daí

$$\zeta_1 = \int_a^b (P_1(x) + \alpha_2) d\phi(x) = \alpha_2 \int_a^b d\phi(x) = \alpha_2\alpha_1.$$

1.6 Frações contínuas

Seja $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ seqüências arbitrárias de números complexos, reais ou funções, uma fração contínua é uma expressão da forma

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}},$$

para simplificar, vamos utilizar a seguinte notação

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} + \cdots. \quad (1.30)$$

Consideremos a sequência $\{C_n\}$ construída da seguinte forma

$$\begin{aligned} C_0 &= b_0 \\ C_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\ C_2 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \\ &\vdots \\ C_n &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

C_n é chamado de n -ésimo convergente (aproximante) da fração contínua (1.30), já C_{2i} é chamado aproximante de ordem par da fração contínua (1.30), enquanto que, C_{2i+1} é chamado aproximante de ordem ímpar da fração contínua (1.30).

Podemos observar que é possível que alguns convergentes sejam indefinidos, mas temos condições de decidir se uma fração contínua é convergente.

Definição 1.7. *Uma fração contínua é convergente para um valor finito K , se no máximo um número finito de convergentes forem indefinidos e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = K.$$

Caso contrário, dizemos que a fração contínua diverge.

Fórmulas de recorrência

De (1.31), podemos escrever

$$C_n = \frac{A_n}{B_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0, & B_0 &= 1, \\ A_1 &= b_0 b_1 + a_1, & B_1 &= b_1, \\ A_2 &= b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2, & B_2 &= b_1 b_2 + a_2, \end{aligned}$$

e em geral, A_n e B_n são polinômios em a_j, b_j .

Notemos que podemos escrever

$$\begin{aligned} A_2 &= b_2 A_1 + a_2 A_0 \\ B_2 &= b_2 B_1 + a_2 B_0 \end{aligned}$$

assim, por indução finita, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 1.8. *O convergente $C_n = \frac{A_n}{B_n}$, $n \geq 1$ da fração contínua (1.31) satisfazem*

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

para $n \geq 1$ onde $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$, $B_{-1} = 0$ e $B_0 = 1$.

Os valores A_n e B_n são chamados, respectivamente, de n -ésimo numerador parcial e n -ésimo denominador parcial da fração contínua (1.31).

As equações (1.32), conhecidas como fórmulas de Wallis, fornecem uma ligação direta entre polinômios ortogonais e frações contínuas.

Podemos mostrar esta ligação da seguinte maneira. Consideremos

$$b_0 = 0, \quad a_1 = \alpha_1 \neq 0, \quad a_{n+1} = -\alpha_{n+1} \neq 0, \quad b_n = x - \beta_n, \quad n \geq 1,$$

em (1.31). Teremos, assim, a seguinte fração contínua

$$\frac{\alpha_1}{x - \beta_1} - \frac{\alpha_2}{x - \beta_2} - \frac{\alpha_3}{x - \beta_3} - \dots \quad (1.33)$$

com $\alpha_1 = \mu_0$. O n -ésimo denominador parcial $B_n(x)$ dado pela expressão (1.32) é

$$B_n(x) = (x - \beta_n)B_{n-1}(x) - \alpha_n B_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$

com $B_{-1}(x) = 0$ e $B_1(x) = 1$. Logo, os denominadores parciais formam a seqüência de polinômios ortogonais.

Se voltarmos às equações (1.32), notamos que os numeradores parciais $A_n(x)$ da fração contínua (1.33) são dados por

$$A_n(x) = (x - \beta_n)A_{n-1}(x) - \alpha_n A_{n-2}(x),$$

para $n \geq 1$, com $A_{-1}(x) = 1$, $A_0(x) = 0$. Podemos observar que esta relação é a mesma relação de recorrência dos polinômios associados aos polinômios ortogonais. Assim, temos que os numeradores parciais $A_n(x)$ formam seqüência de polinômios associados aos polinômios ortogonais $B_n(x)$.

Capítulo 2

Polinômios de Szegő e polinômios para-ortogonais

Neste capítulo são estudados os polinômios ortogonais no círculo unitário, também conhecidos como polinômios de Szegő, onde apresentamos e exploramos alguns resultados envolvendo estes polinômios. Estudamos a relação existente entre os polinômios de Szegő e as frações contínuas de Perron-Carathéodory. Os principais resultados podem ser encontrados em Van Assche e outros [21]. Também estudamos aqui os polinômios para-ortogonais que foram inicialmente estudados por Jones e outros [10], uma propriedade importante desses polinômios é que suas raízes são simples e estão contidas no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

2.1 Polinômios de Szegő

Para um par de números inteiros (p, q) , $p \leq q$, denotamos por $\Lambda_{p,q}$ o espaço das funções definidas por

$$L(z) = \sum_{k=p}^q c_k z^k, \quad z, c_k \in \mathbb{C}.$$

Estas funções são conhecidas por polinômios de Laurent (L-polinômios). O espaço de todos os L-polinômios será denotado por Λ , notemos que $\mathbb{P}_n = \Lambda_{0,n}$.

Definição 2.1. *Uma função $\psi(z)$ é uma medida positiva no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ quando $\psi(e^{i\theta})$, definida em $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é uma função real, limitada e não decrescente com infinitos pontos de aumento tal que os momentos (trigonométricos)*

$$\mu_n = \int_{\mathcal{C}} z^n d\psi(z) = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

existem (são finitos).

Com a medida $\psi(z)$, definimos um funcional integral

$$I_\psi[f(e^{i\theta})] = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}), \quad f \in \Lambda.$$

Deste funcional definimos o produto interno

$$\langle f, g \rangle_\psi = I_\psi[f(e^{i\theta})\bar{g}(e^{-i\theta})] = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\bar{g}(e^{-i\theta}) d\psi(e^{i\theta}), \quad f, g \in \Lambda. \quad (2.1)$$

Agora observemos que

$$\bar{\mu}_{-n} = \int_0^{2\pi} \overline{e^{-in\theta}} d\psi(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Consideremos as seqüências $\{\mu_n\}_{-\infty}^\infty$ que satisfazem $\mu_n = \bar{\mu}_{-n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Correspondente a esta seqüência definimos a matriz de Toeplitz, T_n , por

$$T_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \dots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \dots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \dots & \mu_0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

e o seguinte produto interno em $\Lambda \times \Lambda$, por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{C}} f(z)\bar{g}(1/z) d\psi(z), \quad f, g \in \Lambda. \quad (2.3)$$

Imediatamente das definições de produto interno e da seqüência $\{\mu_n\}$ decorre que

- $\langle \alpha(f + g), \beta h \rangle = \alpha\bar{\beta}\langle f, h \rangle + \alpha\bar{\beta}\langle g, h \rangle,$
- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle},$

para $f, g, h \in \Lambda$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Além disso,

$$\langle f, f \rangle = \int_{\mathcal{C}} f(z)\bar{f}(1/z) d\psi(z) = \sum_{k,j=-n}^n c_j \bar{c}_k \mu_{k-j}, \quad \text{se } f(z) = \sum_{j=-n}^n c_j z^j. \quad (2.4)$$

Correspondente a seqüência $\{\mu_n\}_{-\infty}^\infty$ obtemos o determinante da matriz T_n , que é real, pois T_n é hermitiana, ou seja, $T_n = \bar{T}_n^t = T_n^H$, pois $\mu_{k-j} = \bar{\mu}_{j-k}$. Este determinate é chamado determinante de Toeplitz, Δ_n , definido por

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

com $\Delta_{-1} = 1$.

Definição 2.2. Uma seqüência $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números complexos é chamada hermitiana se

$$\mu_n = \bar{\mu}_{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Além disso, se

$$\Delta_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

a seqüência é chamada hermitiana positiva-definida.

Quando $\Delta_n \neq 0$, definimos como seqüência de polinômios ortogonais mônicos com relação à medida $\psi(z)$ os polinômios, $\rho_n(z)$, que satisfazem

$$\langle \rho_n, z^m \rangle = \begin{cases} 0, & m = 0, 1, \dots, n-1, \\ \sigma_n \neq 0, & m = n. \end{cases} \quad (2.6)$$

Esta seqüência também é conhecida como seqüência de polinômios de Szegő com relação à medida $\psi(z)$.

Consideremos $\rho_n(z) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} z^k$ com $c_{n,n} = 1$. Portanto, para $m = 0, 1, \dots, n-1$, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n,0} \\ c_{n,1} \\ \vdots \\ c_{n,n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho_n(z) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Resolvendo pelo método de Cramer, temos

$$\rho_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1 \text{ e } \rho_0(z) = 1. \quad (2.8)$$

Para determinarmos o valor de σ_n , devemos substituímos em (2.7) a última linha por $\langle \rho_n, z^n \rangle = \sigma_n$, obtemos assim,

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n,0} \\ c_{n,1} \\ \vdots \\ c_{n,n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_n \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Portanto, novamente usando a regra de Cramer temos

$$1 = \frac{\Delta_{n-1}\sigma_n}{\Delta_n} \implies \sigma_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Consideremos o polinômio $r_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ de grau no máximo n , definimos o seu polinômio recíproco por

$$r_n^*(z) = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k z^{n-k} = z^n \bar{r}_n(1/z),$$

onde $\bar{r}_n(z)$ é o próprio $r_n(z)$ com os coeficientes conjugados.

Observemos que para $z \in \mathbb{C}$, podemos escrever

$$r_n^*(z) = z^n \overline{r_n(1/\bar{z})},$$

neste caso conjugamos os coeficientes e a variável de r_n .

Notemos que substituindo $z = 1/\bar{z}$ e conjugando os momentos na expressão (2.8), obtemos

$$\bar{\rho}_n(1/z) = \frac{1}{\bar{\Delta}_{n-1}} \begin{vmatrix} \bar{\mu}_0 & \bar{\mu}_{-1} & \cdots & \bar{\mu}_{-n} \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_0 & \cdots & \bar{\mu}_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mu}_{n-1} & \bar{\mu}_{n-2} & \cdots & \bar{\mu}_{-1} \\ 1 & 1/z & \cdots & 1/z^n \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Se multiplicarmos a expressão acima por z^n e lembrando que a sequência de momentos é hermitiana, obtemos, então, que

$$\rho_n^*(z) = z^n \bar{\rho}_n(1/z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \dots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \dots & \mu_1 \\ z^n & z^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad n \geq 1 \quad e \quad \rho_0^*(z) = 1. \quad (2.11)$$

Usando a definição (2.3) juntamente com a definição de polinômio recíproco, temos

$$\langle \rho_n^*(z), z^m \rangle = \langle z^n \bar{\rho}_n(1/z), z^m \rangle = \int_{\mathcal{C}} z^n \bar{\rho}_n(1/z) \overline{z^m} d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} z^{n-m} \bar{\rho}_n(1/z) d\psi(z) = \langle z^{n-m}, \rho_n(z) \rangle.$$

Da expressão acima podemos notar que ela é nula para $m = 1, 2, \dots, n$, e para $m = 0$ temos

$$\langle \rho_n^*(z), 1 \rangle = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Resumidamente, temos os seguintes resultados

$$\langle \rho_n(z), z^m \rangle = \begin{cases} 0, & m = 0, 1, \dots, n-1, \\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, & m = n. \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\langle \rho_n^*(z), z^m \rangle = \begin{cases} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, & m = 0, \\ 0, & m = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.13)$$

Seja $\delta_n \in \mathbb{C}$ dado por

$$\delta_0 = \mu_0 \quad e \quad \delta_n = \rho_n(0), \quad n = 1, 2, \dots,$$

o coeficiente δ_n é chamado de coeficiente de reflexão e será extremamente importante em nosso estudo.

Obtemos por (2.8), que

$$\delta_n = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \dots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \dots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \dots & \mu_{-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_{-1} & \mu_{-2} & \dots & \mu_{-n} \\ \mu_0 & \mu_{-1} & \dots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-2} & \mu_{n-3} & \dots & \mu_{-1} \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Teorema 2.1. *Os polinômios de Szegő mônicos satisfazem as seguintes relações*

$$\rho_n^*(z) = \bar{\delta}_n z \rho_{n-1}(z) + \rho_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1, \quad (2.15)$$

$$\rho_n(z) = \delta_n \rho_n^*(z) + (1 - |\delta_n|^2) z \rho_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.16)$$

com as condições iniciais

$$\rho_0(z) = 1, \quad \rho_0^*(z) = 1.$$

Se $\rho_n(0) \neq 0$, $n \geq 1$, então de (2.16) resulta que estes polinômios também satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$\rho_{n+1}(z) = (z + \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}) \rho_n(z) - \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} (1 - |\delta_n|^2) z \rho_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.17)$$

com $\rho_0(z) = 1$ e $\rho_1(z) = z + \delta_1$.

De fato, das relações (2.15) e (2.16) temos

$$\begin{aligned} \delta_n \rho_n^*(z) &= \rho_n(z) - (1 - |\delta_n|^2) z \rho_{n-1}(z) \\ \rho_n^*(z) &= \frac{\rho_n(z)}{\delta_n} - \frac{(1 - |\delta_n|^2)}{\delta_n} z \rho_{n-1}(z) \end{aligned}$$

mas como

$$\rho_{n+1}(z) = z \rho_n(z) + \delta_{n+1} \rho_n^*(z) = z \rho_n(z) + \delta_{n+1} \left[\frac{\rho_n(z)}{\delta_n} - \frac{(1 - |\delta_n|^2)}{\delta_n} z \rho_{n-1}(z) \right],$$

temos

$$\rho_{n+1}(z) = (z + \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}) \rho_n(z) - \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} (1 - |\delta_n|^2) z \rho_{n-1}(z),$$

desde que $\rho_n(0) \neq 0$, $n \geq 1$.

Teorema 2.2. *Sejam Δ_n o determinante de Toeplitz (2.5) com $\Delta_n \neq 0$ e $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência definida por*

$$\delta_0 = \mu_0, \quad \delta_n = \rho_n(0), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Então, $\delta_0 \neq 0$ e, para $n \geq 1$,

$$\delta_n = -\frac{\langle z \rho_{n-1}(z), 1 \rangle}{\langle \rho_{n-1}^*(z), 1 \rangle} \quad (2.18)$$

e

$$1 - |\delta_n|^2 = -\frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} \neq 0. \quad (2.19)$$

Quando a sequência $\{\mu_n\}$ é hermitiana positiva-definida, isto é, quando $\Delta_n > 0$, os zeros dos polinômios de Szegő $\rho_n(z)$ estão todos no disco unitário aberto $|z| < 1$, enquanto que os zeros do recíproco $\rho_n^*(z)$ estão em $|z| > 1$.

2.2 HPC-fração

Aqui, definimos as frações contínuas de Perron-Carathéodory hermitianas. Os principais resultados podem ser encontrados em Jones e outros [10].

Uma fração contínua de Perron-Carathéodory hermitiana (HPC-Fração) é uma expressão do tipo

$$\delta_0 - \frac{2\delta_0}{1} + \frac{1}{\bar{\delta}_1 z} + \frac{(1 - |\delta_1|^2)z}{\delta_1} + \dots + \frac{1}{\bar{\delta}_n z} + \frac{(1 - |\delta_n|^2)z}{\delta_n} + \dots, \quad (2.20)$$

onde $\delta_n \in \mathbb{C}$ satisfazem

$$\delta_0 \neq 0, \quad |\delta_n| \neq 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Se δ_n satisfazem

$$\delta_0 > 0, \quad |\delta_n| < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

então a fração (2.20) é chamada fração contínua de Perron-Carathéodory positiva (PPC-Fração). Comparando seus coeficientes com os coeficientes da fração contínua (1.30), obtemos

$$b_0 = \delta_0, \quad a_1 = -2\delta_0, \quad b_1 = 1.$$

Em seguida,

$$a_{2n} = 1, \quad a_{2n+1} = (1 - |\delta_n|^2), \quad b_{2n} = \bar{\delta}_n z, \quad b_{2n+1} = \delta_n,$$

$n = 1, 2, \dots$. Continuando a compararmos com (1.32), podemos obter relações de recorrência para os numeradores e denominadores dos convergentes das frações contínuas de Perron-Carathéodory

$$\begin{aligned} P_{2n}(z) &= \bar{\delta}_n z P_{2n-1}(z) + P_{2n-2}(z), \\ Q_{2n}(z) &= \bar{\delta}_n z Q_{2n-1}(z) + Q_{2n-2}(z), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(z) &= \delta_n P_{2n}(z) + (1 - |\delta_n|^2)z P_{2n-1}(z), \\ Q_{2n+1}(z) &= \delta_n Q_{2n}(z) + (1 - |\delta_n|^2)z Q_{2n-1}(z), \end{aligned} \quad (2.22)$$

com condições iniciais

$$P_0(z) = \delta_0, \quad P_1(z) = -\delta_0, \quad Q_0(z) = 1, \quad Q_1(z) = 1. \quad (2.23)$$

Definição 2.3. Uma sequência de números complexos $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ é chamada quase- N -definida (positiva- N -definida) se

$$\Delta_n \neq 0 \quad (\Delta_n > 0) \quad \text{para} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{e} \quad \Delta_N = 0.$$

A seqüência $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dá origem a matriz de Toeplitz T_N e ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(N)}$ definido em $\Lambda_{-N,N} \times \Lambda_{-N,N}$, respectivamente por

$$T_N = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-N} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_N & \mu_{N-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

e

$$\langle f, g \rangle_{(N)} = \int_{\mathcal{C}} f(z) \bar{g}(1/z) d\psi_N(z), \quad f, g \in \Lambda_{-N,N}. \quad (2.25)$$

A seqüência finita $\{\rho_n\}_{n=0}^N$ de polinômios ortogonais e seus recíprocos $\{\rho_n^*\}_{n=0}^N$ são dadas por (2.8) e (2.11). Notemos que

$$\langle \rho_n, \rho_n \rangle_{(N)} = \langle \rho_n, z^n \rangle_{(N)} = \langle \rho_n^*, 1 \rangle_{(N)} = \frac{\Delta_N}{\Delta_{N-1}} = 0$$

e

$$\langle \rho_n^*, \rho_n^* \rangle_{(N)} = \langle z^n \bar{\rho}_n(1/z), z^n \bar{\rho}_n(1/z) \rangle_{(N)} = \langle \rho_n, \rho_n \rangle_{(N)} = 0.$$

A restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(N)}$ à $\Lambda_{-(N-1),(N-1)} \times \Lambda_{-(N-1),(N-1)}$ é um produto interno se a seqüência $\{\mu_n\}$ é positiva- N -definida.

Definimos o convergente N -truncado de uma HPC-fração por

$$\delta_0 - \frac{2\delta_0}{1} + \frac{1}{\bar{\delta}_1 z} + \frac{(1 - |\delta_1|^2)z}{\delta_1} + \cdots + \frac{(1 - |\delta_{N-1}|^2)z}{\delta_{N-1}} + \frac{1}{\bar{\delta}_N z}, \quad (2.26)$$

onde

$$\delta_0 \neq 0, \quad |\delta_n| \neq 1 \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{e} \quad |\delta_N| = 1.$$

O convergente N -truncado é positivo- N -definido se

$$\delta_0 > 0, \quad |\delta_n| < 1 \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{e} \quad |\delta_N| = 1.$$

2.3 Funções de Carathéodory normalizadas

Nesta seção apresentaremos um resultado que nos permitirá relacionar o problema de análise de freqüências com os polinômios de Szegő, através da relação que existe entre as funções de Carathéodory normalizadas e as PPC-frações. Definimos a classe C de funções de Carathéodory normalizadas por

$$C := [f : f \text{ é analítica, } \operatorname{Re}(f(z)) > 0 \text{ para } |z| < 1 \text{ e } f(0) > 0].$$

Agora, seja C_N a classe de todas as funções racionais da forma

$$f(z) = \sum_{m=1}^N \lambda_m \frac{e^{i\theta_m} + z}{e^{i\theta_m} - z}, \quad (2.27)$$

com $N \in \mathbb{N}$, onde

$$\lambda_m > 0, \quad \text{para } 1 \leq m \leq N \quad \text{e} \quad -\pi < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N < \pi,$$

notemos que esta função é uma função de Carathéodory normalizada.

As PPC-frações estão relacionadas com funções de Carathéodory normalizadas como veremos no próximo teorema. Este resultado encontra-se em [10].

