IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.002/07

Quantização de partículas com spin

Paulo Fernando Coimbra Tilles

Orientador

Nathan Jacob Berkovits

Março de 2007

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao Prof. Nathan Jacob Berkovits pela orientação e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, Fapesp, pelo apoio financeiro.

Gostaria de agradecer a todos os professores que tive neste período de aprendizagem, em especial ao Prof. Pimentel e ao Prof. Frank pelas muitas vezes em que eles me ajudaram, seja com uma discussão ou simplesmente com uma palavra amiga.

Aos amigos que fiz no IFT, tenho muito a agradecer. Todos tiveram uma importância muito grande, e acho que sem eles não teria chegado até aqui. Em especial, agradeço ao Leandro, Pazetti, Caco, Genilson, e Bufalo. Obrigado por tudo. Que a nossa amizade dure mil estações...

Mais diretamente relacionado à dissertação, agradeço (e muito) ao German, Casana e Pazetti (de novo), pois foi nas várias ”trocas de figurinhas” que eu consegui compreender o que estava fazendo, e só assim pude escrever essa dissertação.

Por último, mas não menos importante, agradeço à minha familia. Sem a educação que eles me deram, jamais teria chegado tão longe.

Resumo

Uma partícula clássica relativística é descrita utilizando-se o formalismo de Dirac para sistemas vinculados devido à invariança sob transformações de reparametrizações requerida por uma teoria explícitamente covariante. Nós introduzimos os graus de liberdade de spin via variáveis de Grassman, que levam diretamente ao conceito de supersimetria presente na teoria. As equações de movimento e a quantização são consideradas tanto para as teorias livres de spin 0 e 1/2, como para a teoria com interação eletromagnética. A álgebra dos vínculos de primeira classe é extendida para descrever partículas de spin N/2, que incluem as representações de spin 1. A teoria quântica obtida é comparada com a teoria clássica de campos.

Palavras Chaves: Partículas relativísticas com spin; sistemas vinculados; quantização.

Áreas do conhecimento: Física de partículas e campos.

Abstract

A classical relativistic particle is described by means of Dirac's formalism for constrained systems, where the constraints come from the reparametrization invariance required by an explicitly covariant theory. We introduce spin degrees of freedom via Grassman variables, which leads directly to the concept of supersymmetry in the theory. The equations of motion and quantization are considered both for the spin 0 and 1/2 free theories, and for the eletromagnetic interaction. The first class constraints algebra is extended to describe spin N/2 particles, which include spin 1 representations. The quantum theory obtained is compared to the classical theory of fields.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Os modelos clássicos e pseudo-clássicos de partículas relativísticas vêm sendo estudados nos últimos 30 anos devido à sua relação com algumas teorias modernas em física, como supersimetria, (super)cordas e (super)gravidade. Dentre elas, podemos citar: a descrição de cordas relativísticas [21], considerando a ampliação do elemento de linha para uma folha de mundo bidimensional, sendo uma extensão natural da lagrangiana de uma partícula livre; a interação de supergravidade com supermatéria descrita pela lagrangiana de uma partícula massiva de spin 1/2 [22]. Assim, uma das razões para se estudar esses modelos reside na possibilidade de se aprender novas formas de solucionar os problemas encontrados na física contemporânea, visto que neste contexto eles aparecem bem mais simplificados. Uma outra justificativa, não menos importante, reside em analisar a possibilidade de, a partir de um modelo clássico de partículas relativísticas, obter via quantização a dinâmica de uma teoria clássica de campo, para qualquer spin considerado.

Neste trabalho estamos justamente interessados nessa relação entre os modelos quantizados de partículas relativísticas [1],[2] e o formalismo de teoria de campos. Formulamos a teoria clássica a partir de uma invariança sob transformações de reparametrização, requerida para a descrição covariante da dinâmica clássica [6], e utilizamos o formalismo de Dirac [5] de sistemas vinculados para obter a teoria quantizada. O conceito de supersimetria surge naturalmente ao considerar as invarianças de gauge dos modelos [8],[10]. Ele conecta as variáveis fermiônicas, usadas para a descrição do spin "clássico" [8]-[10] e para o acoplamento da massa ao gerador de supersimetria [9], e as bosônicas, que descrevem a dinâmica da partícula em um espaço-tempo de Minkowski. A análise dos modelos sob interação eletromagnética também é realizada [8]-[12], onde obtemos para o caso de spin 1/2 correções para a força de Lorentz e o valor correto para o fator giromagnético.

Quando extendemos a álgebra dos vínculos de primeira classe, presentes no modelo de spin 1/2 não massivo, para descrever N transformações de supersimetria [14], e adicionamos um gerador de transformações no grupo O(N) [15], vemos que as teorias quantizadas fornecem a descrição de partículas com spin N/2, conforme a construção de Bargmann-Wigner [16]. Na inserção da massa [18],[19], vemos que surge uma equação algébrica de difícil interpretação, mas que não impede a obtenção de uma teoria quântica consistente para partículas de spin 1 [17].

Uma vez analisados o regime clássico e o processo de quantização, nós comparamos os resultados obtidos com a dinâmica dos campos clássicos de spin 0, 1/2 e 1, e concluímos que, pelo menos para esses três casos, a quantização reproduz a dinâmica das teorias de campo.

A organização desse trabalho segue a metodologia: no capítulo 2 consideramos a descrição clássica de uma partícula livre, analisando as propriedades que o formalismo deve apresentar; no capítulo 3 construímos a ação para descrever uma partícula livre, inserindo variáveis de Grassman para descrever os graus de liberdade de spin 1/2, e mostramos como a fixação de gauge é obtida para que as equações de movimento sejam descritas no referencial do tempo próprio; no capítulo 4 realizamos a quantização dos modelos livres, construindo os parênteses de Dirac com os vínculos de segunda classe e a obtendo a dinâmica quântica através da atuação dos vínculos de primeira classe nos estados físicos; no capítulo 5 consideramos a interação eletromagnética com um campo de fundo, analisando a influência do acoplamento do spin nas equações de movimento, e obtemos a descrição quântica da teoria; no capítulo 6 extendemos a álgebra dos vínculos para obter a descrição de uma partícula de spin arbitrário, onde considerando o caso de spin 1, obtemos no processo de quantização as equações de Maxwell e Proca satisfeitas pelos estados do sistema; no capítulo 7 comparamos os resultados obtidos na quantização dos modelos com os campos clássicos de spin 0, 1/2 e 1; e por fim, no capítulo 8 nós fornecemos as conclusões obtidas ao longo do trabalho e finalizamos com as perspectivas futuras.

A disposição das referências se encontra na ordem em que elas aparecem no texto, e no caso de mais de uma referência para o mesmo tema, tentamos organizá-las de forma que as primeiras apresentem um caráter mais introdutório, seguido das que exigem um maior aprofundamento dos conceitos.

Em todo o trabalho utilizamos a notação de "soma" quando aparecerem índices repetidos, e unidades tais que $c = \hbar = 1$.

Capítulo 2

Dinâmica Clássica de Partículas Relativísticas

Neste capítulo inicial mostraremos o formalismo necessario para se descrever uma partícula relativística, que utilizaremos no decorrer do trabalho. Começamos mostrando como, a partir de objetos invariantes de Lorentz, aparece a necessidade de se exigir que a ação seja invariante sob transformações de reparametrização [1,2]. Na sequência introduzimos os formalismos lagrangiano e hamiltoniano [3,4] e vemos como a relação entre a arbitrariedade na parametrização e a covariança relativística [6,7] requer o tratamento de Dirac para sistemas vinculados [5-8].

2.1 Descrição Relativística

A trajetória de uma partícula livre em um espaço-tempo de Minkowski é descrito pelo 4-vetor posição $x^\mu(\tau)$, que descreve as coordenadas dos pontos da trajetória como função do parâmetro τ. Ele deve ser uma função unívoca e ao menos duas vezes diferenciável com relação ao parâmetro τ, que por sua vez deve satisfazer a condição de ser monótona ao longo da trajetória.

Em um espaço tempo, o quadrado da distância entre dois pontos próximos em uma trajetória descrita por uma partícula é definido como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu, \tag{2.1}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico que caracteriza o espaço-tempo onde a trajetória é realizada. Para o caso em questão, temos o espaço-tempo de Minkowski definido por $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Assim, o comprimento da curva entre dois pontos com coordenadas $x^\mu(\tau_1)$ e $x^\mu(\tau_2)$ é

$$s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}. \tag{2.2}$$

É possível observar a partir da definição do comprimento que ele é independente do sistema de coordenadas utilizado como referência e da parametrização utilizada, pois

$$s=\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau' \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx'^{\mu}}{d\tau'}\frac{dx'^{\nu}}{d\tau'}}=\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau' \sqrt{\left(\frac{d\tau}{d\tau'}\right)^2 \eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}}=\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}}. \tag{2.3}$$

O significado físico da distância entre dois pontos próximos (2.1) pode ser visualizado na escolha de um sistema de coordenadas em que a partícula encontra-se em repouso ($d\mathbf{x}=\mathbf{0}$), onde ds^2 reduz-se a

$$ds^2 = dx_0^2 = dt^2, \tag{2.4}$$

ou seja, nesse referencial s é essencialmente o tempo próprio.

Como s é um parâmetro invariante, é possível escolhê-lo como o parâmetro de dependência funcional da posição [2], $x^{\mu}(s)$, e definir os 4-vetores velocidade e aceleração na forma

$$\dot{x}^{\mu}(s)=\frac{d}{ds}x^{\mu}(s), \quad \ddot{x}^{\mu}(s)=\frac{d^2}{ds^2}x^{\mu}(s). \tag{2.5}$$

Sob essa definição, as componentes da velocidade não são independentes, sendo um vetor do tipo tempo,

$$\dot{x}^{\mu}(s)\,\dot{x}_{\mu}(s)=1, \tag{2.6}$$

ortogonal à aceleração

$$\ddot{x}^{\mu}(s)\,\dot{x}_{\mu}(s)=0. \tag{2.7}$$

Com as definições (2.6) e (2.7) de velocidade e aceleração, é possível construir um formalismo para descrever a dinâmica de uma partícula relativística, generalizando os métodos utilizados em mecânica clássica, baseados no princípio de minimização da ação, para obter as equações de movimento via formalismos de Lagrange e Hamilton.

Utilizando o parâmetro invariante s, o princípio de mínima ação pode ser formulado baseado na existência de um funcional de $L\left[x^{\mu}(s), \dot{x}^{\mu}(s), s\right]$, lagrangiana do sistema, tal que a trajetória real (física) $x^{\mu}(s)$ torna a ação integral

$$S=\int_{s_1}^{s_2} L\left[x^{\mu}(s), \dot{x}^{\mu}(s), s\right] ds \tag{2.8}$$

um extremo. Mais precisamente, para o movimento real entre s_1 e s_2, a variação da ação deve ser nula:

$$\delta S=\delta\int_{s_1}^{s_2} L\left[x^{\mu}(s), \dot{x}^{\mu}(s), s\right] ds=0. \tag{2.9}$$

Essa variação é definida de forma que os pontos extremos $x^{\mu}(s_1)$ e $x^{\mu}(s_2)$ sejam fixos, e que satisfaçam a condição de contorno

$$\delta x^{\mu}(s_1)=\delta x^{\mu}(s_2)=0. \tag{2.10}$$

Porém, não é possível realizar formalmente a variação devido a condição (2.6), que restringe as variações. Uma forma possível de se resolver esse problema seria a implementação dessa condição na lagrangiana sob a forma de um vínculo do sistema, usando-se um multiplicador de Lagrange. Mas também podemos optar por outra forma, introduzindo um parâmetro invariante arbitrário τ, de forma a reescrever a ação na forma

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left[x^{\mu}(\tau), \dot{x}^{\mu}(\tau), \tau\right] d\tau. \tag{2.11}$$

Tal parâmetro não se refere a uma escolha particular $\tau(s)$, mas sim a qualquer parâmetro possível. Sob essas condições, a arbitrariedade do parâmetro τ exige que a teoria construída independa da sua escolha, i.e., seja invariante sob um conjunto de transformações que altere a parametrização utilizada. No contexto de teorias relativísticas, a invariança sob reparametrizações é de importância fundamental (ela garante a covariança relativística), e por isso será discutida mais a frente na seção 2.6, visto que é necessário um conhecimento prévio dos formalismos lagrangiano e hamiltoniano.

2.2 Formalismos lagrangiano e hamiltoniano

Vamos começar a análise dos formalismos lagrangiano e hamiltoniano totalmente baseada no contexto de mecânica clássica, onde as grandezas construídas não são explicitamente invariantes de Lorentz (e não necessariamente também), visto que a passagem para a formulação relativística pode ser feita diretamente, sem muitas complicações.

Como dito anteriormente, a dinâmica da teoria está inteiramente contida na ação [3],[4],

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q^k, \dot{q}^k, t\right) dt, \tag{2.12}$$

onde $L\left(q^k, \dot{q}^k, t\right)$ é a função lagrangiana do sistema, q^k e $\dot{q}^k$ são as coordenadas e velocidades generalizadas, e t é o parâmetro utilizado como argumento geral da dinâmica, usualmente tomado como o tempo. O índice romano $k = 1, ..., N$ refere-se a cada um dos N graus de liberdade. A lagrangiana é dita regular se o determinante da matriz hessiana, definida como

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \tag{2.13}$$

for diferente de zero. No caso em que o determinante for zero, a lagrangiana é dita singular. Nessa análise inicial, o enfoque será somente em sistemas regulares, visto que o tratamento para casos singulares requer uma generalização do procedimento aqui apresentado, e que será tratado na próxima seção.

A ação é um funcional de coordenadas q^k, sendo que as trajetórias clássicas do sistema são obtidas como pontos estacionários do parâmetro t. A condição necessária para que tais trajetórias existam é que a variação da ação seja igual à zero. Uma vez satisfeita essa condição, as equações de movimento obtidas da variação da ação são:

$$L_k = \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) = 0. \tag{2.14}$$

Essas são as equações de Euler-Lagrange. A variação é feita mantendo os pontos inicial e final fixos, i.e., requerindo que sejam satisfeitas as condições de contorno

$$\delta q^k\left(t_1\right) = \delta q^k\left(t_2\right) = 0. \tag{2.15}$$

No caso regular, todas as equações são de segunda ordem e funcionalmente independentes. Uma vez fixadas $2N$ constantes de integração, as soluções obtidas são unívocas. Tendo em vista somente a obtenção de equações de movimento que descrevam o sistema, então este é o cerne do formalismo lagrangiano.

A passagem para o formalismo hamiltoniano é realizada partindo do formalismo lagrangiano [3],[4], considerando a diferencial

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t}dt + \frac{\partial L}{\partial q^k}dq^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}d\dot{q}^k = \frac{\partial L}{\partial t}dt + \frac{\partial L}{\partial q^k}dq^k + d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k\right) - \dot{q}^k d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right). \tag{2.16}$$

e reescrevendo-a na forma

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}dt - \frac{\partial L}{\partial q^k}dq^k + \dot{q}^k d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right). \tag{2.17}$$

Assim é possível definir as quantidades

$$H = p_k\dot{q}^k - L, \qquad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}, \tag{2.18}$$

como a função hamiltoniana H, e os momentos conjugados às coordenadas, p_k, e reescrever (2.17) na forma

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t}dt - \frac{\partial L}{\partial q^k}dq^k + \dot{q}^k dp_k. \tag{2.19}$$

Sob essa construção, a nova função obtida, a hamiltoniana, é uma função das variáveis (q, p, t). É importante observar que somente no caso regular as equações de definição dos momentos podem ser resolvidas univocamente, i.e., realizar a troca

$(q, \dot{q}, t) \rightarrow (q, p, t)$ entre os conjuntos de variáveis. Essa constatação vem da análise do jacobiano da transformação:

$$\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} = W_{ik}, \tag{2.20}$$

ou seja, a singularidade da matriz hessiana implica na singularidade do jacobiano da transformação.

Comparando a equação (2.19) com a diferencial da hamiltoniana $H(q, p, t)$,

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \tag{2.21}$$

obtemos a seguinte expressão:

$$\left(\dot{q}^k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right) dp_k - \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} + \frac{\partial H}{\partial q^k}\right) dq^k - \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t}\right) dt = 0. \tag{2.22}$$

Como as coordenadas e os momentos são independentes, essa igualdade só será satisfeita se as seguintes relações forem verdadeiras:

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q^k} = -\frac{\partial H}{\partial q^k}, \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{2.23}$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange (2.14) e (2.23), obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) = \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}. \tag{2.24}$$

De (2.23) e (2.24) nós obtemos um conjunto de equações para q^k e p_k que fornecem as equações de movimento de Hamilton,

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}. \tag{2.25}$$

Essas equações também podem ser obtidas da ação funcional, utilizando a definição da hamiltoniana presente em (2.18) no lugar da lagrangiana, na forma

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ p_k \dot{q}^k - H \right\} dt, \tag{2.26}$$

onde agora a variação e minimização da ação devem ser realizadas com respeito às variáveis (q, p).

Assim, o cerne da formulação hamiltoniana consiste na passagem da função lagrangiana para a hamiltoniana, onde o conjunto de variáveis $(q, \dot{q}, t)$ é trocado pelo conjunto (q, p, t), e as equações de movimento são obtidas via minimização da ação (2.26). As duas formulações são totalmente equivalentes, ie., levam às mesmas equações de movimento.

Resta ainda ressaltar uma importante ferramenta presente no formalismo hamiltoniano, que são os parênteses de Poisson, definidos como

$$\{A,B\} = \frac{\partial A}{\partial q^k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q^k}. \tag{2.27}$$

Eles são utilizados para descrever a evolução temporal de qualquer função arbitrária é $F(q,p,t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(q,p,t) &= \frac{\partial F}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial q^k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q^k} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

além de permitirem, via princípio de correspondência, um contato direto entre as teorias clássicas e quânticas. A sua aplicação nesse texto será extensa, por isso eles já estão sendo apresentados.

A extensão para uma formulação explicitamente relativística é uma generalização da ação (2.11) [2],

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left[x^\mu(\tau), \dot{x}^\mu(\tau), \tau\right] d\tau, \tag{2.29}$$

onde agora a lagrangiana é função de x^μ, $\dot{x}^\mu$ e do parâmetro τ, este assumindo um carater completamente arbitrário, como em (2.12). A aplicação do princípio variacional, sob a condição de contorno

$$\delta x^\mu(\tau_1) = \delta x^\mu(\tau_2) = 0, \tag{2.30}$$

leva às equações de movimento

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0. \tag{2.31}$$

A passagem para o formalismo hamiltoniano é realizada a partir da definição do momento conjugado à x^μ,

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}, \tag{2.32}$$

e da construção da hamiltoniana semelhante à equação (2.18),

$$H = \dot{x}^\mu p_\mu - L. \tag{2.33}$$

Porém, nesse ponto surge um problema com o formalismo: a hamiltoniana assim definida é identicamente igual à zero, pois a lagrangiana deve ser homogênea de primeira ordem, o que anula o lado direito da expressão (2.33). Essa "indefinição" da hamiltoniana está relacionada ao fato da descrição relativística já conter vínculos na própria estrutura, sendo que a dinâmica hamiltoniana só pode ser tratada utilizando-se a estrutura de sistemas vinculados. Os detalhes desse problema serão discutidos nas próximas seções.

2.3 Formalismo hamiltoniano para sistemas singulares

Como dito anteriormente, um sistema é caracterizado como singular quando o determinante da matriz hessiana é nulo [5]-[7], i.e.,

$$\det |W_{ij}| = \det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right| = 0. \tag{2.34}$$

A nulidade do determinante reflete o fato de os momentos conjugados não poderem ser invertidos de forma a expressar as velocidades univocamente em termos destes. Consequentemente, existem relações funcionais conectando as coordenadas e os momentos do tipo

$$\phi_m (q, p) = 0. \tag{2.35}$$

A existência dessas relações indica que nem todas as variáveis dinâmicas da teoria são independentes entre si, e se M é o posto da matriz W, existem $N - M$ relações dessa forma, portanto $m = 1, ..., N - M$. Tais relações são denominadas vínculos primários do formalismo hamiltoniano.

Embora existam $N - M$ velocidades que não podem ser escritas em termos de (q, p), a hamiltoniana canônica H_c pode ser escrita em termos das variáveis que cujos momentos são definidos, ou seja,

$$H_c = p_i \dot{q}^i - L \tag{2.36}$$

para todo $\dot{q}^i (q, p)$. Mas ela não é univocamente determinada, pois pode-se adicionar a ela qualquer combinação linear dos vínculos (iguais a zero), e obter a hamiltoniana primária

$$H_p = H_c + u_m \phi^m, \tag{2.37}$$

onde $u_m = u_m (q, p, t)$ são funções arbitrárias. Assim construídas, H_c e H_p são indistinguíveis perante a teoria.

As equações de movimento são obtidas através do método geral do cálculo de variações, fornecendo

$$\dot{q}^i = \left\{ q^i, H_c \right\} + u_m \left\{ q^i, \phi^m \right\}, \qquad \dot{p}^i = \left\{ p^i, H_c \right\} + u_m \left\{ p^i, \phi^m \right\}. \tag{2.38}$$

Mas é importante observar que os vínculos ϕ^m podem ter parênteses de Poisson não nulo com alguma variável dinâmica. Dessa forma, todos os parênteses de Poisson devem ser efetuados antes da utilização das equações de vínculos. Para assegurar que isso sempre ocorra, é necessário introduzir a noção de igualdade fraca, denotada pelo símbolo "$\approx$", na definição dos vínculos:

$$\phi_m (q, p) \approx 0. \tag{2.39}$$

Com essa notação, as equações de movimento passam a ser escritas na forma

$$\dot{F}(q,p) = \{F, H_p\} \approx \{F, H_c\} + u_m \{F, \phi^m\}. \tag{2.40}$$

A existência de vínculos reflete o fato de existirem restrições à evolução temporal do sistema, visto que as variáveis dinâmicas devem evoluir mantendo fixas as relações entre as que forem mutuamente dependentes, ou seja, os vínculos. Assim, é necessário impor que os vínculos permaneçam constantes no decorrer do tempo:

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H_c\} + u_n \{\phi_m, \phi^n\} \approx 0 \tag{2.41}$$

Essas são as chamadas condições de consistência dos vínculos. Elas podem se reduzir a relações independentes de u_m ou impor restrições nos mesmos. No primeiro caso, as relações entre as variáveis canônicas são independentes dos vínculos primários, dando origem a vínculos adicionais, chamados de vínculos secundários. Neste caso devemos repetir o processo (2.41) até que todas as condições de consistência sejam satisfeitas. Ao final temos um conjunto total de J vínculos, entre eles primários e secundários.

Quando as equações são satisfeitas mediante restrições nos multiplicadores de Lagrange u_m, elas aparecem na forma

$$\{\phi_j, H_c\} + u_m \{\phi_j, \phi^m\} \approx 0, \qquad j = 1, ..., J. \tag{2.42}$$

Como u_m são variáveis arbitrárias, então existe um número de equações lineares não homogêneas com coeficientes que são funções de (q,p) cuja solução geral é

$$u_m = U_m(q,p) + v_a V_m^a(q,p), \tag{2.43}$$

onde $U_m(q,p)$ é uma solução particular, $V_m^a(q,p)$ com $a = 1, ..., A$, é o conjunto de soluções do problema homogêneo associado

$$V_m^a(q,p)\{\phi_j, \phi^m\} = 0, \tag{2.44}$$

e v_a são funções arbitrárias do tempo. Substituindo a equação para u_m na hamiltoniana primária, obtemos

$$H_p = H_c + U_m\phi^m + v_a V_m^a \phi^m = H_c + U_m\phi^m + v_a\phi^a, \tag{2.45}$$

onde $\phi^a = V_m^a\phi^m$. Com essa análise, todos os requerimentos de consistência da teoria são satisfeitos, mas ainda existem coeficientes arbitrários dependentes do tempo. Como consequência, o comportamento das variáveis dinâmicas em tempos futuros não é completamente determinado pelas condições iniciais.

No caso mais geral, temos uma teoria com vínculos primários e secundários, mas a distinção entre esses não é essencial. Mais importante, na terminologia de Dirac, é a classificação em vínculos de primeira e de segunda classe. Um vínculo é dito de primeira classe se ele apresentar parênteses de Poisson com qualquer outro vínculo fracamente igual a zero, i.e., se ϕ_i é de primeira classe, então

$$\{\phi_i, \phi_m\} \approx 0. \tag{2.46}$$

No caso de pelo menos um dos parênteses de Poisson com outros vínculos for diferente de zero, tal vínculo é dito de segunda classe.

Se nenhuma distinção é feita entre os vínculos primários e secundários, então é possível estender a hamiltoniana de forma a englobar todos os vínculos,

$$H_E = H_p + v_b' \phi^b, \tag{2.47}$$

com $b = 1, ..., B$, sendo B o número de vínculos secundários de primeira classe e H_E chamada de hamiltoniana estendida. Ambas as hamiltonianas (H_E e H_p) geram a mesma evolução para os observáveis da teoria. A existência de vínculos de primeira classe no formalismo implica na existência de estados não univocamente determinados, mas fisicamente indistinguíveis. Em outras palavras, existem transformações conectando as variáveis dinâmicas da teoria que alteram o estado do sistema, mas mantêm os observáveis invariantes. Tais tipos de transformações são conhecidas como transformações de gauge, e serão detalhadas na seção seguinte, juntamente com seu aspecto físico.

Diferentemente dos vínculos de primeira classe, a existência de vínculos de segunda classe na teoria significa que existem graus de liberdade excedentes. Esses vínculos são eliminados da teoria com a introdução dos parênteses de Dirac,

$$\{A, B\}_D \equiv \{A, B\} - \{A, \phi_r\} C_{rs}^{-1} \{\phi_s, B\}, \tag{2.48}$$

onde ϕ_r são os vínculos de segunda classe ($r = 1, ..., L$) e $C_{rs} = \{\phi_r, \phi_s\}$. Dirac mostrou que a matriz C_{rs} é necessariamente não singular [5]. No cálculo dos parênteses de Dirac entre um vínculo de segunda classe e uma variável dinâmica da teoria, temos

$$\begin{aligned} \{\phi_{r'}, A\}_D &\equiv \{\phi_{r'}, A\} - \{\phi_{r'}, \phi_r\} C_{rs}^{-1} \{\phi_s, A\} = \{\phi_{r'}, A\} - C_{r'r} C_{rs}^{-1} \{\phi_s, A\} \\ &= \{\phi_{r'}, A\} - \delta_{r's} \{\phi_s, A\} = 0. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Isso implica que os vínculos de segunda classe podem ser tomados fortemente iguais a zero. Dessa forma são eliminadas L variáveis canônicas da teoria, restando $2N - L$ que são conectadas pelos vínculos de primeira classe.

2.4 Transformações de gauge

Vamos retomar agora a discussão com respeito à existência de vínculos de primeira classe na teoria, e analisar as consequências físicas disso. Eles aparecem na hamiltoniana extendida H_E acoplados com coeficientes v_a que são completamente arbitrários. Na determinação da evolução temporal de qualquer função das variáveis dinâmicas, a equação de movimento assume a forma [7]

$$\dot{F}(q,p) = \{F, H_E\}, \tag{2.50}$$

carregando na sua determinação os coeficientes v_a. Isso significa que um estado, definido a partir de uma função $F(q,p)$, não pode ser univocamente determinado em um tempo posterior a partir de condições iniciais impostas nas variáveis dinâmicas. Então existe um conjunto de variáveis (q,p) que correspondem ao mesmo estado físico, i.e., são fisicamente equivalentes, e definem uma classe de equivalência.

É importante procurar uma transformação que conecte os pontos de uma mesma classe de equivalência, o que se resume em encontrar os geradores para tais transformações. Para tal, é necessário considerar a evolução temporal de uma função das variáveis dinâmicas em um curto espaço de tempo:

$$F(\Delta t) \cong F_0 + \dot{F}\Delta t = F_0 + \{F, H_p\}\Delta t + v^a \{F, \phi_a\}\Delta t. \tag{2.51}$$

Como os coeficientes são arbitrários, é possível escrever

$$F'(\Delta t) = F_0 + \{F, H_p\}\Delta t + v'^a \{F, \phi_a\}\Delta t. \tag{2.52}$$

Dessa forma

$$\delta F(\Delta t) = F(\Delta t) - F'(\Delta t) = (v^a - v'^a)\{F, \phi_a\}\Delta t = \varepsilon^a \{F, \phi_a\}.$$

A partir desse resultado é possível concluir que os vínculos de primeira classe atuam como geradores de transformações canônicas conectando os pontos de uma classe de equivalência, gerando transformações em (q,p) que não alteram o estado físico. Esse tipo de transformação é conhecido como transformação de gauge. Consequentemente, os observáveis físicos não devem depender do elemento escolhido dentro de uma mesma classe de equivalência, i.e., devem ser invariantes sob transformações de gauge.

2.5 Teorias invariantes por reparametrizações

Por definição, a ação é invariante por transformações de reparametrização se a lagrangiana satisfizer a condição [8]

$$L[q(\tau), \dot{q}(\tau)] = \frac{d\tau'}{d\tau} L[q(\tau'), \dot{q}(\tau')]. \tag{2.54}$$

Tal condição só é satisfeita se a lagrangiana for uma função homogênea de primeira ordem nas derivadas, i.e.,

$$\dot{q}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = L. \tag{2.55}$$

Essa é a razão pela qual a hamiltoniana "relativística" definida em (2.33) é nula.

