

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MARCOS ROGÉRIO DE SOUZA

Estados Coerentes de Ordem N

Guaratinguetá

2024

Marcos Rogério de Souza

Estados Coerentes de Ordem N

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Física e Astronomia da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Física.

Orientador: Profº Dr. Alvaro de Souza Dutra

Guaratinguetá

2024

S729e	Souza, Marcos Rogério Estados coerentes de ordem N / Marcos Rogério de Souza - Guaratinguetá, 2024. 71 f : il. Bibliografia: f. 63-64 Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2024. Orientador: Prof. Dr. Álvaro de Souza Dutra 1. Estados coerentes. 2. Osciladores harmônicos. 3. Ondas eletromagnéticas. I. Título. CDU 53(043)
-------	--

MARCOS ROGÉRIO DE SOUZA

**ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA E ASTRONOMIA
CURSO: DOUTORADO**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



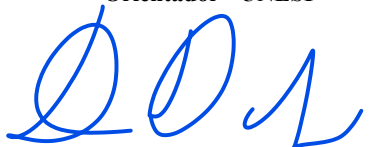
Documento assinado digitalmente

ALVARO DE SOUZA DUTRA

Data: 08/11/2024 10:52:45-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. ALVARO DE SOUZA DUTRA
Orientador - UNESP



Prof. Dr. DENIS DALMAZ
UNESP



Documento assinado digitalmente

SAULO HENRIQUE PEREIRA

Data: 07/11/2024 11:03:42-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA
UNESP



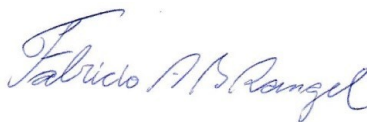
Documento assinado digitalmente

JOAO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS

Data: 06/11/2024 12:28:27-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. JOÃO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS
Universidade Federal de Campina Grande



Prof. Dr. FABRÍCIO AUGUSTO BARONE RANGEL
UNIFEI

NOVEMBRO de 2024

DADOS CURRICULARES

MARCOS ROGÉRIO DE SOUZA

NASCIMENTO 14/07/1990 - Pouso Alegre / MG

FILIAÇÃO Rogério de Souza
Cristina Vicente de Souza

2009 / 2016 Formação acadêmica ou Complementar
(Bacharelado em Física)
Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

2017 / 2019 Formação acadêmica ou Complementar
(Mestrado em Física)
Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

À minha mãe, uma guerreira capaz de mover montanhas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda a minha família - em especial à minha mãe Cristina e à minha irmã Patrícia - pelo apoio incondicional dado a mim desde sempre. Agradeço à minha namorada Daniele, por sempre estar ao meu lado, especialmente nesse último ano de doutorado em que as dificuldades em conciliar o trabalho e o curso se acentuaram. Agradeço ao meu orientador Alvaro, pela paciência e pela palavra amiga sempre que me senti perdido ou "empacado". E à CAPES, pelo suporte financeiro que me permitiu concluir este trabalho.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo investigar o comportamento de estados coerentes de ordem N , definidos como autoestados de potências arbitrárias do operador de abaixamento. Será discutida a generalização da definição de estado coerente para estes estados de ordem N , permitindo que estes possam ser escritos em termos de uma base ortogonal finita e possuam valores esperados para posição e momentum linear oscilantes, caracterizando-os como quasi-clássicos. Algumas questões serão discutidas, como a incerteza associada a estes estados. Será apresentada uma técnica para determinar funções de onda associadas a estes estados, obtendo-se uma forma geral para determinar um conjunto ortonormal de funções para um N .

PALAVRAS-CHAVE: Estados de Glauber. Estados coerentes generalizados. Estados coerentes de ordem N .

ABSTRACT

This work aims to investigate the behavior of N -order coherent states, defined as eigenstates of arbitrary powers of the lowering operator. The generalization of the definition of coherent states to these N -order states will be discussed, allowing them to be written in terms of a finite orthogonal basis and to have oscillating expected values for position and linear momentum, characterizing them as quasi-classical. Several issues will be addressed, such as the uncertainty associated with these states. A technique to determine the wavefunctions associated with these states will be presented, providing a general method for determining an orthonormal set of functions for a given N .

KEYWORDS: Glauber states. Generalized coherent states. N -order coherent states.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Incerteza para $\omega = 10$	40
Figura 2	Incerteza para $\omega = 10^2$	40
Figura 3	Incerteza para $\omega = 10^3$	40
Figura 4	Densidade de Probabilidade para $\beta_0^{(2)}(x, t)$ ($\omega = 1$)	51
Figura 5	Densidade de Probabilidade para $\beta_1^{(2)}(x, t)$ ($\omega = 1$)	52
Figura 6	Densidade de Probabilidade para $\beta_0^{(3)}(x, t)$ ($\omega = 1$)	54
Figura 7	Densidade de Probabilidade para $\beta_1^{(3)}(x, t)$ ($\omega = 1$)	55
Figura 8	Densidade de Probabilidade para $\beta_2^{(3)}(x, t)$ ($\omega = 1$)	56
Figura 9	Densidade de Probabilidade para $\beta_0^{(4)}(x, t)$ ($\omega = 1$)	58
Figura 10	Densidade de Probabilidade para $\beta_1^{(4)}(x, t)$ ($\omega = 1$)	59
Figura 11	Densidade de Probabilidade para $\beta_2^{(4)}(x, t)$ ($\omega = 1$)	60
Figura 12	Densidade de Probabilidade para $\beta_3^{(4)}(x, t)$ ($\omega = 1$)	61

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	ESTADOS COERENTES DO OSCILADOR HARMÔNICO	14
2.1	Definição do Estado Coerente	14
2.1.1	Relação de Completeza e Ortogonalidade	16
2.1.2	Valores Esperados e Relação de Incerteza	17
2.2	Funções de Onda	20
2.3	Estado Coerente como a Atuação do Operador de Deslocamento	22
2.3.1	Definição do Operador de Deslocamento	22
2.3.2	Representação dos Estados Coerentes	23
3	ESTADOS COERENTES DE ORDEM N	25
3.1	Expansão em autoestados de energia	25
3.2	Expansão em uma base ortogonal finita: os estados $ \beta_j^{(N)}\rangle$	26
3.3	Valores Esperados	30
3.4	Incertezas	36
4	FUNÇÕES DE ONDA	41
4.1	Autofunções de $\hat{a}$	41
4.2	Funções de onda ortogonais para os Estados Coerentes generalizados	43
4.3	Algumas Soluções	50
4.3.1	$N = 2$	50
4.3.2	$N = 3$	53
4.3.3	$N = 4$	57
5	COMENTÁRIO FINAIS E ASPIRAÇÕES FUTURAS	62
	REFERÊNCIAS	63
	APÊNDICE A – ALGUNS CÁLCULOS E DEFINIÇÕES	65
A.1	Resultados Importantes do Oscilador Harmônico Quântico	65
A.1.1	Hamiltoniano e Operadores	65
A.1.2	Autoestados e Energias	65
A.1.3	Funções de Onda no Espaço de Coordenadas	65
A.1.4	Comutadores e Relações de Incerteza	66
A.1.5	Operador Número	66
A.2	Redimensionamento do Oscilador Harmônico	66
A.3	Cálculo da integral na relação de completeza	68

A.4	Determinação dos coeficientes de $ \Phi_n^{(N)}\rangle$	68
A.5	Somas envolvendo as raízes da unidade	69
A.5.1	Soma das raízes da unidade	69
A.5.2	Soma envolvida na ortogonalidade das funções $\beta_j^{(N)}$	70

1 INTRODUÇÃO

Os estados coerentes são estados quânticos que apresentam algumas propriedades interessantes, como oscilações harmônicas para valores esperados de posição e momentum linear, que seguem um perfil semelhante ao de um oscilador clássico. Eles têm sido amplamente utilizados em diversas áreas da física, como em experimentos que visam investigar a natureza quântica da luz e na descrição de sistemas atômicos e moleculares (MANDEL; WOLF, 1985; GLAUBER, 1963; WALL, 1963). Eles também são de grande importância na área de condensados de Bose-Einstein, onde são utilizados para descrever a dinâmica de átomos ultra-frios (DALFOVO et al., 1999; PITAEVSKII; STRINGARI, 2003).

Uma primeira versão do que viria a ser chamado de estado coerente foi introduzida por Schrödinger em 1926 (SCHRÖDINGER, 1926). Neste trabalho, Schrödinger discute um pacote de onda formado pela superposição

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{A}{2}\right)^n \phi_n, \quad A \gg 1 \quad (1.1)$$

onde os ϕ_n são as já conhecidas soluções estacionárias para o oscilador harmônico quântico:

$$\phi_n = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) H_n(x) \exp\left(\frac{iE_n t}{\hbar}\right), \quad E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

sendo $H_n(x)$ os Polinômios de Hermite, e usando a variável adimensional de comprimento $x = (q^2 m \omega / \hbar)^{1/2}$, em termos da posição usual q no SI. Calculando soma (1.1) e tomando sua parte real, Schrödinger obteve a expressão:

$$\psi = \exp\left[\frac{1}{4}A^2 - \frac{1}{2}(x - A \cos \omega t)^2\right] \times \cos\left[\frac{1}{2}\omega t + (A \sin \omega t)(x - \frac{1}{2}A \cos \omega t)\right], \quad (1.3)$$

que apresenta perfil gaussiano, com pico em $x = A \cos \omega t$, o que é condizente com a trajetória clássica de um oscilador harmônico. Além disso, no limite $A \rightarrow 0$, esta solução corresponde à parte real do estado fundamental do oscilador:

$$\text{Re}\{\phi_0\} = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cos\left(\frac{1}{2}\omega t\right). \quad (1.4)$$

A discussão sobre tal solução foi aprofundada posteriormente por Glauber (GLAUBER, 1963), motivado por estudos acerca da quantização do campo de radiação. A analogia com o oscilador harmônico já era conhecida e bem estudada nesta época, onde a hamiltoniana do campo eletromagnético poderia ser expressa como

$$H = \int_V (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) dV = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\right), \quad (1.5)$$

e a_k e $a_k^\dagger$ satisfazem a álgebra dos operadores de criação e aniquilação. Por conta desta analogia, soluções diversas soluções análogas aos autoestados de energia do oscilador foram estudadas, ou seja, estados que satisfizessem relações do tipo

$$\begin{aligned}\hat{a}_k |n_k\rangle &\propto |n_k - 1\rangle, \\ \hat{a}_k^\dagger |n_k\rangle &\propto |n_k + 1\rangle.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Tais estados possuem número de fôtons e energia bem definidos, mas baixa coerência (fase indeterminada). Nesse contexto, Glauber propõe outro tipo de estado, que é, de fato, um auto-estado do operador de aniquilação:

$$\hat{a} |Z\rangle = Z |Z\rangle.\tag{1.7}$$

Tais estados, hoje são conhecidos como *estados de Glauber* ou *estados coerentes canônicos*, são estados não ortogonais que formam uma base completa no espaço de estados. No contexto da óptica, estados coerentes representam ondas eletromagnéticas clássicas que exibem a propriedade de coerência, o que significa que sua fase é bem definida e não varia aleatoriamente no tempo (MANDEL; WOLF, 1985).

Neste trabalho, buscaremos estudar a generalização destes estados coerentes, estendendo a definição do estado coerente canônico para estados $|Z_N\rangle$ que são autoestados do operador $\hat{a}^N$. Estes estados podem apresentar características interessantes, entre elas o comportamento quasi-clássico já observado nos estado coerente canônico. Tais estados já foram discutidos na literatura (BUŽEK; JEX; QUANG, 1990), mas uma análise geral sobre propriedades importantes - como valores esperados de posição, momentum e energia - são pouco explorados. Além disso, apresentamos um método ainda não encontrado na literatura para obter funções de onda ortogonais associadas a estes estados.

No capítulo 2, faremos uma breve revisão dos estados coerentes canônicos e de suas principais propriedades.

No capítulo 3 apresentaremos a generalização para estes estados, que podem ser descritos em termos de uma base de estados ortogonais cujos valores esperados para posição e momentum oscilam de forma análoga às respectivas variáveis dinâmicas dos osciladores clássicos.

No capítulo 4, apresentamos uma forma geral para as funções de onda associadas a estes estados coerentes generalizados, e mostraremos estas formam um conjunto ortonormal de funções.

Por fim, no capítulo 5, apresentaremos uma breve retrospectiva do presente trabalho e propostas para estudos futuros.

2 ESTADOS COERENTES DO OSCILADOR HARMÔNICO

Os autoestados de energia $|n\rangle$ do oscilador harmônico quântico são vastamente discutidos na literatura, bem como suas autofunções ϕ_n correspondentes. Estas soluções possuem valores esperados para posição e momentum linear nulos para qualquer instante de tempo, de modo que não é evidente uma analogia entre o oscilador quântico e o oscilador clássico. Entretanto, há uma solução da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico pouco discutida em cursos de graduação, e que apresenta, entre outras propriedades, uma evolução de seus valores esperados (para posição e momentum) que satisfaz a equação clássica do oscilador. Estes estados são chamados de *estados coerentes do oscilador harmônico*, em algumas ocasiões referidos como estados coerentes canônicos ou estados de Glauber (GLAUBER, 1963).

2.1 DEFINIÇÃO DO ESTADO COERENTE

Os estados coerentes $|Z\rangle$ de um oscilador harmônico podem ser definidos como auto-estados do operador de abaixamento:

$$\hat{a} |Z\rangle = Z |Z\rangle; \quad Z \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Podemos construir um estado $|Z\rangle$ expandindo-o na base de auto-estados de energia, $|Z\rangle = \sum b_n |n\rangle$, impondo que este satisfaça a equação (2.1):

$$\begin{aligned} \hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} b_n |n\rangle &= Z \sum_{n=0}^{\infty} b_n |n\rangle \\ \sum_{n=-1}^{\infty} b_n \sqrt{n} |n-1\rangle &= Z \sum_{n=0}^{\infty} b_n |n\rangle \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle &= Z \sum_{n=0}^{\infty} b_n |n\rangle \\ b_{n+1} &= Z \frac{b_n}{\sqrt{n+1}}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

aplicando essa relação de forma recorrente, temos

$$b_{n+1} = \frac{Z}{\sqrt{n+1}} \frac{Z}{\sqrt{n}} \frac{Z}{\sqrt{n-1}} \dots \frac{Z}{\sqrt{2}} \frac{Z}{\sqrt{1}} b_0 = \frac{Z^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} b_0 \rightarrow b_n = \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} b_0, \quad (2.3)$$

e o estado $|Z\rangle$ passa a ser descrito em termos de uma constante b_0 a ser determinada pela condição de normalização:

$$\begin{aligned}
 |Z\rangle &= b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle ; \\
 \langle Z|Z\rangle &= |b_0|^2 \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{Z^{*n} Z^{n'}}{\sqrt{n!n'!}} \underbrace{\langle n|n'\rangle}_{\delta_{nn'}} = |b_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|Z|^{2n}}{n!} = |b_0|^2 \exp(|Z|^2) = 1; \\
 |b_0| &= e^{-\frac{1}{2}|Z|^2}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Fixamos então um valor real positivo para b_0 e expressamos finalmente o estado $|Z\rangle$ em termos dos autoestados de energia $|n\rangle$:

$$|Z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|Z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{2.5}$$

A evolução temporal do estado coerente pode ser determinada aplicando-se o operador

$$\tilde{U}(t) = e^{-i\hat{H}_n t} = e^{-i\omega(\hat{n} + \frac{1}{2})t} \tag{2.6}$$

à $|Z\rangle$; então, se $Z = Z(t)$, consideramos a evolução temporal de um estado coerente inicial $|Z(0)\rangle$:

$$\begin{aligned}
 |Z, t\rangle &= U(t) |Z(0)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|Z(0)|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z(0))^n e^{-i\omega(\hat{n} + \frac{1}{2})t}}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
 &= e^{-\frac{i\omega t}{2}} e^{-\frac{1}{2}|Z(0)|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z(0))^n e^{-i\omega n t}}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
 &= e^{-\frac{i}{2}\omega t} e^{-\frac{1}{2}|Z(0)|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z(0)e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
 &= e^{-\frac{i}{2}\omega t} |Z(0)e^{-i\omega t}\rangle \\
 &= e^{-\frac{i}{2}\omega t} |Z(t)\rangle,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

e então, a dependência temporal de Z é dada por

$$Z(t) = Z(0)e^{-i\omega t} \equiv |Z(0)|e^{-i(\omega t - \sigma)}, \tag{2.8}$$

onde σ é a fase da forma polar de $Z(0)$.

2.1.1 Relação de Completeza e Ortogonalidade

Uma vez que o autovalor Z pode, em geral, assumir qualquer valor complexo, é interessante avaliar a integral de $|Z\rangle\langle Z|$ no plano complexo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} |Z\rangle\langle Z| d^2 Z &= \sum_{n,n'=0}^{\infty} |n\rangle\langle n'| \underbrace{\int_{\mathbb{C}} e^{-|Z|^2} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} \frac{Z'^{*n'}}{\sqrt{n'!}} d^2 Z}_{\pi \delta_{n,n'}} \\ &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \pi \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde a integral pode ser resolvida escrevendo Z na forma polar (A.3). Temos então a relação de completeza

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 Z}{\pi} |Z\rangle\langle Z| = \mathbb{I}; \quad (2.10)$$

desse modo, qualquer estado pode ser escrito como uma combinação linear (contínua) de estados coerentes. Entretanto, essa base não é ortogonal:

$$\begin{aligned} \langle Z'|Z\rangle &= e^{-\frac{1}{2}(|Z'|^2+|Z|^2)} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{Z'^{*n'}}{\sqrt{n'!}} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} \langle n'|n\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}(|Z'|^2+|Z|^2)} \sum_n \frac{(Z'^{*}Z)^n}{n!} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(|Z'|^2+|Z|^2-2Z'^{*}Z)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

e por consequência,

$$\begin{aligned} |\langle Z'|Z\rangle|^2 &= \langle Z'|Z\rangle \langle Z|Z'\rangle = e^{-(|Z'|^2+|Z|^2-Z'^{*}Z-Z^*Z')} \\ &= e^{-|Z'-Z|^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Esses resultados trazem uma consequência importante: tomemos um estado $|\psi\rangle$ representado na base de estados coerentes:

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 Z}{\pi} |Z\rangle \langle Z|\psi\rangle; \quad (2.13)$$

se $|\psi\rangle$ for um estado coerente $|Z'\rangle$,

$$|Z'\rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 Z}{\pi} \langle Z|Z'\rangle |Z\rangle, \quad (2.14)$$

o que estabelece uma dependência linear entre diferentes estados coerentes, de modo que a base formada por eles possui mais elementos do que o necessário para a representação de um estado $|\psi\rangle$. Dizemos então que os estados coerentes formam uma base *sobrecompleta*¹.