Teorema 2.3. *Seja N um número natural. Então, as seguintes sentenças são equivalentes.*

I) $f \in C_N$;

II) existe uma seqüência hermitiana positiva- N -definida $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ tal que

$$f(z) = \mu_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k, \quad |z| < 1; \quad (2.28)$$

III) existe uma função $\psi(e^{i\theta})$ limitada, não decrescente em $[0, 2\pi]$ com infinitos pontos de aumento tal que

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi(e^{i\theta}), \quad |z| < 1. \quad (2.29)$$

IV) existe um convergente N -truncado de uma PPC-fração

$$\frac{P_{2N}(z)}{Q_{2N}(z)} = \delta_0 - \frac{2\delta_0}{1} + \frac{1}{\bar{\delta}_1 z} + \frac{(1 - |\delta_1|^2)z}{\delta_1} + \dots + \frac{1}{\bar{\delta}_N z} \quad (2.30)$$

tal que

$$f(z) = \frac{P_{2N}(z)}{Q_{2N}(z)}. \quad (2.31)$$

2.4 Polinômios para-ortogonais

Nesta seção, estudaremos polinômios obtidos primeiramente por Jones e outros [10], que são polinômios da forma

$$Y_n(w, z) = \rho_n(z) + w\rho_n^*(z), \quad n \geq 1, \quad w \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad |w| = 1.$$

Nossos estudos foram baseados em resultados obtidos em [10].

Uma sequência de polinômios $\{Y_n\}$ é chamada de sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida $\psi(z)$ se, para $n \geq 0$, Y_n é um polinômio de grau n que satisfaz

$$\begin{aligned}\langle Y_n, 1 \rangle &\neq 0, \\ \langle Y_n, z^m \rangle &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \\ \langle Y_n, z^n \rangle &\neq 0.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Estes são chamados de para-ortogonais, pois, diferentemente dos polinômios ortogonais, satisfazem $\langle Y_n, 1 \rangle \neq 0$.

Para $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$, um polinômio Y é chamado k -invariante se

$$Y^*(w, z) = kY(w, z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

A sequência $\{Y_n\}$ é k_n -invariante se, para cada n , Y_n é k_n -invariante. Observemos que para cada $n \geq 0$, temos que o polinômio de Szegő ρ_n não é k_n -invariante. De fato, supondo que seja temos, $\rho_n^*(z) = k\rho_n(z)$ para algum $k \neq 0$, $n \geq 0$, daí $\rho_n(z) = \bar{k}\rho_n^*(z)$. Lembrando que ρ_n é mônico e, então, $\rho_n^*(0) = 1$, obtemos

$$1 = \rho_n^*(0) = k\rho_n(0) = k\delta_n \quad e \quad \delta_n = \rho_n(0) = \bar{k}\rho_n^*(0) = \bar{k},$$

o que implica em $|\delta_n| = 1$, o que é uma contradição.

Podemos obter sequências $\{k_n\}$ invariantes de polinômios para-ortogonais tomando funções da forma

$$Y_n(w_n, z) = \rho_n(z) + w_n\rho_n^*(z), \quad z, \quad w_n \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \dots\tag{2.33}$$

Observe que fazendo o produto interno de $Y_n(w_n, z)$ e z^m para $m = 0, 1, \dots, n$ temos

$$\begin{aligned}\langle Y_n(w_n, z), z^m \rangle &= \langle \rho_n(z) + w_n\rho_n^*(z), z^m \rangle \\ &= \langle \rho_n(z), z^m \rangle + w_n\langle \rho_n^*(z), z^m \rangle,\end{aligned}$$

daí utilizando as relações de ortogonalidade (2.12) e (2.13) concluímos que

$$\langle Y_n(w_n, z), z^m \rangle = \begin{cases} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \neq 0, & \text{para } m = 0 \text{ e } m = n, \\ 0, & \text{para } m = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases}\tag{2.34}$$

Portanto, $Y_n(w_n, z)$ satisfaz à definição de polinômio para-ortogonal com relação à medida $\psi(z)$.

Raízes dos polinômios para-ortogonais

Como citamos no início desse capítulo as raízes dos polinômios para-ortogonais possuem uma propriedade bastante interessante que será utilizada neste trabalho e dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.4. *Seja $\{Y_n\}$ uma seqüência $\{k_n\}$ -invariante de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida positiva $\psi(z)$. Então, para cada $n \geq 1$, os n zeros de Y_n são simples e estão no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Demonstração: Para $n \geq 1$ temos

$$Y_n(w_n, z) = d_0 + d_1 z + \dots + d_n z^n, \quad d_n \neq 0, \quad d_k \in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

e

$$Y_n^*(w_n, z) = \bar{d}_0 z^n + \bar{d}_1 z^{n-1} + \dots + \bar{d}_n = k_n Y_n(w_n, z), \quad k_n \neq 0.$$

Notemos que

$$d_0 = Y_n(w_n, 0) = k_n^{-1} Y_n^*(w_n, 0) = \frac{\bar{d}_n}{k_n} \neq 0.$$

Consideremos $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$ as raízes de multiplicidade ímpar de $Y_n(w_n, z)$ em $\mathcal{C}$, contadas com suas multiplicidades. Se não existem tais raízes, então $p = 0$, caso contrário, $1 \leq p \leq n$. Para demonstrar o teorema é suficiente mostrar que $p = n$.

Se β é uma raiz de $Y_n(w_n, z)$ que não está em $\mathcal{C}$, então, como $Y_n(w_n, z)$ é k_n -invariante, $1/\bar{\beta}$ é uma raiz de $Y_n(w_n, z)$ e $1/\bar{\beta}$ também não está em $\mathcal{C}$. Assim, as raízes de $Y_n(w_n, z)$ que não pertencem a $\mathcal{C}$ ocorrem aos pares $(\beta, 1/\bar{\beta})$.

Se β é uma raiz de $Y_n(w_n, z)$ em $\mathcal{C}$, então $\beta = 1/\bar{\beta}$. Existem, assim, um número par de raízes de $Y_n(w_n, z)$ em $\mathcal{C}$, mas que não estão no conjunto $[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p]$. Segue, então, que as raízes de $Y_n(w_n, z)$ que não estão em $[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p]$ ocorrem aos pares $(\beta, 1/\bar{\beta})$. Denotemos agora todas as raízes que ocorrem aos pares $(\beta, 1/\bar{\beta})$ pelos $2q$ números

$$\beta_1, \frac{1}{\bar{\beta}_1}, \beta_2, \frac{1}{\bar{\beta}_2}, \dots, \beta_q, \frac{1}{\bar{\beta}_q},$$

que podem estar em $\mathcal{C}$ ou não. Se não existem tais raízes, tomamos $q = 0$. Claramente $p + 2q = n$. Como $Y_n(w_n, 0) \neq 0$, temos que $\beta_j \neq 0$ para $j = 1, 2, \dots, q$. Sejam os polinômios

$$A(z) = \begin{cases} (z - \pi_1)(z - \pi_2) \dots (z - \pi_p), & \text{se } p \geq 1, \\ 1, & \text{se } p = 0, \end{cases}$$

$$B(z) = \begin{cases} (z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_q), & \text{se } q \geq 1, \\ 1, & \text{se } q = 0, \end{cases}$$

e

$$C(z) = z^q A(z).$$

Agora temos que

$$Y_n(w_n, z) = A(z)B(z) \left(z - \frac{1}{\beta_1}\right) \dots \left(z - \frac{1}{\beta_q}\right).$$

Supondo que $p < n$ e, assim, $q \geq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle Y_n, C \rangle &= \int_{\mathcal{C}} Y_n(w_n, z) \bar{C} \left(\frac{1}{z} \right) d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} A(z)B(z) \left(z - \frac{1}{\beta_1}\right) \dots \left(z - \frac{1}{\beta_q}\right) \bar{A} \left(\frac{1}{z} \right) \frac{1}{z^q} d\psi(z) \\ &= \int_{\mathcal{C}} A(z)B(z) \bar{A} \left(\frac{1}{z} \right) (-1)^q \frac{(1 - \bar{\beta}_1 z) \dots (1 - \bar{\beta}_q z)}{\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q z^q} d\psi(z) \\ &= \frac{(-1)^q}{\beta_1 \dots \beta_q} \int_{\mathcal{C}} A(z)B(z) \bar{A} \left(\frac{1}{z} \right) \bar{B} \left(\frac{1}{z} \right) d\psi(z) = \frac{(-1)^q}{\beta_1 \dots \beta_q} \langle AB, AB \rangle \neq 0. \end{aligned}$$

A desigualdade segue do fato de $\langle AB, AB \rangle > 0$, que é uma consequência de $\psi(z)$ ser positiva. Como $C(z)$ é um polinômio de grau $p + q$ e $\langle Y_n, C \rangle \neq 0$, as condições de para-ortogonalidade implicam que o grau de $C(z)$ é n . Como tomamos $q \geq 1$, isto se torna impossível, pois o grau de $C(z)$ é igual a $p + q$ que é menor do que $p + 2q = n$. Logo, $q = 0$ e então $p = n$. ■

Polinômios para-ortogonais reais

Nesta seção apresentamos alguns resultados, encontrados em [2] e [4]. Quando a medida $\psi(z)$ é simétrica no círculo unitário, isto é, $d\psi(1/z) = -d\psi(z)$, os momentos são todos reais. De fato, como

$$\mu_n = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) = \int_0^\pi e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) + \int_\pi^{2\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}), \quad (2.35)$$

mas

$$\int_\pi^{2\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) = \int_{-\pi}^0 e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) = \int_\pi^0 e^{-in\theta} d\psi(e^{-i\theta}).$$

Utilizando a simetria da medida $\psi(e^{i\theta})$, temos que

$$\int_\pi^0 e^{-in\theta} d\psi(e^{-i\theta}) = \int_0^\pi e^{-in\theta} d\psi(e^{i\theta}).$$

Logo,

$$\mu_n = \int_0^\pi e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) + \int_0^\pi e^{-in\theta} d\psi(e^{i\theta}) = 2 \int_0^\pi \cos(n\theta) d\psi(e^{i\theta}), \quad (2.36)$$

onde concluímos que μ_n é real para $n \geq 0$. Disto e de (2.14), vemos que os coeficientes de reflexão são reais e, assim, $-1 < \delta_n < 1$.

Observemos também que (2.36) pode ser dado como

$$\mu_n = \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) d\psi(e^{i\theta}).$$

De fato, como

$$\int_0^\pi \cos(n\theta) d\psi(e^{i\theta}) = \int_{-2\pi}^{-\pi} \cos(n(\tilde{\theta} + 2\pi)) d\psi(e^{i(\tilde{\theta} + 2\pi)}),$$

com $\tilde{\theta} = \theta - 2\pi$, daí

$$\begin{aligned} \int_{-2\pi}^{-\pi} \cos(n\tilde{\theta}) d\psi(e^{i\tilde{\theta}}) &= \int_{2\pi}^\pi \cos(n(-\theta)) d\psi(e^{-i\theta}) \\ &= \int_\pi^{2\pi} \cos(n\theta) d\psi(e^{i\theta}) \end{aligned}$$

logo

$$\mu_n = \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) d\psi(e^{i\theta}). \quad (2.37)$$

Consideremos dois casos especiais de polinômios para-ortogonais reais, quando $w_n = 1$ e $w_n = -1$, denotados respectivamente, por

$$Y_n(1, z) \quad e \quad Y_n(-1, z),$$

notemos que

$$Y_n(-1, z) = \rho_n(z) - \rho_n^*(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n) - (1 - \bar{z}z_1) \dots (1 - \bar{z}z_n),$$

ou seja,

$$Y_n(-1, 1) = 0. \quad (2.38)$$

Logo, $Y_n(-1, z)$ é divisível por $(z - 1)$.

Agora consideremos os seguintes polinômios para-ortogonais mônicos

$$S_n^{(1)}(z) = \frac{Y_n(1, z)}{1 + \rho_n(0)} \quad e \quad S_n^{(-1)}(z) = \frac{Y_n(-1, z)}{1 - \rho_n(0)}.$$

Estes polinômios satisfazem as seguintes relações de recorrência

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= (z + 1)S_n^{(1)}(z) - (1 + \delta_{n-1})(1 - \delta_n)zS_{n-1}^{(1)}(z), \\ S_{n+1}^{(-1)}(z) &= (z + 1)S_n^{(-1)}(z) - (1 - \delta_{n-1})(1 + \delta_n)zS_{n-1}^{(-1)}(z), \end{aligned}$$

para $n \geq 1$, com $S_0^{(1)}(z) = 1$, $\delta_0 = 1$, $S_0^{(-1)}(z) = 1$, $S_1^{(1)}(z) = z + 1$ e $S_1^{(-1)}(z) = z - 1$.

De fato, utilizando as relações de recorrência dos polinômios de Szegő (2.16) obtemos

$$\begin{aligned}
S_{n+1}^{(1)}(z) &= \frac{\rho_{n+1}(z) + \rho_n^*(z)}{1 + \rho_{n+1}(0)} \\
&= \frac{(z\rho_n(z) + \delta_{n+1}\rho_n^*(z)) + (\rho_n^*(z) + \delta_{n+1}z\rho_n(z))}{1 + \delta_{n+1}} \\
&= \frac{((z+1) - 1 + \delta_n z)(1 + \delta_{n+1})\rho_n(z) + ((z+1) - z + \delta_n)(1 + \delta_{n-1})\rho_n^*(z)}{(1 + \delta_n)(1 + \delta_{n-1})} \\
&= (z+1) \left(\frac{\rho_n(z) + \rho_n^*(z)}{1 + \delta_n} \right) - (1 + \delta_{n-1})(1 - \delta_n)z \left(\frac{\rho_{n-1}(z) + \rho_{n-1}^*(z)}{1 + \delta_{n-1}} \right) \\
&= (z+1)S_n^{(1)}(z) - (1 + \delta_{n-1})(1 - \delta_n)zS_n^{(1)}(z).
\end{aligned}$$

Ainda, temos

$$S_0^{(1)}(z) = \frac{\rho_0(z) + \rho_0^*(z)}{1 + \rho_0(0)} = 1$$

e

$$S_1^{(1)}(z) = \frac{\rho_1(z) + \rho_1^*(z)}{1 + \rho_1(0)} = \frac{z(1 + \delta_1) + (1 + \delta_1)}{1 + \delta_1} = z + 1.$$

Analogamente, provamos que $S_n^{(-1)}(z)$ satisfaz à relação de recorrência. Podemos notar de (2.38) que para $n \geq 1$, $S_{n+1}^{(-1)}(1) = 0$.

Agora, definimos duas seqüências de polinômios mônicos

$$R_n^{(1)}(z) = S_n^{(1)}(z) \quad e \quad R_n^{(-1)}(z) = \frac{S_{n+1}^{(-1)}(z)}{(z-1)}, \quad n \geq 0. \quad (2.39)$$

Teorema 2.5. *Os polinômios $R_n^{(1)}(z)$ e $R_n^{(-1)}(z)$ definidos por (2.39) e os polinômios de Szegő $\rho_n(z)$ satisfazem à seguinte relação (ver [2],)*

$$2z\rho_{n-1}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(-1)}(z). \quad (2.40)$$

Teorema 2.6. *Os polinômios mônicos $R_n^{(i)}(z)$ ($i = 1, -1$) com condições iniciais $R_0^{(i)}(z) = 1$ e $R_1^{(i)}(z) = z + 1$ e ainda,*

$$4\alpha_{n+1}^{(1)} = (1 + \delta_{n-1})(1 - \delta_n) \quad e \quad 4\alpha_{n+1}^{(-1)} = (1 - \delta_n)(1 + \delta_{n+1}),$$

satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)R_n^{(i)}(z) - 4\alpha_{n+1}^{(i)}zR_{n-1}^{(i)}(z). \quad (2.41)$$

Demonstração: Como $R_n^{(1)}(z) = S_n^{(1)}(z)$ e $R_n^{(-1)}(z) = \frac{S_{n+1}^{(-1)}(z)}{z-1}$, logo para provarmos as relações (2.41) basta tomarmos

$$4\alpha_{n+1}^{(1)} = (1 + \delta_{n-1})(1 - \delta_n) \quad e \quad 4\alpha_{n+1}^{(-1)} = (1 - \delta_n)(1 + \delta_{n+1}).$$

■

Teorema 2.7. *Os polinômios mônicos $R_n^{(i)}(z)$ ($i = 1, -1$), satisfazem as relações de L -ortogonalidade*

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1 \quad (2.42)$$

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(-1)}(z)(z-1) d\psi(z) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1. \quad (2.43)$$

2.5 Quadratura no círculo unitário

Faremos, nesta seção, um estudo sobre quadratura no círculo unitário, ou seja, quadratura cujo os nós pertencem a $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Estudaremos fórmulas de quadratura do tipo

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{j=1}^n \tau_{n,j} f(\zeta_{n,j}), \quad (2.44)$$

onde os nós $\zeta_{n,j}$, com $|\zeta_{n,j}| = 1$, e os pesos $\tau_{n,j}$ são tais que a fórmula acima é válida para $f \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$. Diremos então que (2.44) é uma fórmula de quadratura no círculo unitário (ou de Szegő) com $n-1$ pontos.

Seja $\{\rho_n(z)\}$ a seqüência de polinômios de Szegő e seja $\{w_n\}$ uma seqüência de números complexos satisfazendo

$$|w_n| = 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Consideremos $\{Y_n(w_n, z)\}$ uma seqüência de polinômios para-ortogonais $\{w_n\}$ invariantes dada por

$$Y_n(w_n, z) = \rho_n(z) + w_n \rho_n^*(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por conveniência, denotaremos por $\zeta_{n,j} = \zeta_{n,j}(w_n)$, $j = 1, 2, \dots, n$ as raízes de $Y_n(w_n, z)$ que já sabemos, segundo o Teorema 2.4, são simples e estão em $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Definimos, para $n = 1, 2, \dots$, os polinômios fundamentais de Lagrange $L_{n,j}$ por

$$L_{n,j}(z, w_n) = \frac{Y_n(w_n, z)}{(z - \zeta_{n,j}) Y_n'(w_n, \zeta_{n,j})}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.45)$$

Lembrando que $\delta_n = \rho_n(0)$, temos que $|\delta_n| < 1$. Denotemos $\rho_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ com $a_n = 1$ e $a_0 = \rho_n(0) = \delta_n$. Assim,

$$\rho_n^*(z) = z^n \bar{\rho}_n(1/z) = z^n \left(\sum_{j=0}^n \bar{a}_j z^{-j} \right) = \sum_{j=0}^n \bar{a}_j z^{n-j}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} Y_n(w_n, z) &= \rho_n(z) + w_n \rho_n^*(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j + w_n \sum_{j=0}^n \bar{a}_j z^{n-j} \\ &= z^n + w_n \bar{a}_0 z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j + w_n \sum_{j=1}^n \bar{a}_j z^{n-j}. \end{aligned}$$

Daí, fazendo $a_0 = \delta_n$, obtemos

$$Y_n(w_n, z) = (1 + \bar{\delta}_n w_n) z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j + w_n \sum_{j=1}^n \bar{a}_j z^{n-j}.$$

Podemos observar então que $(1 + \bar{\delta}_n w_n)$ é o termo do coeficiente de maior grau de $Y_n(w_n, z)$, logo

$$Y_n(w_n, z) = (1 + \bar{\delta}_n w_n) \prod_{j=1}^n (z - \zeta_{n,j}). \quad (2.46)$$

Daí, para $j = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} Y'_n(w_n, \zeta_{n,j}) &= (1 + \bar{\delta}_n w_n) \lim_{z \rightarrow \zeta_{n,j}} \frac{\prod_{k=1}^n (z - \zeta_{n,k}) - \prod_{k=1}^n (\zeta_{n,j} - \zeta_{n,k})}{z - \zeta_{n,j}} \\ &= (1 + \bar{\delta}_n w_n) \lim_{z \rightarrow \zeta_{n,j}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (z - \zeta_{n,k}) = (1 + \bar{\delta}_n w_n) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\zeta_{n,j} - \zeta_{n,k}). \end{aligned}$$

Assim, de (2.45),

$$L_{n,j}(z, w_n) = \frac{Y_n(w_n, z)}{(z - \zeta_{n,j}) Y'_n(w_n, \zeta_{n,j})} = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (z - \zeta_{n,k})}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\zeta_{n,j} - \zeta_{n,k})}, \quad (2.47)$$

para $1 \leq j \leq n$, e segue de (2.47) que para $1 \leq k, j \leq n$,

$$L_{n,j}(\zeta_{n,k}, w_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k; \\ 0, & \text{se } j \neq k, \end{cases} \quad (2.48)$$

de (2.47) também vemos que

$$L_{n,j}(z, w_n) \in \Lambda_{0,n-1} = \mathbb{P}_{n-1}$$

e

$$\bar{L}_{n,j}\left(\frac{1}{z}, w_n\right) = \overline{\left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\zeta_{n,j} - \zeta_{n,k})\right)}^{-1} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{z} - \bar{\zeta}_{n,j}\right) \in \Lambda_{-(n-1),0}.$$

Definimos, então, os pesos da fórmula de quadratura $\tau_{n,j}$ por

$$\tau_{n,j} = \tau_{n,j}(w_n) = \int_0^{2\pi} L_{n,j}(e^{i\theta}, w_n) d\psi(e^{i\theta}), \quad 1 \leq j \leq n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.49)$$

Teorema 2.8. *Seja $\psi(z)$ uma medida no círculo unitário. Para $n \geq 1$ e $1 \leq j \leq n$, seja $\zeta_{n,j}$ as raízes de $Y_n(w_n, z)$ e sejam os pesos $\tau_{n,j}$ definidos por (2.49). Então, para $n \geq 1$ e $1 \leq j \leq n$,*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) d\psi(z) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{j=1}^n \tau_{n,j} f(\zeta_{n,j}) \quad (2.50)$$

é válida para toda $f \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$ e, ainda,

$$\tau_{n,j} > 0, \quad \sum_{j=1}^n \tau_{n,j} = \int_0^{2\pi} d\psi(e^{i\theta}) = \mu_0 > 0. \quad (2.51)$$

Demonstração: Sejam $n \geq 1$ e $f(z) \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$. Definimos

$$R(z) = f(z) - \sum_{j=1}^n f(\zeta_{n,j}) L_{n,j}(z, w_n),$$

onde $L_{n,j}(z, w_n)$ é dado por (2.45). Então, $R(z) \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$ e, por (2.48),

$$R(\zeta_{k,n}) = f(\zeta_{k,n}) - \sum_{j=1}^n f(\zeta_{n,j}) \delta_{j,k} = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Vemos também que $E(z) = z^{n-1} R(z) \in \mathbb{P}_{2n-2}$ e $E(\zeta_{n,j}) = 0$ para $1 \leq j \leq n$. Logo, existe um polinômio $S(z) \in \mathbb{P}_{n-2}$ tal que $E(z) = Y_n(w_n, z) S(z)$, ou ainda,

$$R(z) = \frac{E(z)}{z^{n-1}} = \frac{Y_n(w_n, z) S(z)}{z^{n-1}}.$$

Seja $S(z) = \sum_{j=0}^{n-2} s_j z^j$, então

$$\int_{\mathcal{C}} R(z) d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} \left(Y_n(w_n, z) \sum_{j=0}^{n-2} \frac{s_j}{z^{n-j-1}} \right) d\psi(z) = \sum_{j=0}^{n-2} \langle Y_n(w_n, z), \bar{s}_j z^{n-1-j} \rangle = 0,$$

pela para-ortogonalidade de $\{Y_n(w_n, z)\}$. Disto e da equação (2.49), segue que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} \left[R(z) + \sum_{j=1}^n f(\zeta_{n,j}) L_{n,j}(z, w_n) \right] d\psi(z) = \sum_{j=1}^n \tau_{n,j} f(\zeta_{n,j}),$$

o que nos mostra que (2.50) é válida para toda $f \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$.

