



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.003/2001

Raios Cósmicos de Altíssimas Energias e Cosmologia

Letícia Leal Lengruber

Defesa em 1/06/2001

Banca

Reuven Opher (IAG)

Adriam Natchi (IFT)

Rogério Rosenfeld (IFT)

Orientador

Prof. Dr. Rogério Rosenfeld



Maio de 2001

Aos meus pais, Renato e Christina.

Agradecimentos

Graças a Deus, tenho vivido cercada de pessoas que estão sempre prontas a me incentivar e a me ensinar. Aproveito a oportunidade que tenho agora para agradecer a todos os que estiveram ao meu lado e acompanharam este trabalho.

Agradeço à Fapesp pelo fundamental auxílio financeiro.

Ao Professor Rogério Rosenfeld, agradeço pela convivência estimulante e dedicação a este trabalho. Agradeço também ao Professor Bruto Max Pimentel, pela acolhida no IFT.

Muito obrigada aos meus colegas de grupo: Ana Helena, Hugo, Ricardo e Jackson, não somente por nossas discussões, extremamente valiosas para o meu aprendizado, mas principalmente por sua amizade.

Aos amigos do IFT que estudaram comigo, me ajudaram com os computadores, me incentivaram nos momentos difíceis, ou simplesmente com sua alegria e amizade, tornaram o IFT um lugar de onde eu não gostaria de sair, o meu sincero obrigado! Entre eles, não poderia deixar de citar: Esdras, Lúcio, Marcel, Victo, Ricardo, André, Cassius, Rodrigo, Léo, Patrícia, Wagner, Eduardo, Tallarico, Dáfni, Fábio e Randall.

Acima de tudo, agradeço aos meus pais, Renato e Christina e à minha irmã, Tati-nha. Seu amor, confiança e incentivo são os grandes responsáveis por este trabalho.

Sou especialmente grata ao Carlos, meu grande companheiro e incentivador. Sem você, chegar até aqui seria muito mais difícil.

Obrigada aos meus grandes amigos que, apesar da distância geográfica, têm estado sempre ao meu lado: Jana, Léka, Paola, Isa, Tião, Ana Luiza e Alan.

Agradeço também às minhas ex-companheiras de apartamento, Adriana e Sandrinha, por nossa ótima convivência.

Um agradecimento final, talvez redundante, porém do qual eu não abro mão, vai para as pessoas que pacientemente leram e revisaram este texto: Professor Rogério, meus pais, Carlos, Dáfni e Ana Helena.

Resumo

A origem dos raios cósmicos de altíssimas energias (RCAE's) é uma das maiores questões em aberto na astrofísica. Um dos modelos propostos para explicar estes eventos sugere que eles sejam produtos do decaimento de partículas metaestáveis supermassivas, as quais chamamos partículas X . Estas partículas, que seriam uma fração da matéria escura fria no Universo, podem ser produzidas no período de reaquecimento após a fase inflacionária no Universo primordial. Estudamos esta possibilidade e, a partir do fluxo detectado de RCAE's, obtivemos limites para alguns parâmetros como a meia vida e a razão de ramificação para o decaimento direto do inflaton em partículas X .

Palavras Chaves: raios cósmicos; inflação; reaquecimento; partícula supermassiva; matéria escura fria.

Áreas do conhecimento: cosmologia; física de partículas elementares.

Abstract

The origin of ultra high energy cosmic rays (UHECR's) is one of the major unresolved questions in astrophysics. One of the models proposed to explain these events suggests that they are the decay products of supermassive metastable particles, which we call X particles. These particles can be produced in the reheating period following the inflationary epoch of the early Universe and they would be a fraction of cold dark matter. We study this possibility and obtain constraints on some parameters such as the lifetime and branching ratio for the direct decay of the inflaton to X -particles, from the requirement that they are responsible for the observed UHECR flux.

Índice

Introdução	1
1 Raios Cósmicos de Altíssimas Energias	3
1.1 Raios Cósmicos: Aspectos Gerais	3
1.1.1 Espectro	4
1.1.2 Técnicas de Medidas	5
1.1.3 Aceleração	6
1.1.4 Propagação	7
1.2 Eventos com $E \gtrsim 10^{20}$ eV	10
1.3 Partículas X e RCAE's	11
2 Modelo Cosmológico Padrão ou Modelo do <i>Big Bang</i>	16
2.1 Introdução	16
2.2 A Equação de Friedmann	17
2.2.1 Elemento de Linha de Robertson-Walker	17
2.2.2 Tensor Energia-Momento	17
2.3 Termodinâmica do Universo em Equilíbrio	21
2.3.1 Expressões para n , ρ e p	21
2.3.2 Entropia	24
2.4 Termodinâmica do Universo em Expansão	27
2.4.1 Equação de Boltzmann	27
2.4.2 Decaimento e Desacoplamento de Partículas Massivas	30
3 Inflação	33
3.1 Motivações para o Modelo Inflacionário	33
3.2 Dinâmica Inflacionária	36
3.2.1 Universo de De Sitter	36
3.2.2 A Equação de Movimento do Campo Escalar	37

4	Produção de Partículas X Durante a Fase de Reaquecimento	46
4.1	Resolução das Equações de Boltzmann	46
4.2	Resultados e Discussões	50
4.2.1	Interpretação dos Gráficos	50
4.2.2	Expressão para $\Omega_X h^2$	50
4.2.3	Aproximação Analítica \times Resultados Numéricos	52
	Conclusão	56
	A Unidades e Convenções	57
	B Tensor Energia-Momento do Fluido Perfeito	58
	C Algumas definições da Relatividade Geral	59
C.1	Derivada Covariante	59
C.2	Tensor de Riemann, Tensor de Ricci e Escalar de Ricci	59
	D Termo de Colisão da Equação de Boltzmann	61
	Referências	64

Introdução

No início do século passado (1912) o físico austríaco Victor Hess, após realizar medidas da variação da ionização atmosférica como função da altitude, anunciou uma grande descoberta. Segundo os seus dados, somos atingidos por um tipo de “radiação” ionizante vinda de fontes extraterrestres. Esta afirmação foi confirmada mais tarde pelos resultados obtidos por Millikan, que batizou a radiação ionizante de raios cósmicos. Este nome se deve a Millikan ter acreditado que ela era uma relíquia de processos cosmológicos [1].

Hoje, quase um século depois, sabemos por exemplo que os eventos de raios cósmicos são, na grande maioria, núcleos ionizados e que parecem ter origem através da aceleração dessas partículas em campos eletromagnéticos de objetos astrofísicos.

Entretanto, apesar de todos os progressos ocorridos na área, ainda há muito a ser compreendido. Um dos maiores desafios é descobrir a origem dos eventos com energia da ordem de 10^{20} eV, os chamados raios cósmicos de altíssimas energias (RCAE's).

A maior dificuldade em explicar esses eventos utilizando as teorias convencionais de aceleração de raios cósmicos ocorre por causa do efeito GZK (Greisen, Zatsepin, Kuzmin [2, 3]). Segundo ele, raios cósmicos com energia superior a 7×10^{19} eV perdem grande parte de sua energia ao interagirem com fótons da radiação cósmica de fundo (RCF). Simulações mostram que para prótons com tais energias chegarem até a Terra eles devem viajar uma distância menor que 100 Mpc. Entretanto, dentro deste raio de distância, não foram identificadas fontes astrofísicas capazes de acelerar os eventos detectados de RCAE's.

Neste contexto, foi proposto um novo cenário para explicar a origem desses eventos. De acordo com ele, os RCAE's seriam frutos do decaimento de partículas “X” supermassivas ($m_X \gg 10^{20}$ eV). Desta forma eles poderiam facilmente atingir a energia de 10^{20} eV sem haver necessidade de utilizar mecanismos de aceleração. Para evitar o limite GZK, estas partículas devem decair num raio de 100 Mpc da Terra.

As fontes de partículas X poderiam ser defeitos topológicos como cordas cósmicas ou monopolos magnéticos que seriam produzidos em transições de fase previstas nas

teorias de Grande Unificação (para uma revisão veja [4]). Outra possibilidade é que sejam partículas supermassivas metaestáveis, relíquias do período de reaquecimento após a inflação. Neste trabalho estamos interessados em investigar esta hipótese, proposta inicialmente por Kuzmin e Rubakov [5].

As partículas X poderiam, por exemplo, aparecer em teorias supersimétricas [6], teoria de cordas e teoria M [7], ou seja, envolve teorias que estão além do modelo padrão de partículas elementares e portanto, ainda não foram testadas. Isto pode ser visto como um dos problemas deste cenário. Por outro lado, citando Sigl e Bhattacharjee "...é precisamente por causa disto que este cenário é também atrativo: ele introduz idéias além do modelo padrão de física de partículas (como Grande Unificação) e idéias em cosmologia do Universo primordial (como defeitos topológicos e produção de partículas massivas na inflação) na área de raios cósmicos, onde há a chance de serem testadas através dos futuros experimentos de RCAE's".