2.1.2 Valores Esperados e Relação de Incerteza

Os valores esperados dos operadores $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ e do operador número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ podem ser facilmente obtidos através da equação (2.1):

$$\begin{aligned}\langle Z|\hat{a}|Z\rangle &= Z \\ \langle Z|\hat{a}^\dagger|Z\rangle &= Z^* \\ \langle Z|\hat{n}|Z\rangle &= |Z|^2\end{aligned}\tag{2.15}$$

e através destes, calculamos os valores esperados para posição, momentum linear e energia:

$$\begin{aligned}\langle Z|\hat{x}|Z\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \langle Z|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|Z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (Z + Z^*) \\ \langle Z|\hat{p}|Z\rangle &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} \langle Z|(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)|Z\rangle = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (Z - Z^*) \\ \langle Z|\hat{H}|Z\rangle &= \langle Z|\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right)|Z\rangle = \omega|Z|^2 + \frac{1}{2}\omega.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Se parametrizarmos Z em termos das variáveis clássicas x e p :

$$Z = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(x + \frac{i}{\omega} p \right)\tag{2.17}$$

os valores esperados podem ser reescritos como

$$\begin{aligned}\langle \hat{x} \rangle &= x \\ \langle \hat{p} \rangle &= p \\ \langle \hat{H} \rangle &= \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Esses resultados exprimem o comportamento quasi-clássico dos estados coerentes: os valores esperados para os operadores de posição e momentum linear são iguais a seus respectivos correspondentes clássicos, enquanto a energia esperada é idêntica à energia de um oscilador clássico, com valor $\omega/2$ de energia de referência. Este comportamento fica ainda mais evidente quando investigamos a evolução temporal dos operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$. Para isso, é conveniente determinar $\hat{a}(t)$ pela representação

¹ Tradução livre do termo *overcomplete*.

de Heisenberg:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\hat{a}(t) &= i\omega[H, \hat{a}(t)] = i[\hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t) + \frac{1}{2}, \hat{a}(t)] = i\omega[\hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t), \hat{a}(t)] \\
 &= i\omega\hat{a}(t)[\hat{a}^\dagger(t), \hat{a}(t)] \\
 &= -i\omega\hat{a}(t),
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}
 \hat{a}(t) &= \hat{a}(0)e^{-i\omega t} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{x}(0) + \frac{i}{\omega}\hat{p}(0)\right)e^{-i\omega t} \\
 \hat{a}^\dagger(t) &= \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{x}(0) - \frac{i}{\omega}\hat{p}(0)\right)e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

e então

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t)) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{x}(0) + \frac{i}{\omega}\hat{p}(0)\right)e^{-i\omega t} + \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{x}(0) - \frac{i}{\omega}\hat{p}(0)\right)e^{i\omega t}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left[\hat{x}(0)(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) + \frac{i}{\omega}\hat{p}(0)(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t})\right] \\
 &= \hat{x}(0)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\hat{p}(0)\sin\omega t;
 \end{aligned} \tag{2.21a}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{p}(t) &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a}(t) - \hat{a}^\dagger(t)) \\
 &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{x}(0) + \frac{i}{\omega}\hat{p}(0)\right)e^{-i\omega t} - \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{x}(0) - \frac{i}{\omega}\hat{p}(0)\right)e^{i\omega t}\right) \\
 &= \frac{\omega}{2i}\left[\hat{x}(0)(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) + \frac{i}{\omega}\hat{p}(0)(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})\right] \\
 &= \hat{p}(0)\cos\omega t - \omega\hat{x}(0)\sin\omega t,
 \end{aligned} \tag{2.21b}$$

e é notável a semelhança da evolução temporal desses operadores com a dinâmica do oscilador clássico. Os valores esperados destes operadores, escrevendo $\langle\hat{x}(0)\rangle = x_0$ e $\langle\hat{p}(0)\rangle = p_0$, podem ser expressos como

$$\begin{aligned}
 \langle\hat{x}(t)\rangle &= x_0\cos\omega t + \frac{1}{\omega}p_0\sin\omega t \\
 \langle\hat{p}(t)\rangle &= p_0\cos\omega t - \omega x_0\sin\omega t.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

É conveniente reescrever estas equações em termos do autovalor Z . Para isso, usamos novamente a parametrização em termos de x_0 e p_0 :

$$Z(0) = Z_0 = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(x_0 + \frac{i}{\omega} p_0 \right) \quad (2.23)$$

e, da equação (2.8):

$$\begin{aligned} Z(t) &= Z_0 e^{-i\omega t} \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(x_0 + \frac{i}{\omega} p_0 \right) (\cos \omega t - i \sin \omega t) \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{2}} (x_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} p_0 \sin \omega t) + i \sqrt{\frac{1}{2\omega}} (-\omega x_0 \sin \omega t + p_0 \cos \omega t) \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{2}} \langle \hat{x}(t) \rangle + i \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \langle \hat{p}(t) \rangle, \end{aligned} \quad (2.24)$$

e notamos que os valores esperados da posição e do momentum linear são proporcionais, respectivamente, à parte real e imaginária de $Z(t)$. Sendo assim, escrevendo $Z(t)$ na forma polar (como na equação (2.8)), teremos finalmente

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}(t) \rangle &= \sqrt{\frac{2}{\omega}} \operatorname{Re}\{Z(t)\} = |Z| \sqrt{\frac{2}{\omega}} \cos(\omega t - \sigma) \\ \langle \hat{p}(t) \rangle &= \sqrt{2\omega} \operatorname{Im}\{Z(t)\} = -|Z| \sqrt{2\omega} \sin(\omega t - \sigma). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Este resultado ilustra uma propriedade importante: um sistema em um estado coerente $|Z(t)\rangle$ é tal que seus valores esperados para posição e momentum linear obedecem à dinâmica de um oscilador harmônico clássico com amplitude $\sqrt{\frac{2}{\omega}}|Z|$.

Os valores esperados de $\hat{x}(t)^2$ e $\hat{p}(t)^2$ são

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}(t)^2 \rangle &= \langle Z | \frac{1}{2\omega} (\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{n} + 1) | Z \rangle \\ &= \frac{1}{2\omega} (Z(t)^2 + Z^*(t)^2 + 2|Z|^2 + 1) \\ &= \frac{2}{\omega} \operatorname{Re}\{Z(t)\}^2 + \frac{1}{2\omega} \\ \langle \hat{p}(t)^2 \rangle &= -\langle Z | \frac{\omega}{2} (\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - 2\hat{n} - 1) | Z \rangle \\ &= -\frac{\omega}{2} (Z(t)^2 + Z^*(t)^2 - 2|Z|^2 - 1) \\ &= 2\omega \operatorname{Im}\{Z(t)\}^2 + \frac{\omega}{2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

As incertezas de $\hat{x}(t)$ e $\hat{p}(t)$ são então

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{x}(t) &= \sqrt{\langle \hat{x}(t)^2 \rangle - \langle \hat{x}(t) \rangle^2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\omega} \text{Re}\{Z(t)\}^2 + \frac{1}{2\omega} - \left(\sqrt{\frac{2}{\omega}} \text{Re}\{Z(t)\}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \\
\Delta \hat{p}(t) &= \sqrt{\langle \hat{p}(t)^2 \rangle - \langle \hat{p}(t) \rangle^2} \\
&= \sqrt{2\omega \text{Im}\{Z(t)\}^2 + \frac{\omega}{2} - \left(\sqrt{2\omega} \text{Im}\{Z(t)\}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{\omega}{2}},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

e, portanto,

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} = \frac{1}{2}. \tag{2.28}$$

Chegamos à conclusão de que o estado coerente é um estado de incerteza mínima, e além disso, na escala natural de comprimento do oscilador ($\omega \rightarrow 1$), essa incerteza é igualmente distribuída entre coordenada e momentum linear.

2.2 FUNÇÕES DE ONDA

Vejamos agora como podemos expressar a função de onda $\Psi_Z(x, t)$ do estado coerente, na representação de posições. Uma das formas de fazer isso é representando esta função como uma combinação linear de autoestados de energia:

$$\Psi_Z(x, t) = \langle x|Z, t \rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} e^{-\frac{1}{2}|Z(0)|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n(t)}{\sqrt{n!}} \phi_n(x), \tag{2.29}$$

mas há ainda uma outra forma bastante conveniente de representar esta função. Para isso, comecemos atuando com $\langle x|$ na equação (2.1):

$$\begin{aligned}
\langle x| \hat{a} |Z \rangle &= Z \langle x|Z \rangle, \\
\sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(x + \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi_Z(x, t) &= Z \Psi_Z(x, t)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

e obtemos uma equação diferencial de primeira ordem bastante simples para x , cuja solução é

$$\Psi_Z(x, t) = A e^{-\frac{1}{2}\omega x^2 + \sqrt{2\omega} Z x + f(t)}, \tag{2.31}$$

lembrando que Z depende de t . A função $f(t)$ pode ser determinada impondo-se que $\Psi_Z(x, t)$ seja solução também da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico,

$$i(\Psi_Z)_t = -\frac{1}{2}(\Psi_Z)_{xx} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \Psi_Z; \quad (2.32)$$

onde os subíndices x e t representam derivadas com respeito às respectivas variáveis. Substituindo essas derivadas,

$$(\Psi_Z)_t = \left(\sqrt{2\omega} \dot{Z} x + \dot{f} \right) \Psi_Z, \quad (\Psi_Z)_{xx} = \left(\omega x^2 - 2\sqrt{2\omega} \omega x Z + 2\omega Z^2 - \omega \right) \Psi_Z,$$

obtemos

$$\begin{aligned} i(\dot{f} + \sqrt{2\omega} \dot{Z} x) &= \frac{1}{2}\omega + \sqrt{2\omega} \omega x Z - \omega Z^2, \\ \dot{f} &= -\frac{i}{2}\omega - \sqrt{2\omega} x \left(i\omega Z + \dot{Z} \right) + i\omega Z^2; \end{aligned} \quad (2.33)$$

como $Z(t) = Z(0)e^{-i\omega t}$ e portanto $\dot{Z} = -i\omega Z$, o termo entre parênteses se anula. Assim, temos

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= -\frac{i\omega}{2} + i\omega Z(0)^2 e^{-2i\omega t}, \\ f(t) &= -\frac{i\omega t}{2} - \frac{1}{2}Z(0)^2 e^{-2i\omega t} \\ &= -\frac{i\omega t}{2} - \frac{1}{2}|Z(0)|^2 e^{-2i(\omega t - \sigma)} \\ &= -\frac{i\omega t}{2} - \frac{1}{2}|Z(0)|^2 [\cos(2\omega t - 2\sigma) - i \sin(2\omega t - 2\sigma)], \end{aligned} \quad (2.34)$$

Impondo a condição de normalização,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dq |\Psi_Z|^2 &= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\omega x^2 + \sqrt{2\omega} x (Z^* + Z) - |Z(0)|^2 \cos(2\omega t - 2\sigma)} \\ &= |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{(Z^* + Z)^2 / 2 - |Z(0)|^2 \cos(2\omega t - 2\sigma)} \\ &= |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{2|Z(0)|^2 \cos^2(\omega t - \sigma) - |Z(0)|^2 \cos(2\omega t - 2\sigma)} \\ &= |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{|Z(0)|^2} = 1; \\ A &= \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}(|Z(0)|^2)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

de modo que

$$\Psi_Z(x, t) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\omega x^2 + \sqrt{2\omega}Zx + f(t) - \frac{1}{2}|Z(0)|^2};$$

escrevendo $Z(t) = |Z(0)| [\cos(\omega t - \sigma) - i \sin(\omega t - \sigma)]$, substituindo $f(t)$ encontrado em (2.34) e reorganizando os termos no expoente, obtemos, finalmente, a solução

$$\Psi_Z(x, t) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp \left[-\frac{\omega}{2} \left(x - \sqrt{\frac{2}{\omega}} \operatorname{Re}\{Z(t)\} \right)^2 - i \left(\sqrt{2\omega} \operatorname{Im}\{Z(t)\} x - |Z(0)| \frac{\sin(2 - 2\sigma)}{2} \right) \right]. \quad (2.36)$$

A função densidade de probabilidade para o estado coerente possui um perfil gaussiano, ou seja,

$$|\Psi_Z(x, t)|^2 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \exp \left[-\omega \left(x - \sqrt{2} \operatorname{Re}\{Z(t)\} \right)^2 \right]; \quad (2.37)$$

se tomarmos $Z(t) = 0$, recuperamos exatamente a densidade de probabilidade do estado fundamental do oscilador harmônico. De fato, é possível mostrar que o estado coerente pode ser obtido através da atuação de um operador tipo deslocamento no estado fundamental (GAZEAU, 2009), como veremos a seguir.

2.3 ESTADO COERENTE COMO A ATUAÇÃO DO OPERADOR DE DESLOCAMENTO

Além da definição dos estados coerentes como autoestados do operador de abaixamento, uma abordagem alternativa e bastante poderosa é a definição desses estados como a atuação do operador de deslocamento no estado fundamental do oscilador harmônico, que pode oferecer uma interpretação mais intuitiva sobre os estados coerentes.

2.3.1 Definição do Operador de Deslocamento

O operador de deslocamento, denotado por $\hat{D}(Z)$, é definido pela seguinte expressão:

$$\hat{D}(Z) = \exp \left(Z \hat{a}^\dagger - Z^* \hat{a} \right); \quad (2.38)$$

para entender melhor sua composição, é útil decompor a exponencial de operadores utilizando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), (HALL, 2015) que nos permite reescrever a exponencial de uma soma de operadores, contanto que conheçamos a álgebra de comutação entre eles. A fórmula BCH nos permite escrever:

$$\exp(\hat{X} + \hat{Y}) = \exp(\hat{X}) \exp(\hat{Y}) \exp\left(-\frac{1}{2}[\hat{X}, \hat{Y}]\right), \quad (2.39)$$

desde que $[\hat{X}, \hat{Y}]$ commute com $\hat{X}$ e $\hat{Y}$.

Aplicando essa fórmula ao operador de deslocamento, temos $\hat{X} = Z\hat{a}^\dagger$ e $\hat{Y} = -Z^*\hat{a}$. Primeiramente, calculamos o comutador:

$$\begin{aligned} [Z\hat{a}^\dagger, -Z^*\hat{a}] &= -ZZ^*[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \\ &= |Z|^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Então, podemos escrever $\hat{D}(Z)$ como:

$$\begin{aligned} \hat{D}(Z) &= \exp(Z\hat{a}^\dagger - Z^*\hat{a}) \\ &= \exp(Z\hat{a}^\dagger) \exp(-Z^*\hat{a}) \exp\left(-\frac{1}{2}[-Z^*\hat{a}, Z\hat{a}^\dagger]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{|Z|^2}{2}\right) \exp(Z\hat{a}^\dagger) \exp(-Z^*\hat{a}), \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde utilizamos a relação (2.40) no último passo. O produto entre dois operadores com valores de Z diferentes nos dá

$$\begin{aligned} \hat{D}(Z)\hat{D}(Z') &= \exp(Z\hat{a}^\dagger - Z^*\hat{a}) \exp(Z'\hat{a}^\dagger - Z'^*\hat{a}) \\ &= \exp[(Z\hat{a}^\dagger - Z^*\hat{a}) + (Z'\hat{a}^\dagger - Z'^*\hat{a})] \exp\left(\frac{1}{2}[Z\hat{a}^\dagger - Z^*\hat{a}, Z'\hat{a}^\dagger - Z'^*\hat{a}]\right) \\ &= \exp[(Z + Z')\hat{a}^\dagger - (Z^* + Z'^*)\hat{a}] \exp\left(\frac{1}{2}(ZZ'^* - Z^*Z')\right) \\ &= \hat{D}(Z + Z') \exp\left(\frac{1}{2}(ZZ'^* - Z^*Z')\right); \end{aligned} \quad (2.42)$$

o que representa justamente uma propriedade de um operador do tipo deslocamento:

$$\hat{D}(Z)\hat{D}(Z') \propto \hat{D}(Z + Z'). \quad (2.43)$$

2.3.2 Representação dos Estados Coerentes

Considerando a ação do operador de deslocamento no estado fundamental, temos:

$$\begin{aligned} \hat{D}(Z)|0\rangle &= \exp(Z\hat{a}^\dagger - Z^*\hat{a})|0\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{|Z|^2}{2}\right) \exp(Z\hat{a}^\dagger) \exp(-Z^*\hat{a})|0\rangle; \end{aligned} \quad (2.44)$$

expandindo os operadores em série de potências, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \hat{D}(Z) |0\rangle &= \exp\left(-\frac{|Z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Z^m}{m!} (\hat{a})^m |0\rangle \\
 &= \exp\left(-\frac{|Z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n \left(\mathbb{I} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Z^m}{m!} (\hat{a})^m\right) |0\rangle \\
 &= \exp\left(-\frac{|Z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \\
 &= \exp\left(-\frac{|Z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
 &= |Z\rangle;
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

assim, o estado coerente pode ser entendido como um deslocamento do estado fundamental:

$$|Z\rangle = \hat{D}(Z) |0\rangle. \tag{2.46}$$

3 ESTADOS COERENTES DE ORDEM N

No estudo da mecânica quântica, os estados coerentes canônicos $|Z\rangle$ desempenham um papel central, sendo definidos como autoestados do operador de aniquilação $\hat{a}$ (GLAUBER, 1963). Estes estados possuem uma série de propriedades que os tornam semelhantes a sistemas clássicos, como a minimização da relação de incerteza e a preservação da coerência ao longo do tempo (WALLS; MILBURN, 2007). Além disso, é fácil demonstrar que o estado coerente $|Z\rangle$ também é autoestado de qualquer potência do operador de aniquilação. De fato, temos que $\hat{a}^N |Z\rangle = Z^N |Z\rangle$, onde N é um número inteiro positivo, e Z é uma constante complexa relacionada à amplitude do estado coerente.

Entretanto, surge uma questão interessante: *existem estados $|Z_N\rangle$ diferentes dos estados coerentes canônicos que também sejam autoestados de $\hat{a}^N$* ? Esses estados poderiam representar uma generalização dos estados coerentes, mas com novas características e propriedades que os diferenciam dos estados convencionais. A resposta a essa pergunta já foi abordada na literatura sob o conceito de *estados coerentes generalizados* ou *estados k -fótons*, que são autoestados de potências arbitrárias do operador de aniquilação

A ideia de construir estados $|Z_N\rangle$, distintos dos estados coerentes canônicos, pode levar a novas formas de representar sistemas quânticos, fornecendo um espaço de Hilbert mais amplo, com diferentes propriedades de ortogonalidade e sobreposição (ZHANG; FENG; GILMORE, 1990). A motivação para estudar esses estados está relacionada tanto a suas implicações teóricas quanto a suas potenciais aplicações em experimentos de óptica quântica avançada (BELYAEVA; KOVACHEV; SERKIN, 2020). Assim, a busca por esses novos estados autoestados de $\hat{a}^N$ se mostra como uma extensão natural do formalismo dos estados coerentes tradicionais (BUŽEK; JEX; QUANG, 1990), (JEX; BUŽEK, 1993) (SUN; WANG; WANG, 1991), (III; GERRY, 1992). Trabalhos recentes têm explorado a construção de estados coerentes para operadores não lineares, com implicações para a compreensão de sistemas com não-linearidades em mecânica quântica e óptica (SIVAKUMAR, 2000), (ABBASI; JAFARI, 2017).

Neste capítulo, buscamos definir estes estados coerentes generalizados, bem como estudar algumas de suas propriedades.

3.1 EXPANSÃO EM AUTOESTADOS DE ENERGIA

Vamos definir então os estados $|Z_N\rangle$ tais que

$$\hat{a}^N |Z_N\rangle = Z_N |Z_N\rangle \quad (3.1)$$

com N sendo um número natural; perceba que nessa notação o estado $|Z_1\rangle$ corresponde ao estado coerente canônico. A proposta é obter $|Z_N\rangle$ como uma combinação linear de autoestados de energia,

assim como fizemos com o estado coerente canônico. Para isso, usaremos o resultado

$$\begin{aligned}\hat{a}^N |n\rangle &= \sqrt{n(n-1)(n-2)\dots(n-N+1)} |n-N\rangle \\ &= \sqrt{\frac{n!}{(n-N)!}} |n-N\rangle ;\end{aligned}\tag{3.2}$$

expressando $|Z_N\rangle$ na base de autoestados de energia:

$$|Z_N\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(N)} |n\rangle ,\tag{3.3}$$

e determinamos os coeficientes $C_n^{(N)}$ através da equação (3.1):

$$\begin{aligned}\hat{a}^N \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(N)} |n\rangle &= Z_N \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(N)} |n\rangle \\ \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(N)} \sqrt{\frac{n!}{(n-N)!}} |n-N\rangle &= Z_N \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(N)} |n\rangle \\ \sum_{n=-N}^{\infty} C_{n+N}^{(N)} \sqrt{\frac{(n+N)!}{n!}} |n\rangle &= Z_N \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(N)} |n\rangle ,\end{aligned}$$

como $|n\rangle = 0$ para $N < 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+N}^{(N)} \sqrt{\frac{(n+N)!}{n!}} |n\rangle &= Z_N \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(N)} |n\rangle ; \\ C_{n+N}^{(N)} &= Z_N \sqrt{\frac{n!}{(n+N)!}} C_n^{(N)} .\end{aligned}\tag{3.4}$$

Não é imediato (e talvez, nem seja possível) determinar uma forma fechada para essa relação de recorrência para um N geral. Entretanto, há uma forma interessante de contornar este problema, construindo uma base ortogonal de dimensão finita.

3.2 EXPANSÃO EM UMA BASE ORTOGONAL FINITA: OS ESTADOS $|\beta_j^{(N)}\rangle$

Vamos tentar determinar alguns estados que resolvem a equação (3.1) resolvendo a relação de recorrência (3.4) para alguns valores particulares de N . Por exemplo, para $N = 2$, temos

$$C_{n+2}^{(2)} = Z_2 \sqrt{\frac{n!}{(n+2)!}} C_n^{(2)}\tag{3.5}$$

o que pode ser resolvido de maneira simples calculando explicitamente alguns termos:

$$\begin{aligned}
 C_2^{(2)} &= \frac{Z_2}{\sqrt{2!}} C_0^{(2)}, & C_3^{(2)} &= \frac{Z_2}{\sqrt{3!}} C_1^{(2)}, \\
 C_4^{(2)} &= \frac{Z_2^2}{\sqrt{4!}} C_0^{(2)}, & C_5^{(2)} &= \frac{Z_2^2}{\sqrt{5!}} C_1^{(2)}, \\
 C_6^{(2)} &= \frac{Z_2^2}{\sqrt{6!}} C_0^{(2)}, & C_7^{(2)} &= \frac{Z_2^2}{\sqrt{7!}} C_1^{(2)},
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

e assim por diante, de modo que temos a forma geral

$$\begin{aligned}
 C_{2n}^{(2)} &= \frac{(Z_2)^n}{\sqrt{(2n)!}} C_0^{(2)} \\
 C_{2n+1}^{(2)} &= \frac{(Z_2)^n}{\sqrt{(2n+1)!}} C_1^{(2)}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

e podemos determinar $|Z_2\rangle$ como

$$|Z_2\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (Z_2)^n \left(\frac{C_0^{(2)}}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle + \frac{C_1^{(2)}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle \right). \tag{3.8}$$

É conveniente então escrever $|Z_2\rangle$ em termos de dois estados ortogonais:

$$|Z_2\rangle = C_0^{(2)} |\beta_0^{(2)}\rangle + C_1^{(2)} |\beta_1^{(2)}\rangle, \tag{3.9}$$

com

$$|\beta_0^{(2)}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z_2)^n}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle, \quad |\beta_1^{(2)}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z_2)^n}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle; \tag{3.10}$$

e a norma (ou norma ao quadrado) de $|Z_2\rangle$ pode ser escrito em termos de funções hiperbólicas:

$$\begin{aligned}
 \langle Z_2|Z_2\rangle &= \left| C_0^{(2)} \right|^2 \langle \beta_0^{(2)} | \beta_0^{(2)} \rangle + \left| C_1^{(2)} \right|^2 \langle \beta_1^{(2)} | \beta_1^{(2)} \rangle \\
 &= \left| C_0^{(2)} \right|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z_2)^{2n}}{(2n)!} + \left| C_1^{(2)} \right|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z_2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \left| C_0^{(2)} \right|^2 \cosh Z_2 + \left| C_1^{(2)} \right|^2 \sinh Z_2
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

e podemos aplicar a condição de normalização, $\left| C_0^{(2)} \right|^2 \cosh Z_2 + \left| C_1^{(2)} \right|^2 \sinh Z_2 = 1$, para eliminar uma das constantes. Se tomarmos, em particular, $C_0^{(2)} = C_1^{(2)}$, e além disso, impusermos que $Z_2 = Z_1^2$, obtemos os chamados estados coerentes par e ímpar (SIVAKUMAR, 1998).