Agora, para mostrarmos que $\tau_{n,j} > 0$, definimos

$$D_{n,j}(z, w_n) = L_{n,j}(z, w_n) \bar{L}_{n,j}(1/z, w_n) - L_{n,j}(z, w_n). \quad (2.52)$$

Podemos ver que $D_{n,j}(z, w_n) \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$ e que

$$D_{n,j}(z, w_n) = L_{n,j}(z, w_n) [\bar{L}_{n,j}(1/z, w_n) - 1]. \quad (2.53)$$

Como $|\zeta_{n,j}| = 1$, temos de (2.47) que

$$\bar{L}_{n,j}(\zeta_{n,k}^{-1}, w_n) = \delta_{j,k}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, de (2.52),

$$D_{n,j}(\zeta_{n,k}, w_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Daí, segue de (2.50) para $1 \leq j \leq n$, que

$$\int_{\mathcal{C}} D_{n,j}(z, w_n) d\psi(z) = \sum_{k=1}^n \tau_{n,k} D_{n,k}(\zeta_{n,k}, w_n) = 0. \quad (2.54)$$

Portanto, de (2.49), (2.52) e (2.54), para $1 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} \tau_{n,j} &= \int_{\mathcal{C}} L_{n,j}(z, w_n) d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} L_{n,j}(z, w_n) \bar{L}_{n,j}(1/z, w_n) d\psi(z) \\ &= \langle L_{n,j}(z, w_n), L_{n,j}(z, w_n) \rangle > 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\tau_{n,j} > 0$.

Finalmente, tomando $L(z) = 1$ em (2.50), obtém-se

$$\mu_0 = \int_{\mathcal{C}} d\psi(z) = \int_0^{2\pi} d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{j=1}^n \tau_{n,j} > 0.$$

■

É conhecido (veja, por exemplo, [10]) que não existe uma fórmula de quadratura

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) d\psi(z) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{j=1}^n \tau_{n,j} f(\alpha_n),$$

para $n = 1, 2, \dots$, com $\alpha_n \in \mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ que seja exata para $f(z) \in \Lambda_{-(n-1),n}$ ou $f(z) \in \Lambda_{-n,n-1}$.

2.6 Relações entre polinômios para-ortogonais e polinômios ortogonais

Nesta seção veremos como podemos relacionar os polinômios $R_n^{(i)}(z)$ ($i = 1, -1$), definidos em (2.39), com polinômios ortogonais, em $[-1, 1]$, para isto usaremos a transformação

$$x = x(z) = \frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2}, \quad (2.55)$$

que foi estudada por Delsarte e Genin [7] e Sri Ranga [19].

A relação (2.55) nos fornece uma transformação do círculo unitário no intervalo $[-1, 1]$. Com a mesma transformação, podemos também relacionar polinômios para-ortogonais no círculo unitário com polinômios ortogonais em $[-1, 1]$. Notemos ainda que considerando $z = e^{i\theta}$, podemos escrever

$$x = \frac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}{2} = \cos(\theta/2), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (2.56)$$

A seguir apresentaremos resultados importantes, resultados estes que podem ser encontrados em Berti e Sri Ranga [1], e serão necessários para que descrevamos as relações entre os polinômios.

Antes, consideremos $\phi^{(1)}(x)$ e $\phi^{(-1)}(x)$ duas medidas simétricas no intervalo $[-1, 1]$ que satisfazem a condição

$$d\phi^{(-1)}(x) = (1 - x^2)d\phi^{(1)}(x).$$

Observe que se conhecemos uma seqüência de polinômios ortogonais com relação a medida $(\phi^{(1)}(x))$, podemos obter informações a respeito da seqüência de polinômios ortogonais com relação a medida $(\phi^{(-1)}(x))$.

O próximo resultado, nos fornece relações entre os polinômios denotados por $P_n^{(i)}(x)$ e $R_n^{(i)}(z)$ ($i = 1, -1$) que satisfazem

$$P_n^{(i)}(x(z)) = (4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z)$$

através da transformação $x = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})$, este resultado nos dá uma relação entre as respectivas medidas e, também, entre as respectivas fórmulas de recorrência.

Teorema 2.9. *Temos*

- (1) *Seja $\psi(z)$ uma medida positiva no círculo unitário tal que os polinômios de Szegő $\{\rho_n(z)\}$ são todos reais, isto é, $-1 < \delta_n < 1$ para $n \geq 1$. Sejam*

$$4\alpha_{n+1}^{(1)} = (1 + \delta_{n-1})(1 - \delta_n) > 0 \quad e \quad 4\alpha_{n+1}^{(-1)} = (1 + \delta_{n+1})(1 - \delta_n) > 0, \quad n \geq 1$$

e as medidas positivas $\phi^{(1)}(x)$ e $\phi^{(-1)}(x)$ definidas por

$$d\phi^{(1)}(x(z)) = -d\psi(z) \quad e \quad d\phi^{(-1)}(x(z)) = -(1 - x^2)d\psi(z).$$

O suporte de $\phi^{(1)}(x)$ e $\phi^{(-1)}(x)$ estão contidos em $[-1, 1]$. Então, para $i = 1, -1$, as seqüências de polinômios $P_n^{(i)}(x)$, onde $P_0^{(i)}(x) = 1$, $P_1^{(i)}(x) = x$ e

$$P_{n+1}^{(i)}(x) = xP_n^{(i)}(x) - \alpha_{n+1}^{(i)}P_{n-1}^{(i)}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.57)$$

são seqüências de polinômios ortogonais mônicos com relação à medida $\phi^{(i)}(x)$ respectivamente.

- (2) Reciprocamente, sejam $\phi^{(1)}(x)$ e $\phi^{(-1)}(x)$ duas medidas positivas definidas em $[-1, 1]$, tais que $d\phi^{(-1)}(x) = (1-x^2)d\phi^{(1)}(x)$. Sejam os respectivos polinômios ortogonais mônicos $P_n^{(1)}(x)$ e $P_n^{(-1)}(x)$ satisfazendo

$$P_{n+1}^{(i)}(x) = xP_n^{(i)}(x) - \alpha_{n+1}^{(i)}P_{n-1}^{(i)}(x), \quad n \geq 1.$$

Então, os coeficientes de reflexão δ_n dos polinômios de Szegő, $\rho_n(z)$ associados à medida positiva $d\psi(z) = -d\phi^{(1)}(x(z))$, satisfazem

$$\delta_n = 1 - \frac{4\alpha_{n+1}^{(1)}}{1 + \delta_{n-1}} \quad e \quad \delta_{n+1} = -1 + \frac{4\alpha_{n+1}^{(-1)}}{1 - \delta_n}, \quad n \geq 1,$$

com $\delta_0 = 1$. Podem ser dados explicitamente por

$$\delta_{2n-1} = 2 \frac{\alpha_{2n-1}^{(-1)} \alpha_{2n-3}^{(-1)} \cdots \alpha_3^{(-1)} \mu_0^{(-1)}}{\alpha_{2n-1}^{(1)} \alpha_{2n-3}^{(1)} \cdots \alpha_3^{(1)} \mu_0^{(1)}} - 1 \quad e \quad \delta_{2n} = 2 \frac{\alpha_{2n}^{(-1)} \alpha_{2n-2}^{(-1)} \cdots \alpha_2^{(-1)}}{\alpha_{2n}^{(1)} \alpha_{2n-2}^{(1)} \cdots \alpha_2^{(1)}} - 1, \quad n \geq 1,$$

com $R_n^{(i)}(z) = (4z)^{n/2} P_n^{(i)}(x(z))$.

Sabemos que os zeros de $P_n^{(i)}(x)$ ($i = 1, -1$) são reais, distintos e encontram-se simetricamente sobre a origem. Escrevendo

$$P_{2n}^{(i)}(x) = \prod_{k=1}^n (x^2 - x_{2n,k}^2) \quad e \quad P_{2n+1}^{(i)}(x) = x \prod_{k=1}^n (x^2 - x_{2n+1,k}^2),$$

então, desde que $P_n^{(i)}(x) = (4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z)$ temos

$$R_{2n}^{(i)}(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_{2n,k})(z - 1/z_{2n,k}).$$

Analogamente, para $P_{2n+1}^{(i)}(x) = x \prod_{k=1}^n (x^2 - x_{2n+1,k}^2)$, obtemos que

$$R_{2n+1}^{(i)}(z) = (z + 1) \prod_{k=1}^n (z - z_{2n+1,k})(z - 1/z_{2n+1,k}),$$

onde $z_{n,k} = (2x_{n,k}^2 - 1) + 2\sqrt{x_{n,k}^2(x_{n,k}^2 - 1)}$.

Portanto, temos que se $x_{n,k}^2 < 1$ então $z_{n,k}$ e $1/z_{n,k}$ são um par conjugado de zeros de $R_n^{(i)}(z)$ no círculo unitário e se $x_{n,k}^2 > 1$ então os dois zeros de $R_n^{(i)}(z)$ são positivos e um é o inverso do outro. Se $z = 1$ é um zero de $R_n^{(i)}(z)$ então é um zero de multiplicidade 2. Logo, concluímos que os zeros de $R_n^{(i)}(z)$ estão ambos no círculo unitário ou na reta real positiva.

2.7 Relação entre as fórmulas de quadratura

Nesta seção veremos um resultado que fornece relações entre a fórmula de quadratura associada aos polinômios ortogonais e a fórmula de quadratura de Szegő associada aos polinômios para-ortogonais, que denotaremos, respectivamente por FQG e FQS. Esses resultados são encontrados em [4] e [3].

Antes do próximo teorema, consideremos algumas condições. Seja a medida positiva $\psi(z)$ no círculo unitário e as medidas positivas $\phi^{(1)}(x)$ e $\phi^{(-1)}(x)$ definidas em $[-1,1]$, tais que

$$-d\psi(z) = d\phi^{(1)}(x(z)) = \frac{1}{1-x^2(z)} d\phi^{(-1)}(x(z)).$$

Tomando $z = e^{i\theta}$ a expressão acima torna-se

$$-d\psi(e^{i\theta}) = d\phi^{(1)}(\cos(\theta/2)) = \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} d\phi^{(-1)}(\cos(\theta/2)).$$

Considere a fórmula de quadratura gaussiana que é exata para $g \in \mathbb{P}_{2n-1}$,

$$FQG(i) : \int_{-1}^1 g(x) d\phi^{(i)}(x) = \sum_{k=1}^n W_{n,k}^{(i)} g(x_{n,k}^{(i)}) \quad (i = 1, -1),$$

onde os nós estão ordenados da seguinte forma

$$1 > x_{n,1}^{(i)} > x_{n,2}^{(i)} > \dots > x_{n,n}^{(i)} > -1$$

e $x_{n,k}^{(i)}$ são as raízes do polinômio ortogonal $P_n^{(i)}(x)$ com relação à medida $\phi^{(i)}(x)$.

Considere, também, a fórmula de quadratura de Szegő que é exata para $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$

$$FQS(w) : \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k}(w) f(z_{n,k}(w)) \quad (w = 1, -1),$$

com os nós $z_{n,k}(w) = e^{-i\theta_{n,k}(w)}$ organizados da seguinte maneira

$$0 < \theta_{n,1}(w) < \theta_{n,2}(w) < \dots < \theta_{n,n}(w) \leq 2\pi,$$

onde $z_{n,k}(1)$ são as raízes dos polinômios para-ortogonais $R_n^{(1)}(z)$, $z_{n+1,k}(-1)$, $k = 1, \dots, n$ são as raízes dos polinômios $R_n^{(-1)}(z)$ e $z_{n+1,n+1}(-1) = 1$.

Teorema 2.10. *Nas condições anteriores, temos que as seguintes relações são válidas*

$$(1) \ x_{n,k}^{(1)} = \cos\left(\frac{1}{2}\theta_{n,k}(1)\right), \quad W_{n,k}^{(1)} = \lambda_{n,k}(1), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(2) $x_{n,k}^{(-1)} = \cos\left(\frac{1}{2}\theta_{n+1,k}(-1)\right)$, $W_{n,k}^{(-1)} = \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta_{n+1,k}(-1)\right)\lambda_{n+1,k}(-1)$,
para $k = 1, 2, \dots, n$, e além disso,

$$\lambda_{n+1,n+1}(-1) = \mu_0 - \sum_{k=1}^n \lambda_{n+1,k}(-1).$$

Demonstração: Lembremos que $z_{n,k}(1)$ são as raízes de $R_n^{(1)}(z)$, como $P_n^{(1)}(x) = (4z)^{-n/2}R_n^{(1)}(z)$ e usando o fato de que $x = \cos(\theta/2)$, temos

$$P_n^{(1)}(\cos(\theta_{n,k}(1)/2)) = (4e^{i\theta_{n,k}(1)})^{-n/2}R_n^{(1)}(e^{i\theta_{n,k}(1)}) = 0,$$

para $k = 1, 2, \dots, n$. Logo, $x_{n,k}^{(1)} = \cos(\theta_{n,k}(1)/2)$ são raízes de $P_n^{(1)}(x)$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

Mostraremos, agora, as relações entre os pesos das regras de quadratura. Por FQS(1), se $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$, então

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k}(1)f(z_{n,k}(1)). \quad (2.58)$$

Por outro lado, da FQG(1) temos, para $g \in \mathbb{P}_{2n-2}$, que

$$\int_{-1}^1 g(x)d\phi^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^n W_{n,k}^{(1)}g(x_{n,k}^{(1)}).$$

Fazendo, então, $x = \cos(\theta/2)$ acima, obtemos

$$\int_{2\pi}^0 g(\cos(\theta/2))d\phi^{(1)}(\cos(\theta/2)) = \sum_{k=1}^n W_{n,k}^{(1)}g(\cos(\theta_{n,k}(1)/2))$$

e substituindo $d\phi^{(1)}(\cos(\theta/2)) = -d\psi(e^{i\theta})$, temos

$$\int_0^{2\pi} g(\cos(\theta/2))d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^n W_{n,k}^{(1)}g(\cos(\theta_{n,k}(1)/2)).$$

Logo,

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^n W_{n,k}^{(1)}f(z_{n,k}(1)) \quad (2.59)$$

para $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$.

Comparando (2.58) e (2.59), podemos então concluir que

$$W_{n,k}^{(1)} = \lambda_{n,k}(1), \text{ para } k = 1, 2, \dots, n.$$

Analogamente mostra-se o item (2) do teorema.

■

2.8 Avaliação numérica de P_n

Os polinômios $P_n^{(i)}$ associados com a medida $\phi^{(i)}$, mais precisamente os coeficientes $\alpha_n^{(i)}$, podem ser avaliados diretamente dos momentos da medida $\psi(z)$. Isto requer o seguinte algoritmo conhecido como o algoritmo modificado de Chebyshev ver (Sack e Donovan [18].)

Seja ϕ uma medida positiva em $\mathbb{R}$ e seja $\mu_l^{(\phi)} = \int_{\mathbb{R}} Q_l(x) d\phi(x)$ os momentos modificados associados a essa medida. Os polinômios Q_l são dados pela relação de recorrência

$$Q_{l+1}(x) = (x - \hat{\beta}_{l+1})Q_l(x) - \hat{\alpha}_{l+1}Q_{l-1}(x), \quad l = 1, 2, \dots, 2n-2,$$

com $Q_0(x) = 1$ e $Q_1(x) = x - \hat{\beta}_1$, com os números $\hat{\beta}_l$ e $\hat{\alpha}_l$ escolhidos arbitrariamente.

O algoritmo é dado como segue

Algoritmo 2.1 (Algoritmo modificado de Chebyshev)

Para $l = 0, 1, \dots, 2n-1$, **faça**

$$c_{-1,l} = 0, \quad c_{0,l} = \mu_l^{(\phi)},$$

$$\beta_1 = \hat{\beta}_1 + \frac{c_{0,1}}{c_{0,0}}.$$

Para $m = 1, 2, \dots, n-1$, **faça**

Para $l = 0, 1, \dots, 2n-2m-1$, **faça**

$$c_{m,l} = c_{m-1,l+2} + (\hat{\beta}_{m+l+1} - \beta_m)c_{m-1,l+1} - \alpha_m c_{m-2,l+2} + \hat{\alpha}_{m+l+1}c_{m-1,l},$$

$$\beta_{m+1} = \hat{\beta}_{m+1} + \frac{c_{m,1}}{c_{m,0}} - \frac{c_{m-1,1}}{c_{m-1,0}},$$

$$\alpha_{m+1} = \frac{c_{m,0}}{c_{m-1,0}}.$$

Este algoritmo, determina os coeficientes da relação de recorrência de três termos

$$P_{k+1}(x) = (x - \beta_{k+1})P_k(x) - \alpha_{k+1}P_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

onde $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x - \beta_1$, dos polinômios $P_n(x)$ associados com a medida ϕ .

Agora, considerando $d\psi(e^{i\theta})$ uma medida simétrica, mostraremos que o algoritmo anterior pode ser usado para determinar os coeficientes $\alpha_n^{(1)}$ de $P_n^{(1)}(x)$ de (2.57) associados com a medida $\phi^{(1)}$, notemos que $\beta_n^{(1)}$ são todos iguais a zero.

Seja $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$, $-1 \leq x \leq 1$ os polinômios de Chebyshev de primeira espécie, então $T_{2k}(x) = \cos(2k \arccos x)$, $-1 \leq x \leq 1$, fazendo $x = \cos(\theta/2)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

temos que $\theta = 2 \arccos x$, chegamos $T_{2k}(x) = \cos(k\theta)$. Como $d\psi(e^{i\theta}) = -d\phi^{(1)}(\cos(\theta/2))$, obtemos

$$\mu_k = \int_{-1}^1 T_{2k}(x) d\phi^{(1)}(x), \quad k \geq 0. \quad (2.60)$$

Usando as relações (2.37) e (2.60) com os polinômios mônicos de Chebyshev $\hat{T}_k(x) = 2^{-k+1}T_k(x)$, $k \geq 1$, podemos definir os momentos modificados

$$\hat{\mu}_0 = \mu_0, \quad \hat{\mu}_{2k-1} = 0, \quad \hat{\mu}_{2k} = 2^{-2k+1}\mu_k, \quad k \geq 1,$$

e agora aplicando o algoritmo modificado de Chebyshev obtemos os coeficientes $\alpha_n^{(1)}$. Utilizando

$$\begin{aligned} \hat{T}_1(x) &= x, \quad \hat{T}_2(x) = x\hat{T}_1(x) - \frac{1}{2}\hat{T}_0(x), \\ \hat{T}_{k+1}(x) &= x\hat{T}_k(x) - \frac{1}{4}\hat{T}_{k-1}(x), \quad k = 2, 3, \dots, 2n-2, \end{aligned}$$

os coeficientes $c_{k,2l+1}$ tornam-se zero para todo k , tomando agora

$$d_{0,0} = c_{0,0} \quad e \quad d_{k,l} = 2^{2(k+l)-1}c_{k,2l},$$

obtemos o seguinte algoritmo.