Pretendemos neste trabalho investigar a hipótese de que as partículas X produzidas na fase de reaquecimento sejam, além das fontes dos RCAE's, também uma fração da matéria escura fria no Universo. Então, iniciamos a dissertação abordando em linhas gerais o atual cenário da física de raios cósmicos e introduzindo o problema específico dos raios cósmicos de altíssimas energias. Propomos que estes eventos tenham origem a partir do decaimento das partículas X e investigamos algumas das propriedades dessa partícula, como sua vida média (τ_X) e abundância ($\Omega_X h^2$). Obtemos limites para estas grandezas a partir do fluxo de RCAE's detectado na superfície terrestre.

A partir deste ponto nosso objetivo é entender como se daria a produção da partícula supermassiva durante a fase de reaquecimento do Universo. Para isso, revisamos no segundo capítulo as principais características do modelo cosmológico padrão, com especial ênfase na termodinâmica do Universo primordial. Já o modelo de inflação e o período de reaquecimento são relatados no capítulo 3 onde, numa primeira abordagem, estudamos um modelo de reaquecimento no qual há apenas os campos do inflaton e de partículas relativísticas.

No capítulo 4, modificamos as equações que descrevem o reaquecimento para incluir a produção da partícula X . Resolvendo estas equações numericamente percebemos que há dois processos possíveis de produção, um via a aniquilação de fótons com energia superior a 10^{20} eV (estudado por Chung, Kolb e Riotto [8]) e outro através do decaimento direto do inflaton. Estudando este segundo caso, chegamos a uma expressão para $\Omega_X h^2$ em função da temperatura de reaquecimento ($T_{r,q}$) e da razão de ramificação do decaimento direto do campo do inflaton em partículas X (B_X). Concluimos este trabalho comparando as expressões para $\Omega_X h^2$ obtidas nos capítulos 1 e 4 e obtendo limites para B_X .

Capítulo 1

Raios Cósmicos de Altíssimas Energias

1.1 Raios Cósmicos: Aspectos Gerais

A cada segundo, a atmosfera terrestre é atingida por uma média de 1000 partículas por metro quadrado com energias que podem variar de alguns MeV's a pouco mais de 100 EeV (10^{20} eV). Essas partículas são o que chamamos de raios cósmicos.

Eles são, na grande maioria, núcleos atômicos como prótons, partículas alfa, etc., chegando a núcleos mais pesados como o de ferro. Fótons e neutrinos também são detectados, porém, em fluxos bem menores do que as partículas carregadas. A vantagem de trabalhar com as partículas neutras é que elas não interagem com campos eletromagnéticos ao longo do caminho e, portanto, apontam diretamente para suas fontes.

Sabe-se que a grande maioria dos raios cósmicos (ou seja, aqueles com $E < 10^{15}$ eV) vem de fora do sistema solar, mas de dentro da galáxia. Para eventos com energias superiores, a incerteza sobre sua origem também se eleva, sendo ainda difícil concluir se suas fontes são galácticas ou extragalácticas.

A motivação para essa dissertação é estudar uma possível origem para os raios cósmicos de energia da ordem de 10^{20} eV, os chamados Raios Cósmicos de Altíssimas Energias (RCAE's)*, visto que este assunto constitui um dos grandes enigmas da astrofísica e cosmologia atuais. Porém, por motivo de completeza, nesta seção discutiremos primeiramente alguns aspectos importantes relativos aos raios cósmicos em geral. Só então passaremos a analisar o caso específico dos RCAE's.

*Alguns artigos de revisão interessantes são: [4],[9] e [10].

1.1.1 Espectro

O espectro dos eventos de raios cósmicos obedece à lei de potência:

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-\alpha}, \quad (1.1)$$

sendo que α está em torno de 3.

Como se pode observar na figura 1.1, há algumas mudanças na inclinação desse espectro:

- até a energia $E \simeq 5 \times 10^{15}$ eV, observa-se uma inclinação (α) de cerca de 2,7. A partir deste ponto, denominado “joelho”, a inclinação aumenta para $\alpha \simeq 3,1$;
- para $E \simeq 5 \times 10^{18}$ eV, temos a região conhecida como “cotovelo”, onde a inclinação diminui voltando ao valor de $\alpha \simeq 2,7$;
- finalmente chegamos ao fim do espectro observado ($E \geq 5 \times 10^{19}$ eV), onde temos poucos dados experimentais e sua forma ainda não está bem definida.

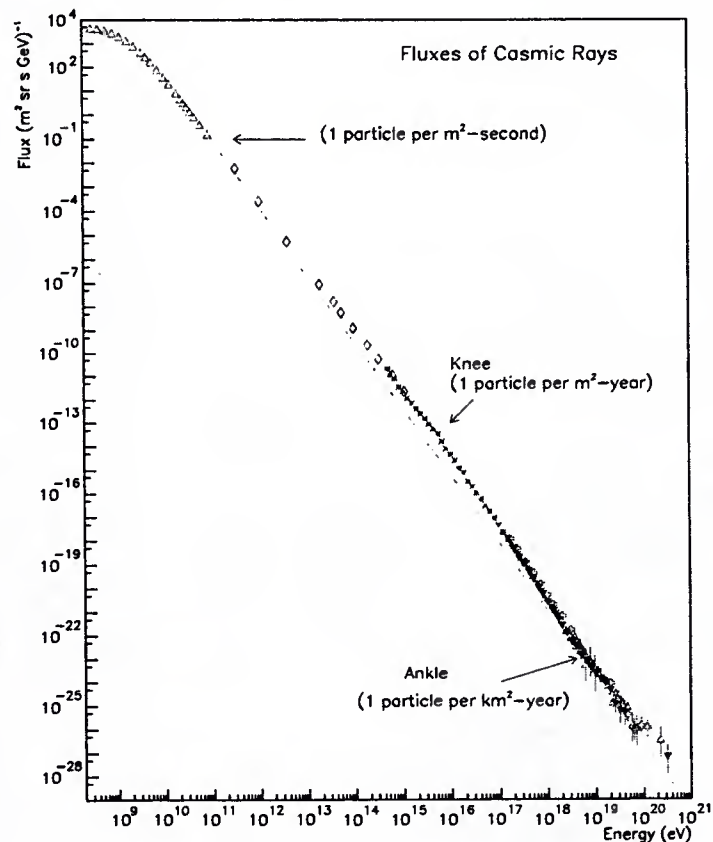


Figura 1.1: Espectro dos Raios Cósmicos[4].

É justamente a região final do espectro que tem despertado maior interesse, tanto dos físicos teóricos como dos experimentais. Do ponto de vista teórico, há a previsão de um corte no espectro para eventos com energia superior ou da ordem de 10^{20} eV (seção 1.1.4). Porém isso não tem sido observado; eventos com tais energias, os RCAE's, foram detectados por observatórios como Volcano Ranch [11], Haverah Park [12], Yakutsk [13], Sugar [14], AGASA [15], Fly's Eye [16] e mais recentemente High Resolution Fly's Eye [17].

O fluxo desses eventos é muito baixo: 1 partícula por km^2 por século e, por isso, a estatística que possuímos para os RCAE's ainda é bastante pequena. Para melhorá-la, estão sendo construídos experimentos com áreas de observação maiores, como por exemplo, o observatório Pierre Auger e o Telescope Array.

1.1.2 Técnicas de Medidas

Quando os raios cósmitos penetram na atmosfera terrestre, eles sofrem várias interações, principalmente eletromagnéticas, e formam o que chamamos de chuva ou cascata de partículas. Logo, utilizando detectores na superfície da Terra não é possível detectarmos os raios cósmitos primários, mas somente os produtos da sua interação com a atmosfera.

Os métodos de detecção são divididos em dois tipos, de acordo com a energia do evento detectado: técnicas de medidas diretas e técnicas de medidas indiretas.

Para eventos com energia até 10^{14} eV, os fluxos são altos o suficiente para permitirem a detecção direta dos eventos; detectores como calorímetros e placas de emulsão são colocados em balões e satélites e detectam os raios cósmitos primários acima da atmosfera.

O tamanho limitado desses detectores é o que dificulta a medição de partículas com energias superiores, que possuem baixo fluxo de eventos. Nesse caso somente podemos detectar os raios cósmitos indiretamente, via detecção de partículas criadas no chuva. Felizmente, para eventos com energias superiores a 10^{14} eV, o chuva criado na atmosfera produz um número suficiente de partículas para serem detectadas na superfície terrestre.