Considerando a transformação infinitesimal do parâmetro τ na forma

$$\delta\tau = \varepsilon\zeta\left(\tau\right), \tag{2.56}$$

temos as transformações para as variáveis

$$\delta q^k = \varepsilon\zeta\left(\tau\right)\dot{q}^k, \qquad \delta\dot{q}^k = \frac{d}{d\tau}\left(\delta q^k\right) = \varepsilon\dot{\zeta}\left(\tau\right)\dot{q}^k + \varepsilon\zeta\left(\tau\right)\ddot{q}^k. \tag{2.57}$$

Para que a teoria seja invariante por reparametrizações, é suficiente impor que a lagrangiana se transforme como uma derivada total sob as transformações infinitesimais:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta\dot{q}^k = \varepsilon\frac{d}{d\tau}\left(\zeta\varphi\right), \tag{2.58}$$

onde φ é uma função de q e $\dot{q}$. Substituindo (2.57) em (2.58), temos

$$\zeta\left(\tau\right)\left(\frac{\partial L}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\ddot{q}^k\right) + \dot{\zeta}\left(\tau\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k = \dot{\zeta}\left(\tau\right)\varphi + \zeta\left(\tau\right)\dot{\varphi}. \tag{2.59}$$

Como $\zeta\left(\tau\right)$ é uma função arbitrária, $\zeta\left(\tau\right)$ e $\dot{\zeta}\left(\tau\right)$ são independentes, e portanto

$$\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\ddot{q}^k. \tag{2.60}$$

Derivando a primeira equação em (2.60) e substituindo na segunda, encontramos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^m}\dot{q}^k\ddot{q}^m + \dot{q}^m\frac{\partial}{\partial q^m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k - L\right) = 0. \tag{2.61}$$

Assim

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^m}\dot{q}^k = 0, \tag{2.62}$$

de onde se conclui que a lagrangiana é singular e que o sistema necessariamente contém vínculos, e

$$\dot{q}^m\frac{\partial}{\partial q^m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k - L\right) = 0. \tag{2.63}$$

Como o termo dentro dos parênteses não depende das velocidades nem das coordenadas, resulta que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k = L, \tag{2.64}$$

ou seja, a lagrangiana é homogênea nas velocidades e a ação é invariante por reparametrizações.

Até aqui só descrevemos a estrutura da teoria, mas não consideramos a importância dela, que se mostra fundamental no formalismo hamiltoniano. Neste a descrição não é manifestamente invariante relativístico (ou covariante) devido à escolha de um observador na fixação da variável temporal [6]. Para compreender melhor o que queremos dizer, consideremos dois observadores, utilizando dois tempos diferentes t_1 e t_2 para a evolução temporal de uma função F das variáveis dinâmicas. A equação de movimento de Hamilton é escrita na forma

$$\frac{dF}{dt_n} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t_n}, \qquad n = 1, 2. \tag{2.65}$$

Se considerarmos $t_2 = t_2(t_1)$, então a equação de movimento para o observador 1 pode ser escrita como

$$\frac{dF}{dt_1} = \frac{dt_2}{dt_1}\{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t_1}. \tag{2.66}$$

Comparando as duas equações, é possível observar que elas são compatíveis somente no caso em que $\{F, H\} = 0$. A única maneira dessa condição ser aceitável é se $H = 0$, o que para um sistema com vários (porém finito) graus de liberdade, implica em

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\dot{q}^n - L = 0. \tag{2.67}$$

A priori, o fato da hamiltoniana ser nula não permite que exista dinâmica na teoria, mas essa condição pode ser mudada se exigirmos que a hamiltoniana seja fracamente igual à zero, ou seja, se permitirmos que a teoria contenha vínculos.

Como sabemos que teorias relativísticas necessariamente contêm vínculos, o problema passa a ser como construir uma formulação hamiltoniana que seja covariante [8]. Para isso, consideremos a evolução temporal de um vínculo ϕ nas variáveis canônicas (x^μ, p_μ):

$$\dot{\phi}(x, p) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}\dot{x}^\mu + \frac{\partial \phi}{\partial p_\mu}\dot{p}_\mu = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \phi}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_\nu}{\partial x^\mu}\right)\dot{x}^\mu + \frac{\partial \phi}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_\nu}{\partial \dot{x}^\mu}\ddot{x}^\mu = 0. \tag{2.68}$$

Dessa equação obtemos as condições

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \phi}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_\nu}{\partial x^\mu} = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = 0. \tag{2.69}$$

Se reescrevermos a última equação na forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial p_\nu}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu} = \frac{\partial \phi}{\partial p_\nu}W_{\mu\nu} = 0, \tag{2.70}$$

e reconhecermos que o único auto-vetor nulo de $W_{\mu\nu}$ é $\dot{x}^\mu$ [6], é possível concluir que

$$\dot{x}^\mu = N(\tau)\frac{\partial\phi}{\partial p_\mu}, \tag{2.71}$$

onde $N(\tau)$ é uma função arbitrária do parâmetro τ. Inserindo esse resultado em (2.69), temos

$$N\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} + \dot{x}^\nu\frac{\partial p_\nu}{\partial x^\mu} = N\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} + \dot{x}^\nu\frac{\partial^2 L}{\partial x^\mu\partial\dot{x}^\nu} = 0. \tag{2.72}$$

Do segundo termo de (2.72) obtemos

$$\dot{x}^\nu\frac{\partial^2 L}{\partial x^\mu\partial\dot{x}^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\nu}\dot{x}^\nu\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu}\right) = \dot{p}_\mu, \tag{2.73}$$

que substituído novamente em (2.72) fornece

$$\dot{p}_\mu = -N(\tau)\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}. \tag{2.74}$$

Como resultado final temos o conjunto de equações

$$\dot{x}^\mu = N(\tau)\frac{\partial\phi}{\partial p_\mu}, \qquad \dot{p}_\mu = -N(\tau)\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}, \tag{2.75}$$

que são reconhecidas como as equações de Hamilton para uma hamiltoniana com a cara

$$H = N(\tau)\,\phi(x,p). \tag{2.76}$$

Se nós analisarmos essa expressão da hamiltoniana com o formalismo de sistema singulares discutido na seção 2.3, podemos concluir que a dinâmica de um sistema invariante por transformações de reparametrização é gerada pelos vínculos da teoria. Essa conclusão será muito importante nos próximos capítulos, pois será a partir dela que construiremos grande parte da teoria para descrever partículas com spin.

Capítulo 3

Partículas Clássicas Relativísticas

Com o formalismo discutido no capítulo anterior, construímos a ação que descreve uma partícula livre de spin 0 [1,2], e mostramos como a inserção de um campo auxiliar permite a descrição de partículas não massivas [8,9]. Na sequência introduzimos variáveis de Grassmann [6-8] para descrever os graus de liberdade de spin, e a partir da análise da equação de Dirac construímos a ação para descrever uma partícula relativística de spin 1/2 [6-10].

3.1 Partícula Livre

O comprimento de arco definido na expressão (2.2) é o candidato natural para formar a ação integral associada à partícula livre, visto que ele é o invariante de Lorentz mais simples que pode ser contruído. Sob essa hipótese, podemos escrever o primeiro modelo da ação na forma [8]

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}^2}. \tag{3.1}$$

As equações de movimento obtidas dessa ação via princípio variacional são (equações de Euler-Lagrange)

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}}\right) = 0. \tag{3.2}$$

Só que essas equações não têm a forma que se espera para as equações de movimento de uma partícula livre, que deveriam expressar o fato da aceleração da partícula ser nula. Mas, tomando-se o parâmetro τ como o comprimento de arco, temos

$$\dot{x}^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1, \tag{3.3}$$

conforme equação (2.6). Assim a equação de movimento (3.2) assume a forma desejada

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = \ddot{x}^\mu = 0. \tag{3.4}$$

A escolha (3.3) corresponde a tomar o parâmetro τ como tempo próprio (válido para $m \neq 0$).

Embora a ação (3.1) possa descrever uma partícula livre, visto que ela leva às equações de movimento esperadas sob a escolha do tempo próprio, ela não apresenta nenhum parâmetro que possa ser relacionado com uma partícula física, passível de ser medida. Para contornar esse problema, vamos reescrever a ação na forma (no tempo próprio) [1]

$$S = \int_{s_1}^{s_2} \alpha ds = \int_{x_0(s_1)}^{x_0(s_2)} \alpha \sqrt{1 - \mathbf{v^2}} dt, \tag{3.5}$$

onde a constante multiplicativa α é o parâmetro que precisa ser determinado. Na expressão acima, observa-se que o tempo próprio é sempre menor que o tempo medido em um referencial fixo. O tempo indicado por um relógio é igual a integral do intervalo ds, estendida sobre a linha de universo da partícula. Quando em repouso, a integral se estende sobre uma reta paralela ao eixo temporal; em movimento, a trajetória é uma curva conectando os pontos inicial e final. Consequentemente, a integral sobre o intervalo ds entre dois pontos s_1 e s_2 atinge seu valor máximo quando estendida ao longo de uma reta ligando os pontos. Para tornar a integral tão pequena quanto se queira, é necessário realizar a integração através de uma linha de universo curva. Como a integral é positiva, ela apresenta um máximo; precedida de um sinal negativo, surge um mínimo ao longo da reta. Portanto a lagrangiana é reescrita na forma

$$L = -\alpha \sqrt{1 - \mathbf{v^2}}. \tag{3.6}$$

A determinação da constante é realizada analisando-se o limite não relativístico da teoria, em que a lagrangiana L deve recair na expressão clássica

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v^2}. \tag{3.7}$$

Expandindo a lagrangiana (3.6) em série de potências de $\mathbf{v^2}$, ela assume a forma

$$L = -\alpha + \frac{\alpha}{2} \mathbf{v^2} + \mathbf{O}\left(\mathbf{v^4}\right). \tag{3.8}$$

Desprezando os termos $O\left(\mathbf{v^4}\right)$, e tendo em vista que toda constante é uma derivada total de um termo linear no tempo (que pode ser desprezado na lagrangiana), é possível comparar as expressões (3.7) e (3.8) para identificar $\alpha = m$, a massa da partícula. A presença do sinal negativo na ação é importante para que ela apresente um mínimo, mas devido à forma (3.4) das equações de movimento, o sinal não exerce influência. Assim a ação pode ser escrita como

$$S = \int_{s_1}^{s_2} m ds = \int_{\tau(s_1)}^{\tau(s_2)} m \frac{ds}{d\tau} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} m \sqrt{\dot{x}^2} d\tau, \tag{3.9}$$

que fornece as equações de movimento (3.2). No "gauge" do tempo próprio, $\tau = t$ e $\dot{x}^2 = 1$, as equações de movimento recaem na forma que se espera para uma partícula livre,

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\dot{x}^{\mu}\right) = m\ddot{x}^{\mu} = 0. \tag{3.10}$$

Por construção, a lagrangiana presente na ação (3.9) apresenta a invariancia sob reparametrizações desejadas e leva às equações de movimento corretas para descrever uma partícula massiva livre. Mas existem duas dificuldades relacionadas com essa lagrangiana: ela não é linear nas velocidades (a presença da raiz quadrada atesta isso) e não apresenta um limite quando $m \to 0$ (limite não massivo). A princípio, a primeira dificuldade poderia ser facilmente contornada, visto que a mesma dinâmica pode ser obtida da lagrangiana "linearizada"

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \tag{3.11}$$

mas a ação deixaria de ser invariante por reparametrizações, sendo somente sob translações $\tau \to \tau' = \tau + \varepsilon$, e continua não definida no limite de massa nula. Uma solução para esse problema é utilizar um campo auxiliar $e(\tau)$ para extender a ação linearizada de forma que ela se torne invariante. Essa extensão é realizada na forma [9]

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}^2}{e} + em^2\right), \tag{3.12}$$

que apresenta um limite de massa nula e possui a invariancia por reparametrização, assegurada pelas transformações

$$\delta\tau = f(\tau), \qquad \delta x^{\mu} = f\dot{x}^{\mu}, \qquad \delta e = \frac{d}{d\tau}(fe), \tag{3.13}$$

i.e., sob essas transformações a lagrangiana se transforma como uma derivada total (divergência):

$$\delta L = \frac{d}{d\tau}\left[f\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\dot{x}^2 + em^2\right)\right] = \frac{d}{d\tau}(fL). \tag{3.14}$$

As equações de movimento obtidas da lagrangiana (3.12) são:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}^{\mu}}{e}\right) = 0, \qquad \dot{x}^2 = e^2m^2. \tag{3.15}$$

Esta ultima é uma equação algébrica que pode ser resolvida para $e(\tau)$ e substituída na primeira, levando a equações de movimento iguais à (3.2), o que mostra a equivalência entre as duas lagrangianas. Analisando essas equações de movimento, é possível concluir que elas não fornecem nenhuma expressão para a equação de movimento do campo auxiliar e, o que significa que a dependência de e com o parâmetro

τ permanece completamente arbitrária. A presença dessa arbitrariedade na teoria é conhecida como liberdade de gauge, que torna a física por ela descrita equivalente sob qualquer escolha específica da variável arbitrária. Assim é possível fazer uma escolha conveniente para a variável, i.e., fazer uma fixação de gauge, de forma a simplificar (ou não) as equações de movimento, ou pelo menos permitir que elas assumam uma forma mais reconhecível. Nesse caso em específico, estamos interessados em que no tempo próprio a dinâmica seja de uma partícula livre. Como no tempo próprio a condição $\dot{x}^2 = 1$ é satisfeita, de (3.15) é possível observar que a fixação de gauge do tempo próprio corresponde a escolher

$$e = \frac{1}{m}, \tag{3.16}$$

que leva às equações

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\dot{x}^{\mu}\right) = 0, \qquad \dot{x}^2 = 1, \tag{3.17}$$

como esperávamos.

A não singularidade da lagrangiana (3.12) no limite $m \to 0$ implica que é impossível eliminar o campo auxiliar para escrever uma ação de uma partícula não massiva somente em termos de $x^{\mu}(\tau)$ [9]. Assim, tendo em vista a discussão realizada, a ação para uma partícula massiva livre a ser utilizada no processo de quantização via método de Dirac é

$$S_p = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L_p d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{\frac{1}{2e}\dot{x}^2 + em^2\right\} d\tau, \tag{3.18}$$

e para o caso não massivo, é so tomar o limite $m \to 0$ da ação acima para escrevê-la na forma

$$S_p^{(n\tilde{a}omas.)} = \lim_{m\to 0} S_p = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{\frac{1}{2e}\dot{x}^2\right\} d\tau. \tag{3.19}$$

As equações de movimento obtidas de (3.19) são:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{e}\dot{x}^{\mu}\right) = 0, \qquad \dot{x}^2 = 0. \tag{3.20}$$

Como podemos observar, o referencial do tempo próprio já foi alcançado, pois no caso de uma partícula não massiva ele corresponde à $\dot{x}^2 = 0$. A liberdade de gauge ainda presente no campo auxiliar pode ser eliminada exigindo-se que as equações de movimento descrevam uma partícula livre, o que em (3.20) corresponde a escolher $e = 1$.

3.2 Descrição clássica do spin

Dentre as possíveis formas de se descrever os graus de liberdade de spin clássico, a que tornou-se mais difundida é a que utiliza variáveis anti-comutantes, elementos da álgebra de Grassmann. A introdução de tais variáveis na teoria fornece uma boa compreensão de vários aspectos da dinâmica do spin, além de conduzir diretamente ao conceito de supersimetria. Mas antes da descrição do spin, é importante entender o funcionamento da álgebra e como a dinâmica de um sistema é descrita através dessas variáveis. Para isso, vamos começar com algumas definições formais [6], e só depois de bem definida a parte operacional analisaremos a dinâmica subsequente.

Uma álgebra de Grassmann de dimensão finita G_N tem N geradores ψ^α, que satisfazem a relação

$$\psi^\alpha\psi^\beta + \psi^\beta\psi^\alpha = 0. \tag{3.21}$$

Todo elemento Ω dessa álgebra assume a forma

$$\Omega\left(\psi\right) = \omega_0 + \omega_\alpha\psi^\alpha + \omega_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta + ... + \omega_{1...N}\psi^1\psi^2...\psi^N, \tag{3.22}$$

que é uma soma de 2^N termos com coeficientes $\omega_{\alpha_1...\alpha_N}$. Cada termo da expansão é um produto dos geradores, e devido à relação de anti-comutação, nenhum gerador pode aparecer 2 vezes. Sob adição e multiplicação ordinárias por números reais, G_N consiste em um espaço vetorial linear de dimensão 2^N. É então possível definir uma base na forma

$$1, \psi^1, ..., \psi^N, \psi^1\psi^2, ..., \psi^1\psi^2...\psi^N. \tag{3.23}$$

O espaço total separa-se naturalmente em dois sub-espaços,

$$G_N = G_N^{(0)} \oplus G_N^{(1)}, \tag{3.24}$$

onde $G_N^{(0)}$ consiste em todos os elementos pares da álgebra (elementos cuja expansão contem somente produtos de um número par de geradores) e $G_N^{(1)}$ é correspondentemente o subespaço com um número ímpar de geradores em cada produto. Todo elemento de G_N tem uma projeção em ambos os subespaços e pode ser escrito na forma

$$\Omega\left(\psi\right) = \Omega^{(0)}\left(\psi\right) + \Omega^{(1)}\left(\psi\right). \tag{3.25}$$

Associa-se um número n_Ω aos elementos pares e ímpares na forma: $n_\Omega = 0\,(1)$ se Ω é par (ímpar). Assim

$$\Omega_1\Omega_2 = \left(-1\right)^{n_1 n_2}\Omega_2\Omega_1. \tag{3.26}$$

Elementos de $G_N^{(0)}$ são chamados de bósons, enquanto os elementos de $G_N^{(1)}$ são chamados de férmions.

É possível definir dois tipos de derivada em uma álgebra de Grassmann, devido à anticomutatividade dos geradores. No caso ordinário, a variação de uma função $f\left(x\right)$ é realizada na forma

$$\delta f\left(x\right) = \delta x_i \frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_i}\delta x_i, \tag{3.27}$$

onde a posição de δx_i (à direita ou à esquerda da derivada) não interfere na definição da variação. Já a variação de um elemento $\Omega(\psi)$ da álgebra de Grassmann, sob a transformação $\psi^\alpha \to \psi^\alpha + \delta\psi^\alpha$, é escrito na forma

$$\delta\Omega(\psi) = \delta\psi^\alpha \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\psi^\alpha}\Omega = \Omega\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi^\alpha}\delta\psi^\alpha, \tag{3.28}$$

onde $\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\psi^\alpha}\Omega$ e $\Omega\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi^\alpha}$ são denominados derivada a esquerda e derivada a direita, respectivamente, sendo operadores lineares sobre a álgebra. Por simplicidade, só utilizaremos nesse texto a derivada a esquerda, denotando-a por $\frac{\partial}{\partial\psi^\alpha}\Omega$ (sem a seta). Assim, dado o monômio $\psi^{\alpha_1}\psi^{\alpha_2}...\psi^{\alpha_i}$, a atuação da derivada fornece:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\psi^\beta}\left(\psi^{\alpha_1}\psi^{\alpha_2}...\psi^{\alpha_i}\right) &= \delta^{\beta\alpha_1}\psi^{\alpha_2}...\psi^{\alpha_i} - \delta^{\beta\alpha_2}\psi^{\alpha_1}\psi^{\alpha_3}...\psi^{\alpha_i} + ... \\ &\quad + (-1)^{i-1}\delta_{\beta\alpha_i}\psi^{\alpha_1}...\psi^{\alpha_{i-1}}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Da mesma forma que os geradores, as derivadas anti-comutam,

$$\frac{\partial}{\partial\psi^\alpha}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\psi^\beta}\right) = -\frac{\partial}{\partial\psi^\beta}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\psi^\alpha}\right). \tag{3.30}$$

A regra do produto é mantida, mas existe uma diferença que depende se um dos elementos é de $G_N^{(0)}$ ou $G_N^{(1)}$,

$$\frac{\partial}{\partial\psi^\alpha}(\Omega_1\Omega_2) = \left(\frac{\partial}{\partial\psi^\alpha}\Omega_1\right)\Omega_2 + (-1)^{n_{\Omega_1}}\Omega_1\left(\frac{\partial}{\partial\psi^\alpha}\Omega_2\right), \tag{3.31}$$

e a regra da cadeia segue diretamente da definição da derivada: seja $\Omega = \Omega(\psi(\eta))$ e $\psi^\alpha = \psi^\alpha\left(\eta^\beta\right)$,

$$\delta\psi^\alpha = \delta\eta^\beta\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\eta^\beta}, \qquad \delta\Omega = \delta\psi^\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial\psi^\alpha} = \delta\eta^\beta\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\eta^\beta}\frac{\partial\Omega}{\partial\psi^\alpha}, \tag{3.32}$$

sendo assim

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\psi^\alpha} = \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\eta^\beta}\frac{\partial\Omega}{\partial\psi^\alpha}. \tag{3.33}$$

Vamos agora considerar a dinâmica de uma teoria com variáveis de Grassmann. A primeira consideração a se fazer é que essas variáveis apresentem dependência temporal (ou paramétrica). Sendo assim, ψ_α e $\dot{\psi}_\alpha$ são geradores de uma álgebra que satisfazem as relações

$$\psi^\alpha\psi^\beta + \psi^\beta\psi^\alpha = 0, \qquad \psi^\alpha\dot{\psi}^\beta + \dot{\psi}^\beta\psi^\alpha = 0, \qquad \dot{\psi}^\alpha\dot{\psi}^\beta + \dot{\psi}^\beta\dot{\psi}^\alpha = 0, \tag{3.34}$$

Considerando um sistema descrito por variáveis pares $\{q^i\}$, $i = 1, ..., N$, e ímpares $\{\psi^\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., M$. Não é obvio que para uma teoria com variáveis de Grassmann o princípio de mínima ação seja válido, mas assumindo a validade do mesmo, a lagrangiana deve ser um elemento par. A ação admite a forma geral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q^i, \dot{q}^i, \psi^\alpha, \dot{\psi}^\alpha\right) dt, \tag{3.35}$$

que fornece as equações de movimento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha} = 0. \tag{3.36}$$

Na formulação hamiltoniana, os momentos conjugados são definidos como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \qquad \pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\alpha}, \tag{3.37}$$

e a hamiltoniana é obtida via

$$H = \dot{q}^i p_i + \dot{\psi}^\alpha \pi_\alpha - L. \tag{3.38}$$

Os parênteses de Poisson vão depender da natureza par/ímpar dos elementos. Denotando B(F) um elemento bosônico(fermiônico) da álgebra, eles assumem a forma

$$\begin{aligned}
\{B_1, B_2\} &= \left(\frac{\partial B_1}{\partial q_i}\frac{\partial B_2}{\partial p^i} - \frac{\partial B_2}{\partial q_i}\frac{\partial B_1}{\partial p^i}\right) + \left(\frac{\partial B_1}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial B_2}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial B_2}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial B_1}{\partial \pi^\alpha}\right), \\
\{F_1, F_2\} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\frac{\partial F_2}{\partial p^i} + \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\frac{\partial F_1}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial F_2}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial F_1}{\partial \pi^\alpha}\right), \\
\{F, B\} &= \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial F}{\partial \pi^\alpha}\right).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Assim, as equações de movimento de Hamilton são escritas na forma usual

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{3.40}$$

Algumas propriedades básicas dos parênteses de Poisson (que serão utilizadas constantemente nesse texto) são:

$$\begin{aligned}
&\{A, B\} = -\left(-1\right)^{n_A n_B}\{B, A\}, \\
&\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}, \\
&\{A, BC\} = \left(-1\right)^{n_A n_B} B\{A, C\} + \{A, B\} C, \\
&\{AB, C\} = A\{B, C\} + \left(-1\right)^{n_B n_C}\{A, C\} B, \\
&\left(-1\right)^{n_A n_C}\{A, \{B, C\}\} + \left(-1\right)^{n_B n_A}\{B, \{C, A\}\} + \left(-1\right)^{n_C n_B}\{C, \{A, B\}\} = 0.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Os parênteses de Dirac também são definidos da forma usual,

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_r\} C_{rs}^{-1}\{\phi_s, B\}, \tag{3.42}$$

e satisfazem as mesmas propriedades algebricas dos parênteses de Poisson.

3.2.1 Primeiro modelo: não-relativístico

Vamos considerar uma partícula livre não-relativística com coordenadas de posição $x^n(t)$, $n = \overline{1,3}$. A descrição dos graus de liberdade de spin é associada a 3 variáveis de Grassmann $\psi^n(t)$, que admitimos se comportarem como vetores sob transformações do grupo de rotações espaciais [10].

O primeiro passo é construir a parte cinética das variáveis de Grassmann na lagrangiana, e para isso é necessário ter em conta que ela deve ser uma função par e real (sob conjugação complexa). Devido à anti-comutatividade, um termo na forma $\dot{\boldsymbol{\psi}}^{\mathbf{2}}$ não pode ser utilizado, visto que ele é nulo. O termo mais simples que pode ser construído, envolvendo uma derivada e que não seja uma derivada total, é $\dot{\psi}_n\psi^n$. Como sob conjugação complexa esse termo admite a transformação

$$\left(\dot{\psi}_n\psi^n\right)^* = (\psi^n)^*\left(\dot{\psi}_n\right)^* = \psi^n\dot{\psi}_n = -\dot{\psi}_n\psi^n, \tag{3.43}$$

a realidade da lagrangiana é garantida uma vez que ele seja acompanhado pelo número complexo i. Assim, a lagrangiana para uma partícula livre não-relativística pode ser escrita na forma

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_n\dot{x}^n + \frac{i}{2}\dot{\psi}_n\psi^n. \tag{3.44}$$

Construída dessa forma, a lagrangiana é invariante sob transformações de Galileu e sob rotações espaciais, o que permite que as equações de movimento também o sejam.

A passagem para o formalismo hamiltoniano é realizada definindo-se os momentos conjugados

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n} = m\dot{x}_n, \qquad \pi_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^n} = \frac{i}{2}\psi_n. \tag{3.45}$$

Da definição de equação π_n surgem os vínculos primários da teoria, visto que não é possível escrever os momentos π_n em termos das derivadas $\dot{\psi}_n$. Os vínculos são:

$$\phi^n = \pi^n - \frac{i}{2}\psi^n \approx 0. \tag{3.46}$$

Esse tipo de vínculo já era esperado a partir da própria construção da lagrangiana (3.44), visto que ela é linear em $\dot{\psi}$. Devido à essa propriedade, é de se esperar que em uma teoria dinâmica com variáveis de Grassmann apareçam equações de vínculos na forma de (3.46).

A hamiltoniana canônica é escrita na forma

$$H_c = \dot{x}^n p_n + \dot{\psi}^n\pi_n - L = \frac{1}{2m}p_n p^n, \tag{3.47}$$

e a hamiltoniana primária

$$H_p = H_c + u_n \phi^n. \tag{3.48}$$

As condições de consistência fornecem

$$\dot{\phi}^n = \{\phi^n, H_p\} = 0, \tag{3.49}$$

onde os parênteses de Poisson fundamentais não nulos são

$$\{x^n, p_m\} = \delta^n_m, \qquad \{\psi^n, \pi_m\} = -\delta^n_m. \tag{3.50}$$

As equações (3.49) conduzem a $u_n = 0$, e não geram vínculos secundários. O vínculo (3.46) é de segunda classe, pois

$$C^{nm} = \{\phi^n, \phi^m\} = i\delta^{nm}, \qquad \left(C^{nm}\right)^{-1} = -i\delta^{nm}, \tag{3.51}$$

e como $\det |\{\phi^n, \phi^m\}| \neq 0$, não existem combinações lineares de ϕ^n que sejam de primeira classe. Os parênteses de Dirac podem ser construídos a partir de $\left(C^{nm}\right)^{-1}$, resultando em

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_n\} \left(C^{nm}\right)^{-1} \{\phi_m, B\} = \{A, B\} + i \{A, \phi_n\} \{\phi^n, B\}. \tag{3.52}$$

Sob (3.52), temos

$$\{\psi^n, \psi^m\}_D = i\delta^{nm}. \tag{3.53}$$

Vamos analisar as equações de movimento dessa teoria. Ja sabemos que elas são obtidas por extremização da ação integral por pequenas deformações da história da partícula, e que estas deformações devem obedecer às condições de contorno, impostas em número igual ao de constantes de integração da solução das equações de movimento. No caso de variáveis bosônicas, impõem-se que os x^n sejam fixos nos pontos extremos da ação, mas para as variáveis fermiônicas isso não é possível, visto que significaria impor duas condições para uma equação diferencial de primeira ordem. Uma forma de se construir uma ação que leve a equações de movimento coerentes para as variáveis fermiônicas é inserindo um termo de superfície (ou de fronteira), que compense o fato de usarmos somente uma condição de contorno. Tendo isso em vista, é possível escrever a ação na forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{1}{2} m \dot{x}_n \dot{x}^n + \frac{i}{2} \dot{\psi}_n \psi^n \right\} + \frac{i}{2} \psi_n (t_1) \psi^n (t_2), \tag{3.54}$$

As equações de movimento são obtidas variando a ação, sujeita às condições de contorno

$$\delta x^n (t_1) = \delta x^n (t_2) = 0, \qquad \delta\psi^n (t_1) + \delta\psi^n (t_2) = 0. \tag{3.55}$$

O termo de superfície inserido anula os termos que sobram da variação da integral, uma vez que as condições de contorno sejam satisfeitas:

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}_n\right)\delta x^n+\dot{\psi}_n\delta\psi^n\right]dt-\frac{i}{2}\left[\delta\psi^n\left(t_1\right)\psi_n\left(t_1\right)-\delta\psi^n\left(t_2\right)\psi_n\left(t_2\right)\right]\\
&+ \frac{i}{2}\left[\delta\psi^n\left(t_1\right)\psi_n\left(t_2\right)+\psi^n\left(t_1\right)\delta\psi_n\left(t_2\right)\right]\\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}_n\right)\delta x^n+\dot{\psi}_n\delta\psi^n\right]dt-\frac{i}{2}\left[\delta\psi^n\left(t_1\right)+\delta\psi^n\left(t_2\right)\right]\left[\psi_n\left(t_1\right)-\psi_n\left(t_2\right)\right]\\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

As equações de movimento obtidas da variação acima são:

$$
\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}^n\right)=0,\qquad \dot{\psi}^n=0. \tag{3.57}
$$

Assim, a extremização da ação conduz a equações de movimento sem restrições adicionais, com soluções unívocas, consistente com os valores arbitrários das variáveis x^n e ψ^n nos pontos extremos da ação.

