



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

Funções Racionais Ortogonais

Aluno: *Fábio Rodrigues Lucas*

Orientador: *Prof . Dr . Alagacone Sri Ranga*

Apoio: **Fapesp**

Parte 1 - Resultados Preliminares.

- ◇ Definições;
- ◇ Espaço núcleo reprodutivo;
- ◇ As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$;
- ◇ Matrizes de Função: J-unitárias e J-contrativas;

Parte 2 - Espaço $\mathcal{L}_n$.

- ◇ Espaço $\mathcal{L}_n$;
- ◇ Cálculo em $\mathcal{L}_n$;
- ◇ Problemas extremos em $\mathcal{L}_n$;

Parte 3 - Densidade em L_p e H_p .

◇ Densidade em L_p ;

◇ Densidade em H_p ;

Parte 4 - Relação de Recorrência para as funções ortogonais

- ◇ Relação de Christoffel-Darboux;
- ◇ Relação de Recorrência para o Núcleo;
- ◇ Relação Normalizada para o Núcleo;
- ◇ Relação para as funções Ortogonais.

Denotaremos por:

$\mathbb{C}$ - conjunto dos números complexos;

$$\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

$$\mathbf{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

$$\mathbf{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\},$$

$$\mathcal{H} = \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\},$$

$\mathbb{R}$ - conjunto dos números reais,

$i\mathbb{R}$ - eixo imaginário.

$\mathbb{Z}$ - conjunto dos números inteiros.

Algumas Definições.

Definição 1 (Função Analítica). *Uma função complexa f é analítica em uma região R , se f for diferenciável em todo ponto de R .*

Denotaremos por $H(\mathbf{D})$, o espaço das funções analíticas em $\mathbf{D}$.

A medida de Lebesgue normalizada para $\mathbf{T}$ será, neste trabalho, denotada por

$$\lambda : d\lambda(z) = (2\pi z)^{-1} dz.$$

Algumas Definições.

Definição 2 (Espaços H_p). Para $1 \leq p \leq \infty$, definimos o espaço H_p ou $H_p(\mathbf{D})$, como sendo o conjunto das funções $f \in H(\mathbf{D})$, para o qual a função $|f|^p$ tenha um majoramento harmônico em $\mathbf{D}$. Isto significa que

$$\sup_{r < 1} \int |f(rt)|^p d\lambda(t) = \|f\|_p^p < \infty,$$

visto que $H_\infty(\mathbf{D})$ é o conjunto das funções analíticas limitadas em $\mathbf{D}$.

Algumas Definições

Definição 3 (Espaços L_p). Definimos o espaço L_p , como sendo o conjunto das funções $f \in H(\overline{\mathbf{D}})$, para o qual

$$|f|_{L_p} = \left\{ \int_{\Gamma} |f|^p \right\}^{1/p} < \infty,$$

Neste trabalho, consideramos $\Gamma = \mathbf{D}$. Para mais detalhes sobre os espaços H_p e L_p , veja [6].

Algumas Definições

Definição 4 (Espaço Completo). *O espaço X é completo se toda seqüência de Cauchy em X converge (isto é, seu limite esta em X).*

Definição 5 (Conjunto Denso). *Um subconjunto M de um espaço métrico X é denso em X se*

$$\overline{M} = X, \quad \text{onde, } \overline{M} \text{ é o fecho de } M.$$

Definição 6 (Espaço Separável). *O espaço X é chamado separável, se X possui um subconjunto enumerável e denso em X .*

Algumas Definições

Definição 7 (Espaço de Hilbert.). *Seja V um espaço vetorial. Suponha que a cada par de vetores $u, v \in V$ esteja associado um escalar do corpo de V , denotado por $\langle v, u \rangle$. Esta função é chamada produto interno em V se, para todo u, v e $w \in V$ e a um escalar qualquer do corpo de V satisfaz aos seguintes axiomas:*

1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
2. $\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle$;
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$;
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$;
5. $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Algumas Definições

Se V é completo então V é chamado de espaço de Hilbert.

Denotaremos por H o espaço de Hilbert de funções definidas em $X \subset \mathbb{C}$.

Definição 8 (Matriz de Gram). *Seja $\{\sigma_0(z), \sigma_1(z), \dots, \sigma_n(z)\}$, $n \geq 0$, um sistema de funções linearmente independentes. A matriz de Gram G_n é dada por:*

$$G_n = [\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle]_{ij} \quad \text{para } i, j = 0, \dots, n.$$

Espaço Núcleo Reprodutivo

Definição 9 (Núcleo Reprodutivo). *Seja $\mathbf{K}$ um subespaço fechado de $\mathbf{H}$. Chama-se $K_w(z)=K(z, w)$ de núcleo reprodutivo de $\mathbf{K}$ se:*

- 1. $K_w(z) \in \mathbf{K}$, para todo $w \in \mathbf{X}$;*
- 2. $\langle f, K_w \rangle = f(w)$, para todo $w \in \mathbf{X}$ e $f \in \mathbf{K}$.*

Teorema 1. *Se o espaço $\mathbf{K}$ é separável e $\{\phi_k\}_{k \in \Lambda}$ é uma base ortonormal para $\mathbf{K}$, então o núcleo reprodutivo é único e é dado por:*

$$K(z, w) = \sum_{k \in \Lambda} \phi_k(z) \overline{\phi_k(w)}.$$

Espaço Núcleo Reprodutivo

Teorema 2. *Considere $\mathbf{H}$ com núcleo reprodutivo $K(z, w)$. Então, todas as soluções do seguinte problema*

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{a}, \mathbf{w}) : \sup\{|f(w)|^2 : \|f\| = a, w \in \mathbf{X}\}$$

são dadas por $f = \eta a K(z, w)[K(w, w)]^{-1/2}$, $|\eta| = 1$. O supremo é $|a|^2 K(w, w)$.

O problema

$$\mathbf{P}^2(\mathbf{a}, \mathbf{w}) : \inf\{\|f\|^2 : f(w) = a, \text{ para algum } w \in \mathbf{X}\}$$

alcança o ínfimo para $f = a K(z, w)[K(w, w)]^{-1}$ e esta solução é única. O mínimo alcançado é $|a|^2 [K(w, w)]^{-1}$.

Espaço Núcleo Reprodutivo

Demonstração: Vamos, primeiro, demonstrar o problema $P^2(a, w)$.

Seja $f \in \mathbf{H}$. Então, podemos escrever $f(z) = \sum_{k \in \Gamma'''} a_k \phi_k(z)$,

onde ϕ_k são funções de uma base ortonormal.

Temos que

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \left\langle \sum_{k \in \Gamma'''} a_k \phi_k, \sum_{j \in \Gamma'''} a_j \phi_j \right\rangle \\ &= \sum_{k \in \Gamma'''} \sum_{j \in \Gamma'''} a_k \bar{a}_j \langle \phi_k, \phi_j \rangle = \sum_{k \in \Gamma'''} |a_k|^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Espaço Núcleo Reprodutivo

Agora, $f(w) = a$, ou seja,

$$\sum_{k \in \Gamma'''} a_k \phi_k(w) = a. \quad (2)$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|a|^2 = \left| \sum_{k \in \Gamma'''} a_k \phi_k(w) \right|^2 \leq \sum_{k \in \Gamma'''} |a_k|^2 \sum_{k \in \Gamma'''} |\phi_k(w)|^2. \quad (3)$$

De (??) e (??), obtemos

$$\|f\|^2 \geq \frac{|a|^2}{\sum_{k \in \Gamma'''} |\phi_k(w)|^2}.$$

Espaço Núcleo Reprodutivo

Logo, para termos o ínfimo de $\|f\|^2$ temos que ter a igualdade em (??), ou seja, $a_k = c\overline{\phi_k(w)}$, onde c é uma constante complexa.

Substituindo a_k em (??), temos

$$c = \frac{a}{\sum_{k \in \Gamma'''} |\phi_k(w)|^2}.$$

Portanto,

$$f(z) = \sum_{k \in \Gamma'''} a_k \phi_k(z) = \sum_{k \in \Gamma'''} c \overline{\phi_k(w)} \phi_k(z) = a \frac{\sum_{k \in \Gamma'''} \overline{\phi_k(w)} \phi_k(z)}{\sum_{k \in \Gamma'''} |\phi_k(w)|^2} = a K(z, w) [K(w, w)]^{-1}$$

e o mínimo alcançado é $|a|^2 [K(w, w)]^{-1}$.

Espaço Núcleo Reprodutivo

Para demonstrar o problema $P^1(a, w)$, considere a função

$$\tilde{f}(z) = \frac{af(z)}{f(w)}.$$

Assim, $\tilde{f}(w) = a$ e

$$||\tilde{f}||^2 = \left\| \frac{af(z)}{f(w)} \right\|^2 = \frac{a^2 ||f||^2}{|f(w)|^2} = \frac{a^4}{|f(w)|^2}. \quad (4)$$

Logo, o máximo de $|f(w)|^2$ é atingido quando $||\tilde{f}||^2$ for mínimo.

Espaço Núcleo Reprodutivo

Pelo resultado anterior,

$$\tilde{f}(z) = aK(z, w)[K(w, w)]^{-1} \quad (5)$$

e

$$\frac{a^4}{|f(w)|^2} = \|\tilde{f}\|^2 = a^2[K(w, w)]^{-1}, \text{ ou seja, } f(w) = \eta a \sqrt{K(w, w)}, \text{ onde } |\eta| = 1. \quad (6)$$

Utilizando (??) e (??), temos

$$f(z) = a\eta K(z, w)[K(w, w)]^{-1/2}$$

e o supremo é dado por

$$a^2 K(w, w).$$

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Denotaremos por

$$\mathcal{P} = \{f \in H(\mathbf{D}) : f(\mathbf{D}) \subset \mathcal{H}\}.$$

A classe das funções analíticas limitadas ou funções Schur é denotada por

$$\mathcal{B} = \{f \in H(\mathbf{D}) : f(\mathbf{D}) \subset \mathbf{D}\}.$$

Para $\overline{\mathcal{P}}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ usamos as seguintes notações:

$$\overline{\mathcal{P}} = \{f \in H(\mathbf{D}) : f(\mathbf{D}) \subset \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \bigcup i\mathbb{R}\}$$

e

$$\overline{\mathcal{B}} = \{f \in H(\mathbf{D}) : f(\mathbf{D}) \subset \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \bigcup \mathbf{T}\}.$$

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Lema 1. (Lema de Schwarz). *Suponha $f \in \mathcal{B}$ e $f(0) = 0$. Então,*

$$|f'(0)| \leq 1 \text{ e } |f(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbf{D}.$$

Temos a igualdade se, e somente se, $f(z) = cz$ com $|c| = 1$.

Demonstração: Defina $g(z) = \frac{f(z)}{z}$. Então, g é analítica e, assim, temos que, para todo $0 < \varepsilon < 1$, pelo princípio do máximo módulo, $|g|$ atinge seu máximo na fronteira do conjunto $\mathbf{D}_\varepsilon = \{z : |z| \leq 1 - \varepsilon\}$. Logo, $|g(z)| \leq |g(z_\varepsilon)|$ para algum z_ε pertencente à fronteira de $\mathbf{D}_\varepsilon$.

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Para $z \in \mathbf{D}_\varepsilon$, temos

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| = |g(z)| \leq |g(z_\varepsilon)| = \left| \frac{f(z_\varepsilon)}{z_\varepsilon} \right| < \frac{1}{|z_\varepsilon|} = \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, para $z \in \mathbf{D}$, obtemos

$$|g(z)| \leq 1 \quad \text{e} \quad |f(z)| \leq |z|.$$

Agora, como $f'(0) = g(0)$, temos $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

Para mostrar a segunda parte, suponha que $|g(z)| = 1$ para algum $z \in \mathbf{D}$.