A detecção dessas partículas secundárias pode ser feita basicamente de duas maneiras. Uma consiste em distribuir na superfície vários detectores de partículas, como tanques de água Cherenkov, ao longo de uma grande área. Essencialmente, este foi o método utilizado por Pierre Auger em seu trabalho pioneiro de 1938. O outro método, utilizado para eventos com energia superior a 10^{17} eV, utiliza fotomultiplicadoras para detectar a radiação produzida (cujo comprimento de onda está entre 300 e 400 nm) pela passagem das partículas carregadas do chuva através das

moléculas de nitrogênio da atmosfera. Utilizando essas duas técnicas consegue-se “reconstruir” a partícula primária através de simulações computacionais, determinando sua composição, energia e direção de chegada.

1.1.3 Aceleração

A origem dos raios cósmicos é um assunto que ainda exige muita investigação. Apesar de ser sabido que eles são, na grande maioria, partículas carregadas aceleradas em campos eletromagnéticos, os mecanismos de aceleração ainda não são totalmente compreendidos. Existem basicamente dois modelos: a aceleração estatística e a aceleração direta.

De acordo com o primeiro modelo as partículas ganham energia aos poucos, em sucessivas colisões em regiões de campo magnético variável. Esse processo é uma variante do mecanismo de aceleração de Fermi [18], e pode ser gerado, por exemplo, por ondas de choque de explosões de supernovas que se propagam através de um plasma magnético. Este é o modelo mais aceito para explicar eventos com energia até 10^{15} eV, já que fornece de maneira natural o espectro de lei de potência observado.

Um mecanismo dessa natureza, denominado aceleração por choques difusivos, poderia acelerar partículas a energias mais altas. De acordo com um estudo feito por Drury [1], a energia máxima que uma partícula pode obter, sendo acelerada via este mecanismo, é dada pela expressão:

$$E_{max} = ZeBR\beta \sim 10^{18} Z\beta \left(\frac{R}{\text{kpc}} \right) \left(\frac{B}{\mu\text{G}} \right) \text{eV}. \quad (1.2)$$

onde βc é a velocidade do choque e utilizamos unidades naturais, conforme indicado no apêndice A[†]. Ze é carga da partícula, B é a intensidade do campo magnético e R o tamanho da região de aceleração.

Na aceleração direta as partículas podem ser aceleradas até altas energias por um forte campo elétrico. Essa força eletromotriz poderia ser gerada em condutores magnetizados que giram rapidamente como, por exemplo, estrelas de nêutrons gigantes (pulsares). Para uma estrela de nêutrons com campo magnético superficial $B \sim 10^{12}$ G, raio $r \sim 10$ km e frequência de rotação $\omega/(2\pi) \sim 30$ s⁻¹, a força eletromotriz (emf) gerada é de

$$\text{emf} \sim \omega Br^2 \sim 10^{18} \text{V}. \quad (1.3)$$

O grande problema desse mecanismo de aceleração é que não é óbvio como obter o espectro de lei de potência observado. Além disso, a aceleração nesse caso ocorre

[†]Utilizaremos o sistema de unidades naturais em grande parte deste trabalho

1.1.4 Propagação

Ao se propagar desde a sua fonte até a superfície da Terra, as partículas aceleradas vão atravessar os meios interestelar e intergalático (caso sua origem seja extragalática), interagindo, por exemplo, com campos magnéticos e fótons da radiação cosmológica de fundo (RCF).

A interação de raios cósmicos eletricamente carregados com campos magnéticos galáticos e extragaláticos resulta na deflexão de suas trajetórias. Uma partícula relativística de carga qe e energia E tem um raio de Larmor dado por $r_L \simeq E/(qeB_\perp)$, onde B_\perp é a componente do campo magnético perpendicular ao momento da partícula. Para um campo com intensidade média B , e assumindo que para se deslocar de uma distância d um próton se propague de maneira aleatória por N regiões com comprimento coerente l_c ($N \sim d/l_c$), o desvio angular acumulado será dado pela expressão [9, 19]:

$$\begin{aligned} \theta(E, d) &= 1/2\sqrt{N} \frac{l_c}{r_L} \\ &\simeq 2,5^\circ \left(\frac{d}{l_c}\right)^{1/2} \left(\frac{l_c}{10\text{Mpc}}\right) \left(\frac{B}{10^{-9}\text{G}}\right) \left(\frac{E}{10^{20}\text{eV}}\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

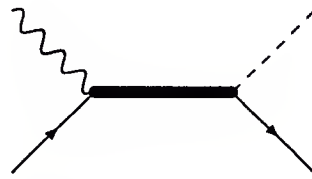
sendo $B = 10^{-9}\text{G}$ o limite superior obtido para o valor do campo magnético extragalático [20].

Analisando (1.4), percebemos que o desvio sofrido pelas trajetórias dos RCAE's é bastante pequeno, de modo que suas direções de chegada apontam diretamente para suas fontes. Portanto, a detecção desses eventos abriu caminho para um novo ramo de pesquisa: o da astronomia de partículas carregadas.

Os principais mecanismos de perda de energia dos RCAE's são decorrentes de sua interação com fótons da RCF. Ao interagirem com a radiação, os prótons, núcleos e fótons perdem grande parte de sua energia através, respectivamente, dos processos de fotoprodução de píons, desintegração e produção de pares.

Porém, para que esses processos ocorram é necessário que os eventos tenham energia acima de um certo limiar, conhecido como limite GZK (Greisen, Zatsepin, Kuzmin [2, 3]). Este valor da energia, a partir do qual espera-se um corte no espectro de raios cósmicos, é estimado, a seguir, para prótons.

A reação que queremos estudar é:



$$p + \gamma \rightarrow \Delta \rightarrow \pi + N$$

onde os quadri-momentos do próton e do fóton (no referencial da RCF) são respectivamente:

$$\begin{aligned} P_1 &= (E_p, 0, 0, k), \\ P_2 &= (\varepsilon, 0, 0, -\varepsilon), \end{aligned}$$

as massas do delta e do próton são:

$$\begin{aligned} m_\Delta &= 1232 \text{ MeV}, \\ m_p &= 938 \text{ MeV}, \end{aligned}$$

e a energia de um fóton da RCF à temperatura de $T \simeq 2,7\text{K}$ é:

$$\varepsilon = 2,3 \times 10^{-4} \text{ eV}.$$

A energia do centro de massa ao quadrado é dada por:

$$s = (P_1 + P_2)^2 = m_\Delta^2, \quad (1.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2)^2 &= P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \\ &= m_p^2 + 2(E_p\varepsilon - k(-\varepsilon)) \\ &= m_p^2 + 2E_p\varepsilon + 2k\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Sendo o próton relativístico, consideramos que

$$E_p \simeq k,$$

e daí conseguimos obter a expressão para a energia necessária ao próton para que o processo ocorra:

$$m_\Delta^2 = m_p^2 + 4E_p\varepsilon, \quad (1.7)$$

$$E_{GZK} = E_p = \frac{m_{\Delta}^2 - m_p^2}{4\varepsilon}. \quad (1.8)$$

Substituindo as massas do próton e do delta e a energia do fóton da RCF, o limite GZK encontrado é de aproximadamente 7×10^{19} eV.

O livre caminho médio dos prótons para uma densidade de fótons (n) na RCF de $411/\text{cm}^3$, e seção de choque (σ) de $135 \mu\text{b}$ [21] é de:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n} \simeq 6 \text{ Mpc}. \quad (1.9)$$

Utilizando o método Monte Carlo, Aharonian e Cronin [22] simularam a propagação de prótons no meio intergaláctico. Um dos resultados obtidos é mostrado no gráfico a seguir:

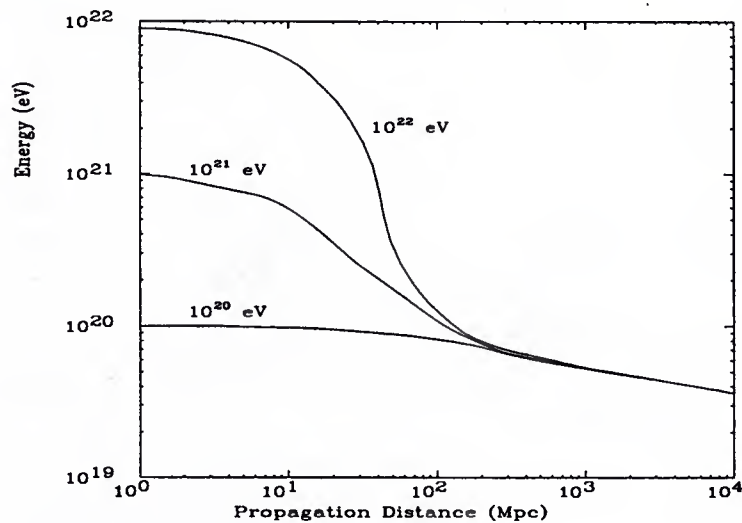


Figura 1.2: Energia média como função da distância de propagação para prótons com as energias iniciais de 10^{20} , 10^{21} e 10^{22} GeV [22].