Tendo construído a ação integral, é possível obter as leis de conservação associadas ao sistema. A ação (3.54) é invariante sob transformações de Galileu, translações e rotações. Dessas três, somente as rotações afetam as variáveis de Grassmann, e por isso vamos analisar somente esse caso. Sob uma rotação infinitesimal, temos

$$
\delta x^n=\omega^n_m x^m,\qquad \delta p_n=\omega^m_n p_m,\qquad \delta\psi^n=\omega^n_m\psi^m, \tag{3.58}
$$

com $\omega_{nm}=-\omega_{mn}$. Utilizando as equações de movimento, a variação da ação se escreve

$$
\delta S=\omega_{nm}\left[x^np^m-x^mp^n\right]_{t_1}^{t_2}+\frac{i}{2}\omega_{nm}\left[\psi^n\left(t_2\right)\psi^m\left(t_2\right)-\psi^n\left(t_1\right)\psi^m\left(t_1\right)\right], \tag{3.59}
$$

de onde se obtemos as constantes de movimento

$$
J_{nm}=L_{nm}+S_{nm},\qquad L_{nm}=x_np_m-x_mp_n,\qquad S_{nm}=i\psi_n\psi_m. \tag{3.60}
$$

A variável J_{nm} é o gerador de rotações e deve ser identificada com o momento angular total do sistema. Ele é formado por uma parte orbital L_{nm}, que não é invariante por translações ou transformações de Galileu, e uma parte intrínseca S_{nm}, invariante sob estas transformações. Se definirmos o vetor de spin na forma

$$
S_n=-\frac{i}{2}\epsilon_{nmk}S_{mk}, \tag{3.61}
$$

vemos que ele satisfaz a álgebra clássica

$$\{S_n, S_m\}_D = \epsilon_{nmk} S_{mk}, \tag{3.62}$$

na mesma forma dos operadores quânticos. No processo de quantização, as variáveis clássicas são identificadas com operadores quânticos atuando no espaço de Hilbert, e os parênteses de Dirac são substituídos pelas relações

$$\{A, B\}_D \to i\left[\hat{A}, \hat{B}\right]_{\pm}, \tag{3.63}$$

onde o sinal (+) identifica anticomutador, utilizado quando A e B são variáveis fermiônicas, e (−) significa comutador, utilizado quando as variáveis são bosônicas. Aplicando essa prescrição à (3.53), obtemos

$$\left[\hat{\psi}^n, \hat{\psi}^m\right]_{+} = \delta^{nm}. \tag{3.64}$$

Em termos de operadores atuando em um espaço vetorial, existe apenas uma representação irredutível desta álgebra, na forma

$$\hat{\psi}^n = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^n, \tag{3.65}$$

onde σ^n são as matrizes de Pauli. Inserindo (3.65) em (3.61), nós obtemos a expressão para o vetor de spin quântico

$$\hat{S}_k = -\frac{i}{2}\epsilon_{knm}\sigma_n\sigma_m = -\frac{i}{4}\epsilon_{knm}\left[\sigma_n, \sigma_m\right] = \frac{1}{2}\sigma_k, \tag{3.66}$$

o que nos permite concluir que a teoria descreve uma partícula não relativística de spin 1/2.

3.3 Partícula relativística de spin 1/2

Para obter a descrição clássica correta vamos partir das equações quânticas para a partícula com spin 1/2 [10]. Elas são escritas na forma

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Psi = 0, \qquad \left(\partial^2 + m^2\right)\Psi = 0, \tag{3.67}$$

que são respectivamente a equação de Dirac para o espinor Ψ, e a equação de Klein-Gordon, satisfeita por cada componente do espinor. Esta última é obtida da primeira atuando o operador $(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)$ sobre ela. Introduzindo os operadores

$$\hat{\psi}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_5\gamma^\mu, \qquad \hat{\psi}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_5, \tag{3.68}$$

que satisfazem as relações de anti-comutação

$$\left[\hat{\psi}^\mu, \hat{\psi}^\nu\right]_+ = \eta^{\mu\nu}, \qquad \left[\hat{\psi}_5, \hat{\psi}_5\right]_+ = -1, \qquad \left[\hat{\psi}^\mu, \hat{\psi}_5\right]_+ = 0, \tag{3.69}$$

e lembrando que

$$\left[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu\right] = -i\delta^\mu_\nu, \qquad \hat{p}_\mu = i\partial_\mu, \tag{3.70}$$

as equações (3.67) são escritas na forma

$$\left(\hat{\psi}^\mu \hat{p}_\mu - m\hat{\psi}_5\right)\Psi = 0, \qquad \left(\hat{p}^2 - m^2\right)\Psi = 0. \tag{3.71}$$

No limite clássico, as equações (3.71) devem ser interpretadas como dois vínculos de primeira classe que atuam sobre os estados físicos do sistema. Assim a teoria clássica deve ser formulada em termos das variáveis reais bosônicas (x^μ, p_μ) e fermiônicas (ψ^μ, ψ_5), satisfazendo os parênteses de Dirac

$$\{\psi^\mu, \psi^\nu\}_D = i\eta^{\mu\nu}, \qquad \{\psi_5, \psi_5\}_D = -i, \qquad \{x^\mu, p_\nu\}_D = \delta^\mu_\nu. \tag{3.72}$$

A dinâmica da teoria está contida nos vínculos de primeira classe

$$\mathcal{J} = \psi^\mu p_\mu - m\psi_5 \approx 0, \qquad \mathcal{H} = p^2 - m^2 \approx 0, \tag{3.73}$$

que obedecem a álgebra

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}_D = \{\mathcal{H}, \mathcal{J}\}_D = 0, \qquad \{\mathcal{J}, \mathcal{J}\}_D = i\mathcal{H}. \tag{3.74}$$

Conforme analisado na seção anterior, os parênteses de Dirac são construídos a partir dos vínculos entre as variáveis fermiônicas. Eles surgem do termo cinético da lagrangiana, que é linear em $\dot{\psi}$. Nós precisamos que os termos cinéticos de ψ^μ e ψ_5 gerem os vínculos de segunda classe capazes de, sob a construção dos parênteses de Dirac, fornecer as relações (3.72). Tendo em mente os vínculos e os parênteses de Dirac obtidos no caso não relativístico, podemos inferir então que o termo cinético para a lagrangiana relativística deve ser

$$L_{cin.} = \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}^\mu \psi_\mu - \dot{\psi}_5 \psi_5\right). \tag{3.75}$$

A partir deles são obtidos os vínculos

$$\phi^\mu = \pi^\mu - \frac{i}{2}\psi^\mu \approx 0, \qquad \phi_5 = \pi_5 + \frac{i}{2}\psi_5 \approx 0, \tag{3.76}$$

que satisfazem

$$C^{\mu\nu} = \{\phi^\mu, \phi^\nu\} = i\eta^{\mu\nu}, \qquad (C^{\mu\nu})^{-1} = -i\eta^{\mu\nu}, \tag{3.77}$$

$$C_5 = \{\phi_5, \phi_5\} = -i, \qquad (C_5)^{-1} = i, \tag{3.78}$$

e permitem contruir os parênteses de Dirac

$$\begin{aligned}\{A,B\}_D &= \{A,B\} - \{A,\phi_\mu\}\left(C^{\mu\nu}\right)^{-1}\{\phi_\nu,B\} - \{A,\phi_5\}\left(C_5\right)^{-1}\{\phi_5,B\} \\ &= \{A,B\} + i\{A,\phi_\mu\}\{\phi^\mu,B\} - i\{A,\phi_5\}\{\phi_5,B\}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

que reproduzem as relações (3.72) para as variáveis fermiônicas.

Agora estamos prontos para escrever a ação integral que descreve uma partícula "clássica" de spin 1/2. Como a dinâmica está contida nos vínculos de primeira classe (3.73), eles são inseridos na ação com auxílio dos multiplicadores de Lagrange. A ação também precisa de um termo de superfície para que as equações de movimento sejam obtidas variando-se a ação, e sua forma também pode ser inferida analisando o caso não relativístico e o termo cinético na equação (3.75). Assim, a ação é escrita na forma

$$\begin{aligned} S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{\dot{x}^\mu p_\mu + \dot{\psi}^\mu \pi_\mu + \dot{\psi}_5 \pi_5 - N(\tau)\left(p^2 - m^2\right) - iM(\tau)\left(\psi^\mu p_\mu - m\psi_5\right)\right\} \\ &\quad + \frac{i}{2}\left[\psi_\mu(\tau_1)\psi^\mu(\tau_2) - \psi_5(\tau_1)\psi_5(\tau_2)\right] \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{\dot{x}^\mu p_\mu + \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}^\mu\psi_\mu - \dot{\psi}_5\psi_5\right) - N(\tau)\left(p^2 - m^2\right) - iM(\tau)\left(\psi^\mu p_\mu - m\psi_5\right)\right\} \\ &\quad + \frac{i}{2}\left[\psi_\mu(\tau_1)\psi^\mu(\tau_2) - \psi_5(\tau_1)\psi_5(\tau_2)\right], \end{aligned} \quad (3.80)$$

onde $N(\tau)$ e $M(\tau)$ são multiplicadores de Lagrange reais, par e ímpar, respectivamente. As equações de movimento são obtidas variando a ação sob as condições de contorno

$$\begin{aligned} \delta x^\mu(\tau_1) = \delta x^\mu(\tau_2) = 0, \\ \delta\psi^\mu(\tau_1) + \delta\psi^\mu(\tau_2) = 0, \\ \delta\psi_5(\tau_1) + \delta\psi_5(\tau_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.81)$$

e se apresentam na forma:

$$\begin{aligned} \dot{p}^\mu &= 0, \qquad \dot{x}^\mu - 2Np^\mu - iM\psi^\mu = 0, \\ i\dot{\psi}^\mu - iMp^\mu &= 0, \qquad i\dot{\psi}_5 - imM = 0, \\ p^2 - m^2 &= 0, \qquad i\psi^\mu p_\mu - im\psi_5 = 0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Observando a segunda equação, vemos que p^μ pode invertido e expresso em termos das outras variáveis,

$$p^\mu = \frac{1}{2N}\left(\dot{x}^\mu - iM\psi^\mu\right), \quad (3.83)$$

resultando nas equações

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2N}\dot{x}^{\mu}-\frac{iM}{2N}\psi^{\mu}\right)=0, && i\dot{\psi}^{\mu}-\frac{iM}{2N}x^{\mu}=0,\\
&i\dot{\psi}_5-imM=0, && \frac{i}{2N}\dot{x}^{\mu}\psi_{\mu}-im\psi_5=0,\\
&\left(\frac{1}{2N}\right)^2\dot{x}^2-\frac{iM}{2N}\dot{x}^{\mu}\psi_{\mu}-m^2=0.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Antes de analisar as equações de movimento, vamos primeiro analisar a ação (3.80) e as invariancias de gauge nela presentes.

A hamiltoniana que segue da ação (3.80) é uma combinação linear dos vínculos $\mathcal{H}$ e $\mathcal{J}$:

$$H=N\mathcal{H}+iM\mathcal{J}=u^a\phi_a, \tag{3.85}$$

com $u^1=N$ e $u^2=iM$. Como os dois vínculos são de primeira classe, eles são geradores de transformações de gauge, e os multiplicadores de lagrange são funções completamente arbitrárias do tempo. A transformação de gauge para qualquer função F das variáveis canônicas presentes na teoria que relaciona duas evoluções distintas devido à duas diferentes escolhas u^a e $\bar{u}^a$, partindo do mesmo ponto inicial τ_0, admite a forma

$$\delta F(\tau)=\{F,\varepsilon(\tau)\mathcal{H}+i\alpha(\tau)\mathcal{J}\}_D=\{F,\epsilon^a(\tau)\phi_a\}_D\,, \tag{3.86}$$

onde $\epsilon_1(\tau)=\varepsilon(\tau)$ e $\epsilon_2(\tau)=i\alpha(\tau)$ são os parâmetros das transformações infinitesimais, dependentes de τ, que satisfazem as condições:

$$\epsilon^a(\tau_0)=0, \qquad \epsilon^a(\tau+d\tau)=u^a(\tau_0)-\bar{u}^a(\tau_0)\,. \tag{3.87}$$

Considerando as variáveis presentes na ação (3.80), a forma geral (3.86) das transformações de gauge fornece:

$$\delta x^{\mu}=2\varepsilon p^{\mu}+i\alpha\psi^{\mu}, \quad \delta p^{\mu}=0, \quad \delta\psi^{\mu}=\alpha p^{\mu}, \quad \delta\psi_5=\alpha m. \tag{3.88}$$

Essas equações podem ser implementadas como transformações de simetria da ação uma vez que os multiplicadores se transformem na forma [10]:

$$\delta u^c=\dot{\epsilon}^c+\epsilon^a K^c_{ab}u^b, \tag{3.89}$$

com o coeficiente K^c_{ab} definido a partir da relação

$$\left\{\epsilon^a\phi_a,\eta^b\phi_b\right\}_D=\epsilon^a K^c_{ab}\eta^b\phi_c. \tag{3.90}$$

O cálculo explícito da equação (3.90) fornece

$$K^c_{ab}=-i\delta_{a2}\delta_{b2}\delta^c_1, \tag{3.91}$$

que inserido em (3.89) resulta nas transformações para os multiplicadores

$$\delta N = \dot{\varepsilon} + i\alpha M, \qquad \delta M = \dot{\alpha}. \tag{3.92}$$

Utilizando a equação (3.83), é possível reescrever a ação como

$$\begin{aligned} S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ \frac{1}{4N}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}^\mu \psi_\mu - \dot{\psi}_5 \psi_5\right) + \frac{iM}{2N}\psi^\mu \dot{x}_\mu + Nm^2 + imM\psi_5 \right\} \\ &+ \frac{i}{2}\left[\psi_\mu(\tau_1)\psi^\mu(\tau_2) - \psi_5(\tau_1)\psi_5(\tau_2)\right], \end{aligned} \tag{3.93}$$

que é invariante sob as transformações (3.88) e (3.92) quando reescritas na forma

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \varepsilon\left(\frac{1}{N}\dot{x}^\mu - \frac{iM}{N}\psi^\mu\right) + i\alpha\psi^\mu, \qquad \delta\psi^\mu = \alpha\left(\frac{1}{2N}\dot{x}^\mu - \frac{iM}{2N}\psi^\mu\right), \\ \delta\psi_5 &= \alpha m, \qquad \delta N = \dot{\varepsilon} + i\alpha M, \qquad \delta M = \dot{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Vamos analisar em separado as transformações geradas por cada um dos vínculos. Tomando $\varepsilon = 0$, temos as transformações geradas pelo vínculo $\mathcal{J}$:

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= i\alpha\psi^\mu, \qquad \delta\psi^\mu = \alpha\left(\frac{1}{2N}\dot{x}^\mu - \frac{iM}{2N}\psi^\mu\right), \qquad \delta\psi_5 = \alpha m, \\ \delta N &= i\alpha M, \qquad \delta M = \dot{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Como as transformações (3.95) combinam as variáveis bosônicas com as fermiônicas, elas são chamadas de transformações de supersimetria, sendo $\mathcal{J}$ o gerador da transformação.

Ja as transformações geradas por $\mathcal{H}$ não são simples de comparar com as transformações esperadas, visto que quando tomamos $\alpha = 0$ em (3.94) as transformações para ψ^μ, ψ_5 e M são nulas [10]. Mas vamos considerar as transformações (3.94) com as redefinições dos parâmetros

$$\varepsilon = \varepsilon' N, \qquad \alpha = \alpha' + \varepsilon' M. \tag{3.96}$$

Assim podemos escrever

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \varepsilon'\dot{x}^\mu + i\alpha'\psi^\mu, \qquad \delta\psi^\mu = \varepsilon'\dot{\psi}^\mu + \alpha'\left(\frac{1}{2N}\dot{x}^\mu - \frac{iM}{2N}\psi^\mu\right) + \tilde{\delta}\psi^\mu, \\ \delta\psi_5 &= \varepsilon'\dot{\psi}_5 + \alpha' m + \tilde{\delta}\psi_5, \qquad \delta N = \frac{d}{d\tau}\left(\varepsilon' N\right) + i\alpha' M, \\ \delta M &= \frac{d}{d\tau}\left(\varepsilon' M\right) + \dot{\alpha}', \end{aligned} \tag{3.97}$$

onde

$$\tilde{\delta}\psi^\mu = \varepsilon'\left(\frac{M}{2N}\dot{x}^\mu - \dot{\psi}^\mu\right), \qquad \tilde{\delta}\psi_5 = \varepsilon'\left(mM - \dot{\psi}_5\right). \tag{3.98}$$

Sob essas redefinições dos parâmetros, é possível observar que as transformações de supersimetria mantêm a mesma forma, i.e., a dependência de α' em (3.97) é a mesma de α em (3.94). Já quando $\alpha' = 0$, as transformações assumem a forma de uma reparametrização $\delta\tau = \varepsilon'(\tau)$, sob a qual as variáveis x^μ, ψ^μ e ψ_5 transformam-se como escalares, enquanto N e M transformam-se como "densidades". As transformações $\tilde{\delta}\psi^\mu$ e $\tilde{\delta}\psi_5$ que acompanham a transformação gerada por $\mathcal{H}$ são consideradas transformações de gauge espúrias [10], mas é possível observar que elas são nulas quando utilizadas as equações de movimento (3.84). Embora não seja muito "acomselhável" chamar $\mathcal{H}$ de gerador de reparametrizações (tendo em vista a discussão realizada), a ação (3.93) é invariante sob as transformações de reparametrização

$$\begin{aligned} &\delta x^\mu = \varepsilon \dot{x}^\mu, \qquad \delta\psi^\mu = \varepsilon\dot{\psi}^\mu, \qquad \delta\psi_5 = \varepsilon\dot{\psi}_5, \\ &\delta N = \frac{d}{d\tau}\left(\varepsilon N\right), \qquad \delta M = \frac{d}{d\tau}\left(\varepsilon M\right). \end{aligned} \tag{3.99}$$

Uma vez discutidas as transformações de gauge que provêm dos vínculos de primeira classe, geradores das transformações, resta ainda analisar o comportamento da teoria sob transformações do grupo de Poincaré, e a partir dele obter uma expressão para o spin da partícula. Vamos definir o comportamento das variáveis dinâmicas da teoria sob transformações de Poincaré na forma

$$\delta x^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu + \varepsilon^\mu, \qquad \delta p^\mu = \omega^\mu_\nu p^\nu, \qquad \delta\psi^\mu = \omega^\mu_\nu \psi^\nu, \qquad \delta\psi_5 = 0, \tag{3.100}$$

com $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Sob essas transformações, a variação da ação (3.80) fornece

$$\delta S = \varepsilon^\mu \left[p_\mu(\tau_2) - p_\mu(\tau_1)\right] + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\left[J^{\mu\nu}(\tau_2) - J^{\mu\nu}(\tau_1)\right] = 0, \tag{3.101}$$

onde

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu + i\psi^\mu\psi^\nu \tag{3.102}$$

são os geradores de rotações de Lorentz, identificados com o momento angular total da partícula. Juntamente com p^μ, estes geradores obedecem a álgebra do grupo de Poincaré,

$$\begin{aligned} &\{p_\mu, p_\nu\}_D = 0, \qquad \{J_{\mu\nu}, p_\rho\}_D = \eta_{\mu\rho}p_\nu - \eta_{\nu\rho}p_\mu, \\ &\{J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}\}_D = \eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma}, \end{aligned} \tag{3.103}$$

sendo a ação uma representação do grupo de Poincaré. Como os geradores $J^{\mu\nu}$ e p^μ são quantidades conservadas, eles possuem parênteses de Dirac nulos com $\mathcal{J}$ e $\mathcal{H}$, sendo portanto invariantes supersimétricos.

A definição do spin da partícula é realizada a partir da separação do momento angular total $J_{\mu\nu}$ em uma parte orbital $L_{\mu\nu}$ e outra intrínseca associada ao spin $S_{\mu\nu}$.

Definindo o spin como a projeção do momento angular total no subespaço ortogonal a p^μ [10],

$$S^{\mu\nu} \approx u^\mu_\rho u^\nu_\sigma J^{\rho\sigma}, \tag{3.104}$$

onde u^μ_ρ é o operador de projeção no subespaço ortogonal a p^μ,

$$u^\mu_\rho \approx \delta^\mu_\rho - \frac{1}{m^2} p^\mu p_\rho, \tag{3.105}$$

é possível observar que $S^{\mu\nu}$ é conservado, pois ele é definido em termos de $J^{\mu\nu}$ e p^μ, o que significa que ele também possui parênteses de Dirac nulos com os vínculos $\mathcal{H}$ e $\mathcal{J}$, sendo invariante supersimétrico (também). Da definição (3.105), vemos que

$$u^\mu_\rho p_\mu \approx 0, \tag{3.106}$$

i.e., o operador u^μ_ρ só é um operador de projeção na presença do vínculo $\mathcal{H} = 0$, o que torna as equações (3.104) e (3.105) definidas somente na superfície do vínculo (por isso o sinal de igualdade fraca). Como p^μ é o gerador de translações, é fácil verificar que sob as equações (3.103) e (3.106) temos

$$\{S^{\mu\nu}, p_\rho\}_D \approx 0, \tag{3.107}$$

o que implica na invariancia translacional de $S^{\mu\nu}$. E por último, o tensor $S^{\mu\nu}$ satisfaz a álgebra do grupo de Lorentz,

$$\{S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}\}_D \approx \eta^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} S^{\nu\rho} + \eta^{\nu\sigma} S^{\mu\rho} - \eta^{\nu\rho} S^{\mu\sigma}. \tag{3.108}$$

Assim vemos que a definição (3.104) para o spin é satisfatória, pois ela é definida de forma não ambígua, sendo conservada (no caso de uma partícula livre) e invariante por transformações de supersimetria e translações (que é a propriedade intrínseca), e obedece a álgebra do grupo de Lorentz. Sob as equações (3.102) e (3.105), o tensor de spin $S^{\mu\nu}$ assume a forma

$$S^{\mu\nu} \approx i\psi^\mu \psi^\nu + \frac{i}{m}\psi_5 \left(\psi^\mu p^\nu - \psi^\nu p^\mu\right), \tag{3.109}$$

satisfazendo as condições de ortogonalidade

$$S^{\mu\nu} p_\nu \approx 0, \qquad S^{\mu\nu}\psi_\nu \approx 0, \qquad S^{\mu\nu}\dot{x}_\nu \approx 0, \tag{3.110}$$

requeridas para o spin. A partir da equação (3.109) é possível ver que a definição de spin utilizada só é satisfatória no caso de uma partícula massiva, apresentando divergência no limite $m \to 0$. Esse problema já era esperado, visto que não existe um referencial de repouso para uma partícula não massiva, não sendo possível construir uma projeção ortogonal a p^μ, que agora é um vetor nulo ($p^2 \approx 0$). Mas vamos primeiro terminar de analisar o caso massivo antes de entrar nos pormenores do limite não massivo da teoria.

Como última etapa do processo de construção da teoria, é necessário analisar as equações de movimento obtidas da ação e verificar se elas descrevem (no regime clássico) uma partícula relativística livre dotada de spin. Para tal, partimos da ação integral (3.93), fazendo a seguinte mudança de "variáveis":

$$e = 2N, \qquad \chi = 2M, \tag{3.111}$$

que reescrevem a ação na forma

$$\begin{aligned} S \;=\; & \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}^\mu \psi_\mu - \dot{\psi}_5 \psi_5\right) - \frac{i}{2e}\chi\psi^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{2}em^2 + im\chi\psi_5 \right\} \\ & + \frac{i}{2}\left[\psi_\mu(\tau_1)\,\psi^\mu(\tau_2) - \psi_5(\tau_1)\,\psi_5(\tau_2)\right]. \end{aligned} \tag{3.112}$$

A ação (3.112) fornece a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}^\mu \psi_\mu - \dot{\psi}_5 \psi_5\right) - \frac{i}{2e}\chi\psi^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{2}em^2 + im\chi\psi_5, \tag{3.113}$$

visto que o termo de superfície é uma derivada total

$$\frac{i}{2}\left[\psi_\mu(\tau_1)\,\psi^\mu(\tau_2) - \psi_5(\tau_1)\,\psi_5(\tau_2)\right] = \int_{\tau 1}^{\tau 2} d\tau \frac{d}{d\tau}\left[\frac{i}{2}\psi_\mu\psi^\mu(\tau_2) - \frac{i}{2}\psi_5\psi_5(\tau_2)\right], \tag{3.114}$$

onde $\psi^\mu(\tau_2)$ e $\psi_5(\tau_2)$ são constantes multiplicativas. Com a mudança de variáveis (3.111), vemos que a lagrangiana que descreve o sistema é a mesma contida na referência [9], que foi obtida por um processo construtivo, partindo de uma teoria livre não massiva e impondo invariança sob reparametrizações e transformações de supersimetria. Do procedimento realizado anteriormente, vemos que as transformações de reparametrização assumem a forma

$$\delta x^\mu = \varepsilon \dot{x}^\mu, \quad \delta\psi^\mu = \varepsilon\dot{\psi}^\mu, \quad \delta\psi_5 = \varepsilon\dot{\psi}_5, \quad \delta e = \frac{d}{d\tau}(\varepsilon e), \quad \delta\chi = \frac{d}{d\tau}(\varepsilon\chi), \tag{3.115}$$

fornecendo

$$\delta L = \frac{d}{d\tau}(\varepsilon L), \tag{3.116}$$

e as transformações de supersimetria ficam

$$\begin{aligned} &\delta x^\mu = i\alpha\psi^\mu, \qquad \delta\psi^\mu = \alpha\left(\frac{1}{e}\dot{x}^\mu - \frac{i}{2e}\chi\psi^\mu\right), \qquad \delta\psi_5 = \alpha m, \\ &\delta e = i\alpha\chi, \qquad \delta\chi = 2\dot{\alpha}, \end{aligned} \tag{3.117}$$

fornecendo

$$\delta L = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{i}{2}\alpha\left(\frac{1}{e}\psi^\mu\dot{x}_\mu + m\psi_5\right)\right]. \tag{3.118}$$

A diferença entre as ações (3.80) e (3.112) é o tratamento dado nesta última dos multiplicadores de Lagrange, que entram na teoria como campos auxiliares, que devido à sua origem, são funções arbitrárias do parâmetro τ. Mas é importante observar que a presença dos campos auxiliares altera o processo de hamiltonização, fornecendo dois vínculos a mais do que gostaríamos de ter (como pode ser inferido da lagrangiana, onde não conseguimos definir os momentos conjugados), que precisam ser eliminados (via fixação de gauge) para que a teoria fique com o número correto de graus de liberdade. No capítulo 4 trataremos da hamiltonização e quantização da teoria, onde ficará mais claro essa discussão.

Da equação (3.113), é possível observar que tomando o "limite" para o caso sem spin (obtido fazendo as variáveis fermiônicas irem à zero), a lagrangiana recai na expressão (3.12) para uma partícula livre de spin 0 (sem spin), sendo uma extensão natural do modelo para englobar os graus de liberdade inseridos pela descrição do spin. Ela também apresenta um limite não massivo, obtido via

$$S^{(nãomas.)} = \lim_{m,\psi_5 \to 0} S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\dot{\psi}^\mu \psi_\mu - \frac{i}{2e}\chi\psi^\mu \dot{x}_\mu \right\} + \frac{i}{2}\psi_\mu(\tau_1)\,\psi^\mu(\tau_2)\,, \tag{3.119}$$

onde o limite $\psi_5 \to 0$ é inserido para lembrar que a variável só é utilizada para acoplar a massa no vínculo $\mathcal{J}$ [9], visto que no caso não massivo, os vínculos de primeira classe satisfazem a mesma álgebra (3.74), com

$$\mathcal{J}^{(nãomas.)} = \psi^\mu p_\mu \approx 0, \qquad \mathcal{H}^{(nãomas.)} = p^2 \approx 0. \tag{3.120}$$

As equações de movimento obtidas de (3.112) via princípio variacional são:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}^\mu}{e} - \frac{i}{2e}\chi\psi^\mu\right) &= 0, \\ \dot{\psi}^\mu - \frac{1}{2e}\chi\dot{x}^\mu &= 0, \\ 2\dot{\psi}_5 - m\chi &= 0, \\ \frac{1}{e}\psi^\mu \dot{x}_\mu - m\psi_5 &= 0, \\ \dot{x}^2 - i\chi\psi^\mu\dot{x}_\mu - e^2m^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.121}$$

Da mesma forma que no caso de partícula sem spin, nós temos dois campos auxiliares que apresentam uma liberdade de gauge por assumirem valores arbitrários, permitindo que se possa fazer duas escolhas (uma para cada campo) para eliminar os graus de liberdade a mais presentes na teoria. Assim, vemos que sob a fixação [9]

$$e = \frac{1}{m}, \qquad \chi = 0, \tag{3.122}$$

as equações de movimento assumem a forma

$$\frac{d}{d\tau}(m\dot{x}^\mu) = 0, \quad \dot{\psi}^\mu = 0, \quad \dot{\psi}_5 = 0, \quad \dot{x}.\psi = \psi_5, \quad \dot{x}^2 = 1, \tag{3.123}$$

que expressam uma partícula relativística livre no referencial do tempo próprio, com spin constante, visto que, aplicando a equação de movimento para ψ^μ na definição (3.109) do spin, temos

$$\dot{S}^{\mu\nu} = 0. \tag{3.124}$$

Quando tomamos o limite não massivo da teoria, as equações de movimento resultantes de (3.119) são:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}^\mu}{e} - \frac{i}{2e}\chi\psi^\mu\right) = 0, \qquad \dot{\psi}^\mu - \frac{1}{2e}\chi\dot{x}^\mu = 0, \\ &\psi^\mu\dot{x}_\mu = 0, \qquad\qquad \dot{x}^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.125}$$

De (3.125), vemos que o referencial já se encontra no tempo próprio, mas as equações de movimento não possuem a forma de uma partícula livre. Como a partícula é não massiva, podemos fixar o gauge utilizando

$$e = 1, \qquad \chi = 0, \tag{3.126}$$

para obter

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{x}^\mu) = 0, \qquad \dot{\psi}^\mu = 0, \qquad \dot{x}.\psi = 0, \qquad \dot{x}^2 = 0, \tag{3.127}$$

que descrevem uma partícula não massiva livre. Mas ao contrário do caso massivo, nós ainda não sabemos se o spin é conservado, ou melhor, sequer temos uma definição para o spin.