De forma semelhante ao que fizemos para determinar $|Z_2\rangle$, podemos determinar $|Z_3\rangle$, tomando

$N = 3$ na equação (3.4). Este procedimento nos leva a escrever $|Z_3\rangle$ em termos de 3 estados ortogonais:

$$|Z_3\rangle = C_0^{(3)} |\beta_0^{(3)}\rangle + C_1^{(3)} |\beta_1^{(3)}\rangle + C_2^{(3)} |\beta_2^{(3)}\rangle, \quad (3.12)$$

com

$$\begin{aligned} |\beta_0^{(3)}\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z_3)^n}{\sqrt{(3n)!}} |3n\rangle, \\ |\beta_1^{(3)}\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z_3)^n}{\sqrt{(3n+1)!}} |3n+1\rangle, \\ |\beta_2^{(3)}\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} (Z_3)^n \sqrt{\frac{2!}{(3n+2)!}} |3n+2\rangle. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Esse procedimento pode ser utilizado para cada valor de N , de forma bastante semelhante. Porém, podemos observar um padrão surgindo nesses estados: um dado estado $|Z_N\rangle$ é composto por N estados ortogonais, cada um deles sendo uma combinação linear dos autoestados de energia $|n\rangle$ com n mudando em incrementos de N . Vamos testar essa hipótese, propondo uma solução mais geral para a equação (3.1).

Vamos supor que

$$|Z_N\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} B_j^{(N)} |\beta_j^{(N)}\rangle, \quad (3.14)$$

onde os estados $|\beta_j^{(N)}\rangle$ são da forma

$$|\beta_j^{(N)}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{jn}^{(N)} |Nn+j\rangle; \quad (3.15)$$

atuando com o operador $\hat{a}^N$ nesse estado, obtemos

$$\hat{a}^N |Z_N\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{\infty} B_j^{(N)} C_{jn}^{(N)} \sqrt{\frac{(Nn+j)!}{(N(n-1)+j)!}} |N(n-1)+j\rangle; \quad (3.16)$$

novamente, fazendo a mudança $n \rightarrow n+1$ e observando que $|-N+j\rangle = 0$ uma vez que $j < N$:

$$\hat{a}^N |Z_N\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{\infty} B_j^{(N)} C_{j,n+1}^{(N)} \sqrt{\frac{(N(n+1)+j)!}{(Nn+j)!}} |Nn+j\rangle; \quad (3.17)$$

então, para que a equação (3.1) seja válida,

$$C_{j,n+1}^{(N)} = \sqrt{\frac{(Nn+j)!}{(N(n+1)+j)!}} C_{jn}^{(N)} Z_N. \quad (3.18)$$

Avaliando a equação (3.18) de forma recorrente:

$$\begin{aligned}
 C_{j,n}^{(N)} &= \sqrt{\frac{(N(n-1)+j)!}{(Nn+j)!}} \sqrt{\frac{(N(n-2)+j)!}{(N(n-1)+j)!}} \cdots \sqrt{\frac{(N(n-k+1)+j)!}{(N(n-k)+j)!}} \\
 &\quad \times \sqrt{\frac{(N(n-k)+j)!}{(N(n-k+1)+j)!}} C_{j(n-k)}^{(N)} Z_N^k \\
 &= \sqrt{\frac{(N(n-k)+j)!}{(Nn+j)!}} C_{j(n-k)}^{(N)} Z_N^k,
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

obtemos relação

$$C_{j,n}^{(N)} = \sqrt{\frac{j!}{(Nn+j)!}} (Z_N)^n C_{j0}^{(N)}, \tag{3.20}$$

e todas as constantes podem ser expressas em termos de uma única. Simplificamos então a notação:

$$C_{j0}^{(N)} \longrightarrow C_j^{(N)} \tag{3.21}$$

e escrevemos a forma geral dos estados $|\beta_j^{(N)}\rangle$:

$$|\beta_j^{(N)}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_j^{(N)} \sqrt{\frac{j!}{(Nn+j)!}} (Z_N)^n |Nn+j\rangle. \tag{3.22}$$

Note que esses estados são ortogonais:

$$\langle \beta_{j'}^{(N)} | \beta_j^{(N)} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |C_j^{(N)}|^2 \frac{j!}{(Nn+j)!} |Z_N|^{2n} \delta_{j'j}, \tag{3.23}$$

e podem ser normalizados escolhendo as constantes $C_j^{(N)}$ de tal forma que

$$|C_j^{(N)}| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{j!}{(Nn+j)!} |Z_N|^{2n} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.24}$$

A evolução temporal destes estados é obtida de maneira muito semelhante ao que foi feito na equação (2.7):

$$\begin{aligned}
 |\beta_j^{(N)}, t\rangle &= e^{-i\hat{H}t} |\beta_j^{(N)}, 0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_j^{(N)} \sqrt{\frac{j!}{(Nn+j)!}} (Z_N(0))^n e^{-i\omega(\hat{n}+\frac{1}{2})t} |Nn+j\rangle \\
 &= e^{-i\omega(j+\frac{1}{2})t} \sum_{n=0}^{\infty} C_j^{(N)} \sqrt{\frac{j!}{(Nn+j)!}} (Z_N(0)e^{-i\omega Nt})^n |Nn+j\rangle
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

de onde fazemos a identificação

$$Z_N(t) = Z_N(0)e^{-i\omega Nt},$$

$$\left| \beta_j^{(N)}, t \right\rangle = e^{-i\omega(j+\frac{1}{2})t} \left| \beta_j^{(N)}(t) \right\rangle \quad (3.26)$$

denotando como $\left| \beta_j^{(N)}(t) \right\rangle$ o estado definido de forma idêntica ao da equação (3.22), mas com $Z_N \rightarrow Z_N(t)$.

3.3 VALORES ESPERADOS

Atuando com o operador $\hat{a}$ nos estados $\left| \beta_j^{(N)} \right\rangle$, para $j \neq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{a} \left| \beta_j^{(N)} \right\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} C_j^{(N)} \sqrt{\frac{j!}{(Nn+j)!}} (Z_N)^n \hat{a} |Nn+j\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_j^{(N)} \sqrt{\frac{j!}{(Nn+j)!}} \sqrt{\frac{(Nn+j)!}{(Nn+j-1)!}} (Z_N)^n |Nn+j-1\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_j^{(N)} \sqrt{\frac{j!}{(Nn+j-1)!}} (Z_N)^n |Nn+j-1\rangle \\ &= \sqrt{j} \left| \beta_{j-1}^{(N)} \right\rangle; \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} \hat{a} \left| \beta_0^{(N)} \right\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} C_0^{(N)} \frac{(Z_N)^n}{\sqrt{(Nn)!}} \hat{a} |Nn\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_0^{(N)} (Z_N)^n \sqrt{\frac{Nn}{(Nn)!}} |Nn-1\rangle, \end{aligned}$$

efetuando o deslocamento de índice $n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned}
\hat{a} \left| \beta_0^{(N)} \right\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} C_0^{(N)} (Z_N)^{n+1} \sqrt{\frac{Nn+N}{(Nn+N)!}} |Nn+N-1\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} C_0^{(N)} (Z_N)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{(Nn+N-1)!}} |Nn+N-1\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} C_0^{(N)} \frac{(Z_N)}{\sqrt{(N-1)!}} (Z_N)^n \sqrt{\frac{(N-1)!}{(Nn+N-1)!}} |Nn+N-1\rangle \\
&= \frac{(Z_N)}{\sqrt{(N-1)!}} \left| \beta_{N-1}^{(N)} \right\rangle,
\end{aligned}$$

e portanto, temos

$$\begin{aligned}
\hat{a} \left| \beta_0^{(N)} \right\rangle &= \frac{(Z_N)}{\sqrt{(N-1)!}} \left| \beta_{N-1}^{(N)} \right\rangle, \\
\hat{a} \left| \beta_j^{(N)} \right\rangle &= \sqrt{j} \left| \beta_{j-1}^{(N)} \right\rangle, \quad j \neq 0;
\end{aligned} \tag{3.27}$$

ou, em notação mais compacta,

$$\hat{a} \left| \beta_j^{(N)} \right\rangle = \sqrt{j} \left| \beta_{j-1}^{(N)} \right\rangle + \delta_{j,0} \frac{(Z_N)}{\sqrt{(N-1)!}} \left| \beta_{N-1}^{(N)} \right\rangle. \tag{3.28}$$

Essa relação nos permite agora determinar valores esperados de posição, momentum linear e energia. Primeiro, calculamos os seguintes elementos:

$$\begin{aligned}
\left\langle \beta_{j'}^{(N)} \right| \hat{x}(t) \left| \beta_j^{(N)} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left\langle \beta_j^{(N)} \right| [\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}] \left| \beta_j^{(N)} \right\rangle \\
&= \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega}} \left[\sqrt{j} \left\langle \beta_{j'}^{(N)} \right| \beta_{j-1}^{(N)} \right\rangle + \delta_{j,0} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} \left\langle \beta_{j'}^{(N)} \right| \beta_{N-1}^{(N)} \right\rangle \Big] \\
&\quad + \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\omega}} \left[\sqrt{j'} \left\langle \beta_{j'-1}^{(N)} \right| \beta_j^{(N)} \right\rangle + \delta_{j',0} \frac{Z_N^*}{\sqrt{(N-1)!}} \left\langle \beta_{N-1}^{(N)} \right| \beta_j^{(N)} \right\rangle \Big] \\
&= \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega}} \left[\delta_{j',j-1} \sqrt{j} + \delta_{j,0} \delta_{j',N-1} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} \right] \\
&\quad + \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\omega}} \left[\delta_{j,j'-1} \sqrt{j'} + \delta_{j',0} \delta_{j,N-1} \frac{Z_N^*}{\sqrt{(N-1)!}} \right];
\end{aligned} \tag{3.29}$$

e, de forma semelhante, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \beta_{j'}^{(N)} | \hat{p}(t) | \beta_j^{(N)} \rangle &= i\sqrt{\frac{\omega}{2}} \langle \beta_j^{(N)} | [\hat{a}^\dagger e^{i\omega t} - \hat{a} e^{-i\omega t}] | \beta_j^{(N)} \rangle \\
&= -i\frac{\sqrt{\omega}e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{j} \langle \beta_{j'}^{(N)} | \beta_{j-1}^{(N)} \rangle + \delta_{j,0} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} \langle \beta_{j'}^{(N)} | \beta_{N-1}^{(N)} \rangle \right] \\
&\quad + i\frac{\sqrt{\omega}e^{i\omega t}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{j'} \langle \beta_{j'-1}^{(N)} | \beta_j^{(N)} \rangle + \delta_{j',0} \frac{Z_N^*}{\sqrt{(N-1)!}} \langle \beta_{N-1}^{(N)} | \beta_j^{(N)} \rangle \right] \\
&= \frac{\sqrt{\omega}e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}i} \left[\delta_{j',j-1} \sqrt{j} + \delta_{j,0} \delta_{j',N-1} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} \right] \\
&\quad - \frac{\sqrt{\omega}e^{i\omega t}}{\sqrt{2}i} \left[\delta_{j,j'-1} \sqrt{j'} + \delta_{j',0} \delta_{j,N-1} \frac{Z_N^*}{\sqrt{(N-1)!}} \right]; \tag{3.30}
\end{aligned}$$

também é útil obter os elementos de matriz do operador número:

$$\begin{aligned}
\langle \beta_{j'}^{(N)} | \hat{n} | \beta_j^{(N)} \rangle &= \langle \beta_{j'}^{(N)} | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \beta_j^{(N)} \rangle \\
&= \left(\sqrt{j} \langle \beta_{j'-1}^{(N)} | + \delta_{j',0} \frac{Z_N^*}{\sqrt{(N-1)!}} \langle \beta_{N-1}^{(N)} | \right) \left(\sqrt{j} | \beta_{j-1}^{(N)} \rangle + \delta_{j,0} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} | \beta_{N-1}^{(N)} \rangle \right) \\
&= \delta_{j',j} \sqrt{j'j} + \delta_{j,0} Z_N \sqrt{\frac{j'}{(N-1)!}} \delta_{j',N} + \delta_{j',0} Z_N^* \sqrt{\frac{j}{(N-1)!}} \delta_{j,N} \\
&\quad + \delta_{j',0} \delta_{j,0} \frac{|Z_N|^2}{(N-1)!}, \\
\langle \beta_{j'}^{(N)} | \hat{n} | \beta_j^{(N)} \rangle &= \delta_{j',j} \sqrt{j'j} + \delta_{j',0} \delta_{j,0} \frac{|Z_N|^2}{(N-1)!}. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

onde tomamos $\delta_{j',N} = \delta_{j,N} = 0$ já que $j < N$, e os valores esperados ficam:

$$\begin{aligned}
\langle Z_N | \hat{x}(t) | Z_N \rangle &= \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} B_{j'}^* B_j \langle \beta_{j'}^{(N)} | \hat{x}(t) | \beta_j^{(N)} \rangle \\
&= \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega}} \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} B_{j'}^* B_j \left[\delta_{j',j-1} \sqrt{j} + \delta_{j,0} \delta_{j',N-1} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} \right] \\
&\quad + \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\omega}} \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} B_{j'}^* B_j \left[\delta_{j,j'-1} \sqrt{j'} + \delta_{j',0} \delta_{j,N-1} \frac{Z_N^*}{\sqrt{(N-1)!}} \right] \\
&= \frac{e^{-it}}{\sqrt{2\omega}} \left(\frac{|Z_N| e^{i\omega\sigma_N}}{\sqrt{(N-1)!}} B_0 B_{N-1}^* + \sum_{j=1}^{N-1} B_{j-1}^* B_j \sqrt{j} \right) \\
&\quad + \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\omega}} \left(\frac{|Z_N| e^{-i\omega\sigma_N}}{\sqrt{(N-1)!}} B_0^* B_{N-1} + \sum_{j=1}^{N-1} B_{j-1} B_j^* \sqrt{j} \right); \tag{3.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle Z_N | \hat{p}(t) | Z_N \rangle &= \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} B_{j'}^* B_j \langle \beta_{j'}^{(N)} | \hat{p}(t) | \beta_j^{(N)} \rangle \\
&= \frac{\sqrt{\omega} e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}i} \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} B_{j'}^* B_j \left[\delta_{j',j-1} \sqrt{j} + \delta_{j,0} \delta_{j',N-1} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} \right] \\
&\quad - \frac{\sqrt{\omega} e^{i\omega t}}{\sqrt{2}i} \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} B_{j'}^* B_j \left[\delta_{j,j'-1} \sqrt{j'} + \delta_{j',0} \delta_{j,N-1} \frac{Z_N^*}{\sqrt{(N-1)!}} \right] \\
&= \frac{\sqrt{\omega} e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}i} \left(\frac{|Z_N| e^{i\omega\sigma_N}}{\sqrt{(N-1)!}} B_0 B_{N-1}^* + \sum_{j=1}^{N-1} B_{j-1}^* B_j \sqrt{j} \right) \\
&\quad - \frac{\sqrt{\omega} e^{i\omega t}}{\sqrt{2}i} \left(\frac{|Z_N| e^{-i\omega\sigma_N}}{\sqrt{(N-1)!}} B_0^* B_{N-1} + \sum_{j=1}^{N-1} B_{j-1} B_j^* \sqrt{j} \right); \tag{3.33}
\end{aligned}$$

aqui é conveniente impor que B_j sejam reais. Nesse caso, os resultados são simplificados para

$$\begin{aligned}
\langle Z_N | \hat{x}(t) | Z_N \rangle &= \left(\frac{B_0 B_{N-1}}{\sqrt{(N-1)!}} \right) \sqrt{\frac{2}{\omega}} |Z_N| \cos(\omega t - \sigma_N) \\
&\quad + \left(\sum_{j=1}^{N-1} B_{j-1} B_j \sqrt{j} \right) \sqrt{\frac{2}{\omega}} \cos(\omega t), \tag{3.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle Z_N | \hat{p}(t) | Z_N \rangle &= - \left(\frac{B_0 B_{N-1}}{\sqrt{(N-1)!}} \right) \sqrt{2\omega} |Z_N| \sin(\omega t - \sigma_N) \\
&\quad - \left(\sum_{j=1}^{N-1} B_{j-1} B_j \sqrt{j} \right) \sqrt{2\omega} \sin(\omega t).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Os valores esperados de $\hat{x}$ e $\hat{p}$ para os estados $|Z_N\rangle$ tem, portanto, comportamento semelhante ao de um oscilador harmônico clássico. Note porém que o segundo termo de ambos os valores é independente de Z_N , sendo originados exclusivamente da interferência entre estados $|\beta_j^{(N)}\rangle$ consecutivos.

Para o valor esperado da energia, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle Z_N | \hat{H}(t) | Z_N \rangle &= \langle Z_N | \omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) | Z_N \rangle \\
&= \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} B_{j'}^* B_j \omega \langle \beta_{j'}^{(N)} | \hat{n}(t) | \beta_j^{(N)} \rangle + \frac{\omega}{2} \\
&= \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} B_{j'}^* B_j \left(\delta_{j',j} \sqrt{j'j} + \delta_{j',0} \delta_{j,0} \frac{|Z_N|^2}{(N-1)!} \right) \omega + \frac{\omega}{2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} |B_j|^2 j \omega + |B_0|^2 \frac{|Z_N|^2}{(N-1)!} \omega + \frac{\omega}{2}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Algo importante a se observar deste resultado é que a amplitude $|B_0|^2$ é responsável por dar o peso da contribuição de Z_N para o valor esperado da energia. Para um caso particular onde o estado $|Z_N\rangle$ é balanceado ($|B_j|^2 = 1/N \ \forall j$), teremos

$$\begin{aligned}
\langle H \rangle |_{|B_j|^2=1/N} &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{j\omega}{N} + \frac{\omega}{N} \frac{|Z_N|^2}{(N-1)!} + \frac{\omega}{2} \\
&= \frac{1}{N} \left(\frac{(N-1)N}{2} \right) \omega + \frac{1}{N} \frac{|Z_N|^2}{(N-1)!} \omega + \frac{\omega}{2} \\
&= \omega \left(\frac{N}{2} + \frac{|Z_N|^2}{N!} \right).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Tomando $N = 1$, recuperamos o resultado da equação (2.16) para o estado coerente canônico. Entretanto, o valor esperado para a energia passa a ter menor influência do autovalor Z_N para valores maiores de N , onde $\langle H \rangle \approx \frac{\omega N}{2}$. Vamos comparar este valor com o esperado para uma superposição

balanceada de autoestados de energia do oscilador harmônico:

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{\sqrt{N}} |n\rangle; \\
 \langle \hat{H} \rangle &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \frac{1}{N} \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \langle m|n \rangle \\
 &= \frac{\omega}{N} \sum_{n=0}^N \left(n + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{\omega}{2N} (N^2 + 2N + 1), \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

que também tem o comportamento assintótico $\langle H \rangle \approx \frac{\omega N}{2}$ para N grande. Pode ser difícil, portanto, distinguir um estado coerente de ordem N alta de uma superposição de autoestados de energia. Podemos entender o motivo disso analisando o comportamento assintótico dos estados $|\beta_j^{(N)}\rangle$: note que podemos escrevê-los como

$$|\beta_j^{(N)}\rangle = C_j^{(N)} |j\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} C_j^{(N)} \sqrt{\frac{j!}{(Nn+j)!}} (Z_N)^n |Nn+j\rangle; \tag{3.39}$$

para N grande, as amplitudes dos termos dentro da soma se tornam desprezíveis e

$$|\beta_j^{(N)}\rangle \approx C_j^{(N)} |j\rangle. \tag{3.40}$$

Estes estados ortogonais passam então a se comportar de forma semelhante aos autoestados de energia do oscilador quando N é muito grande. Apesar disso, a interferência entre diferentes estados $|\beta_j^{(N)}\rangle$ ainda transparece nos valores esperados de posição e momento; tomando $N \rightarrow \infty$ nas equações (3.34) e (3.35):

$$\langle Z_N | \hat{x}(t) | Z_N \rangle = \left(\sum_{j=1}^{N-1} B_{j-1} B_j \sqrt{j} \right) \sqrt{\frac{2}{\omega}} \cos(\omega t), \tag{3.41}$$

$$\langle Z_N | \hat{p}(t) | Z_N \rangle = - \left(\sum_{j=1}^{N-1} B_{j-1} B_j \sqrt{j} \right) \sqrt{2\omega} \sin(\omega t); \tag{3.42}$$

tais valores oscilam de acordo com a frequência do oscilador, diferente dos valores obtidos para os autoestados de energia, que são nulos. Desta forma, a medida dos valores esperados de posição e momento garantem a distinção entre os estados coerentes de ordem N e as sobreposições de autoestados de energia.