Da figura acima, percebemos que para que partículas cheguem até nós com energia superior a 10^{20} eV, elas devem viajar uma distância máxima de aproximadamente 100 Mpc. Ou seja, suas fontes devem estar no máximo a esta distância.

1.2 Eventos com $E \gtrsim 10^{20}$ eV

Não são muitos os objetos astrofísicos capazes de atuar como fontes de partículas a energias tão altas. Para isso é necessário que produzam um campo magnético muito forte ou que a região de aceleração seja suficientemente grande. Baseando-se neste simples argumento dimensional, A. M. Hillas [23] desenvolveu um diagrama relacionando essas duas grandezas para vários objetos astrofísicos.

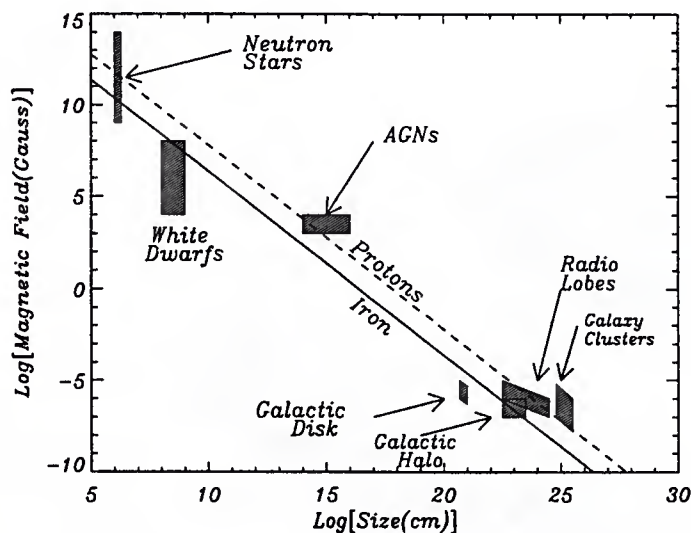


Figura 1.3: Diagrama de Hillas [24]. As possíveis fontes de prótons e núcleos de ferro de altíssimas energias estão, respectivamente, acima da reta tracejada para prótons e acima da reta contínua para os núcleos de ferro. Foi utilizado $\beta = c = 1$.

De acordo com este diagrama, apenas objetos situados na reta ou acima dela poderiam ser as fontes desejadas. Conforme já foi mencionado, partículas viajando a energias tão altas sofrem pouca deflexão por campos magnéticos interestelares e, em virtude disso, suas direções de propagação deveriam identificar suas fontes. Porém, apesar de eventos com energias da ordem de 10^{20} eV terem sido detectados, não se consegue associar sua direção de chegada às possíveis fontes astrofísicas indicadas no diagrama de Hillas (estando elas à distância máxima de 100 Mpc).

A seguir, mostramos o espectro de energia de eventos medidos pelo experimento AGASA. A curva tracejada representa o espectro esperado por fontes extragaláticas distribuídas uniformemente no Universo (seu decaimento para energia $E > 10^{20}$ eV indica a presença do limite GZK):

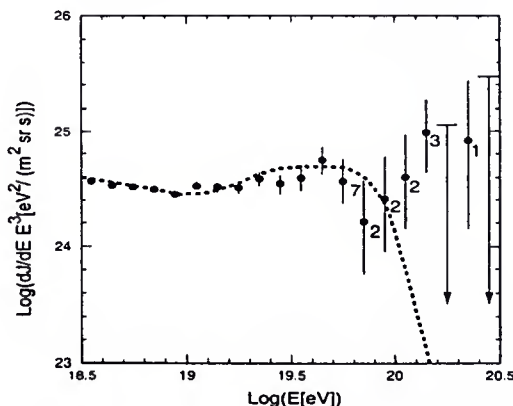


Figura 1.4: Comparação entre espectro obtido pelo experimento AGASA e espectro esperado por fontes astrofísicas. Os números ao lado dos pontos correspondem à quantidade de eventos observados para cada “bin” de energia [4, 15]

Vamos tentar resumir os dados que temos até agora:

- os mecanismos convencionais de aceleração de raios cósmicos não parecem ser eficientes na aceleração de partículas a energias da ordem de 10^{20} eV;
- o limite GZK impede que as fontes dos raios cósmicos de altíssimas energias estejam a uma distância superior a 100 Mpc;
- não conseguimos associar possíveis fontes astrofísicas extragaláticas (que estejam a distâncias menores que 100 Mpc) aos eventos detectados.

1.3 Partículas X e RCAE's

Frente a essas dificuldades, foi sugerido um novo cenário para tentar explicar o fenômeno. De acordo com ele, as partículas com altíssimas energias não mais seriam aceleradas por campos eletromagnéticos, mas seriam frutos do decaimento de partículas supermassivas “ X ” com massa $m_X \gg 10^{20}$ eV (10^{12} GeV $\leq m_X \leq 10^{16}$ GeV). Essas partículas estariam a uma distância que evitaria os problemas causados pelo limite GZK.

As fontes da partícula X poderiam ser defeitos topológicos, como cordas cósmicas ou monopolos magnéticos, produzidos no Universo primordial durante processos de quebra de simetria previstos nas teorias de Grande Unificação. Outra alternativa, que é o caso que investigamos neste trabalho, é que elas sejam partículas metaestáveis supermassivas, relíquias de processos ocorridos após o período inflacionário. Se elas foram produzidas no Universo primordial e estão decaindo agora, a vida média dessas

partículas deve ser maior ou da ordem da idade do Universo ($\tau_X \gtrsim 10^{10}$ anos). Essas partículas poderiam também contribuir para a abundância de matéria escura fria no Universo.

De maneira a traçar um vínculo entre a teoria e os dados observacionais, queremos obter uma expressão aproximada para a abundância de partículas X (Ω_X) necessária para explicar a taxa de eventos de raios cósmicos de altíssimas energias detectados na superfície terrestre. Nos nossos cálculos abordaremos dois casos: no primeiro, supomos que as partículas estejam uniformemente distribuídas no Universo. Já a nossa segunda hipótese é que elas estejam aglomeradas no nosso halo galáctico.

Segundo o gráfico da figura 1.1, o fluxo de raios cósmicos com energia de 10^{20} eV é $J \approx 10^{-27}/(\text{m}^2 \text{ sr s GeV})$. Seguindo a análise realizada em [4], supõem-se que os raios cósmicos sejam fótons. Nesse caso o limite GZK ocorre devido à produção de pares. Para que os fótons cheguem até nós com energia superior a 10^{20} eV, eles devem viajar uma distância máxima de $l(E_\gamma) \approx 10$ Mpc (como vimos, para o caso de prótons essa distância é de 100 Mpc).

O fluxo de fótons gerado pelo decaimento de uma distribuição uniforme de partículas X é dado por:

$$J_\gamma = \frac{1}{4\pi} l(E_\gamma) |\dot{n}_X| \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma}, \quad (1.10)$$

onde dN_γ/dE_γ é o espectro de injeção do fóton a partir do decaimento de uma partícula X , $\dot{n}_X^\dagger (= -n_X/\tau_X)$ é a taxa de decaimento da partícula X e τ_X e n_X são respectivamente sua vida média e densidade. Obtendo uma expressão para dN_γ/dE_γ , e igualando (1.10) ao valor do fluxo de eventos detectados, obtém-se uma expressão para n_X e conseqüentemente para Ω_X .

No intuito de obter dN_γ/dE_γ , assume-se que a partícula X decaia em:

$$X \rightarrow \text{quark} + \text{lepton}.$$

O quark produz um jato hadrônico que é tipicamente composto por 90% de píons e 10% de nucleons. Espera-se que aproximadamente um terço dos píons produzidos sejam π^0 's, que por sua vez decairão produzindo fótons. Supondo que ao decair a partícula X divida sua energia igualmente entre o quark e o lépton, a energia total dos fótons produzidos neste decaimento é dada por:

$$E_{\gamma, \text{total}} \simeq \frac{1}{3} \times \left(\frac{f_\pi}{0,9} \right) \times 0,9 \times \frac{1}{2} \times m_X = 0,15 m_X \left(\frac{f_\pi}{0,9} \right). \quad (1.11)$$

[†]A expressão para \dot{n}_X é obtida utilizando que $n_X = n_X^0 \exp(-t/\tau_X)$, sendo n_X^0 a densidade inicial de partículas.

sendo f_π a fração da energia total transferida aos píons (supondo que os píons e nucleons tenham o mesmo espectro, f_π será a fração de píons no jato).