Para contornar este problema, vamos retomar a discussão feita anteriormente, onde concluímos que não era possível construir uma projeção do momento angular na direção ortogonal a p^μ, pois ele é um vetor nulo. Ao invés de utilizarmos simplesmente uma direção ortogonal, nós podemos construir uma base local com os vetores $\left(p, k, e_{(1)}, e_{(2)}\right)$, obedecendo as relações

$$p.k = 1, \quad k^2 = 0, \quad p.e_{(i)} = k.e_{(i)} = 0, \quad e_{(i)}.e_{(j)} = \delta_{ij}, \tag{3.128}$$

e definir um escalar Σ que seja a projeção de $J^{\mu\nu}$ no plano $\left(e_{(1)}, e_{(2)}\right)$:

$$\Sigma = J_{\mu\nu}e^\mu_{(1)}e^\nu_{(2)} = i\epsilon_{jkm}\psi^k\psi^m\frac{p_j}{|\mathbf{p}|}. \tag{3.129}$$

Esse escalar é invariante por translações e representa a projeção de $J^{\mu\nu}$ na direção de movimento em qualquer referencial de Lorentz, sendo portanto a helicidade da partícula [10]. A relação entre a helicidade e o 4-vetor de spin é dada pela relação

$$S_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}p^\sigma \approx \Sigma p_\mu, \tag{3.130}$$

de onde obtemos, no referencial de repouso, o vetor de spin clássico

$$S_k = -\frac{i}{2}\epsilon_{knm}\psi_n\psi_m, \tag{3.131}$$

análogo ao obtido em (3.66).

Capítulo 4

Quantização de Partículas Livres

Como no capítulo anterior nos preocupamos com a descrição clássica de partículas livres, neste capítulo seremos um pouco mais pragmáticos e utilizaremos o método de hamiltonização de Dirac [5-7] para obter as equações quânticas que descrevem partículas livres.

4.1 Partícula de Spin 0

Conforme (3.19), a lagrangiana que descreve uma partícula relativística não massiva é

$$L_{(nãomas.)} = \frac{1}{2e}\dot{x}^2. \tag{4.1}$$

Seguindo o procedimento de hamiltonização, definimos os momentos conjugados na forma

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{e}\dot{x}_\mu, \qquad p_e = \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0, \tag{4.2}$$

de onde surge o vínculo primário

$$\phi_e = p_e \approx 0. \tag{4.3}$$

A partir de (4.2) e (4.3), podemos definir a hamiltoniana canônica

$$H_c = \dot{x}^\mu p_\mu - L = \frac{1}{2}ep^2, \tag{4.4}$$

e a hamiltoniana primária

$$H_p = H_c + u_e\phi_e. \tag{4.5}$$

Impondo condição de consistência no vínculo ϕ_e, obtemos

$$\dot{\phi}_e = \{\phi_e, H_p\} = -\frac{1}{2}p^2 \approx 0, \tag{4.6}$$

que fornece o vínculo secundário

$$\varphi = p^2 \approx 0. \tag{4.7}$$

O sistema não apresenta mais vínculos, pois

$$\dot{\varphi} = \{\varphi, H_p\} = 0. \tag{4.8}$$

Como os dois vínculos possuem parênteses de Poisson entre si iguais a zero, a teoria possui dois vínculos de primeira classe,

$$\varphi^{(1)} = p_e \approx 0, \qquad \varphi^{(2)} = p^2 \approx 0, \tag{4.9}$$

permitindo que a hamiltoniana primária seja escrita somente em termos deles:

$$H_p = \frac{e}{2}\varphi^{(2)} + u_e \varphi^{(1)}. \tag{4.10}$$

Com a hamiltoniana primária, podemos calcular a equação de movimento para o campo auxiliar e,

$$\dot{e} = \{e, H_p\} = u_e, \tag{4.11}$$

de onde observamos a arbitrariedade da equação de movimento devido à presença do multiplicador de Lagrange.

Para realizar o processo de quantização, os parênteses de Poisson clássicos devem ser identificados com as relações de comutação quânticas entre os operadores na forma

$$\{x^\mu, p_\nu\} \to i\left[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu\right], \tag{4.12}$$

fornecendo

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = -i\delta^\mu_\nu. \tag{4.13}$$

Os vínculos de primeira classe devem aniquilar os estados físicos do sistema. Conforme (4.9), nós temos dois vínculos de primeira classe, mas como $p_e \approx 0$, é possível fixar o multiplicador u_e inserindo o vínculo adicional

$$\Omega = e - 1 \approx 0, \tag{4.14}$$

que fixa o multiplicador de Lagrange e permite que o vínculo $\varphi^{(1)}$ seja eliminado, restando somente $\varphi^{(2)}$. Com essa fixação obtemos a equação de movimento

$$\ddot{x}^\mu = 0, \tag{4.15}$$

que descreve uma partícula livre.

Assim temos a equação que define os estados físicos do espaço de Hilbert:

$$\hat{p}^2|\Psi_{fisico}\rangle = 0. \tag{4.16}$$

Utilizando os operadores na representação das posições, com $\hat{p}_\mu = i\partial_\mu$, a equação (4.16) assume a forma

$$\partial^2 \Psi(x) = 0, \tag{4.17}$$

que é o limite não massivo da equação de Klein-Gordon satisfeita pela função de onda.

No caso massivo, partimos da lagrangiana (3.18)

$$L = \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}em^2, \tag{4.18}$$

que fornece os momentos conjugados

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{e}\dot{x}_\mu \qquad p_e = \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0, \tag{4.19}$$

e o vínculo primário

$$\phi_e = p_e \approx 0, \tag{4.20}$$

semelhante ao caso não massivo. As hamiltonianas canônica e primária são escritas na forma

$$H_c = \dot{x}^\mu p_\mu - L = \frac{1}{2}e\left(p^2 - m^2\right), \tag{4.21}$$

$$H_p = H_c + u_e\phi_e, \tag{4.22}$$

e a condição de consistência sobre ϕ_e fornece

$$\dot{\phi}_e = \{\phi_e, H_p\} = -\frac{1}{2}\left(p^2 - m^2\right) \approx 0. \tag{4.23}$$

Assim temos somente um vínculo secundário

$$\varphi = p^2 - m^2 \approx 0, \tag{4.24}$$

visto que

$$\dot{\varphi} = \{\varphi, H_p\} = 0. \tag{4.25}$$

Os parênteses de Poisson entre os dois vínculos é nulo, inferindo que ambos são de primeira classe:

$$\varphi^{(1)} = p_e \approx 0, \qquad \varphi^{(2)} = p^2 - m^2 \approx 0. \tag{4.26}$$

A hamiltoniana primária escrita em termos dos vínculos de primeira classe assume a forma

$$H_p = \frac{e}{2}\varphi^{(2)} + u_e\varphi^{(1)}, \tag{4.27}$$

e também fornece o mesmo tipo de arbitrariedade para o campo auxiliar,

$$\dot{e} = \{e, H_p\} = u_e. \tag{4.28}$$

Tendo em vista a parte clássica discutida no capítulo anterior, e a escolha de gauge feita na quantização do caso não massivo, vemos que inserindo o vínculo adicional

$$\Omega = e - \frac{1}{m} \approx 0, \tag{4.29}$$

nós fixamos o multiplicador de Lagrange e eliminamos o vínculo $\varphi^{(1)}$. Com essa fixação obtemos a equação de movimento para uma partícula livre massiva:

$$m\ddot{x}^{\mu} = 0. \tag{4.30}$$

O processo de quantização leva então a equação

$$\left(\hat{p}^2 - m^2\right)|\Psi_{fisico}\rangle = 0, \tag{4.31}$$

que na representação das posições assume a forma

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\Psi(x) = 0. \tag{4.32}$$

Essa é a equação de Klein-Gordon satisfeita pela função de onda $\Psi(x)$. Analisando os dois processos de quantização, vemos que tanto no nível clássico (ação e equações de movimento), como no nível quântico (equação de onda), a descrição de uma partícula massiva admite o limite de massa nula $m \to 0$.

4.2 Partícula de Spin 1/2

Da mesma forma feita no caso da partícula com spin 0, partimos da lagrangiana não massiva (3.119)

$$L^{(1/2)}_{(nãomas.)} = \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\dot{\psi}^{\mu}\psi_{\mu} - \frac{1}{2e}\chi\psi^{\mu}\dot{x}_{\mu}, \tag{4.33}$$

que fornece os momentos conjugados

$$\begin{aligned} p_{\mu} &= \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial \dot{x}^{\mu}} = \frac{1}{e}\dot{x}_{\mu} - \frac{i}{2e}\chi\psi_{\mu}, \qquad \pi_{\mu} = \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial \dot{\psi}^{\mu}} = \frac{i}{2}\psi_{\mu} \\ p_e &= \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial \dot{e}} = 0, \qquad\qquad \pi_{\chi} = \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial \dot{\chi}} = 0, \end{aligned} \tag{4.34}$$

e os vínculos primários

$$\phi^{\mu} = \pi^{\mu} - \frac{i}{2}\psi^{\mu} \approx 0, \qquad \phi_e = p_e \approx 0, \qquad \phi_{\chi} = \pi_{\chi} \approx 0. \tag{4.35}$$

As hamiltonianas canônica e primária são escritas na forma

$$H_c = \dot{x}^{\mu}p_{\mu} + \frac{i}{2}\dot{\psi}^{\mu}\psi_{\mu} - L^{(1/2)} = \frac{1}{2}\left(ep^2 + i\chi\psi^{\mu}p_{\mu}\right), \tag{4.36}$$

$$H_p = H_c + \phi^{\mu}u_{\mu} + \phi_{\chi}u_{\chi} + u_e\phi_e. \tag{4.37}$$

Impondo condições de consistência nos vínculos obtemos

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}_\mu &= \{\phi_\mu, H_p\} = \frac{i}{2}\chi p_\mu - u_\mu \approx 0, \\
\dot{\phi}_e &= \{\phi_e, H_p\} = -\frac{1}{2}p^2 \approx 0, \\
\dot{\phi}_\chi &= \{\phi_\chi, H_p\} = -\frac{i}{2}\psi^\mu p_\mu \approx 0.
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

Essas equações fixam o multiplicador de Lagrange

$$
u_\mu = \frac{i}{2}\chi p_\mu, \tag{4.39}
$$

e fornecem os vínculos secundários

$$
\varphi^{(1)} = p^2 \approx 0, \qquad \varphi^{(2)} = \psi^\mu p_\mu \approx 0. \tag{4.40}
$$

O sistema não apresenta mais vínculos, pois

$$
\dot{\varphi}^{(1)} = \left\{\varphi^{(1)}, H_p\right\} = 0, \qquad \dot{\varphi}^{(2)} = \left\{\varphi^{(2)}, H_p\right\} = -\frac{1}{2}\chi p^2 \approx 0. \tag{4.41}
$$

Os únicos parênteses de Poisson não nulos entre os vínculos são:

$$
\{\phi^\mu, \phi^\nu\} = -i\eta^{\mu\nu}, \qquad \left\{\phi^\mu, \varphi^{(2)}\right\} = -ip^\mu. \tag{4.42}
$$

Assim, é possível tomar uma combinação linear entre os vínculos para escrever um conjunto de vínculos de primeira classe

$$
\begin{aligned}
&\phi^{(1)} = \phi_e \approx 0, \qquad \phi^{(2)} = \phi_\chi \approx 0, \qquad \phi^{(3)} = \varphi^{(1)} \approx 0, \\
&\phi^{(4)} = \varphi^{(2)} - ip_\mu\phi^\mu \approx 0,
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

e manter somente um vínculo de segunda classe

$$
\phi^\mu = \pi^\mu - \frac{i}{2}\psi^\mu \approx 0. \tag{4.44}
$$

A hamiltoniana primária é escrita em termos dos vínculos de primeira classe, sendo fracamente igual à zero:

$$
H_p = \frac{1}{2}e\phi^{(3)} + \frac{i}{2}\chi\phi^{(4)} + \phi^{(2)}u_\chi + u_e\phi^{(1)} \approx 0. \tag{4.45}
$$

Como

$$
\{\phi^\mu, \phi^\nu\} = -i\eta^{\mu\nu} = C^{\mu\nu}, \qquad (C^{\mu\nu})^{-1} = i\eta_{\mu\nu}, \tag{4.46}
$$

o vínculo de segunda classe pode ser eliminado introduzindo os parênteses de Dirac

$$
\{A, B\}_D = \{A, B\} + \{A, \phi_\mu\}\left(C^{-1}\right)^{\mu\nu}\{\phi_\nu, B\} = \{A, B\} + i\{A, \phi_\mu\}\{\phi^\mu, B\}. \tag{4.47}
$$

Sob esses novos parênteses, temos as relações básicas

$$\{x^\mu, p_\nu\}_D = \delta^\mu_\nu, \qquad \{\psi^\mu, \psi^\nu\}_D = i\eta^{\mu\nu}, \tag{4.48}$$

que, sob o processo de quantização, fornecem a álgebra dos operadores quânticos

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = -i\delta^\mu_\nu, \qquad \left[\hat{\psi}^\mu, \hat{\psi}^\nu\right]_+ = \eta^{\mu\nu}, \tag{4.49}$$

lembrando que as os parênteses de Dirac entre variáveis fermiônicas são identificados com anti-comutadores.

Utilizando a hamiltoniana primária (4.45), vemos que as equações de movimento para os campos e e χ são:

$$\dot{e} = \{e, H_p\}_D = u_e, \qquad \dot{\chi} = \{\chi, H_p\}_D = u_\chi. \tag{4.50}$$

Tendo em mente a escolha do gauge (tempo próprio) no contexto clássico, inserimos os vínculos adicionais

$$\Omega^{(1)} = e - 1 \approx 0, \qquad \Omega^{(2)} = \chi \approx 0, \tag{4.51}$$

que fixam os multiplicadores de Lagrange e eliminam os vínculos $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(2)}$, visto que os quatro vínculos se tornam de segunda classe e não alteram os parênteses de Dirac (4.47). As equações de movimento assumem a forma:

$$\ddot{x}^\mu = 0, \qquad \dot{\psi}^\mu = 0 \tag{4.52}$$

Restam somente dois vínculos de primeira classe:

$$\varphi^{(1)} = p^2 \approx 0, \qquad \varphi^{(2)} = \psi^\mu p_\mu \approx 0. \tag{4.53}$$

Usando a representação

$$\hat{\psi}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^\mu, \tag{4.54}$$

que satisfaz a álgebra (4.49), onde γ^μ são as matrizes de Dirac, os estados físicos do espaço de Hilbert devem satisfazem as equações

$$\gamma_\mu \hat{p}^\mu |\Psi_{fisico}\rangle = 0, \qquad \hat{p}^2 |\Psi_{fisico}\rangle = 0, \tag{4.55}$$

Na representação das posições, essas equações assumem a forma

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu)_a^b \, \Psi_b(x) = 0, \qquad \partial^2 \Psi_a(x) = 0, \tag{4.56}$$

que são o limite não massivo das equação de Dirac e de Klein-Gordon satisfeitas pelo espinor de 4 componentes $\Psi_a(x)$ ($a = 1, ..., 4$ é o índice espinorial).

No caso massivo, partimos da lagrangiana (3.113)

$$L^{(1/2)} = \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}em^2 + \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}^\mu\psi_\mu - \dot{\psi}_5\psi_5\right) - \frac{i}{2e}\chi\psi^\mu\dot{x}_\mu + \frac{i}{2}m\chi\psi_5, \tag{4.57}$$

que fornece os momentos conjugados

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{e}\left(\dot{x}_\mu - \frac{i}{2}\chi\psi_\mu\right), \qquad \pi_\mu = \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial \dot{\psi}^\mu} = \frac{i}{2}\psi_\mu, \\ \pi_5 &= \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial \dot{\psi}_5} = -\frac{i}{2}\psi_5, \qquad p_e = \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial \dot{e}} = 0, \qquad \pi_\chi = \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial \dot{\chi}} = 0, \end{aligned} \tag{4.58}$$

e os vínculos primários

$$\begin{aligned} &\phi^\mu = \pi^\mu - \frac{i}{2}\psi^\mu \approx 0, \qquad \phi_5 = \pi_5 + \frac{i}{2}\psi_5 \approx 0, \qquad \phi_e = p_e \approx 0, \\ &\phi_\chi = \pi_\chi \approx 0. \end{aligned} \tag{4.59}$$

As hamiltonianas canônica e primária são escritas na forma

$$H_c = \frac{1}{2}e\left(p^2 - m^2\right) + \frac{i}{2}\chi\left(\psi^\mu p_\mu - m\psi_5\right), \tag{4.60}$$

$$H_p = H_c + u_\mu\phi^\mu + u_5\phi_5 + u_e\phi_e + u_\chi\phi_\chi. \tag{4.61}$$

Impondo condição de consistência nos vínculos, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^\mu &= \{\phi^\mu, H_p\} = i\left(\frac{1}{2}\chi p^\mu + u^\mu\right) \approx 0, \\ \dot{\phi}_5 &= \{\phi_5, H_p\} = -\frac{i}{2}\left(m\chi + u_5\right) \approx 0, \\ \dot{\phi}_e &= \{\phi_e, H_p\} = -\frac{1}{2}\left(p^2 - m^2\right) \approx 0, \\ \dot{\phi}_\chi &= \{\phi_\chi, H_p\} = -\frac{i}{2}\left(\psi^\mu p_\mu - m\psi_5\right) \approx 0. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Essas condições fixam os multiplicadores

$$u^\mu = -\frac{1}{2}\chi p^\mu, \qquad u_5 = -m\chi, \tag{4.63}$$

e fornecem os vínculos secundários

$$\varphi^{(1)} = p^2 - m^2 \approx 0, \qquad \varphi^{(2)} = \psi^\mu p_\mu - m\psi_5 \approx 0. \tag{4.64}$$

O sistema não apresenta mais vínculos, uma vez que

$$\dot{\varphi}^{(1)} = \left\{\varphi^{(1)}, H_p\right\} = 0, \qquad \dot{\varphi}^{(2)} = \left\{\varphi^{(2)}, H_p\right\} = \frac{1}{2}\chi\left(p^2 - m^2\right) \approx 0. \tag{4.65}$$

Os únicos parênteses de Poisson não nulos entre os vínculos que são:

$$\begin{aligned}
&\{\phi^\mu, \phi^\nu\} = -i\eta^{\mu\nu}, \qquad \{\phi_5, \phi_5\} = -i, \qquad \left\{\phi^\mu, \varphi^{(2)}\right\} = -ip^\mu, \\
&\left\{\phi_5, \varphi^{(2)}\right\} = m.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Assim é possível tomar uma combinação linear entre os vínculos para escrever um conjunto de vínculos de primeira classe

$$\begin{aligned}
&\phi^{(1)} = \phi_e \approx 0, \qquad \phi^{(2)} = \phi_\chi \approx 0, \qquad \phi^{(3)} = \varphi^{(1)} \approx 0, \\
&\phi^{(4)} = \varphi^{(2)} - ip_\mu\phi^\mu - im\phi_5 \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.67}$$

e manter dois vínculos de segunda classe

$$\phi^\mu = \pi^\mu - \frac{i}{2}\psi^\mu \approx 0, \qquad \phi_5 = \pi_5 + \frac{i}{2}\psi_5. \tag{4.68}$$

Dessa forma a hamiltoniana primária é escrita em termos dos vínculos de primeira classe, sendo fracamente igual à zero:

$$H_p = \frac{1}{2}e\phi^{(3)} + \frac{i}{2}\chi\phi^{(4)} + u_e\phi^{(1)} + u_\chi\phi^{(2)}. \tag{4.69}$$

Como

$$\{\phi_5, \phi_5\} = -i = C_5, \qquad (C_5)^{-1} = i, \tag{4.70}$$

e utilizando o resultado (4.46) já calculado no caso não massivo, é possível construir os parênteses de Dirac

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} + i\{A, \phi^\mu\}\{\phi_\mu, B\} - i\{A, \phi_5\}\{\phi_5, B\}, \tag{4.71}$$

e eliminar os vínculos de segunda classe da teoria. Sob os novos parênteses, temos as relações básicas

$$\{x^\mu, p_\nu\}_D = \delta^\mu_\nu, \qquad \{\psi^\mu, \psi^\nu\}_D = i\eta^{\mu\nu}, \qquad \{\psi_5, \psi_5\}_D = -i, \tag{4.72}$$

que na quantização fornece a álgebra dos operadores

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = -i\delta^\mu_\nu, \qquad \left[\hat{\psi}^\mu, \hat{\psi}^\nu\right]_+ = \eta^{\mu\nu}, \qquad \left[\hat{\psi}_5, \hat{\psi}_5\right]_+ = -1. \tag{4.73}$$

Semelhante ao caso não massivo, a hamiltoniana primária (339) fornece as equações de movimento

$$\dot{e} = \{e, H_p\}_D = u_e, \qquad \dot{\chi} = \{\chi, H_p\}_D = u_\chi, \tag{4.74}$$

de onde concluímos que a fixação do gauge via imposição dos vínculos adicionais

$$\Omega^{(1)} = e - \frac{1}{m} \approx 0, \qquad \Omega^{(2)} = \chi \approx 0, \tag{4.75}$$

eliminam os vínculos $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(2)}$ da teoria, restando somente dois vínculos de primeira classe:

$$\varphi^{(1)} = p^2 - m^2 \approx 0, \qquad \varphi^{(2)} = \psi^\mu p_\mu - m\psi_5 \approx 0. \tag{4.76}$$

Sob a fixação de gauge, obtemos as equações de movimento

$$m\ddot{x}^\mu = 0, \qquad \dot{\psi}^\mu = 0, \tag{4.77}$$

que descrevem uma partícula livre.

Se utilizarmos a representação

$$\hat{\psi}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_5\gamma^\mu, \qquad \hat{\psi}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_5, \tag{4.78}$$

que satisfaz a álgebra (4.73), com

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \tag{4.79}$$

tal que

$$(\gamma_5)^2 = -1, \qquad [\gamma_5, \gamma_\mu]_+ = 0, \tag{4.80}$$

os estados físicos do sistema devem satisfazer as equações

$$\gamma_5 \left(\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m\right) |\Psi_{fisico}\rangle = 0, \qquad \left(\hat{p}^2 - m^2\right) |\Psi_{fisico}\rangle = 0. \tag{4.81}$$

Na representação das posições essas equações assumem a forma

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)_a^b \Psi_b(x) = 0, \qquad \left(\partial^2 + m^2\right) \Psi_a(x) = 0, \tag{4.82}$$

que são as equações de Dirac e Klein-Gordon satisfeitas pelo espinor $\Psi_a(x)$.

Capítulo 5

Interação Eletromagnética de Partículas Relativísticas

Neste capítulo consideramos a interação com um campo eletromagnético de fundo, partindo de um modelo para partículas de spin 0 [1,2], e obtendo a descrição para spin 1/2 da mesma forma que no caso livre, a partir da equação de Dirac com acoplamento mínimo [8,10]. Realizamos a quantização para o caso massivo [8,10-13], e por último analisamos o limite não massivo da teoria.

5.1 Partículas de Spin 0

A ação de uma partícula que se move em um campo eletromagnético é composta de duas partes: uma que descreve a partícula livre (ação livre) e um termo que descreve a interação, que deve conter grandezas características da partícula e do campo [1]. As propriedades da partícula são definidas (no caso da interação com o campo) por um único parâmetro, a carga elétrica g, enquanto as propriedades do campo são caracterizadas pelo 4-vetor (4-potencial) A_μ. As grandezas são expressas na ação por meio do termo

$$S_{int} = \int_{x_1}^{x_2} g A_\mu dx^\mu = \int_{\tau_1}^{\tau_2} g A_\mu \dot{x}^\mu d\tau, \tag{5.1}$$

com as funções sendo tomadas ao longo da linha de universo da partícula. Somando com a parte da partícula livre (3.18), a ação que descreve a interação de uma partícula carregada com um campo eletromagnético de fundo é

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}em^2 + g\dot{x}^\mu A_\mu \right\}. \tag{5.2}$$

As equações de movimento obtidas via princípio variacional são:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{e}\dot{x}^\mu + gA^\mu\right) - g\dot{x}_\nu \partial^\mu A^\nu = 0, \tag{5.3}$$

$$\frac{1}{e^2}\dot{x}^2 - m^2 = 0. \tag{5.4}$$

Utilizando a fixação de gauge do tempo próprio $e = 1/m$, e observando que

$$\frac{d}{d\tau}A^{\mu} = \dot{x}^{\nu}\partial_{\nu}A^{\mu}, \qquad F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}, \tag{5.5}$$

onde $F^{\mu\nu}$ é o tensor de campo eletromagnético, as equações (5.3) são reescritas na forma

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}^{\mu}\right) = g\dot{x}_{\nu}F^{\mu\nu}. \tag{5.6}$$

Identificando

$$E^{a} = F^{0a}, \qquad B^{a} = \epsilon^{abc}F_{bc}, \tag{5.7}$$

onde E^k e B^k são as componentes dos campos elétrico e magnético, obtemos a expressão para a força de Lorentz

$$m\ddot{\mathbf{x}} = g\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right). \tag{5.8}$$

Então vemos que as equações de movimento na forma covariante (5.6) descrevem uma partícula com carga elétrica g interagindo com um campo eletromagnético externo, quando o campo produzido pela partícula é muito pequeno em comparação ao campo externo.

Para que a teoria seja consistente, nós precisamos verificar três propriedades que devem ser satisfeitas pela ação (5.1): ela deve descrever uma partícula carregada para permitir a interação eletromagnética; a invariancia de gauge do campo eletromagnético deve ser preservada; a interação não deve quebrar a invariancia sob reparametrizações satisfeita pela teoria livre. Para mostrar a primeira, vamos considerar um 4-vetor de corrente elétrica associado à partícula, na forma [2]

$$j^{\mu}\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g\dot{z}^{\mu}\delta^{4}\left[x - z\left(\tau\right)\right]d\tau, \tag{5.9}$$

onde $j^{\mu} = (\rho, \mathbf{j})$, com ρ sendo a densidade de carga e $\mathbf{j}$ o vetor de corrente elétrica. A demonstração de que a corrente definida acima satisfaz a equação de continuidade é direta:

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = g\int_{-\infty}^{\infty}\dot{z}^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\delta^{4}\left[x - z\left(\tau\right)\right]d\tau = -g\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\frac{d}{d\tau}\delta\left[x - z\left(\tau\right)\right] = 0. \tag{5.10}$$

Considerando que esse vetor é um termo de fonte interagindo com o campo eletromagnético, a ação que descreve a interação é na forma

$$\begin{aligned} S_{int} &= \int d^{4}x j_{\mu}\left(x\right)A^{\mu}\left(x\right) = g\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int d^{4}x'\dot{x}'_{\mu}A^{\mu}\left(x'\right)\delta^{4}\left[x - x'\left(\tau\right)\right] \\ &= \int g\dot{x}_{\mu}A^{\mu}\left(x\right)d\tau, \end{aligned} \tag{5.11}$$

ou seja, igual ao termo de interação inferido na equação (5.1), o que nos mostra que a ação descreve uma partícula carregada sob interação.

A invariancia de gauge pode ser observada diretamente da ação, visto o campo A^μ admite a transformação

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \tag{5.12}$$

Sob (5.12) temos

$$S'_{int} = S_{int} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} g j^\mu \partial_\mu \Lambda d\tau = S_{int} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} g \left\{ \partial_\mu \left(j^\mu \Lambda \right) - \partial_\mu j^\mu \Lambda \right\} d\tau = S_{int}. \tag{5.13}$$

Como o primeiro termo na integral a direita é uma divergência e o segundo é zero devido a (5.10), a invariancia de gauge é assegurada.

Sob as transformações de reparametrizações (3.115) vemos que a lagrangiana de interação presente em (5.1)

$$L_{int} = g A_\mu \dot{x}^\mu \tag{5.14}$$

se transforma como uma derivada total

$$\delta L_{int} = \frac{d}{d\tau} \left(\varepsilon L_{int} \right), \tag{5.15}$$

mantendo a invariancia já presente no caso livre.

5.2 Partículas de Spin 1/2

Para descrecer a interação do spin, vamos seguir a mesma metodologia do caso livre, analisando o comportamento da equação da Dirac sob a interação com o campo eletromagnético e obter a estrutura dos vínculos na formulação clássica [10].