3.4 INCERTEZAS

Vimos antes que o estado coerente canônico é um estado de incerteza mínima ($\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}$). Vamos verificar se o mesmo ocorre para os estados coerentes generalizados. Primeiro, determinamos a atuação de $\hat{a}^2$ nos estados da base $\beta_j^{(N)}$:

$$\begin{aligned}
 \hat{a}^2 \left| \beta_j^{(N)} \right\rangle &= \sqrt{j} \hat{a} \left| \beta_{j-1}^{(N)} \right\rangle + \delta_{j,0} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} \hat{a} \left| \beta_{N-1}^{(N)} \right\rangle \\
 &= \sqrt{j(j-1)} \left| \beta_{j-2}^{(N)} \right\rangle + \delta_{j-1,0} \sqrt{j} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} \left| \beta_{N-1}^{(N)} \right\rangle \\
 &\quad + \delta_{j,0} \frac{Z_N \sqrt{N-1}}{\sqrt{(N-1)!}} \left| \beta_{N-2}^{(N)} \right\rangle + \delta_{j,0} \delta_{N-1,0} \frac{Z_N^2}{(N-1)!} \left| \beta_{N-1}^{(N)} \right\rangle \\
 &= \sqrt{j(j-1)} \left| \beta_{j-2}^{(N)} \right\rangle + \delta_{j,1} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} \left| \beta_{N-1}^{(N)} \right\rangle \\
 &\quad + \delta_{j,0} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-2)!}} \left| \beta_{N-2}^{(N)} \right\rangle + \delta_{N,1} Z_N^2 \left| \beta_{N-1}^{(N)} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

onde $\delta_{j,0} \delta_{N-1,0} \rightarrow \delta_{N,1}$ pois, para o caso particular $N = 1$, temos apenas $j = 0$. Então,

$$\begin{aligned}
 \left\langle \beta_{j'}^{(N)} \right| \hat{a}^2 \left| \beta_j^{(N)} \right\rangle &= \delta_{j',j-2} \sqrt{j(j-1)} + \delta_{j,1} \delta_{j',N-1} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} \\
 &\quad + \delta_{j,0} \delta_{j',N-2} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-2)!}} + \delta_{N,1} \frac{Z_N^2}{(N-1)!},
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

e deste resultado podemos determinar $\langle \hat{x}^2 \rangle$ e $\langle \hat{p}^2 \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \beta_{j'}^{(N)} | \hat{x}^2 | \beta_j^{(N)} \rangle &= \frac{1}{2\omega} \langle \beta_{j'}^{(N)} | [\hat{a}^2 e^{-2i\omega t} + \hat{a}^{\dagger 2} e^{2i\omega t} + 2\hat{n} + 1] | \beta_j^{(N)} \rangle \\
&= \frac{e^{-2i\omega t}}{2\omega} \left[\delta_{j',j-2} \sqrt{j(j-1)} + \delta_{j-1,0} \delta_{j',N-1} \frac{Z_N \sqrt{j}}{\sqrt{(N-1)!}} \right. \\
&\quad \left. + \delta_{j',0} \delta_{j,N-2} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-2)!}} + \delta_{N,1} \frac{Z_N^2}{(N-1)!} \right] \\
&\quad + \frac{e^{2i\omega t}}{2\omega} \left[\delta_{j,j'-2} \sqrt{j'(j'-1)} + \delta_{j'-1,0} \delta_{j,N-1} \frac{Z_N^* \sqrt{j'}}{\sqrt{(N-1)!}} \right. \\
&\quad \left. + \delta_{j',0} \delta_{j,N-2} \frac{Z_N^*}{\sqrt{(N-2)!}} + \delta_{N,1} \frac{Z_N^{*2}}{(N-1)!} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\omega} \delta_{j',j} j + \frac{1}{\omega} \delta_{j',0} \delta_{j,0} \frac{|Z_N|^2}{(N-1)!} + \frac{1}{2\omega} \delta_{j',j}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

e de forma similar,

$$\begin{aligned}
\langle \beta_{j'}^{(N)} | \hat{p}^2 | \beta_j^{(N)} \rangle &= -\frac{\omega}{2} \langle \beta_{j'}^{(N)} | [\hat{a}^2 e^{-2i\omega t} + \hat{a}^{\dagger 2} e^{2i\omega t} - 2\hat{n} - 1] | \beta_j^{(N)} \rangle \\
&= -\frac{\omega e^{-2i\omega t}}{2} \left[\delta_{j',j-2} \sqrt{j(j-1)} + \delta_{j-1,0} \delta_{j',N-1} \frac{Z_N \sqrt{j}}{\sqrt{(N-1)!}} \right. \\
&\quad \left. + \delta_{j,0} \delta_{j',N-2} \frac{Z_N}{\sqrt{(N-2)!}} + \delta_{N,1} \frac{Z_N^2}{(N-1)!} \right] \\
&\quad - \frac{\omega e^{2i\omega t}}{2} \left[\delta_{j,j'-2} \sqrt{j'(j'-1)} + \delta_{j'-1,0} \delta_{j,N-1} \frac{Z_N^* \sqrt{j'}}{\sqrt{(N-1)!}} \right. \\
&\quad \left. + \delta_{j',0} \delta_{j,N-2} \frac{Z_N^*}{\sqrt{(N-2)!}} + \delta_{N,1} \frac{Z_N^{*2}}{(N-1)!} \right] \\
&\quad + \omega \delta_{j',j} j + \omega \delta_{j',0} \delta_{j,0} \frac{|Z_N|^2}{(N-1)!} + \frac{\omega}{2} \delta_{j',j}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Novamente, como $j < N$, alguns destes termos serão nulos para $N = 1$ ou $N \leq 2$. Por simplicidade de notação, definimos que

$$B_j = 0, \quad \text{se } j < 0; \tag{3.47}$$

com isso obtemos os valores esperados para os estados coerentes:

$$\begin{aligned}
\langle Z_N | \hat{x}(t)^2 | Z_N \rangle &= \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} B_{j'} B_j \langle \beta_{j'}^{(N)} | \hat{x}(t)^2 | \beta_j^{(N)} \rangle \\
&= \frac{e^{-2i\omega t}}{2\omega} \left(\frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} B_1 B_{N-1} + \frac{Z_N}{\sqrt{(N-2)!}} B_0 B_{N-2} + \sum_{j=0}^{N-1} B_{j-2} B_j \sqrt{j(j-1)} + \delta_{N,1} \frac{Z_N^2}{(N-1)!} \right) \\
&\quad + \frac{e^{2i\omega t}}{2\omega} \left(\frac{Z_N^*}{\sqrt{(N-1)!}} B_1 B_{N-1} + \frac{Z_N^*}{\sqrt{(N-2)!}} B_0 B_{N-2} + \sum_{j=0}^{N-1} B_{j-2} B_j \sqrt{j(j-1)} + \delta_{N,1} \frac{Z_N^{*2}}{(N-1)!} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{N-1} B_j^2 \left(j + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\omega} B_0^2 \frac{|Z_N|^2}{(N-1)!}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

onde novamente tomamos B_j como sendo reais. Escrevendo $Z_N = |Z_N| \exp(i\sigma_N)$, teremos

$$\begin{aligned}
\langle Z_N | \hat{x}(t)^2 | Z_N \rangle &= \left(\frac{B_1 B_{N-1}}{\sqrt{(N-1)!}} + \frac{B_0 B_{N-2}}{\sqrt{(N-2)!}} \right) \frac{|Z_N|}{\omega} \cos(2\omega t - \sigma_N) \\
&\quad + \left(\sum_{j=0}^{N-1} B_{j-2} B_j \sqrt{j(j-1)} \right) \frac{1}{\omega} \cos(2\omega t) + \frac{1}{\omega} \frac{\delta_{N,1} |Z_N|^2}{(N-1)!} \cos(2\omega t - 2\sigma_N) \\
&\quad + \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{N-1} B_j^2 \left(j + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\omega} B_0^2 \frac{|Z_N|^2}{(N-1)!};
\end{aligned} \tag{3.49}$$

De forma análoga, determinamos $\langle Z_N | \hat{p}(t)^2 | Z_N \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle Z_N | \hat{p}(t)^2 | Z_N \rangle &= \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} B_{j'} B_j \langle \beta_{j'}^{(N)} | \hat{p}(t)^2 | \beta_j^{(N)} \rangle \\
&= -\frac{\omega e^{-2i\omega t}}{2} \left(\frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} B_1 B_{N-1} + \frac{Z_N}{\sqrt{(N-2)!}} B_0 B_{N-2} + \sum_{j=0}^{N-1} B_{j-2} B_j \sqrt{j(j-1)} + \delta_{N,1} \frac{Z_N^2}{(N-1)!} \right) \\
&\quad - \frac{\omega e^{2i\omega t}}{2} \left(\frac{Z_N^*}{\sqrt{(N-1)!}} B_1 B_{N-1} + \frac{Z_N^*}{\sqrt{(N-2)!}} B_0 B_{N-2} + \sum_{j=0}^{N-1} B_{j-2} B_j \sqrt{j(j-1)} + \delta_{N,1} \frac{Z_N^{*2}}{(N-1)!} \right) \\
&\quad + \omega \sum_{j=0}^{N-1} B_j^2 \left(j + \frac{1}{2} \right) + \omega B_0^2 \frac{|Z_N|^2}{(N-1)!};
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
\langle Z_N | \hat{p}(t)^2 | Z_N \rangle = & - \left(\frac{B_1 B_{N-1}}{\sqrt{(N-1)!}} + \frac{B_0 B_{N-2}}{\sqrt{(N-2)!}} \right) |Z_N| \omega \cos(2\omega t - \sigma_N) \\
& - \left(\sum_{j=0}^{N-1} B_{j-2} B_j \sqrt{j(j-1)} \right) \omega \cos(2\omega t) - \frac{\delta_{N,1} |Z_N|^2}{(N-1)!} \omega \cos(2\omega t - 2\sigma_N) \\
& + \omega \sum_{j=0}^{N-1} B_j^2 \left(j + \frac{1}{2} \right) + \omega B_0^2 \frac{|Z_N|^2}{(N-1)!}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Analizando as expressões para $\langle \hat{x}(t) \rangle$, $\langle \hat{p}(t) \rangle$, $\langle \hat{x}(t)^2 \rangle$ e $\langle \hat{p}(t)^2 \rangle$, é notório que, diferente do que ocorre com o estado coerente canônico, os estados $|Z_N\rangle$ não são, em geral, estados de incerteza mínima. e, além disso, variam com o tempo; tal variação depende fortemente das combinações dos coeficientes B_j .

Vamos tomar como exemplo o caso simples $|Z_N\rangle = |\beta_0^{(N)}\rangle$ com $N \geq 2$. Para este caso, temos

$$\Delta x = \sqrt{\frac{N^2}{2\omega} - \frac{2Z_N^2 \cos^2(\omega t)}{\omega} + \frac{Z_N^2}{\omega(N-1)!}}, \tag{3.52a}$$

$$\Delta p = \sqrt{\frac{N^2\omega}{2} + \frac{Z_N^2\omega}{(N-1)!} - 2Z_N^2\omega \sin^2(\omega t)}. \tag{3.52b}$$

A Figura 1, a Figura 2 e a Figura 3 mostram a oscilação da incerteza para alguns valores de N . É interessante observar que a frequência de oscilação da incerteza não é necessariamente proporcional à frequência do oscilador - mas pode tanto aumentar quanto diminuir (de forma cíclica) à medida que ω aumenta. Além disso, no regime $N \gg 1$, as oscilações se tornam desprezíveis e $\Delta x \Delta p \approx \frac{N}{2}$.

Vimos como obter autoestados do operador $\hat{a}^N$ e como estes estados, assim como o estado coerente canônico, apresentam comportamento quasi-clássico. No próximo capítulo, apresentaremos funções de ondas associadas a estes estados.

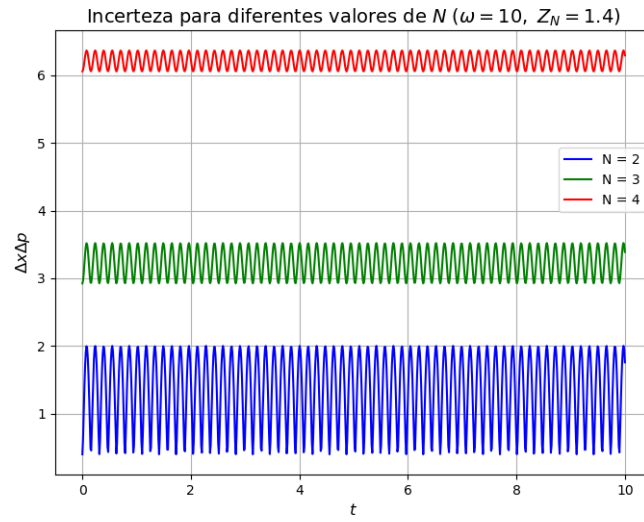


Figura 1 – Incerteza para $\omega = 10$

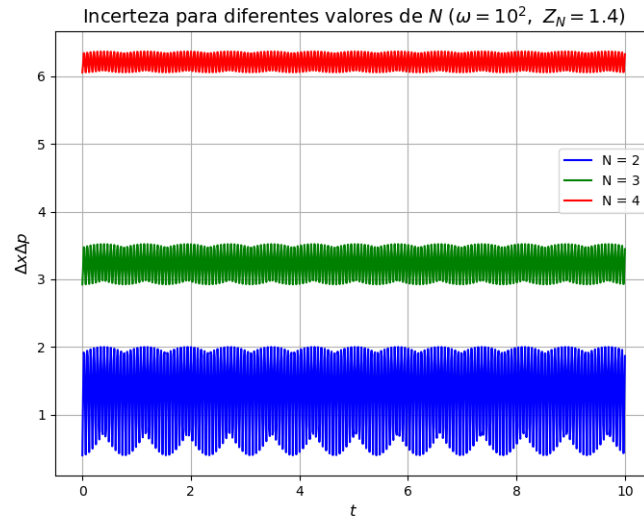


Figura 2 – Incerteza para $\omega = 10^2$

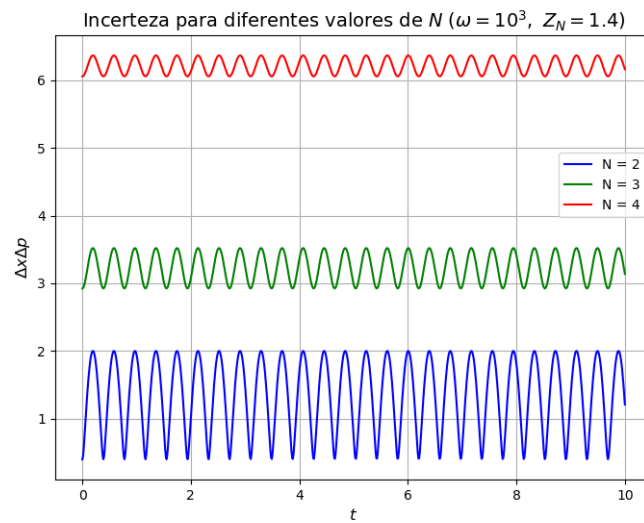


Figura 3 – Incerteza para $\omega = 10^3$

4 FUNÇÕES DE ONDA

No capítulo anterior, estudamos algumas propriedades dos estados coerentes $|Z_N\rangle$, dentre as quais se destaca o comportamento de alguns operadores (e respectivos valores esperados) que evoluem de modo semelhante aos seus correspondentes clássicos. Para o estado coerente canônico, vimos que tais comportamentos se manifestavam na função de onda, idêntica à função de onda do estado fundamental do OHS, porém com um perfil gaussiano oscilante. É de interesse, portanto, proceder com uma análise semelhante para os estados coerentes generalizados.

Neste capítulo, apresentamos soluções à equação da forma

$$\hat{a}^N \Psi = Z_N \Psi \quad (4.1)$$

em particular, na representação de posições. Verificaremos que o conjunto de soluções mais imediato é composto por funções não ortogonais entre si. Entretanto, utilizando propriedades estabelecidas no capítulo 3, apresentamos um método geral para obter um conjunto ortonormal de soluções para qualquer valor de N .

4.1 AUTOFUNÇÕES DE $\hat{a}$

Considere a função

$$\Phi_n^{(N)}(x) = \phi(x) \exp \left[-\frac{\omega x^2}{2} \right]; \quad (4.2)$$

aplicando o operador $\hat{a}$ (na representação de posição) em $\Phi_n^{(N)}(x)$, temos:

$$\begin{aligned} \hat{a} \Phi_n^{(N)} &= \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(x + \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi_n^{(N)}(x) = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(x \phi e^{-\frac{\omega x^2}{2}} - x \phi_x e^{-\frac{\omega x^2}{2}} + \frac{1}{\omega} \phi_x e^{-\frac{\omega x^2}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \phi_x e^{-\frac{\omega x^2}{2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

de modo que aplicações sucessivas de $\hat{a}$ fornecem

$$\hat{a}^N \Phi_n^{(N)}(x) = \frac{1}{(2\omega)^{\frac{N}{2}}} \frac{d^N \phi}{dx^N} e^{-\frac{\omega x^2}{2}}; \quad (4.4)$$

por outro lado, impomos que Φ seja uma autofunção de $\hat{a}^N$, ou seja,

$$\hat{a}^N \Phi = Z_N \Phi = Z_N \phi(x) \exp \left[-\frac{\omega x^2}{2} \right]; \quad (4.5)$$

Comparando (4.4) e (4.5) obtemos

$$\frac{d^N \phi}{dx^N} = (2\omega)^{\frac{N}{2}} Z_N \phi; \quad (4.6)$$

Propondo então soluções da forma $\phi = \exp(r_n x)$, a equação característica será

$$r_n^N = (2\omega)^{\frac{N}{2}} Z_N \longrightarrow r_n = b_n^{(N)} \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}}, \quad (4.7)$$

onde os $b_n^{(N)}$ são raízes da unidade (soluções da equação $(b_n^{(N)})^N = 1$). Com isso, finalmente obtemos as soluções

$$\Phi_n^{(N)} = \exp \left[-\frac{\omega x^2}{2} + b_n^{(N)} \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}} x \right], \quad (4.8)$$

que são indexadas com os índices n e N para os diferentes valores de $b_n^{(N)}$ (N , no total).

Uma solução mais geral pode ser escrita em termos de $\Phi_n^{(N)}$,

$$\Psi_N(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n f_n(t) \Phi_n^{(N)}(x) \quad (4.9)$$

a qual é facilmente verificada como uma autofunção de $\hat{a}^N$.

Para determinar a função $f_n(t)$, impomos que $\Psi_N(x, t)$ satisfaça a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico simples:

$$\begin{aligned} i(\Psi_N)_t + \frac{1}{2}(\Psi_N)_{xx} - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \Psi_N &= \sum_{n=0}^{N-1} C_n \Phi_n^{(N)} \left[i\dot{f}_n + i f_n \left(\frac{1}{N} b_n^{(N)} \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}-1} \dot{Z}_N x \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{f}{2} \left(-\omega + \omega^2 x^2 + 2\omega (b_n^{(N)})^2 Z_N^{\frac{2}{N}} - 2\omega \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}} x - \omega^2 x^2 \right) \right] = 0; \end{aligned} \quad (4.10)$$

o que leva a

$$\dot{f}_n = -i f_n \left[\omega (b_n^{(N)})^2 Z_N^{\frac{2}{N}} - \frac{\omega}{2} + \left(\frac{i}{N} \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}-1} \dot{Z}_N - \omega \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}} \right) x \right]; \quad (4.11)$$

uma vez que f depende apenas de t , impomos a restrição

$$\frac{1}{N} \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}-1} \dot{Z}_N - \omega \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}} = 0 \longrightarrow \dot{Z}_N = -i\omega N Z_N, \quad (4.12)$$

o que nos dá a evolução temporal do autovalor

$$Z_N(t) = Z_N(0) e^{-i\omega N t} \quad (4.13)$$

compatível com a obtida na seção 3.2. Voltando na equação (4.11), temos

$$\dot{f}_n = -i\omega \left((b_n^{(N)})^2 Z_N^{\frac{2}{N}} - \frac{1}{2} \right) f_n, \quad (4.14)$$

cujas soluções também é trivial:

$$f_n(t) = \exp \left[-i \left((b_n^{(N)})^2 Z_N^{\frac{2}{N}} - \frac{1}{2} \right) \omega t \right] \quad (4.15)$$

a menos de uma constante a ser absorvida em C_n .

A base $\Phi_n^{(N)}$ não é ortogonal, pois

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi_n^{(N)} \Phi_{n'}^{(N)*} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-\frac{\omega x^2}{2} + b_n^{(N)} \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}} x \right] \exp \left[-\frac{\omega x^2}{2} + b_{n'}^{(N)*} \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}} x \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-\omega x^2 + \sqrt{2\omega} (b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} + b_{n'}^{(N)*} Z_N^{\frac{1}{N}}) x \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \exp \left[\frac{(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} + b_{n'}^{(N)*} Z_N^{\frac{1}{N}})^2}{2} \right]; \end{aligned} \quad (4.16)$$

na próxima seção, mostraremos um método para obter, à partir de $\Phi_n^{(N)}$, funções ortogonais que são representações de posição dos estados $|\beta_j^{(N)}\rangle$.