Sabe-se que o espectro hadrônico é da forma,

$$\frac{dN_H}{dE_H} \propto E^{-\alpha}, \quad (1.12)$$

com $1,3 \leq \alpha \leq 1,5$. Já que fótons são provenientes do decaimento de hadrons, seu espectro também deve se comportar dessa maneira. Aproximando grosseiramente a energia máxima do fóton produzido para $E_{max} = m_X/2$, e sendo C uma constante qualquer, podemos escrever que:

$$\frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} \simeq \frac{C}{m_X} \times \left(\frac{E_{max}}{E_\gamma} \right)^\alpha. \quad (1.13)$$

Para obtermos o valor de C , substituímos a expressão acima na equação que fornece a energia total dos fótons produzidos,

$$E_{\gamma, total} \simeq \int_0^{E_{max}} dE_\gamma E_\gamma \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} = 0,15m_X \left(\frac{f_\pi}{0,9} \right),$$

de modo que obtemos,

$$C = 0,6(2 - \alpha) \left(\frac{f_\pi}{0,9} \right). \quad (1.14)$$

Encontramos assim a expressão aproximada para o espectro, dada por:

$$\frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} \simeq 0,6(2 - \alpha) \left(\frac{f_\pi}{0,9} \right) \frac{1}{m_X} \left(\frac{2E_\gamma}{m_X} \right)^{-\alpha}. \quad (1.15)$$

Voltando à equação (1.10), pode-se agora calcular $|\dot{n}_X|$. Para facilitar nosso trabalho, ambos os lados da equação serão multiplicados por $(E_\gamma)^2$, onde $E_\gamma = 10^{20}$ eV. Daí tiramos que:

$$\begin{aligned} |\dot{n}_X| &\simeq 1,67 \times 10^{-50} \left(\frac{J_\gamma(E_\gamma)^2}{1\text{eV/cm}^2 \text{ sr s}} \right) \left(\frac{l(E_\gamma)}{10\text{Mpc}} \right)^{-1} \\ &\times \left(\frac{2E_\gamma}{10^{16}\text{GeV}} \right)^{\alpha-2} \left(\frac{m_X}{10^{16}\text{GeV}} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{2-\alpha} \right) \left(\frac{0,9}{f_\pi} \right) \text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Substituindo os valores de $J_\gamma(E_\gamma)^2$, $l(E_\gamma)$, E_γ e fazendo $\alpha = 1,5$ e $f_\pi = 0,9$, a taxa de decaimento das partículas X será de:

$$|\dot{n}_X| = \frac{n_X}{\tau_X} \simeq 3,7 \times 10^{-48} \left(\frac{m_X}{10^{16} \text{GeV}} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}. \quad (1.17)$$

Abaixo, segue a expressão para a densidade de partículas X (uniformemente distribuídas no Universo) necessária para explicar o fluxo de raios cósricos de altíssimas energias, supondo que estes sejam fótons :

$$n_X \simeq 1,2 \times 10^{-30} \left(\frac{\tau_X}{10^{10} \text{anos}} \right) \left(\frac{m_X}{10^{16} \text{GeV}} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ cm}^{-3}. \quad (1.18)$$

A relação entre a abundância da partícula X (Ω_X) e sua vida média (τ_X) é dada por:

$$\Omega_X = \frac{\rho_X}{\rho_c} = \frac{m_X n_X}{\rho_c}$$

$$\tau_X = \frac{\Omega_X \rho_c}{|\dot{n}_X| m_X} \simeq 10^{20} (\Omega_X h^2) \left(\frac{10^{16} \text{GeV}}{m_X} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ anos}, \quad (1.19)$$

onde ρ_X é a densidade de energia da partícula X , $\rho_c \simeq 10^{-5} h^2 \text{GeV cm}^{-3}$ é a densidade crítica[†] do Universo e h é o valor atual da constante de Hubble em unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Para que $(\Omega h^2) \simeq 1$ (Ω é a fração da densidade de energia do Universo sobre a densidade crítica), é necessário que $(\Omega_X h^2) \lesssim 1$. Sabemos também que $\tau_X \gtrsim 10^{10}$ anos. Dessa maneira, utilizando a equação (1.19) para $m_X = 10^{12} \text{GeV}$ (de acordo com o modelo de produção de partículas X que iremos utilizar no capítulo 4), obtém-se os limites superiores e inferiores para τ_X e $(\Omega_X h^2)$:

- para $(\Omega_X h^2) \simeq 1 \rightarrow \tau_X \simeq 10^{22}$ anos;
- para $\tau_X \simeq 10^{10}$ anos $\rightarrow (\Omega_X h^2) \simeq 10^{-12}$.

Assumindo que as partículas X sejam uma fração da matéria escura fria, elas devem estar concentradas nos halos galáticos e não distribuídas uniformemente no Universo. Nesse caso a expressão correta para descrever o fluxo de eventos é:

$$J_\gamma^h = \frac{1}{4\pi} R^h \dot{n}_X^h \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma}, \quad (1.20)$$

para R^h e \dot{n}_X^h sendo respectivamente o raio do halo galático e a taxa de decaimento das partículas X no caso de sua aglomeração no halo.

[†]Esta grandeza será definida no capítulo 2.

Essa nova distribuição implica numa modificação da equação (1.19):

$$\tau_X \simeq 10^{20} f(\Omega_X h^2) \left(\frac{10^{16} \text{GeV}}{m_X} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ anos}, \quad (1.21)$$

onde

$$f = \frac{J_\gamma^h}{J_\gamma} = \frac{n_X^h R^h}{n_X l(E_\gamma)}$$

$$= 1,5 \times 10^3 \left(\frac{0.2}{\Omega_{CDM} h^2} \right) \left(\frac{R^h}{100 \text{Kpc}} \right) \left(\frac{10 \text{Mpc}}{l(E_\gamma)} \right) \left(\frac{\rho_{CDM}^h}{0.3 \text{ GeV cm}^{-3}} \right),$$

e ρ_{CDM}^h é a densidade de energia de matéria escura fria no halo galático.

Logo, considerando $m_X = 10^{12} \text{GeV}$, para τ_X mínimo de 10^{10} anos e $\Omega_X h^2$ máximo da ordem de 1 obtemos os seguintes limites ($f \approx 10^3$):



- para $(\Omega_X h^2) \simeq 1 \rightarrow \tau_X \simeq 10^{25}$ anos;
- para $\tau_X \simeq 10^{10}$ anos $\rightarrow (\Omega_X h^2) \simeq 10^{-15}$.

A seguir é mostrado o gráfico referente à equação (1.21):

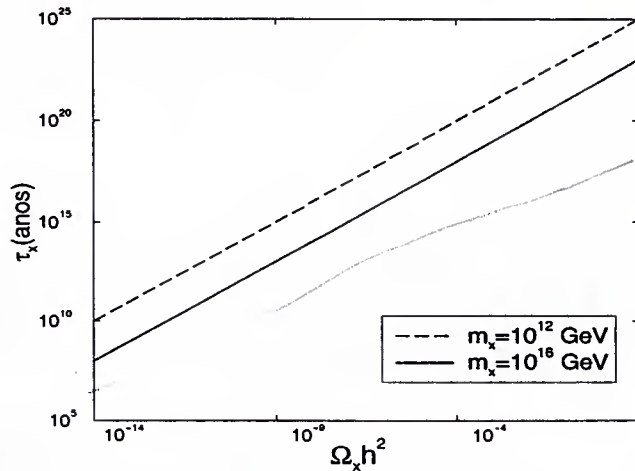


Figura 1.5: Gráfico da vida média pela abundância da partícula X , para $m_X = 10^{12}$ e 10^{16} GeV, no caso das partículas estarem aglomeradas no halo galático.

$$\Omega_X h^2 \sim 1$$

$$M_X \sim 10^{12} \text{ GeV}$$

Capítulo 2

Modelo Cosmológico Padrão ou Modelo do *Big Bang*

2.1 Introdução

Cosmologia é a ciência que estuda a evolução do Universo em larga escala. Das quatro interações fundamentais que conhecemos, a interação gravitacional é a mais relevante para este estudo. Isso porque as interações fraca e forte só agem em escalas muito pequenas e a interação eletromagnética, apesar de ser de longo alcance, tende a se cancelar já que para médias e grandes distâncias o Universo é neutro*.

De acordo com a teoria da Relatividade Geral, que é a teoria mais utilizada na descrição da gravitação, a evolução do Universo em larga escala é descrita pelas equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

No lado esquerdo dessas equações temos a métrica ($g_{\mu\nu}$), o tensor e o escalar de Ricci (respectivamente $R_{\mu\nu}$ e \mathcal{R}). Essas grandezas são responsáveis pelo conteúdo geométrico do Universo. Já do lado direito estão o tensor energia-momento ($T_{\mu\nu}$) para a matéria não-relativística e radiação presentes, a constante de Newton (G) e a constante cosmológica (Λ).