Algoritmo 2.2

Para $l = 0, 1, \dots, n-1$ **faça**

$$d_{0,l} = \mu_l = \int_0^{2\pi} e^{il\theta} d\psi(e^{i\theta}),$$

Para $l = 0, 1, \dots, n-2$ **faça**

$$d_{1,l} = d_{0,l+1} + d_{0,l},$$

$$\hat{d}_2 = 2 \frac{d_{1,0}}{d_{0,0}}.$$

Para $k = 2, 3, \dots, n-1$ **faça**

Para $l = 0, 1, \dots, n-k-1$ **faça**

$$d_{k,l} = d_{k-1,l+1} + d_{k-1,l} - \hat{d}_k d_{k-2,l+1},$$

$$\hat{d}_{k+1} = \frac{d_{k,0}}{d_{k-1,0}}.$$

Deste algoritmo obtemos

$$\alpha_k^{(1)} = \frac{1}{4}\hat{d}_k, \quad k = 2, 3, \dots, n-1.$$

Tendo obtido os valores de $\alpha_k^{(1)}$, se necessitarmos dos valores de $\alpha_k^{(-1)}$, estes podem ser gerados por

$$\alpha_{k+1}^{(-1)} = \frac{1}{4}(1 - \delta_k)(1 + \delta_{k+1}), \quad k \geq 1,$$

onde $\delta_1 = 1 - \hat{d}_2/2$ e $\delta_n = 1 - \hat{d}_{k+1}/(1 - \delta_{k-1})$, $k \geq 2$, são os coeficientes de reflexão dos polinômios de Szegő associados com a medida $\psi(z)$.

Capítulo 3

Polinômios de Szegő em análise de frequência

Neste capítulo será estudado o problema de análise de frequências com o uso de polinômios ortogonais no círculo unitário (polinômios de Szegő). Nas próximas seções introduziremos métodos para aproximar as frequências, baseados, em trabalhos como [3, 6, 9, 11, 13].

3.1 O problema de análise de frequência

Observações de muitos fenômenos naturais que podem ser modelados como sinais trigonométricos são compostos da superposição periódica de ondas com frequências $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_0}$ bem definidas. Tais sinais podem ser dados da forma

$$x(m) = \gamma_0 e^{im\pi} + \sum_{j=1}^I (\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}), \quad (3.1)$$

onde $I \in \mathbb{N}$, $\gamma_0 \geq 0$, com $n_0 = 2I + l < N$, onde

$$l = \begin{cases} 1, & \text{se } \gamma_0 > 0, \\ 0, & \text{se } \gamma_0 = 0, \end{cases}$$

ω_j são as frequências e γ_j são as amplitudes.

O problema de análise de frequência que será tratado aqui consiste em determinar n_0 , as frequências ω_j e as amplitudes γ_j a partir de valores observados $\{x(m)\}_{-\infty}^{\infty}$, dado por

$$x(m) = \begin{cases} \gamma_0 e^{im\pi} + \sum_{j=1}^I (\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}), & m = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{para } m < 0 \text{ e } m > N-1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Neste caso, o sinal trigonométrico é chamado de N -truncado.

A maior dificuldade está, então, em determinar as frequências ω_j e, uma vez encontradas estas frequências, as amplitudes γ_j são obtidas resolvendo o sistema linear

$$\gamma_0 e^{im\pi} + \sum_{j=1}^I (\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}), \quad I \in \mathbb{N}, \quad m = 1, 2, \dots, n_0.$$

As frequências ω_j são tais que,

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n_0-1} < \omega_{n_0} < 2\pi$$

e $\omega_{n_0+1-j} = 2\pi - \omega_j$ e as amplitudes $\gamma_j \in \mathbb{C}$, satisfazem $\bar{\gamma}_{n_0+1-j} = \gamma_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, I$.

Os números

$$\xi_j = e^{i\omega_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n_0,$$

são chamados pontos de frequência. Esses pontos, estão no círculo unitário e serão aproximados pelos zeros dos polinômios de Szegő, que estão no interior do círculo unitário.

Vejamos, agora, métodos para determinar as frequências de um sinal trigonométrico.

3.2 O N-processo

A partir daqui, trabalharemos com várias medidas, por esta razão passaremos a denotar os polinômios de Szegő com relação a medida $\psi(z)$ por $\rho_n(\psi, z)$. Estudaremos o problema de análise de frequência utilizando os polinômios de Szegő $\rho_n(\psi, z)$ com relação à medida discreta $\psi(z)$ definida por

$$\psi(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & \theta < w_1, \\ \sum_{k=1}^{s-1} |\gamma_k|^2, & w_{s-1} \leq \theta < w_s, \quad s = 2, 3, \dots, n_0, \\ \sum_{k=1}^{n_0} |\gamma_k|^2, & w_{n_0} \leq \theta. \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $|\gamma_k|^2 = \lambda_k(\psi)$, $k = 1, 2, \dots, n_0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $z = e^{i\theta}$. Cabe observar que $\psi(e^{i\theta})$ é uma função escada, não-decrescente, tem salto de valor $\lambda_k(\psi)$ em cada ponto $\theta = w_s$, $s = 1, 2, \dots, n_0$.

A medida $\psi(e^{i\theta})$ tem n_0 pontos de aumento e existe uma única sequência de polinômios de Szegő $\rho_k(\psi, z)$ para $k = 1, 2, \dots, n_0$. Neste caso, $|\rho_{n_0}(\psi, 0)| = |\delta_{n_0}| = 1$, mas de (2.16) temos

$$(1 - |\delta_{n_0}|^2)z\rho_{n_0-1}(\psi, z) = \rho_{n_0}(\psi, z) - \delta_{n_0}\rho_{n_0}^*(\psi, z)$$

logo, concluímos que

$$\rho_{n_0}(\psi, z) = \pm \rho_{n_0}^*(\psi, z). \quad (3.4)$$

Além disso, temos $\rho_{n_0}(\psi, z) = \prod_{j=1}^{n_0} (z - e^{i\omega_j})$, ver (Chihara[5]).

Consideremos uma medida absolutamente contínua $\psi_N(e^{i\theta})$ como em [10], definida por

$$\psi'_N(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi N} |X_N(e^{i\theta})|^2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \text{onde} \quad X_N(z) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)z^{-m}. \quad (3.5)$$

Neste capítulo, iremos adotar a notação $\delta_n^{(N)}$ para os coeficientes de reflexão dos polinômios de Szegő, $\rho_n(\psi_N, z)$, com relação à medida $\psi_N(e^{i\theta})$, onde estes são dados por (2.14).

Para a medida $\psi_N(e^{i\theta})$, o n -ésimo momento, $\mu_n^{(N)}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, é dado por

$$\begin{aligned} \mu_n^{(N)} &= \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\psi_N(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-ik\theta} \right|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(k) \overline{x(j)} e^{-ik\theta} e^{ij\theta} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(k) x(j) \int_0^{2\pi} e^{i(j-k+n)\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \left(x(0) \int_0^{2\pi} e^{i(-k+n)\theta} d\theta + x(1) \int_0^{2\pi} e^{i(1-k+n)\theta} d\theta \right. \\ &\quad \left. + \dots + x(k-n) \int_0^{2\pi} d\theta + \dots + x(N-1) \int_0^{2\pi} e^{i(N-1-k+n)\theta} d\theta \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) x(k-n), \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Observando que $x(k-n) = 0$, se $k-n < 0$, como $\mu_n^{(N)} = \mu_{-n}^{(N)}$, obtemos

$$\mu_n^{(N)} = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\psi_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=n}^{N-1} x(k) x(k-n), \quad n \geq 0, \quad (3.6)$$

onde $\mu_n^{(N)}$ são chamados de coeficientes de auto-correlação do sinal, estes também são conhecidos por formar uma sequência hermitiana positiva definida, e o determinante de Toeplitz (2.5) com esses momentos como elementos, são positivos.

Comparando as equações (2.15) e (2.16) com (2.21) e (2.22) temos a relação entre os convergentes da PPC-fração com os polinômios de Szegő. Desta relação obtemos que os polinômios de Szegő com relação à medida $\psi_N(e^{i\theta})$ são dados por

$$Q_{2n}(\psi_N, z) = \rho_n^*(\psi_N, z) \quad e \quad Q_{2n+1}(\psi_N, z) = \rho_n(\psi_N, z), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

O próximo resultado, demonstrado por Jones e outros em [9], mostra que a medida ψ_N converge fracamente para a medida discreta ψ definida por (3.3) quando $N \rightarrow \infty$. Para demonstrar este resultado usaremos algumas propriedades do núcleo de Fejér, definidas a seguir.

Definição 3.1. A função

$$\Phi_N(t) = \frac{1}{2\pi N} \left(\frac{\text{sen}(Nt/2)}{\text{sen}(t/2)} \right)^2,$$

é conhecida como núcleo de Fejér de ordem $N - 1$.

Algumas propriedades da função $\Phi_N(t)$, cujas demonstrações são omitidas, mas podem ser encontradas em Figueiredo [8], são

- i) $\Phi_N(t) \geq 0$ e $\Phi_N(t) = \Phi_N(-t)$,
- ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(t) dt = 1$, para todo $N \in \mathbb{N}$,
- iii) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com período 2π . Então,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(t) f(x - t) dt = f(x).$$

Teorema 3.1. A medida ψ_N converge “fracamente” para a medida discreta ψ . Isto significa que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi_N(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}), \quad (3.7)$$

para toda f contínua no círculo unitário $\mathcal{C}$.

Demonstração: Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\omega_j \notin [\omega_s - \varepsilon, \omega_s + \varepsilon]$ para $j \neq s$. Escrevendo

$$\psi'_N(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi N} |X_N(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-im\theta} \right|^2 d\theta,$$

utilizando (3.1) e a soma da série geométrica, obtemos

$$\begin{aligned} X_N(e^{i\theta}) &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-im\theta} = \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{j=-I}^I \gamma_j e^{i\omega_j m} e^{-im\theta} \right) \\ &= \sum_{j=-I}^I \gamma_j \sum_{m=0}^{N-1} \frac{e^{im\omega_j}}{e^{im\theta}} = \sum_{j=-I}^I \gamma_j \left(\frac{1 - e^{iN(\omega_j - \theta)}}{1 - e^{i(\omega_j - \theta)}} \right). \end{aligned}$$

Então, temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\omega_s - \varepsilon}^{\omega_s + \varepsilon} f(e^{i\theta}) d\psi_N(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi N} \int_{\omega_s - \varepsilon}^{\omega_s + \varepsilon} f(e^{i\theta}) |X_N(e^{i\theta})|^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi N} \int_{\omega_s - \varepsilon}^{\omega_s + \varepsilon} f(e^{i\theta}) \left| \sum_{j=-I}^I \gamma_j \frac{1 - e^{iN(\omega_j - \theta)}}{1 - e^{i(\omega_j - \theta)}} \right|^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi N} \int_{\omega_s - \varepsilon}^{\omega_s + \varepsilon} f(e^{i\theta}) \left(\sum_{j=-I}^I \gamma_j \frac{1 - e^{iN(\omega_j - \theta)}}{1 - e^{i(\omega_j - \theta)}} \right) \left(\sum_{m=-I}^I \bar{\gamma}_m \frac{1 - e^{iN(\omega_m - \theta)}}{1 - e^{i(\omega_m - \theta)}} \right) d\theta.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Considerando $m = j = s$ nesta última expressão, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi N} \int_{\omega_s - \varepsilon}^{\omega_s + \varepsilon} f(e^{i\theta}) |\gamma_s|^2 \left| \frac{1 - e^{iN(\omega_s - \theta)}}{1 - e^{i(\omega_s - \theta)}} \right|^2 d\theta &= \frac{|\gamma_s|^2}{2\pi N} \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} -f(e^{i(\omega_s - \theta)}) \left| \frac{1 - e^{iN\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right|^2 d\theta \\
 &= \frac{|\gamma_s|^2}{2\pi N} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(e^{i(\omega_s - \theta)}) \left| \frac{1 - e^{iN\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right|^2 d\theta \\
 &= \frac{|\gamma_s|^2}{2\pi N} \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} f(e^{i(\omega_s - \theta)}) \left(\frac{\text{sen}(N\theta/2)}{\text{sen}(\theta/2)} \right)^2 d\theta.
 \end{aligned}$$

Agora utilizando as propriedades do núcleo de Fejér,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\gamma_s|^2}{2\pi N} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(e^{i(\omega_s - \theta)}) \left(\frac{\text{sen}(N\theta/2)}{\text{sen}(\theta/2)} \right)^2 d\theta = |\gamma_s|^2 f(e^{i\omega_s}).$$

Além disso, os termos restantes do lado direito de (3.8) são de ordem $O(1/N)$ se $j \neq m$ e $j \neq s$, e são iguais a s e de ordem $O(1/\sqrt{N})$ se j ou m são iguais a s (não simultaneamente).

Logo, temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{\omega_s - \varepsilon}^{\omega_s + \varepsilon} f(e^{i\theta}) d\psi_N(e^{i\theta}) = |\gamma_s|^2 f(e^{i\omega_s}).$$

Particionando o intervalo $[0, 2\pi]$ de modo a obtermos $[\omega_s - \varepsilon, \omega_s + \varepsilon]$ como um intervalo contido nessa partição, temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi_N(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}).$$

■

Teorema 3.2. *Seja $\{\mu_n^{(N)}\}$ a seqüência de momentos com relação a $\psi_N(e^{i\theta})$ e $\{\mu_n\}$ a seqüência de momentos com relação a $\psi(e^{i\theta})$ definida em (3.3). Então, para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,*

$$\mu_n^{(N)} = \mu_n + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

O próximo resultado, encontrado em [11], garante que os coeficientes de reflexão $\delta_n^{(N)} = \rho_n(\psi_N, 0)$ associados a $\psi_N(e^{i\theta})$, convergem para seu correspondente δ_n associado a medida $\psi(e^{i\theta})$ definida em (3.3).

Teorema 3.3. *Dados $\delta_n^{(N)} = \rho_n(\psi_N, 0)$ e $\delta_n = \rho_n(\psi, 0)$. Então,*

1. *para cada $n = 1, 2, \dots, n_0$, fixo,*

$$\delta_0^{(N)} = \delta_0 + O(1/N) \quad e \quad \delta_n^{(N)} = \delta_n + O(1/N), \quad N \rightarrow \infty;$$

2. *para cada $n = 0, 1, \dots, 2n_0 + 1$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_n(\psi_N, z) = P_n(\psi, z) \quad e \quad \lim_{N \rightarrow \infty} Q_n(\psi_N, z) = Q_n(\psi, z),$$

e a convergência é local em $\mathbb{C}$.

Demonstração: 1. De (2.14) temos que $\delta_n^{(N)}$ pode ser obtido por, $\delta_0^{(N)} = \mu_0^{(N)}$ e

$$\delta_n^{(N)} = \frac{(-1)^n}{\Delta_{n-1}^{(N)}} \begin{vmatrix} \mu_{-1}^{(N)} & \mu_0^{(N)} & \cdots & \mu_{n-2}^{(N)} \\ \mu_{-2}^{(N)} & \mu_{-1}^{(N)} & \cdots & \mu_{n-3}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n}^{(N)} & \mu_{-n+1}^{(N)} & \cdots & \mu_{-1}^{(N)} \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Como $\mu_n^{(N)} = \mu_n + O(1/N)$, para $N \rightarrow \infty$, então

$$\mu_0^{(N)} = \mu_0 + O(1/N) \Rightarrow \delta_0^{(N)} = \delta_0 + O(1/N), \quad N \rightarrow \infty,$$

e para $1 \leq n \leq n_0$,

$$\delta_n^{(N)} = \frac{(-1)^n \begin{vmatrix} \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2} \\ \mu_{-2} & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_{-1} \end{vmatrix} + O(1/N)}{\Delta_{n-1} + O(1/N)} = \delta_n + O(1/N), \quad (3.10)$$

com $N \rightarrow \infty$.

2. Usando as relações de recorrência (2.21) e (2.22), para obter os numeradores e denominadores dos primeiros convergentes da PPC-fração, associada a ψ_N , obtemos

$$\begin{aligned} P_0(\psi_N, z) &= \delta_0^{(N)} & Q_0(\psi_N, z) &= 1, \\ P_1(\psi_N, z) &= -\delta_0^{(N)} & Q_1(\psi_N, z) &= 1, \\ P_2(\psi_N, z) &= \delta_0^{(N)}[-\bar{\delta}_1^{(N)}z + 1], & Q_2(\psi_N, z) &= \bar{\delta}_1^{(N)}z + 1, \\ P_3(\psi_N, z) &= \delta_0^{(N)}[z + \delta_1^{(N)}], & Q_3(\psi_N, z) &= z + \delta_1^{(N)}, \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

Para a PPC-fração associada a ψ é análogo.

Podemos, então, observar que os coeficientes das potências de z em $P_n(\psi_N, z)$ e $Q_n(\psi_N, z)$ (ou $P_n(\psi, z)$ e $Q_n(\psi, z)$) são funções contínuas de $\delta_k^{(N)}$ (ou δ_k), $k = 1, 2, \dots, n$. Portanto, com $N \rightarrow \infty$, os coeficientes de $P_n(\psi_N, z)$ e $Q_n(\psi_N, z)$ convergem para os coeficientes de $P_n(\psi, z)$ e $Q_n(\psi, z)$, $n = 0, 1, 2, \dots, 2n_0 + 1$, respectivamente. ■

O próximo teorema, extraído de [11] e [16], garante que os polinômios $\rho_n(\psi_N, z)$, associados a medida ψ_N definida em (3.5), convergem para seu correspondente $\rho_n(\psi, z)$, associado a ψ definida em (3.3), e que os zeros de $\rho_{n_0}(\psi_N, z)$, com $N \rightarrow \infty$, convergem para os pontos de frequência $\xi_j = e^{i\omega_j}$, onde n_0 é a quantidade de pontos de frequência. Se $n > n_0$, então n_0 raízes de $\rho_n(\psi_N, z)$ tendem para ξ_m e $n - n_0$ raízes satisfazem $|z| < K_n < 1$. Este resultado sobre polinômios de Szegő é importante para o estudo das soluções do problema de análise de frequência.

Teorema 3.4. *Seja*

1. *Para $1 \leq n \leq n_0$, com cada n fixo, temos*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N, z) = \rho_n(\psi, z), \quad z \in \mathbb{C},$$

onde $\rho_n(\psi, z)$ é o polinômio mônico de Szegő associado a ψ .

Em particular temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{n_0}(\psi_N, z) = \rho_{n_0}(\psi, z) = \prod_{j=1}^{n_0} (z - \xi_j), \quad z \in \mathbb{C},$$

onde $\xi_j = e^{i\omega_j}$ são os pontos de frequência.

2. *Para cada $n < n_0$, existe $L_n \in (0, 1)$ dependendo somente de n tal que*

$$|\rho_n(\psi_N, 0)| = |\delta_n^{(N)}| \leq L_n < 1, \quad N = 1, 2, \dots$$

3. *Para cada $n > n_0$, as raízes de maior módulo de $\rho_n(\psi_N, z)$ tendem aos pontos ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n_0$. Além disso, existe um número $K_n < 1$, dependendo somente de n tal que as $n - n_0$ raízes restantes de $\rho_n(\psi_N, z)$ pertencem ao disco $|z| \leq K_n$.*

Podemos observar que a parte 1 do Teorema 3.4 tem utilidade apenas teórica, pois a quantidade de pontos de frequência n_0 é desconhecida, isto é, não sabemos qual o grau do

polinômio de Szegő associado a ψ_N que devemos tomar para obter as frequências $e^{i\omega_j}$, visto que a convergência se dá para o grau n_0 .

Assim se faz necessário investigar a convergência para polinômios de grau $n \geq n_0$, que é o que foi feito na parte 3 do Teorema 3.4.

No N-processo apenas garantimos a convergência para uma subsequência de $\{\rho_n(\psi_N, z)\}$, para $n > n_0$, veja o próximo teorema, obtido em [16].