Assim, pelo princípio do máximo módulo, $g(z)$ é constante em $\mathbf{D}$. Isto é, $g(z) = c$.

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Portanto,

$$f(z) = cz, \quad \text{onde } |c| = 1.$$



A transformação de Möbius que mapeia o círculo unitário nele mesmo pode ser dada por

$$\xi_\alpha : z \rightarrow \eta \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad |\alpha| < 1, \quad |\eta| = 1.$$

Claramente ξ_α é uma função de classe $\mathcal{B}$.

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Lema 2. *Sejam $f(z) \in \mathcal{B}$ e $f(\alpha) = 0$. Então, existe $g(z)$ analítica em $\mathbb{D}$ tal que*

$$f(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} g(z), \quad \text{com } g(z) \in \mathcal{B}.$$

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Demonstração: Como $f \in \mathcal{B}$ e $f(\alpha) = 0$, temos

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha) + f''(\alpha)(z - \alpha)^2/2! + \dots \\ &= (z - \alpha) \underbrace{[f'(\alpha) + f''(\alpha)(z - \alpha)/2! + \dots]}_{G(z)}. \end{aligned}$$

Seja $g(z) = (1 - \bar{\alpha}z)G(z)$. Assim, $g(z)$ é analítica em D e

$$f(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} g(z).$$

Para mostrar que $g(z) \in \mathcal{B}$, seja $z \in D_\varepsilon$. Então, temos

$$|g(z)| \leq |g(z_\varepsilon)| = \left| f(z_\varepsilon) \frac{1 - \bar{\alpha}z_\varepsilon}{z_\varepsilon - \alpha} \right| < \left| \frac{1 - \bar{\alpha}z_\varepsilon}{z_\varepsilon - \alpha} \right|.$$

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$|g(z)| \leq 1 \quad \text{para todo } z \in \mathbf{D}.$$



Teorema 3. *Seja $f \in \mathcal{B}$ e $z, w \in \mathbf{D}$. Então,*

$$P(f(z), f(w)) = \left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}z} \right| = P(z, w), \quad z \neq w$$

e

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbf{D}.$$

Temos a igualdade se, e somente se, f é uma transformação de Möbius.

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Demonstração:

Se $f(z) \in \mathcal{B}$ e $f(\alpha) = 0$, então existe $g(z)$ analítica em $\mathbf{D}$ tal que

$$f(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} g(z) \text{ e, } g(z) \in \mathcal{B}.$$

Derivando a expressão $(1 - \bar{\alpha}z)f(z) = (z - \alpha)g(z)$, obtemos

$$(1 - \bar{\alpha}z)f'(z) - \bar{\alpha}f(z) = (z - \alpha)g'(z) + g(z).$$

Fazendo $z = \alpha$, temos

$$f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{1 - |\alpha|^2} \text{ e, então, } |f'(\alpha)| < \frac{1}{1 - |\alpha|^2}. \quad (7)$$

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Agora, considere a seguinte função: $F(z) = \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}$.

Como

$$F(z) = \xi_{f(w)}(f(z)), \text{ onde } \xi_\alpha = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z},$$

temos que,

$$F(z) \in \mathcal{B} \text{ e } F(w) = 0.$$

Seja $M = \sup_{z \in \mathbf{D}} |f(z)|$. Então, $M \leq 1$.

Como $g(z)$ é analítica em $\overline{\mathbf{D}_\varepsilon} = \{z : |z| \leq 1 - \varepsilon\}$, para $z \in \mathbf{D}_\varepsilon$, temos

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

$$\left| \frac{f(z)}{\xi_\alpha(z)} \right| \leq \left| \frac{f(z_0(\varepsilon))}{\xi_\alpha(z_0(\varepsilon))} \right|, \text{ onde } |z_0(\varepsilon)| = 1 - \varepsilon.$$

Então, para $z \in \mathbf{D}_\varepsilon$,

$$\left| \frac{f(z)}{\xi_\alpha(z)} \right| < \frac{M}{|\xi_\alpha(z_0(\varepsilon))|}.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\left| \frac{f(z)}{\xi_\alpha(z)} \right| \leq M, \text{ para } z \in \mathbf{D}.$$

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Pelo Teorema do Máximo Módulo,

$$\left| \frac{f(z)}{\xi_\alpha(z)} \right| < M, \text{ se } f(z) \neq e^{i\theta} M \xi_\alpha(z)$$

ou

$$\left| \frac{f(z)}{\xi_\alpha(z)} \right| = M, \text{ se } f(z) = e^{i\theta} M \xi_\alpha(z).$$

Assim, se

$$F(z) = e^{i\theta} \xi_w(z), \text{ então } \left| \frac{F(z)}{\xi_w(z)} \right| = 1$$

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

e, se

$$F(z) \neq e^{i\theta} \xi_w(z), \quad \text{então} \quad \left| \frac{F(z)}{\xi_w(z)} \right| < 1.$$

Portanto,

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}z} \right|.$$

Agora, $F(z) = e^{i\theta} \xi_w(z)$ se, e somente se,

$$\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} = e^{i\theta} \xi_w(z).$$

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Então,

$$f(z) = \frac{e^{i\theta}\xi_w(z) + f(w)}{1 + e^{i\theta}\overline{f(w)}\xi_w(z)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{i\theta} \frac{z - w + (1 - \bar{w}z)e^{-i\theta}f(w)}{1 - \bar{w}z + e^{i\theta}\overline{f(w)}(z - w)} \\ &= e^{i\theta} \frac{(1 - \bar{w}e^{-i\theta}f(w))}{(1 - we^{i\theta}\overline{f(w)})} \frac{z + \frac{e^{-i\theta}f(w) - w}{1 - \bar{w}e^{-i\theta}f(w)}}{1 + \frac{e^{i\theta}\overline{f(w)} - \bar{w}}{1 - we^{i\theta}\overline{f(w)}}z}. \end{aligned}$$

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Portanto, $f(z) = \eta \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$, $|\alpha| < 1$, $|\eta| = 1$, onde

$$-\alpha = \frac{e^{-i\theta} f(w) - w}{1 - \bar{w}e^{-i\theta} f(w)} = \xi_w(e^{-i\theta} f(w)) \in \mathbf{D} \quad \text{e} \quad \eta = e^{i\theta} \frac{(1 - \bar{w}e^{-i\theta} f(w))}{(1 - we^{i\theta} \overline{f(w)})}$$

Portanto, temos a igualdade se, e somente se, f for uma transformação de Möbius.

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Para mostrar a segunda parte, consideremos

$$\frac{F(z) - F(w)}{z - w} = \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \frac{1}{1 - \overline{f(w)}f(z)}.$$

Então,

$$F'(w) = f'(w) \frac{1}{1 - |f(w)|^2}.$$

As classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$.

Utilizando (??), temos

$$\frac{|f'(w)|}{1 - |f(w)|^2} < \frac{1}{1 - |w|^2}, \quad \text{se } f(z) \text{ for diferente da transformação de Möbius}$$

e

$$\frac{|f'(w)|}{1 - |f(w)|^2} = \frac{1}{1 - |w|^2}, \quad \text{se } f(z) \text{ for igual à transformação de Möbius.}$$



Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Definição 10 (Classe de Nevanlinna). Dizemos que f é uma função da classe Nevanlinna se, e somente se, $f = g/h$, com $g, h \in H_\infty$. Denotaremos esta classe por N .

Considere matrizes 2×2 , Θ , com elementos que são funções pertencentes a N , isto é, $\Theta = [\theta_{ij}] \in N^{2 \times 2}$. Vamos considerar, aqui, matrizes Θ que são unitárias com respeito à "métrica indefinida"

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Isto significa que } \Theta \text{ satisfaz } \Theta^H J \Theta = J \text{ em } T. \quad (8)$$

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Se definirmos o conjugado estrela inferior para matrizes como

$$\Theta_* = \left(\begin{array}{cc} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{array} \right)_* = \left(\begin{array}{cc} \theta_{11*} & \theta_{21*} \\ \theta_{12*} & \theta_{22*} \end{array} \right),$$

onde $\theta_{ij*}(z) = [\theta_{ij}(1/\bar{z})]^H$, podemos escrever (??) como

$$\Theta_* J \Theta = J \quad \text{em } \mathbf{T}. \quad (9)$$

Definição 11 (Matriz J -unitária). Chamamos as matrizes de funções satisfazendo (??) em $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de matrizes J -unitárias e denotamos o conjunto dessas matrizes por

$$\mathbf{T}_j = \{\Theta \in \mathbf{N}^{2 \times 2} : \Theta_* J \Theta = J\}.$$

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Teorema 4. *Para elementos de $\mathbf{T}_J$, as seguintes relações são satisfeitas:*

1. $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathbf{T}_J \Rightarrow \Theta_1 \Theta_2 \in \mathbf{T}_J$;
2. $\Theta \in \mathbf{T}_J \Rightarrow |\det \Theta| = 1$;
3. $\Theta \in \mathbf{T}_J \Rightarrow \Theta^{-1} = J \Theta_* J$;
4. $\Theta \in \mathbf{T}_J \Rightarrow \Theta J \Theta_* = J$;
5. Se $\Theta = [\theta_{ij}] \in \mathbf{T}_J$, então
 - (a) $\theta_{11*} \theta_{11} - \theta_{21*} \theta_{21} = \theta_{22*} \theta_{22} - \theta_{12*} \theta_{12} = 1$;
 - (b) $\theta_{11*} \theta_{12} - \theta_{21*} \theta_{22} = \theta_{11*} \theta_{21} - \theta_{12*} \theta_{22} = 0$;
 - (c) $\theta_{12*} \theta_{12} - \theta_{21*} \theta_{21} = \theta_{11*} \theta_{11} - \theta_{22*} \theta_{22} = 0$;
 - (d) $(\theta_{11} + \theta_{12})_*^{-1} (\theta_{11} - \theta_{12})_* = (\theta_{22} + \theta_{21})^{-1} (\theta_{22} - \theta_{21})$;

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

6 Seja $\Theta = [\theta_{ij}] \in \mathbf{T}_j$ e considere

$$a = \theta_{11} - \theta_{12}, \quad b = \theta_{11} + \theta_{12}, \quad c = \theta_{22} - \theta_{21} \quad \text{e} \quad d = \theta_{22} + \theta_{21}.$$

Então,

$$\frac{1}{2} \left[\frac{a}{b} + \frac{a_*}{b_*} \right] = \frac{1}{bb_*} = \frac{1}{2} \left[\frac{c}{d} + \frac{c_*}{d_*} \right] = \frac{1}{dd_*}$$

e

$$ab_* + a_*b = cd_* + c_*d = 2.$$

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Demonstração:

(1) $(\Theta_1 \Theta_2)_* J \Theta_1 \Theta_2 = \Theta_{2*} (\Theta_{1*} J \Theta_1) \Theta_2 = \Theta_{2*} J \Theta_2 = J \Rightarrow \Theta_1 \Theta_2 \in \mathbf{T}_j.$

(2) segue imediatamente de (??).

(3) segue imediatamente de (??).

(4) $\Theta_* J \Theta = J \Rightarrow \Theta_* = J \Theta^{-1} J \Rightarrow J \Theta_* = \Theta^{-1} J \Rightarrow \Theta J \Theta_* = J.$

(5) basta escrever explicitamente as igualdades

$$\Theta_* j \Theta = J = \Theta J \Theta_*.$$

(6) utilizando o ítem 5, chegamos ao resultado desejado.



Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Um exemplo de uma matriz J -unitária constante é a matriz

$$U_p = (1 - |p|^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & -p \\ -\bar{p} & 1 \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbf{D}.$$

Vamos verificar que U_p pertence a $\mathbf{T}_j$.

$$\begin{aligned} U_{p*} J U_p &= (1 - |p|^2)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -p \\ -\bar{p} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -p \\ -\bar{p} & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 - |p|^2)^{-1} \begin{pmatrix} 1 - |p|^2 & 0 \\ 0 & -(1 - |p|^2) \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

Portanto, $U_p \in T_j$.

