

UM NOVO JOGO PARA O ESTUDO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO E DO CÁLCULO DE PROBABILIDADE.

LOPES, José Marcos(UNESP/ Ilha Solteira); REZENDE, Josiane
de Carvalho (UNESP/Ilha Solteira)

INTRODUÇÃO

O raciocínio combinatório e o cálculo de probabilidades são conceitos apresentados aos alunos tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio. No presente trabalho apresentamos um novo jogo que pode ser utilizado para o ensino e aprendizagem desses conceitos. Formulamos vários problemas envolvendo situações de jogo, onde para suas soluções, com a adequada intervenção do professor, os alunos poderão desenvolver algumas estratégias como aquelas utilizadas nas soluções de problemas de contagem e de cálculo de probabilidades.

Para Batanero et. al. (1997) a definição clássica de probabilidade (Laplace) depende fortemente de técnicas combinatórias. Nesta abordagem, a probabilidade de

um evento A é definida como a fração $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, onde $n(\Omega)$ denota o número total de resultados possíveis do experimento aleatório e $n(A)$ denota o número de resultados que conduz à ocorrência do evento A.

Cada elemento do Espaço Amostral Ω é chamado de Evento Elementar. A definição de probabilidade de Laplace é válida somente quando o Espaço Amostral possui um número finito de elementos e os Eventos Elementares são equiprováveis, ou seja, possuem a mesma probabilidade de ocorrência. De acordo com Piaget e Inhelder (1951), se o sujeito não possuir capacidade combinatória, não será capaz de usar esta idéia de probabilidade, exceto em casos de Experimentos Aleatórios muito elementar (PIAGET; INHELDER, 1951 citado por BATANERO et al., 1997).

Uma outra concepção de probabilidade que pode e deve ser trabalhada no Ensino Médio é a *frequentista*, isto é, a definição de probabilidade obtida por um processo de experimentação e simulação. Convém salientar que não é nossa pretensão

discutir neste trabalho as diferentes concepções de probabilidade.

Para Inhelder e Piaget (1955), operações combinatórias representam algo mais importante do que um mero ramo da matemática. Elas constituem um esquema tão geral como a proporcionalidade e correlação, que emergem simultaneamente após a idade de 12 a 13 anos (Estado das operações formais na teoria Piagetiana). A capacidade combinatória é fundamental para o raciocínio hipotético-dedutivo, o qual opera pela combinação e avaliação das possibilidades em cada situação (INHELDER; PIAGET, 1955 citado por BATANERO et al., 1997).

Conforme o caderno do professor, elaborado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo: “os conteúdos pertinentes à Análise Combinatória e ao Cálculo de Probabilidades, [...] costumam trazer desconforto não apenas aos estudantes, mas também aos professores” (SÃO PAULO (Estado), 2008, p. 9).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) estabelecem que a contagem permite uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório, a contagem dos casos possíveis não deve ser apreendida como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação, deve-se evitar a teorização excessiva e estéril (BRASIL, 1997).

Os conteúdos de Análise Combinatória são pouco explorados no Ensino Médio. Quando o professor aborda esses conteúdos, valoriza apenas o uso de fórmulas prontas e acabadas. Desse modo, os alunos acabam por mistificar a Matemática, não compreendem como surgiram aquelas fórmulas misteriosas que geralmente envolvem quocientes de fatoriais. Muitos professores apóiam-se em livros didáticos de qualidade duvidosa, colaborando assim para formar estudantes “que não compreendem a análise combinatória, não percebem os princípios básicos por trás da solução dos problemas, e que detestam esta parte da Matemática” (LIMA, 2001, p. 395).

A Probabilidade é uma área da Matemática a qual trata do estudo e da modelagem de fenômenos aleatórios ou não determinísticos, a probabilidade proporciona um modo de medir a incerteza [...] como aplicar a matemática para resolver problemas reais. Para isso, recomenda-se um ensino das noções probabilísticas a partir de uma metodologia heurística e ativa, através da proposição de problemas concretos e da realização de experimentos reais ou simulados (LOPES, 2006).