A interação entre os campos livres carregados com o campo eletromagnético é feita sob o processo de acoplamento minímo, que corresponde à substituição

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \left(x \right). \tag{5.16}$$

Inserindo (5.16) na equação de Dirac, ela é escrita na forma

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu - m \right) \Psi \left(x \right) = 0. \tag{5.17}$$

Introduzindo as variáveis de Grassmann ψ^μ e ψ_5 definidas em (3.68), obtemos o vínculo de primeira classe

$$\mathcal{J} = \psi^\mu p_\mu - g\psi^\mu A_\mu \left(x \right) - m\psi_5 \approx 0, \tag{5.18}$$

e da exigência que a álgebra da teoria interagente seja a mesma do caso livre, i.e.,

$$\left\{ \mathcal{H}, \mathcal{H} \right\}_D = \left\{ \mathcal{H}, \mathcal{J} \right\}_D = 0, \qquad \left\{ \mathcal{J}, \mathcal{J} \right\}_D = i\mathcal{H}, \tag{5.19}$$

obtemos o segundo vínculo de primeira classe

$$\mathcal{H} = (p_\mu - gA_\mu)^2 - m^2 - ig\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}(x) \approx 0. \tag{5.20}$$

Com os dois vínculos em mãos, a ação pode ser construída com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} S^{(1/2)} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ \dot{x}^\mu p_\mu + \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}^\mu\psi_\mu - \dot{\psi}_5\psi_5\right) + gA_\mu\dot{x}^\mu - N\mathcal{H} - iM\mathcal{J} \right\} \\ &+\frac{i}{2}\left[\psi_\mu(\tau_1)\psi^\mu(\tau_2) - \psi_5(\tau_1)\psi_5(\tau_2)\right]. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Inserindo os campos auxiliares via transformação

$$e = 2N, \qquad \chi = 2M, \tag{5.22}$$

e utilizando a expressão

$$p^\mu = \frac{1}{2N}\left(\dot{x}^\mu - iM\psi^\mu\right) + gA^\mu, \tag{5.23}$$

que é obtida de $\delta S/\delta p_\mu = 0$, a ação é escrita na forma

$$\begin{aligned} S^{(1/2)} &= \int d\tau \Big\{ \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}^\mu\psi_\mu - \dot{\psi}_5\psi_5\right) - \frac{i}{2e}\chi\psi^\mu\dot{x}_\mu + \frac{1}{2}em^2 + im\chi\psi_5 \\ &+ g\dot{x}^\mu A_\mu + \frac{ig}{2}e\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}\Big\} + \frac{i}{2}\left[\psi_\mu(\tau_1)\psi^\mu(\tau_2) - \psi_5(\tau_1)\psi_5(\tau_2)\right], \end{aligned} \tag{5.24}$$

que fornece a lagrangiana

$$\begin{aligned} L^{(1/2)} &= \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}^\mu\psi_\mu - \dot{\psi}_5\psi_5\right) - \frac{i}{2e}\chi\psi^\mu\dot{x}_\mu + \frac{1}{2}em^2 + im\chi\psi_5 \\ &+ g\dot{x}^\mu A_\mu + \frac{ig}{2}e\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Nessa equação é possível observar que o efeito da interação eletromagnética está inteiramente contido no termo

$$L_{int} = g\dot{x}^\mu A_\mu + \frac{ig}{2}e\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}, \tag{5.26}$$

que é somado com a lagrangiana (3.113) que descreve uma partícula livre. Esse termo é invariante sob reparametrizações (3.115),

$$\delta L_{int} = \frac{d}{d\tau}\left(\varepsilon L_{int}\right), \tag{5.27}$$

e sob as transformações de supersimetria (3.117),

$$\delta L_{int} = \frac{d}{d\tau}\left(i\alpha g\psi^\mu A_\mu\right). \tag{5.28}$$

As equações de movimento obtidas variando a ação (5.24) são:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{e}\dot{x}_\mu - \frac{i}{2e}\chi\psi_\mu\right) = g\dot{x}^\nu F_{\mu\nu} + \frac{ig}{2}e\psi^\alpha\psi^\beta\partial_\mu F_{\alpha\beta}, \tag{5.29}$$

$$\dot{\psi}^\mu = \frac{i}{2e}\chi\dot{x}^\mu + geF^{\mu\nu}\psi_\nu, \tag{5.30}$$

$$\dot{x}^2 = e^2\left(m^2 + ig\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}\right) + i\chi\psi^\mu\dot{x}_\mu, \tag{5.31}$$

$$\psi^\mu\dot{x}_\mu = em\psi_5, \tag{5.32}$$

$$\dot{\psi}_5 = -im\chi \tag{5.33}$$

Para analisar as equações de movimento corretamente é necessário "enfraquecer" um pouco a definição do tensor de spin (3.109), escrevendo-o na forma

$$S^{\mu\nu} = i\psi^\mu\psi^\nu. \tag{5.34}$$

O efeito dessa redefinição é que, sob a interação ele passa a não ser ortogonal ao momento p^μ, mas continua satisfazendo a álgebra do grupo de Lorentz e mantém a propriedade de invariancia translacional (na referência [10] essa expressão para o tensor de spin também é utilizada, mas ela é obtida sob a fixação de gauge $\psi_5 = 0$). Sob (5.34), a equação (5.31) é escrita na forma

$$\dot{x}^2 = e^2\left(m^2 + gS^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) + i\chi\psi^\mu\dot{x}_\mu. \tag{5.35}$$

Observando essa equação, poderíamos, a priori, escolher a fixação de gauge

$$e = \left(m^2 + gS^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)^{-1/2}, \qquad \chi = 0, \tag{5.36}$$

para obter as equações de movimento no tempo próprio, pois ela fornece $\dot{x}^2 = 1$. O problema é que essa condição não pode ser obtida via fixação de gauge (no formalismo hamiltoniano), visto que o vínculo adicional que precisa ser imposto não satisfaz as condições de consistência (não é constante de movimento). Mas se nos preocuparmos somente com a dinâmica clássica, podemos simplesmente escolher a inversão do campo auxiliar e, eliminando esse grau de liberdade, e fazer a fixação de gauge $\psi_5 = 0$ para obter a descrição clássica de uma partícula relativística [10].

Como estamos interessados em uma teoria que descreva uma partícula clássica interagente e que forneça a quantização desejada, devemos procurar outra forma de fixar o gauge. Já que não podemos fazer uma fixação de forma a levar as equações para o tempo próprio, vamos analisar a fixação mais simples que podemos imaginar: a do caso livre. Se escolhermos

$$e = 1/m, \qquad \chi = 0, \tag{5.37}$$

as equações de movimento (5.29 - 5.33) sob (5.37) assumem a forma

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x}^{\mu} = g\dot{x}^{\nu}F_{\mu\nu} + \frac{g}{2m}S^{\alpha\beta}\partial_{\mu}F_{\alpha\beta}, \qquad \dot{\psi}_{\mu} = \frac{g}{m}\psi^{\nu}F_{\mu\nu}, \\
&\dot{x}^2 = 1 + \frac{g}{m^2}S^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \qquad \psi^{\mu}\dot{x}_{\mu} = \psi_5, \qquad \dot{\psi}_5 = 0. \qquad (5.38)
\end{aligned}
$$

Apesar de as equações não se encontrarem no referencial do tempo próprio, podemos ver que a expressão da força de Lorentz é obtida com uma correção devido à interação do spin com o campo eletromagnético, e o tensor de spin $S^{\mu\nu}$ satisfaz a equação

$$
\dot{S}^{\mu\nu} = \frac{g}{m}\left\{F^{\mu\rho}S_{\rho}^{\ \nu} + F^{\nu\rho}S_{\mu}^{\ \rho}\right\}, \qquad (5.39)
$$

que é a generalização relativística mais simples que se pode construir para descrever uma partícula interagindo com o campo eletromagnético, dotada de spin e fator giromagnético $\eta_{\text{gir.}} = 2$ [2]. Essa conclusão pode ser observada analisando o limite não relativístico da teoria, onde escolhemos $\psi^0 \approx 0$. Utilizando a expressão do vetor de spin

$$
S_a = -\frac{i}{2}\epsilon_{abc}\psi_b\psi_c, \qquad (5.40)
$$

obtemos as equações de movimento

$$
\dot{\mathbf{S}} = \frac{g}{m}\mathbf{S}\times\mathbf{B}, \qquad m\ddot{\mathbf{x}} = g\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) + \frac{g}{m}\nabla\left(\mathbf{B}.\mathbf{S}\right), \qquad (5.41)
$$

que descrevem uma partícula com spin movendo-se em um campo eletromagnético de fundo, também com correções devido ao acoplamento do spin.

5.3 Quantização

Começando pelo modelo de spin 0, partimos da lagrangiana (5.2)

$$
L = \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}em^2 + g\dot{x}^{\mu}A_{\mu}. \qquad (5.42)
$$

Ela fornece os momentos conjugados

$$
p_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} = \frac{1}{e}\dot{x}_{\mu} + gA_{\mu}, \qquad p_e = \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0, \qquad (5.43)
$$

de onde surge o vínculo primário

$$
\phi_e = p_e \approx 0. \qquad (5.44)
$$

As hamiltonianas canônica e primária são escritas na forma

$$
\begin{aligned}
H_c &= \dot{x}^{\mu}p_{\mu} - L = \frac{e}{2}\left[(p^{\mu} - gA^{\mu})^2 - m^2\right], \qquad (5.45) \\
H_p &= H_c + u_e\phi_e, \qquad (5.46)
\end{aligned}
$$

e a condição de consistência sobre ϕ_e fornece

$$\dot{\phi}_e = \{\phi_e, H_p\} = -\frac{1}{2}\left[(p^\mu - gA^\mu)^2 - m^2\right] \approx 0. \tag{5.47}$$

Assim temos somente um vínculo secundário

$$\varphi = \left[(p^\mu - gA^\mu)^2 - m^2\right] \approx 0, \tag{5.48}$$

visto que $\dot{\varphi} = 0$. Os parênteses de Poisson entre os dois vínculos é nulo, inferindo que ambos são de primeira classe. Para eliminar o vínculo ϕ_e, impomos o vínculo adicional

$$\Omega = e - \frac{1}{m} \approx 0. \tag{5.49}$$

Sob essa escolha, a equação de movimento assume a forma da força de Lorentz

$$m\ddot{x}^\mu = gF^{\mu\nu}\dot{x}_\nu. \tag{5.50}$$

Assim temos somente o vínculo φ, que sob o processo de quantização leva então a equação

$$\left(\left[\hat{p}^\mu - g\hat{A}^\mu(x)\right]^2 - m^2\right)|\Psi_{fisico}\rangle = 0. \tag{5.51}$$

Na representação das posições, a equação (5.51) é escrita na forma

$$\left(\partial^2 + ig\partial_\mu A^\mu + igA_\mu\partial^\mu - g^2A^2 - m^2\right)\Psi(x) = 0. \tag{5.52}$$

Para o caso de uma partícula com spin 1/2, temos a lagrangiana (3.26)

$$\begin{aligned} L^{(1/2)} \quad &= \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}^\mu\psi_\mu - \dot{\psi}_5\psi_5\right) - \frac{i}{2e}\chi\psi^\mu\dot{x}_\mu + \frac{1}{2}em^2 + im\chi\psi_5 \\ &+ g\dot{x}^\mu A_\mu + \frac{ig}{2}e\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{5.53}$$

da qual obtemos os momentos conjugados

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial\dot{x}^\mu} = \frac{1}{e}\dot{x}_\mu - \frac{i}{2e}\chi\psi_\mu + gA_\mu, \\ \pi_\mu &= \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial\dot{\psi}^\mu} = \frac{i}{2}\psi_\mu, \qquad \pi_5 = \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial\dot{\psi}_5} = -\frac{i}{2}\psi_5, \\ p_e &= \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial\dot{e}} = 0, \qquad\quad \pi_\chi = \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial\dot{\chi}} = 0. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Essas equações levam aos vínculos primários

$$\phi^\mu = \pi^\mu - \frac{i}{2}\psi^\mu \approx 0, \qquad \phi_5 = \pi_5 + \frac{i}{2}\psi_5 \approx 0, \qquad \phi_e = p_e \approx 0, \qquad \phi_\chi = \pi_\chi \approx 0. \tag{5.55}$$

Assim, as hamiltonianas canônica e primária são escritas na forma

$$H_c = \frac{e}{2}\left[(p_\mu - gA_\mu)^2 - m^2 - ig\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}\right] + \frac{i}{2}\chi\left[(p_\mu - gA_\mu)\psi^\mu - m\psi_5\right] \tag{5.56}$$

$$H_p = H_c + \phi^\mu u_\mu + \phi_5 u_5 + \phi_\chi u_\chi + u_e\phi_e. \tag{5.57}$$

Impondo condições de consistência nos vínculos, obtemos

$$\dot{\phi}^\mu = \{\phi^\mu, H_p\} = -igeF^{\nu\mu}\psi_\nu + \frac{i}{2}\chi\left(p^\mu - gA^\mu\right) + iu^\mu \approx 0, \tag{5.58}$$

$$\dot{\phi}_5 = \{\phi_5, H_p\} = -\frac{i}{2}m\chi - iu_5 \approx 0, \tag{5.59}$$

$$\dot{\phi}_e = \{\phi_e, H_p\} = -\frac{1}{2}\left[(p_\mu - gA_\mu)^2 - m^2 - ig\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}\right] \approx 0, \tag{5.60}$$

$$\dot{\phi}_\chi = \{\phi_\chi, H_p\} = -\frac{i}{2}\left[(p_\mu - gA_\mu)\psi^\mu + m\psi_5\right] \approx 0, \tag{5.61}$$

que fixam os multiplicadores

$$u^\mu = -\frac{1}{2}\chi\left(p^\mu - gA^\mu\right)\chi - geF^{\mu\nu}\psi_\nu, \qquad u_5 = -\frac{1}{2}m\chi, \tag{5.62}$$

e fornecem os vínculos secundários

$$\begin{aligned}
\varphi^{(1)} &= (p_\mu - gA_\mu)^2 - m^2 - ig\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu} \approx 0,\\
\varphi^{(2)} &= (p_\mu - gA_\mu)\psi^\mu - m\psi_5 \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.63}$$

O sistema não apresenta mais vínculos, visto que

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}^{(1)} &= \{\chi_1, H_p\} = 0,\\
\dot{\varphi}^{(2)} &= \{\chi_2, H_p\} = \frac{1}{2}\chi\left[(p_\mu - gA_\mu)^2 - m^2 - ig\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}\right] \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Os únicos parênteses de Poisson não nulos entre os vínculos são:

$$\begin{aligned}
&\{\chi_1, \chi_2\} = 2g\left(p^\mu - gA^\mu\right)F_{\mu\nu}\psi^\nu, \qquad \{\chi_1, \phi^\mu\} = 2igF^{\alpha\mu}\psi_\alpha,\\
&\{\chi_2, \chi_2\} = g\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}, \qquad \{\chi_2, \phi^\mu\} = -\left(p^\mu - gA^\mu\right),\\
&\{\chi_2, \phi_5\} = m, \qquad \{\phi^\mu, \phi^\nu\} = i\eta^{\mu\nu}, \qquad \{\phi_5, \phi_5\} = -i.
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Assim é possível tomar uma combinação linear dos vínculos para escrever um conjunto de primeira classe

$$\begin{aligned}
&\phi^{(1)} = \phi_e \approx 0, \qquad \phi^{(2)} = \phi_\chi \approx 0,\\
&\phi^{(3)} = \varphi^{(1)} - 2gF_{\mu\nu}\psi^\mu\phi^\nu \approx 0,\\
&\phi^{(4)} = \varphi^{(2)} - i\left(p_\nu - gA_\nu\right)\phi^\nu - im\phi_5 \approx 0,
\end{aligned} \tag{5.66}$$

e manter dois vínculos de segunda classe

$$\phi^{\mu} = \pi^{\mu} - \frac{i}{2}\psi^{\mu} \approx 0, \qquad \phi_5 = \pi_5 + \frac{i}{2}\psi_5 \approx 0. \tag{5.67}$$

A hamiltoniana primária é então escrita completamente em termos dos vínculos de primeira classe,

$$H_p = \frac{e}{2}\phi^{(3)} + \frac{i}{2}\chi\phi^{(4)} + \phi^{(2)}u_\chi + u_e\phi^{(1)}, \tag{5.68}$$

sendo fracamente igual a zero. Os vínculos de segunda classe são eliminados introduzindo os parênteses de Dirac

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} + i\{A, \phi^{\mu}\}\{\phi_{\mu}, B\} - i\{A, \phi_5\}\{\phi_5, B\}, \tag{5.69}$$

que fornecem a álgebra para as variáveis de Grassmann

$$\{\psi^{\mu}, \psi^{\nu}\}_D = i\eta^{\mu\nu}, \qquad \{\psi_5, \psi_5\}_D = -i. \tag{5.70}$$

Uma vez construídos os patênteses de Dirac, restam ainda os quatro vínculos de primeira classe resultantes de (5.66),

$$\begin{aligned}
&\phi_e = p_e \approx 0, \qquad \phi_\chi = \pi_\chi \approx 0, \\
&\varphi^{(1)} = (p_\mu - gA_\mu)^2 - m^2 - ig\psi^{\mu}\psi^{\nu}F_{\mu\nu} \approx 0, \\
&\varphi^{(2)} = (p_\mu - gA_\mu)\psi^{\mu} - m\psi_5 \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.71}$$

Os vínculos ϕ_e e ϕ_χ podem ser eliminados introduzindo os vínculos adicionais, conforme discutido na seção anterior,

$$\Omega_1 = e - \frac{1}{m} \approx 0, \qquad \Omega_2 = \chi \approx 0, \tag{5.72}$$

que fixam os multiplicadores de Lagrange u_e e u_χ presentes em (5.68), e fornecem as equações de movimento

$$m\ddot{x}^{\mu} = gF^{\mu\nu}\dot{x}_\nu + \frac{g}{2m}S^{\alpha\beta}\partial^{\mu}F_{\alpha\beta}, \qquad \dot{\psi}^{\mu} = \frac{g}{m}F^{\mu\nu}\psi_\nu, \qquad \dot{\psi}_5 = 0. \tag{5.73}$$

A identificação dos parênteses de Dirac com as relações de comutação fornece a álgebra

$$[\hat{x}^{\mu}, \hat{p}^{\nu}] = -i\eta^{\mu\nu}, \qquad \left[\hat{\psi}^{\mu}, \hat{\psi}^{\nu}\right]_+ = \eta^{\mu\nu}, \qquad \left[\hat{\psi}_5, \hat{\psi}_5\right]_+ = -1, \tag{5.74}$$

satisfeita pelos operadores quânticos que atuam no espaço de Hilbert. Utilizando a representação

$$\hat{\psi}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_5\gamma_\mu, \qquad \hat{\psi}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_5, \tag{5.75}$$

os vínculos de primeira classe $\varphi^{(1)}$ e $\varphi^{(2)}$ fornecem as equações quânticas satisfeitas pelos estados físicos do sistema:

$$\begin{aligned}\left[\gamma^\mu\left(p_\mu - gA_\mu\right) - m\right]\left|\Psi_{fisico}\right\rangle &= 0 && (5.76)\\ \left[\left(\hat{p}_\mu - g\hat{A}_\mu\right)^2 - m^2 - ig\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}\right]\left|\Psi_{fisico}\right\rangle &= 0, && (5.77)\end{aligned}$$

Na representação das posições, essas equações assumem a forma

$$\begin{aligned}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu - m\right)\Psi\left(x\right) &= 0, && (5.78)\\ \left(\partial^2 + ig\partial_\mu A^\mu + igA_\mu\partial^\mu - g^2A^2 - m^2 - ig\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}\right)\Psi\left(x\right) &= 0. && (5.79)\end{aligned}$$

5.4 Limite Não Massivo

Como visto na seção anterior, o efeito da interação está inteiramente contido na lagrangiana de interação (5.26), que é somada à lagrangiana que descreve uma partícula livre. Assim a interação não afeta (a princípio) em nada o limite não massivo da teoria, visto que a parte de interação não contém a massa da partícula (ela aparece somente na parte livre da lagrangiana).

Vamos primeiro analisar o caso de uma partícula de spin 0. Tomando o limite $m \to 0$ em (5.2), obtemos

$$S_{n\tilde{a}omas.} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\left\{\frac{1}{2e}\dot{x}^2 + g\dot{x}^\mu A_\mu\right\}. \tag{5.80}$$

Essa ação fornece as equações de movimento:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{e}\dot{x}^\mu\right) = g\dot{x}_\nu F^{\mu\nu}, \qquad \dot{x}^2 = 0. \tag{5.81}$$

Como podemos observar, as equações já se encontram no referencial do tempo próprio. Então, se escolhermos a fixação de gauge

$$e = 1, \tag{5.82}$$

a equação que obtemos é

$$\ddot{x}^\mu = g\dot{x}_\nu F^{\mu\nu}. \tag{5.83}$$

que sob a expansão nas componentes resulta em

$$\mathbf{E} = -\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{v}.\mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{5.84}$$

onde $|\mathbf{v}| = 1$. Da equação acima vemos que a direção de movimento da partícula é ortogonal à direção do campo elétrico $\mathbf{E}$.

Para realizar o processo de quantização da teoria, partimos da lagrangiana

$$L = \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + g\dot{x}^\mu A_\mu, \tag{5.85}$$

de onde obtemos os momentos conjugados

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{e}\dot{x}_\mu + gA_\mu, \qquad p_e = \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0, \tag{5.86}$$

e o vínculo primário

$$\phi_e = p_e \approx 0. \tag{5.87}$$

As hamiltonianas canônica e primária são escritas na forma

$$H_c = \frac{e}{2}\left(p^\mu - gA^\mu\right)^2, \qquad H_p = H_c + u_e\phi_e. \tag{5.88}$$

Impondo condição de consistência no vínculo ϕ_e, obtemos

$$\dot{\phi}_e = \{\phi_e, H_p\} = -\frac{1}{2}\left(p^\mu - gA^\mu\right)^2 \approx 0, \tag{5.89}$$

que fornece o vínculo secundário

$$\varphi = \left(p^\mu - gA^\mu\right)^2 \approx 0. \tag{5.90}$$

O sistema não apresenta mais vínculos, pois $\dot{\varphi} = 0$. Como os dois vínculos possuem parênteses de Poisson entre si igual a zero, a teoria possui dois vínculos de primeira classe:

$$\varphi^{(1)} = \phi_e \approx 0, \qquad \varphi^{(2)} = \varphi \approx 0. \tag{5.91}$$

O vínculo ϕ_e é eliminado impondo o vínculo adicional

$$\Omega = e - 1 \approx 0. \tag{5.92}$$

A equação de movimento resultante dessa fixação é:

$$\ddot{x}^\mu = gF^{\mu\nu}\dot{x}_\nu \tag{5.93}$$

Assim temos somente um vínculo de primeira classe φ, que no processo de quantização fornece

$$\left[\hat{p}^\mu - g\hat{A}^\mu(x)\right]^2 |\Psi_{fisico}\rangle = 0. \tag{5.94}$$

Utilizando a representação das posições, a equação acima assume a forma

$$\left(\partial^2 + ig\partial_\mu A^\mu + igA_\mu\partial^\mu - g^2A^2\right)\Psi(x) = 0. \tag{5.95}$$

Comparando com as equações (5.51) e (5.52), vemos que o resultado obtido é o limite não massivo da teoria quântica.

Agora vamos analisar o caso de uma partícula de spin 1/2. Tomando o limite não massivo em (5.24), obtemos

$$\begin{aligned} S^{(1/2)}_{nãomas.} &= \int d\tau \left\{ \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\dot{\psi}^\mu \psi_\mu - \frac{i}{2e}\chi \psi^\mu \dot{x}_\mu + g\dot{x}^\mu A_\mu + \frac{ig}{2} e\psi^\mu \psi^\nu F_{\mu\nu} \right\} \\ &+ \frac{i}{2}\psi_\mu(\tau_1)\,\psi^\mu(\tau_2)\,, \end{aligned} \tag{5.96}$$

Essa ação fornece as equações de movimento

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{e}\dot{x}_\mu - \frac{i}{2e}\chi\psi_\mu\right) = g\dot{x}^\nu F_{\mu\nu} + \frac{ig}{2} e\psi^\alpha\psi^\beta \partial_\mu F_{\alpha\beta}, \tag{5.97}$$

$$\dot{\psi}^\mu = \frac{i}{2e}\chi\dot{x}^\mu + geF^{\mu\nu}\psi_\nu, \tag{5.98}$$

$$\dot{x}^2 = ige^2\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu} + i\chi\psi^\mu\dot{x}_\mu, \tag{5.99}$$

$$\psi^\mu\dot{x}_\mu = 0. \tag{5.100}$$

Aqui nós enfrentamos o problema de como fixar o gauge de forma a levar as equações para o referencial do tempo próprio. Observando as equações (5.99) e (5.100), a princípio nós poderíamos escolher $\chi = 0$ e e como qualquer combinação envolvendo $\psi^\mu\psi^\nu$, pois essa condição leva à $\dot{x}^2 = 0$. Mas sob essa fixação as equações de movimento não assumem uma forma que possa ser interpretada facilmente. Mas se nos contentarmos em fixar o gauge da mesma forma que no caso livre, escolhendo $e = 1$ e $\chi = 0$, as equações de movimento são escritas como

$$\ddot{x}^\mu = g\dot{x}^\nu F_{\mu\nu} + \frac{g}{2}S^{\alpha\beta}\partial^\mu F_{\alpha\beta}, \qquad \dot{\psi}^\mu = gF^{\mu\nu}\psi_\nu, \qquad \dot{x}^2 = gS^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \qquad \psi^\mu\dot{x}_\mu = 0. \tag{5.101}$$

Essas equações permitem afirmar que a força de Lorentz admite uma correção devido à interação do spin com o campo eletromagnético, e que a equação de movimento para o spin admite a forma

$$\dot{\mathbf{S}} = g\mathbf{S} \times \mathbf{B}, \tag{5.102}$$

que apresenta a mesma estrutura da equação (5.41), embora não seja o limite não massivo da mesma.

Embora a análise das equações de movimento não seja satisfatória, visto que não temos informações claras com respeito à dinâmica da partícula, o processo de quantização leva às equações para a função de onda na forma como esperamos que ocorra para o limite de massa nula, como mostraremos a seguir.

Partindo da lagrangiana não massiva

$$L^{(1/2)}_{(nãomas.)} = \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\dot{\psi}^\mu\psi_\mu - \frac{i}{2e}\chi\dot{x}^\mu\psi_\mu + g\dot{x}^\mu A_\mu + \frac{ig}{2}e\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}, \tag{5.103}$$

os momentos conjugados são obtidos na forma

$$
\begin{aligned}
p_\mu &= \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{e}\dot{x}_\mu - \frac{i}{2e}\chi\psi_\mu + gA_\mu, \qquad \pi_\mu = \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial \dot{\psi}^\mu} = \frac{i}{2}\psi_\mu, \\
p_e &= \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial \dot{e}} = 0, \qquad \pi_\chi = \frac{\partial L^{(1/2)}}{\partial \dot{\chi}} = 0,
\end{aligned} \tag{5.104}
$$

levando aos vínculos primários

$$
\phi^\mu = \pi^\mu - \frac{i}{2}\psi^\mu \approx 0, \qquad \phi_e = p_e \approx 0, \qquad \phi_\chi = \pi_\chi \approx 0. \tag{5.105}
$$

As hamiltonianas canônica e primária assumem a forma

$$
H_c = \frac{e}{2}\left[(p_\mu - gA_\mu)^2 - \frac{ig}{2}\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}\right] + \frac{i}{2}\chi\left(p_\mu - gA_\mu\right)\psi^\mu, \tag{5.106}
$$

$$
H_p = H_c + \phi^\mu u_\mu + \phi_\chi u_\chi + u_e\phi_e. \tag{5.107}
$$

Impondo condições de consistência nos vínculos, obtemos

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}^\mu &= \{\phi^\mu, H_p\} = -\frac{i}{2}\left(p^\mu - gA^\mu\right)\chi - igeF^\mu_\nu\psi^\nu + iu^\mu \approx 0, \\
\dot{\phi}_e &= \{\phi_e, H_p\} = -\frac{1}{2}\left[(p_\mu - gA_\mu)^2 - ig\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}\right] \approx 0,
\end{aligned} \tag{5.108}
$$

$$
\dot{\phi}_\chi = \{\phi_\chi, H_p\} = -\frac{i}{2}\left(p_\mu - gA_\mu\right)\psi^\mu \approx 0, \tag{5.109}
$$

que fixam o multiplicador

$$
u^\mu = -\frac{1}{2}\chi\left(p^\mu - gA^\mu\right)\chi - geF^{\mu\nu}\psi_\nu, \tag{5.110}
$$

e fornecem os vínculos secundários

$$
\varphi^{(1)} = (p_\mu - gA_\mu)^2 - ig\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu} \approx 0, \tag{5.111}
$$

$$
\varphi^{(2)} = \left(p_\mu - gA_\mu\right)\psi^\mu \approx 0. \tag{5.112}
$$

O sistema não apresenta mais vínculos, visto que

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}^{(1)} &= \{\chi_1, H_p\} = 0, \\
\dot{\varphi}^{(2)} &= \{\chi_2, H_p\} = \frac{1}{2}\chi\left[(p_\mu - gA_\mu)^2 - ig\psi^\mu\psi^\nu F_{\mu\nu}\right] \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.113}
$$

Tomando uma combinação linear dos vínculos é possível escrever

$$
\begin{aligned}
\phi^{(1)} &= \phi_e \approx 0, \qquad \phi^{(2)} = \phi_\chi \approx 0, \\
\phi^{(3)} &= \varphi^{(1)} - 2gF_{\mu\nu}\psi^\mu\phi^\nu \approx 0, \\
\phi^{(4)} &= \varphi^{(2)} - i\left(p_\nu - gA_\nu\right)\phi^\nu \approx 0,
\end{aligned} \tag{5.114}
$$

como vínculos de primeira classe e manter

$$\phi^{\mu} = \pi^{\mu} - \frac{i}{2}\psi^{\mu} \approx 0 \tag{5.115}$$

como vínculo de segunda classe. Assim a hamiltoniana primária é escrita completamente em termos dos vínculos de primeira classe, sendo fracamente igual a zero:

$$H_p = \frac{e}{2}\phi^{(3)} + \frac{i}{2}\chi\phi^{(4)} + \phi^{(2)}u_{\chi} + u_e\phi^{(1)}, \tag{5.116}$$

O vínculo de segunda classe são eliminados introduzindo os parênteses de Dirac

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} + i\,\{A, \phi^{\mu}\}\,\{\phi_{\mu}, B\}\,, \tag{5.117}$$

enquanto $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(2)}$ são eliminados inserindo os vínculos adicionais

$$\Omega_1 = e - 1 \approx 0, \qquad \Omega_2 = \chi \approx 0. \tag{5.118}$$

Sob essa fixação, as equações de movimento assumem a forma:

$$\ddot{x}^{\mu} = g\dot{x}^{\nu}F_{\mu\nu} + \frac{g}{2}S^{\alpha\beta}\partial^{\mu}F_{\alpha\beta}, \qquad \dot{\psi}^{\mu} = gF^{\mu\nu}\psi_{\nu}. \tag{5.119}$$

Assim sobram somente os vínculos de primeira classe

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= (p_{\mu} - gA_{\mu})^2 - ig\psi^{\mu}\psi^{\nu}F_{\mu\nu} \approx 0,\\ \varphi^{(2)} &= (p_{\mu} - gA_{\mu})\,\psi^{\mu} \approx 0.\end{aligned} \tag{5.120}$$

No processo de quantização eles fornecem as equações

$$\gamma^{\mu}\,(p_{\mu} - gA_{\mu})\,|\Psi_{fisico}\rangle \;=\; 0, \tag{5.121}$$

$$\left[\left(\hat{p}_{\mu} - g\hat{A}_{\mu}\right)^2 - ig\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}F_{\mu\nu}\right]|\Psi_{fisico}\rangle \;=\; 0, \tag{5.122}$$

que na representação das posições assumem a forma

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - g\gamma^{\mu}A_{\mu})\,\Psi(x) \;=\; 0, \tag{5.123}$$

$$\left(\partial^2 + ig\partial_{\mu}A^{\mu} + igA_{\mu}\partial^{\mu} - g^2A^2 - ig\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}F_{\mu\nu}\right)\Psi(x) \;=\; 0, \tag{5.124}$$

ou seja, esse resultado pode ser obtido tomando o limite $m \to 0$ em (5.78) e (5.79).