4.2 FUNÇÕES DE ONDA ORTOGONAIS PARA OS ESTADOS COERENTES GENERALIZADOS

A solução geral apresentada na equação (4.9) é uma expansão de funções exponenciais não ortogonais, mas os coeficientes podem ser escolhidos para gerar combinações ortogonais. Nesta seção, apresentamos um método geral para determinar esses coeficientes. Em outras palavras, dado o estado coerente de ordem N ,

$$|Z_N\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} B_j^{(N)} |\beta_j^{(N)}\rangle, \quad (4.17)$$

encontraremos as funções ortogonais $\beta_j^{(N)}(x, t)$ para expandir a função de estado coerente

$$\langle x | Z_N \rangle = \Psi_N(x, t) = \sum_{j=0}^{N-1} B_j^{(N)} \beta_j^{(N)}(x, t). \quad (4.18)$$

Primeiramente, definimos os estados $|\Phi_n^{(N)}(t)\rangle$ associados às funções de onda (4.8):

$$|\Phi_n^{(N)}(t)\rangle \longrightarrow \langle x | \Phi_n^{(N)}(t) \rangle = \Phi_n^{(N)}(x, t) \quad (4.19)$$

e propomos que os estados $|\beta_j^{(N)}(x, t)\rangle$ e suas respectivas funções de onda possam ser representadas em termos destes estados:

$$|\beta_j^{(N)}(t)\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} A_{j,n}^{(N)} |\Phi_n^{(N)}(t)\rangle \quad (4.20a)$$

$$\beta_j^{(N)}(x, t) = \langle x | \beta_j^{(N)}(t) \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} A_{j,n}^{(N)} \Phi_n^{(N)}(x, t), \quad (4.20b)$$

A representação de posição da equação (3.27) nos dá

$$\begin{aligned} \hat{a}\beta_0^{(N)}(x, t) &= \frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} \beta_{N-1}^{(N)}(x, t), \\ \hat{a}\beta_j^{(N)}(x, t) &= \sqrt{j} \beta_{j-1}^{(N)}(x, t), \quad j \neq 0; \end{aligned} \quad (4.21)$$

atuando com $\hat{a}$ em $\beta_j^{(N)}(x, t)$,

$$\begin{aligned} \hat{a}\beta_j^{(N)}(x, t) &= \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(x + \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{n=0}^{N-1} A_{j,n}^{(N)} \Phi_n^{(N)}(x, t) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} A_{j,n}^{(N)} b_n^{(N)} Z_N^{1/N} \Phi_n^{(N)}(x, t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

obtemos, para a equação (4.21)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} A_{0,n}^{(N)} b_n^{(N)} Z_N^{1/N} \Phi_n^{(N)}(x, t) &= \frac{Z_N}{\sqrt{(N-1)!}} \sum_{n=0}^{N-1} A_{N-1,n}^{(N)} \Phi_n^{(N)}(x, t), \\ \sum_{n=0}^{N-1} A_{j,n}^{(N)} b_n^{(N)} Z_N^{1/N} \Phi_n^{(N)}(x, t) &= \sqrt{j} \sum_{n=0}^{N-1} A_{j-1,n}^{(N)} \Phi_n^{(N)}(x, t), \quad j \neq 0; \end{aligned} \quad (4.23)$$

comparando os coeficientes, obtemos as relações

$$\begin{aligned} A_{0,n}^{(N)} &= \frac{Z_N^{1-\frac{1}{N}}}{b_n^{(N)} \sqrt{(N-1)!}} A_{N-1,n}^{(N)} \\ A_{j,n}^{(N)} &= \frac{\sqrt{j}}{b_n^{(N)} Z_N^{1/N}} A_{j-1,n}^{(N)} \quad j \neq 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Podemos aplicar essas relações de forma sucessiva: para $A_{j,n}^{(N)}$ com $j \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 A_{j,n}^{(N)} &= \frac{\sqrt{j}}{b_n^{(N)} Z_N^{1/N}} A_{j-1,n}^{(N)} \\
 &= \frac{\sqrt{j(j-1)}}{[b_n^{(N)} Z_N^{1/N}]^2} A_{j-2,n}^{(N)} \\
 &= \frac{\sqrt{j(j-1)(j-2)\dots(j-j)}}{[b_n^{(N)} Z_N^{1/N}]^j} A_{j-j,n}^{(N)} \\
 &= \frac{\sqrt{j!}}{(b_n^{(N)})^j Z_N^{j/N}} A_{0,n}^{(N)},
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

além disso, $A_{N-1,n}^{(N)}$ também pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 A_{N-1,n}^{(N)} &= \frac{b_n^{(N)} \sqrt{(N-1)!}}{Z_N^{1-\frac{1}{N}}} A_{0,n}^{(N)} \\
 &= \frac{(b_n^{(N)})^N \sqrt{(N-1)!}}{(b_n^{(N)})^{N-1} Z_N^{\frac{N-1}{N}}} A_{0,n}^{(N)} \\
 &= \frac{\sqrt{j!}}{(b_n^{(N)})^j Z_N^{j/N}} A_{0,n}^{(N)} \Big|_{j=N-1},
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

e todos esses coeficientes podem ser escritos em termos de $A_{0,n}^{(N)}$:

$$A_{j,n}^{(N)} = \frac{\sqrt{j!}}{(b_n^{(N)})^j Z_N^{\frac{j}{N}}} A_{0,n}^{(N)}; \tag{4.27}$$

dessa forma, reescrevemos a expressão para $|\beta_j^{(N)}(t)\rangle$ tomando $A_{0,n}^{(N)} \rightarrow A_n^{(N)}$ uma vez que estas constantes não dependem do índice j :

$$|\beta_j^{(N)}(t)\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sqrt{j!}}{(b_n^{(N)})^j Z_N^{\frac{j}{N}}} A_n^{(N)} |\Phi_n^{(N)}(t)\rangle \tag{4.28}$$

e as correspondentes funções de onda

$$\beta_j^{(N)}(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sqrt{j!}}{(b_n^{(N)})^j Z_N^{\frac{j}{N}}} A_n^{(N)} \Phi_n^{(N)}(x, t). \tag{4.29}$$

O próximo passo é determinar todos os coeficientes $A_n^{(N)}$, de modo que as funções $\beta_j^{(N)}(x, t)$ sejam ortogonais entre si. Para isso, vamos expandir os estados $|\Phi_n^{(N)}(x, t)\rangle$ na base dos autoestados de

energia $|k\rangle$ do oscilador harmônico:

$$|\Phi_n^{(N)}(x, t)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(N)} |k\rangle, \quad (4.30)$$

e os coeficientes $D_k^{(N)}$ podem ser facilmente determinados:

$$\begin{aligned} D_k^{(N)} &= \langle k | \Phi_n^{(N)}(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_k(x) \Phi_n^{(N)}(x, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} \cdot \left(\frac{1}{\pi \omega} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} dx H_k(\sqrt{\omega} x) \exp \left[-\omega x^2 + b_n^{(N)} \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}} x \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde $\varphi_k(x)$ são as soluções da equação de Schrödinger independente do tempo para o oscilador harmônico. O cálculo desta integral (A.4) nos dá os coeficientes

$$D_k^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{\omega k!}} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^{\frac{1}{4}} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^k \exp \left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 \right]. \quad (4.32)$$

Como todos os estados $|\beta_j^{(N)}(t)\rangle$ dependem dos mesmos coeficientes de expansão $A_n^{(N)}$, basta determinarmos um deles, obtendo todos os demais de forma imediata. Por simplicidade, tomamos o estado $|\beta_0^{(N)}(t)\rangle$:

$$\begin{aligned} |\beta_0^{(N)}(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(N)} |\Phi_n^{(N)}(x, t)\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_n^{(N)} \frac{1}{\sqrt{\omega k!}} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^{\frac{1}{4}} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^k \exp \left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 \right] |k\rangle; \end{aligned} \quad (4.33)$$

no entanto, estes estados também podem ser expressos em termos dos autoestados de energia do oscilador harmônico, pela definição (3.22):

$$|\beta_0^{(N)}(x, t)\rangle = C_0^{(N)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z_N^k}{\sqrt{(Nk)!}} |Nk\rangle; \quad (4.34)$$

comparando (4.34) e (4.33) e operando com $\langle k' |$ em ambos os lados, obtemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_n^{(N)} \frac{1}{\sqrt{\omega k!}} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^{\frac{1}{4}} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^k \exp \left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 \right] \delta_{k',k} = C_0^{(N)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z_N^k}{\sqrt{(Nk)!}} \delta_{k',Nk}. \quad (4.35)$$

Agora, devemos nos atentar para duas situações distintas: se k' for múltiplo de N , podemos tomar

$\delta_{k',Nk} = \delta_{k'/N,k}$ e a equação ficará

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(N)} \frac{1}{\sqrt{\omega k'!}} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{4}} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}}\right)^{k'} \exp\left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}}\right)^2\right] = C_0^{(N)} \frac{(Z_N)^{\frac{k'}{N}}}{\sqrt{k'!}};$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(N)} (b_n^{(N)})^{k'} \exp\left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}}\right)^2\right] = C_0^{(N)} \sqrt{\omega} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}; \quad (4.36)$$

se k' não for um múltiplo de N , o lado direito da equação (4.35) se anula, pois não haverá um valor que satisfaça $k' = Nk$, e teremos

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(N)} (b_n^{(N)})^k \exp\left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}}\right)^2\right] = 0. \quad (4.37)$$

Como a base $\{|k\rangle\}$ é infinita, teremos um número infinito de sistemas de equações da forma

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(N)} (b_n^{(N)})^k \exp\left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}}\right)^2\right] = C_0^{(N)} \sqrt{\omega} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad k = \ell N$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(N)} (b_n^{(N)})^k \exp\left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}}\right)^2\right] = 0, \quad \ell N < k < (\ell + 1)N \quad (4.38)$$

onde $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$; ou, alternativamente,

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(N)} (b_n^{(N)})^{\ell N} \exp\left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}}\right)^2\right] = C_0^{(N)} \sqrt{\omega} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(N)} (b_n^{(N)})^{\ell N+k} \exp\left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}}\right)^2\right] = 0, \quad 0 < k < N. \quad (4.39)$$

Entretanto, como $(b_n^{(N)})^N = 1$, temos as relações

$$(b_n^{(N)})^{\ell N} = [(b_n^{(N)})^N]^\ell = 1;$$

$$(b_n^{(N)})^{\ell N+k} = (b_n^{(N)})^{\ell N} (b_n^{(N)})^k = (b_n^{(N)})^k, \quad (4.40)$$

de modo que os sistemas de equações em (4.39) serão equivalentes para qualquer valor de ℓ , levando às mesmas soluções. Por conveniência, tomamos $\ell = 0$ e teremos efetivamente um sistema com apenas N equações suficientes para determinar todos os $A_n^{(N)}$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(N)} \exp\left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}}\right)^2\right] = C_0^{(N)} \sqrt{\omega} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(N)} (b_n^{(N)})^k \exp\left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}}\right)^2\right] = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad (4.41)$$

Uma vez que as soluções serão normalizadas posteriormente, é conveniente substituir o termo do lado direito da igualdade na primeira equação por 1 por simplicidade, preservando a proporção entre os $A_n^{(N)}$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(N)} \exp \left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 \right] = 1 \quad (4.42a)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(N)} (b_n^{(N)})^k \exp \left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 \right] = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1. \quad (4.42b)$$

Para determinar a solução geral para esse sistema, vamos considerar o ansatz

$$A_n^{(N)} = \frac{1}{N} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 \right]; \quad (4.43)$$

a equação (4.42a) é trivialmente satisfeita. Substituindo na equação (4.42b):

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(N)} (b_n^{(N)})^k \exp \left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 \right] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (b_n^{(N)})^k = 0; \quad (4.44)$$

a última igualdade decorre das propriedades das raízes da unidade e é demonstrada no apêndice A.5. As funções $\beta_j^{(N)}(x, t)$ agora podem ser reescritas a menos de um fator de normalização $\Lambda_j^{(N)}$:

$$\beta_j^{(N)}(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sqrt{j!}}{(b_n^{(N)})^j Z_N^{\frac{j}{N}}} \frac{\Lambda_j^{(N)}}{N} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 \right] \Phi_n^{(N)}(x, t). \quad (4.45)$$

O produto interno entre $\beta_j^{(N)}(x, t)$ e $\beta_{j'}^{(N)}(x, t)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \langle \beta_j^{(N)}(x, t), \beta_{j'}^{(N)}(x, t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \beta_j^{(N)}(x, t) \beta_{j'}^{(N)*}(x, t). \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \frac{\sqrt{j!j'!} \Lambda_j^{(N)} \Lambda_{j'}^{(N)*}}{N^2} \frac{1}{(b_n^{(N)})^j (b_{n'}^{(N)*})^{j'} Z_N^{\frac{j}{N}} Z_N^{\frac{j'}{N}*}} \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 + \left(b_{n'}^{(N)*} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 \right) \right] \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi_n^{(N)}(x, t) \Phi_{n'}^{(N)*}(x, t). \end{aligned} \quad (4.46)$$

e usando o resultado da integral (4.16),

$$\begin{aligned}
\langle \beta_j^{(N)}(x, t), \beta_{j'}^{(N)}(x, t) \rangle &= \frac{\sqrt{j!j'!} \Lambda_j^{(N)} \Lambda_{j'}^{(N)*}}{N^2 Z_N^{\frac{j}{N}} Z_N^{\frac{j'}{N}}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \frac{1}{(b_n^{(N)})^j (b_{n'}^{(N)*})^{j'}} \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 + \left(b_{n'}^{(N)*} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 \right) \right] \\
&\quad \times \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \exp \left[\frac{\left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} + b_{n'}^{(N)*} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2}{2} \right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \frac{\sqrt{j!j'!} \Lambda_j^{(N)} \Lambda_{j'}^{(N)*}}{N^2 Z_N^{\frac{j}{N}} Z_N^{\frac{j'}{N}}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \frac{1}{(b_n^{(N)})^j (b_{n'}^{(N)*})^{j'}} \\
&\quad \times \exp \left[b_n^{(N)} b_{n'}^{(N)*} \left| Z_N^{\frac{1}{N}} \right|^2 \right]. \tag{4.47}
\end{aligned}$$

Escrevendo os termos $b_n^{(N)}$ e $b_{n'}^{(N)*}$ na forma exponencial, o termo dentro das somatórias fica

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \frac{\exp \left[b_n^{(N)} b_{n'}^{(N)*} \left| Z_N^{\frac{1}{N}} \right|^2 \right]}{(b_n^{(N)})^j (b_{n'}^{(N)*})^{j'}} &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \frac{\exp \left[\exp \left(\frac{2\pi i n}{N} \right) \exp \left(\frac{-2\pi i n'}{N} \right) \left| Z_N^{\frac{1}{N}} \right|^2 \right]}{\exp \left(\frac{2\pi i n j}{N} \right) \exp \left(\frac{-2\pi i n' j'}{N} \right)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \frac{\exp \left[\exp \left(\frac{2\pi i}{N} (n - n') \right) \left| Z_N^{\frac{1}{N}} \right|^2 \right]}{\exp \left[\frac{2\pi i}{N} (n j - n' j') \right]}; \tag{4.48}
\end{aligned}$$

no apêndice A.5.2, é mostrado que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \frac{\exp \left[\exp \left(\frac{2\pi i}{N} (n - n') \right) \left| Z_N^{\frac{1}{N}} \right|^2 \right]}{\exp \left[\frac{2\pi i}{N} (n j - n' j') \right]} = N^2 |Z_N|^{\frac{j}{N}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|Z_N|^m}{(j + mN)!} \delta_{j,j'} \tag{4.49}$$

de modo que o produto interno pode ser finalmente expresso como

$$\langle \beta_j^{(N)}(x, t), \beta_{j'}^{(N)}(x, t) \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} j! |\Lambda_j^{(N)}|^2 |Z_N|^{\frac{j}{N}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|Z_N|^m}{(j + mN)!} \delta_{j,j'} \tag{4.50}$$

indicando que as funções $\beta_j^{(N)}(x, t)$ são, de fato, ortogonais. Além disso, podemos tomar o fator de normalização como

$$\Lambda_j^{(N)} = \left[\frac{\pi}{\omega} (j!) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|Z_N|^{2m}}{(j + mN)!} \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{4.51}$$

, obtendo finalmente a expressão geral

$$\beta_j^{(N)}(x, t) = \left[\frac{\pi}{\omega} (j!) \sum_m \frac{|Z_N|^{2m}}{(j + mN)!} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sqrt{j!}}{(b_n^{(N)})^j Z_N^{\frac{j}{N}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 \right] \Phi_n^{(N)}(x, t). \quad (4.52)$$

4.3 ALGUMAS SOLUÇÕES

Nesta seção, exibiremos algumas funções de onda obtidas à partir da forma geral (4.52).

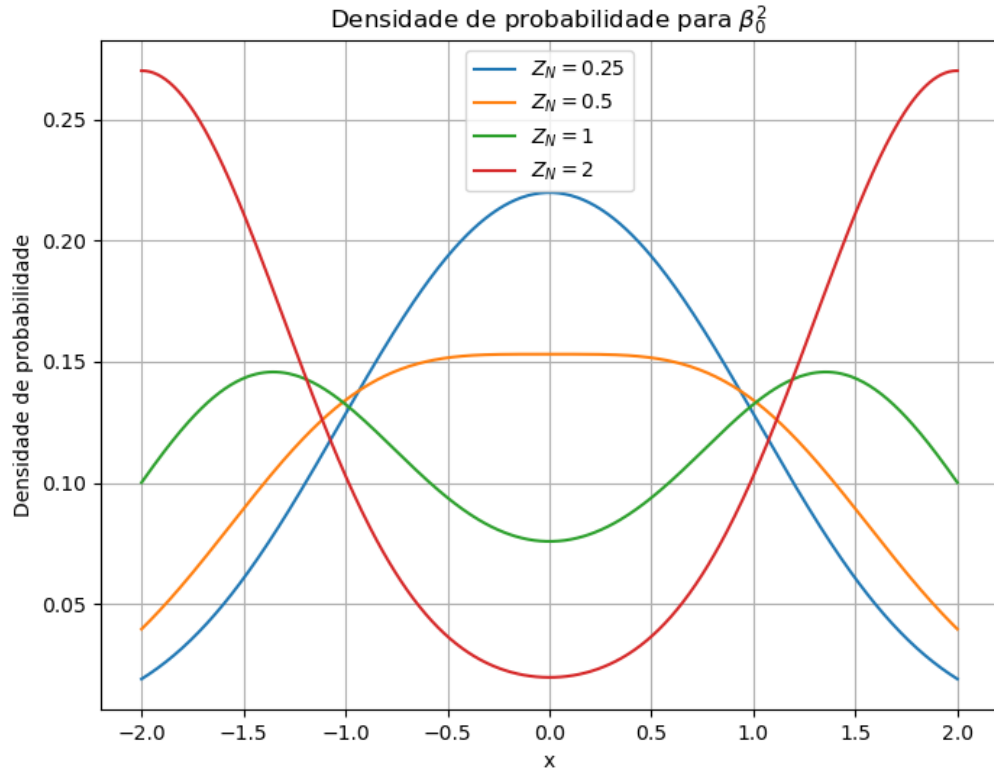
4.3.1 $N = 2$

Para este caso, temos os já conhecidos estados coerentes par e ímpar (DODONOV; MALKIN; MAN'KO, 1974), (GERRY, 1993). As funções de onda obtidas são

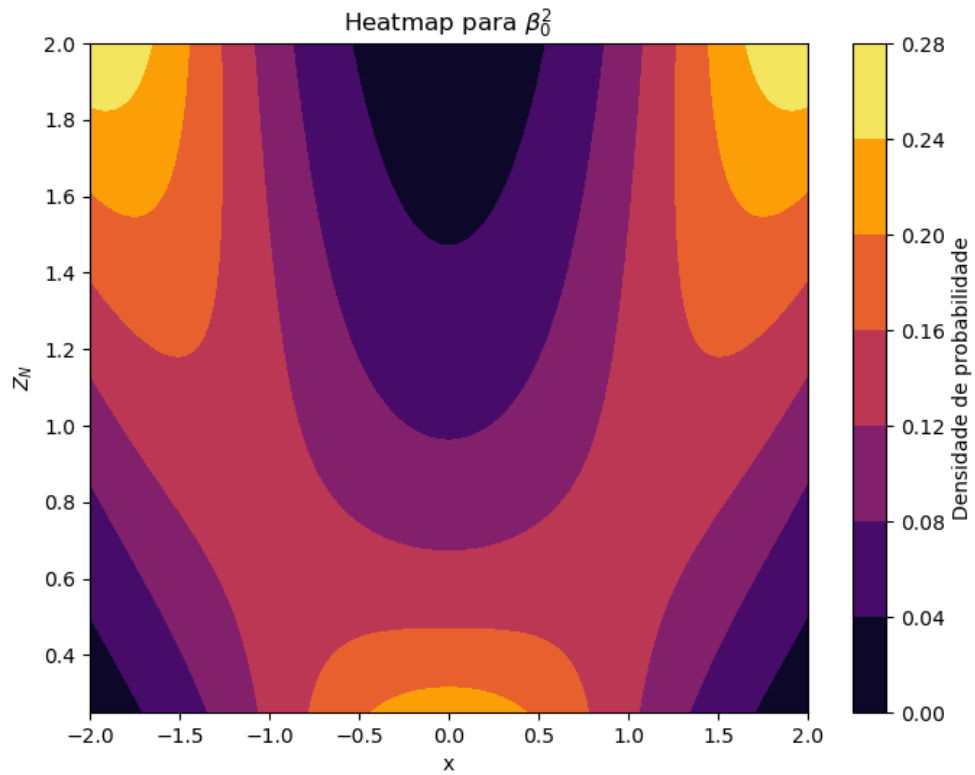
$$\beta_0^{(2)}(x, t) = \frac{\exp \left(-\frac{x^2 \omega}{2} - \frac{Z}{2} \right) \cosh \left(\sqrt{2} x \sqrt{\omega Z} \right)}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\cosh(\sqrt{Z})}{\omega}}}, \quad (4.53a)$$

$$\beta_1^{(2)}(x, t) = \frac{\exp \left(-\frac{x^2 \omega}{2} - \frac{Z}{2} \right) \sinh \left(\sqrt{2} x \sqrt{\omega Z} \right)}{\sqrt{\pi Z} \sqrt{\frac{\sinh(\sqrt{Z})}{\omega \sqrt{Z}}}}. \quad (4.53b)$$

Das figuras Figura 4 e Figura 5, nota-se a simetria espacial esperada. Em particular, para $\beta_0^{(2)}(x, t)$, observamos que a densidade de probabilidade apresenta comportamentos mais semelhantes ao esperado para um sistema clássico quando Z_2 aumenta, com maior probabilidade de encontrar a partícula afastada do centro do potencial. Tal comportamento já ocorre para $\beta_1^{(2)}(x, t)$ mesmo com valores menores de Z_2 .