Com efeito, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997a), estabelecem que a principal finalidade para o estudo de probabilidade

é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno

realiza experimentos e observa eventos (BRASIL, 1997a, p. 56)

Pode-se afirmar com relação aos conteúdos de probabilidade que deveriam ser abordados no Ensino Médio, que a situação não é diferente daquela já mencionada para a Análise Combinatória. Pois, já tivemos alunos do curso de Licenciatura em Matemática que disseram nunca ter estudado probabilidade. “É frequente o tema Probabilidade não ser estudado no Ensino Fundamental e Médio e, quando é abordado, reduzir-se à resolução mecânica de exercícios padrões na qual é suficiente aplicar uma fórmula” (CARVALHO; OLIVEIRA, 2002).

Nos dias atuais, a teoria de probabilidade possui aplicações importantes nos mais diversos ramos da atividade humana, por exemplo: na Economia, na Política, na Medicina, etc. Ainda, a teoria de probabilidades é o fundamento matemático que garante a validade dos procedimentos da inferência estatística.

JOGOS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os PCNs destacam que “um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar a potencialidade educativa dos diferentes jogos” (Brasil, 1997a, p. 49).

Segundo Borin (2004, p. 8)

A atividade de jogar, se bem orientada, tem papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, tão necessárias para o aprendizado, em especial da Matemática, e para a resolução de problemas em geral. [...] Também no jogo, identificamos o desenvolvimento da linguagem, criatividade e raciocínio dedutivo, exigidos na escolha de uma jogada e na argumentação necessária durante a troca de informações.

Considerando o jogo como instrumento de ensino, Moura (1992) os classifica em dois grandes blocos: o jogo desencadeador de aprendizagem e o jogo de aplicação. No primeiro bloco, se o jogo é utilizado para ensinar matemática, esse “deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar a aquisição de habilidades, permitir o desenvolvimento operatório do sujeito e, mais, estar localizado no processo que leva a criança do conhecimento primeiro ao conhecimento elaborado” (MOURA, 1992, p. 47).

O ensino tradicional da matemática que se baseia na apresentação oral do conteúdo pelo docente abordando definições e posteriormente demonstrações de propriedades, exercícios de fixação e de aplicação, tem-se mostrado ineficaz. “É relativamente recente, na história da Didática, a atenção ao fato de que o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu

conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas” (BRASIL, 1997a, p. 39).

Segundo os PCN “a resolução de problemas é peça central para o ensino de matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios” (BRASIL, 1997, p. 112).

Dentre as várias interpretações para a metodologia de Resolução de Problemas, a que utilizamos neste trabalho e a que parece ser a mais consistente com as propostas dos PCNs é aquela fornecida por Mendonça (1993) que descreve que a resolução de problemas é utilizada como **ponto de partida** para a construção de conceitos matemáticos, o problema “dispara” o movimento de aprendizagem, ou seja, o problema é visto como desencadeador da formação de conceitos matemáticos (MENDONÇA, 1993).

A situação problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. Assim na análise dessas situações pode-se utilizar recursos abordados na Matemática, lançar mão de situações-problema para a construção e aplicação de conceitos matemáticos. Em termos metodológicos, relativos ao ensino do conteúdo, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisam desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-los. A situação-problema deve expressar aspectos chaves para o conceito que se quer estudar, o aluno deve ser levado a interpretar o enunciado da questão, estruturar a situação que lhe é apresentada, utilizar o que aprendeu para resolver outros problemas, o que exige transferências, retificações e rupturas. Assim, um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos através de uma série de generalizações.