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Definição 12 (Matriz J -contrativa). *Uma matriz de função é uma matriz J -contrativa se*

$$\Theta^H J \Theta \leq J, \text{ para } z \in \mathbf{D}. \quad (10)$$

A desigualdade (??) acima significa que $J - \Theta^H J \Theta$ é semi definida-positiva.

Esta classe é denotada por

$$\mathbf{D}_J = \{\Theta \in \mathbf{T}_j : \Theta^H J \Theta < J \text{ em } \mathbf{D}\},$$

$$\overline{\mathbf{D}}_j = \{\Theta \in \mathbf{T}_j : \Theta^H J \Theta \leq J \text{ em } \mathbf{D}\}.$$

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Teorema 5. Para $\Theta = [\theta_{ij}] \in \overline{\mathbf{D}}_j$, temos:

1. $\Theta^H \in \overline{\mathbf{D}}_j$;
2. $\Theta^H J \Theta \geq J \text{em } \mathbf{E}$;
3. $(\theta_{11} + \theta_{12})_*^{-1} \in \mathbf{H}_2$;
4. $(\theta_{11} + \theta_{12})_*^{-1}(\theta_{11} - \theta_{12})_* \in \mathcal{P}$;
5. $(\theta_{22} + \theta_{21})^{-1} \in \mathbf{H}_2$;
6. $(\theta_{22} + \theta_{21})^{-1}(\theta_{22} - \theta_{21}) \in \mathcal{P}$;
7. $(\theta_{11} + \theta_{12})_*^{-1}(\theta_{21} - \theta_{22})_*$ é "função inner".

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Demonstração: Como $J - \Theta^H J \Theta \geq 0$ em $\mathbf{D}$, temos, para o elemento $(2, 2)$, que

$$-1 - [\overline{\theta_{12}} \ \overline{\theta_{22}}] J [\theta_{12} \ \theta_{22}]^T \geq 0.$$

Logo,

$$|\theta_{22}|^2 \geq |\theta_{12}|^2 + 1 > 0.$$

Assim, θ_{22}^{-1} é analítica em $\mathbf{D}$ e podemos definir

$$\Sigma_{11} = \theta_{11} - \theta_{12}\theta_{22}^{-1}\theta_{21}, \quad \Sigma_{12} = \theta_{12}\theta_{22}^{-1}, \quad \Sigma_{21} = -\theta_{21}\theta_{22}^{-1}, \quad \Sigma_{22} = \theta_{22}^{-1},$$

que são todas analíticas em $\mathbf{D}$.

Seja $\Sigma = [\Sigma_{ij}]$ e defina $P = (I + J)/2$ e $Q = (I - J)/2$.

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Então, podemos mostrar que

(a) $P \pm Q\Sigma$ e $P \pm \Sigma Q$ são inversíveis em $\mathbf{D}$;

(b) $\theta = (P\Sigma + Q)(Q\Sigma + P)^{-1} = (P - \Sigma Q)^{-1}(\Sigma P - Q)$ em $\mathbf{D}$;

(c) $J - \theta(z_1)J\theta(z_2)^H =$
 $(P - \Sigma(z_1)Q)^{-1}(I - \Sigma(z_1)\Sigma(z_2)^H)(P - \Sigma(z_2)Q)^{-H}$ para
 $z_1, z_2 \in \mathbf{D}$;

(d) $J - \theta(z_2)^H J\theta(z_1) =$
 $(P + Q\Sigma(z_2))^{-H}(I - \Sigma(z_2)^H \Sigma(z_1))(P + Q\Sigma(z_1))^{-1}$ para
 $z_1, z_2 \in \mathbf{D}$.

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Para mostrar o ítem (a), observe que

$$Q\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\theta_{21}\theta_{22}^{-1} & \theta_{22}^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow P \pm Q\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp\theta_{21}\theta_{22}^{-1} & \pm\theta_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Logo, $\det(P \pm Q\Sigma) = \pm\theta_{22}^{-1} \neq 0$. Portanto, $(P \pm Q\Sigma)$ é inversível.

Da mesma forma, mostra-se que $(P \pm \Sigma Q)$ é inversível.

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Para mostrar o ítem (b), mostremos primeiro que

$$\theta(Q\Sigma + P) = (P\Sigma + Q).$$

Pelo ítem (a),

$$(P + Q\Sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\theta_{21}\theta_{22}^{-1} & \theta_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\theta_{21}\theta_{22}^{-1} & \theta_{22}^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \theta_{11} - \theta_{12}\theta_{22}^{-1}\theta_{21} & \theta_{12}\theta_{22}^{-1} \\ \theta_{21} - \theta_{22}\theta_{21}\theta_{22}^{-1} & \theta_{22}\theta_{22}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \theta_{11} - \theta_{12}\theta_{22}^{-1}\theta_{21} & \theta_{12}\theta_{22}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Por outro lado,

$$(P\Sigma + Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11} - \theta_{12}\theta_{22}^{-1}\theta_{21} & \theta_{12}\theta_{22}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos a igualdade $\theta = (P\Sigma + Q)(Q\Sigma + P)^{-1}$.

Da mesma forma, mostra-se que $\theta = (P - \Sigma Q)^{-1}(\Sigma P - Q)$.

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Para mostrar o ítem (c), verifiquemos a igualdade

$$(P - \Sigma(z_1)Q)(J - \theta(z_1)J\theta(z_2)^H)(P - \Sigma(z_2)Q)^H = I - \Sigma(z_1)\Sigma(z_2)^H.$$

Chamando de B o lado esquerdo da igualdade acima e percebendo que

$$PJP^H = P, \quad QJQ^H = -Q, \quad PJQ^H = 0 \quad \text{e} \quad PJP^H + QJQ^H = I,$$

temos

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

$$\begin{aligned} B &= (P - \Sigma(z_1)Q)J(P - \Sigma(z_2)Q)^H - (P - \Sigma(z_1)Q)(\theta(z_1)J\theta(z_2)^H)(P - \Sigma(z_2)Q)^H \\ &= (P - \Sigma(z_1)Q)J(P - \Sigma(z_2)Q)^H - (\Sigma(z_1)P - Q)J(\Sigma(z_2)P - Q)^H \\ &= I - \Sigma(z_1)QJP^H + \Sigma(z_1)QJQ^H\Sigma^H(z_2) - \Sigma(z_1)PJP^H\Sigma^H(z_2) + QJP^H\Sigma^H(z_2) \\ &= I - \Sigma(z_1)Q\Sigma^H(z_2) - \Sigma(z_1)P\Sigma^H(z_2) \\ &= I - \Sigma(z_1)(Q + P)\Sigma^H(z_2) \\ &= I - \Sigma(z_1)\Sigma^H(z_2) \end{aligned}$$

Para mostrar o ítem (d), utilizamos a primeira igualdade do ítem (b) e procedemos como no ítem anterior.

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Fazendo $z_1 = z_2$ pelo item (d), temos que $I - \Sigma^H \Sigma$ é J -contrativa se, e somente se, $J - \Theta^H J \Theta$ é J -contrativa.

Da mesma forma, temos, pelo item (c), que $I - \Sigma \Sigma^H$ é J -contrativa se, e somente se, $J - \Theta J \Theta^H$ é J -contrativa.

Assim, para mostrar o item 1., basta verificar que $I - \Sigma^H \Sigma$ é J -contrativa se $I - \Sigma \Sigma^H$ é J -contrativa.

Seja $\lambda \neq 0$ o autovalor de $\Sigma \Sigma^H$ associado ao autovetor x .
Então,

$$\Sigma^H \Sigma \Sigma^H x = \Sigma^H (\Sigma \Sigma^H x) = \lambda \Sigma^H x.$$

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Logo, λ também é autovalor de $\Sigma^H \Sigma$.

Portanto, se $I - \Sigma \Sigma^H$ é J -contrativa, $I - \Sigma^H \Sigma$ também é J -contrativa, ficando, assim, provado o item 1.

Pelo ítem anterior, $\Theta J \Theta^H \leq J$, ou seja,

$$x^H [J - \Theta J \Theta^H] x \geq 0 \quad \text{para todo } x \neq 0. \quad (11)$$

Seja $x = \Theta^{-H} y$ e, assim, $x^H = y^H \Theta^{-1}$. Substituindo x e x^H em (??), temos

$$y^H \Theta^{-1} [J - \Theta J \Theta^H] \Theta^{-H} y = y^H [\Theta^{-1} J \Theta^{-H} - J] y \geq 0 \quad \text{para todo } y \neq 0.$$

Portando, $\Theta^{-1} J \Theta^{-H} - J$ é semi definida-positiva, ou seja,

$$\Theta^{-1} J \Theta^{-H} \geq J.$$

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Agora, usando o fato de que $\Theta^{-1}(z) = J\Theta^H(1/\bar{z})J$, temos

$$\Theta^H(w)J\Theta(w) \geq J, \text{ com } w = 1/\bar{z} \in \mathbf{E},$$

ficando assim provado o ítem 2.

Usando os ítems 1. e 2., temos

$$\Theta(1/\bar{z})J\Theta^H(1/\bar{z}) \geq J, \quad z \in \mathbf{D}. \quad (12)$$

Calculando o elemento (1,1) de (??), obtemos $|\theta_{11*}|^2 - |\theta_{12*}|^2 \geq 1$ em $\mathbf{D}$ e, conseqüentemente, $(\theta_{11*} + \theta_{12*})$ é diferente de zero. Logo, sua inversa é analítica em $\mathbf{D}$.

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Calculando a parte real do ítem 4., temos

$$\frac{\theta_{11*} - \theta_{12*} \overline{\theta_{11*} + \theta_{12*}}}{\theta_{11*} + \theta_{12*} \overline{\theta_{11*} + \theta_{12*}}} = \frac{|\theta_{11*}|^2 + \theta_{11*} \overline{\theta_{12*}} - \theta_{12*} \overline{\theta_{11*}} - |\theta_{12*}|^2}{|\theta_{11*} + \theta_{12*}|^2}.$$

Assim,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\theta_{11*} - \theta_{12*}}{\theta_{11*} + \theta_{12*}} \right) = \frac{|\theta_{11*}|^2 - |\theta_{12*}|^2}{|\theta_{11*} + \theta_{12*}|^2} \geq \frac{1}{|\theta_{11*} + \theta_{12*}|^2} \geq 0,$$

e o ítem 4. esta demonstrado.

Matrizes de Funções: J -unitárias e J -contrativas.

Como o lado direito da expressão anterior é um majoramento harmônico em D para a função analítica $|\theta_{11*} + \theta_{12*}|^{-2}$, temos que o item 3. é verdadeiro.

Para mostrar os itens 5. e 6., fazemos exatamente como em 3. e 4., mas calculando o elemento (2,2) em (??).

Para provar a parte 7., note que, para $z \in D$, temos $\theta_* J \theta_*^H \geq J$.

Assim, $[1 \ 1] \theta_* J \theta_*^H [1 \ 1]^T \geq [1 \ 1] J [1 \ 1]^T = 0$, com igualdade em T .

Logo, $1 - a\bar{a} \geq 0$, onde $a = (\theta_{11*} + \theta_{12*})^{-1}(\theta_{21*} + \theta_{22*})$ com igualdade em T . Isto a identifica como uma "função inner". ■

Espaço $\mathcal{L}_n$.

Defina, para $\alpha_i \in \mathbb{D}$, o fator Blaschke como

$$\zeta_i(z) = \frac{\overline{\alpha_i}}{|\alpha_i|} \frac{\alpha_i - z}{1 - \overline{\alpha_i}z}, \quad \text{se } \alpha_i \neq 0, \quad \text{ou } \zeta_i(z) = z, \quad \text{se } \alpha_i = 0.$$

Suponha, por convenção, que $\frac{\overline{\alpha_i}}{|\alpha_i|} = -1$ para $\alpha_i = 0$.