Teorema 3.5. *Seja $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ uma seqüência arbitrária de números naturais. Então existe uma subsequência $\{N_{k_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ de $\{N_k\}$ tal que*

1. *a subsequência $\{\delta_n^{N_{k_\nu}}\}_{\nu=1}^\infty$ de $\{\delta_n^{N_k}\}_{k=1}^\infty$ é convergente, com $n = 1, 2, 3, \dots$. Para $n > n_0$, o limite de $\{\delta_n^{N_{k_\nu}}\}_{\nu=1}^\infty$ está em $|z| < 1$;*
2. *para todo $m = 1, 2, 3, \dots$ e todo $z \in \mathbb{C}$, existem seqüências de polinômios $\{V_m^{(0)}(z)\}_{m=1}^\infty$ e $\{V_m^{(1)}(z)\}_{m=1}^\infty$, dependendo de $\{N_{k_\nu}\}$, tal que*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_{2(n_0+m)+l}(\psi_{N_{k_\nu}}, z) = V_m^{(l)}(z) P_{2n_0}(\psi, z), \quad l = 0, 1,$$

e

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_{2(n_0+m)+l}(\psi_{N_{k_\nu}}, z) = V_m^{(l)}(z) Q_{2n_0}(\psi, z), \quad l = 0, 1.$$

A convergência é localmente uniforme em $\mathbb{C}$.

Como $Q_{2(n_0+m)+1}(\psi_{N_{k_\nu}}, z) = \rho_{n_0+m}(\psi_{N_{k_\nu}}, z)$ e $Q_{2n_0}(\psi, z) = \rho_{n_0}(\psi, z) = \prod_{j=1}^{n_0} (z - e^{i\omega_j})$, então, para $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_{(n_0+m)}(\psi_{N_{k_\nu}}, z) = V_m^{(1)}(z) \prod_{j=1}^{n_0} (z - e^{i\omega_j}),$$

onde $V_m^{(1)}(z)$ é um polinômio de grau m com todos os zeros no disco $|z| < 1$.

A seguir, damos uma ilustração do fato que acabamos de mostrar.

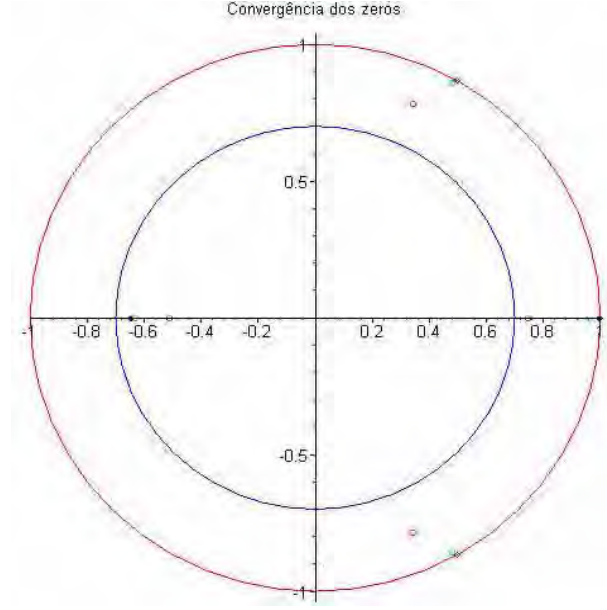
Exemplo 3.2.1. *Consideremos o sinal*

$$x(m) = e^{im0} + e^{im\pi/3} + e^{im5\pi/3},$$

onde as amplitudes são $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$, as únicas frequências são $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \pi/3$ e $\omega_3 = 5\pi/3$, com $n_0 = 3$ e $e^{\omega_1} = 1$, $e^{\omega_2} = 0.5 + 0.866025i$ e $e^{\omega_3} = 0.5 - 0.866025i$.

Apresentamos os zeros $z(j, n_0, N)$, de $\rho_4(\psi_N, z)$, para diferentes valores de N . Notamos que $z(j, n_0, N)$, para $j = 1, 2, 3$ convergem para os pontos de frequência. Já $|z(4, n_0, N)|$ é limitado por 0.7.

j	$z(j, n_0, 10)$	$z(j, n_0, 100)$	$z(j, n_0, 1000)$	$z(j, n_0, 100000)$	pontos frequência
1	0.7453	0.9654	0.9964	0.99997	$e^{i\omega_1} = 1$
2	0.3453-0.7836i	0.4794-0.8595i	0.4979-0.8654i	0.49998-0.86601i	0.5-0.866025i
3	0.3453+0.7836i	0.4794+0.8595i	0.4979+0.8654i	0.49998+0.86601i	0.5+0.866025i
4	-0.5123	-0.6329	-0.6456	-0.647	



3.3 O R-processo

O R-processo é uma extensão do N-processo para o uso dos polinômios de Szegő no problema de análise de frequência. Este método consiste em fazer uma perturbação nos momentos $\mu_m^{(N)}$ obtendo uma nova sequência $\{\mu_m^{(R)}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ dada por

$$\mu_m^{(R)} = R^{|m|} \mu_m^{(N)}, \quad 0 < R < 1, \quad N \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Estes novos momentos estão associados a uma nova medida $\psi_N^{(R)}(e^{i\theta})$. Para esta medida $\psi_N^{(R)}(e^{i\theta})$ temos os polinômios de Szegő $\rho_n(\psi_N^{(R)}, z)$ associados.

O objetivo do próximo resultado, extraído de [12], é mostrar que

$$d\psi_N^{(R)}(e^{i\theta}) \rightarrow d\psi^{(R)}(e^{i\theta}), \quad \text{quando } N \rightarrow \infty,$$

no sentido de convergência fraca e no mesmo sentido de convergência fraca mostrar que

$$d\psi^{(R)}(e^{i\theta}) \rightarrow d\psi(e^{i\theta}), \quad \text{quando } R \rightarrow 1^-.$$

Teorema 3.6. *A medida $\psi_N^{(R)}$ converge “fracamente” para a medida discreta ψ , ou seja*

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi_N^{(R)}(e^{i\theta}) \right] = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}). \quad (3.11)$$

Demonstração: Seja

$$F_N(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi_N(e^{i\theta}), \quad N = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Então, para $0 < R < 1$, a função $F_N(Rz)$ é analítica e $\operatorname{Re}(F_N(Rz)) > 0$ para $|z| < 1$ e $F_N(0) > 0$. Disto segue que a função $F_N(Rz)$ é uma função de Carathéodory, assim, por (2.29) existe uma $\psi_N^{(R)}(e^{i\theta})$ tal que

$$F_N(Rz) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + Rz}{e^{i\theta} - Rz} d\psi_N^{(R)}(e^{i\theta}), \quad |z| < 1. \quad (3.13)$$

Para $|z| < 1$, por (3.12) temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(Rz) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + Rz}{e^{i\theta} - Rz} d\psi_N(e^{i\theta}), \quad (3.14)$$

usando (3.7) obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(Rz) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + Rz}{e^{i\theta} - Rz} d\psi(e^{i\theta}) = F(Rz). \quad (3.15)$$

Portanto $F(Rz)$ é uma função de Carathéodory, logo por (2.29) existe uma medida $\psi^{(R)}(e^{i\theta})$ tal que

$$F(Rz) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi^{(R)}(e^{i\theta}), \quad |z| < 1. \quad (3.16)$$

Assim de (3.13) e (3.16) temos

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(Rz) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi_N^{(R)}(e^{i\theta}) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi^{(R)}(e^{i\theta}) = F(Rz), \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

disto é possível mostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi_N^{(R)}(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi^{(R)}(e^{i\theta}), \quad (3.17)$$

onde f é contínua com período 2π . Daí temos que quando $N \rightarrow \infty$, $d\psi_N^{(R)}(e^{i\theta})$ converge “fracamente” para $d\psi^{(R)}(e^{i\theta})$.

Notemos também que vale a convergência de $d\psi^{(R)}(e^{i\theta})$ para $d\psi(e^{i\theta})$, quando $R \rightarrow 1^-$, isto segue do fato que

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} F(Rz) = \lim_{R \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + Rz}{e^{i\theta} - Rz} d\psi(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi(e^{i\theta}). \quad (3.18)$$

E também é possível mostrar que

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi^{(R)}(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}) \quad (3.19)$$

onde f é contínua com período 2π . Portanto de (3.17) e (3.19) temos o resultado desejado. ■

O resultado mais importante deste processo é dado pelo seguinte teorema, obtido em [12].

Teorema 3.7. *Seja $n > n_0$ e $0 < R < 1$ dados. Então,*

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N^{(R)}, z) \right] = \tilde{\rho}_n(z), \quad (3.20)$$

para $z \in \mathbb{C}$, onde

$$\tilde{\rho}_n(z) := \prod_{j=1}^{n_0} (z - e^{i\omega_j}) \prod_{p=1}^{n-n_0} (z - z_p^{(n)}), \quad (3.21)$$

e $|z_p^{(n)}| \leq 1$, para $1 \leq p \leq n - n_0$.

Demonstração: Primeiramente observemos que com $\mu_m^{(N)}$ como em (3.6) a sequência $\{\mu_m^{(R)}\} = \{R^{|m|} \mu_m^{(N)}\}$ é uma sequência hermitiana positiva definida para todo $R \in (0, 1)$. Para n fixo como em (2.8) obtemos o correspondente polinômio de Szegő $\rho_n(\psi_N^{(R)}, z)$, associado à medida $\psi_N^{(R)}$

$$\rho_n(\psi_N^{(R)}, z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}^{(N,R)}} \begin{vmatrix} \mu_0^{(N)} & \mu_{-1}^{(N)} R & \dots & \mu_{-n}^{(N)} R^n \\ \mu_1^{(N)} R & \mu_0^{(N)} & \dots & \mu_{-n+1}^{(N)} R^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1}^{(N)} R^{n-1} & \mu_{n-2}^{(N)} R^{n-2} & \dots & \mu_{-1}^{(N)} R \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix},$$

onde

$$\Delta_{n-1}^{(N,R)} = \begin{vmatrix} \mu_0^{(N)} & \mu_{-1}^{(N)} R & \dots & \mu_{-n+1}^{(N)} R^{n-1} \\ \mu_1^{(N)} R & \mu_0^{(N)} & \dots & \mu_{-n+2}^{(N)} R^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1}^{(N)} R^{n-1} & \mu_{n-2}^{(N)} R^{n-2} & \dots & \mu_0^{(N)} \end{vmatrix}.$$

Tomando o limite quando $N \rightarrow \infty$ separadamente no numerador e no denominador, obtemos que o limite do denominador é diferente de zero, isto é, o determinante de Toeplitz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_{n-1}^{(N,R)} \neq 0,$$

pois a sequência $\{R^{|m|}\mu_m^{(N)}\}$ é hermitiana definida positiva.

Logo, temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N^{(R)}, z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta_{n-1}^{(N,R)}} \left| \begin{array}{cccc} \mu_0^{(N)} & \mu_{-1}^{(N)} R & \dots & \mu_{-n}^{(N)} R^n \\ \mu_1^{(N)} R & \mu_0^{(N)} & \dots & \mu_{-n+1}^{(N)} R^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1}^{(N)} R^{n-1} & \mu_{n-2}^{(N)} R^{n-2} & \dots & \mu_{-1}^{(N)} R \\ 1 & z & \dots & z^n \end{array} \right|$$

$$\stackrel{N \rightarrow \infty}{=} \frac{\left| \begin{array}{cccc} \mu_0 & \mu_{-1} R & \dots & \mu_{-n} R^n \\ \mu_1 R & \mu_0 & \dots & \mu_{-n+1} R^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} R^{n-1} & \mu_{n-2} R^{n-2} & \dots & \mu_{-1} R \\ 1 & z & \dots & z^n \end{array} \right| + O(1/N)}{\Delta_{n-1}^{(R)} + O(1/N)}.$$

Portanto, para todo $n \geq 1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N^{(R)}, z) = \rho_n(\psi^{(R)}, z). \quad (3.22)$$

Podemos notar que $\psi^{(R)}$ é o limite quando $N \rightarrow \infty$ da medida $\psi_N^{(R)}$.

O segundo limite quando $R \rightarrow 1^-$, é um tanto mais complicado, pois o denominador para $n > n_0$ pode tender a zero.

Uma forma de resolver este problema é fazer uma mudança de variável tomando $R = 1 - h$, o numerador e o denominador na fórmula para $\rho_n(\psi^{(R)}, z)$ serão polinômios em h . Tínhamos $R \rightarrow 1^-$, com essa mudança teremos $h \rightarrow 0^+$.

Com a mudança de variável teremos que o maior grau do polinômio em h no denominador será menor ou igual ao maior grau do polinômio em h no numerador e portanto o limite quando $h \rightarrow 0^+$ existe. Da mesma forma prova-se a existência do limite para os coeficientes de reflexão $\delta_n^{(N,R)}$.

Consideremos $\delta_n^{(N,R)}$, $n \geq 0$, o coeficiente de reflexão gerado pela sequência de momentos $\{\mu_n^{(R)}\} = \{R^{|n|}\mu_n^{(N)}\}$. Em particular $\delta_0^{(N,R)} = \mu_0^{(N)}$. Para $n \geq 1$ temos

$$\delta_n^{(N,R)} = \frac{(-1)^n}{\Delta_{n-1}^{(N,R)}} \left| \begin{array}{cccc} \mu_{-1}^{(N)} R & \mu_{-2}^{(N)} R^2 & \dots & \mu_{-n}^{(N)} R^n \\ \mu_0^{(N)} & \mu_{-1}^{(N)} R & \dots & \mu_{-n+1}^{(N)} R^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-2}^{(N)} R^{n-2} & \mu_{n-3}^{(N)} R^{n-3} & \dots & \mu_{-1}^{(N)} R \end{array} \right|, \quad (3.23)$$

como a seqüência de momentos é uma seqüência hermitiana positiva definida, o determinante no denominador é diferente de zero. Agora, tomando o limite $N \rightarrow \infty$ em (3.23), temos

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_n^{(N,R)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\Delta_{n-1}^{(N,R)}} \begin{vmatrix} \mu_{-1}^{(N)} R & \mu_{-2}^{(N)} R^2 & \dots & \mu_{-n}^{(N)} R^n \\ \mu_0^{(N)} & \mu_{-1}^{(N)} R & \dots & \mu_{-n+1}^{(N)} R^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-2}^{(N)} R^{n-2} & \mu_{n-3}^{(N)} R^{n-3} & \dots & \mu_{-1}^{(N)} R \end{vmatrix}, \\ &\stackrel{N \rightarrow \infty}{=} \frac{(-1)^n}{\Delta_{n-1}^{(R)} + O(1/N)} \begin{vmatrix} \mu_{-1} R & \mu_{-2} R^2 & \dots & \mu_{-n} R^n \\ \mu_0 & \mu_{-1} R & \dots & \mu_{-n+1} R^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-2} R^{n-2} & \mu_{n-3} R^{n-3} & \dots & \mu_{-1} R \end{vmatrix} + O(1/N), \end{aligned}$$

isto é,

$$\delta_n^{(N,R)} = \delta_n^{(R)} + O(1/N), \quad N \rightarrow \infty.$$

E independentemente do valor de $R \in (0, 1)$ temos $|\delta_n^{(R)}| \leq 1$, pois a seqüência contínua sendo hermitiana positiva-definida.

Novamente fazendo a mudança de variável com $R = 1 - h$, o coeficiente de reflexão $\delta_n^{(R)}$ se torna uma função racional de h , onde o maior grau da função no denominador é no máximo igual ao maior grau da função no numerador e, portanto, o limite

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \delta_n^{(R)} = \tilde{\delta}_n, \quad n \geq 1$$

existe e $|\tilde{\delta}_n| \leq 1$. Para $n = 0$ temos $\delta_0^{(R)} = \tilde{\delta}_0 = \mu_0$.

Concluindo, temos que o seguinte limite

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_n^{(N,R)} \right] = \lim_{R \rightarrow 1^-} \delta_n^{(R)} = \tilde{\delta}_n,$$

existe para algum inteiro não negativo n .

Portanto, temos que os coeficientes para os polinômios de Szegő são funções contínuas dos coeficientes de reflexão, isto nos mostra a existência do limite para (3.20).

É importante notar que para $n \leq n_0$ podemos trocar a ordem dos limites e portanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\lim_{R \rightarrow 1^-} R^{|n|} \mu_n^{(N)} \right] = \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} R^{|n|} \mu_n^{(N)} \right]$$

e neste caso nenhum denominador se anulará. Portanto para $n \leq n_0$ temos

$$\tilde{\delta}_n = \delta_n \tag{3.24}$$

em particular $|\tilde{\delta}_{n_0}| = |\delta_{n_0}| = 1$. Os números δ_n são somente definidos para $0 \leq n \leq n_0$, ao passo que os números $\tilde{\delta}_n$ são definidos para todo inteiro não negativo n .

Para provarmos (3.21), na fração contínua (2.20) os coeficientes de reflexão $\delta_n^{(N)}$ serão trocados por $\delta_n^{(R)}$, logo temos

$$\rho_n(\psi^{(R)}, z) = Q_{2n+1}(\psi^{(R)}, z) \quad e \quad \rho_n^*(\psi^{(R)}, z) = Q_{2n}(\psi^{(R)}, z), \quad 0 \leq n \leq n_0.$$

Para $n \geq n_0$, usando o resultado obtido em (2.22) para $n = n_0$ obtemos

$$Q_{2n_0+1}(\psi^{(R)}, z) = \delta_{n_0}^{(R)} Q_{2n_0}(\psi^{(R)}, z) + (1 - |\delta_{n_0}^{(R)}|^2) z Q_{2n_0-1}(\psi^{(R)}, z).$$

Novamente, por (2.22) temos que

$$Q_{2n+1}(\psi^{(R)}, z) = \delta_n^{(R)} Q_{2n}(\psi^{(R)}, z) + (1 - |\delta_n^{(R)}|^2) z Q_{2n-1}(\psi^{(R)}, z),$$

que também pode ser expresso da seguinte maneira

$$Q_{2n+1}(\psi^{(R)}, z) = D_n(z, R) Q_{2n_0}(\psi^{(R)}, z) + C_n(z, R) (1 - |\delta_{n_0}^{(R)}|^2) z Q_{2n_0-1}(\psi^{(R)}, z), \quad (3.25)$$

onde C_n e D_n são polinômios.

Sabemos que o limite para cada termo separadamente quando $R \rightarrow 1^-$ existe e, como $|\delta_{n_0}^{(R)}| = |\tilde{\delta}_{n_0}| = 1$, logo

$$Q_{2n+1}(\psi^{(R)}, z) = D_n(z, R) Q_{2n_0}(\psi^{(R)}, z).$$

Usando o Teorema 3.3 associado a $\psi^{(R)}$ temos que

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 1^-} [Q_{2n+1}(\psi^{(R)}, z)] &= \lim_{R \rightarrow 1^-} [D_n(z, R) Q_{2n_0}(\psi^{(R)}, z)] \\ &= D_n(z) Q_{2n_0}(\psi, z) = D_n(z) Q_{2n_0+1}(\psi, z) = D_n(z) \rho_{n_0}(\psi, z) \\ &= D_n(z) \prod_{j=1}^{n_0} (z - e^{i\omega_j}) = \tilde{\rho}_n(z). \end{aligned}$$

Portanto $\tilde{\rho}_n(z)$ é um polinômio mônico de grau n e $\prod_{j=1}^{n_0} (z - e^{i\omega_j})$ é um polinômio mônico de grau n_0 , então $D_n(z)$ é um polinômio mônico de grau $n - n_0$, e portanto

$$D_n(z) = \prod_{p=1}^{n-n_0} (z - z_p^{(n)}).$$

Como (3.25) é um polinômio de Szegő então todos seus zeros estão em $|z| < 1$, logo os zeros de $D_n(z)$ estão $|z_p^{(n)}| \leq 1$. ■

Como vimos no teorema anterior, para $n > n_0$, existem $n - n_0$ zeros que não são pontos de frequência, assim obtemos uma maneira de determinar o número de pontos de frequência n_0 . O próximo resultado, encontrado em [14], além de distinguir os zeros que não convergem aos pontos de frequência (zeros desinteressantes) ele nos dá uma constante que limita esses zeros no círculo unitário.

Teorema 3.8. *Para cada $n > n_0$, existe uma constante $k_n \in (0, 1)$ tal que*

$$|z_p^{(n)}| \leq k_n, \quad p = 1, 2, \dots, n - n_0,$$

onde $z_p^{(n)}$ são os zeros desinteressantes.

No N-processo, como já dissemos, a seqüência de polinômios de Szegő pode não ser convergente. Isso não acontece no R-processo, no entanto, um parâmetro R é incorporado ao problema, tornando este processo computacionalmente mais lento.

Consideremos agora

$$Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z) = \rho_n(\psi_N^{(R)}, z) + w \rho_n^*(\psi_N^{(R)}, z), \quad \text{com } |w| = 1,$$

polinômios para-ortogonais associados a medida $\psi_N^{(R)}$. Para os zeros de $Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z)$ e seus correspondentes pesos de quadratura, usaremos a notação $z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) = e^{i\theta_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w)}$ e $\lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w)$, $m = 1, 2, \dots, n$ respectivamente.

O próximo resultado trata de informações importantes a respeito do comportamento das raízes de $Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z)$, bem como sobre o comportamento dos pesos da fórmula de quadratura associada a esses polinômios. Aqui fizemos uma extensão dos resultados obtidos em [6], para o R-processo.