Para a obtenção da aprendizagem, Brosseau (1996) estabelece que o aluno deve interessar-se pessoalmente pela resolução do problema estabelecido na situação didática. Assim,

o trabalho intelectual do aluno deve ser em certos momentos comparável ao dos próprios matemáticos. O aluno deve ter a oportunidade de investigar sobre problemas ao seu alcance, formular, provar, construir modelos, linguagens, conceitos, teorias, intercambiar suas idéias com os outros, reconhecer as que são adequadas com a cultura matemática e adotar as idéias que sejam úteis. Pelo contrário, o trabalho do professor é de certa maneira inverso ao trabalho do matemático profissional. Em lugar de inventar métodos matemáticos adequados para resolver problemas, deve inventar problemas interessantes que conduzem a um certo conhecimento matemático (BROSSEAU, 1996 citado por BATANERO, 2001, p. 125). (grifo nosso).

Para Moura (1992) a união entre jogo e a resolução de problemas está intimamente vinculada à intencionalidade do professor.

É possível combinar jogo e resolução de problemas nas séries iniciais; porém, fazer isto é muito mais que uma simples atitude, é uma **postura que deve ser**

assumida na condução do ensino. E assumi-la com vistas ao desenvolvimento de conceitos científicos exige um projeto de ensino, inserido no projeto coletivo da Escola. Fazer isto é dar um sentido humano ao jogo, à resolução de problemas e, sendo assim, à **Educação Matemática** (MOURA, 1992, p. 51).

O presente trabalho apresenta uma investigação que se caracteriza como uma pesquisa bibliográfica, que tem como intuito o ensino e aprendizagem de alguns conceitos de Análise Combinatória e de Probabilidade. A principal contribuição é oferecer um novo jogo, que juntamente com o uso da metodologia de resolução de problemas pode ser utilizado na construção efetiva de conceitos matemáticos básicos do último ciclo do Ensino Fundamental e também do segundo ano do Ensino Médio.

O JOGO DO QUADRADO

O *Jogo do Quadrado* utiliza o mesmo tabuleiro do Jogo da Velha. Os movimentos e as capturas de suas peças possuem algumas semelhanças com as peças peão e torre do jogo de xadrez. Descrevemos a seguir os materiais necessários, o objetivo e as regras do jogo.

MATERIAL: Tabuleiro 3x3 e duas peças distintas, uma para cada jogador.

INÍCIO DO JOGO: O jogo é disputado por dois jogadores, cada qual tem apenas uma peça. O Jogador 1 coloca a sua peça na extremidade esquerda inferior do tabuleiro e o Jogador 2 coloca a sua peça na extremidade direita superior do tabuleiro. O jogo é iniciado pelo Jogador 1, que é escolhido através de sorteio.

OBJETIVO: Eliminar a peça ou chegar ao ponto de partida de seu adversário.

REGRAS: 1ª) não pode voltar ao ponto de partida;

2ª) é permitida a eliminação da peça do adversário somente na diagonal e as peças se movem apenas uma casa na vertical ou uma casa na horizontal;

3ª) a eliminação da peça adversária, tal como a ocupação do ponto de partida do adversário, serão obrigatórias quando for à ocasião.

NÚMERO DE MOVIMENTOS: O número máximo de movimentos permitido para as peças é de 8 (oito). Quando ocorrerem 8 movimentos das peças e não finalizar o jogo, define-se um empate, mesmo que no nono movimento haja vencedor, somente vale o resultado do oitavo movimento.

COMENTÁRIOS E OBSERVAÇÕES SOBRE O JOGO DO QUADRADO

O material utilizado no jogo é muito simples e pode ser confeccionado pelos próprios alunos através de materiais recicláveis como papelão (para o tabuleiro) e tampinhas de garrafas (para as peças).

Vence o jogo o primeiro jogador a eliminar a peça adversária ou ocupar o quadrado do ponto de partida do outro competidor. O número de movimentos deve ser contado sem distinção de quem joga, ou seja, no início o Jogador 1 faz a sua jogada (um movimento), depois vem a vez do Jogador 2 fazer a sua jogada (dois movimentos) e assim sucessivamente até contabilizarem oito movimentos. Assim, cada jogador poderá efetuar no máximo 4 movimentos de sua peça. Desse modo, restringimos o número de movimentos a 8 para não tornar o jogo muito extenso (cansativo) e também facilitar a solução dos problemas envolvendo o jogo.