*Obviamente as interações fraca, forte e eletromagnéticas têm papéis importantes em fenômenos cosmológicos como nucleossíntese, formação da radiação cósmica de fundo, entre outros, porém para termos uma visão geral da evolução do Universo o primeiro passo deve ser considerar apenas a interação gravitacional.

2.2 A Equação de Friedmann

2.2.1 Elemento de Linha de Robertson-Walker

As equações de Einstein são 10 equações não-lineares de difícil resolução e para simplificar o problema teórico é necessário assumirmos algumas simetrias. Para obter a solução para o Universo em larga escala assume-se homogeneidade e isotropia do espaço tridimensional, o que, de acordo com dados observacionais, é uma hipótese bastante boa. A métrica que descreve um espaço desse tipo é a métrica maximalmente simétrica de Robertson-Walker (RW), que pode ser escrita na forma [25]:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right\}. \quad (2.2)$$

A função $a(t)$, conhecida como fator de escala, tem dimensão de comprimento e sua presença descreve um Universo dinâmico, que pode expandir ou contrair com o tempo. De fato, aproximadamente na mesma época em que essa métrica foi obtida, Hubble concluía suas observações do desvio para o vermelho de galáxias e aglomerados de galáxias brilhantes, mostrando que o Universo deveria estar se expandindo. O objetivo de resolver a equação de Einstein para a métrica de RW é encontrar a dependência temporal de $a(t)$.

As coordenadas (r, θ, ϕ) são denominadas comóveis pois mantém o seu valor à medida que o Universo se expande. k é um número que pode assumir três valores diferentes $(-1, 0, +1)$ de acordo com o tipo de curvatura espacial do Universo (aberta, plana ou fechada). r é adimensional e para um Universo fechado varia de $0 < r < 1$. Neste caso $a(t)$ tem o significado de raio do Universo.

2.2.2 Tensor Energia-Momento

Observa-se da equação (2.1) que $T_{\mu\nu}$ deve ter a mesma forma que $g_{\mu\nu}$, ou seja, ambos são matrizes 4×4 . Pela hipótese de isotropia do espaço, espera-se que todas as componentes espaciais sejam iguais. Daí propõem-se a expressão do tensor energia-momento de um fluido perfeito[†]:

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p), \quad (2.3)$$

onde p e ρ são respectivamente a pressão e a densidade de energia do fluido.

[†]Para obter mais detalhes sobre este tensor, consultar o Apêndice B.

A componente $\mu = 0$ da expressão de conservação do tensor $T^{\mu\nu}$ ($T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$)[†], fornece:

$$d(\rho a^3) = -pd(a^3), \quad (2.4)$$

que expressa a primeira lei da termodinâmica para um processo adiabático.

Para um fluido homogêneo e isotrópico, a equação de estado que relaciona a pressão com a densidade é dada por:

$$p = \omega\rho,$$

com ω independente do tempo. Substituindo essa expressão na equação (2.4), segue que:

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.5)$$

Para diferentes tipos de matéria, temos diferentes valores para ω , que por sua vez fornecerão diferentes dependências da densidade de energia com o fator de escala. A seguir, mencionamos os três casos de relevância em cosmologia.

- Radiação ou partículas relativísticas:

$$p_R = \frac{1}{3}\rho_R \Rightarrow \rho_R \propto a^{-4}. \quad (2.6)$$

- Matéria incoerente (não-relativística):

$$p_M = 0 \Rightarrow \rho_M \propto a^{-3}. \quad (2.7)$$

- Energia de Vácuo

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda \Rightarrow \rho_\Lambda \text{ é constante.} \quad (2.8)$$

A depender da época em que o Universo se encontra, existe a predominância de algum tipo de matéria. Desde o início do Universo[§] até aproximadamente 300.000 anos, a radiação era a forma de energia dominante. Após essa época, entramos numa fase em que a matéria incoerente é a mais abundante. Finalmente, recentes dados observacionais parecem apontar para o fato de estarmos entrando na fase em que a energia de vácuo domina sobre as outras formas de energia [26, 27]. Isso pode ser obtido, por exemplo, fazendo $\Lambda \neq 0$ nas equações de Einstein[¶].

Tendo examinado o lado direito da equação (2.1) através de uma análise do tensor $T^{\mu\nu}$, trataremos agora dos termos do lado esquerdo desta equação.

[†]A definição de derivada covariante (;) é dada no Apêndice C.

[§]Após o período inflacionário.

[¶]A constante cosmológica (Λ) pode ser interpretada como uma espécie de matéria com equação de estado $p = -\rho$.

Para a métrica de RW, o tensor e o escalar de Ricci são dados pelas expressões^{||}:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right] g_{ij}, \\ \mathcal{R} &= -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde os índices i, j vão de 1 a 3 e o ponto ($\dot{}$) denota derivada em relação ao tempo.

Agora já possuímos tanto o lado direito ($T_{\mu\nu}$) como o lado esquerdo das equações de Einstein, e podemos então resolvê-las para obter o comportamento do fator de escala $a(t)$. Para uma análise simplificada, faremos $\Lambda = 0$. Substituindo na equação (2.1) o tensor e o escalar de Ricci dados em (2.9) e $T_{\mu\nu}$ dado em (2.3), encontramos as equações dadas abaixo.

- Para $\mu, \nu = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) &= \frac{8\pi G\rho}{3} \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

sendo $\rho = \rho_R + \rho_M$.

- para $\mu, \nu = i$:

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = -8\pi Gp, \quad (2.11)$$

para $p = p_M + p_R$.

Subtraindo as equações (2.10) e (2.11), obtém-se uma equação para a aceleração do fator de escala, \ddot{a} :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho}{3}(3p + \rho). \quad (2.12)$$

^{||}Mais detalhes sobre a obtenção dessas expressões são dados no Apêndice C. Além disso, indicamos as referências [28, 29]

É conveniente introduzirmos a chamada função de Hubble:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}.$$

Atualmente o valor de H é dado pela constante de Hubble:

$$H_0 = 100h \text{ km}/(\text{s Mpc}),$$

sendo que h , de acordo com dados observacionais recentes, deve ter valor entre 0,6 e 0,8. O tempo de Hubble (ou raio de Hubble), H^{-1} , fornece a escala de tempo para a expansão do Universo e tem ordem de grandeza de 10 bilhões de anos.

As equações (2.10), (2.11) e (2.12) fornecem a evolução do fator de escala do Universo, dependendo do seu conteúdo de matéria. A equação (2.10) é conhecida como equação de Friedmann e pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{k}{a^2 H^2} &= \frac{\rho}{3H^2/8\pi G} - 1 \\ \frac{k}{a^2 H^2} &= \Omega - 1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde definiu-se as grandezas**:

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \text{e} \quad \Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}.$$

A densidade crítica (ρ_c) tem o seguinte significado: quando $\rho = \rho_c$, temos que $k = 0$ e neste caso o Universo é plano. Ω é a abundância de energia do Universo, e é dada pela fração da densidade total de energia do sobre a densidade crítica.

Cada um dos três diferentes valores de k corresponde a diferentes valores da abundância Ω :

$$\begin{array}{lll} \text{universo fechado} & k = +1 & \Rightarrow \Omega > 1 \quad (\rho > \rho_c), \\ \text{universo plano} & k = 0 & \Rightarrow \Omega = 1 \quad (\rho = \rho_c), \\ \text{universo aberto} & k = -1 & \Rightarrow \Omega < 1 \quad (\rho < \rho_c). \end{array}$$

**Apesar da equação (2.13) ser válida para todos os instantes de tempo, vale lembrar que Ω e ρ_c não são constantes.

Resolvendo a equação de Friedmann para $k = 0^{\dagger\dagger}$, obtém-se a dependência do fator de escala com o tempo, para os três tipos de matéria já citados:

$$\begin{aligned} a(t) &\propto t^{2/3}, \text{ para } \rho \simeq \rho_M, \\ a(t) &\propto t^{1/2}, \text{ para } \rho \simeq \rho_R, \\ a(t) &\propto \exp(Ht), \text{ para } \rho \simeq \rho_\Lambda. \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.3 Termodinâmica do Universo em Equilíbrio

2.3.1 Expressões para n , ρ e p

No Universo primitivo podemos considerar que a grande maioria das partículas se encontravam em equilíbrio térmico local, ou seja, sua taxa de interação era maior que a taxa de expansão do Universo. Utilizando a hipótese simplificadora de que elas interagiam fracamente, vamos tratá-las como um gás ideal com g graus de liberdade internos. Portanto, podemos escrever a densidade de partículas n , a densidade de energia ρ , e a pressão p do gás em termos da função de distribuição no espaço de fase $f(\vec{p})^*$:

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) d^3p, \quad (2.15)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\vec{p}) f(\vec{p}) d^3p, \quad (2.16)$$

$$p = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\vec{p}|^2}{3E} f(\vec{p}) d^3p. \quad (2.17)$$

Acima, a energia das partículas é dada pela relação de dispersão $E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$, onde m é a massa de repouso da partícula e \vec{p} seu momento. $f(\vec{p})$ é a função de distribuição de Fermi-Dirac ou Bose Einstein:

$$f(\vec{p}) = \left[\exp\left(\frac{E - \mu}{T}\right) \pm 1 \right]^{-1}, \quad (2.18)$$

^{††}Conforme poderá ser notado, o caso $k = 0$ será bastante utilizado nos nossos cálculos. Não apenas porque é o caso mais simples, mas principalmente porque os dados observacionais apontam hoje para um Universo plano [27]. Além disso, considerando o cenário do Universo inflacionário, $k = 0$ é também uma ótima hipótese para o Universo primordial.