Capítulo 6

Extensão para partículas com spin arbitrário

Neste capítulo, mostraremos como a álgebra dos vínculos de primeira classe pode ser extendida para descrever partículas não massivas com spin arbitrário [14,15], fornecendo na quantização a equações de Bargmann-Wigner [16]. Veremos como a massa pode ser inserida [17-19] no modelo, e obtemos as equações quânticas que descrevem uma partícula de spin 1.

6.1 Generalização da Álgebra dos Vínculos

No caso de uma partícula não massiva de spin 1/2, nós tinhamos dois vínculos de primeira classe,

$$\mathcal{H} = p^2, \qquad \mathcal{J} = \psi^\mu p_\mu, \tag{6.1}$$

que satisfazem a àlgebra

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}_D = 0, \qquad \{\mathcal{H}, \mathcal{J}\}_D = 0, \qquad \{\mathcal{J}, \mathcal{J}\}_D = i\mathcal{H}. \tag{6.2}$$

Conforme [14], a generalização desse modelo para descrever partículas com spin arbitrário consiste em extender a álgebra para N transformações de supersimetria, e adicionar um gerador de transformações do grupo $O(N)$ [15], na forma

$$\begin{aligned}
&\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}_D = \{\mathcal{H}, \mathcal{J}_a\}_D = \{\mathcal{H}, Q_{ab}\}_D = 0, \\
&\{\mathcal{J}_a, \mathcal{J}_b\}_D = i\mathcal{H}\delta_{ab}, \qquad \{\mathcal{J}_a, Q_{bc}\}_D = i\left(\mathcal{J}_c\delta_{ab} - \mathcal{J}_b\delta_{ac}\right), \\
&\{Q_{ab}, Q_{cd}\}_D = i\left(-Q_{ac}\delta_{bd} + Q_{ad}\delta_{bc} - Q_{cb}\delta_{ad} + Q_{db}\delta_{ac}\right).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Nessa generalização, o spin da partícula é determinado pelo número de transformações de supersimetria presente na teoria. Da mesma forma que no caso de uma partícula de spin 1/2 tínhamos somente uma transformação, esse modelo fornece a descrição de uma partícula com spin N/2.

Uma representação da álgebra (6.3) é obtida com

$$\mathcal{H} = p^2, \qquad \mathcal{J}_a = \psi_a^\mu p_\mu, \qquad Q_{ab} = \psi_a^\mu \psi_{\mu b}, \tag{6.4}$$

onde ψ_n^μ satisfaz

$$\{\psi_n^\mu, \psi_m^\nu\}_D = i\eta^{\mu\nu}\delta_{nm}, \tag{6.5}$$

e os índices romanos satisfazem $a = 1, ..., N$. Com os geradores (6.4) podemos construir a ação do sistema:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{\dot{x}^\mu p_\mu + \frac{i}{2}\dot{\psi}_a^\mu \psi_{\mu a} - Np^2 - iM_a\psi_a^\mu p_\mu - iF_{ab}\psi_a^\mu \psi_{\mu b}\right\} \\ &+ \frac{i}{2}\psi_a^\mu (\tau_1)\, \psi_{\mu a} (\tau_2)\, . \end{aligned} \tag{6.6}$$

A hamiltoniana obtida da ação é uma combinação linear dos vínculos,

$$H = N\mathcal{H} + iM_a\mathcal{J}_a + iF_{ab}Q_{ab} = u_{ab}^A\phi_{ab}^A, \tag{6.7}$$

onde utilizamos a notação

$$u_{ab}^1 = N\delta_{a0}\delta_{b0}, \qquad u_{ab}^2 = iM_a\delta_{b0}, \qquad u_{ab}^3 = iF_{ab}, \tag{6.8}$$

$$\phi_{ab}^1 = \mathcal{H}\delta_{a0}\delta_{b0}, \qquad \phi_{ab}^2 = \mathcal{J}_a\delta_{b0}, \qquad \phi_{ab}^3 = Q_{ab}, \tag{6.9}$$

com $A = 1, 2, 3$. Devido à relação entre os vínculos de primeira classe e as transformações de gauge, vamos analisar a estrutura das transformações geradas pelos vínculos e como elas contribuem para as simetrias presentes na teoria. Para isso, seguimos o mesmo procedimento realizado na seção 4.2 para a partícula de spin 1/2. Considerando a transformação de gauge de uma função F das variáveis canônicas

$$\delta F(\tau) = \{F, \varepsilon(\tau)\mathcal{H} + i\alpha_a(\tau)\mathcal{J}_a + i\beta_{ab}(\tau)Q_{ab}\}_D = \left\{F, \epsilon_{ab}^A\phi_{ab}^A\right\}_D, \tag{6.10}$$

onde

$$\epsilon_{ab}^1 = \varepsilon\delta_{a0}\delta_{b0}, \qquad \epsilon_{ab}^2 = i\alpha_a\delta_{b0}, \qquad \epsilon_{ab}^3 = \beta_{ab}, \tag{6.11}$$

nós obtemos, sob transformações de supersimetria,

$$\delta x^\mu = \{x^\mu, i\alpha_a\mathcal{J}_a\}_D = i\alpha_a\psi_a^\mu, \qquad \delta\psi_n^\mu = \{\psi_n^\mu, i\alpha_a\mathcal{J}_a\}_D = \alpha_n p^\mu, \tag{6.12}$$

e sob rotações em $O(N)$

$$\delta x^\mu = \{x^\mu, i\beta_{ab}Q_{ab}\}_D = 0, \qquad \delta\psi_n^\mu = \{\psi_n^\mu, i\beta_{ab}Q_{ab}\}_D = 2\beta_{na}\psi_a^\mu. \tag{6.13}$$

As transformações dos multiplicadores de Lagrange, conforme (3.89), são na forma

$$\delta u_{nm}^C = \dot{\epsilon}_{nm}^C + \epsilon_{ab}^A K_{abcdnm}^{ABC} u_{cd}^B, \tag{6.14}$$

onde os coeficientes K_{abcdnm}^{ABC} são definidos a partir da relação

$$\left\{\epsilon_{ab}^A\phi_{ab}^A, \eta_{cd}^B\phi_{cd}^B\right\}_D = \epsilon_{ab}^A K_{abcdef}^{ABC}\eta_{cd}^B\phi_{ef}^C. \tag{6.15}$$

O cálculo explícito de (6.15) fornece

$$
\begin{aligned}
K^{ABC}_{abcdef} \;=\;& -i\delta^{A2}\delta^{B2}\delta^{C1}\delta_{b0}\delta_{d0}\delta_{ac}\delta_{e0}\delta_{f0}+i\delta^{A2}\delta^{B3}\delta^{C2}\delta_{b0}\left(\delta_{ac}\delta_{de}\delta_{f0}-\delta_{ad}\delta_{ce}\delta_{f0}\right)\\
&+i\delta^{A3}\delta^{B2}\delta^{C2}\delta_{d0}\left(\delta_{ca}\delta_{be}\delta_{f0}-\delta_{cb}\delta_{ae}\delta_{f0}\right)\\
&+i\delta^{A3}\delta^{B3}\delta^{C3}\left(-\delta_{bd}\delta_{ae}\delta_{cf}+\delta_{bc}\delta_{ae}\delta_{df}-\delta_{ad}\delta_{ce}\delta_{bf}+\delta_{ac}\delta_{de}\delta_{bf}\right). \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

que, inserido em (6.14) resulta nas transformações

$$
\begin{aligned}
&\delta N=\dot{\varepsilon}+i\alpha_a M_a, \qquad \delta M_a=\dot{\alpha}_a-2\left(\alpha_b F_{ba}-\beta_{ab}M_b\right),\\
&\delta F_{ab}=\dot{\beta}_{ab}+2\left(\beta_{ac}F_{bc}-\beta_{bc}F_{ac}\right). \qquad (6.17)
\end{aligned}
$$

O conjunto de transformações (6.12) e (6.13) junto com (6.17) (menos as transformações relacionadas ao parâmetro ε, como discutido na seção 4.2) podem ser implementadas para deixar a ação (6.6) invariante. Mas como ela ainda não se apresenta na forma final que utilizaremos no processo de quantização, vamos primeiro obter a expressão da lagrangiana do sistema, e depois analisar o comportamento dela sob as transformações. Comecemos introduzindo os campos auxiliares

$$
e=2N, \qquad M_a=2\chi_a, \qquad F_{ab}=2f_{ab}, \qquad (6.18)
$$

que, junto com a expressão

$$
p^\mu=\frac{1}{e}\dot{x}^\mu-\frac{i}{2e}\chi_a\psi^\mu_a, \qquad (6.19)
$$

obtida de $\delta S/\delta p_\mu=0$, nos permite escrever a ação (6.6) na forma

$$
\begin{aligned}
S^{(N/2)} \;=\;& \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\left\{\frac{1}{2e}\dot{x}^2+\frac{i}{2}\dot{\psi}^\mu_a\psi_{\mu a}-\frac{i}{2e}\chi_a\psi^\mu_a\dot{x}_\mu-\frac{1}{8e}\chi_a\psi^\mu_a\chi_b\psi_{\mu b}-\frac{i}{2}f_{ab}\psi^\mu_a\psi_{\mu b}\right\}\\
&+\frac{i}{2}\psi^\mu_a\left(\tau_1\right)\psi_{\mu a}\left(\tau_2\right). \qquad (6.20)
\end{aligned}
$$

Essa equação nos fornece a expressão para a lagrangiana

$$
L^{(N/2)}=\frac{1}{2e}\dot{x}^2+\frac{i}{2}\dot{\psi}^\mu_a\psi_{\mu a}-\frac{i}{2e}\chi_a\psi^\mu_a\dot{x}_\mu-\frac{1}{8e}\chi_a\psi^\mu_a\chi_b\psi_{\mu b}-\frac{i}{2}f_{ab}\psi^\mu_a\psi_{\mu b}, \qquad (6.21)
$$

que usaremos no processo de quantização. Agora analisemos o comportamento dessa lagrangiana sob as transformações de gauge. Sob a presença dos campos auxiliares, as transformações de supersimetria assumem a forma

$$
\begin{aligned}
&\delta x^\mu=i\alpha_a\psi^\mu_a, \qquad \delta\psi^\mu_a=\frac{1}{e}\alpha_a\left(\dot{x}^\mu-\frac{i}{2}\chi_b\psi^\mu_b\right), \qquad \delta e=i\alpha_a\chi_a,\\
&\delta\chi_a=2\left(\dot{\alpha}_a-\alpha_b f_{ba}\right), \qquad \delta f_{ab}=0, \qquad (6.22)
\end{aligned}
$$

onde utilizamos a equação (6.19). A ação é invariante sob essas transformações, visto que

$$\delta L^{(N/2)} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2e}\alpha_a\psi_a^\mu\dot{x}_\mu + \frac{1}{4e}\alpha_a\psi_{\mu a}\chi_b\psi_b^\mu\right). \tag{6.23}$$

Para as transformações do grupo $O\,(N)$, temos

$$\begin{aligned} &\delta x^\mu = 0, \qquad \delta e = 0, \qquad \delta\psi_a^\mu = 2\beta_{ab}\psi_b^\mu, \qquad \delta\chi_a = 2\beta_{\dashv\lfloor}\chi_{\lfloor}, \\ &\delta f_{ab} = 2\left(\dot{\beta}_{ab} + \beta_{ac}f_{bc} - \beta_{bc}f_{ac}\right), \end{aligned} \tag{6.24}$$

que, quando aplicadas à lagrangiana, fornecem

$$\delta L^{(N/2)} = 2i\dot{\beta}_{ab}\psi_b^\mu\psi_{\mu a} = 2i\dot{\beta}_{ab}Q_{ba} \approx 0. \tag{6.25}$$

Diferente das transformações de supersimetria, a invariancia da teoria é obtida somente na superfície de vínculos (ou, se preferir, quando utilizamos as equações de movimento, que veremos adiante), mas essa condição é suficiente para garantir a coerencia da teoria, visto que a dinâmica ocorre somente nesta superfície.

Para obter as transformações de reparametrização das variáveis, nós temos que ter em mente que a teoria é uma generalização da partícula de spin 1/2, que admite as transformações (3.115). Assim, nós mantemos a transformação das variáveis x^μ e ψ_n^μ como escalares e exigimos que as variáveis e, χ_a e f_{ab} se transformem como "densidades" (o argumento também é empregado à f_{ab} pois ela também é um campo auxiliar). Sob essas condições, as transformações são

$$\begin{aligned} &\delta x^\mu = \varepsilon\dot{x}^\mu, \qquad \delta\psi_a^\mu = \varepsilon\dot{\psi}_a^\mu, \qquad \delta e = \frac{d}{d\tau}\left(\varepsilon e\right), \\ &\delta\chi_a = \frac{d}{d\tau}\left(\varepsilon\chi_a\right), \qquad \delta f_{ab} = \frac{d}{d\tau}\left(\varepsilon f_{ab}\right), \end{aligned} \tag{6.26}$$

que fornecem

$$\delta L^{(N/2)} = \frac{d}{d\tau}\left(\varepsilon L^{(N/2)}\right). \tag{6.27}$$

Como último ponto, resta analisar a dinâmica clássica da teoria. Variando a ação (6.20), obtemos as equações de movimento

$$\frac{\delta S^{(N/2)}}{\delta x_\mu} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{e}\dot{x}^\mu - \frac{i}{2e}\chi_a\psi_a^\mu\right) = 0, \tag{6.28}$$

$$\frac{\delta S^{(N/2)}}{\delta\psi_{\mu a}} = \dot{\psi}_a^\mu + \frac{1}{2e}\chi_a\dot{x}^\mu + \frac{i}{4e}\chi_a\chi_b\psi_b^\mu + f_{ab}\psi_b^\mu = 0, \tag{6.29}$$

$$\frac{\delta S^{(N/2)}}{\delta e} = \dot{x}^2 - i\chi_a\psi_a^\mu\dot{x}_\mu - \frac{1}{4}\chi_a\psi_a^\mu\chi_b\psi_{\mu b} = 0, \tag{6.30}$$

$$\frac{\delta S^{(N/2)}}{\delta\chi_a} = \psi_a^\mu\dot{x}_\mu - \frac{i}{2}\psi_a^\mu\chi_b\psi_{\mu b} = 0, \tag{6.31}$$

$$\frac{\delta S^{(N/2)}}{\delta f_{ab}} = \psi_a^\mu\psi_{\mu b} = 0. \tag{6.32}$$

Sob a fixação de gauge

$$e = 1, \qquad \chi_a = 0, \qquad f_{ab} = 0, \tag{6.33}$$

elas são escritas na forma

$$\ddot{x}^\mu = 0, \qquad \dot{\psi}^\mu_a = 0, \qquad \dot{x}^2 = 0, \qquad \psi^\mu_a \dot{x}_\mu = 0, \qquad \psi^\mu_a \psi_{\mu b} = 0, \tag{6.34}$$

que descrevem uma partícula livre, no referencial do tempo próprio, com spin conservado, como esperávamos.

6.1.1 Quantização

Partindo da lagrangiana (6.21)

$$L^{(N/2)} = \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\dot{\psi}^\mu_a \psi_{\mu a} - \frac{i}{2e}\chi_a \psi^\mu_a \dot{x}_\mu - \frac{1}{8e}\chi_a \psi^\mu_a \chi_b \psi_{\mu b} - \frac{i}{2} f_{ab} \psi^\mu_a \psi_{\mu b}, \tag{6.35}$$

os momentos conjugados são

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{e}\dot{x}_\mu - \frac{i}{2e}\chi_a \psi_{\mu a}, \qquad \pi_{\mu a} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\mu_a} = \frac{i}{2}\psi_{\mu a}, \\ p_{(e)} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0, \qquad \pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_a} = 0, \qquad p_{ab} = \frac{\partial L}{\partial \dot{f}_{ab}} = 0, \end{aligned} \tag{6.36}$$

Dessas equações obtemos os vínculos primários

$$\begin{aligned} &\phi^\mu_a = \pi^\mu_a - \frac{i}{2}\psi^\mu_a \approx 0, \qquad \phi_a = \pi_a \approx 0, \qquad \phi_{(e)} = p_{(e)} \approx 0, \\ &\phi_{ab} = p_{ab} \approx 0, \end{aligned} \tag{6.37}$$

As hamiltonianas canônica e primária são escritas na forma

$$H_c = \frac{e}{2}p^2 + \frac{i}{2}\chi_a \psi^\mu_a p_\mu + \frac{i}{2} f_{ab} \psi^\mu_a \psi_{\mu b}, \tag{6.38}$$

$$H_p = H_c + \phi^\mu_a u_{\mu a} + \phi_\chi u_\chi + u_{(e)}\phi_{(e)} + u_{ab}\phi_{ab}. \tag{6.39}$$

Impondo as condições de consistência sobre os vínculos, obtemos

$$\dot{\phi}_{(e)} = \left\{\phi_{(e)}, H_p\right\} = -\frac{1}{2}p^2 \approx 0, \tag{6.40}$$

$$\dot{\phi}_a = \{\phi_a, H_p\} = -\frac{i}{2}\psi^\mu_a p_\mu \approx 0, \tag{6.41}$$

$$\dot{\phi}_{ab} = \{\phi_{ab}, H_p\} = -\frac{i}{2}\psi^\mu_a \psi_{\mu b} \approx 0, \tag{6.42}$$

$$\dot{\phi}^\mu_a = \{\phi^\mu_a, H_p\} = \frac{i}{2}\chi_a p^\mu - i f_{ab}\psi^\mu_b + i u^\mu_a \approx 0. \tag{6.43}$$

Essas equações fixam o multiplicador de Lagrange

$$u_a^\mu = -\frac{1}{2}\chi_a p^\mu + f_{ab}\psi_b^\mu, \tag{6.44}$$

e fornecem os vínculos secundários

$$\varphi^{(1)} = p^2 \approx 0, \qquad \varphi_a^{(2)} = \psi_a^\mu p_\mu \approx 0, \qquad \varphi_{ab}^{(3)} = \psi_a^\mu \psi_{\mu b} \approx 0. \tag{6.45}$$

O sistema não apresenta mais vínculos, pois

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}^{(1)} &= \left\{\varphi^{(1)}, H_p\right\} = 0, \\ \dot{\varphi}_a^{(2)} &= \left\{\varphi_a^{(2)}, H_p\right\} = \frac{i}{2}\chi_a \varphi^{(1)} + f_{ab}\varphi_b^{(2)} \approx 0, \\ \dot{\varphi}_{ab}^{(3)} &= \left\{\varphi_{ab}^{(3)}, H_p\right\} = \frac{i}{2}\chi_a \varphi_b^{(2)} - \frac{i}{2}\chi_b \varphi_a^{(2)} \approx 0. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Os únicos parênteses de Poisson não nulos entre os vínculos são

$$\begin{aligned} &\{\phi_a^\mu, \phi_b^\nu\} = i\eta^{\mu\nu}\delta_{ab}, \qquad \left\{\phi_a^\mu, \varphi_b^{(2)}\right\} = -p^\mu \delta_{ab} m, \\ &\left\{\phi_a^\mu, \varphi_{bc}^{(3)}\right\} = \psi_b^\mu \delta_{ac} - \psi_c^\mu \delta_{ab}. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Assim é possível tomar uma combinação linear entre os vínculos para escrever um conjunto de vínculos de primeira classe na forma

$$\begin{aligned} &\phi^{(1)} = \phi_{(e)} \approx 0, \qquad \phi_a^{(2)} = \phi_a \approx 0, \qquad \phi_{ab}^{(3)} = \phi_{ab} \approx 0, \qquad \phi^{(4)} = \varphi^{(1)} \approx 0, \\ &\phi_a^{(5)} = \varphi_a^{(2)} - ip_\mu \phi_a^\mu \approx 0, \qquad \phi_{ab}^{(6)} = \varphi_{ab}^{(3)} - i\psi_{\mu a}\phi_b^\mu + i\psi_{\mu b}\phi_a^\mu \approx 0, \end{aligned} \tag{6.48}$$

e manter um único vínculo de segunda classe

$$\phi_a^\mu = \pi_a^\mu - \frac{i}{2}\psi_a^\mu \approx 0. \tag{6.49}$$

A hamiltoniana primária é então escrita completamente em termos dos vínculos de primeira classe,

$$H_p = \frac{e}{2}\phi^{(4)} + \frac{i}{2}\chi_a \phi_a^{(5)} + \frac{i}{2} f_{ab}\phi_{ab}^{(6)} + \phi_a^{(2)} u_a + u_{(e)}\phi^{(1)} + u_{ab}\phi_{ab}^{(3)}, \tag{6.50}$$

e fornece as equações de movimento para os campos auxiliares

$$\dot{e} = \{e, H_p\} = u_{(e)}, \qquad \dot{\chi}_a = \{\chi_a, H_p\} = -u_a, \qquad \dot{f}_{ab} = \{f_{ab}, H_p\} = u_{ab}. \tag{6.51}$$

Como

$$C_{nm}^{\mu\nu} = \{\phi_n^\mu, \phi_m^\nu\} = i\eta^{\mu\nu}\delta_{nm}, \qquad \left(C_{nm}^{\mu\nu}\right)^{-1} = -i\eta^{\mu\nu}\delta_{nm}, \tag{6.52}$$

é possível construir os parênteses de Dirac

$$\begin{aligned} \{A,B\}_D &= \{A,B\} - \{A,\phi_{\mu a}\}\left(C^{\mu\nu}_{ab}\right)^{-1}\{\phi_{\nu b},B\} \\ &= \{A,B\} + i\{A,\phi_{\mu a}\}\{\phi^{\mu}_{a},B\}, \end{aligned} \tag{6.53}$$

e eliminar o vínculo de segunda classe da teoria. Mas ainda temos seis vínculos de primeira classe:

$$\begin{aligned} &\phi_{(e)} = p_{(e)} \approx 0, \qquad \phi_a = \pi_a \approx 0, \qquad \phi_{ab} = p_{ab} \approx 0, \qquad \varphi^{(1)} = p^2 \approx 0, \\ &\varphi^{(2)}_a = \psi^{\mu}_a p_{\mu} \approx 0, \qquad \varphi^{(3)}_{ab} = \psi^{\mu}_a \psi_{\mu b} \approx 0. \end{aligned} \tag{6.54}$$

Os vínculos $\phi_{(e)}$, ϕ_a e ϕ_{ab} podem ser eliminados introduzindo os vínculos adicionais

$$\Omega^{(1)} = e - 1 \approx 0, \qquad \Omega^{(2)}_a = \chi_a \approx 0, \qquad \Omega^{(3)}_{ab} = f_{ab} \approx 0. \tag{6.55}$$

Assim temos as relações básicas da teoria clássica

$$\{x^{\mu},p_{\nu}\}_D = \delta^{\mu}_{\nu}, \qquad \{\psi^{\mu}_a,\psi^{\nu}_b\}_D = i\eta^{\mu\nu}\delta_{ab}. \tag{6.56}$$

No processo de quantização, os operadores que atuam no espaço de Hilbert satisfazem a álgebra

$$[\hat{x}^{\mu},\hat{p}_{\nu}] = -i\delta^{\mu}_{\nu}, \qquad \left[\hat{\psi}^{\mu}_n,\hat{\psi}^{\nu}_m\right]_+ = \eta^{\mu\nu}\delta_{nm}. \tag{6.57}$$

Uma representação para os $\hat{\psi}^{\mu}_n$ é

$$\hat{\psi}^{\mu}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_* \otimes ... \otimes \gamma_* \otimes \Gamma^{\mu}_{(n)} \otimes \mathbf{1} \otimes ... \otimes \mathbf{1}, \tag{6.58}$$

onde $\gamma_* = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\mathbf{1}$ é o operador identidade e $\Gamma^{\mu}_{(n)}$ pode ser tanto $\gamma_*\gamma^{\mu}$ como γ^{μ}, situado na posição (n). Os três vínculos de primeira classe restantes

$$\varphi^{(1)} = p^2 \approx 0, \qquad \varphi^{(2)}_a = \psi^{\mu}_a p_{\mu} \approx 0, \qquad \varphi^{(3)}_{ab} = \psi^{\mu}_a \psi_{\mu b} \approx 0, \tag{6.59}$$

devem ser impostos como vínculos nos estados físicos do sistema pertencentes ao espaço de Hilbert. Na representação das posições, os estados são funções de onda com N índices espinoriais (multi-espinor). A aplicação dos vínculos na função de onda fornece

$$\partial^2 \Psi_{\alpha_1...\alpha_N}(x) = 0, \tag{6.60}$$

$$(\gamma^{\mu}\partial_{\mu})^{\alpha_n}_{\beta_n} \Psi_{\alpha_1...\alpha_n...\alpha_N}(x) = 0, \tag{6.61}$$

$$(\gamma^{\mu})^{\alpha_n}_{\beta_n}(\gamma_{\mu})^{\alpha_m}_{\beta_m} \Psi_{\alpha_1...\alpha_n...\alpha_m...\alpha_N}(x) = 0, \tag{6.62}$$

com $n < m$.

Se pegarmos uma matriz de Dirac qualquer Γ, contraída com o operador conjugadação e carga $C = i\gamma^2\gamma^0$, utilizado para subir e baixar os índices espinoriais, podemos reescrever (6.62) na forma

$$\left(C\gamma^\mu\Gamma\gamma_\mu\right)^{\alpha_n\alpha_m}\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots\alpha_m\ldots\alpha_N}(x) = 0. \tag{6.63}$$

Escolhendo Γ como sendo a matriz identidade $\mathbf{1}$, temos

$$(C)^{\alpha_n\alpha_m}\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots\alpha_m\ldots\alpha_N}(x) = 0, \tag{6.64}$$

onde C é anti-simétrico nos índices espinoriais. Agora, se escolhermos $\Gamma = \gamma^\mu$, obtemos a expressão

$$\left(C\gamma^\mu\right)^{\alpha_n\alpha_m}\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots\alpha_m\ldots\alpha_N}(x) = 0, \tag{6.65}$$

onde $C\gamma^\mu$ é simétrico nos índices. A interpretação dessas equações pode se torna mais clara se utilizamos a notação espinorial $SL(2, C)$ [23], onde os espinores de Dirac são representados por

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \tag{6.66}$$

e as as matrizes γ^μ na representação de Weyl assumem a forma

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.67}$$

com

$$\sigma^\mu = \left(-1, \sigma^n\right), \qquad \bar{\sigma}^\mu = \left(-1, -\sigma^n\right). \tag{6.68}$$

De (6.67), obtemos a representação dos operadores C e $C\gamma^\mu$:

$$C = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}, \qquad C\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2\sigma^\mu \\ -i\sigma^2\bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.69}$$

A equação (6.64),em termos das componentes, fornece

$$\varepsilon^{\alpha_n\alpha_m}\Psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots\alpha_m\ldots} = 0, \qquad \varepsilon^{\dot{\alpha}_n\dot{\alpha}_m}\Psi_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_n\ldots\dot{\alpha}_m\ldots} = 0. \tag{6.70}$$

Como $\varepsilon^{\alpha_n\alpha_m}$ e $\varepsilon^{\dot{\alpha}_n\dot{\alpha}_m}$ são anti-simétricos, o multi-espinor deve ser simétrico sob troca de índices $\alpha_n\alpha_m$ e $\dot{\alpha}_n\dot{\alpha}_m$. Analisando agora (6.65), temos

$$\sigma^{\alpha_n\dot{\alpha}_m}\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_m\ldots} = 0, \qquad \sigma^{\dot{\alpha}_n\alpha_m}\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_m\ldots\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_n\ldots} = 0. \tag{6.71}$$

Essa expressão nos diz que sob troca de um índice α_n por um $\dot{\alpha}_m$ o multi-espinor deve ser anti-simétrico, visto que $\sigma^{\alpha_n\dot{\alpha}_m}$ é simétrico sob a trocas entre α_n e $\dot{\alpha}_m$.

Assim é possível concluir que o vínculo não permite que o multi-espinor seja escrito com componentes misturadas de α_n e $\dot{\alpha}_m$, visto que ele se anula.

Analisando as equações (6.60) e (6.61) também em termos das componentes, obtemos

$$\partial^2\Psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_N} = 0, \qquad (\gamma^\mu\partial_\mu)_{\alpha_n}^{\beta_n}\Psi_{\alpha_1\ldots\beta_n\ldots\alpha_N} = 0, \tag{6.72}$$

$$\partial^2\Psi_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_N} = 0, \qquad (\gamma^\mu\partial_\mu)_{\dot{\alpha}_n}^{\dot{\beta}_n}\Psi_{\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\beta}_n\ldots\dot{\alpha}_N} = 0, \tag{6.73}$$

que descrevem partículas de spin N/2.

6.1.2 Partícula de spin 1

A partir do modelo de spin $N/2$, vamos nos restringir à duas transformações de supersimetria para descrever a teoria quântica de uma partícula de spin 1. Como o processo de quantização já foi realizado, não é necessário partir da lagrangiana e realizar o processo de hamiltonização novamente, visto que da ação (6.6)

$$\begin{aligned} S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{\dot{x}^\mu p_\mu + \frac{i}{2}\dot{\psi}_a^\mu\psi_{\mu a} - \frac{e}{2}p^2 - \frac{i}{2}\chi_a\psi_a^\mu p_\mu - \frac{i}{2}f_{ab}\psi_a^\mu\psi_{\mu b}\right\} \\ &+ \frac{i}{2}\psi_a^\mu(\tau_1)\,\psi_{\mu a}(\tau_2), \end{aligned} \tag{6.74}$$

(nessa expressão os campos auxiliares já foram inseridos) podemos visualizar os vínculos de primeira classe, e sabemos a álgebra fundamental dos operadores quânticos, que foi obtida em (6.57).