Supondo que a peça do Jogador 1 seja “x” e a do Jogador 2 seja “o”, a posição inicial do tabuleiro é apresentada abaixo:

		o
x		

Figura 1 - Posição inicial do jogo do quadrado.

A numeração dos quadrados não é necessária; mas, com o propósito de facilitar a descrição de um movimento no jogo, podemos representar cada quadrado do tabuleiro com um número entre 1 e 9 da seguinte forma:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 2 - Tabuleiro numerado.

Na sequência o professor pode solicitar aos alunos que em duplas disputem o jogo numa melhor de 5 rodadas. É importante lembrar que o Jogador 1 é sempre escolhido por sorteio no início de cada rodada. O objetivo desta ação é fazer que os alunos tenham pleno domínio das regras do jogo, o que será fundamental para o trabalho com a resolução dos problemas.

Deve-se solicitar aos alunos que elaborem algum esquema para anotar suas jogadas; tal procedimento é importante para a correção de jogadas mal sucedidas e

para a definição de possíveis estratégias vencedoras.

Depois de realizado o jogo, o professor pode fazer os questionamentos abaixo.

Será que o Jogador 1 sempre vence? Por quê?

É possível ocorrer empate? Por quê? O Jogador 2 poderá vencer o jogo?

O jogo é de azar ou de estratégia? Se aumentarmos a quantidade de movimentos para nove, quais os possíveis resultados do jogo?

CONCEITOS BÁSICOS DE CONTAGEM E DE PROBABILIDADE

O objetivo desta seção é trabalhar com as idéias básicas envolvidas em problemas de contagem e de probabilidade. Assim, formulamos vários problemas sobre o *Jogo do Quadrado*, em que tais conceitos aparecem quando os resolvemos. Dessa forma, fica evidente que usamos o problema para ensinar matemática, o que é diferente de ensinar matemática para resolver problemas. Os alunos deverão oferecer suas soluções utilizando-se de sua própria linguagem. Apenas no final das atividades é que os conceitos matemáticos aprendidos pelos alunos deverão ser sistematizados usando-se o formalismo e o rigor característicos da Matemática.

Pode-se afirmar que geralmente os alunos gostam de jogar, mas quando se passa a trabalhar com problemas, existe certa resistência por parte de muitos deles. É neste ponto que entra o trabalho do professor. Deve-se esclarecer que com a resolução dos problemas eles se tornarão melhores jogadores e poderão descobrir estratégias vitoriosas.

Para a resolução dos problemas, o trabalho deve ser realizado em grupo. Um aluno, provavelmente, fica intimidado em defender sua resposta, porém, após socializar seus resultados com o grupo sentir-se-á mais confiante para expor suas idéias.

Apresentamos a seguir os problemas elaborados para o desenvolvimento das atividades didáticas. Por uma questão de espaço apresentaremos apenas a solução do *problema 1*. O artigo completo será publicado na revista *BOLEMA – Boletim de Educação Matemática*.

Problema 1. Suponha que após o 4º movimento a peça do Jogador 1 esteja no quadrado 1, a do Jogador 2 esteja no quadrado 9 e que, neste momento, é a vez do Jogador 1 efetuar o seu movimento. Para garantir a vitória este jogador deve posicionar sua peça em qual quadrado?

É importante que o professor socialize com a classe as soluções apresentadas pelos grupos, isto é, tanto as soluções corretas como as incorretas, se existirem. Como

todos contribuíram para a solução do problema terão interesse em defender seus pontos de vistas e suas idéias.

O principal objetivo desta atividade lúdica é fazer com que os alunos desenvolvam alguma estratégia de contagem. Como a árvore de possibilidades é utilizada desde o primeiro ciclo do Ensino Fundamental é provável que seja utilizada por algum grupo.

Para o problema aqui considerado, existem dois possíveis movimentos para o Jogador 1; ou muda sua peça para o quadrado 2 ou para o quadrado 4. Porém, para garantir a vitória o Jogador 1 deve escolher o quadrado 2. Veja todos os casos possíveis descritos através de uma árvore de possibilidades expostos na Figura 3.