Teorema 3.9. *Seja*

1. *Para $n \geq 1$ fixo, temos*

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] = \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi),$$

onde $\lambda_m(\psi)$ são os módulos das amplitudes que aparecem em (3.3).

2. *Seja $n > n_0$ fixo. Seja M uma seqüência arbitrária de números naturais e considere, também, w um valor arbitrário tal que $|w| = 1$. Então existe um polinômio $U_{n-n_0}(\psi, w, z)$ de grau $n - n_0$ tal que*

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z) \right] = U_{n-n_0}(\psi, w, z) \rho_{n_0}(\psi, z).$$

Demonstração:

1. Pelo Teorema 3.6 temos

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\psi_N^{(R)}(e^{i\theta}) \right] &= \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\int_0^{2\pi} d\psi^{(R)}(e^{i\theta}) \right] \\ &= \int_0^{2\pi} d\psi(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi). \end{aligned}$$

Por outro lado, como a quadratura de Szegő é exata para $f(z) \equiv 1$, temos que

$$\int_0^{2\pi} d\psi_N^{(R)}(e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^n \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w),$$

daí concluímos que

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] = \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi).$$

2. Fazendo $m = n - n_0$ no item 2 do Teorema 3.5, temos que existe uma seqüência de números naturais M , e uma seqüência de polinômios $\{B_{n-n_0}(\{M\}, z)\}$ cada um com grau $n - n_0$, tais que

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N^{(R)}, z) \right] = B_{n-n_0}(\{M\}, z) \rho_{n_0}^*(\psi, z), \quad n \geq n_0, \quad (3.26)$$

onde a convergência é uniforme em $\mathbb{C}$.

Lembremos que $Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z) = \rho_n(\psi_N^{(R)}, z) + w \rho_n^*(\psi_N^{(R)}, z)$, disso temos

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z) \right] = \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N^{(R)}, z) + w \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n^*(\psi_N^{(R)}, z) \right].$$

Usando a expressão (3.26), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z) \right] &= B_{n-n_0}(\{M\}, z) \rho_{n_0}^*(\psi, z) + w B_{n-n_0}^*(\{M\}, z) \rho_{n_0}(\psi, z) \\ &= B_{n-n_0}(\{M\}, z) \rho_{n_0}^*(\psi, z) + w z^{n-n_0} B_{n-n_0}(\{M\}, 1/z) \rho_{n_0}(\psi, z). \end{aligned}$$

Daí

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z) \right] = \rho_{n_0}(\psi, z) \left(B_{n-n_0}(\{M\}, z) \frac{\rho_{n_0}^*(\psi, z)}{\rho_{n_0}(\psi, z)} + w B_{n-n_0}^*(\{M\}, z) \right), \quad (3.27)$$

como por (3.4) temos $\rho_{n_0}^*(\psi, z) = \pm \rho_{n_0}(\psi, z)$. Portanto (3.27) implica que

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z) \right] = \rho_{n_0}(\psi, z) U_{n-n_0}(\psi, w, z),$$

onde

$$U_{n-n_0}(\psi, w, z) = (-1)^{\pm 1} (B_{n-n_0}(\{M\}, z)) + w B_{n-n_0}^*(\{M\}, z).$$

■

Denotemos por $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_0}$ e $\xi_{n_0+1}(w), \xi_{n_0+2}(w), \dots, \xi_n(w)$ os zeros de $\rho_{n_0}(\psi, z)$ e $U_{n-n_0}(\psi, w, z)$, respectivamente. De maneira geral assumimos que

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] = \xi_m, \quad m = 1, 2, \dots, n_0$$

e

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] = \xi_m(w), \quad m = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n,$$

isto é, vamos ordenar os zeros, onde as raízes de $U_{n-n_0}(\psi, \omega, z)$ pode ou não coincidir com os pontos de frequência, isto é, com os zeros de $\rho_{n_0}(\psi, z)$.

Os próximos resultados sobre o comportamento de $\lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w)$ foram obtidos através de uma extensão dos resultados dados em [6].

Teorema 3.10. *Seja $n > n_0$.*

1. *Se a seqüência $\{z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w)\}$ converge para um ponto diferente de um ponto de frequência, então*

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] = 0.$$

2. *Suponhamos que $\xi_{n_0+m}(w) = \xi_m$ para $m = 1, 2, \dots, p$, isto é, pode ocorrer zeros múltiplos e que $\xi_1, \dots, \xi_{n_0}, \xi_{n_0+p+1}(w), \dots, \xi_n(w)$ sejam pontos distintos. Então,*

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) + \lambda_{n,n_0+m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] &= \lambda_m(\psi), \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, p, \\ \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] &= \lambda_m(\psi), \quad \text{para } m = p + 1, \dots, n_0, \\ \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] &= 0, \quad \text{para } m = n_0 + p + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

3. *Em particular, se as raízes de $U_{n-n_0}(\psi, w, z)\rho_{n_0}(\psi, z)$ são simples, então,*

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] &= \lambda_m(\psi), \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, n_0, \\ \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] &= 0, \quad \text{para } m = n_0 + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Demonstração:

1. Considerando os polinômios de Szegő ortonormais $\varphi_j(\psi_N^{(R)}, z)$, de modo análogo ao que foi descrito para obter (1.14) (ver [21]) obtemos

$$\lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) = \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^n |\varphi_j(\psi_N^{(R)}, z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w))|^2 \right)}. \quad (3.28)$$

Podemos notar que $|\varphi_{n_0}(\psi_N^{(R)}, z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w))|^2$ é um termo da soma no denominador, lembrando que $\varphi_{n_0}(\psi_N^{(R)}, z)$ é um polinômio de Szegő ortonormal, isto é, pode ser escrito como

$$\varphi_{n_0}(\psi_N^{(R)}, z) = \left(\prod_{j=1}^{n_0} (1 - |\rho_j(\psi_N^{(R)}, 0)|^2) \right)^{-1/2} \rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, z),$$

logo temos

$$|\varphi_{n_0}(\psi_N^{(R)}, z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w))|^2 = \frac{|\rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w))|^2}{\prod_{j=1}^{n_0} (1 - |\rho_j(\psi_N^{(R)}, 0)|^2)}.$$

Lembrando que

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] = \xi_m,$$

temos que

$$|\rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w))| \longrightarrow |\rho_{n_0}(\psi, \xi_m)|,$$

quando $N \rightarrow \infty$ e $R \rightarrow 1^-$, que é diferente de zero desde que ξ_m não seja um ponto de frequência, podemos observar que $|\rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, 0)| \rightarrow 1$.

Daí segue que,

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} |\varphi_{n_0}(\psi_N^{(R)}, z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w))|^2 \right] = \infty.$$

Portanto de (3.28), temos que

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] = \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^n |\varphi_j(\psi_N^{(R)}, z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w))|^2 \right)^{-1} \right] = 0.$$

2. Primeiramente suponhamos que $z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \rightarrow \xi_m$ quando $N \rightarrow \infty$ e $R \rightarrow 1^-$ para $m = 1, 2, \dots, n_0$ e $m = n_0 + p + 1, \dots, n$ e, além disso, que $z_{n,n_0+j}(\psi_N^{(R)}, w) \rightarrow \xi_j$, para $j = 1, 2, \dots, p$ com $1 \leq p \leq n_0$. Vamos supor também que, $\xi_k \neq \xi_m$ para $k = n_0 + p + 1, \dots, n$ e $m = 1, 2, \dots, n_0$ e, também, que os pontos $\xi_{n_0+p+1}, \dots, \xi_n$ sejam distintos, ou seja, os zeros $U_{n-n_0}(\psi, w, z) \rho_{n_0}(\psi, z)$ que são pontos de frequência tem multiplicidade no máximo 2 e aqueles que não são pontos de frequência são simples.

Consideremos os seguintes polinômios

$$L_k^R(z) = \frac{(z - z_{n,1}(\psi_N^{(R)}, w)) \dots (z - z_{n,k-1}(\psi_N^{(R)}, w))}{(z_{n,k}(\psi_N^{(R)}, w) - z_{n,1}(\psi_N^{(R)}, w)) \dots (z_{n,k}(\psi_N^{(R)}, w) - z_{n,k-1}(\psi_N^{(R)}, w))} \times \frac{(z - z_{n,k+1}(\psi_N^{(R)}, w)) \dots (z - z_{n,n}(\psi_N^{(R)}, w))}{(z_{n,k}(\psi_N^{(R)}, w) - z_{n,k+1}(\psi_N^{(R)}, w)) \dots (z_{n,k}(\psi_N^{(R)}, w) - z_{n,n}(\psi_N^{(R)}, w))}. \quad (3.29)$$

Agora consideremos os polinômios $T_n^j(z)$ definidos por

$$T_n^j(z) = (z - z_{n,1}(\psi_N^{(R)}, w)) \dots (z - z_{n,j-1}(\psi_N^{(R)}, w))(z - z_{n,j+1}(\psi_N^{(R)}, w)) \dots (z - z_{n,n_0+j-1}(\psi_N^{(R)}, w))(z - z_{n,n_0+j+1}(\psi_N^{(R)}, w)) \dots (z - z_{n,n}(\psi_N^{(R)}, w)), \quad (3.30)$$

para $j = 1, 2, \dots, p$, podemos então escrever

$$L_j^R(z) = \frac{(z - z_{n,n_0+j}(\psi_N^{(R)}, w))T_n^j(z)}{(z_{n,j}(\psi_N^{(R)}, w) - z_{n,n_0+j}(\psi_N^{(R)}, w))T_n^j(z_{n,j}(\psi_N^{(R)}, w))}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (3.31)$$

$$L_{n_0+j}^R(z) = \frac{(z - z_{n,j}(\psi_N^{(R)}, w))T_n^j(z)}{(z_{n,n_0+j}(\psi_N^{(R)}, w) - z_{n,j}(\psi_N^{(R)}, w))T_n^j(z_{n,n_0+j}(\psi_N^{(R)}, w))}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (3.32)$$

De (3.31) e (3.32) temos que

$$L_j^R(z) + L_{n_0+j}^R(z) = \frac{T_n^j(z)P_j(z)}{T_n^j(z_{n,j}(\psi_N^{(R)}, w))T_n^j(z_{n,n_0+j}(\psi_N^{(R)}, w))}, \quad (3.33)$$

onde

$$\begin{aligned} P_j(z) &= \frac{z - z_{n,n_0+j}(\psi_N^{(R)}, w)}{z_{n,j}(\psi_N^{(R)}, w) - z_{n,n_0+j}(\psi_N^{(R)}, w)} T_n^j(z_{n,n_0+j}(\psi_N^{(R)}, w)) \\ &\quad - \frac{z - z_{n,j}(\psi_N^{(R)}, w)}{z_{n,j}(\psi_N^{(R)}, w) - z_{n,n_0+j}(\psi_N^{(R)}, w)} T_n^j(z_{n,j}(\psi_N^{(R)}, w)), \end{aligned} \quad (3.34)$$

para $j = 1, 2, \dots, p$. Pode se notar que se $z = z_{n,j}(\psi_N^{(R)}, w)$, temos

$$P_j(z_{n,j}(\psi_N^{(R)}, w)) = T_n^j(z_{n,n_0+j}(\psi_N^{(R)}, w)), \quad j = 1, \dots, p \quad \text{com} \quad 1 \leq p \leq n_0.$$

De (3.33), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} [L_j^R(z) + L_{n_0+j}^R(z)] \right] &= \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T_n^j(z)P_j(z)}{T_n^j(z_{n,j}(\psi_N^{(R)}, w))T_n^j(z_{n,n_0+j}(\psi_N^{(R)}, w))} \right] \\ &= \frac{T_n^j(z)P_j(z)}{(T_n^j(\xi_j))^2}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} L_m^R(z) \right] = \pi_m(z),$$

onde

$$\pi_m(z) = \frac{(z - \xi_1)^2 \dots (z - \xi_p)^2 (z - \xi_{p+1}) \dots (z - \xi_{m-1})(z - \xi_{m+1}) \dots (z - \xi_n)}{(\xi_m - \xi_1)^2 \dots (\xi_m - \xi_p)^2 (\xi_m - \xi_{p+1}) \dots (\xi_m - \xi_{m-1})(\xi_m - \xi_{m+1}) \dots (\xi_m - \xi_n)}.$$

Observemos agora que

$$\frac{T_n^m(\xi_m)P_m(\xi_m)}{(T_n^m(\xi_m))^2} = 1, \quad m = 1, 2, \dots, p$$

e, que

$$\frac{T_n^m(\xi_k)P_m(\xi_k)}{(T_n^m(\xi_k))^2} = 0, \quad k \neq m.$$

Temos também que $\pi_m(\xi_k) = 0$ para $k \neq m$ e que $\pi_m(\xi_m) = 1$ para $m = p+1, \dots, n_0$ e $m = n_0 + p+1, \dots, n$.

Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} (\lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) + \lambda_{n,n_0+m}(\psi_N^{(R)}, w)) \right] &= \\ \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (L_m^R(z) + L_{n_0+m}^R(z)) d\psi_N^{(R)}(z) \right] &= \\ = \sum_{k=1}^n \lambda_k(\psi) \frac{T_n^m(\xi_k) P_m(\xi_k)}{(T_n^m(\xi_m))^2} &= \\ = \lambda_m(\psi), \quad m = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] &= \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} L_m^R(z) d\psi_N^{(R)}(z) \right] \\ &= \lim_{R \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} L_m^R(z) d\psi^{(R)}(z) = \int_0^{2\pi} L_m(z) d\psi(z) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k(\psi) \pi_m(\xi_k) = \lambda_m(\psi), \end{aligned}$$

pois $d\psi^{(R)}(\theta)$ converge “fracamente” para $d\psi(\theta)$ quando $R \rightarrow 1^-$, e $\pi_m(\xi_k) = 0, k \neq m$ e $\pi_m(\xi_m) = 1, m = p+1, \dots, n_0$.

Finalmente temos que

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] = \sum_{k=1}^n \lambda_k(\psi) \pi_m(\xi_k) = 0, \quad k \neq m,$$

com $m = n_0 + p+1, \dots, n$.

3. Agora, se as raízes de $Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z)$ são todas simples, temos que

$$\begin{aligned} L_m^R(z) &= \frac{(z - z_{n,1}(\psi_N^{(R)}, w)) \dots (z - z_{n,m-1}(\psi_N^{(R)}, w))}{(z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) - z_{n,1}(\psi_N^{(R)}, w)) \dots (z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) - z_{n,m-1}(\psi_N^{(R)}, w))} \\ &\quad \frac{(z - z_{n,m+1}(\psi_N^{(R)}, w)) \dots (z - z_{n,n}(\psi_N^{(R)}, w))}{(z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) - z_{n,m+1}(\psi_N^{(R)}, w)) \dots (z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) - z_{n,n}(\psi_N^{(R)}, w))} \end{aligned}$$

e

$$\pi_m(z) = \frac{(z - \xi_1) \dots (z - \xi_{m-1})(z - \xi_{m+1}) \dots (z - \xi_n)}{(\xi_m - \xi_1) \dots (\xi_m - \xi_{m-1})(\xi_m - \xi_{m+1}) \dots (\xi_m - \xi_n)}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] &= \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} L_m^R(z) d\psi_N^{(R)}(z) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k(\psi) \pi_m(\xi_k) = \lambda_m(\psi), \quad m = 1, \dots, n_0 \end{aligned}$$

e

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] = 0, \quad m = n_0 + 1, \dots, n.$$

■

A seguir demonstraremos um resultado sobre as raízes dos polinômios para-ortogonais, que afirma que para cada N e $0 < R < 1$, podemos identificar as raízes $z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w)$ de $Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z)$ tal que $\lim_{R \rightarrow 1^-} [\lim_{N \rightarrow \infty} z_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w)] = \xi_m$. Para demonstrarmos este resultado precisaremos dos polinômios definidos em [3] pela seguinte relação de recorrência

$$Q_m(n, \psi, w, z) = zQ_{m-1}(n, \psi, w, z) + zw\bar{\delta}_{n+1-m}Q_{m-1}^*(n, \psi, w, z),$$

para $m = 1, 2, \dots, n$, com $Q_0(n, \psi, w, z) = Q_0^*(n, \psi, w, z) = 1$, $\delta_n = \rho_n(\psi, 0)$ e $|w| = 1$.

Observemos que $Q_m(n, \psi, w, z)$ é mônico de grau n .

Teorema 3.11. *As seguintes sentenças são válidas.*

1. Para qualquer z no disco $\{z : |z| = 1\}$,

$$|Q_m(n, \psi, w, z)| \leq |z| \prod_{j=1}^m (1 + |\delta_{n+1-j}|)$$

e

$$0 < \prod_{j=1}^m (1 - |\delta_{n+1-j}|) \leq |Q_m^*(n, \psi, w, z)| \leq \prod_{j=1}^m (1 + |\delta_{n+1-j}|),$$

para $m = 1, 2, \dots, n$

2. $Y_n(\psi, w, z) = Q_m(n, \psi, w, z)\rho_{n-m}(\psi, z) + wQ_m^*(n, \psi, w, z)\rho_{n-m}^*(\psi, z)$, para $m = 1, 2, \dots, n$.

3. As m raízes de $Q_m(n, \psi, w, z)$ estão todas no disco unitário aberto $\{z : |z| < 1\}$.

Teorema 3.12. *Seja $n > n_0$ fixo. Então para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $N(\varepsilon)$ tal que para todo $N \geq N(\varepsilon)$, cada um dos arcos $\{z : |z| = 1 \text{ e } |z - \xi_m| < \varepsilon\}$, $m = 1, 2, \dots, n_0$, contém pelo menos um zero de $Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z)$.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.11, temos que

$$Y_n(\psi, w, z) = Q_m(n, \psi, w, z)\rho_{n-m}(\psi, z) + wQ_m^*(n, \psi, w, z)\rho_{n-m}^*(\psi, z),$$

para $m = 1, 2, \dots, n$. Daí fazendo $m = n - n_0$, e substituindo $\delta_n^{(N)}$ por $\delta_n^{(R)}$ obtemos

$$|Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z)| = |Q_{n-n_0}(n, \psi_N^{(R)}, w, z)\rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, z) + wQ_{n-n_0}^*(n, \psi_N^{(R)}, w, z)\rho_{n_0}^*(\psi_N^{(R)}, z)|.$$

Portanto, se considerarmos a integral

$$\int_{\mathcal{C}} |Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z)| d\psi(z),$$

obtemos usando fórmula de quadratura no círculo unitário (2.44) que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} |Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z)| d\psi(z) &= \int_{\mathcal{C}} |\rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, z)| |Q_{n-n_0}(n, \psi_N^{(R)}, w, z) \\ &\quad + k_m Q_{n-n_0}^*(n, \psi_N^{(R)}, w, z)| d\psi(z) \\ &= \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi) |\rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, \xi_m)| |Q_{n-n_0}(n, \psi_N^{(R)}, w, \xi_m) \\ &\quad + k_m Q_{n-n_0}^*(n, \psi_N^{(R)}, w, \xi_m)|, \end{aligned}$$

onde $k_m = \omega \rho_{n_0}^*(\psi_N^{(R)}, \xi_m) / \rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, \xi_m)$, para $m = 1, 2, \dots, n_0$.

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} |Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z)| d\psi(z) &\leq \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi) |\rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, \xi_m)| (|Q_{n-n_0}(n, \psi_N^{(R)}, w, \xi_m)| \\ &\quad + |k_m| |Q_{n-n_0}^*(n, \psi_N^{(R)}, w, \xi_m)|) \\ &\leq \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi) |\rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, \xi_m)| \left(|z| \prod_{j=1}^{n-n_0} (1 + |\delta_{n+1-j}^{(N,R)}|) + |k_m| \prod_{j=1}^{n-n_0} (1 + |\delta_{n+1-j}^{(N,R)}|) \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Como podemos observar $|k_m| = 1$ e, (3.35) torna-se então

$$\int_{\mathcal{C}} |Y_n(\psi_N^{(R)}, w, z)| d\psi(z) \leq \underbrace{2 \left(\prod_{j=1}^{n-n_0} (1 + |\delta_{n+1-j}^{(N,R)}|) \right)}_A \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi) |\rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, \xi_m)|. \quad (3.36)$$

Como

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, z) \right] = \rho_{n_0}(\psi, z) \quad e \quad |\delta_{n+1-j}^{(N,R)}| < 1, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n - n_0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi) |\rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, \xi_m)| \right] &= \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi) \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} |\rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, \xi_m)| \right] \\ &= \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m(\psi) |\rho_{n_0}(\psi, \xi_m)| = \int_{\mathcal{C}} |\rho_{n_0}(\psi, z)| d\psi(z) \end{aligned}$$

mas

$$\int_{\mathcal{C}} |\rho_{n_0}(\psi, \xi_m)| d\psi(z) = \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} |\rho_{n_0}(\psi_N^{(R)}, \xi_m)| d\psi(z) \right] = 0, \quad (3.37)$$

pois $\xi_m = e^{iw_m}$ são as raízes de $\rho_{n_0}(\psi, z)$ para $m = 1, 2, \dots, n_0$.