(a)



(b)

Figura 4 – Densidade de Probabilidade para $\beta_0^{(2)}(x, t)$ ($\omega = 1$)

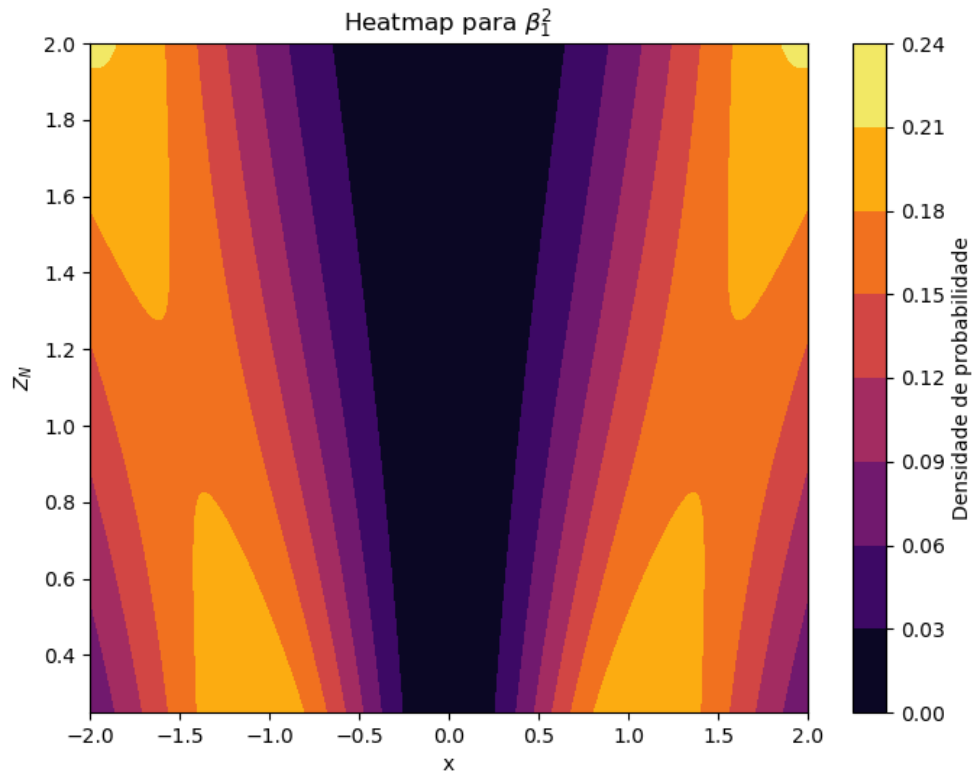
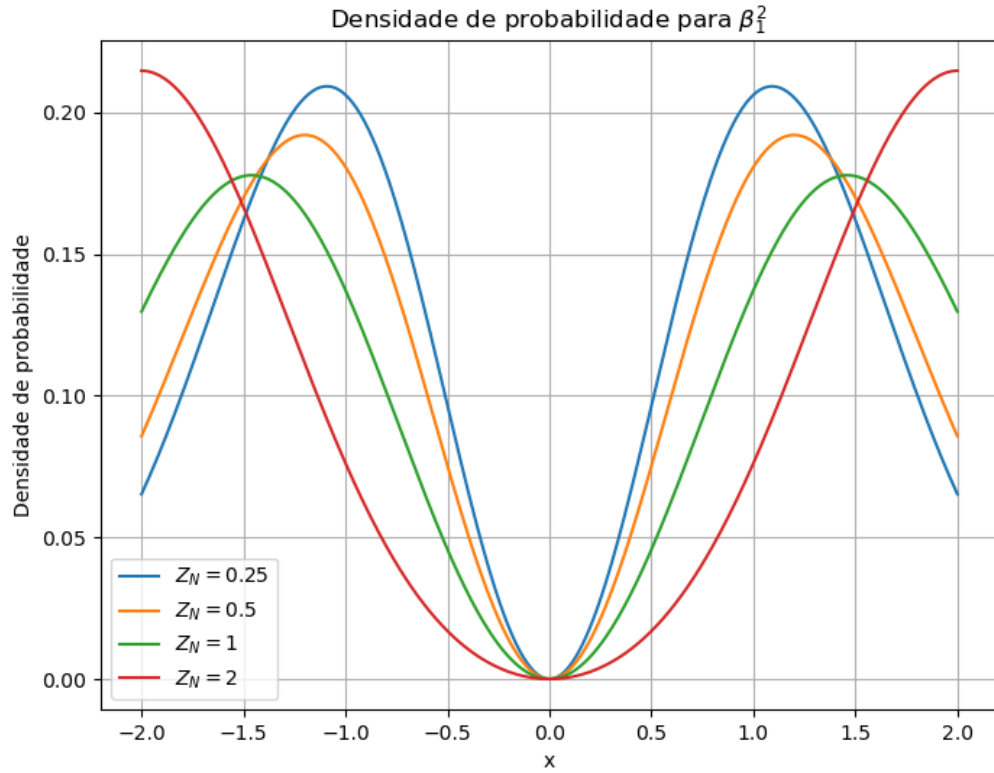


Figura 5 – Densidade de Probabilidade para $\beta_1^{(2)}(x, t)$ ($\omega = 1$)

4.3.2 $N = 3$

As funções de onda obtidas nesse caso são

$$\beta_0^{(3)}(x, t) = \lambda \sqrt{\omega} \frac{\left(e^{\frac{1}{4}(3-i\sqrt{3})Z^{2/3}} + e^{\frac{1}{4}(3+i\sqrt{3})Z^{2/3}+i\sqrt{6}xZ^{1/3}} + e^{(-1)^{1/6}\sqrt{6}xZ^{1/3}\sqrt{\omega}} \right)}{\sqrt{3e^{Z^{1/3}}\pi + 6e^{-\frac{Z^{1/3}}{2}}\pi \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}Z^{1/3}\right)}}, \quad (4.54a)$$

$$\beta_1^{(3)}(x, t) = \lambda \sqrt{\omega} \frac{\left(2e^{\frac{1}{4}i\sqrt{3}Z^{2/3}+(-1)^{1/6}\sqrt{6}xZ^{2/3}\sqrt{\omega}} + ie^{\frac{3}{4}Z^{2/3}} \left(i + \sqrt{3} - (-i + \sqrt{3})e^{\frac{1}{2}i\sqrt{3}Z^{1/3}(Z^{1/3}+2\sqrt{2}x\omega)} \right) \right)}{2\sqrt{Z^{1/3} \left[3e^{Z^{1/3}}\pi - 6e^{-\frac{Z^{1/3}}{2}}\pi \sin\left(\frac{1}{6}(\pi - 3Z^{1/3})\right) \right]}}, \quad (4.54b)$$

$$\beta_2^{(3)}(x, t) = \lambda \sqrt{\omega} \frac{\left(2e^{\frac{1}{4}i\sqrt{3}Z^{2/3}+(-1)^{1/6}\sqrt{6}xZ^{2/3}\sqrt{\omega}} - ie^{\frac{3}{4}Z^{2/3}} \left(-i + \sqrt{3} - (i + \sqrt{3})e^{\frac{1}{2}i\sqrt{3}Z^{1/3}(Z^{1/3}+2\sqrt{2}x\omega)} \right) \right)}{2\sqrt{Z^{2/3} \left[3e^{Z^{1/3}}\pi - 6e^{-\frac{Z^{1/3}}{2}}\pi \sin\left(\frac{1}{6}(\pi - 3Z^{1/3})\right) \right]}}. \quad (4.54c)$$

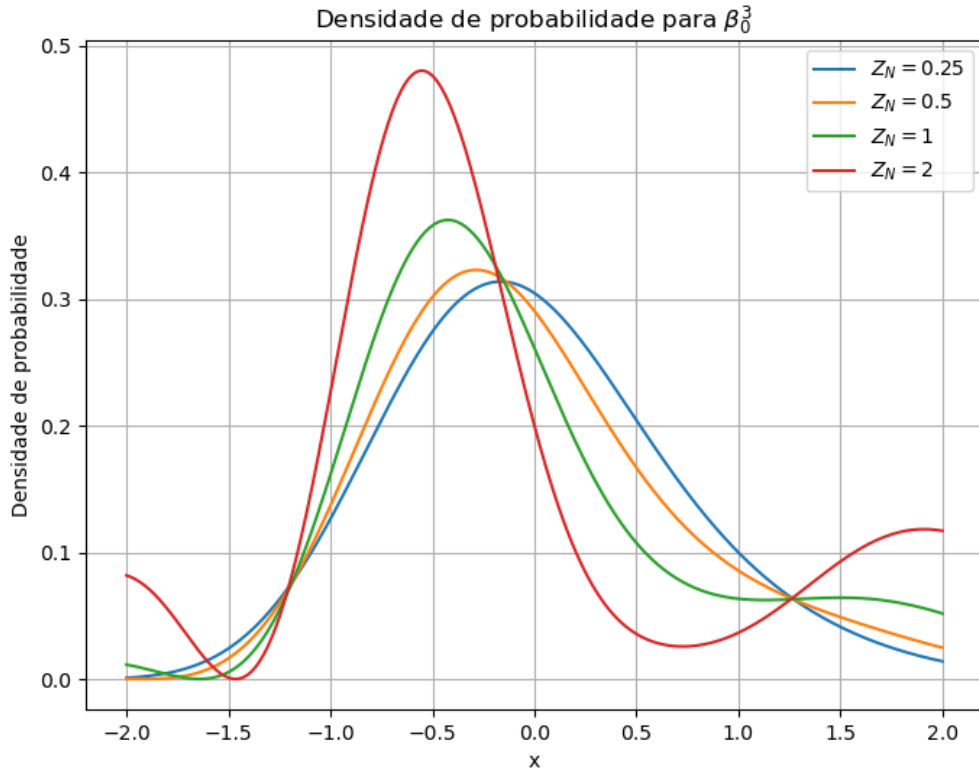
onde

$$\lambda = \exp \left[-\frac{1}{4} \left(2 + i\sqrt{2} \right) Z^{2/3} - (-1)^{1/3} \sqrt{2} x Z^{1/3} \sqrt{\omega} - \frac{\omega x^2}{2} \right]. \quad (4.55)$$

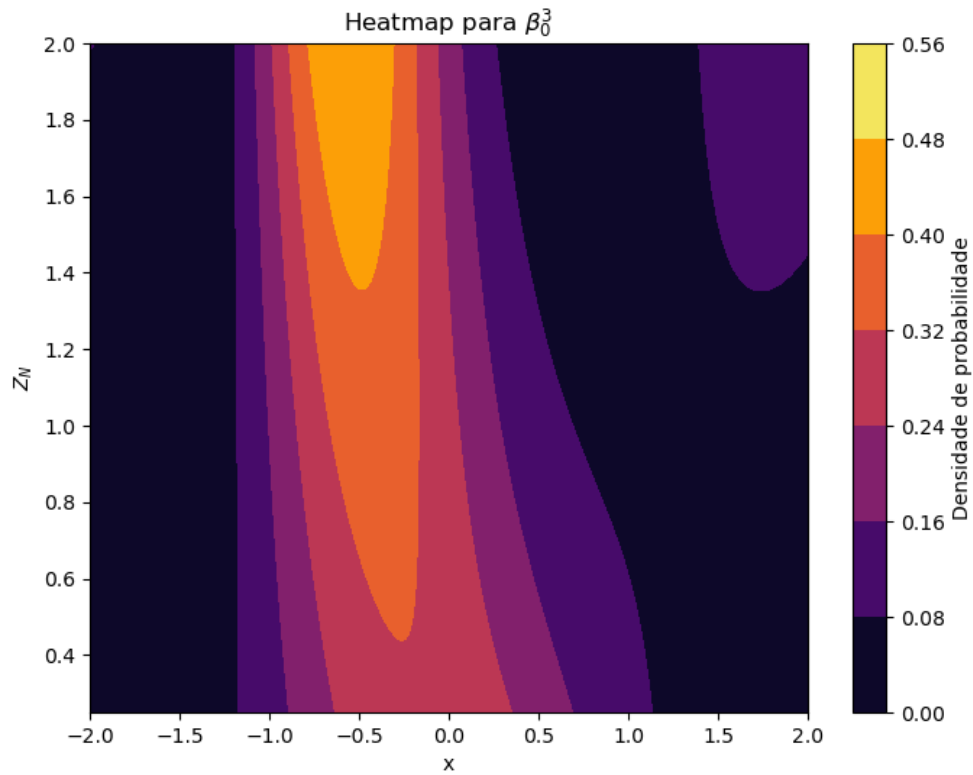
Nesse caso, observamos que as densidades de probabilidade não são simétricas; diferente do que acontece para o caso $N = 2$, onde temos uma função de onda par e uma ímpar, as funções de onda para $N = 3$ não apresentam simetria de paridade. De fato, a paridade destas funções de onda é dependente do termo

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(N)}(x) &= \exp \left[-\frac{\omega x^2}{2} + b_n^{(N)} \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}} x \right], \\ \Phi_n^{(N)}(-x) &= \Phi_n^{(N)}(x) \exp \left[-2b_n^{(N)} \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}} x \right]; \end{aligned} \quad (4.56)$$

para N par, é possível sobrepor essas funções duas a duas, obtendo, por exemplo, funções trigonométricas e hiperbólicas da combinação dos termos $\exp \left[-2b_n^{(N)} \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}} x \right]$, o que não pode ser feito para N ímpar.



(a)



(b)

Figura 6 – Densidade de Probabilidade para $\beta_0^{(3)}(x, t)$ ($\omega = 1$)

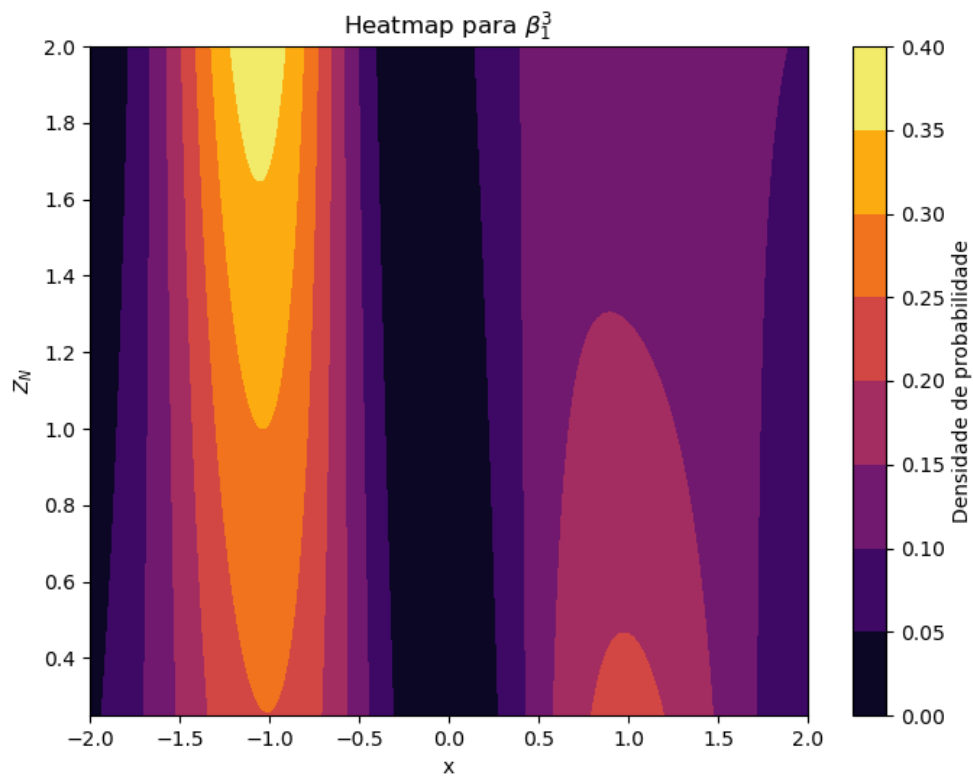
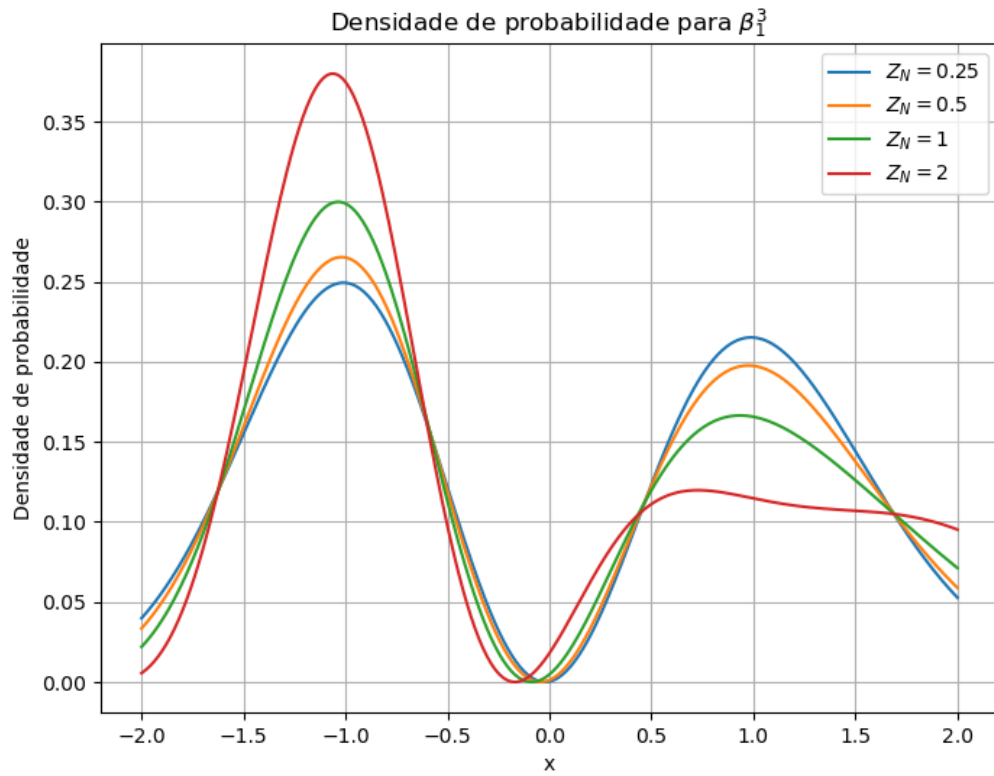


Figura 7 – Densidade de Probabilidade para $\beta_1^{(3)}(x, t)$ ($\omega = 1$)