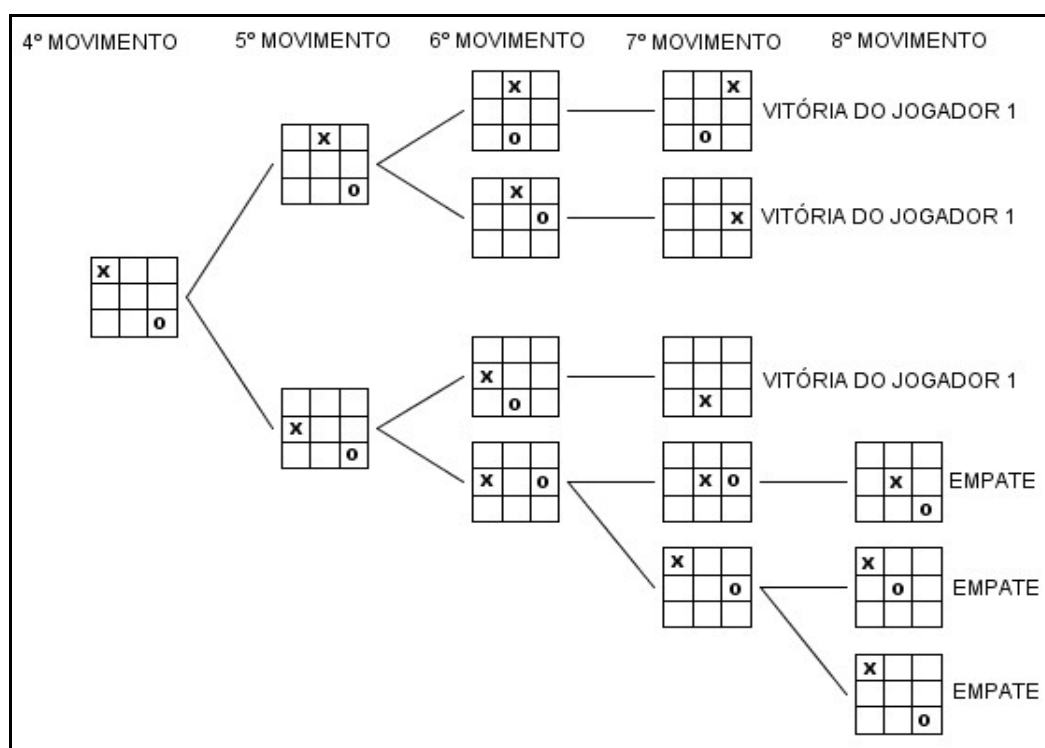


Figura 3 - Árvore de possibilidades para o problema 1.

Da análise da árvore de possibilidades, observa-se que o jogo pode se

desenrolar de 6 maneiras diferentes; destas, 3 fornecerão a vitória para o Jogador 1 e nas outras 3 ocorrerá empate. Assim, neste caso o Jogador 2 não poderá vencer o jogo, mesmo que escolha a melhor estratégia em cada movimento. Lembrando que o jogo termina no oitavo movimento das peças. Se o Jogador 1 escolher o quadrado 4 poderá vencer ou empatar o jogo. Agora, se escolher o quadrado 2 sempre vencerá. Portanto, a vitória do Jogador 1 estará garantida caso escolha o quadrado 2 no quinto movimento.

Geralmente, as árvores de possibilidades utilizadas em problemas de Análise Combinatória e Probabilidade são apresentadas horizontalmente como na Figura 3. Para o *Jogo do Quadrado*, consideramos mais adequado representar os casos possíveis verticalmente. Desse modo, conseguimos uma forma mais compacta para sua representação; elaboramos assim a árvore apresentada na Figura 4.