Logo, temos de (3.36) e (3.37) que

$$0 \leq \int_C |Y_n(\psi_N^{(R)}, \omega, z)| d\psi(z) \leq A * 0 = 0,$$

pois A é limitado. Assim obtemos

$$\int_C |Y_n(\psi_N^{(R)}, \omega, z)| d\psi(z) = 0, \quad \text{ou} \quad \text{seja} \quad |Y_n(\psi_N^{(R)}, \omega, z)| = 0,$$

logo concluímos que existe ao menos uma raiz do polinômio para-ortogonal no arco $\{z : |z| = 1 \text{ e } |z - \xi_m| < \varepsilon\}$. ■

Um resultado imediato dos teoremas anteriores é dado pelo seguinte teorema, que é uma extensão do teorema obtido em [3].

Teorema 3.13. *Seja $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos $Y_j(\varepsilon) = (\omega_j - \varepsilon, \omega_j + \varepsilon)$, $j = 1, 2, \dots, n_0$, satisfazem*

$$Y_j(\varepsilon) \subset (0, 2\pi) \quad \text{e} \quad \omega_k \notin Y_j(\varepsilon) \quad \text{se} \quad k \neq j.$$

Seja $\hat{Y}(\varepsilon) = [0, 2\pi] \setminus \bigcup_{j=1}^{n_0} Y_j(\varepsilon)$. Então

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\theta_{n,k}(\psi_N^{(R)}, w) \in Y_j(\varepsilon)} \lambda_{n,k}(\psi_N^{(R)}, w) \right] &= \lambda_j(\psi), \quad j = 1, 2, \dots, n_0, \\ \lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\theta_{n,k}(\psi_N^{(R)}, w) \in \hat{Y}(\varepsilon)} \lambda_{n,k}(\psi_N^{(R)}, w) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Demonstração: Note que $Y_j(\varepsilon)$ contém apenas uma frequência w_j para $j = 1, 2, \dots, n_0$. Note ainda que $\hat{Y}(\varepsilon)$ não contém valores w_j que sejam frequências. Assim, pelo Teorema 3.10 (1.), temos $\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{n,m}(\psi_N^{(R)}, w) \right] = 0$, daí

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\theta_{n,k}(\psi_N^{(R)}, w) \in \hat{Y}(\varepsilon)} \lambda_{n,k}(\psi_N^{(R)}, w) \right] = 0.$$

Utilizando o mesmo argumento para $\theta_{n,k}(\psi_N^{(R)}, \omega) \in \hat{Y}(\varepsilon)$, tal que $\theta_{n,k}(\psi_N^{(R)}, \omega) \notin Y_j(\varepsilon)$ pelo Teorema 3.10 (1.),

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{n,k}(\psi_N^{(R)}, w) \right] = 0,$$

daí pelo Teorema 3.10 (2.) e 3.10 (3.) temos $\lambda_{n,j}(\psi_N^{(R)}, w) = \lambda_j(\psi)$. Assim, para $j = 1, 2, \dots, n_0$ observando que $Y_j(\varepsilon)$ contém apenas uma frequência,

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\theta_{n,k}(\psi_N^{(R)}, w) \in Y_j(\varepsilon)} \lambda_{n,k}(\psi_N^{(R)}, w) \right] = \lambda_j(\psi).$$

■

Em [17], Petersen, combinou as vantagens desses dois métodos tomando $R = R(N)$ como uma função de N , tal que $N \rightarrow \infty \Leftrightarrow R \rightarrow 1^-$. Com o objetivo de manter a ordem em que os limites são aplicados no R -processo, foi tomado

$$R(N) = 1 - \frac{1}{N^\alpha},$$

onde $\alpha \in (0, 1)$, pois desta forma, $\frac{1}{N^\alpha} \rightarrow 0$ mais rápido que $R(N) \rightarrow 1^-$, e foi mostrado que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N^{(R(N))}, z) = \lim_{R \rightarrow 1^-} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N^{(R)}, z) \right).$$

Além disso, foi mostrado em [17] que se $\alpha \geq 1$, então a seqüência de polinômios de Szegő $\rho_n(\psi_N^{(R(N))}, z)$ nem sempre é convergente.

Capítulo 4

Polinômios ortogonais reais em análise de frequência

Neste capítulo, abordaremos o problema de análise de frequência, através do uso dos polinômios ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ devido aos polinômios para-ortogonais estudados anteriormente, baseados no trabalho [3]. Posteriormente faremos o mesmo estudo de análise de frequência mas com polinômios no intervalo $[0, 1]$, isto é possível devido ao uso de medidas simétricas. A principal vantagem de se usar polinômios ortogonais no intervalo $[0, 1]$ é que conseguimos reduzir pela metade o número de operações para o cálculo das raízes.

4.1 Polinômios ortogonais em $[-1, 1]$

Relembremos que estamos interessados em determinar as frequências ω_j , $j = 1, 2, \dots, n_0$ através de N valores observados de $\{x(m)\}_{-\infty}^{\infty}$,

$$x(m) = \begin{cases} \gamma_0 e^{im\pi} + \sum_{j=1}^I (\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}), & m = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & m < 0 \text{ e } m > N-1. \end{cases} \quad (4.1)$$

A medida ψ_N é definida por

$$\psi'_N(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi N} |X_N(e^{i\theta})|^2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \text{onde} \quad X_N(z) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) z^{-m}, \quad (4.2)$$

e a medida discreta ψ é dada por

$$\psi(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k(\psi) H(\theta - \omega_k), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad z = e^{i\theta}, \quad (4.3)$$

onde $\lambda_k(\psi) = |\gamma_k|^2$, $k = 1, 2, \dots, n_0$.

Para $i = 1, -1$, considere os polinômios mônicos $P_m^{(i)}(\phi_N^{(i)}, x)$, $m = 1, 2, \dots$, que satisfazem a relação de recorrência

$$P_{m+1}^{(i)}(\phi_N^{(i)}, x) = xP_m^{(i)}(\phi_N^{(i)}, x) - \alpha_{m+1}^{(i)}(N)P_{m-1}^{(i)}(\phi_N^{(i)}, x), \quad m \geq 1, \quad (4.4)$$

com $P_0^{(i)}(\phi_N^{(i)}, x) = 1$, $P_1^{(i)}(\phi_N^{(i)}, x) = x$ e

$$\alpha_{m+1}^{(1)}(N) = \frac{1}{4}(1 + \delta_{m-1}^{(N)})(1 - \delta_m^{(N)}) \quad e \quad \alpha_{m+1}^{(-1)}(N) = \frac{1}{4}(1 - \delta_m^{(N)})(1 + \delta_{m+1}^{(N)}),$$

onde $\delta_m^{(N)} = \rho_n(\psi_N, 0)$.

Pelo Teorema 2.9, os polinômios $P_m^{(i)}(\phi_N^{(i)}, x)$, $m = 0, 1, \dots$ são polinômios ortogonais mônicos associados com a medida positiva $\phi_N^{(i)}(x)$ em $[-1, 1]$, onde

$$d\phi_N^{(1)}(\cos(\theta/2)) = \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} d\phi_N^{(-1)}(\cos(\theta/2)) = -d\psi_N(e^{i\theta}), \quad (4.5)$$

com $x = \cos(\theta/2)$. Através da transformação

$$x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2}), \quad (4.6)$$

obtemos $P_m^{(i)}(\phi_N^{(i)}, x(z)) = (4z)^{-m/2} R_m^{(i)}(\psi_N, z)$.

Anteriormente vimos que o Teorema 2.10 fornece informações a respeito do comportamento das raízes e dos pesos das fórmulas de quadratura associadas aos polinômios $P_m^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$ e $P_m^{(-1)}(\phi_N^{(-1)}, x)$, respectivamente. Vamos nos restringir ao estudo apenas dos polinômios $P_m^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$, pois os resultados e demonstrações para $P_m^{(-1)}(\phi_N^{(-1)}, x)$ são análogos.

Consideremos as fórmulas de quadratura gaussianas relacionadas a $P_m^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$

$$\int_{-1}^1 g(x) d\phi_N^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^n W_{n,j}^{(1)}(N) g(x_{n,j}^{(1)}(N)),$$

onde $x_{n,j}^{(1)}(N)$ e $W_{n,j}^{(1)}(N)$ são as raízes e os pesos das fórmulas de quadratura associadas aos polinômios $P_n^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$. Então, pelo Teorema 2.10, temos

$$\begin{aligned} x_{n,j}^{(1)}(N) &= \cos(\theta_{n,j}(N, 1)/2), \\ j &= 1, 2, \dots, n, \\ W_{n,j}^{(1)}(N) &= \lambda_{n,j}(N, 1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Notando que as frequências ω_k estão ordenadas da forma

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n_0} < 2\pi,$$

como $z = e^{i\theta}$, de (4.6) temos que

$$x = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos(\theta/2), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

assim tomamos $\zeta_k = \cos(\omega_k/2)$ que são ordenados como segue

$$-1 < \zeta_{n_0} < \zeta_{n_0-1} < \dots < \zeta_2 < \zeta_1 < 1.$$

Agora, ordenando os zeros de $P_n^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$ da forma

$$-1 < x_{n,n}^{(1)}(N) < \dots < x_{n,2}^{(1)}(N) < x_{n,1}^{(1)}(N) < 1,$$

utilizando as relações (4.7) e $\zeta_k = \cos(w_k/2)$, $k = 1, 2, \dots, n_0$ nos teoremas 3.13 e 3.12, obtemos um resultado que pode ser utilizado para aproximar os pontos de frequência e os módulos das amplitudes de um dado sinal através dos nós e dos pesos da fórmula de quadratura associados.

Teorema 4.1. *Seja $n \geq n_0$ fixo.*

1. *Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que, para todo $N \geq N(\varepsilon)$, cada intervalo da forma $(\zeta_m - \varepsilon, \zeta_m + \varepsilon)$, $m = 1, 2, \dots, n_0$, contém pelo menos um zero de $P_n^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$.*
2. *Seja $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos $\Delta_j(\varepsilon) = (\zeta_j - \varepsilon, \zeta_j + \varepsilon)$, $j = 1, 2, \dots, n_0$, satisfazem*

$$\Delta_j(\varepsilon) \subset (-1, 1) \quad e \quad \zeta_k \notin \Delta_j(\varepsilon) \quad se \quad k \neq j.$$

Se $\hat{\Delta}(\varepsilon) = [-1, 1] \setminus \bigcup_{j=1}^{n_0} \Delta_j(\varepsilon)$, então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{x_{n,k}^{(1)}(N) \in \Delta_j(\varepsilon)} W_{n,k}^{(1)}(N) = \lambda_j(\psi) \quad e \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{x_{n,k}^{(1)}(N) \in \hat{\Delta}(\varepsilon)} W_{n,k}^{(1)}(N) = 0.$$

Podemos notar no resultado anterior, que para cada N , podemos identificar zero $x_{n,m}^{(1)}(N)$, $m = 1, 2, \dots, n_0$, de $P_n^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$ onde a sequência de zeros tem como limite o ponto de frequência ζ_m , observando se $\lim \sum W_{n,k}^{(1)}(N) \neq 0$. Temos que a segunda parte, nos fornece uma maneira de encontrar o módulo das amplitudes $\lambda_j(\psi)$.

Apresentaremos, agora, um resultado importante que nos fornece informações sobre o comportamento assintótico da medida $\phi_N^{(1)}(x)$ e dos polinômios $P_n^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$, quando $1 \leq n \leq n_0$.

Teorema 4.2. *Temos*

1.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 g(x) d\phi_N^{(1)}(x) = \int_{-1}^1 g(x) d\phi(x), \quad \forall g \in C[-1, 1]. \quad (4.8)$$

2. Para cada n fixo, $1 \leq n \leq n_0$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_n^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x) = P_n(\phi, x), \quad x \in [-1, 1],$$

onde $P_n(\phi, x)$ são os polinômios ortogonais com relação à medida $\phi(x)$. Em particular,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{n_0}^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x) = P_{n_0}(\phi, x) = \prod_{m=1}^{n_0} (x - \zeta_m), \quad x \in [-1, 1],$$

onde $\zeta_m = \cos(w_m/2)$.

Demonstração:

1. Fazendo $x = \cos(\theta/2)$ e substituindo em (4.8) obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 g(x) d\phi_N^{(1)}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{2\pi}^0 g(\cos(\theta/2)) d\phi_N^{(1)}(\cos(\theta/2)),$$

como

$$d\phi_N^{(1)}(\cos(\theta/2)) = -d\psi_N(e^{i\theta})$$

e tomando $g(\cos(\theta/2)) = f(e^{i\theta})$ temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{2\pi}^0 g(\cos(\theta/2)) d\phi_N^{(1)}(\cos(\theta/2)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi_N(e^{i\theta})$$

daí pelo Teorema 3.1 temos

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi_N(e^{i\theta}) &= \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}) = \int_{2\pi}^0 f(e^{i\theta}) (-d\psi(e^{i\theta})) \\ &= \int_{2\pi}^0 g(\cos(\theta/2)) d\phi^{(1)}(\cos(\theta/2)) \\ &= \int_{-1}^1 g(x) d\phi^{(1)}(x). \end{aligned}$$

2. Das relações de $P_n^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$ e $R_n^{(1)}(\psi_N, x)$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_n^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (4z)^{-n/2} R_n^{(1)}(\psi_N, z) \\ &= (4z)^{-n/2} \lim_{N \rightarrow \infty} R_n^{(1)}(\psi_N, x) \\ &= (4z)^{-n/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\rho_n(\psi_N, z) + \rho_n^*(\psi_N, z)}{1 + \rho_n(\psi_N, 0)} \right) \end{aligned}$$

como para $1 \leq n \leq n_0$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N, z) = \rho_n(\psi, z) = \tilde{\rho}_n(z),$$

logo

$$(4z)^{-n/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\rho_n(\psi_N, z) + \rho_n^*(\psi_N, z)}{1 + \rho_n(\psi_N, 0)} \right) = (4z)^{-n/2} R_n^{(1)}(\psi, z) = P_n^{(1)}(\phi, x).$$

Em particular, para $n = n_0$ é análogo. ■

O próximo teorema trata do comportamento das seqüências convergentes das raízes distintas dos polinômios $P_n^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$.

Teorema 4.3. *Seja $n > n_0$ fixo. Seja M uma seqüência de números naturais e, para cada $N \in M$, considere $y(1, N) > y(2, N) > y(3, N)$ três raízes distintas de $P_n^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$ tais que os limites*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} y(j, N) = y(j), \quad j = 1, 2, 3,$$

existem. Então as seguintes sentenças são válidas.

1. *não é possível que se tenha $y(1) = y(2) = y(3)$, isto é, as três seqüências acima terem o mesmo limite,*
2. *se $y(1) = y(2)$, isto é, se duas seqüências de raízes têm um limite em comum, este limite deve ser igual a um ponto de freqüência, isto é,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} y(1, N) = \lim_{N \rightarrow \infty} y(2, N) = \zeta_m, \quad \text{para algum } m = 1, 2, \dots, n_0.$$

Agora, com todos estes resultados obtidos temos as ferramentas necessárias para encontrar aproximações para os valores das freqüências. Primeiramente determinamos os coeficientes $\alpha_m^{(1)}(N)$, da relação de recorrência (4.4), que é obtido através de uma versão especial do algoritmo modificado de Chebyshev:

Algoritmo 4.1

Para $l = 0, 1, \dots, n-1$ **faça**

$$d_{0,l} = \mu_l^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{m=l}^{N-1} x(m)x(m-l).$$

Para $l = 0, 1, \dots, n-2$ **faça**

$$\begin{aligned} d_{1,l} &= d_{0,l+1} + d_{0,l}, \quad l = 0, 1, \dots, n-2, \\ \hat{d}_2 &= 2 \frac{d_{1,0}}{d_{0,0}}. \end{aligned}$$

Para $k = 2, 3, \dots, n-1$ **faça**

Para $l = 0, 1, \dots, n-k-1$ **faça**

$$\begin{aligned} d_{k,l} &= d_{k-1,l+1} + d_{k-1,l} - \hat{d}_k d_{k-2,l+1}, \\ \hat{d}_{k+1} &= \frac{d_{k,0}}{d_{k-1,0}}. \end{aligned}$$

Daí segue

Para $k = 2, \dots, n$ **faça**

$$\alpha_k^{(1)}(N) = \frac{1}{4} \hat{d}_k.$$

Observação. Este algoritmo requer a ordem de $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$ multiplicações e divisões, para obter a seqüência dos coeficientes $\{\alpha_k^{(1)}(N)\}_{k=2}^n$.

Feito isto, determinamos os zeros $x_{n,k}^{(1)}(N)$ e os pesos $W_{n,k}^{(1)}(N)$ associados com os polinômios ortogonais $P_n^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$. Estes podem ser gerados através do problema de auto-valores associados com matriz de Jacobi simétrica, $J_n(d)$ dada abaixo

$$J_n(d) = \begin{pmatrix} d & \sqrt{\alpha_2^{(1)}(N)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha_2^{(1)}(N)} & d & \sqrt{\alpha_3^{(1)}(N)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_3^{(1)}(N)} & d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d & \sqrt{\alpha_n^{(1)}(N)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_n^{(1)}(N)} & d \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Os auto-valores da $J_n(d)$ são $d + x_{n,k}^{(1)}(N)$, $k = 1, 2, \dots, n$, e se η_k é um auto-vetor normalizado associado com o auto-valor $d + x_{n,k}^{(1)}(N)$, então

$$W_{n,k}^{(1)}(N) = (\eta_{1,k})^2 \mu_0^{(N)}.$$

Notemos que aqui estamos calculando os autovalores de uma matriz de ordem n .

Finalmente, usando os resultados dados nos Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3, determinamos o número de freqüências n_0 , as freqüências ω_n e o módulo das amplitudes $\lambda_n(\psi)$, observando o comportamento de $x_{n,k}^{(1)}(N)$ e $W_{n,k}^{(1)}(N)$ para crescentes valores de N .

Exemplo

Daremos aqui um exemplo encontrado em [3] que nos mostra que o método proposto é muito viável.

Exemplo 4.1.1. *Consideremos o sinal*

$$x(m) = \sum_{j=1}^3 (\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}), \quad (4.10)$$

onde $n_0 = 6$, $\omega_1 = \pi/3$, $\omega_2 = \pi/2$, $\omega_3 = 4\pi/5$, $\omega_6 = 2\pi - \omega_1$, $\omega_5 = \pi/2 - \omega_2$, $\omega_4 = 4\pi/5 - \omega_3$, $\gamma_1 = \gamma_6 = 10$, $\gamma_2 = \gamma_5 = 4$ e $\gamma_3 = \gamma_4 = 1$.

Esperamos que os zeros interessantes positivos de $P_n^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$ e os correspondentes pesos de quadratura, quando $N \rightarrow \infty$, converjam para os valores

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \cos(\pi/6) = 0.86602540 \dots, & \lambda_1 &= 100, \\ \zeta_2 &= \cos(\pi/4) = 0.70710678 \dots, & \lambda_2 &= 16, \\ \zeta_3 &= \cos(2\pi/5) = 0.30901699 \dots, & \lambda_3 &= 1. \end{aligned}$$

Tabela 4.1: Zeros positivos de $P_n^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$, para $n = 14$, e correspondentes pesos de quadratura para o sinal dado por (4.10).