*Infelizmente, é usual na literatura denotar a pressão e o módulo do momento da partícula utilizando a mesma letra, p . Seguimos aqui esta notação.

sendo +1 para férmions e -1 para bósons. A quantidade μ é o potencial químico da partícula em questão e sem perda de generalidade podemos fazer $\mu = 0^\dagger$.

Substituindo $f(\vec{p})$ e utilizando a relação de dispersão nas equações (2.15), (2.16) e (2.17), reescrevemos n , ρ e p para uma espécie de partícula de massa m e com temperatura T :

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{\exp[E/T] \pm 1} E^2 dE, \quad (2.19)$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{\exp[E/T] \pm 1} E dE, \quad (2.20)$$

$$p = \frac{g}{6\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{3/2}}{\exp[E/T] \pm 1} dE. \quad (2.21)$$

Afim de obtermos valores para as grandezas n , ρ e p , precisamos calcular as integrais acima. Para facilitar este trabalho, utilizaremos dois limites que nos serão de grande interesse.

Limite Relativístico ($T \gg m$)

Nesse limite,

$$E^2 - m^2 \simeq E^2,$$

e a expressão para n é escrita como:

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{E}{\exp[E/T] \pm 1} E dE. \quad (2.22)$$

Resolvendo a integral, obtemos:

$$n = \begin{cases} (\zeta(3)/\pi^2)gT^3 & \text{Bósons,} \\ 3/4(\zeta(3)/\pi^2)gT^3 & \text{Férmions,} \end{cases} \quad (2.23)$$

onde $\zeta(3) = 1,20206\dots$ é a função zeta de Riemann de 3.

[†]O potencial químico é uma grandeza conservada nas reações entre partículas. Já que numa reação típica fótons podem ser absorvidos ou emitidos em grande quantidade, seu potencial químico deve ser nulo. Considerando que a densidade de número de fótons no Universo primitivo era muito maior que a de léptons e hadrons, podemos utilizar $\mu = 0$ para todas as partículas.

Utilizando o mesmo limite nas expressões para ρ e n , obtém-se os seguintes resultados:

$$\rho = \begin{cases} (\pi^2/30)gT^4 & \text{Bósons,} \\ \frac{7}{8}(\pi^2/30)gT^4 & \text{Férmions,} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$p = \rho/3. \quad (2.25)$$

Limite Não-Relativístico ($m \gg T$)

Nesse caso, temos que:

$$E \geq m \text{ e } E \gg T.$$

Visto que $E/T \gg 1$, podemos desprezar os termos ± 1 nos denominadores das expressões (2.19), (2.20), (2.21). Desta forma, a expressão para n é dada por:

$$\begin{aligned} n &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}{\exp[E/T]} E dE \\ &= g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp[-m/T]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

De maneira similar, obtemos expressões para ρ e p :

$$\begin{aligned} \rho &= mn, \\ p &= nT \ll \rho. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Observando as expressões (2.25) e (2.27) percebemos que elas fornecem respectivamente as equações de estado para partículas relativísticas e matéria incoerente, mencionadas na seção anterior (equações (2.6) e (2.7)).

A densidade de energia e pressão de todas as espécies em equilíbrio térmico podem ser expressas em termos da temperatura T dos fótons do banho térmico:

$$\begin{aligned} \rho_R(T) &= \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \\ p_R(T) &= \rho_R/3 = \frac{\pi^2}{90} g_* T^4, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde leva-se em conta apenas a densidade de energia e pressão de partículas relativísticas, já que estas são exponencialmente maiores que aquelas das espécies não

relativísticas. O termo g_* conta o número efetivo de graus de liberdade internos para espécies relativísticas:

$$g_* = \sum_{i=\text{bósons}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{férmions}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4. \quad (2.29)$$

O fator 7/8 vem da diferença entre as estatísticas de Bose-Einstein e Fermi-Dirac, mostrada na equação (2.24).

Para a época em que o Universo era dominado pela radiação, pode-se obter expressões para a função de Hubble (H) e para o tempo (t) em função da temperatura (T).

No caso da expressão para H , usa-se o fato de que a densidade de energia total nesta época pode ser aproximada pela densidade de energia de radiação. Portanto, substituindo a expressão de ρ_R na equação de Friedmann para $k=0$ ($H^2 = 8\pi G\rho_R/3$), tem-se a expressão:

$$H(T) = 1,66\sqrt{g_*}T^2(m_{pl})^{-1}. \quad (2.30)$$

Na dedução acima, utilizamos $G = 1/m_{pl}^2$, sendo que $m_{pl} = 1,22 \times 10^{19}$ GeV é a massa de Planck.

Já a expressão de $t(T)$ é obtida substituindo $a(t) \propto \sqrt{t}$, na expressão de $H(T) (\equiv \dot{a}/a)$:

$$t = 0,301 \frac{1}{\sqrt{g_*}} m_{pl} T^{-2}. \quad (2.31)$$

2.3.2 Entropia

Agora estudaremos a evolução da entropia no Universo primitivo em situações em que este se encontra em equilíbrio térmico. Conforme será observado, este estudo nos fornecerá uma importante relação entre o fator de escala e a temperatura do sistema.

A expressão para a variação da energia interna de um sistema (dE) que evolui de maneira quasi-estática, ou seja, em que o sistema evolui permanecendo arbitrariamente próximo à situação de equilíbrio, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} dE &= TdS - pdV \\ &= T \frac{\partial S}{\partial V} dV + T \frac{\partial S}{\partial T} dT - pdV, \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde dS fornece a variação da entropia, e dV é a variação no volume do sistema.

A variação da energia do sistema também é dada por:

$$dE = \frac{\partial E}{\partial V} dV + \frac{\partial E}{\partial T} dT. \quad (2.33)$$

Igualando as equações (2.32) e (2.33), podemos escrever que[†]

$$\left(\frac{E}{V} - T \frac{S}{V} + p \right) dV + \left(\frac{\partial E}{\partial T} - T \frac{\partial S}{\partial T} \right) dT = 0. \quad (2.34)$$

Porém, de acordo com a segunda lei da termodinâmica, o termo que multiplica dT é nulo. Portanto, a equação (2.34) nos fornece:

$$S = \frac{E + pV}{T} \quad \text{ou} \quad s = \frac{\rho + p}{T}, \quad (2.35)$$

sendo s a densidade de entropia.

Substituindo a expressão para S na relação de Maxwell [43],

$$\left(\frac{S}{V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V,$$

obtem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{(\rho + p)}{T} &= \frac{dp}{dT} \\ dp &= \frac{(\rho + p)}{T} dT. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Já a condição de conservação de energia é dada pela expressão:

$$d[(\rho + p)V] = V dp,$$

e substituindo a equação (2.36) na expressão acima, temos que:

$$\begin{aligned} d[(\rho + p)V] &= \frac{(\rho + p)}{T} V dT. \\ \Rightarrow d \left[\left(\frac{\rho + p}{T} \right) V \right] &= dS = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Da equação acima chegamos a uma importante conclusão: para um sistema em equilíbrio térmico, a entropia num volume comóvel é conservada.

[†]Para escrever esta equação, utilizamos o fato de E e S serem grandezas extensivas, ou seja, variam proporcionalmente à variação do volume do sistema.

A densidade de entropia é dominada pela contribuição de partículas relativísticas, de maneira que s pode ser aproximado para:

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3, \quad (2.38)$$

onde

$$g_{*s} = \sum_{i=\text{bósons}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{férmions}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3.$$

A seguir apresentamos um gráfico que mostra a evolução de g_{*s} e g_* com a temperatura. Dele podemos observar que essas duas grandezas têm o mesmo valor durante boa parte da história do Universo e, na maioria dos problemas que estudaremos, não faremos distinção entre elas.