Agora, definimos o produto de Blaschke, recursivamente, como

$$B_0 = 1 \text{ e } B_n = B_{n-1}\zeta_n, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Consideremos o espaço $\mathcal{L}_n = \overline{\{B_k : k = 0, 1, \dots, n\}}$, ou seja, $\mathcal{L}_n$ é gerado pelos B_k $k = 0, \dots, n$.

Espaço $\mathcal{L}_n$.

Observe que,

$$\mathcal{L}_n = \left\{ f = \frac{p(z)}{\prod_{i=1}^n (1 - \bar{\alpha}_i z)}; p \in \Pi_n \right\}, \text{ onde}$$

Π_n é o espaço dos polinômios de grau no máximo n .

Agora, daremos uma outra caracterização para o espaço $\mathcal{L}_n$.
Seja $M_n = zB_nH_2$, onde B_n é o produto de Blaschke finito associado com $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Espaço $\mathcal{L}_n$.

Observe que $M_{n+1} \subset M_n \subset \dots \subset M_0 = zH_2$.

Definimos, então,

$$\mathcal{L}_n = H_2 \ominus M_n = M_n^\perp = \{f \in H_2, \langle f, g \rangle = 0 \text{ para todo } g \in M_n\}. \quad (13)$$

Teorema 6. *Defina o espaço $M_n = zB_nH_2$ e $\mathcal{L}_n = H_2 \ominus M_n = M_n^\perp$, onde B_n é o produto de Blaschke finito de grau n . Então,*

$$\mathcal{L}_n = \overline{\{B_k : k = 0, \dots, n\}}.$$

Espaço $\mathcal{L}_n$.

Demonstração:

Vamos, então, mostrar que $B_n \in \mathcal{L}_n - \mathcal{L}_{n-1}$, o que implica que os produtos de Blaschke formam realmente uma base.

Primeiro, mostremos que $B_n \in \mathcal{L}_n$.

Seja $f = zB_ng \in zB_nH_2$, ($g \in H_2$). Então,

$\langle f, B_n \rangle = \int zB_ngB_{n*}d\lambda = \int zg d\lambda = 0$, pois $B_{n*} = 1/B_n$ (veja seção 2.2) e $g \in H_2$.

Por outro lado, B_n não pertence a $\mathcal{L}_{n-1}$. Pois, para $f \in M_{n-1}$, temos

$$\langle f, B_n \rangle = \int zB_{n-1}gB_{n*}d\lambda = \int zg/\xi_n d\lambda \text{ onde } 1/\xi_n = \frac{\alpha_n}{|\alpha_n|} \frac{(1 - \bar{\alpha}_nz)}{\alpha_n - z}.$$

Pela fórmula de Cauchy

Espaço $\mathcal{L}_n$.

$$\langle f, B_n \rangle = -g(\alpha_n) \frac{\alpha_n}{|\alpha_n|} \alpha_n (1 - |\alpha_n|^2).$$

Observe que $g(\alpha_n) \neq 0$ para toda $g \in H_2$, pois caso contrário, se $g(\alpha_n) = 0$ então $g(z) = (z - \alpha_n)\hat{g}(z)$, logo

$$f(z) = zB_{n-1}(z)(z - \alpha_n)\hat{g}(z) \frac{1 - \bar{\alpha}_n z}{1 - \bar{\alpha}_n z} = zB_n(z)\hat{g}(z)(1 - \bar{\alpha}_n) \in M_n$$

contrariando a hipótese que $f \in M_{n-1}$. Portanto, B_n não é ortogonal a M_{n-1} e, assim, B_n não pertence a $\mathcal{L}_{n-1}$.

Espaço $\mathcal{L}_n$.

Teorema 7. *Seja $K_n(z, w)$ o núcleo reprodutivo para $\mathcal{L}_n$. Então, para o conjunto $\{\xi_0, \dots, \xi_n\}$ de pontos distintos em $\mathbf{D}$, a função $\{K_n(z, \xi_j)\}$, $j = 0, \dots, n$, forma uma base para $\mathcal{L}_n$.*

Demonstração:

Certamente as funções $\{K_n(z, \xi_j)\}$ estão em $\mathcal{L}_n$.

Como $K_n(z, \xi_i) = \sum_{k=0}^n \phi_k(z) \overline{\phi_k(\xi_i)}$, $i = 0, \dots, n$, temos

$$\begin{pmatrix} K_n(z, \xi_0) \\ K_n(z, \xi_1) \\ \vdots \\ K_n(z, \xi_n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{\phi_0(\xi_0)} & \overline{\phi_1(\xi_0)} & \dots & \overline{\phi_n(\xi_0)} \\ \overline{\phi_0(\xi_1)} & \overline{\phi_1(\xi_1)} & \dots & \overline{\phi_n(\xi_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{\phi_0(\xi_n)} & \overline{\phi_1(\xi_n)} & \vdots & \overline{\phi_n(\xi_n)} \end{pmatrix}}_{\overline{V}} \begin{pmatrix} \phi_0(z) \\ \phi_1(z) \\ \vdots \\ \phi_n(z) \end{pmatrix}.$$

Primeiramente, mostremos que V é uma matriz não singular. Suponha que V é singular. Assim, existe um vetor não nulo $A = [a_0, \dots, a_n]^T \in \mathbb{C}^n$ tal que $VA = 0$, isto é,

$$\sum_{j=0}^n \phi_j(\xi_k) a_j = 0, \quad k = 0, \dots, n. \quad (15)$$

Como $\phi \in \mathcal{L}_n$, temos $\phi(z) = \frac{p_n(z)}{\prod_{j=1}^n (1 - \bar{\alpha}_j z)}$, onde $p_n(z) \in \Pi_n$.

Espaço $\mathcal{L}_n$.

Assim, (??) implica que o polinômio $p_n(z) \in \Pi_n$ tem $n + 1$ zeros $\zeta_0, \dots, \zeta_n$.

Então, $p_n(z)$ e, portanto, $\phi(z)$ têm que ser identicamente nulas.

Por outro lado, a função $\phi(z) = \sum_{j=0}^n a_j \phi_j(z) \in \mathcal{L}_n$ não é identicamente nula, pois $A \neq 0$, o que é uma contradição. Portanto, V é não singular.

Agora, mostremos que o conjunto $\{K_n(z, \xi_j)\}$, $j = 0 \dots, n$, é linearmente independente.

Espaço $\mathcal{L}_n$.

Multiplicando (??) pelo vetor $[\alpha_0, \dots, \alpha_n]^T$ e igualando a zero, temos

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{k=0}^n \alpha_k K_n(z, \xi_k) &= [\alpha_0, \dots, \alpha_n]^T \overline{V} \begin{pmatrix} \phi_0(z) \\ \phi_1(z) \\ \vdots \\ \phi_n(z) \end{pmatrix} \\ &= [\phi_0(z), \dots, \phi_n(z)] \overline{V}^T \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Defina

$$\mathcal{L} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_* = \{f_* : f \in \mathcal{L}\}.$$

Seja M um funcional linear em $\mathcal{L} + \mathcal{L}_*$. Para $f \in \mathcal{L}$, definimos

$$M(f_*) = \overline{M(f)} \quad \text{e} \quad M(ff_*) > 0, \quad \text{se} \quad f \neq 0.$$

O funcional M induz um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$, dado por

$$\langle f, g \rangle = M(fg_*), \quad \text{para} \quad f, g \in \mathcal{L}.$$

Cálculo em $\mathcal{L}_n$.

Se $f \in \mathcal{L}_n$ definimos a transformação estrela superior (que chamaremos de superstar) como $f^*(z) = B_n(z)f_*(z)$, onde os $B_n(z)$ são os produtos de Blaschke finitos com zeros em $A_n = \{\alpha_i : i = 1, \dots, n\}$.

Note que, se todos os α_i são zeros, $B_n(z) = z^n$ e, então, é natural definir a transformação superstar para polinômios como sendo $p^*(z) = z^n p_*(z)$, onde $p_*(z) = \overline{p(1/\bar{z})}$ e $p \in \Pi_n$.

Teorema 8. *Em $\mathcal{L}_n$, temos as seguintes relações:*

1. *Se $f \in \mathcal{L}_n$, então*

(a) $(f_*)_* = (f^*)^* = f;$

(b) $(f_*)^* = f B_n;$

(c) $(f^*)_* = f B_{n*} = f / B_n.$

2. *Para o produto de Blaschke finito, temos:*

(a) $B_n^* = 1;$

(b) $B_{n*} = 1 / B_n.$

3. Sejam $\pi_n(z) = \prod_{i=1}^n (1 - \bar{\alpha}_i z)$ e $f = \frac{p_n}{\pi_n} \in \mathcal{L}_n$. Então,

(a) $B_n = \eta_n \pi_n^* / \pi_n$ com $\eta_n = \prod_{i=1}^n (-\bar{\alpha}_i / |\alpha_i|)$;

(b) $f_* = p_{n*} / \pi_{n*} = p_n^* / \pi_n^*$;

(c). $f^* = \eta_n p_n^* / \pi_n$;

4. Se $f, g \in \mathcal{L}_n$, então $\langle f, g \rangle = \langle g_*, f_* \rangle = \langle g^*, f^* \rangle$.

5. Se $\phi_n \in \mathcal{L}_n$ e $\langle \phi_n, \mathcal{L}_{n-1} \rangle = 0$, ou seja, $\phi_n \perp \mathcal{L}_{n-1}$, então $\langle \phi_n^*, \zeta_n \mathcal{L}_{n-1} \rangle = 0$. Isto é, $\phi_n^* \perp \mathcal{L}_n(\alpha_n)$, onde $\mathcal{L}_n(\alpha_n) = \{f \in \mathcal{L}_n : f(\alpha_n) = 0\}$.

6. Se $f \in \mathcal{L}_n$ tem um zero (pólo) β em $D(E, T)$, então $f_* \in \mathcal{L}_{n*}$ tem um zero (pólo) $1/\bar{\beta}$ em $E(D, T)$ e $f^* \in \mathcal{L}_n$ tem os mesmos zeros que f_* e os mesmos pólos que f^* . Os zeros de f^* são elementos de $A_{n*} = \{1/\bar{\alpha}_1, \dots, 1/\bar{\alpha}_n\}$.

Cálculo em $\mathcal{L}_n$.