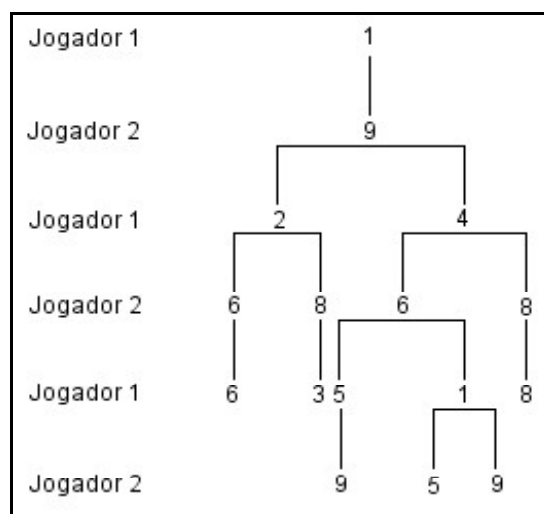


Figura 4 - Árvore de possibilidades para o problema 1.

No esquema de árvore na vertical pode-se observar que quando não existe sequência nos ramos da árvore, então ocorreu a vitória de algum jogador. Neste caso se deu no sétimo movimento nos respectivos quadrados 6, 3 e 8 com a vitória do Jogador 1.

Outra forma compacta de representar o desenvolvimento do jogo é utilizar uma sequência numérica da forma (1, 9, 4, 6, 5, 9); tal sequência representa as posições de

cada jogador em cada momento do jogo. Assim, o Jogador 1 iniciou no quadrado 1 e o Jogador 2 iniciou no quadrado 9. Posteriormente, o Jogador 1 mudou sua peça para o quadrado 4 e o Jogador 2 para o quadrado 6 e assim sucessivamente. A sequência representa as posições de cada jogador: (Jogador 1, Jogador 2, Jogador 1, Jogador 2, Jogador 1, ...).

Nesta representação podemos concluir que quando os últimos dois números da sequência forem iguais ocorreu a vitória do último a jogar; quando o último número da sequência for 3 ocorreu a vitória do Jogador 1; quando o último número da sequência for 7 ocorreu a vitória do Jogador 2 e se em oito movimentos não constar nenhuma das situações anteriores então ocorreu um empate. Temos, para o *problema 1*, três sequências que fornecem vitória para o Jogador 1, são elas: (1, 9, 2, 6, 6) ou (1, 9, 2, 8, 3) ou (1, 9, 4, 8, 8).

Se algum grupo representou a solução do *problema 1* através de um esquema diferente dos três anteriormente mencionados (árvore horizontal, árvore vertical e sequência numérica), e dependendo de sua conveniência, o professor poderá utilizá-lo nas soluções dos próximos problemas.

Observação. Para a elaboração do *problema 1* nos baseamos na Questão 11 do ENEM 2008 (Prova 1 – AMARELA). A questão mencionada envolve a garantia de vitória de um dos jogadores para certa disposição no Jogo da Velha.

Problema 2. Após o segundo movimento do *Jogo do Quadrado* o tabuleiro encontra-se na disposição apresentada abaixo.

	o	
	x	

Em quantos movimentos o jogo termina mais rápido? Quem vence?

Problema 3. Em seu primeiro movimento, o Jogador 1 pode escolher o quadrado 4 ou o quadrado 8. Se esse jogador escolheu o quadrado 4 então o Jogador 2 poderá vencer o jogo? Justificar sua resposta.

Problema 4. Existe uma estratégia vencedora para o Jogador 1? Em caso afirmativo, descreva-a.

Problema 5. Quantos e quais são os resultados possíveis do *Jogo do Quadrado*?

O *problema 6* refere-se ao cálculo de soma e/ou produto de probabilidades em que os Eventos Elementares não são igualmente prováveis. Problemas em que os Eventos Elementares são igualmente prováveis são mais fáceis de serem trabalhados. Assim, consideramos conveniente o trabalho com esse problema mais para o final do conteúdo. Geralmente os alunos têm muitas dificuldades em saber quando devem somar ou multiplicar probabilidades. Em linhas gerais, se necessitamos que *exigências sucessivas* sejam satisfeitas, então usamos o produto. Agora, quando podemos satisfazer uma exigência ou outra, então usamos a soma.