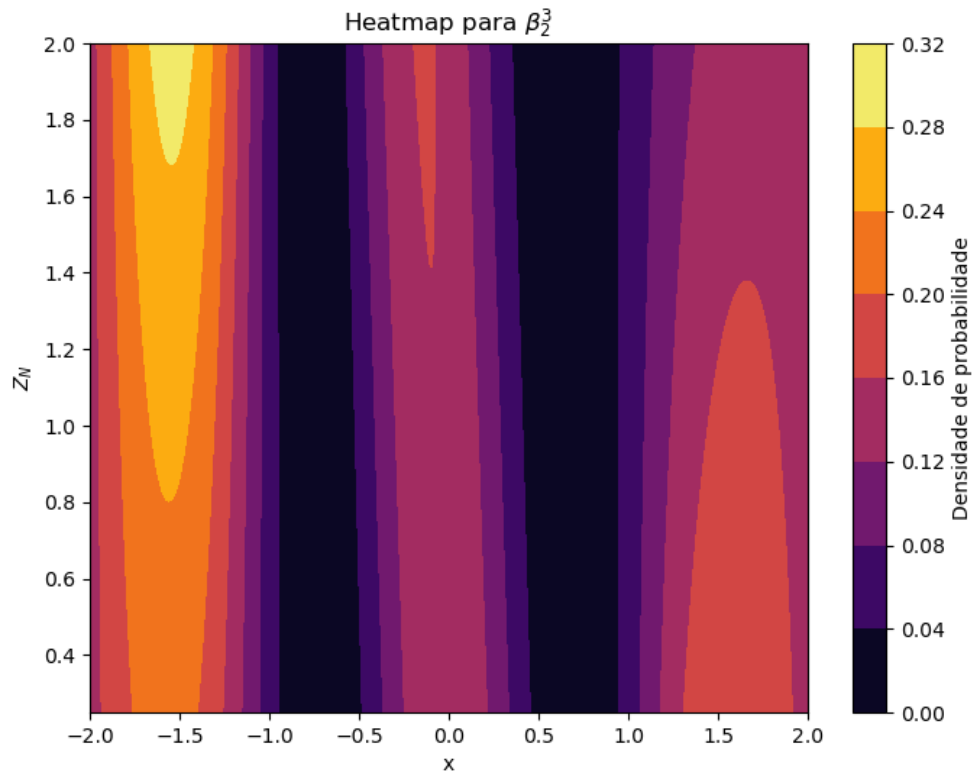
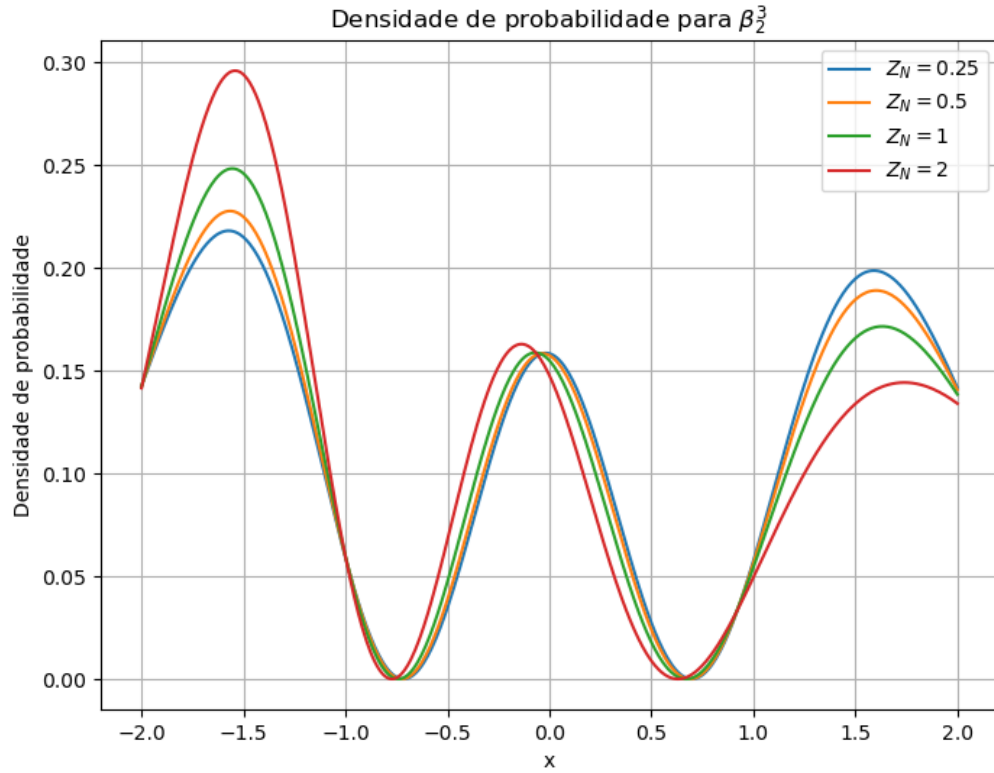


Figura 8 – Densidade de Probabilidade para $\beta_2^{(3)}(x, t)$ ($\omega = 1$)

4.3.3 $N = 4$

As funções para $N = 4$ também podem ser expressas em termos de funções trigonométricas e hiperbólicas:

$$\beta_0^{(4)}(x, t) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2\omega}{2} - \frac{\sqrt{Z}}{2}\right) \left(e^{\sqrt{Z}} \cos\left(\sqrt{2}x\sqrt{\omega}\sqrt[4]{Z}\right) + \cosh\left(\sqrt{2}x\sqrt{\omega}\sqrt[4]{Z}\right)\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\cos(\sqrt[4]{Z}) + \cosh(\sqrt[4]{Z})}{\omega}}}, \quad (4.57a)$$

$$\beta_1^{(4)}(x, t) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2\omega}{2} - \frac{\sqrt{Z}}{2}\right) \left(e^{\sqrt{Z}} \sin\left(\sqrt{2}x\sqrt{\omega}\sqrt[4]{Z}\right) + \sinh\left(\sqrt{2}x\sqrt{\omega}\sqrt[4]{Z}\right)\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{Z}\sqrt{\frac{\sin(\sqrt[4]{Z}) + \sinh(\sqrt[4]{Z})}{\sqrt[4]{Z}\omega}}}, \quad (4.57b)$$

$$\beta_2^{(4)}(x, t) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2\omega}{2} - \frac{\sqrt{Z}}{2}\right) \left(\cosh\left(\sqrt{2}x\sqrt{\omega}\sqrt[4]{Z}\right) - e^{\sqrt{Z}} \cos\left(\sqrt{2}x\sqrt{\omega}\sqrt[4]{Z}\right)\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{Z}\sqrt{\frac{\cosh(\sqrt[4]{Z}) - \cos(\sqrt[4]{Z})}{\omega\sqrt{Z}}}}, \quad (4.57c)$$

$$\beta_3^{(4)}(x, t) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2\omega}{2} - \frac{\sqrt{Z}}{2}\right) \left(\sinh\left(\sqrt{2}x\sqrt{\omega}\sqrt[4]{Z}\right) - e^{\sqrt{Z}} \sin\left(\sqrt{2}x\sqrt{\omega}\sqrt[4]{Z}\right)\right)}{\sqrt{2\pi}Z^{3/4}\sqrt{\frac{\sinh(\sqrt[4]{Z}) - \sin(\sqrt[4]{Z})}{\omega Z^{3/4}}}}; \quad (4.57d)$$

e temos novamente funções de onda com paridade bem definida, de modo que as densidades de probabilidade são simétricas. Para os valores de Z considerados, temos alta probabilidade de encontrar a partícula próxima ao centro do potencial para as soluções $\beta_0^{(4)}(x, t)$ e $\beta_2^{(4)}(x, t)$, enquanto essas probabilidades são baixas para as soluções $\beta_1^{(4)}(x, t)$ e $\beta_3^{(4)}(x, t)$.

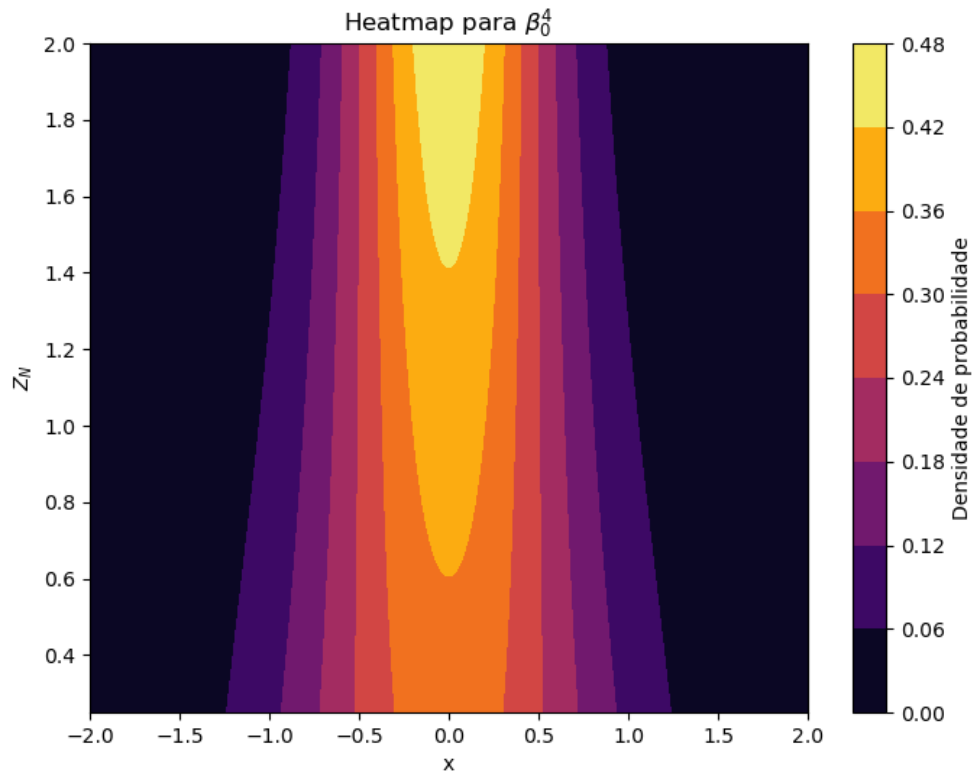
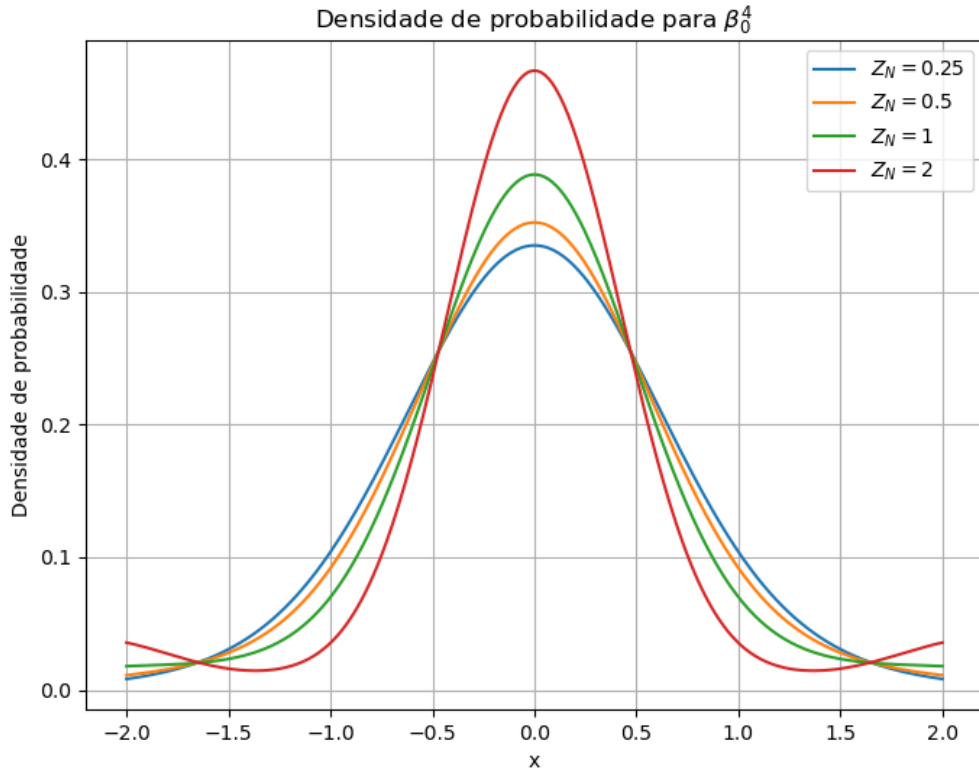
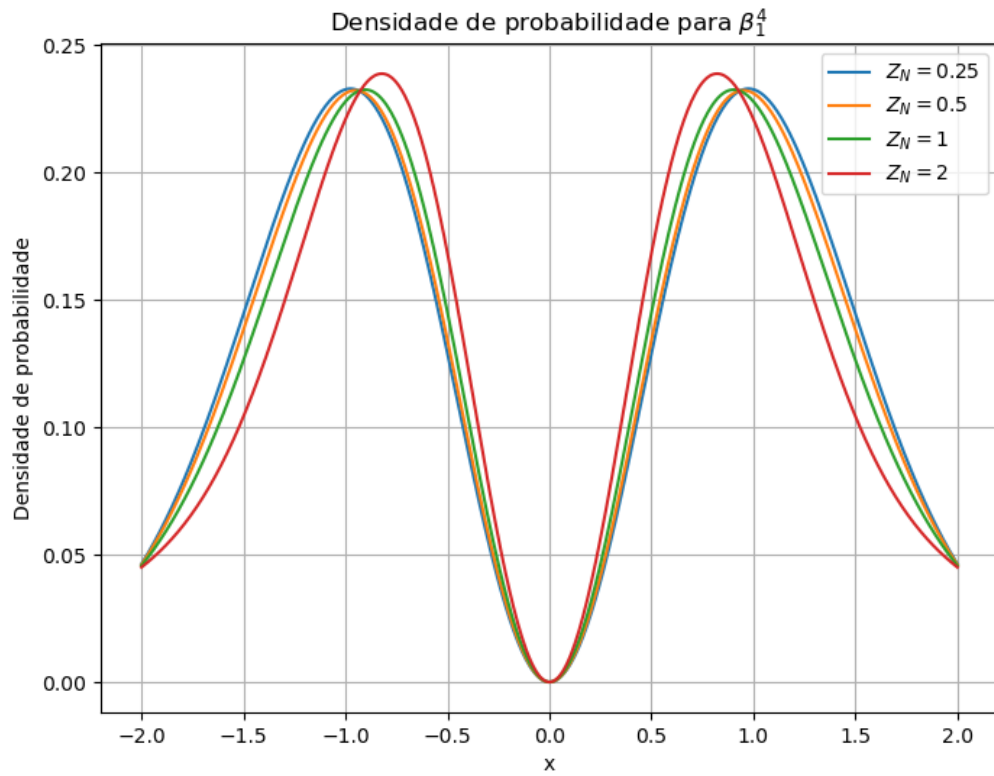
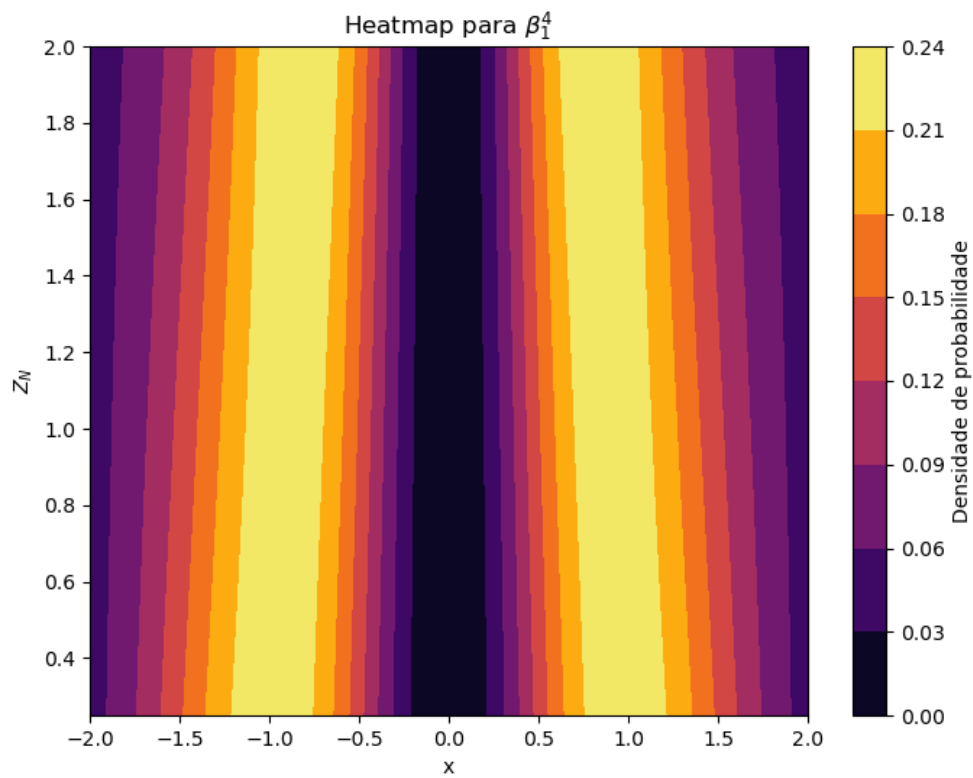


Figura 9 – Densidade de Probabilidade para $\beta_0^{(4)}(x, t)$ ($\omega = 1$)



(a)



(b)

Figura 10 – Densidade de Probabilidade para $\beta_1^{(4)}(x, t)$ ($\omega = 1$)

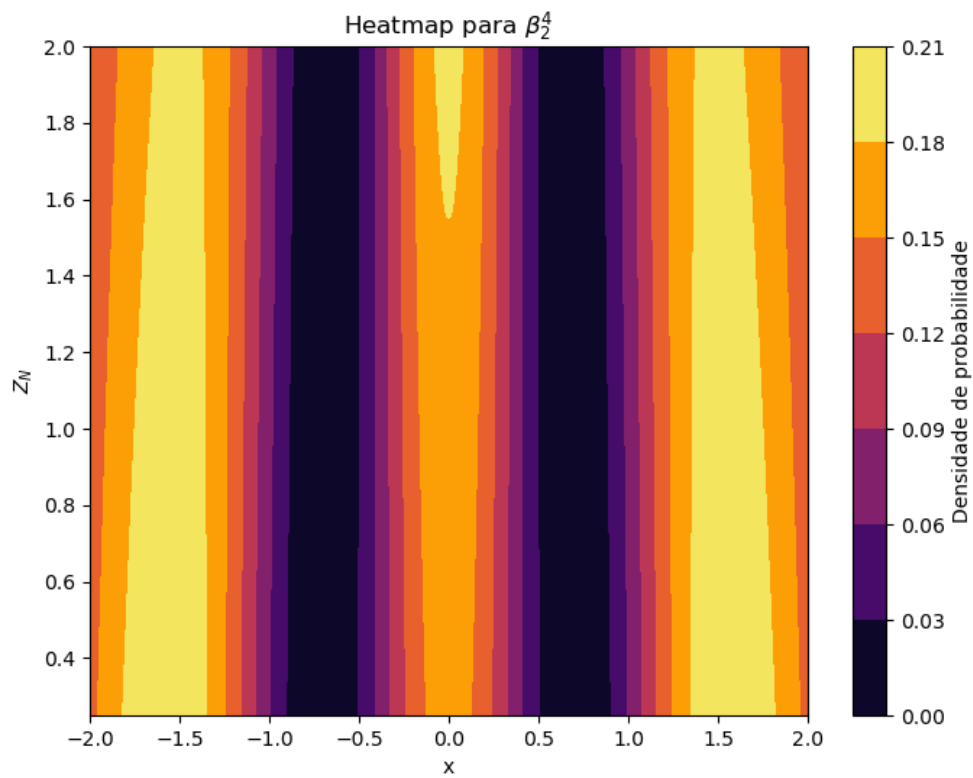
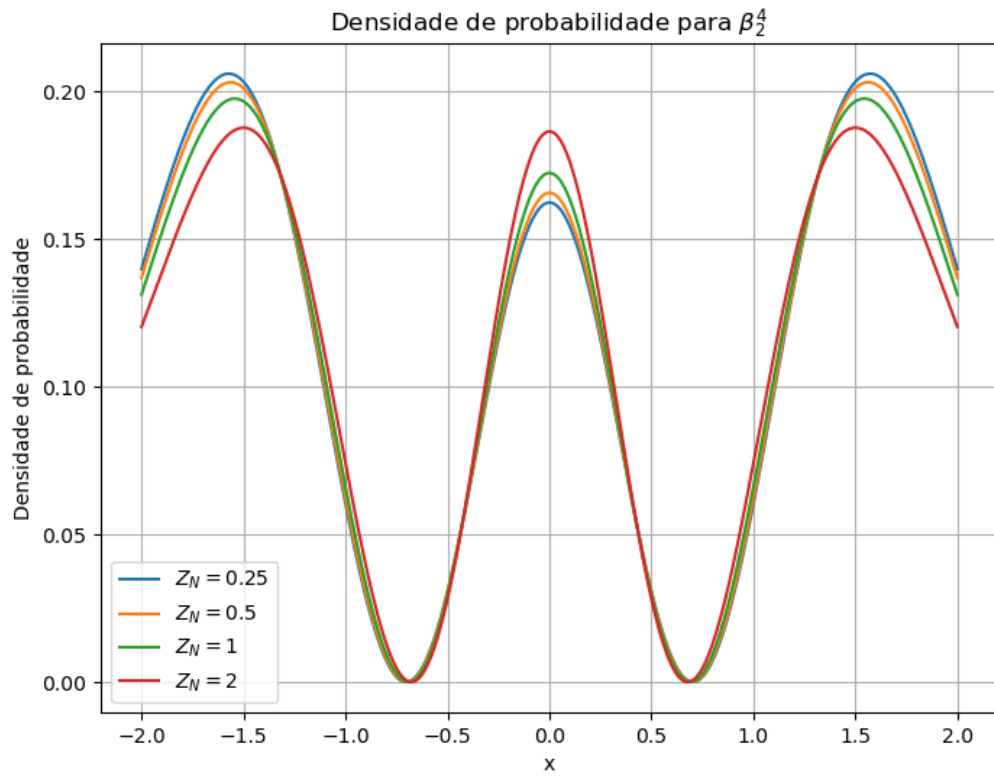


Figura 11 – Densidade de Probabilidade para $\beta_2^{(4)}(x, t)$ ($\omega = 1$)