Seja $f \in \mathcal{L}_n(\alpha_n)$. Como $\phi_n \in \mathcal{L}_n$, então $\phi_n^* = B_n(z)\phi_{n*}(z)$.
Mas,

$$\begin{aligned}\langle f, \phi_n^* \rangle &= \langle f, B_n \phi_{n*} \rangle = \mathbf{M}(f B_n \phi_{n*}) \\ &= \mathbf{M}(B_n \phi_{n*} f) = \overline{\mathbf{M}(B_n f_* \phi_{n*})} = \overline{\langle B_n f_*, \phi_n \rangle}.\end{aligned}$$

Basta mostrar, agora, que $B_n f_*$ pertence a $\mathcal{L}_{n-1}$.

$$f(z) \in \mathcal{L}_n \Rightarrow f(z) = \sum_{r=0}^n b_r B_r(z) \quad e \quad f^*(z) = B_n(z) f_*(z).$$

Cálculo em $\mathcal{L}_n$.

$$f(z) \in \mathcal{L}_n \Rightarrow f(z) = \sum_{r=0}^n b_r B_r(z) \quad e \quad f^*(z) = B_n(z) f_*(z).$$

$$B_n(z) f_*(z) = B_n \sum_{r=0}^n \overline{b_r} B_r(z)_* = \frac{p_n(z)}{(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z) \dots (\alpha_n - z)} \in \mathcal{L}_n.$$

Assim, temos que

$$f^*(z) = \sum_{r=0}^n a_r B_r(z)$$

então

$$f(z) = f^{**}(z) = B_n(z) \left(\sum_{r=0}^n a_r B_r(z) \right)_* = \sum_{r=0}^n \bar{a}_r \frac{B_n(z)}{B_r(z)}.$$

Como $f \in \mathcal{L}_n(\alpha_n)$,

$$0 = f(\alpha_n) = \sum_{r=0}^n \bar{a}_r \frac{B_n(\alpha_n)}{B_r(\alpha_n)} = \bar{a}_n.$$

Logo,

$$f^*(z) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r B_r(z), \quad \text{ou seja,} \quad f^* \in \mathcal{L}_{n-1}.$$

Teorema 9. *Sejam $E_n^T = [e_0, \dots, e_n]$ um vetor, onde as funções e_i , $i = 0, \dots, n$, formam uma bases para $\mathcal{L}_n$ e $G_n = \langle E_n, E_n^T \rangle$ a matriz de Gram. Então, o núcleo reprodutivo $K_n(z, w)$ para $\mathcal{L}_n$ é expresso como*

$$K_n(z, w) = \frac{-1}{\det(G_n)} \det \begin{pmatrix} G_n & E_n \\ E_n(w)^H & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Demonstração:

Suponha que, pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, a base E_n é transformada em uma base ortogonal $F_n = [\phi_0, \dots, \phi_n]^T$ e que $\phi_k = \sum_{i=0}^k l_{ki} e_i$. Então, o vetor F_n pode ser escrito como $F_n = L_n E_n$, com L_n sendo uma matriz triangular inferior formada pelos coeficientes l_{ki} .

Agora, temos que

$$I = \langle F_n, F_n^T \rangle = L_n \langle E_n, E_n^T \rangle L_n^H = L_n G_n L_n^H.$$

Como $G_n^{-1} = L_n^H L_n$, então

$$K_n(z, w) = F_n(w)^H F_n(z) = E_n(w)^H L_n^H L_n E_n(z) = E_n(w)^H G_n^{-1} E_n(z) \quad (17)$$

Seja B_n a transposta da matriz dos cofatores de G_n e A_{ij} a matriz formada eliminando-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna de G_n . Assim, $G_n^{-1} = \frac{1}{\det(G_n)} B_n$.

Desenvolvendo o lado direito de (??), temos

$$\begin{aligned} T_n &= [\overline{e_0(w)}, \overline{e_1(w)}, \dots, \overline{e_n(w)}]^T \frac{1}{\det(G_n)} B_n E_n(z) \\ &= \frac{1}{\det(G_n)} \left[\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{1+k} \overline{e_{k-1}(w)} \det(A_{1,k}), \dots, \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1+k} \overline{e_{k-1}(w)} \det(A_{n+1,k}) \right] E_n \\ &= \frac{1}{\det(G_n)} \sum_{l=0}^n \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+l+1} \overline{e_{k-1}(w)} \det(A_{l+1,k}) \right) e_l(z). \end{aligned}$$

Agora, desenvolvendo o lado direito de (??), obtemos

$$\frac{-1}{\det(G_n)} \det \begin{pmatrix} G_n & E_n(z) \\ E_n(w)^H & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\det(G_n)} \sum_{i=0}^n (-1)^{(l+1)+(n+2)} e_l(z) \det(K_{l+1,n+2}), \quad (18)$$

onde $K_{i,n+2}$ é a matriz formada eliminando-se a i -ésima linha e a última coluna da matriz

$$\begin{pmatrix} G_n & E_n(z) \\ E_n(w)^H & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$\det(K_{l+1,n+2}) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{(n+1)+k} \overline{e_{k-1}(w)} \det(A_{l+1,k}). \quad (19)$$

Substituindo (??) em (??), temos

$$\frac{-1}{\det(G_n)} \det \begin{pmatrix} G_n & E_n(z) \\ E_n(w)^H & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(G_n)} \sum_{l=0}^n \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{l+k+1} \overline{e_{k-1}(w)} \det(A_{l+1,k}) \right) e_l(z),$$

■

Teorema 10. *Sejam $K_n(z, w)$ o núcleo reprodutivo para $\mathcal{L}_n$ e $\{\phi_k\}$ um conjunto ortonormal de funções base com coeficientes principais $k_k > 0$. Então, as seguintes relações são satisfeitas:*

1. $K_n(z, w) = B_n(z) \overline{B_n(w)} K_n(1/\overline{w}, 1/\overline{z});$
2. $K_n(z, \alpha_n) = k_n \phi_n^*(z);$
3. $K_n(\alpha_n, \alpha_n) = k_n^2.$

Teorema 11. *Considere uma base para o espaço $\mathcal{L}_n$ formada pelo produto de Blaschke finito $\{B_k(z) : k = 0, \dots, n\}$ e denote os elementos da correspondente matriz de Gram por $\mu_{ij} = \langle B_i, B_j \rangle$, isto é, $G_n = [\mu_{ij}]$. As funções da base ortonormal são denotadas por ϕ_k e seus coeficientes principais por k_k . Então, temos as seguintes relações:*

1. $k_n^2 = \det(G_{n-1})/\det(G_n);$

2.
$$\phi_n(z) = (\det(G_{n-1})\det(G_n))^{-1/2} \det \begin{pmatrix} \mu_{00} & \dots & \mu_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1,0} & & \mu_{n-1,n} \\ B_0(z) & \dots & B_n(z) \end{pmatrix}.$$

Problemas extremos em $\mathcal{L}_n$

Teorema 12. *Todas as soluções do seguinte problema de otimização*

$$P_n^1(1, \alpha_n) : \sup\{|f(0)|^2 : \|f\| = 1, f \in \mathcal{L}_n\}$$

são dadas por

$$f = \eta \phi_n^*, \quad |\eta| = 1.$$

Aqui, ϕ_n é a n -ésima função base ortonormal de $\mathcal{L}_n$ com coeficiente de maior grau dado por $k_n = \phi_n^(\alpha_n)$. O máximo é igual a k_n^2 .*

Problemas extremos em $\mathcal{L}_n$

Teorema 13. *O problema de otimização*

$$P_n^2(1, \alpha_n) : \inf \{ \|f\|^2 : f(\alpha_n) = 1, f \in \mathcal{L}_n \}$$

tem uma única solução dada por $f = \Phi_n^ = k_n^{-1} \phi_n^*$, onde Φ_n é a n -ésima função base ortogonal mônica em $\mathcal{L}_n$ e ϕ_n é a função base ortonormal com $\phi_n^*(\alpha_n) = k_n > 0$. O valor mínimo é dado por k_n^{-2} .*

Densidade em L_p e H_p

Definimos o produto de Blaschke finito B_n , para $n = 0, 1, \dots$, como anteriormente e $B_{-n} = B_{n*} = 1/B_n$, para $n = 1, 2, \dots$.

Portanto, $\{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ gera o espaço $R_n = \mathcal{L}_n + \mathcal{L}_{n*}$, $n = 0, 1, \dots$.

Lema 3. *Sejam $z_1, z_2, \dots, z_n$ pontos fixos em $\mathbb{C}$. Temos o seguinte resultado de otimização em L_p , $0 < p \leq \infty$:*

$$\min_q \left\{ \|f\|_p : f(z) = \frac{q(z)}{(z - z_1) \dots (z - z_n)}, q \in \Pi_N^M, N \geq n \right\} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k|_+} \quad (20)$$

onde q pertence ao espaço dos polinômios mônicos de grau no máximo N ($q \in \Pi_N^M$) e $|z|_+ = \max\{|z|, 1\}$.

Densidade em L_p e H_p

A única solução é obtida para $q = Q$, onde

$$Q(z) = \frac{z^{N-n}(z\bar{z}_1 - 1) \dots (z\bar{z}_d - 1)(z - z_{d+1}) \dots (z - z_n)}{\bar{z}_1 \dots \bar{z}_d}.$$

Demonstração:

Suponha, por simplicidade, que $z_1, \dots, z_d$ estão em $\mathbb{E}$ e que $z_{d+1}, \dots, z_n$ estão todos em $\overline{\mathbb{D}}$.

Densidade em L_p e H_p

Temos que o lado direito de (??) pode ser alcançado para $q = Q$, pois

$$\begin{aligned}\int |f(z)|^p d\lambda(z) &= \int \left| \frac{z^{N-n}(z\bar{z}_1 - 1) \dots (z\bar{z}_d - 1)(z - z_{d+1}) \dots (z - z_n)}{\bar{z}_1 \dots \bar{z}_d (z - z_1) \dots (z - z_n)} \right|^p d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{|\bar{z}_1 \dots \bar{z}_d|^p} \int \left| \frac{z^{N-n}(z\bar{z}_1 - 1) \dots (z\bar{z}_d - 1)}{(z - z_1) \dots (z - z_d)} \right|^p d\lambda(z).\end{aligned}$$

Como cada $\frac{z\bar{z}_i - 1}{z - z_i}$, $i = 1, \dots, d$, é uma transformação de Möbius $\left| \frac{z\bar{z}_i - 1}{z - z_i} \right|^p = 1$ e, além, disso, como a integração é feita no disco $|z^{N-n}|^p = 1$,

Densidade em L_p e H_p

logo

$$\int |f(z)|^p d\lambda(z) = \frac{1}{|z_1 \dots z_d|^p} \int d\lambda(z) = \frac{1}{|z_1 \dots z_d|^p} = \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k|_+} \right\}^p.$$

Agora, falta mostrar que, qualquer polinômio mônico $P \in \Pi_N^M$, satisfaz

$$\left\| \frac{P(z)}{\pi(z)} \right\|_p > \left\| \frac{Q(z)}{\pi(z)} \right\|_p, \text{ onde } \pi(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n).$$

Densidade em L_p e H_p

Como $\|f\|_\infty \geq \|f\|_p$, é suficiente provar a desigualdade acima para $0 < p < \infty$.

Suponha que $q_1, \dots, q_j$ são zeros de P pertencentes ao fecho do disco unitário. Assim,

$P(z) = (z - q_1) \dots (z - q_j)R(z)$, com $|R(0)| > 1$.

A função

$$g(z) = \frac{(1 - \bar{q}_1 z) \dots (1 - \bar{q}_j z) R(z)}{(z - z_1) \dots (z - z_d)(1 - \bar{z}_{d+1} z) \dots (1 - \bar{z}_n z)}$$

é analítica em $\mathbb{D}$ e, conseqüentemente,

Densidade em L_p e H_p

$$\begin{aligned} \left\| \frac{P}{\pi} \right\|_p^p &= \int \left| \frac{P(z)}{\pi(z)} \right|^p d\lambda = \int \left| \frac{(z - q_1) \dots (z - q_j) R(z)}{(z - z_1) \dots (z - z_n)} \right|^p d\lambda \\ &= \int \left| \frac{(z - q_1) \dots (z - q_j)}{(1 - \bar{q}_1 z) \dots (1 - \bar{q}_j z)} \frac{(1 - \bar{z}_{d+1} z) \dots (1 - \bar{z}_n z)}{(z - z_{d+1}) \dots (z - z_n)} \right|^p |g(z)|^p d\lambda \\ &= \int |g(z)|^p d\lambda \geq \left| \int g(z)^p d\lambda \right|. \end{aligned}$$

Como

$$\left| \int g(z)^p d\lambda \right| = |g(0)|^p = \frac{|R(0)|^p}{|z_1 \dots z_d|^p} > \frac{1}{|z_1 \dots z_d|^p},$$

segue que

Densidade em L_p e H_p

$$\left\| \frac{P}{\pi} \right\|_p \geq \frac{1}{|z_1 \dots z_d|} = \left\| \frac{Q}{\pi} \right\|_p \text{ para } P \neq Q.$$



Teorema 14. *Dados $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ em $\mathbf{D}$, o produto de Blaschke finito B_n , para $n > 0$ e $B_{-n} = 1/B_n$, para $n = 1, 2, \dots$, então o sistema $\{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é completo em qualquer espaço L_p , ($1 \leq p \leq \infty$) se, e somente se, $\sum (1 - |\alpha_k|) \rightarrow \infty$.*

Densidade em L_p e H_p

Primeiro note que, no caso em que um número infinito de α_k é igual a zero, o sistema $\{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é formado por polinômios trigonométricos que são completos em L_p e a soma certamente diverge.