Considerando a ação acima no caso específico de 2 transformações de supersimetria, $a = 1, 2$, realizemos uma troca de variáveis (que se mostrará conveniente), introduzindo

$$\psi^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1^\mu + i\psi_2^\mu\right), \qquad \overline{\psi}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1^\mu - i\psi_2^\mu\right), \tag{6.75}$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_1 + i\chi_2\right), \qquad \bar{\chi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_1 - i\chi_2\right), \tag{6.76}$$

junto com

$$f_{ab} = f\epsilon_{ab}, \tag{6.77}$$

onde ϵ_{ab} é um símbolo anti-simétrico. Sob as novas variáveis, a ação é escrita na forma

$$\begin{aligned} S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{\dot{x}^\mu p_\mu + \frac{i}{2}\dot{\psi}^\mu\bar{\psi}_\mu - \frac{e}{2}p^2 - \frac{i}{2}\chi\bar{\psi}^\mu p_\mu - \frac{i}{2}\bar{\chi}\psi^\mu p_\mu - \frac{1}{2}f\left[\psi^\mu, \bar{\psi}_\mu\right]\right\} \\ &+ \frac{i}{2}\left[\psi^\mu(\tau_1)\,\overline{\psi}_\mu(\tau_2) + \overline{\psi}^\mu(\tau_1)\,\psi_\mu(\tau_2)\right], \end{aligned} \tag{6.78}$$

que fornece os vínculos de primeira classe

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(1)} = p^2 \approx 0, \qquad \varphi^{(2)} = \bar{\psi}^{\mu} p_{\mu} \approx 0, \qquad \varphi^{(3)} = \psi^{\mu} p_{\mu} \approx 0, \\
&\varphi^{(4)} = \left[\psi^{\mu}, \bar{\psi}_{\mu}\right] \approx 0.
\end{aligned} \tag{6.79}$$

De (6.57) vemos que os novos operadores fermiônicos satisfazem a álgebra

$$[\psi^{\mu}, \psi^{\nu}]_{+} = \left[\bar{\psi}^{\mu}, \bar{\psi}^{\nu}\right]_{+} = 0, \qquad \left[\psi^{\mu}, \bar{\psi}^{\nu}\right]_{+} = \eta^{\mu\nu}. \tag{6.80}$$

Observando que $\bar{\psi}^{\mu}$ forma um conjunto de operadores mutuamente anticomutantes, é possível encontrar uma base de auto-estados $|\alpha\rangle$ com auto valores α^{μ} também anticomutantes [17], i.e.,

$$\bar{\psi}^{\mu}|\alpha\rangle = \alpha^{\mu}|\alpha\rangle. \tag{6.81}$$

Então a função de onda que descreve o estado quântico deve possuir a estrutura

$$\Psi\left(x, \alpha\right) = \left(\langle x| \otimes \langle \alpha|\right)|\Psi\rangle, \tag{6.82}$$

admitindo uma expansão em série de potências de α^{μ}:

$$\begin{aligned}
\Psi\left(x, \alpha\right) &= F\left(x\right) + \alpha^{\mu} F_{\mu}\left(x\right) + \frac{1}{2}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu} F_{\mu\nu}\left(x\right) + \frac{1}{3!}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha^{\rho} F_{\mu\nu\rho}\left(x\right) \\
&+ \frac{1}{4!}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha^{\rho}\alpha^{\sigma} F_{\mu\nu\rho\sigma}\left(x\right).
\end{aligned} \tag{6.83}$$

Com a estrutura da função de onda em mãos podemos analisar como os vínculos (6.79) geram a dinâmica da teoria quântica. Aplicando $\varphi^{(4)}$ a um estado $|\Psi\rangle$, temos

$$\left[\psi^{\mu}, \bar{\psi}_{\mu}\right]|\Psi\rangle = \left(\psi^{\mu}\bar{\psi}_{\mu} - 2\right)|\Psi\rangle = 0. \tag{6.84}$$

Se utilizarmos a representação

$$\psi^{\mu} = \alpha^{\mu}, \qquad \bar{\psi}_{\mu} = \frac{\partial}{\partial \alpha^{\mu}}, \tag{6.85}$$

que satisfaz as relações de anticomutação (6.80), a equação (6.84) se apresenta como uma equação diferencial nas variáveis de Grassmann,

$$\alpha^{\mu}\frac{\partial}{\partial \alpha^{\mu}}\Psi\left(x, \alpha\right) = 2\Psi\left(x, \alpha\right), \tag{6.86}$$

cuja solução é

$$\Psi\left(x, \alpha\right) = \frac{1}{2}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu} F_{\mu\nu}\left(x\right). \tag{6.87}$$

A aplicação de $\varphi^{(3)}$ e $\varphi^{(2)}$ fornece, respectivamente,

$$\alpha^{\rho}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\left(\partial_{\rho}F_{\mu\nu}\right) = 0, \tag{6.88}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^{\rho}}\partial_{\rho}\left(\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}F_{\mu\nu}\right) = \alpha^{\nu}2\partial_{\mu}F^{\mu\nu}\left(x\right) = 0, \tag{6.89}$$

de onde concluímos que a parte espacial da função de onda satisfaz as equações

$$\begin{aligned} \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} &= 0, & (6.90)\\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= 0. & (6.91) \end{aligned}$$

A equação (6.90) admite como solução

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{6.92}$$

enquanto (6.91) fornece a equação diferencial satisfeita pelo campo vetorial A^μ:

$$\partial^2 A^\mu - \partial^\mu \left(\partial_\nu A^\nu\right) = 0. \tag{6.93}$$

Resta ainda o vínculo $\varphi^{(1)}$, que quando aplicado à $\Psi\left(x, \alpha\right)$ fornece a equação

$$\partial^2 F_{\mu\nu} = 0, \tag{6.94}$$

que já é automaticamente satisfeita devido à (6.92) e (6.93).

O conjunto de equações diferenciais (6.90) e (6.91) satisfeitas pelo tensor de segunda ordem $F_{\mu\nu}$, definido a partir de (6.92), são as equações de Maxwell para o campo eletromagnético livre, que sob o contexto quântico descrevem uma partícula de spin 1.

6.2 Teoria Massiva

Como na seção anterior nós generalizamos o modelo inicial para descrever partículas de spin arbitrário partindo do limite não massivo, vamos agora encarar o problema de fornecer massa para a teoria.

O ponto de partida é basicamente o mesmo do início do capítulo, só que agora consideramos os vínculos de primeira classe do modelo de partículas de spin 1/2 massivas,

$$\mathcal{H} = p^2 - m^2, \qquad \mathcal{J} = \psi^\mu p_\mu - m\psi_5, \tag{6.95}$$

e extendemos o modelo para N transformações de supersimetria mais transformações locais do grupo $O\left(N\right)$, só que agora aplicadas também à variável ψ_5 [18]:

$$\mathcal{H} = p^2 - m^2, \qquad \mathcal{J}_a = \psi_a^\mu p_\mu - m\psi_a^5, \qquad Q_{ab} = \psi_a^\mu \psi_{\mu b} - \psi_a^5 \psi_b^5, \tag{6.96}$$

com as variáveis fermiônicas satisfazendo a álgebra dos parênteses de Dirac

$$\left\{\psi_a^\mu, \psi_b^\nu\right\}_D = i\eta^{\mu\nu}\delta_{ab}, \qquad \left\{\psi_a^5, \psi_b^5\right\}_D = -i\delta_{ab}. \tag{6.97}$$

Os novos geradores (6.96) satisfazem a mesma álgebra da teoria não massiva (como era de se esperar), e possibilitam que a ação seja escrita na forma

$$\begin{aligned} S^{(N/2)} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big\{ \dot{x}^\mu p_\mu + \frac{i}{2} \left(\dot{\psi}_a^\mu \psi_{\mu a} - \dot{\psi}_a^5 \psi_a^5 \right) - N \left(p^2 - m^2 \right) - i M_a \left(\psi_a^\mu p_\mu - m \psi_a^5 \right) \\ &- i F_{ab} \left(\psi_a^\mu \psi_{\mu b} - \psi_a^5 \psi_b^5 \right) \Big\} + \frac{i}{2} \left[\psi_a^\mu (\tau_1) \psi_{\mu a} (\tau_2) - \psi_a^5 (\tau_1) \psi_a^5 (\tau_2) \right]. \end{aligned} \tag{6.98}$$

Inserindo os campos auxiliares (6.18), e observando que $\delta S / \delta p_\mu = 0$ fornece a mesma expressão (6.19) para o momento conjugado p^μ, nós podemos reescrever a ação como

$$\begin{aligned} S^{(N/2)} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big\{ \frac{1}{2e} \dot{x}^2 + \frac{i}{2} \left(\dot{\psi}_a^\mu \psi_{\mu a} - \dot{\psi}_a^5 \psi_a^5 \right) - \frac{i}{2e} \chi_a \psi_a^\mu \dot{x}_\mu - \frac{1}{8e} \chi_a \psi_a^\mu \chi_b \psi_{\mu b} + \frac{1}{2} e m^2 \\ &+ \frac{i}{2} m \chi_a \psi_a^5 - \frac{i}{2} f_{ab} \left(\psi_a^\mu \psi_{\mu b} - \psi_a^5 \psi_b^5 \right) \Big\} + \frac{i}{2} \left[\psi_a^\mu (\tau_1) \psi_{\mu a} (\tau_2) \right] \\ &- \frac{i}{2} \left[\psi_a^5 (\tau_1) \psi_a^5 (\tau_2) \right], \end{aligned} \tag{6.99}$$

que fornece a expressão para a lagrangiana

$$\begin{aligned} L^{(N/2)} &= \frac{1}{2e} \dot{x}^2 + \frac{i}{2} \left(\dot{\psi}_a^\mu \psi_{\mu a} - \dot{\psi}_a^5 \psi_a^5 \right) - \frac{i}{2e} \chi_a \psi_a^\mu \dot{x}_\mu - \frac{1}{8e} \chi_a \psi_a^\mu \chi_b \psi_{\mu b} + \frac{1}{2} e m^2 \\ &+ \frac{i}{2} m \chi_a \psi_a^5 - \frac{i}{2} f_{ab} \left(\psi_a^\mu \psi_{\mu b} - \psi_a^5 \psi_b^5 \right). \end{aligned} \tag{6.100}$$

As transformações de gauge geradas pelos vínculos (6.96) devem reproduzir as transformações (6.22), (6.24) e (6.26) quando tomamos o limite não massivo da teoria, o que nos diz que as variáveis $(x^\mu, \psi_a^\mu, e, \chi_a, f_{ab})$ devem manter as mesmas transformações. Então para analisar as transformações de simetria na teoria massiva é necessário somente obter as expressões para as transformações da variável ψ_a^5, e verificar a invariancia dos termos que aparecem na ação (6.99) para fornecer massa à partícula, que denotaremos por lagrangiana massiva

$$L_m^{(N/2)} = -\frac{i}{2} \dot{\psi}_a^5 \psi_a^5 + \frac{1}{2} e m^2 + \frac{i}{2} m \chi_a \psi_a^5 + \frac{i}{2} f_{ab} \psi_a^5 \psi_b^5. \tag{6.101}$$

Sob transformações de reparametrizações, exigimos que ψ_a^5 se transforme como um escalar,

$$\delta \psi_n^5 = \varepsilon \dot{\psi}_n^5, \tag{6.102}$$

que assegura a invariancia da ação devido à

$$\delta L_m^{(N/2)} = \frac{d}{d\tau} \left(\varepsilon L_m^{(N/2)} \right). \tag{6.103}$$

Para as outras duas transformações o comportamento de ψ_a^5 é obtido a partir dos geradores das transformações,

$$\delta \psi_a^5 = \left\{ \psi_a^5, i \alpha_b \mathcal{J}_b + i \beta_{bc} Q_{bc} \right\}_D = \alpha_a m + 2 \beta_{ab} \psi_b^5. \tag{6.104}$$

A verificação da invariancia da teoria sob transformações de supersimetria é direta, visto que

$$\delta L_m^{(N/2)} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{i}{2}m\alpha_a\psi_a^5\right). \tag{6.105}$$

Já para rotações em $O(N)$, nós temos

$$\delta L_m^{(N/2)} = -2i\dot{\beta}_{ab}\psi_b^5\psi_a^5, \tag{6.106}$$

que deve ser somada à transformação (6.25) do regime não massivo para recuperar o vínculo Q_{ab}, i.e.,

$$\delta L^{(N/2)} = 2i\dot{\beta}_{ab}Q_{ab} \approx 0, \tag{6.107}$$

e assegurar a invariancia da teoria.

A ação (6.99) fornece, via princípio variacional, as equações de movimento

$$\frac{\delta S^{(N/2)}}{\delta x_\mu} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{e}\dot{x}^\mu - \frac{i}{2e}\chi_a\psi_a^\mu\right) = 0, \tag{6.108}$$

$$\frac{\delta S^{(N/2)}}{\delta \psi_{\mu a}} = \dot{\psi}_a^\mu + \frac{1}{2e}\chi_a\dot{x}^\mu + \frac{i}{4e}\chi_a\chi_b\psi_b^\mu + f_{ab}\psi_b^\mu = 0, \tag{6.109}$$

$$\frac{\delta S^{(N/2)}}{\delta e} = \dot{x}^2 - i\chi_a\psi_a^\mu\dot{x}_\mu - \frac{1}{4}\chi_a\psi_a^\mu\chi_b\psi_{\mu b} - e^2m^2 = 0, \tag{6.110}$$

$$\frac{\delta S^{(N/2)}}{\delta \chi_a} = \psi_a^\mu\dot{x}_\mu - \frac{i}{2}\psi_a^\mu\chi_b\psi_{\mu b} - me\psi_a^5 = 0, \tag{6.111}$$

$$\frac{\delta S^{(N/2)}}{\delta \psi_a^5} = \dot{\psi}_a^5 - \frac{1}{2}m\chi_a + f_{ab}\psi_b^5 = 0, \tag{6.112}$$

$$\frac{\delta S^{(N/2)}}{\delta f_{ab}} = \psi_a^\mu\psi_{\mu b} - \psi_a^5\psi_b^5 = 0. \tag{6.113}$$

que, sob a fixação de gauge

$$e = \frac{1}{m}, \qquad \chi_a = 0, \qquad f_{ab} = 0, \tag{6.114}$$

assumem a forma

$$\begin{aligned} &\ddot{x}^\mu = 0, \qquad \dot{\psi}_a^\mu = 0, \qquad \dot{x}^2 = 1, \psi_a^\mu\dot{x}_\mu = \psi_a^5, \qquad \dot{\psi}_a^5 = 0, \\ &\psi_a^\mu\psi_{\mu b} - \psi_a^5\psi_b^5 = 0, \end{aligned} \tag{6.115}$$

descrevendo uma partícula relativística livre, no referencial do tempo próprio, com spin conservado.

6.2.1 Quantização

Partindo da lagrangiana (6.100),

$$\begin{aligned} L^{(N/2)} &= \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}_a^\mu \psi_{\mu a} - \dot{\psi}_a^5 \psi_a^5\right) - \frac{i}{2e}\chi_a \psi_a^\mu \dot{x}_\mu - \frac{1}{8e}\chi_a \psi_a^\mu \chi_b \psi_{\mu b} + \frac{1}{2}em^2 \\ &+ \frac{i}{2}m\chi_a \psi_a^5 - \frac{i}{2}f_{ab}\left(\psi_a^\mu \psi_{\mu b} - \psi_a^5 \psi_b^5\right), \end{aligned} \tag{6.116}$$

definimos os momentos conjugados

$$\begin{aligned} &p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{e}\dot{x}_\mu - \frac{i}{2e}\chi_a \psi_{\mu a}, \qquad \pi_{\mu a} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_a^\mu} = \frac{i}{2}\psi_{\mu a}, \qquad \pi_a^5 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_a^5} = -\frac{i}{2}\psi_a^5, \\ &p_{(e)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0, \qquad \pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_a} = 0, \qquad p_{ab} = \frac{\partial L}{\partial \dot{f}_{ab}} = 0. \end{aligned} \tag{6.117}$$

Dessas equações surgem os vínculos primários

$$\begin{aligned} \phi_{(e)} &= p_{(e)} \approx 0, \qquad \phi_a = \pi_a \approx 0, \qquad \phi_{ab} = p_{ab} \approx 0, \\ \phi_a^\mu &= \pi_a^\mu - \frac{i}{2}\psi_a^\mu \approx 0, \qquad \phi_a^5 = \pi_a^5 + \frac{i}{2}\psi_a^5 \approx 0. \end{aligned} \tag{6.118}$$

As hamiltonianas canônica e primária são escritas na forma

$$H_c = \frac{e}{2}\left(p^2 - m^2\right) + \frac{i}{2}\chi_a\left(\psi_a^\mu p_\mu - m\psi_a^5\right) + \frac{i}{2}f_{ab}\left(\psi_a^\mu \psi_{\mu b} - \psi_a^5 \psi_b^5\right), \tag{6.119}$$

$$H_p = H_c + \phi_a^\mu u_{\mu a} + \phi_a^5 u_a^5 + \phi_\chi u_\chi + u_e \phi_e + u_{ab}\phi_{ab}. \tag{6.120}$$

Impondo as condições de consistência sobre os vínculos, obtém-se

$$\dot{\phi}_{(e)} = \left\{\phi_{(e)}, H_p\right\} = -\frac{1}{2}\left(p^2 - m^2\right) \approx 0, \tag{6.121}$$

$$\dot{\phi}_a = \left\{\phi_a, H_p\right\} = -\frac{i}{2}\left(\psi_a^\mu p_\mu - m\psi_a^5\right) \approx 0, \tag{6.122}$$

$$\dot{\phi}_{ab} = \left\{\phi_{ab}, H_p\right\} = -\frac{i}{2}\left(\psi_a^\mu \psi_{\mu b} - \psi_a^5 \psi_b^5\right) \approx 0, \tag{6.123}$$

$$\dot{\phi}_a^\mu = \left\{\phi_a^\mu, H_p\right\} = \frac{i}{2}\chi_a p^\mu - if_{ab}\psi_b^\mu + iu_a^\mu \approx 0, \tag{6.124}$$

$$\dot{\phi}_a^5 = \left\{\phi_a^5, H_p\right\} = -\frac{i}{2}m\chi_a + if_{ab}\psi_b^5 - iu_n^5 \approx 0, \tag{6.125}$$

que fixam os multiplicadores de Lagrange

$$u_a^\mu = -\frac{1}{2}\chi_a p^\mu + f_{ab}\psi_b^\mu, \qquad u_a^5 = -\frac{1}{2}m\chi_a + f_{ab}\psi_b^5, \tag{6.126}$$

e fornecem os vínculos secundários

$$\begin{aligned} &\varphi^{(1)} = p^2 - m^2 \approx 0, \qquad \varphi_a^{(2)} = \psi_a^\mu p_\mu - m\psi_a^5 \approx 0, \\ &\varphi_{ab}^{(3)} = \psi_a^\mu \psi_{\mu b} - \psi_a^5 \psi_b^5 \approx 0. \end{aligned} \tag{6.127}$$

O sistema não apresenta mais vínculos, pois

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}^{(1)} &= \left\{\varphi^{(1)}, H_p\right\} = 0, \\
\dot{\varphi}^{(2)}_a &= \left\{\varphi^{(2)}_a, H_p\right\} = i\chi_a\varphi^{(1)} + f_{ab}\varphi^{(2)}_b \approx 0, \\
\dot{\varphi}^{(3)}_{ab} &= \left\{\varphi^{(3)}_{ab}, H_p\right\} = \chi_a\varphi^{(2)}_b - \chi_b\varphi^{(2)}_a + f_{bc}\varphi^{(3)}_{ca} - f_{ac}\varphi^{(3)}_{cb} \approx 0.
\end{aligned} \tag{6.128}$$

Os únicos parênteses de Poisson não nulos entre os vínculos são

$$\begin{aligned}
&\{\phi^\mu_a, \phi^\nu_b\} = i\eta^{\mu\nu}\delta_{ab}, \qquad \left\{\phi^5_a, \phi^5_b\right\} = -i\delta_{ab}, \qquad \left\{\phi^\mu_a, \varphi^{(2)}_b\right\} = -p^\mu\delta_{ab}, \\
&\left\{\phi^\mu_a, \varphi^{(3)}_{bc}\right\} = \psi^\mu_b\delta_{ac} - \psi^\mu_c\delta_{ab}, \qquad \left\{\phi^5_a, \varphi^{(2)}_b\right\} = m\delta_{ab}, \\
&\left\{\phi^5_a, \varphi^{(3)}_{bc}\right\} = \psi^5_c\delta_{ab} - \psi^5_b\delta_{ac}.
\end{aligned} \tag{6.129}$$

Assim é possível tomar uma combinação linear entre os vínculos para escrever um conjunto de vínculos de primeira classe na forma

$$\begin{aligned}
&\phi^{(1)} = \phi_{(e)} \approx 0, \qquad \phi^{(2)}_a = \phi_a \approx 0, \qquad \phi^{(3)}_{ab} = \phi_{ab} \approx 0, \\
&\phi^{(4)} = \varphi^{(1)} \approx 0, \qquad \phi^{(5)}_a = \varphi^{(2)}_a - ip_\mu\phi^\mu_a - im\phi^5_a \approx 0, \\
&\phi^{(6)}_{ab} = \varphi^{(3)}_{ab} - i\psi_{\mu a}\phi^\mu_b + i\psi_{\mu b}\phi^\mu_a - i\psi^5_a\phi^5_b + i\psi^5_b\phi^5_a \approx 0,
\end{aligned} \tag{6.130}$$

e manter dois vínculos de segunda classe

$$\phi^\mu_a = \pi^\mu_a - \frac{i}{2}\psi^\mu_a \approx 0, \qquad \phi^5_a = \pi^5_a + \frac{i}{2}\psi^5_a \approx 0. \tag{6.131}$$

Assim a hamiltoniana primária é escrita completamente em termos dos vínculos de primeira classe,

$$H_p = \frac{e}{2}\phi^{(4)} + \phi^{(2)}_a u_a + u_e\phi^{(1)} + u_{ab}\phi^{(3)}_{ab} + \frac{i}{2}\chi_a\phi^{(5)}_a + \frac{i}{2}f_{ab}\phi^{(6)}_{ab}. \tag{6.132}$$

Como

$$C^5_{ab} = \left\{\phi^5_a, \phi^5_b\right\} = -i\delta_{ab}, \qquad \left(C^5_{ab}\right)^{-1} = i\delta_{ab}, \tag{6.133}$$

e utilizando o resultado (6.52), é possível construir os parênteses de Dirac

$$\begin{aligned}
\{A, B\}_D &= \{A, B\} - \{A, \phi_{\mu a}\}\left(C^{\mu\nu}_{ab}\right)^{-1}\{\phi_{\nu b}, B\} - \left\{A, \phi^5_a\right\}\left(C^5_{ab}\right)^{-1}\left\{\phi^5_b, B\right\} \\
&= \{A, B\} + i\{A, \phi_{\mu a}\}\{\phi^\mu_a, B\} - i\left\{A, \phi^5_a\right\}\left\{\phi^5_a, B\right\},
\end{aligned} \tag{6.134}$$

e tomar os vínculos de segunda classe como igualdades fortes. Restam ainda seis vínculos de primeira classe:

$$\begin{aligned}
&\phi_{(e)} = p_{(e)} \approx 0, \qquad \phi_a = \pi_a \approx 0, \qquad \phi_{ab} = p_{ab} \approx 0, \qquad \varphi^{(1)} = p^2 - m^2 \approx 0, \\
&\varphi^{(2)}_a = \psi^\mu_a p_\mu - m\psi^5_a \approx 0, \qquad \varphi^{(3)}_{ab} = \psi^\mu_a\psi_{\mu b} - \psi^5_a\psi^5_b \approx 0.
\end{aligned} \tag{6.135}$$

Os vínculos $\phi_{(e)}$, ϕ_a e ϕ_{ab} podem ser eliminados introduzindo os vínculos adicionais

$$\Omega^{(1)} = e - \frac{1}{m} \approx 0, \qquad \Omega_a^{(2)} = \chi_a \approx 0, \qquad \Omega_{ab}^{(3)} = f_{ab} \approx 0. \tag{6.136}$$

Assim temos as relações básicas da teoria clássica

$$\{x^\mu, p_\nu\}_D = \delta_\nu^\mu, \qquad \{\psi_a^\mu, \psi_b^\nu\}_D = i\eta^{\mu\nu}\delta_{ab}, \qquad \left\{\psi_a^5, \psi_b^5\right\}_D = -i\delta_{ab}, \tag{6.137}$$

que no processo de quantização são identificadas com a álgebra dos operadores

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = -i\delta_\nu^\mu, \qquad \left[\hat{\psi}_n^\mu, \hat{\psi}_m^\nu\right]_+ = \eta^{\mu\nu}\delta_{nm}, \qquad \left[\hat{\psi}_n^5, \hat{\psi}_m^5\right]_+ = -\delta_{nm}. \tag{6.138}$$

Embora seja possível encontrar uma representação para o operador ψ_a^μ (6.58), o mesmo não é válido para ψ_a^5, pois não é possível encontrar uma representação que satisfaça a álgebra (6.138) (esse assunto continua sendo pesquisado atualmente). Mas no caso específico de spin 1 é possível encontrar uma representação, que faremos a seguir utilizando o mesmo procedimento do caso não massivo.

6.2.2 Partícula Massiva de Spin 1

Partindo da ação (6.99) con duas transformações de supersimetria,

$$\begin{aligned} S^{(N/2)} \;=\; & \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big\{ \frac{1}{2e}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}_a^\mu \psi_{\mu a} - \dot{\psi}_a^5 \psi_a^5\right) - \frac{i}{2e}\chi_a \psi_a^\mu \dot{x}_\mu - \frac{1}{8e}\chi_a \psi_a^\mu \chi_b \psi_{\mu b} + \frac{1}{2}em^2 \\ & + \frac{i}{2}m\chi_a \psi_a^5 - \frac{i}{2}f_{ab}\left(\psi_a^\mu \psi_{\mu b} - \psi_a^5 \psi_b^5\right) \Big\} \\ & + \frac{i}{2}\left[\psi_a^\mu(\tau_1)\psi_{\mu a}(\tau_2) - \psi_a^5(\tau_1)\psi_a^5(\tau_2)\right], \end{aligned} \tag{6.139}$$

introduzimos as variáveis

$$\psi^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1^\mu + i\psi_2^\mu\right), \qquad \overline{\psi}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1^\mu - i\psi_2^\mu\right), \tag{6.140}$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_1 + i\chi_2\right), \qquad \bar{\chi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_1 - i\chi_2\right), \tag{6.141}$$

$$\psi_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1^5 + i\psi_2^5\right), \qquad \bar{\psi}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1^5 - i\psi_2^5\right), \tag{6.142}$$

para escrevê-la na forma

$$\begin{aligned} S \;=\; & \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big\{ \dot{x}^\mu p_\mu + \frac{i}{2}\left(\dot{\psi}^\mu \bar{\psi}_\mu - \dot{\psi}^5 \bar{\psi}^5\right) - \frac{e}{2}\left(p^2 - m^2\right) - \frac{i}{2}\chi\left(\bar{\psi}^\mu p_\mu - m\bar{\psi}^5\right) \\ & - \frac{i}{2}\bar{\chi}\left(\psi^\mu p_\mu - m\psi^5\right) + \frac{1}{2}f\left(\left[\psi^\mu, \bar{\psi}_\mu\right] - \left[\psi^5, \bar{\psi}^5\right]\right) \Big\} + \\ & + \frac{i}{2}\left[\psi^\mu(\tau_1)\overline{\psi}_\mu(\tau_2) + \overline{\psi}^\mu(\tau_1)\psi_\mu(\tau_2)\right] \\ & - \frac{i}{2}\left[\psi_5(\tau_1)\bar{\psi}_5(\tau_2) - \bar{\psi}_5(\tau_1)\psi_5(\tau_2)\right]. \end{aligned} \tag{6.143}$$

Da ação (6.143) reconhecemos os vínculos de primeira classe que atuam nos estados quânticos,

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(1)} = p^2 - m^2 \approx 0, \qquad \varphi^{(2)} = \bar{\psi}^{\mu} p_{\mu} - m\bar{\psi}_5 \approx 0, \qquad \varphi^{(3)} = \psi^{\mu} p_{\mu} - m\psi_5 \approx 0, \\
&\varphi^{(4)} = \left[\psi^{\mu}, \bar{\psi}_{\mu}\right] - \left[\psi_5, \bar{\psi}_5\right] \approx 0,
\end{aligned} \tag{6.144}$$

e a partir da equação (6.138) obtemos a álgebra dos novos operadores fermiônicos as relações para as novas variáveis são

$$\begin{aligned}
&[\psi^{\mu}, \psi^{\nu}]_+ = \left[\bar{\psi}^{\mu}, \bar{\psi}^{\nu}\right]_+ = 0, \qquad [\psi_5, \psi_5]_+ = \left[\bar{\psi}_5, \bar{\psi}_5\right]_+ = 0, \\
&\left[\psi^{\mu}, \bar{\psi}^{\nu}\right]_+ = \eta^{\mu\nu}, \qquad \left[\psi_5, \bar{\psi}_5\right]_+ = -1.
\end{aligned} \tag{6.145}$$

Como $\bar{\psi}^{\mu}$ e $\bar{\psi}_5$ formam um conjunto de operadores mutuamente anticomutantes, vamos construir uma base de auto-estados $|\alpha, \beta\rangle$ com auto valores α^{μ} e $i\beta$ também anticomutantes, definidos por

$$\bar{\psi}^{\mu}|\alpha, \beta\rangle = \alpha^{\mu}|\alpha, \beta\rangle, \qquad \bar{\psi}_5|\alpha, \beta\rangle = i\beta|\alpha, \beta\rangle. \tag{6.146}$$

Assim a função de onda que descreve a dinâmica quântica da partícula possui a estrutura

$$\Psi\left(x, \alpha, \beta\right) = \left(\langle x| \otimes \langle \alpha, \beta|\right)|\Psi\rangle, \tag{6.147}$$

podendo ser expandida em uma série de potências de α^{μ} e de β

$$\begin{aligned}
\Psi\left(x, \alpha, \beta\right) &= (1 + i\beta)\Big[F\left(x\right) + \alpha^{\mu} F_{\mu}\left(x\right) + \frac{1}{2!}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu} F_{\mu\nu}\left(x\right) + \frac{1}{3!}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha^{\rho} F_{\mu\nu\rho}\left(x\right) \\
&+ \frac{1}{4!}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\alpha^{\rho}\alpha^{\sigma} F_{\mu\nu\rho\sigma}\left(x\right)\Big].
\end{aligned} \tag{6.148}$$

A atuação de $\varphi^{(4)}$ no estado $|\Psi\rangle$ fornece

$$\left(\left[\psi^{\mu}, \bar{\psi}_{\mu}\right] - \left[\psi^5, \bar{\psi}^5\right]\right)|\Psi\rangle = 0, \quad \rightarrow \quad \left(\psi^{\mu}\bar{\psi}_{\mu} - \psi^5\bar{\psi}^5\right)|\Psi\rangle = \frac{5}{2}|\Psi\rangle. \tag{6.149}$$

que sob a representação

$$\psi^{\mu} = \alpha^{\mu}, \qquad \bar{\psi}_{\mu} = \frac{\partial}{\partial \alpha^{\mu}}, \qquad \psi_5 = i\beta, \qquad \bar{\psi}_5 = i\frac{\partial}{\partial \beta}, \tag{6.150}$$

resulta na equação diferencial satisfeita pelo estado quântico

$$\alpha^{\mu}\frac{\partial}{\partial \alpha^{\mu}}\Psi\left(x, \alpha, \beta\right) + \beta\frac{\partial}{\partial \beta}\Psi\left(x, \alpha, \beta\right) = \frac{5}{2}\Psi\left(x, \alpha, \beta\right). \tag{6.151}$$

Nesse ponto nós encontramos um problema, visto que a estrutura geral(6.148) dos estados não admite valores semi-inteiros sob derivadas com relação às variáveis de Grassmann, i.e., não é possível encontrar um estado $\Psi(x, \alpha, \beta)$ que satisfaça a equação (6.151) por causa da constante de proporcionalidade 5/2.