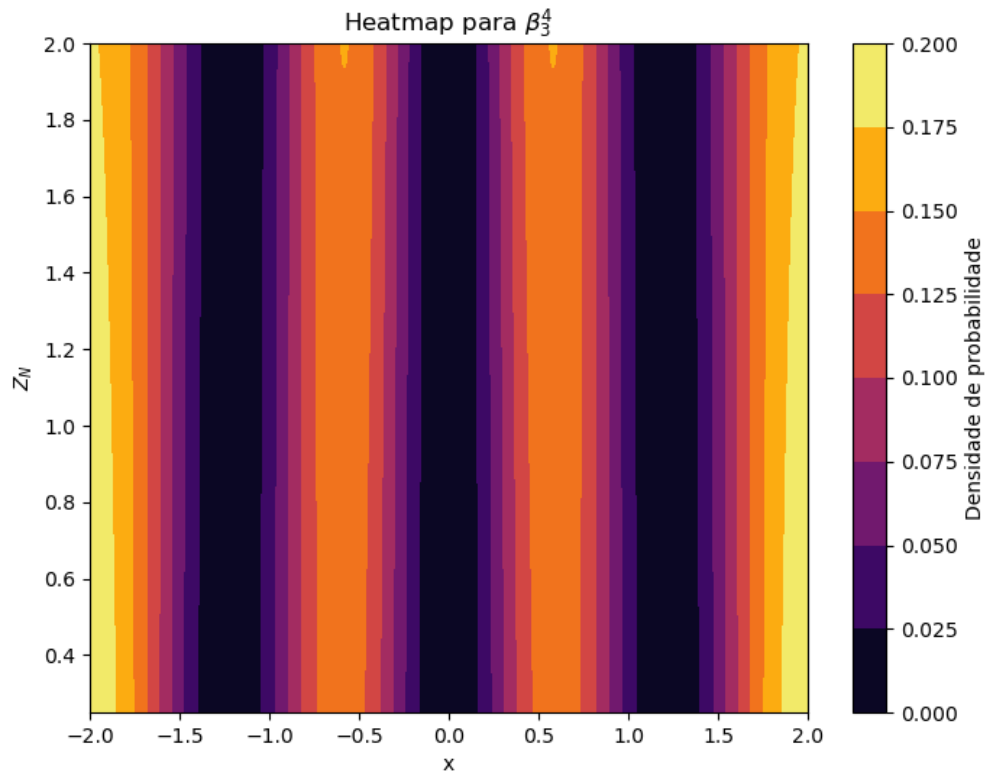
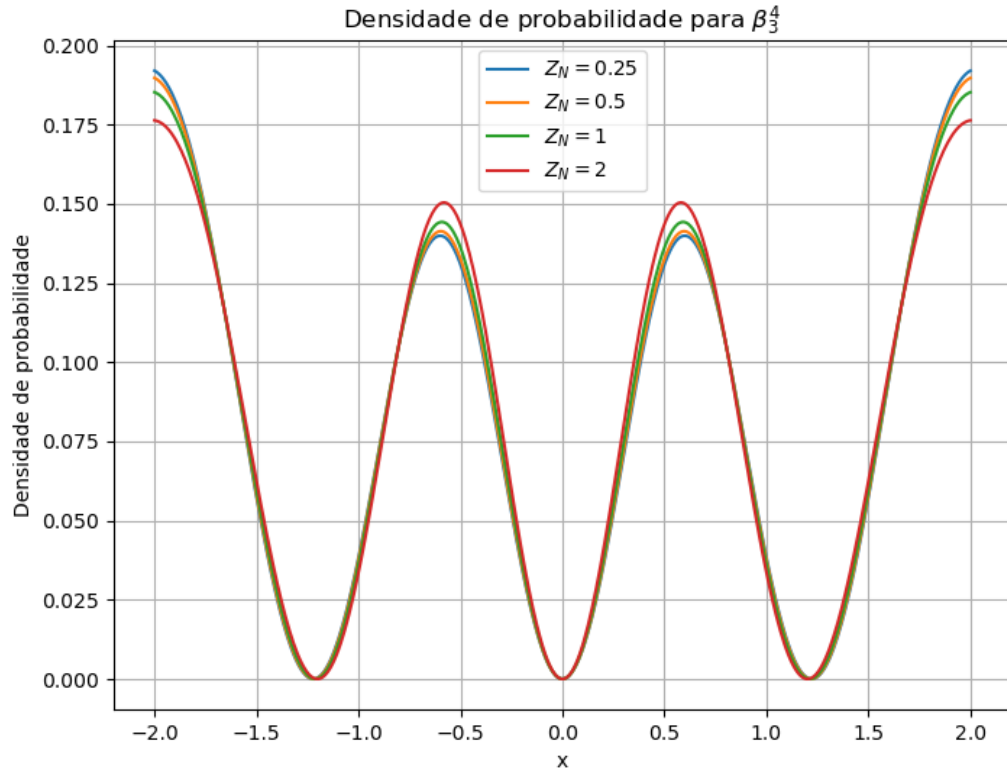


Figura 12 – Densidade de Probabilidade para $\beta_3^{(4)}(x, t)$ ($\omega = 1$)

5 COMENTÁRIO FINAIS E ASPIRAÇÕES FUTURAS

Durante este projeto, foi possível obter uma generalização da definição de estados coerentes para uma potência inteira arbitrária do operador $\hat{a}$. Além disso, pudemos mostrar que estes estados podem ser escritos em termos de uma base ortogonal de um número finito de elementos e que possuem valores esperados para posição e momentum linear oscilantes, o que nos permite identificar um caráter quasi-clássico para estes estados.

Observamos também que a incerteza $\Delta\hat{q}\Delta\hat{p}$ associada aos estados coerentes generalizados não é mínima como ocorre para o estado coerente canônico. Ao invés disso, apresentam caráter oscilatório que podem ser complicados a depender dos coeficientes da expansão de um estado geral Ψ em termos destes estados coerentes.

Demonstramos um método (ainda não explorado na literatura) para determinar funções de onda ortonormais capazes de representar estes estados coerentes. Tais funções podem ser construídas de forma imediata pela forma geral (4.52) como uma expansão de funções exponenciais (de perfil gaussiano) simples. Entretanto, observou-se que para valores ímpares de N tais soluções violam a simetria de paridade, e podem não ser adequadas para representar sistemas físicos.

Feitas estas considerações, alguns problemas podem ser vislumbrados, sendo candidatos para investigações em trabalhos futuros:

- É possível obter relações de completeza para os estados $|Z_N\rangle$, de forma semelhante à obtida para o estado coerente canônico?
- Vimos que as funções de onda para N ímpar não possuem simetria de paridade. Entretanto, talvez seja possível obter soluções com simetria PT através de combinações lineares das funções $\beta_j^{(N)}(x, t)$, preservando a ortogonalidade.
- Estudos tem sido feitos acerca de estados coerentes não-lineares. É útil, nesse contexto, estudar extensões do método apresentado na seção 4.2 para encontrar funções de onda ortogonais associadas a estes estados.

Estes são apenas alguns problemas interessantes a serem discutidos. O estudo dos estados coerentes é quase tão antigo quanto a própria mecânica quântica, atravessou o último século e, até hoje, apresenta problemas intrigantes a serem investigados.

REFERÊNCIAS

- ABBASI, O.; JAFARI, A. Four-photon nonlinear coherent states. **Journal of Modern Optics**, Taylor & Francis, v. 64, n. 1, p. 32–45, 2017.
- BELYAEVA, T. L.; KOVACHEV, L. M.; SERKIN, V. N. Parton-like soliton structures in nonlinear coherent states. **Optik**, Elsevier BV, v. 210, p. 164483, 2020. ISSN 00304026.
- BUŽEK, V.; JEX, I.; QUANG, T. k-photon coherent states. **Journal of Modern Optics**, Taylor & Francis, v. 37, n. 2, p. 159–163, 1990.
- DALFOVO, F. et al. **Theory of Bose-Einstein Condensation in Trapped Gases**. Springer, 1999. ISBN 9783540655739. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=fJ5vAAAAMAAJ>>.
- DODONOV, V.; MALKIN, I.; MAN'KO, V. Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator. **Physica**, Elsevier, v. 72, n. 3, p. 597–615, 1974.
- GAZEAU, J.-P. **Coherent States in Quantum Optics**. [S.l.]: Berlin: Wiley-VCH, 2009.
- GERRY, C. C. Non-classical properties of even and odd coherent states. **Journal of Modern Optics**, Taylor & Francis, v. 40, n. 6, p. 1053–1071, 1993.
- GLAUBER, R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. **Physical Review**, v. 131, n. 6, p. 2766–2788, 1963. ISSN 0031899X.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of integrals, series, and products**. Seventh. [S.l.]: Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007. xlviii+1171 p. Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, With one CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX). ISBN 978-0-12-373637-6; 0-12-373637-4.
- HALL, B. C. **Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction**. [S.l.]: Springer, 2015.
- III, E. E. H.; GERRY, C. C. Four-photon coherent states: properties and generation. **Journal of Modern Optics**, Taylor & Francis, v. 39, n. 12, p. 2501–2517, 1992.
- JEX, I.; BUŽEK, V. Multiphoton coherent states and the linear superposition principle. **Journal of Modern Optics**, Taylor & Francis, v. 40, n. 5, p. 771–783, 1993.
- MANDEL, L.; WOLF, E. **Theoretical Aspects of Photon Blocking**. Wiley, 1985. ISBN 9780471854268. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=y4bL-1Nt-XsC>>.
- PITAEVSKII, L.; STRINGARI, S. **Bose-Einstein Condensation**. Oxford University Press, 2003. ISBN 9780198526438. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=05orS91ID9QC>>.
- SCHRÖDINGER, E. Der stetige übergang von der mikro-zur makromechanik. **Naturwissenschaften**, Springer-Verlag, v. 14, p. 664–666, 1926.
- SIVAKUMAR, S. Even and odd nonlinear coherent states. **Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics**, v. 250, n. 4-6, p. 257–262, 1998. ISSN 03759601.
- SIVAKUMAR, S. Studies on nonlinear coherent states. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, v. 2, n. 6, 2000. ISSN 14644266.

SUN, J.; WANG, J.; WANG, C. Orthonormalized eigenstates of cubic and higher powers of the annihilation operator. **Physical Review A**, APS, v. 44, n. 5, p. 3369, 1991.

WALL, F. T. Normal modes of an idealized crystal lattice. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 31, n. 12, p. 936–938, 1963.

WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. **Quantum Optics**. [S.l.]: Springer, 2007.

ZHANG, W. M.; FENG, D. H.; GILMORE, R. Coherent states: Theory and some applications. **Reviews of Modern Physics**, v. 62, p. 867–927, 1990.

APÊNDICE A – ALGUNS CÁLCULOS E DEFINIÇÕES

A.1 RESULTADOS IMPORTANTES DO OSCILADOR HARMÔNICO QUÂNTICO

Neste apêndice, revisamos os principais resultados teóricos do oscilador harmônico quântico, uma das soluções fundamentais na mecânica quântica.

A.1.1 Hamiltoniano e Operadores

O Hamiltoniano do oscilador harmônico quântico é dado por:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2. \quad (\text{A.1})$$

Usando os operadores de criação ($a^\dagger$) e aniquilação (a):

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right), \quad (\text{A.2})$$

o Hamiltoniano pode ser reescrito como:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.3})$$

A.1.2 Autoestados e Energias

Os autoestados do Hamiltoniano ($|n\rangle$) são definidos pela relação:

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (\text{A.4})$$

onde $|0\rangle$ é o estado de menor energia ($a|0\rangle = 0$). As energias associadas são:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.5})$$

A.1.3 Funções de Onda no Espaço de Coordenadas

As funções de onda correspondentes aos autoestados no espaço de coordenadas são dadas por:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \quad (\text{A.6})$$

onde $H_n(x)$ são os polinômios de Hermite.

A.1.4 Comutadores e Relações de Incerteza

Os operadores a e $a^\dagger$ satisfazem a relação de comutação:

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (\text{A.7})$$

Além disso, os operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$ têm o comutador:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (\text{A.8})$$

A.1.5 Operador Número

O operador número $\hat{n}$ é definido como:

$$\hat{n} = a^\dagger a, \quad (\text{A.9})$$

e seus autovalores são inteiros não negativos $n = 0, 1, 2, \dots$. Ele mede o número de quanta de energia presentes no sistema, com sua ação sobre os autoestados $|n\rangle$ dada por:

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (\text{A.10})$$

O operador número possui as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{n}, a] = -a, \quad [\hat{n}, a^\dagger] = a^\dagger, \quad (\text{A.11})$$

refletindo a interação com os operadores de criação ($a^\dagger$) e aniquilação (a).

O Hamiltoniano do oscilador harmônico quântico pode ser reescrito em termos do operador número como:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{A.12})$$

mostrando que $\hat{n}$ representa o número de quanta de energia no sistema, enquanto o termo $\frac{1}{2}\hbar\omega$ corresponde à energia do estado fundamental.

A.2 REDIMENSIONAMENTO DO OSCILADOR HARMÔNICO

Dada a equação do oscilador harmônico,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} m^2 \omega^2 x^2 \Psi = 0, \quad (\text{A.13})$$

cuja solução em termos dos autoestados de energia é

$$\Psi_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \cdot \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \cdot \exp\left\{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right\} \cdot H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \cdot \exp\left\{\frac{-i\varepsilon_n t}{\hbar}\right\},$$

$$\varepsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{A.14})$$

o reescalonamento

$$x \longrightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{m}}x,$$

$$t \longrightarrow \hbar t$$

simplifica a equação (A.13) em

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\omega x^2\Psi = 0, \quad (\text{A.15})$$

e a solução (A.14) em

$$\Psi_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \cdot \left(\frac{1}{\pi\omega}\right)^{1/4} \cdot \exp\left\{-\frac{\omega x^2}{2}\right\} \cdot H_n(\sqrt{\omega}x) \cdot \exp\{-iE_n t\},$$

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{A.16})$$

De forma semelhante, o estado coerente canônico

$$\Psi_Z(x, t) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x - \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\mathcal{R}[Z(t)]\right)^2 + i\left(\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\mathcal{I}[Z(t)]x + \theta(t)\right)\right] \quad (\text{A.17})$$

é reescalonado para

$$\Psi_Z(x, t) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\omega}{2}\left(x - \sqrt{\frac{2}{\omega}}\mathcal{R}[Z(t)]\right)^2 + i\left(\sqrt{\frac{2}{\omega}}\mathcal{I}[Z(t)]x + \theta(t)\right)\right]. \quad (\text{A.18})$$

A.3 CÁLCULO DA INTEGRAL NA RELAÇÃO DE COMPLETEZA

A integral da equação (2.10) pode ser facilmente calculada escrevendo $Z = re^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{C}} e^{-|Z|^2} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} \frac{Z^{n'\star}}{\sqrt{n'!}} d^2 Z &= \frac{1}{\sqrt{n!n'!}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty dr d\theta r e^{-r^2} r^{n+n'} e^{i(n-n')\theta} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n!n'!}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-n')\theta}}_{2\pi\delta_{n,n'}} \int_0^\infty dr r^{n+n'+1} e^{-r^2} \\
 &= \frac{2\pi\delta_{n,n'}}{n!} \int_0^\infty dr r^{2n+1} e^{-r^2} \\
 &= \frac{\pi\delta_{n,n'}}{n!} \underbrace{\int_0^\infty du u^n e^{-u}}_{\Gamma(n+1)=n!} \\
 &= \pi\delta_{n,n'}.
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

A.4 DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DE $|\Phi_n^{(N)}\rangle$

Para determinar os coeficientes da expansão (4.30), precisamos determinar o resultado da integral

$$\begin{aligned}
 D_k^{(N)} &= \int_{-\infty}^\infty dx \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} \cdot \left(\frac{1}{\pi\omega}\right)^{1/4} \cdot \exp\left[-\frac{\omega x^2}{2}\right] \cdot H_n(\sqrt{\omega}x) \Phi_n^{(N)}(x, t) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} \cdot \left(\frac{1}{\pi\omega}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^\infty dx H_k(\sqrt{\omega}x) \exp\left[-\omega x^2 + b_n^{(N)} \sqrt{2\omega} Z_N^{\frac{1}{N}} x\right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} \cdot \left(\frac{1}{\pi\omega}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^\infty dx H_k(\sqrt{\omega}x) \exp\left[-\left(\sqrt{\omega}x - \frac{b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}}\right)^2}{2}\right],
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

fazendo a mudança de variáveis

$$\bar{x} = \sqrt{\omega}x, \quad y = \frac{b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}}}{\sqrt{2}}, \tag{A.21}$$

a expressão é reescrita em termos de uma integral cujo resultado é conhecido¹,

$$\begin{aligned}
 D_k^{(N)} &= \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} \cdot \left(\frac{1}{\pi\omega}\right)^{1/4} \frac{e^{y^2}}{\sqrt{\omega}} \int_{-\infty}^\infty d\bar{x} e^{-(\bar{x}-y)^2} H_k(\bar{x}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} \cdot \left(\frac{1}{\pi\omega}\right)^{1/4} \frac{e^{y^2}}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\pi} 2^k y^k
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

¹ (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2007), página 804, Seção 7.374, equação 6 (ET II 288(2)a, EH II 195(31))

retornando às variáveis originais, temos finalmente

$$D_k^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{\omega k!}} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^{\frac{1}{4}} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^k \exp \left[\frac{1}{2} \left(b_n^{(N)} Z_N^{\frac{1}{N}} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.23})$$

A.5 SOMAS ENVOLVENDO AS RAÍZES DA UNIDADE

A.5.1 Soma das raízes da unidade

Consideremos agora a soma

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(b_n^{(N)} \right)^k,$$

onde $b_n^{(N)}$ são as raízes da equação $\left(b_n^{(N)} \right)^N = 1$. Para provar que essa soma é igual a zero para $1 \leq k \leq N-1$, podemos usar as propriedades das raízes da unidade.

As n -ésimas raízes da unidade são dadas por

$$b_n^{(N)} = e^{2\pi i n/N}, \quad (\text{A.24})$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. A soma pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(b_n^{(N)} \right)^k &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i n/N} \right)^k \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k n/N}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Essa soma é uma progressão geométrica, onde o primeiro termo é $e^0 = 1$ e a razão é $e^{2\pi i k/N}$.

A soma de uma progressão geométrica de N termos, com razão $r \neq 1$, é dada por

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{r^N - 1}{r - 1}. \quad (\text{A.26})$$

Substituindo $r = e^{2\pi i k/N}$, temos

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k n/N} = \frac{\left(e^{2\pi i k/N} \right)^N - 1}{e^{2\pi i k/N} - 1}. \quad (\text{A.27})$$

Como $\left(e^{2\pi i k/N} \right)^N = e^{2\pi i k} = 1$, a soma torna-se

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k n/N} = \frac{1 - 1}{e^{2\pi i k/N} - 1} = \frac{0}{e^{2\pi i k/N} - 1} = 0. \quad (\text{A.28})$$

Portanto,

$$\sum_{n=0}^{N-1} (b_n^{(N)})^k = 0, \quad (A.29)$$

para $1 \leq k \leq N-1$.

A.5.2 Soma envolvida na ortogonalidade das funções $\beta_j^{(N)}$

No cálculo do produto interno

$$\langle \beta_j^{(N)}(x, t), \beta_{j'}^{(N)}(x, t) \rangle.$$

obtivemos a soma

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \exp \left[-\frac{2\pi i}{N} (nj - n'j') \right] \exp \left[\exp \left(\frac{2\pi i}{N} (n - n') \right) \left| Z_N^{1/N} \right| \right]. \quad (A.30)$$

Expandimos a segunda exponencial em série de potências:

$$\exp \left[\exp \left(\frac{2\pi i}{N} (n - n') \right) \left| Z_N^{1/N} \right| \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \exp \left(\frac{2\pi i k}{N} (n - n') \right), \quad (A.31)$$

onde $x = \left| Z_N^{1/N} \right|$. Assim, a soma se torna:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \exp \left[\frac{2\pi i}{N} (n(k - j) - n'(k - j')) \right]. \quad (A.32)$$

A soma sobre n é:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp \left(\frac{2\pi i n}{N} (k - j) \right) = \begin{cases} N, & k = j + mN \\ 0, & k \neq j + mN \end{cases} \quad (A.33)$$

e a soma sobre n' é:

$$\sum_{n'=0}^{N-1} \exp \left(\frac{2\pi i n'}{N} (k - j') \right) = \begin{cases} N, & k = j' + m'N \\ 0, & k \neq j' + m'N \end{cases} \quad (A.34)$$

onde m e m' são inteiros. Como a soma (A.32) só é não nula quando $k = j + mN$ e $k = j' + m'N$ simultaneamente, devemos ter $j + mN = j' + m'N \rightarrow j - j' = (m' - m)N$. Como $j < N$ e $j' < N$,

a igualdade só ocorre se $j = j'$ e $m = m'$. podemos então reescrever (A.32) como

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \exp \left[\frac{2\pi i}{N} (n(k-j) - n'(k-j')) \right] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{j+mN}}{(j+mN)!} N^2 \delta_{j,j'} \\ &= x^j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x^N)^m}{(j+mN)!} N^2 \delta_{j,j'}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Assim, a soma (A.30) pode ser escrita como

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \exp \left[-\frac{2\pi i}{N} (nj - n'j') \right] \exp \left[\exp \left(\frac{2\pi i}{N} (n - n') \right) \left| Z_N^{1/N} \right| \right] = N^2 |Z_N|^{\frac{j}{N}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|Z_N|^m}{(j+mN)!} \delta_{j,j'}. \quad (\text{A.36})$$