Suponha que apenas um número finito de α_k , $k = 1, \dots, q$, é zero. Neste caso, o sistema contém polinômios trigonométricos de grau no máximo q . Seja

$$\begin{aligned} R_n &= \overline{\{B_k : k = -n, \dots, n\}} \\ &= \mathcal{L}_n + \mathcal{L}_{n*} = \left\{ \frac{p_{2n}(z)}{D(z)} : p_{2n} \in \Pi_{2n}, D(z) = z^q \prod_{k=q+1}^n [(z - 1/\bar{\alpha}_k)(z - \alpha_k)] \right\}. \end{aligned}$$

Densidade em L_p e H_p

Como $\|z^m - f\|_1 \leq \|z^m - f\|_\infty$, é suficiente provar que a divergência da soma implica em L_∞ ser completo e, por outro lado, L_1 ser completo implica na divergência da soma. Primeiro, mostremos que L_1 ser completo implica na divergência da soma.

Pelo lema anterior, temos, para $p = 1$, que

$$\inf_{f \in R_n} \|z^{q+1} - f(z)\|_1 = \inf_{p \in \Pi_{2n}} \left\| z^{q+1} - \frac{P(z)}{D(z)} \right\|_1 = \inf_{Q \in \Pi_{2n+1}^M} \left\| \frac{Q(z)}{D(z)} \right\|_1 = \prod_{k=q+1}^n |\alpha_k|.$$

Densidade em L_p e H_p

Como L_1 é completo, $\prod_{k=q+1}^n |\alpha_k| \rightarrow 0$. Logo,

$$\sum (1 - |\alpha_k|) \rightarrow \infty.$$

Mostremos, agora, que a divergência da soma implica em L_∞ ser completo.

Sabemos que $z^k, k = -q, \dots, q$, estão no sistema. Assim, temos que provar que z^k , para $|k| > q$, pode ser aproximado em L_∞ por elementos de R_n , para n suficientemente grande.

Densidade em L_p e H_p

Observe que

$$\inf_{f \in R_{n, \alpha_i}} \|z^{m+q} + a_1 z^{q+m-1} + \dots + a_{m-1} z^{q+1} + f(z)\|_\infty =$$

$$\inf_{q \in \Pi_{2n+m-1}} \left\| \frac{z^{2n+m} + q(z)}{D(z)} \right\|_\infty = \prod_{k=q+1}^n |\alpha_k|,$$

para $m = 1, 2, \dots, l$, e

$$\inf_{f \in R_{n, \alpha_i}} \|z^{-m-q} + a_1 z^{-m-q+1} + \dots + a_{m-1} z^{-q-1} + f(z)\|_\infty =$$

$$\inf_{f_* \in R_{n, \alpha_i}} \|z^{m+q} + \bar{a}_1 z^{m+q-1} + \dots + \bar{a}_{m-1} z^{q+1} + f_*(z)\|_\infty,$$

que também é igual a $\prod_{k=q+1}^n |\alpha_k|$ para $m = 1, 2, \dots$

Densidade em L_p e H_p

Como a soma diverge, temos que $\prod_{k=q+1}^n |\alpha_k| \rightarrow 0$. Isto

significa que $\{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é completo em L_∞ . ■

Lema 4. *Seja $\mathcal{A}$ um subespaço linear de um espaço de Hilbert $\mathcal{B}$ e seja f qualquer elemento de $\mathcal{B}$. O ponto p^* em $\mathcal{A}$ é a melhor aproximação em $\mathcal{A}$ para f se, e somente se, o erro $e^* = f - p^*$ satisfaz à condição de ortogonalidade*

$$\langle e^*, p \rangle = 0, \quad p \in \mathcal{A}.$$

Densidade em L_p e H_p

Teorema 15. *Seja $f \in \mathbf{H}_2$. Então, o problema*

$$\inf_{f_n} \{ \|f - f_n\|_2 : f_n \in \mathcal{L}_n \}$$

tem uma única solução, que é uma função $f_n \in \mathcal{L}_n$, que interpola f nos pontos do conjunto $A_n^0 = \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Teorema 16. *Seja $f \in H_2$ e suponha que $\sum(1 - |\alpha_k|)$ diverge. Seja $f_n \in \mathcal{L}_n$ a função que interpola f nos pontos $A_n^0 = \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Então, f_n converge uniformemente, em um subconjunto compacto de $\mathbf{D}$, para $f(z)$. Se f pertencente a H_2 é também analítica em $\mathbf{T}$, então a convergência é também uniforme em $\mathbf{T}$.*

Densidade em L_p e H_p

Demonstração:

Primeiramente, precisamos da fórmula do erro para interpolação de funções racionais, para mais detalhes sobre interpolações de funções racionais veja, [?]. Considere

$$w(z) = \frac{(z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_{n+1})}{(z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_n)} = \frac{\gamma(z)}{\sigma(z)}, \quad |c_r| > 1, \quad |b_k| \neq 1. \quad (21)$$

Seja

$$r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{w(t) - w(z)}{w(t)(t - z)} f(t) dt, \quad |z| < 1.$$

Densidade em L_p e H_p

Por (??), obtemos

$$\begin{aligned} r(z) &= \frac{1}{2\pi i \sigma(z)} \int \frac{\gamma(t)\sigma(z) - \gamma(z)\sigma(t)}{(z-t)} \frac{f(t)}{\sigma(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i \sigma(z)} \int \sum_{r=0}^n a_r(t) z^r \frac{f(t)}{\sigma(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i \sigma(z)} \sum_{r=0}^n \left[\int \frac{a_r(t) f(t)}{\sigma(t)} dt \right] z^r. \end{aligned}$$

Densidade em L_p e H_p

Observe que, na última igualdade, temos uma divisão de polinômios de grau n . Logo, $r(z)$ pertence a $\mathcal{L}_n$.

Agora, considere

$$\begin{aligned} f(z) - r(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{T}} \frac{w(t)f(t)}{w(t)(t-z)} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{T}} \frac{w(t) - w(z)}{w(t)(t-z)} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{T}} \frac{w(z)}{w(t)(t-z)} f(t) dt. \end{aligned} \tag{22}$$

Densidade em L_p e H_p

Como $w(b_r) = 0$, segue, pela igualdade acima, que $r(z)$ interpola $f(z)$ nos pontos $b_1, \dots, b_{n+1}$.

Agora, sejam $b_1 = 0, b_2 = \alpha_1, \dots, b_{n+1} = \alpha_n$ e $c_1 = 1/\bar{\alpha}_1, \dots, c_n = 1/\bar{\alpha}_n$. Considere $w(z) = d_n z B_n(z)$ e

$$w(t) = d_n t B_n(t), \text{ onde } d_n = \prod_{r=1}^n \frac{\bar{\alpha}_r}{|\alpha_r|}.$$

Substituindo em (??), temos

$$f(z) - f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{T}} z \frac{B_n(z)}{B_n(t)} \frac{f(t)}{(t-z)} \frac{dt}{t} = z B_n(z) \int_{\mathbf{T}} \frac{B_{n*}(t) f(t)}{(t-z)} d\lambda(t).$$

Logo,

Densidade em L_p e H_p

$$|f(z) - f_n(z)| \leq |z| |B_n(z)| \int_{\mathbf{T}} \frac{1}{|t - z|} |B_{n*}(t)| |f(t)| d\lambda(t) \leq |z| |B_n(z)| \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbf{T}} |f(t)| d\lambda(t). \quad (23)$$

Como $|B_n(z)| \rightarrow 0$ para $|z| < 1$ (pois $\sum (1 - |\alpha_k|)$ diverge), existe N tal que, para $n \geq N$, $|f(z) - f_n(z)| < \delta$ (independente do z escolhido).

Portando, $f_n(z)$ converge uniformemente para $f(z)$.

Para mostrar a segunda parte, temos

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbf{T}} |f(rt) - f_n(rt)|^2 d\lambda(t) \leq \int_{\mathbf{T}} |f(\widehat{z}) - f_n(\widehat{z})|^2 d\lambda(t) = |f(\widehat{z}) - f_n(\widehat{z})|^2, \quad \text{onde } |\widehat{z}| = 1.$$

Densidade em L_p e H_p

Como, pela primeira parte do teorema, $|f(\widehat{z}) - f_n(\widehat{z})| \rightarrow 0$, segue que f_n converge uniformemente para f em $\mathbf{T}$. ■

Relação de recorrência para as funções ortogonais

Lema 5. *Seja $f \in \mathcal{L}_n$.*

Se g e h são definidas pela relação

$$f(z) - f(w) = (z - w)g(z) = \frac{z - w}{1 - \overline{\alpha_n}z}h(z),$$

então

(a) $p_1(z)g(z) \in \mathcal{L}_n$ para todo $p_1 \in \Pi_1$, onde Π_1 é o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a um. Em especial, $g(z) \in \mathcal{L}_n$;

(b) $h \in \mathcal{L}_{n-1}$;

2. Se $f(w) = 0$, então $\frac{1 - \overline{\alpha_n(z)}}{z - w}f(z) \in \mathcal{L}_{n-1}$.

Relação de recorrência para as funções ortogonais

Lema 6. *Sejam ϕ_k funções de base ortonormal para $\mathcal{L}_n$, ζ_k os factor de Blaschke e w um parâmetro. Assim,*

$$L_n^0(z, w) = \frac{\phi_{n+1}^*(z) \overline{\phi_{n+1}^*(w)} - \phi_{n+1}(z) \overline{\phi_{n+1}(w)}}{1 - \zeta_{n+1}(z) \overline{\zeta_{n+1}(w)}} \in \mathcal{L}_n,$$

$$L_n^k(z, w) = \frac{\phi_n^*(z) \overline{\phi_n^*(w)} - \zeta_k(z) \overline{\zeta_k(w)} \phi_n(z) \overline{\phi_n(w)}}{1 - \zeta_k(z) \overline{\zeta_k(w)}} \in \mathcal{L}_n,$$

Relação de recorrência para as funções ortogonais

Teorema 17. (Relação de Christoffel-Darboux). Temos a seguinte relação entre o núcleo reprodutivo e as funções base ortonormais de $\mathcal{L}_n$:

$$K_n(z, w) = \frac{\phi_{n+1}^*(z)\overline{\phi_{n+1}^*(w)} - \phi_{n+1}(z)\overline{\phi_{n+1}(w)}}{1 - \zeta_{n+1}(z)\overline{\zeta_{n+1}(w)}} = L_n^0(z, w) \quad (24)$$

ou

$$K_n(z, w) = \frac{\phi_n^*\overline{\phi_n^*(w)} - \zeta_n(z)\overline{\zeta_n(w)}\phi_n(z)\overline{\phi_n(w)}}{1 - \zeta_n(z)\overline{\zeta_n(w)}} = L_n^n(z, w). \quad (25)$$

Relação de recorrência para as funções ortogonais

Demonstração:

Seja $f \in \mathcal{L}_n$. Então,

$$\langle f(z), L_n^0(z, w) \rangle = f(w) \langle 1, L_n^0(z, w) \rangle + \langle f(z) - f(w), L_n^0(z, w) \rangle. \quad (26)$$

Pelo Lema 5.1, temos que, se $f(z) - f(w) = (z - w)g(z)$, então $g \in \mathcal{L}_{n-1}$ e $p_1 g \in \mathcal{L}_n$, para todo $p_1 \in \Pi_1$.