N	4096	16384	65536	262144	1048576
$x_{n,1}^{(1)}(N)$	.989212594	.989299970	.989210625	.989299581	.989210502
$x_{n,2}^{(1)}(N)$	.906162462	.906761986	.906133429	.906755808	.906131609
$x_{n,3}^{(1)}(N)$	.865979840	.866014421	.866022554	.866024717	.866025225
$x_{n,4}^{(1)}(N)$	.707215505	.707135396	.707113588	.707108570	.707107206
$x_{n,5}^{(1)}(N)$	.607312636	.611289737	.607296488	.611295467	.607295454
$x_{n,6}^{(1)}(N)$	.309555993	.309108278	.309050983	.309022710	.309019119
$x_{n,7}^{(1)}(N)$	.150003490	.142155835	.150181242	.142175633	.150192479
$W_{n,1}^{(1)}(N)$	.112888e-1	.287092e-2	.705654e-3	.179437e-3	.441037e-4
$W_{n,2}^{(1)}(N)$	.153277e+0	.373171e-1	.960046e-2	.233339e-2	.600109e-3
$W_{n,3}^{(1)}(N)$	.998523e+2	.999642e+2	.999907e+2	.999977e+2	.999994e+2
$W_{n,4}^{(1)}(N)$	.160273e+2	.160061e+2	.160017e+2	.160003e+2	.160001e+2
$W_{n,5}^{(1)}(N)$	.301059e-1	.774932e-2	.188245e-2	.484465e-3	.117656e-3
$W_{n,6}^{(1)}(N)$	.100595e+1	.100141e+1	.100037e+1	.100008e+1	.100002e+1
$W_{n,7}^{(1)}(N)$	.730947e-2	.198729e-2	.458248e-3	.124244e-3	.286460e-4

Na Tabela 4.1, apenas os zeros positivos de $P_{14}^{(1)}(\phi_N^{(1)}, x)$ e os correspondentes pesos de quadratura para diferentes valores de N são apresentados. Observando os pesos de quadratura

$W_{14,1}^{(1)}(N)$, $W_{14,2}^{(1)}(N)$, $W_{14,5}^{(1)}(N)$ e $W_{14,7}^{(1)}(N)$ que se aproximam de 0, somos capazes de determinar número de pontos de frequência n_0 , eliminando os zeros desinteressantes $x_{14,1}^{(1)}(N)$, $x_{14,2}^{(1)}(N)$, $x_{14,5}^{(1)}(N)$ e $x_{14,7}^{(1)}(N)$. Já os zeros interessantes $x_{14,3}^{(1)}(N)$, $x_{14,4}^{(1)}(N)$ e $x_{14,6}^{(1)}(N)$ notemos que estes convergem para os limites ζ_1 , ζ_2 e ζ_3 respectivamente. Destes limites os correspondentes pesos de quadratura podem ser recuperados dos valores λ_1 , λ_2 e λ_3 , observando os pesos $W_{14,3}^{(1)}(N)$, $W_{14,4}^{(1)}(N)$, $W_{14,6}^{(1)}(N)$.

4.2 Polinômios ortogonais em $[0,1]$

Nesta seção veremos um resultado que fornece uma relação entre a fórmula de quadratura associada aos polinômios ortogonais em $[-1,1]$ e a associada aos polinômios ortogonais em $[0,1]$.

Sejam a medida positiva $\phi(x)$ no intervalo $[0,1]$ e a medida positiva $\varphi(x)$ definida num intervalo simétrico $[-1,1]$.

Relembremos do Teorema 1.7 e da Seção 1.5 que $S_{2m}(x) = U_m(x^2)$, onde $U_m(x)$ satisfaz a seguinte relação de recorrência

$$U_{m+1}(x) = (x - c_{m+1})U_m(x) - b_{m+1}U_{m-1}(x), \quad m = 0, 1, \dots,$$

com $U_{-1}(x) = 0$, $U_0(x) = 1$, $b_m \neq 0$ e $b_1 = \mu_0^{(\phi)}$.

Consideremos a fórmula de quadratura gaussiana a $\varphi(x)$ que é exata para x^s , quando $0 \leq s \leq 2n - 1$, agora com $n = 2m$, obtemos

$$\int_{-1}^1 x^{2s} d\varphi(x) = \sum_{j=1}^{2m} t_{2m,j}(x_{2m,j})^{2s}, \quad 0 \leq s \leq 2(2m) - 1, \quad (4.11)$$

como o intervalo é simétrico, x^{2s} é uma função par, assim obtemos de (4.11) que

$$2 \int_0^1 x^{2s} d\varphi(x) = 2 \sum_{j=1}^m t_{2m,j}(x_{2m,j})^{2s}, \quad 0 \leq s \leq 2m - 1, \quad (4.12)$$

daí fazendo a mudança de $u = x^2$ obtemos

$$\int_0^1 u^s d\varphi(\sqrt{u}) = \sum_{j=1}^m t_{2m,j}(x_{2m,j})^{2s}, \quad 0 \leq s \leq 2m - 1, \quad (4.13)$$

ou seja,

$$\int_0^1 u^s d\phi(u) = \sum_{j=1}^m t_{2m,j}(x_{2m,j}^2)^s, \quad 0 \leq s \leq 2m - 1, \quad (4.14)$$

isto é, fazendo a mudança de intervalo $[-1,1]$ para o intervalo $[0,1]$, notamos que os pesos da regra de quadratura não mudam, apenas os nós se alteram.

Veremos como ficam as raízes de $U_m(x)$, que são os nós da fórmula de quadratura acima.

Sabemos que $\{U_m(x)\}$ é uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos para $\phi(x)$ e que $\{S_m(x)\}$ é uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos para $\varphi(x)$. Pelo Teorema 1.7 $S_{2m}(x) = U_m(x^2)$ logo se $\bar{x}$ é raiz de $S_{2m}(x)$ então

$$0 = S_{2m}(\bar{x}) = U_m(\bar{x}^2),$$

logo $\bar{x}^2$ é raiz de $U_m(x)$, utilizando o resultado do Teorema 2.10, onde

$$x_{2m,k}^{(1)} = \cos\left(\frac{1}{2}\theta_{m,k}(1)\right), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

são as raízes do polinômio $P_{2m}^{(1)}(x)$, juntamente com a relação trigonométrica

$$\frac{\cos\left(\theta_{m,k}(1)\right) + 1}{2} = \cos^2\left(\frac{1}{2}\theta_{m,k}(1)\right).$$

Como $x_{2m,k}^{(1)} = \cos\left(\frac{1}{2}\theta_{m,k}(1)\right)$, temos então

$$y_{m,k} = (x_{2m,k}^{(1)})^2 = \frac{\cos(\theta_{m,k}(1)) + 1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

são as raízes de $U_m(x)$.

4.3 Problema de análise de frequência

Utilizaremos aqui polinômios ortogonais no intervalo $[0,1]$, para tratar o problema de análise de frequência.

Primeiramente determinamos os coeficientes c_{m+1} e b_{m+1} , da relação de recorrência (1.20), para $U_m(x)$ obtido através de uma versão do algoritmo modificado de Chebyshev:

Algoritmo 4.2

Para $l = 0, 1, \dots, m-1$ **faça**

$$d_{0,l} = \mu_l^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=l}^{N-1} x(k)x(k-l).$$

Para $l = 0, 1, \dots, m-2$ **faça**

$$\begin{aligned} d_{1,l} &= d_{0,l+1} + d_{0,l}, \\ \hat{d}_2 &= 2 \frac{d_{1,0}}{d_{0,0}}, \\ c_1 &= \frac{1}{4} \hat{d}_2. \end{aligned}$$

Para $k = 2, 3, \dots, m - 1$ **faça**

Para $l = 0, 1, \dots, n - k - 1$ **faça**

$$\begin{aligned} d_{k,l} &= d_{k-1,l+1} + d_{k-1,l} - \hat{d}_k d_{k-2,l+1}, \\ \hat{d}_{k+1} &= \frac{d_{k,0}}{d_{k-1,0}}. \end{aligned}$$

De (1.29) e $mi = \lfloor m/2 \rfloor$

Para $k = 1, 2, \dots, mi$ **faça**

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \frac{1}{4}(\hat{d}_{2k+1} + \hat{d}_{2k+2}), \\ b_{k+1} &= \frac{1}{16}\hat{d}_{2k}\hat{d}_{2k+1}. \end{aligned}$$

Observação: Este algoritmo requer a ordem de $\frac{m^2}{2} + m + 1$ multiplicações e divisões, para determinar as seqüências dos coeficientes $\{c_{m+1}\}$ e $\{b_{m+1}\}$.

O próximo passo é determinar os zeros $y_{m,k}$ e os pesos $t_{2m,j}$ associados com os polinômios ortogonais $U_m(x)$, que são gerados através do problema de auto-valores associados com matriz simétrica de Jacobi J dada abaixo

$$J = \begin{pmatrix} c_1 & \sqrt{b_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{b_2} & c_2 & \sqrt{b_3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b_3} & c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{m-1} & \sqrt{b_m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{b_m} & c_m \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Os auto-valores da matriz J são $y_{m,k}$, $k = 1, 2, \dots, m$, e se η_k é um auto-vetor normalizado associado com o auto-valor $y_{m,k}$, então

$$t_{2m,k} = (\eta_{k,1})^2 \mu_0^{(\varphi)}.$$

Finalmente, usando os resultados dados nos Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3 agora para o intervalo $[0,1]$, determinamos o número de frequências n_0 , as frequências ω_m e o módulo da amplitudes λ_m , observando o comportamento de $y_{m,k}$ e $t_{2m,k}$ para crescentes valores de N .

Como vimos em (4.9) para calcular as raízes de $P_n^{(1)}$ que aproximam as frequências, calculamos os autovalores de uma matriz de ordem $n = 2m$, já em (4.15) para calcular as raízes de $U_m(x)$ que também aproximam as frequências, o cálculo dos autovalores se tornam bem mais rápidos pois a ordem da matriz é m .

Exemplo

Aqui daremos o mesmo exemplo da seção anterior com algoritmo 4.2 e notemos que o método proposto nesta seção é muito viável. Todos os cálculos foram realizados utilizando o software Maple da mesma forma que na seção anterior.

Exemplo 4.3.1. *Consideremos o sinal*

$$x(m) = \sum_{j=1}^3 (\gamma_j e^{im\omega_j} + \gamma_{n_0+1-j} e^{im\omega_{n_0+1-j}}), \quad (4.16)$$

onde $n_0 = 6$, $\omega_1 = \pi/3$, $\omega_2 = \pi/2$, $\omega_3 = 4\pi/5$, $\omega_6 = 2\pi - \omega_1$, $\omega_5 = \pi/2 - \omega_2$, $\omega_4 = 4\pi/5 - \omega_3$, $\gamma_1 = \gamma_6 = 10$, $\gamma_2 = \gamma_5 = 4$ e $\gamma_3 = \gamma_4 = 1$.

Esperamos que os zeros interessantes de $U_m(x)$ e os correspondentes pesos de quadratura, quando $N \rightarrow \infty$, converjam para os valores

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{\cos(4\pi/5) + 1}{2} = 0.09549150 \dots, & \lambda_1 &= 1, \\ \zeta_2 &= \frac{\cos(\pi/2) + 1}{2} = 0.50000000 \dots, & \lambda_2 &= 16, \\ \zeta_3 &= \frac{\cos(\pi/3) + 1}{2} = 0.75000000 \dots, & \lambda_3 &= 100. \end{aligned}$$

Para este exemplo, analisamos os zeros de $U_7(x)$ para diferentes valores de N .

Tabela 4.2: Zeros de $U_m(x)$, para $m = 7$, e correspondentes pesos de quadratura para o sinal dado por (4.16).

N	4096	16384	65536	262144	1048576
$y_{m,1}(N)$	.02250105	.02020828	.02255441	.02021391	.02255778
$y_{m,2}(N)$	.09582491	.09554793	.09551251	.09549503	.09549282
$y_{m,3}(N)$	.36882864	.37367551	.36880902	.37368215	.36880777
$y_{m,4}(N)$	.50015377	.50004047	.50000963	.50000253	.50000006
$y_{m,5}(N)$	.74992108	.74998098	.74999506	.74999881	.74999969
$y_{m,6}(N)$	.82113041	.82221730	.82107779	.82220609	.82107449
$y_{m,7}(N)$	.97854156	.97871443	.97853766	.97871366	.97853741
$W_{m,1}^{(1)}(N)$	.730947e-2	.198729e-2	.458248e-3	.124245e-3	.286461e-4
$W_{m,2}^{(1)}(N)$	.100596e+1	.100142e+1	.100037e+1	.100009e+1	.100002e+1
$W_{m,3}^{(1)}(N)$	.301059e-1	.774933e-2	.188245e-2	.484465e-3	.117656e-3
$W_{m,4}^{(1)}(N)$	.160273e+2	.160062e+2	.160017e+2	.160004e+2	.160001e+2
$W_{m,5}^{(1)}(N)$	.998523e+2	.999642e+2	.999907e+2	.999977e+2	.999994e+2
$W_{m,6}^{(1)}(N)$	.153277e+0	.373171e-1	.960046e-2	.233339e-2	.600110e-3
$W_{m,7}^{(1)}(N)$	.112889e-1	.287092e-2	.705654e-3	.179438e-3	.441038e-4

Na Tabela 4.2, damos os zeros de $U_7(x)$ e os correspondentes pesos de quadratura. Observando os pesos de quadratura $W_{7,1}^{(1)}(N)$, $W_{7,3}^{(1)}(N)$, $W_{7,6}^{(1)}(N)$ e $W_{7,7}^{(1)}(N)$ que se aproximam de 0, facilmente eliminamos os zeros desinteressantes $y_{7,1}$, $y_{7,3}$, $y_{7,6}$ e $y_{7,7}$ e, assim somos capazes de determinar o número de pontos de frequência n_0 . Notemos que os zeros interessantes $y_{7,2}$, $y_{7,4}$ e $y_{7,5}$ convergem para os limites ζ_1 , ζ_2 e ζ_3 respectivamente. Destes limites os correspondentes pesos de quadratura podem ser recuperados dos valores λ_1 , λ_2 e λ_3 , observando os pesos que não se aproximam de 0.

Considerações finais

No decorrer deste trabalho, conhecemos várias propriedades dos polinômios de Szegő como, por exemplo, a maneira como estes polinômios estão relacionados as HPC-frações e, também, a localização de suas raízes. Tais polinômios são bastantes utilizados na solução do problema de análise de frequência, que significa encontrar as frequências

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n_0} < 2\pi$$

de um sinal trigonométrico discreto $x(m)$ para $m = 0, 1, \dots, N-1$. Apresentamos dois métodos para aproximar as frequências, baseados, em trabalhos como [3, 6, 9, 11, 13].

O primeiro método utilizado neste trabalho, emprega os zeros dos polinômios de Szegő $\rho_n(\psi_N, z)$, gerados pela medida ψ_N construída à partir de $x(m)$, convergindo para os pontos de frequências $e^{i\omega_j}$ quando $N \rightarrow \infty$, onde tomamos polinômios de grau $n \geq n_0$, e n_0 indica a quantidade de pontos de frequência. Quando $n = n_0$, vimos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{n_0}(\psi_N, z) = \rho_{n_0}(\psi, z) = \prod_{j=1}^{n_0} (z - e^{i\omega_j}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

No entanto, quando o grau de $\rho_n(\psi_N, z)$ é maior que n_0 , temos para $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_{(n_0+m)}(\psi_{N_{k_\nu}}, z) = V_m^{(1)}(z) \prod_{j=1}^{n_0} (z - e^{i\omega_j}),$$

onde $V_m^{(1)}(z)$ é um polinômio de grau $m = n - n_0$ com todos os zeros no disco $|z| < 1$. $V_m^{(1)}(z)$ depende da subsequência $\{N_{k_\nu}\}$, ou seja, para $n > n_0$, fixo, os polinômios de Szegő, podem não ser convergentes.

O segundo método utilizado neste trabalho, consiste em fazer uma perturbação nos momentos $\mu_m^{(N)}$ obtendo uma nova sequência $\{\mu_m^{(R)}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ dada por

$$\mu_m^{(R)} = R^{|m|} \mu_m^{(N)}, \quad 0 < R < 1, \quad N \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Estes novos momentos estão associados a uma nova medida $\psi_N^{(R)}$. Para esta medida $\psi_N^{(R)}$ temos os polinômios de Szegő $\rho_n(\psi_N^{(R)}, z)$ associados. O resultado mais importante deste método é que para $n > n_0$ e $0 < R < 1$ dados, temos,

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N^{(R)}, z) \right] = \tilde{\rho}_n(z),$$

para $z \in \mathbb{C}$, onde

$$\tilde{\rho}_n(z) := \prod_{j=1}^{n_0} (z - e^{i\omega_j}) \prod_{p=1}^{n-n_0} (z - z_p^{(n)}),$$

e $|z_p^{(n)}| \leq 1$, para $1 \leq p \leq n - n_0$, ou seja, o limite sempre existe sem precisar tomar subsequências de $\{N\}$.

Vimos também os polinômios para-ortogonais, gerados por uma combinação de um polinômio de Szegő com seu recíproco, observamos que estes possuem suas raízes no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Através desta propriedade, podemos construir fórmulas de quadratura no círculo unitário $\mathcal{C}$. A transformação

$$x = x(z) = \frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2},$$

que foi estudada por Delsarte e Genin [7] e Sri Ranga [19], fornece uma transformação do círculo unitário para o intervalo $[-1, 1]$, através da qual podemos também relacionar polinômios para-ortogonais no círculo unitário com polinômios ortogonais em $[-1, 1]$, isto nos permitiu estudar o problema de análise de frequência utilizando polinômios ortogonais, [13]. Baseados no comportamento das raízes e dos pesos das regras de quadratura associados aos polinômios ortogonais e utilizando os teoremas 4.1 e 4.3, aproxima-se as frequências ω_j e as amplitudes γ_j , observando os pesos que aproximam de 0 eliminamos os zeros desinteressantes, assim somos capazes de determinar o número de frequências n_0 .

Fizemos, também, o estudo de análise de frequência com polinômios no intervalo $[0, 1]$, isto foi possível devido ao uso de medidas simétricas. Com os polinômios no intervalo $[0, 1]$, necessitamos somente encontrar metade das raízes, isto é, somente calculamos raízes positivas.

Como trabalho futuro podemos aplicar a perturbação $R^{|m|}$ nos momentos $\mu^{(N)}$ e estudar o comportamento dos polinômios ortogonais em $[0, 1]$ na determinação das frequências.

Referências Bibliográficas

- [1] BERTI, A. C., AND SRI RANGA, A. Companion orthogonal polynomials: some applications. *Appl. Numer. Maths.* 39 (2001), 127–149.
- [2] BRACCIALI, C. F., DA SILVA, A. P., AND SRI RANGA, A. Szegő polynomials: some relations to L-orthogonal and orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* 153 (2003), 79–88.
- [3] BRACCIALI, C. F., LI, X., AND SRI RANGA, A. Real orthogonal polynomials in frequency analysis. *Math. Comput.* 74 (2005), 341–362.
- [4] BRESSAN, R., MENEGASSO, S. F., AND SRI RANGA, A. Szegő polynomials: quadrature rules on the unit circle and on $[-1,1]$. *Rocky Mountain J. Math.* 33 (2003), 567–584.
- [5] CHIHARA, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, 1978.
- [6] DARUIS, L., NJÅSTAD, O., AND VAN ASSCHE, W. Para-orthogonal polynomials in frequency analysis. *Rocky Mountain J. Math.* 33 (2003), 629–645.
- [7] DELSARTE, P., AND GENIN, Y. V. The split levinson algorithm. *IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Process* 34 (1986), 470–478.
- [8] FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 4ed., Projeto Euclides, IMPA, 1977.
- [9] JONES, W. B., NJÅSTAD, O., AND SAFF, E. B. Szegő polynomials associated with Wiener-Levinson filters,. *J. Comput. Appl. Math.* 32 (1990), 387–407.
- [10] JONES, W. B., NJÅSTAD, O., AND THRON, W. J. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle. *Bulletin of the London Mathematical Society* 21 (1989), 113–152.

- [11] JONES, W. B., NJÅSTAD, O., THRON, W. J., AND WAADELAND, H. Szegő polynomials applied to frequency analysis. *J. Comput. Appl. Math.* 46 (1993), 217–228.
- [12] JONES, W. B., NJÅSTAD, O., AND WAADELAND, H. An alternative way of using Szegő polynomials in frequency analysis. In *Continued fractions and Orthogonal Functions*, I. S. Cooper and W. T. (eds), Eds. Marcel Dekker, Inc., New York, 1994, pp. 145–159.
- [13] JONES, W. B., AND PETERSEN, V. Continued fractions and Szegő polynomials in frequency analysis and related topics. *Acta Applicandae Mathematicae*, 61 (2000), 149–174.
- [14] LI, X. Asymptotics of columns in the table of orthogonal polynomials with varying measure. *Methods and Applications of Analysis* 2(2) (1995), 222–236.
- [15] MILANI, F. F. Polinômios de Szegő e Análise de Frequência. Dissertação de Mestrado, Unesp-Ibilce, 2005.
- [16] PAN, K., AND SAFF, E. B. Asymptotics for zeros of Szegő polynomials associated with trigonometric polynomial sinal. *Journal of Approximation Theory* 71 (1992), 239–251.
- [17] PETERSEN, V. A combination of two methods in frequency analysis: The $R(N)$ -process. In *Orthogonal Functions, Moment Theory, and Continued Fractions: Theory and Applications* (1992), w.b. jones and a. sri ranga, Eds., vol. 199, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel-Dekker Inc., New York, pp. 387–398.
- [18] SACK, R. A., AND DONAVAN, A. F. An algorithm for gaussian quadrature given modified moments. *Numer. Math.* 18 (1971), 465–478.
- [19] SRI RANGA, A. Symmetric orthogonal polynomials and the associated orthogonal L-polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.* 123 (1995), 3136–3141.
- [20] SZEGŐ, G. *Orthogonal Polynomials*, vol. 23. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1975.
- [21] VAN ASSCHE, W. Orthogonal polynomials in the complex plane and the real line. In *Special Functions, q-series and Related Topics* (1997), M. E. H. I. et al., Ed., vol. 14, Field Institute Communications, Amer. Math. Soc., pp. 211–245.