Problema 6. Se os Jogadores 1 e 2 realizarem seus movimentos aleatoriamente:

- (a) determine o Espaço Amostral do jogo;
- (b) calcule a probabilidade de cada Evento Elementar;
- (c) calcule a probabilidade de que o Jogador 2 vença;
- (d) calcule a probabilidade de que ocorra empate;
- (e) calcule a probabilidade de que o Jogador 1 vença.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fornecemos neste trabalho algumas possibilidades metodológicas alternativas ao tratamento tradicional dos conteúdos da Análise Combinatória e do Cálculo de Probabilidades. “Ensinar não é *transferir conhecimento*, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção” (FREIRE, 2006, p. 22).

Não existe um caminho que possa ser considerado como único e melhor para o ensino da Matemática, “conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática” (BRASIL, 1997a, p. 42).

Apresentamos uma proposta de trabalho intencionalmente planejada, a qual poderá trazer benefícios no processo de aquisição do conhecimento matemático por parte dos alunos. Em uma situação de jogo, o processo de busca por uma estratégia vencedora exige dos alunos “habilidades de tentar, observar, analisar, conjecturar, verificar, compõe o raciocínio lógico que é uma das metas prioritárias do ensino de Matemática e a característica primordial do fazer ciência” (BORIN, 2004, p.3).

A associação do jogo com a resolução de problema torna as aulas mais atraentes e participativas, os alunos tornam-se ativos na construção de seu próprio conhecimento. Desse modo, acreditamos que essa forma de abordar esses conteúdos contribui eficazmente para uma construção/reconstrução do conhecimento matemático que se realiza de modo mais significativo para o aluno. Além disso, buscamos o desenvolvimento do raciocínio dedutivo do aluno e não a memorização de fórmulas. A memorização pode ser temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio e a apreensão do conhecimento é para toda a vida.

O objetivo principal do trabalho foi apresentar um novo jogo (*Jogo do Quadrado*) que pode ser utilizado juntamente com a metodologia de Resolução de Problemas, para o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidades. Em virtude, da importância e principalmente pelas dificuldades encontradas pelos professores para ministrarem esses conteúdos que compõem os currículos de Matemática tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio, acreditamos que os problemas (atividades) aqui formulados poderão subsidiar os professores no ensino desses conteúdos, no sentido de oferecer uma proposta de ensino mais prazerosa, motivadora e contribuir para uma compreensão mais significativa desses conceitos.

Para as resoluções dos problemas, o aluno torna-se ativo na construção do seu próprio conhecimento, “o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo” (PONTE et al., 2003, p. 23).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATANERO, C. *Didáctica de la estadística*. Granada: Universidad de Granada, 2001.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO, V. Combinatorial reasoning and its assessment. In: GAL, I.; GARFIELD, J. B. (ed.). *The assessment challenge in statistics education*. IOS Press, 1997. Disponível em: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbkref. Acesso em: 20 fev. 2009.

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas: Uma estratégia para as aulas de matemática*. São Paulo: IME-USP, 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática (PCN+)*. Brasília: MEC/SEMT, Brasília. 1997.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997a.

CARVALHO, D. L.; OLIVEIRA, P. C. Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na licenciatura em matemática: Clássica, Frequentista,

Subjetiva e Formal. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPEd, 25., 2002, Caxambu. *Anais...* Caxambu: Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação, 2002. 1 CD.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 2006.

LIMA, E. L. *Exame de textos: Análise de livros de matemática para o ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LOPES, C. A. E. A estatística e a probabilidade na educação básica e a formação dos educadores matemáticos. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Águas de Lindóia. *Anais...* Curitiba: SBEM, 2006. 1 CD.

MENDONÇA, M. C. D. *Problematização: um caminho a ser percorrido em educação matemática*. 1993. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MOURA, M. O. *O jogo e a construção do conhecimento matemático*. São Paulo: FDE, 1992. (Série Idéias, 10).

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. *Caderno do professor: matemática*. São Paulo: SEE, 2008. (Ensino Médio 2ª série, 3º bimestre).