Assim, chamando de $N(z, w)$ o numerador de $L_n^0(z, w)$, obtemos

Relação de recorrência para as funções ortogonais

$$\begin{aligned}\langle f(z) - f(w), L_n^0(z, w) \rangle &= \frac{1 - \overline{\alpha_{n+1}}w}{1 - |\alpha_{n+1}|^2} \left\langle (z - w)g(z), \frac{1 - \overline{\alpha_{n+1}}z}{1 - z\overline{w}} N(z, w) \right\rangle \\ &= \frac{1 - \overline{\alpha_{n+1}}w}{1 - |\alpha_{n+1}|^2} M(g(z)(z - \alpha_{n+1})N(z, w)_*) \\ &= \frac{1 - \overline{\alpha_{n+1}}w}{1 - |\alpha_{n+1}|^2} \langle (z - \alpha_{n+1})g(z), N(z, w) \rangle.\end{aligned}$$

Agora, temos que

$$\begin{aligned}\langle (z - \alpha_{n+1})g(z), N(z, w) \rangle &= \\ &= \langle (z - \alpha_{n+1})g(z), \phi_{n+1}^*(z)\overline{\phi_{n+1}^*(w)} - \phi_{n+1}(z)\overline{\phi_{n+1}(w)} \rangle \\ &= \langle (z - \alpha_{n+1})g(z), \phi_{n+1}^*(z)\overline{\phi_{n+1}^*(w)} \rangle - \langle (z - \alpha_{n+1})g(z), \phi_{n+1}(z)\overline{\phi_{n+1}(w)} \rangle \\ &= \langle (z - \alpha_{n+1})g(z), \phi_{n+1}^*(z) \rangle \phi_{n+1}^*(w) \\ &= \langle \zeta_{n+1}(z)h(z), \phi_{n+1}^*(z) \rangle \phi_{n+1}^*(w),\end{aligned}$$

Relação de recorrência para as funções ortogonais

com $h(z) = -\frac{|\alpha_{n+1}|}{\overline{\alpha_{n+1}}} (1 - \overline{\alpha_{n+1}}z)g(z) \in \mathcal{L}_n$, e, esta última igualdade é igual a zero pelo Teorema 3.6 item 5.

Relação de recorrência para as funções ortogonais

Falta apenas mostrar que $\langle 1, L_n^0(., w) \rangle = \eta(w) = 1$.

Fazendo $f(.) = L_n^0(., z)$ em (??), temos

$$\langle L_n^0(., z), L_n^0(., w) \rangle = L_n^0(w, z)\eta(w).$$

Se intercalarmos z e w , obtemos

$$\langle L_n^0(., w), L_n^0(., z) \rangle = L_n^0(z, w)\eta(z)$$

e, como

$$\overline{\langle L_n^0(., z), L_n^0(., w) \rangle} = \langle L_n^0(., w), L_n^0(., z) \rangle \quad e \quad \overline{L_n^0(z, w)} = L_n^0(w, z),$$

temos que $\eta(z) = \overline{\eta(w)}$. Assim, η é uma constante.

Relação de recorrência para as funções ortogonais

Observe que por (??)

$$\langle f, L_n^0(z, w) \rangle = \eta f(w),$$

assim

$$K_n(z, w) = \frac{1}{\bar{\eta}} L_n^0(z, w).$$

Fazendo $z = w = \alpha_{n+1}$, temos

$$\begin{aligned} K_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) &= \frac{1}{\bar{\eta}} L_n^0(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) = \frac{1}{\bar{\eta}} (k_{n+1}^2 - |\phi_{n+1}(\alpha_{n+1})|^2) \\ &= k_{n+1}(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) - |\phi_{n+1}(\alpha_{n+1})|^2 = k_{n+1}^2 - |\phi_{n+1}(\alpha_{n+1})|^2. \end{aligned}$$

Logo, $\eta = 1$.

Relação de recorrência para as funções ortogonais

Teorema 18. *Seja $K_n(z, w)$ o núcleo reprodutivo para $\mathcal{L}_n$. Então,*

$$\begin{pmatrix} K_{n+1}^*(z, w) \\ K_{n+1}(z, w) \end{pmatrix} = t_{n+1}(z, w) \begin{pmatrix} K_n^*(z, w) \\ K_n(z, w) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

onde o superstar conjugado é com respeito a z e a matriz t_{n+1} é dada por

$$t_{n+1}(z, w) = c \begin{pmatrix} 1 & \bar{\rho}_{n+1} \\ \rho_{n+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{n+1}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\gamma}_{n+1} \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

com

Relação de recorrência para as funções ortogonais

$$c = (1 - |\bar{\rho}_{n+1}|^2)^{-1},$$

$$\rho_{n+1} = \rho_{n+1}(w) = \overline{\phi_{n+1}(w)} / \phi_{n+1}^*(w),$$

$$\gamma_{n+1} = \gamma_{n+1}(w) = -\zeta_{n+1}(w)\rho_{n+1}(w)$$

e ϕ_{n+1} é a $(n + 1)$ -ésima função da base ortonormal.

Relação de recorrência para as funções ortogonais

Demonstração:
Claramente, temos

$$K_{n+1}(z, w) = K_n(z, w) + \phi_{n+1}(z)\overline{\phi_{n+1}(w)}. \quad (29)$$

Da relação de Christoffel-Darboux (??), concluímos que

$$\phi_{n+1}(z)\overline{\phi_{n+1}(w)} = \phi_{n+1}^*(z)\overline{\phi_{n+1}^*(w)} - (1 - \zeta_{n+1}(z)\overline{\zeta_{n+1}(w)})K_n(z, w). \quad (30)$$

Substituindo (??) em (??), obtemos

$$K_{n+1}(z, w) = \zeta_{n+1}(z)\overline{\zeta_{n+1}(w)}K_n(z, w) + \phi_{n+1}^*(z)\overline{\phi_{n+1}^*(w)}. \quad (31)$$

Relação de recorrência para as funções ortogonais

Agora, tomando o superstar conjugado com respeito a z em (??), temos

$$\phi_{n+1}^*(z) \overline{\phi_{n+1}^*(w)} \overline{\rho_{n+1}(w)} = K_{n+1}^*(z, w) - \zeta_{n+1}(z) K_n^*(z, w). \quad (32)$$

Observe que (??) segue do fato de que.

Como $K_{n+1}(z, w)$ pertence a $\mathcal{L}_{n+1}$,

Relação de recorrência para as funções ortogonais

$$\begin{aligned} K_{n+1}^*(z, w) &= B_{n+1}(z) \overline{K_{n+1}(1/\bar{z}, w)} = B_{n+1}(z) [\overline{K_{n+1}(1/\bar{z}, w)} + \overline{\phi_{n+1}(1/\bar{z})} \phi_{n+1}(w)] \\ &= \frac{B_{n+1}(z)}{B_n(z)} B_n(z) \overline{K_{n+1}(1/\bar{z}, w)} + B_{n+1}(z) \overline{\phi_{n+1}(1/\bar{z})} \phi_{n+1}(w) \\ &= \zeta_{n+1}(z) K_n^*(z, w) + \phi_{n+1}^*(z) \phi_{n+1}(w) \\ &= \zeta_{n+1}(z) K_n^*(z, w) + \phi_{n+1}^*(z) \overline{\phi_{n+1}^*(w)} \rho_{n+1}(w). \end{aligned}$$

Substituindo (??) em (??), temos

Relação de recorrência para as funções ortogonais

$$K_{n+1}(z, w)\bar{\rho}_{n+1} = \zeta_{n+1}(z)\overline{\zeta_{n+1}(w)}K_n(z, w)\bar{\rho}_{n+1} + K_{n+1}^*(z, w) - \zeta_{n+1}(z). \quad (33)$$

O superstar conjugado de (??) é dado por

$$K_{n+1}^*(z, w)\rho_{n+1} = \zeta_{n+1}(w)K_n^*(z, w)\rho_{n+1} + K_{n+1}(z, w) - K_n(z, w). \quad (34)$$

Resolvendo o sistema formado por (??) e (??) com relação a

$K_{n+1}(z, w)$ e $K_{n+1}^*(z, w)$, obtemos

Relação de recorrência para as funções ortogonais

$$\begin{aligned} K_{n+1}(z, w)(1 - |\rho_{n+1}|^2) &= (\zeta_{n+1}(z)\rho_{n+1} - \zeta_{n+1}(w)\rho_{n+1})K_n^*(z, w) \\ &\quad + (1 - \zeta_{n+1}(z)\overline{\zeta_{n+1}(w)}|\rho_{n+1}|^2)K_n(z, w), \\ K_{n+1}(z, w) &= c\{(\zeta_{n+1}(z)\rho_{n+1} + \gamma_{n+1})K_n^*(z, w) \\ &\quad + (1 + \rho_{n+1}\zeta_{n+1}(z)\overline{\gamma_{n+1}})K_n(z, w)\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} K_{n+1}^*(z, w)(1 - |\rho_{n+1}|^2) &= (\zeta_{n+1}(z) - \zeta_{n+1}(w)|\rho_{n+1}|^2)K_n^*(z, w) \\ &\quad + (\overline{\rho_{n+1}} - \zeta_{n+1}(z)\overline{\zeta_{n+1}(w)}\overline{\rho_{n+1}})K_n(z, w), \\ K_{n+1}^*(z, w) &= c\{(\zeta_{n+1}(z) + \gamma_{n+1}\overline{\rho_{n+1}})K_n^*(z, w) \\ &\quad + (\overline{\rho_{n+1}} + \zeta_{n+1}(z)\overline{\gamma_{n+1}})K_n(z, w)\}. \end{aligned}$$

Relação de recorrência para as funções ortogonais

Consideremos, agora, o núcleo normalizado que denotaremos por

$$V_n(z, w) = K_n(z, w)[K_n(w, w)]^{-1/2}. \quad (35)$$

Teorema 19. *O núcleo normalizado $V_n(z, w)$, definido em (??), satisfaz à seguinte relação:*

$$\begin{pmatrix} V_n^*(z, w) \\ V_n(z, w) \end{pmatrix} = \theta_n(z, w) \begin{pmatrix} V_{n-1}^*(z, w) \\ V_{n-1}(z, w) \end{pmatrix}, \quad (36)$$

Relação de recorrência para as funções ortogonais

onde o superstar conjugado é com respeito a z . A matriz θ_n é dada por

$$\theta_n(z, w) = c \begin{pmatrix} 1 & \overline{\rho_n} \\ \rho_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_n(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} 1 & \overline{\gamma_n} \\ \gamma_n & 1 \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} c &= (1 - |\rho_n|^2)^{-1/2} \text{ e } d = (1 - |\gamma_n|^2)^{-1/2}, \\ \rho_n &= \rho_n(w) = \overline{\phi_n(w)} / \phi_n^*(w), \\ \gamma_n &= \gamma_n(w) = -\zeta_n(w) \rho_n(w) \end{aligned}$$

e ϕ_n é a n -ésima função da base ortonormal para $\mathcal{L}_n$.