Felizmente no caso de uma partícula de spin 1 este problema pode ser contornado, visto que para $N = 2$ nós podemos adicionar à ação (6.139) um termo de "Chern-Simons" [17]

$$\int d\tau \left(Y f_{ab}\epsilon_{ab}\right), \tag{6.152}$$

onde Y é uma constante de proporcionalidade que pode ser ajustada de forma conveniente. A presença de (6.152) altera somente o vínculo $\varphi^{(4)}$, fornecendo

$$\varphi^{*(4)} = \left[\psi^{\mu}, \bar{\psi}_{\mu}\right] - \left[\psi_5, \bar{\psi}_5\right] + 4Y. \tag{6.153}$$

Se nós escolhermos $Y = 1/4$, vemos que a equação satisfeita por $\Psi(x, \alpha, \beta)$ passa a ser

$$\alpha^{\mu}\frac{\partial}{\partial\alpha^{\mu}}\Psi(x, \alpha, \beta) + \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\Psi(x, \alpha, \beta) = 2\Psi(x, \alpha, \beta), \tag{6.154}$$

que admite a solução

$$\Psi(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{2}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}F_{\mu\nu}(x) + m\beta\alpha^{\mu}A_{\mu}(x). \tag{6.155}$$

Os vínculos $\varphi^{(3)}$ e $\varphi^{(2)}$ quando aplicados a função de onda

$$\alpha^{\rho}\partial_{\rho}\left(\frac{1}{2}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}F_{\mu\nu} + m\beta\alpha^{\mu}A_{\mu}\right) = m\beta\left(\frac{1}{2}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}F_{\mu\nu} + m\beta\alpha^{\mu}A_{\mu}\right), \tag{6.156}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^{\rho}}\partial_{\rho}\left(\frac{1}{2}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}F_{\mu\nu} + m\beta\alpha^{\mu}A_{\mu}\right) = m\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{2}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}F_{\mu\nu} + m\beta\alpha^{\mu}A_{\mu}\right), \tag{6.157}$$

fornecem

$$\alpha^{\rho}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}\partial_{\rho}F_{\mu\nu} + m\beta\alpha^{\rho}\alpha^{\mu}\partial_{\rho}A_{\mu} = \frac{1}{2}m\beta\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}F_{\mu\nu}, \tag{6.158}$$

$$\alpha^{\nu}\partial^{\mu}F_{\mu\nu} - m\beta\partial^{\mu}A_{\mu} = m^2\alpha^{\mu}A_{\mu}. \tag{6.159}$$

Dessas equações é possível inferir que uma solução é obtida via

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \qquad \partial_{\mu}F^{\mu\nu} = m^2A^{\nu}, \tag{6.160}$$

que satisfaz as condições

$$\partial_{[\rho}F_{\mu\nu]} = 0, \qquad \partial^{\mu}A_{\mu} = 0. \tag{6.161}$$

Resta ainda o vínculo $\varphi^{(1)}$:

$$\partial^2\left(\frac{1}{2}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}F_{\mu\nu} + m\beta\alpha^{\mu}A_{\mu}\right) = m^2\left(\frac{1}{2}\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}F_{\mu\nu} + m\beta\alpha^{\mu}A_{\mu}\right). \tag{6.162}$$

Mas, de (6.160) e (6.161) vemos que

$$\partial^2 F_{\mu\nu} = m^2 F_{\mu\nu}, \qquad \partial^2 A^{\mu} = m^2 A^{\nu}, \tag{6.163}$$

o que permite que a equação (6.162) seja automaticamente saristeita.

Assim, temos o conjunto de equações diferenciais que a parte espacial de $\Psi\left(x, \alpha, \beta\right)$, representada pelo tensor anti-simétrico $F_{\mu\nu}$, deve satisfazer. Essas são as equações Proca que descrevem um campo vetorial massivo, representando uma partícula de spin 1.

Capítulo 7

Relação entre Partículas Clássicas e Teoria de Campos

Depois de analisado os modelos de partículas relativísticas e quantizado a teoria, vamos agora comparar os resultados obtidos com a dinâmica dos campos clássicos [20], e mostrar a equivalência das descrições.

7.1 Campo Escalar

O campo escalar é definido como uma representação $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ do grupo de Lorentz, com spin 0, apresentando o mesmo valor quando medido em diferentes referenciais inerciais relationados por uma transformação de Lorentz

$$\phi'\left(x'\right)=\phi\left(x\right). \tag{7.1}$$

Ele admite a representação

$$M_{\mu\nu}=i\left(x_{\mu}\partial_{\nu}-x_{\nu}\partial_{\mu}\right) \tag{7.2}$$

para os geradores do grupo, mais uma representação

$$\left(S_{\mu\nu}\right)^{\rho\sigma}=i\left(\eta_{\mu}^{\rho}\eta_{\nu}^{\sigma}-\eta_{\nu}^{\rho}\eta_{\mu}^{\sigma}\right) \tag{7.3}$$

para o spin quando consideramos um objeto na forma $\partial_{\mu}\phi$, que se comporta como um vetor. A partir de representações escalares e vetoriais é possível construir objetos invariantes sob o grupo de Poincaré para formar uma ação que descreva a dinâmica do campo escalar. O campo escalar mais simples conhecido é o campo de Klein-Gordon, definido a partir da ação

$$S=\int d^{4}x\mathcal{L}\left(x\right)=\int d^{4}x\left\{\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi-m^{2}\phi^{2}\right\}, \tag{7.4}$$

que obedece a equação de movimento

$$\left(\partial^{2}+m^{2}\right)\phi\left(x\right)=0. \tag{7.5}$$

Se nós compararmos (7.5) com o resultado obtido na equação (4.32),

$$\left(\partial^2 + m^2\right) \Psi\left(x\right) = 0, \tag{7.6}$$

nós vemos que o modelo de partícula de spin 0 livre leva, no regime quântico , à mesma equação de movimento satisfeita pelo campo de Klein-Gordon. E a mesma identificação também é válida para o limite não massivo das teorias, visto que (7.5) e (4.32) fornecem, respectivamente,

$$\partial^2 \phi\left(x\right) = 0, \qquad \partial^2 \Psi\left(x\right) = 0. \tag{7.7}$$

7.2 Campo Espinorial de Dirac

Os campos espinoriais são obtidas das representações $(\mathbf{1/2}, \mathbf{0})$ e $(\mathbf{0}, \mathbf{1/2})$ do grupo de Lorentz, com spin 1/2, onde a primeira representação fornece um espinor de mão esquerda e a segunda um de mão direita. A realização é obtida através de espinores complexos de duas componentes, na forma

$$\psi_L\left(x\right) \to \psi'_L\left(x\right) = \Lambda_L \psi_L\left(x\right) \qquad para \quad \left(\mathbf{1/2}, \mathbf{0}\right), \tag{7.8}$$

$$\psi_R\left(x\right) \to \psi'_R\left(x\right) = \Lambda_R \psi_R\left(x\right) \qquad para \quad \left(\mathbf{0}, \mathbf{1/2}\right), \tag{7.9}$$

com

$$\Lambda_L = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}.\left(\vec{\omega} - i\vec{\nu}\right)}, \qquad \Lambda_R = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}.\left(\vec{\omega} + i\vec{\nu}\right)}, \tag{7.10}$$

onde ω^i são os parâmetros de rotação, σ^i são as matrizes de Pauli, e ν^i são os parâmetros de boosts associados com a representação

$$\vec{K} = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}. \tag{7.11}$$

Os espinores de Dirac são obtidos com combinações lineares $(\mathbf{0}, \mathbf{1/2}) \oplus (\mathbf{1/2}, \mathbf{0})$, que permitem construir um espinor de 4 componentes

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \tag{7.12}$$

com operação de paridade bem definida e que admite projeção em cada um dos espinores ψ_L e ψ_R através dos operadores

$$\frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma_*\right). \tag{7.13}$$

Introduzindo as matrizes de Dirac γ^μ, que satisfazem a álgebra

$$\left[\gamma^\mu, \gamma^\mu\right]_+ = 2\eta^{\mu\nu}, \tag{7.14}$$

nós podemos construir invariantes de Poincaré para formar uma ação que descreva a dinâmica de campos espinoriais.

O campo de Dirac é definido a partir da ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x \left\{ \bar{\psi} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi \right\}, \tag{7.15}$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, e fornece as equações de movimento

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \qquad \bar{\psi}(x) \left(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m \right) = 0, \tag{7.16}$$

(a segunda pode ser obtida da primeira tomando o complexo conjugado desta, e depois multiplicando por γ^0 pela direita). Neste caso em específico, a comparação com a teoria de uma partícula clássica relativística é trivial, visto que a própria metodologia utilizada na construção foi baseada logo de início na existência do campo de Dirac. A coerência da teoria clássica é quase inteiramente baseada na condição de se obter, sob a quantização do modelo, as equações (4.82)

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right)_a^b \Psi_b(x) = 0, \qquad \left(\partial^2 + m^2 \right) \Psi_a(x) = 0, \tag{7.17}$$

idênticas às satisfeitas pelo campo de Dirac. Por isso é um tanto redundante afirmar que a quantização da partícula de spin 1/2 fornece as equações que descrevem a dinâmica do campo espinorial de Dirac.

7.3 Campo Vetorial

O campo vetorial surge de uma representação $(\mathbf{1/2}, \mathbf{0}) \otimes (\mathbf{0}, \mathbf{1/2}) = (\mathbf{1/2}, \mathbf{1/2})$ do grupo de Lorentz, com spin 1, descrito na notação tensorial por um 4-vetor. Nós estamos interessados em dois campos vetoriais especificamente: o campo eletromagnético e o campo de Proca. O primeiro é descrito pelos campos elétrico ($\mathbf{E}$) e magnético ($\mathbf{B}$), que satisfazem as equações de Maxwell

$$\nabla . \mathbf{E} = 0, \qquad \nabla . \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{7.18}$$

Introduzindo os potenciais ϕ e $\mathbf{A}$ na forma

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{7.19}$$

nós podemos escrever as equações (7.18) na forma covariante utilizando o 4-vetor $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, que fornece

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{7.20}$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{7.21}$$

Já o campo de Proca é a generalização do campo eletromagnético para o caso de um campo vetorial massivo, satisfazendo as equações de movimento

$$\partial_\rho G_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_\mu G^{\mu\nu} = m^2 A^\nu, \tag{7.22}$$

com $G_{\mu\nu}$ definido da mesma forma que $F_{\mu\nu}$. Utilizando a mesma notação para os dois campos, nós vemos que a dinâmica das teorias é obtida da ação

$$S = \int d^4x L(x) = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \right\}, \tag{7.23}$$

visto que o processo de minimização da ação fornece as equações de Proca (7.22) e, no limite não massivo, as equações de Maxwell (7.20).

A comparação com o modelo de uma partícula clássica com spin 1 é bastante simples, visto que no processo de quantização, ela fornece a função de onda

$$\Psi(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{2} \alpha^\mu \alpha^\nu F_{\mu\nu}(x) + m\beta\alpha^\mu A_\mu(x), \tag{7.24}$$

cuja parte espacial satisfaz as equações (7.22), e no limite não massivo reproduz as equações de Maxwell. Ou seja, a teoria quântica de uma partícula relativística de spin 1 é exatamente a mesma descrição clássica dos campos vetoriais.

7.4 Interação Eletromagnética

A interação dos campos livres com o campo eletromagnético é realizada através do acoplamento mínimo, que resulta da exigência de a teoria interagente mantenha a invariança local de gauge. As teorias de campo mais simples que conhecemos invariantes de gauge (e por consequência com cargas conservadas) são a do campo escalar complexo e o próprio campo espinorial de Dirac. Vamos realizar a análise nessa ordem e comparar com os resultados obtidos na quantização dos modelos de partículas interagentes.

A dinâmica do campo escalar carregado é obtida através da ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \right\}, \tag{7.25}$$

que fornece as equações de movimento

$$\left(\partial^2 + m^2\right) \phi(x) = 0, \qquad \left(\partial^2 + m^2\right) \phi^*(x) = 0. \tag{7.26}$$

Como a ação é invariante sob as transformações de gauge,

$$\phi'(x) = e^{-ig\alpha(x)}\phi(x), \qquad \phi'^*(x) = e^{-ig\alpha(x)}\phi^*(x), \tag{7.27}$$

o processo de acoplamento mínimo é realizado com as substituições

$$\partial_\mu\phi \to (\partial_\mu + igA_\mu)\phi, \qquad \partial_\mu\phi^* \to (\partial_\mu - igA_\mu)\phi^*. \tag{7.28}$$

Assim temos a lagrangiana de interação

$$\mathcal{L}_{int} = \int d^4x \left\{ig\partial_\mu\phi^*\phi A^\mu - ig\phi^*\partial_\mu\phi A^\mu + g^2\phi^*\phi A^2\right\} \tag{7.29}$$

que fornece as equações de movimento

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\phi - g^2\phi A^2 + ig\partial_\mu(\phi A^\mu) + ig\partial_\mu\phi A^\mu = 0, \tag{7.30}$$

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\phi^* - g^2\phi^* A^2 - ig\partial_\mu(\phi^* A^\mu) - ig\partial_\mu\phi^* A^\mu = 0. \tag{7.31}$$

Se nós pegarmos a equação (5.52) que descreve a teoria quântica de uma partícula de spin 0 interagindo com um campo eletromagnético de fundo,

$$\left(\partial^2 + ig\partial_\mu A^\mu + igA_\mu\partial^\mu - g^2A^2 - m^2\right)\Psi(x), \tag{7.32}$$

e permitirmos que a função de onda $\Psi(x)$ seja complexa, i.e., que também admita a equação

$$\left(\partial^2 - ig\partial_\mu A^\mu - igA_\mu\partial^\mu - g^2A^2 - m^2\right)\Psi^*(x), \tag{7.33}$$

é possível observar que a dinâmica é a mesma do campo escalar carregado sob interação.

Para o caso do campo de Dirac, como o acoplamento mínimo é realizado na forma

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x), \tag{7.34}$$

a lagrangiana de interação obtida é

$$\mathcal{L}_{int} = \int d^4x \left\{-g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi\right\}, \tag{7.35}$$

que fornece a equação de movimento

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) = 0. \tag{7.36}$$

Da mesma forma que no caso livre, a comparação é direta, visto que a teoria clássica foi construída de forma que a dinâmica quântica fosse a mesma do campo de Dirac.

O único ponto que merece uma resalva é o fato que são duas as equações quânticas para descrever uma partícula de spin 1/2 sob interação:

$$\begin{aligned} \left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - g\gamma^{\mu}A_{\mu} - m\right)\Psi(x) &= 0, & (7.37) \\ \left(\partial^{2} + ig\partial_{\mu}A^{\mu} + igA_{\mu}\partial^{\mu} - g^{2}A^{2} - m^{2} - ig\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}F_{\mu\nu}\right)\Psi(x) &= 0. & (7.38) \end{aligned}$$

Mas uma analise de (7.37) nos permite observar que, se atuarmos nela (pela esquerda) com o operador

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - g\gamma^{\mu}A_{\mu} + m\right), \tag{7.39}$$

ela fornece a mesma equação (7.38) para o campo ψ, sob a condição $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$.

Capítulo 8

Conclusões e perspectivas

No decorrer deste trabalho, nós vimos que a descrição de uma partícula clássica relativística necessariamente precisa de uma formulação invariante sob transformações de reparametrizações, visto que somente assim a covariança explícita da teoria seria obtida. Essa exigência automaticamente nos levou a utilizar o formalismo hamiltoniano desenvolvido por Dirac para descrever sistemas singulares, pois a não definição (nulidade) da função hamiltoniana só poderia ser aceitável se correspondesse a existências de vínculos na teoria. Com essa base, nós construímos primeiro um modelo de uma partícula com spin 0, exigindo que no referencial do tempo próprio ela admitisse equações de movimento que caracterizassem uma partícula livre, e depois introduzimos variáveis de Grassman para descrever os graus de liberdade de spin, observando que eles descreviam uma partícula de spin 1/2. Para que a descrição clássica do spin fosse coerente, nós partimos da equação de Dirac e de Klein-Gordon (satisfeita por cada componente do espinor), e fizemos a suposição que as equações quânticas fossem obtidas da teoria clássica como vínculos de primeira classe atuando nos estados físicos do sistema. Como numa teoria invariante por transformações de reparametrização a hamiltoniana é definida somente em termos dos vínculos de primeira classe, nós construímos a ação do sistema clássico, e reconhecendo que os mesmos vínculos são geradores de transformações gauge, nós obtivemos as transformações de simetria que deixavam a ação invariante, o que nos levou diretamente ao conceito de supersimetria, que conectava as variáveis bosônicas e fermiônicas. Foi possível observar que, através da introdução dos campos auxiliares, a descrição de uma partícula com spin 1/2 era uma generelização natural de uma com spin 0, sendo que ambas admitiam o limite não massivo diretamente da lagrangiana e, sob o processo de quantização, forneciam a dinâmica dos campos de Dirac e de Klein-Gordon, respectivamente.

O passo seguinte foi analisar o comportamento das teorias sob a interação com um campo eletromagnético de fundo. Nós vimos que a presença da interação não quebrava as simetrias presentes na teoria livre, e que as equações de movimento forneciam a força de Lorentz para o caso de spin 0, e para a partícula de spin 1/2, a mesma surgia com correções devido à interação do spin, além de fornecer a descrição de uma partícula com fator giromagnético igual à 2, como observado para o elétron. Quando quantizamos os sistemas, nós vimos que a teoria quântica possuia a mesma dinâmica dos campos de Klein-Gordon (carregado) e de Dirac acoplados minimamente com um campo eletromagnético de fundo.

Por último, nós extendemos a álgebra dos vínculos de uma partícula de spin 1/2 não massiva, inserindo N transformações de supersimetria e um gerador de transformações de grupo O(N), o que nos permitiu obter a descrição quântica de Bargmann-Wigner para partículas com spin N/2. Quando restringimos para o caso de 2 transformações de supersimetria, o vínculo de O(2) nos permitiu construir um estado quântico cuja parte espacial era representada por um tensor de segunda ordem, satisfazêndo as equações de Maxwell para o eletromagnetismo, que no contexto quântico descrevem uma partícula de spin 1.

Do modelo sem massa, nós conseguimos ampliar a ação para descrever uma partícula massiva, inserindo um termo de massa no gerador de supersimetria e extendendo o gerador de transformações O(N), de forma que os termos massivos não quebrassem as invarianças presentes na teoria não massiva. Foi possível observar que, apesar de obtermos as equações corretas para descrever uma partícula massiva de spin N/2, surgia um vínculo álgebrico que não conseguimos interpretar. A própria existência desse vínculo não permitiu que obtivéssemos diretamente a descrição correta de uma partícula de spin 1, que só foi obtida adicionando "à mão" um termo de Chern-Simons na ação, fornecendo a descrição de um campo vetorial massivo, o campo de Proca.

Esse trabalho possui várias continuações naturais, que podem ser encaradas como perspectivas futuras. Somente no contexto de partículas clássicas com spin, ainda persistem os problemas advindos da interação de spin arbitrário com campos de fundo (eletromagnético, gravitacional, etc.) e da descrição massiva, que apresenta problemas de representação na descrição de spins maiores que 1.

Apêndice A

Introdução aos Grupos de Lorentz e de Poincaré

O ponto de partida para a contrução de qualquer teoria relativística é a imposição que ela satisfaça o postulado básico da Relatividade Restrita, que afirma que a velocidade da luz é a mesma quando medida em qualquer referencial inercial. Isso significa que, se x_i for a posição de um sinal luminoso no tempo t, em um dado referencial inercial, e x'_i for a posição do mesmo sinal no tempo t' em outro referencial também inercial, existe uma quantidade s^2 tal que

$$s^2 \equiv t^2 - x_i x_i = t'^2 - x'_i x'_i. \tag{A.1}$$

Assim, o conjunto de transformações lineares relacionando (x_i, t) a (x'_i, t') que preservem a relação (A.1) formam um grupo denominado grupo de Lorentz. Introduzindo a notação

$$x^\mu = \left(x^0, x^i\right) = (t, \mathbf{x}), \tag{A.2}$$

onde $\mu = \overline{0,3}$ é denominado índice de Lorentz (sempre representado por letras do alfabeto grego) e $i = \overline{1,3}$ corre somente sobre os íncides espaciais, relacionados aos 3-vetores usuais (sempre representado por letras do alfabeto romano), a quantidade s^2 pode ser escrita na forma

$$s^2 = x^0 x^0 - x^i x^i \equiv \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \tag{A.3}$$

O objeto $\eta_{\mu\nu}$ é denominado tensor métrico (ou simplesmente métrica), satisfazendo a propriedade de simetria $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$ e definido a por

$$diag\, \eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)\,. \tag{A.4}$$

A métrica é o que caracteriza o espaço-tempo onde a teoria é construída, e o espaço-tempo cuja métrica é definida na forma (A.4) é denominado espaço de Minkowski.

Considerando a forma mais geral para transformações lineares

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \tag{A.5}$$

é possível observar que elas preservam (A.1) se os coeficientes Λ^μ_ν satisfizerem a condição

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \tag{A.6}$$

Qualquer quantidade definida a partir de objetos que se transformem sob o conjunto de transformações de Lorentz (A.5), e que seja preservada, será um invariante de Lorentz, e qualquer teoria construída a partir desses invariantes será uma teoria relativística por construção.

As transformações de Lorentz podem ser decompostas em um produto de transformações de quatro tipos: rotações, boosts, inversões espaciais e temporais. Vamos nos preocupar somente com os dois primeiros, que são descritos em termos de 6 parâmetros (um para cada direção espacial). Se Considerarmos um transformação de Lorentz infinitesimal

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu_\nu, \tag{A.7}$$

e substituirmos em (A.6), mantendo termos até $O(\epsilon)$, obtemos o resultado

$$\eta_{\mu\rho}\epsilon^\rho_\nu = -\eta_{\nu\rho}\epsilon^\rho_\mu. \tag{A.8}$$

Utilizando a métrica para subir e descer os índices,

$$x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu}x^\nu = \left(x^0, -\mathbf{x}\right), \tag{A.9}$$

a equação (A.8) fornece

$$\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}, \tag{A.10}$$

ou seja, $\epsilon_{\mu\nu}$ é um tensor anti-simétrico com 6 entradas. Introduzindo os geradores hermitianos

$$L_{\mu\nu} = i\left(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\right), \tag{A.11}$$

com

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right), \tag{A.12}$$

é possível escrever

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \epsilon^\mu_\nu x^\nu = \frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma}x^\mu. \tag{A.13}$$

Os geradores $L_{\mu\nu}$ satisfazem a algebra de Lie

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - i\eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - i\eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho}, \tag{A.14}$$

que é identificada com a álgebra de Lie de SO(3,1). A representação mais geral dos geradores de SO(3,1) que obece à relação de comutação (A.14) é dada por

$$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \tag{A.15}$$

onde $S_{\mu\nu}$ satisfaz a mesma algebra de Lie de $L_{\mu\nu}$ e comuta com o mesmo. Analisando somente os geradores M_{ij}, eles formam a álgebra

$$[M_{ij}, M_{kl}] = -i\delta_{jk}M_{il} + i\delta_{ik}M_{jl} + i\delta_{jl}M_{ik} - i\delta_{il}M_{jk}. \tag{A.16}$$

Inserindo os novos operadores

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}, \tag{A.17}$$

juntamente com os geradores de boosts

$$K_i = M_{0i}, \tag{A.18}$$

observamos que eles satisfazem a álgebra de Lie

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k \qquad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \qquad [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \tag{A.19}$$

Tomando as combinações lineares

$$N_i = \frac{1}{2}\left(J_i + iK_i\right), \qquad N_i^\dagger = \frac{1}{2}\left(J_i - iK_i\right), \tag{A.20}$$

podemos observar que N_i e $N_i^\dagger$ satisfazem em separado a álgebra de Lie de $SU(2)$,

$$[N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k, \qquad \left[N_i, N_j^\dagger\right] = 0, \qquad \left[N_i^\dagger, N_j^\dagger\right] = i\epsilon_{ijk}N_k^\dagger, \tag{A.21}$$

com operadores de Casimir

$$N_iN_i \rightarrow \text{autovalores} = n\left(n+1\right), \qquad n = 0, 1/2, 1, ... \tag{A.22}$$

$$N_i^\dagger N_i^\dagger \rightarrow \text{autovalores} = m\left(m+1\right), \qquad m = 0, 1/2, 1, ... \tag{A.23}$$

As representações são classificadas pelo par $(\mathbf{n}, \mathbf{m})$, enquanto os estados são distinguiveis pelos autovalores de N_3 e $N_3^\dagger$.

A extensão natural do grupo de Lorentz é a incorporação do princípio de invariança de um sistema físico sob translações espaciais e temporais. Tal transformação é dada por

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \tag{A.24}$$

onde a^μ é um 4-vetor arbitrário constante. Com essa extensão, tem-se um grupo geral de invariança com 10 parâmetros, denominado grupo de Poincaré, com as transformações sendo implementadas na forma

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu. \tag{A.25}$$

Para obter a algebra dos geradores, é necessário considerar a variação de x^μ sob uma pequena translação:

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu = i\epsilon^\nu P_\nu x^\mu. \tag{A.26}$$

Nessa expressão, ϵ^μ é o parâmetro da transformação, e

$$P_\mu = -i\partial_\mu \tag{A.27}$$

é o gerador hermitiano da transformação. Com esse novo gerador, a algebra do grupo de Poincaré assume a forma

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \qquad [M_{\mu\nu}, P_\rho] = -i\eta_{\mu\rho}P_\nu + i\eta_{\nu\rho}P_\mu, \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - i\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - i\eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}. \end{aligned} \tag{A.28}$$

Essa introdução deve ser satisfatória no que concerne o trabalho aqui realizado, visto que explicamos algumas terminologias utilizadas ao longo do texto. Para mais detalhes, consulte o livro do P. Ramond [20], de onde este resumo foi retirado.

Referências

[1] L. Landau, E. Lifchitz *Teoria do Campo* Mir. Moscou 1980.

[2] A. O. Barut, *Eletrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover Publications, New York, 1980).

[3] Keith R. Symon, *Mecânica* (Editora Campus, 1982).

[4] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, 1980).

[5] Paul A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Dover Publications, New York, 2001).

[6] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics* Springer-Verlag, New York, 1982

[7] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, New Jersey, 1991).

[8] Carlos A. P. Galvão, *Strings Clássicos Relativísticos* www.biblioteca.cbpf.br seção Publicações, Monografia

[9] L. Brink, P. Di Vechia, P. Howe , Nucl. Phys. B118, 76-94 (1977)

[10] Carlos A. P. Galvão, Claudio Teitelboim, J. Math. Phys. 21(7), 1863-1880 (1980)

[11] F. Ravndal, Phys. Rev. D 21()10, 2823-2832 (1980)

[12] S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, Class. Quant. Grav. 18, 2989-2998 (2001)

[13] A. P. Balachandran, Per Salomonson, Bo-Sture Skagersstam, Jan-Olov Winnberg, Phys. Rev. D15(8), 2308-2317 (1977)

[14] M. Henneaux, C. Teibelboim, *First and Second Quantized Point Particle of Any Spin*, Proceedings of the second meeting on Quantum Mechanics of Fundamentals Systems 2, eds. C. Teibelboim and J. Zanelli (Plenum Press, New York , 1989).

[15] P. Howe, S. Penati, P. Townsend, Phys. Lett. B 215(3), 555-558 (1988)

[16] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics - Wave Equations* (Springer-Verlag,1994).

[17] P. Howe, S. Penati, M. Pernici, P. Townsend, Class. Quant. Grav. 6 1125 (1989)

[18] D.M. Gitman, A. E. Gonalves, V. Tyutin, Int. J. Mod. Phys. A10, 701-718 (1995)

[19] J. Gomis, M. Novell, K. Rafanelli, Phys. Rev. D 34(4), 1072-1075 (1986).

[20] P. Ramond, *Field theory - A Modern Primer* Addison-Wesley, 1989.

[21] B. Zwiebach, *First Course in String Theory* Cambridge - USA, 2004

[22] L. Brink, S. Deser, B. Zumino, P. Di Vechia, P. Howe , Phys. Letters 64B(4), 435-438 (1976)

[23] J. Wess, J. Bagger *Supersymmetry and Supergravity* Princeton University Press , 1992.