Relação para as funções ortogonais

Teorema 20. *Para as funções da base ortonormal ϕ_n pertencentes a $\mathcal{L}_n$, temos a seguinte relação:*

$$\begin{pmatrix} \phi_n(z) \\ \phi_n^*(z) \end{pmatrix} = N_n \frac{1 - \bar{\alpha}_{n-1}z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\lambda}_n \\ \lambda_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{n-1}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{n-1}(z) \\ \phi_{n-1}^*(z) \end{pmatrix}, \quad (37)$$

onde a matriz N_n é um múltiplo de uma matriz unitária, isto é,

$$N_n = e_n \begin{pmatrix} \eta_n^1 & 0 \\ 0 & \eta_n^2 \end{pmatrix}, \quad e_n > 0,$$

Relação para as funções ortogonais

com η_n^1 e $\eta_n^2 \in \mathbb{T}$. A constante η_n^1 é escolhida de tal forma que $\phi_n^*(\alpha_n) > 0$. A outra constante η_n^2 é relacionada com η_n^1 por

$$\eta_n^2 = \overline{\eta_n^1} \frac{\alpha_{n-1}}{|\alpha_{n-1}|} \frac{\overline{\alpha_n}}{\alpha_n}.$$

O parametro λ_n é dado por

$$\lambda_n = \eta \frac{\overline{\phi_n(\alpha_{n-1})}}{\phi_n^*(\alpha_{n-1})} = \eta \rho_n(\alpha_{n-1}), \text{ com } \eta = \frac{1 - \alpha_n \overline{\alpha_{n-1}}}{1 - \overline{\alpha_n} \alpha_{n-1}} \frac{\overline{\alpha_n}}{|\alpha_n|} \frac{\alpha_{n-1}}{|\alpha_{n-1}|} \in \mathbb{T}$$

e $\rho_n(w)$ é definido como no Teorema 5.2. Quando $n = 1$, temos a igualdade (??) se definirmos $\alpha_0 = 0$.

Relação para as funções ortogonais

Demonstração: Primeiro, provemos a existência de constantes c_n e d_n tais que

$$\frac{1 - \bar{\alpha}_n z}{z - \alpha_{n-1}} \phi_n - d_n \phi_{n-1} - c_n \frac{1 - \bar{\alpha}_{n-1} z}{z - \alpha_{n-1}} \phi_{n-1}^* \in \mathcal{L}_{n-2}. \quad (38)$$

Defina, como anteriormente, $\pi_k(z) = \prod_{i=1}^k (1 - \bar{\alpha}_i z)$ e $\phi_k = p_k / \pi_k$ onde p_k é um polinômio de grau no máximo k . Substituindo em (??) e utilizando o item 3.c do Teorema 3.6, temos

$$\frac{p_n - d_n(z - \alpha_{n-1})p_{n-1} - c_n(1 - \bar{\alpha}_{n-1}z)p_{n-1}^* \eta_{n-1}}{(z - \alpha_{n-1})\pi_{n-1}(z)} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

onde $\eta_k \in \mathbb{T}$ é como definido no Teorema 3.6.

Relação para as funções ortogonais

Se $(??)$ tem que pertencer a $\mathcal{L}_{n-2}$, devemos exigir que $N(\alpha_{n-1}) = N(1/\bar{\alpha}_{n-1}) = 0$ ou, equivalentemente, $N(\alpha_{n-1}) = N^*(\alpha_{n-1}) = 0$.

Para $N(\alpha_{n-1}) = 0$, temos

$$p_n - c_n(1 - |\alpha_{n-1}|^2)p_{n-1}^*\eta_{n-1} = 0,$$

ou seja,

$$c_n = \frac{p_n}{(1 - |\alpha_{n-1}|^2)p_{n-1}^*\eta_{n-1}} = \frac{\bar{\eta}_{n-1}}{1 - |\alpha_{n-1}|^2} \frac{p_n(\alpha_{n-1})}{p_{n-1}^*(\alpha_{n-1})}.$$

Relação para as funções ortogonais

Agora, utilizando a segunda condição, temos

$$N(1/\bar{\alpha}_{n-1}) = p_n - d_n \left(\frac{1 - |\alpha_{n-1}|^2}{\bar{\alpha}_{n-1}} \right) p_{n-1} = 0.$$

Logo,

$$d_n = \frac{p_n(\alpha_{n-1})\bar{\alpha}_{n-1}}{(1 - |\alpha_{n-1}|^2)p_{n-1}(\alpha_{n-1})}$$

ou

$$\bar{d}_n = \frac{1}{1 - |\alpha_{n-1}|^2} \frac{p_n(\alpha_{n-1})\bar{\alpha}_{n-1}}{p_{n-1}(\alpha_{n-1})}.$$

Relação para as funções ortogonais

Note que, pelo Teorema 3.6,

$$p_{n-1}^*(\alpha_{n-1}) = \phi_{n-1}^*(\alpha_{n-1})\pi_{n-1}(\alpha_{n-1})\bar{\eta}_{n-1} = k_{n-1}\pi_{n-1}(\alpha_{n-1})\bar{\eta}_{n-1} \neq 0.$$

Assim, podemos escrever

$$c_n = \frac{1 - \bar{\alpha}_n \alpha_{n-1}}{1 - |\alpha_{n-1}|^2} \frac{\phi_n(\alpha_{n-1})}{k_{n-1}}$$

e

$$\bar{d}_n = -\frac{1 - \bar{\alpha}_n \alpha_{n-1}}{1 - |\alpha_{n-1}|^2} \frac{\alpha_n}{|\alpha_n|} \frac{\phi_n^*(\alpha_{n-1})}{k_{n-1}}.$$

Relação para as funções ortogonais

Logo, provamos que, com as escolhas de c_n e d_n , a expressão (??) pertence a $\mathcal{L}_{n-2}$. Por outro lado, (??) é ortogonal a $\mathcal{L}_{n-2}$. Para mostrar isto, note que, para todo $k \leq n-2$, ϕ_k é ortogonal ao primeiro termo de (??), pois

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1 - \bar{\alpha}_n z}{z - \alpha_{n-1}} \phi_n, \phi_k \right\rangle &= M \left[\left(\frac{1 - \bar{\alpha}_n z}{z - \alpha_{n-1}} \phi_n \right)_* \cdot \phi_k \right] \\ &= M \left[\phi_n \cdot \frac{z - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_{n-1} z} \phi_k \right] = \left\langle \phi_{n-1}^*, \frac{z - \alpha_{n-1}}{1 - \bar{\alpha}_{n-1} z} \phi_k \right\rangle \end{aligned}$$

e esta última igualdade é zero pois o fator à direita pertence a $\mathcal{L}_{n-1}$.

Relação para as funções ortogonais

ϕ_k é trivialmente ortogonal ao segundo termo em (??).
Finalmente, ϕ_k também é ortogonal ao terceiro termo, pois

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1 - \bar{\alpha}_{n-1}z}{z - \alpha_{n-1}} \phi_{n-1}^*, \phi_k \right\rangle &= M \left[\left(\frac{1 - \bar{\alpha}_{n-1}z}{z - \alpha_{n-1}} \right)_* \cdot \phi_k \right] \\ &= M \left[\phi_{n-1}^* \cdot \frac{z - \alpha_{n-1}}{1 - \bar{\alpha}_{n-1}z} \phi_k \right] = \left\langle \phi_{n-1}^*, \frac{z - \alpha_{n-1}}{1 - \bar{\alpha}_{n-1}z} \phi_k \right\rangle. \end{aligned}$$

Como $\frac{z - \alpha_{n-1}}{1 - \bar{\alpha}_{n-1}z} \phi_k$ pertence a $\mathcal{L}_{n-1}(\alpha_{n-1})$, segue, do Teorema 3.6 item 5., que o último termo da igualdade acima é zero.

Relação para as funções ortogonais

Assim, concluímos que a expressão (??) é igual a zero.
Logo,

$$\begin{aligned}\phi_n &= d_n \frac{z - \alpha_{n-1}}{1 - \bar{\alpha}_n z} \phi_{n-1} + c_n \frac{1 - \bar{\alpha}_{n-1} z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \phi_{n-1}^* \\ &= -d_n \frac{\alpha_{n-1}}{|\alpha_{n-1}|} \frac{(1 - \bar{\alpha}_{n-1} z)}{1 - \bar{\alpha}_n z} \zeta_{n-1}(z) \phi_{n-1} + c_n \frac{1 - \bar{\alpha}_{n-1} z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \phi_{n-1}^* \\ &= -d_n \frac{\alpha_{n-1}}{|\alpha_{n-1}|} \frac{1 - \bar{\alpha}_{n-1} z}{1 - \bar{\alpha}_n z} [\zeta_{n-1}(z) \phi_{n-1} + \bar{\lambda}_n \phi_{n-1}^*],\end{aligned}\tag{39}$$

com

$$\lambda_n = -\frac{\bar{c}_n}{\bar{d}_n} \frac{\alpha_{n-1}}{|\alpha_{n-1}|}.\tag{40}$$

Relação para as funções ortogonais

Note que podemos escrever λ_n como

$$\lambda_n = \eta \frac{\overline{\phi_n(\alpha_{n-1})}}{\phi_n^*(\alpha_{n-1})} = \eta \rho_n(\alpha_{n-1}), \quad \text{com } \eta = \frac{1 - \alpha_n \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - \bar{\alpha}_n \alpha_{n-1}} \frac{\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|} \frac{\alpha_{n-1}}{|\alpha_{n-1}|} \in \mathbf{T}$$

e ρ_n como definido no Teorema 5.2.

Aplicando o superstar conjugado em (??), temos a relação para ϕ_n^* como queríamos.

Escolhendo $e_n = |d_n|$ pertencente $\mathbb{R}$, os valores de η_n^1 e η_n^2 são dados por

$$\eta_n^1 = -\frac{d_n}{|d_n|} \frac{\alpha_{n-1}}{|\alpha_{n-1}|} \quad \text{e} \quad \eta_n^2 = -\frac{\bar{d}_n}{|d_n|} \frac{\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|}.$$

Relação para as funções ortogonais

Resta mostrar a condição inicial da recorrência para $n = 1$.
Como $\phi_0 = \phi_0^* = 1$, podemos calcular

$$\phi_1(z) = e_1 \eta_1^1 \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_1 z} [z\phi_0 + \bar{\lambda}_1 \phi_0^*], \quad \text{onde } e_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \eta_1^1 \in \mathbf{T}.$$

Portanto, as constantes η_1^1 e λ_1 devem satisfazer

$$\phi_1(0) = e_1 \eta_1^1 \bar{\lambda}_1 \quad \text{e} \quad \phi_1^*(0) = -\frac{e_1 \bar{\eta}_1^1 \bar{\alpha}_1}{|\alpha_1|}.$$



Referências

1. BAERNSTEIN, A., DRASIN D., DUREN P., MARDEN A. (Eds.), *The Bieberbach Conjecture, in proceedings of the Symposium on the Ocation of the proof. Mathematical Surveys and Monographs*, editora AMS, Providence, RI, 1986.
2. BULTHEEL, A., GONZÁLEZ-VERA, P., HENDRIKSEN, E., NJÅSTAD, O., *A Szegő Theory for Rational Functions*, Technical Report TW131, Department of Computer Science, K.U. Leuven, 1990.
3. BULTHEEL, A., GONZÁLEZ-VERA, P., HENDRIKSEN, E., NJÅSTAD, O., *Orthogonal Rational Functions*, Cambridge Monographs on Aplied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, 1999.
4. CHIHARA, T.S., *An Introduction to Ortogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
5. DUREN, P.L., *The Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York, 1970.
6. GARNETT, J.B., *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.
7. HENRICI, P., *Applied and Computational Complex Analysis*, Wiley Classics Library, New York, 1991.
8. KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis with Aplications*, Wiley, Nova York, 1989.
9. NEVAI, P. (Ed.), *Orthogonal Polynomials: theory and practice*, Kluwer, Boston, 1990.

Referências

- 10 RUEL, V.C., *Variáveis Complexas e suas Aplicações*, McGraw-Hill, São Paulo, 1975.
- 11 SZEGŐ, G., *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., **23**, 4th ed., Providence, RI, 1975.
- 12 VAN ASSCHE, W., Orthogonal Polynomials in the Complex Plane and on the Real Line, in Fields Institute Communications 14: Special Functions, q -Series and Related Topics (M.E.H. Ismail et al., eds.), Amer. Math. Soc. (1997), 211-245.
- 13 WALSH, J.L., *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, United States, American Mathematical Society, 1969.