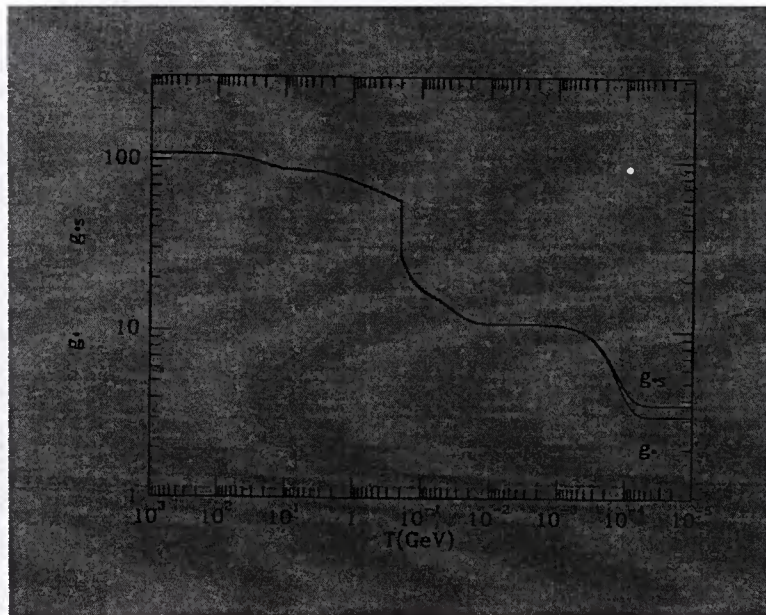


Figura 2.1: Evolução de g_* e g_{*s} em função da temperatura, de acordo com o modelo padrão de partículas elementares [25]. Para o Universo primitivo, $g_* = g_{*s} \simeq 200$.

Finalmente, utilizando o fato que em condições de equilíbrio térmico a entropia num volume comóvel é constante ($S \propto g_{*s} T^3 a^3$), encontramos a equação que relaciona a temperatura e o fator de escala para o período dominado pela radiação:

$$T \sim g_{*s}^{-1/3} a^{-1}.$$

2.4 Termodinâmica do Universo em Expansão

Até agora analisamos aspectos termodinâmicos do Universo considerando que ele estivesse em equilíbrio térmico local. De fato essa descrição é bastante útil durante grande parte do Universo primordial.

Entretanto, se analisarmos fenômenos importantes como desacoplamento de partículas (neutrinos, fótons, partículas X , ...), nucleossíntese, criação de partículas após a inflação, entre outros, percebemos que a descrição de equilíbrio não é mais válida.

Nesta seção, analisaremos o comportamento de partículas durante a época de sua criação e desacoplamento. Mais especificamente, estamos interessados em descrever o comportamento da densidade de número (ou energia) das partículas X supermassivas durante seu processo de criação.

Neste caso, precisamos analisar a evolução microscópica da função de distribuição das partículas no espaço de fase ($f(\vec{r}, \vec{v}, t)$), e para isso utilizaremos a equação de Boltzmann:

$$L[f] = C[f]. \quad (2.39)$$

Acima $L[f]$ é o chamado termo de Liouville, o qual fornece a evolução da função $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ na ausência de colisões. Já $C[f]$ é o termo que leva em conta as interações entre partículas, também chamado de termo de colisão.

Antes de obter as expressões para esses dois termos, é importante definir quando um sistema está ou não em equilíbrio térmico. Para isso adotamos uma regra que apesar de simples é bastante eficaz: basta compararmos a taxa de interação entre as partículas (Γ) à taxa de expansão do Universo (H). Quando $\Gamma > H$, as partículas interagem mais rapidamente do que a taxa de expansão (ou resfriamento) do Universo e portanto conseguem manter o equilíbrio térmico local. Isto já não é mais possível na situação inversa, em que $\Gamma < H$.

2.4.1 Equação de Boltzmann

Seja $f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3\vec{r}d^3\vec{v}$ o número médio de partículas cujo centro de massa num instante de tempo t está localizado entre \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$ e que tem velocidade entre \vec{v} e $\vec{v} + d\vec{v}$. A princípio, desconsideraremos as interações entre as partículas desse sistema e obteremos apenas o lado esquerdo da equação de Boltzmann, ou seja, uma expressão para $L[f]$.

Se o sistema estiver sujeito a uma força \vec{F} externa ao sistema, após um intervalo de tempo dt , a nova localização das partículas no espaço de fase será:

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} + \dot{\vec{r}}dt = \vec{r} + \vec{v}dt, \\ \vec{v}' &= \vec{v} + \dot{\vec{v}}dt = \vec{v} + \frac{\vec{F}}{m}dt.\end{aligned}$$

Todas as partículas que se encontravam na faixa $d^3\vec{r}d^3\vec{v}$, próximas a \vec{r} e \vec{v} , após o intervalo de tempo dt serão encontradas no novo intervalo $d^3\vec{r}'d^3\vec{v}'$ nas proximidades de \vec{r}' e \vec{v}' . Ou seja[§],

$$f(\vec{r}', \vec{v}', t) = f(\vec{r}, \vec{v}, t),$$

$$f(\vec{r} + \dot{\vec{r}}dt, \vec{v} + \dot{\vec{v}}dt, t + dt) - f(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0.$$

Expandindo o primeiro termo acima numa série de Taylor e tomando apenas os termos em primeira ordem, chega-se à equação de Liouville:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0,$$

que pode ser escrita de maneira covariante como:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = 0, \quad (2.40)$$

onde τ é o tempo próprio da partícula e $f = f(p^\mu, x^\mu)$.

Sendo a força gravitacional a única força externa a agir sobre o sistema, as partículas vão obedecer à equação da geodésica [28, 29]:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\mu p^\beta p^\gamma. \quad (2.41)$$

Nesse caso a equação (2.40) pode ser reescrita como:

$$L[f] = p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu p^\beta p^\gamma \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = 0. \quad (2.42)$$

Para o modelo de Universo homogêneo e isotrópico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) com $k = 0$, escrevemos a expressão acima em componentes e obtemos [25, 30]:

$$L[f(E, t)] = E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} |\vec{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E}. \quad (2.43)$$

[§]Em primeira ordem em dt , temos $d^3\vec{r}d^3\vec{v} = d^3\vec{r}'d^3\vec{v}'$.

É conveniente reescrever a equação de Boltzmann em termos da densidade de número de partículas,

$$n(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} f(E, t), \quad (2.44)$$

ao invés de utilizar a função de distribuição no espaço de fase (f). Desta forma, temos:

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int L[f(E, t)] \frac{d^3\vec{p}}{E} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int C[f(E, t)] \frac{d^3\vec{p}}{E}. \quad (2.45)$$

e desenvolvendo o termo de Liouville,

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{|\vec{p}|^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} \right) d^3\vec{p} = \frac{dn}{dt} + 3 \frac{\dot{a}}{a} n. \quad (2.46)$$

O segundo termo do lado direito da equação acima foi obtido através de uma integração por partes onde utilizamos a relação de dispersão $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$.

Segue que então que a equação de Boltzmann é dada por:

$$\frac{dn}{dt} + 3 \frac{\dot{a}}{a} n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int C[f] \frac{d^3\vec{p}}{E}. \quad (2.47)$$

Resta-nos obter ainda o termo de colisão. Ele vai depender dos processos sofridos pela distribuição de partículas em questão. Analisemos o processo

$$Z\bar{Z} \longleftrightarrow \psi\bar{\psi}.$$

onde ψ e Z são estáveis (ou quase estáveis) e, portanto, apenas processos de aniquilação e criação podem mudar o número de partículas Z e ψ por volume comóvel. Focalizando na evolução da espécie Z , o termo de colisão para esse tipo de processo é dado por [¶]:

$$\begin{aligned} \frac{g}{(2\pi)^3} \int C[f] \frac{d^3\vec{p}_Z}{E_Z} &= - \int d\Pi_Z d\Pi_{\bar{Z}} d\Pi_{\psi} d\Pi_{\bar{\psi}} (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 \\ &\times \delta^4(p_{\psi} + p_{\bar{\psi}} - p_Z + p_{\bar{Z}}) [f_Z f_{\bar{Z}} - f_{\psi} f_{\bar{\psi}}], \end{aligned} \quad (2.48)$$

[¶]O termo de colisão é deduzido no Apêndice D.

onde definimos,

$$d\Pi \equiv g \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}}{2E}.$$

Desta forma, escrevemos a equação de Boltzmann:

$$\begin{aligned} \frac{dn_Z}{dt} + 3Hn_Z &= - \int d\Pi_Z d\Pi_{\bar{Z}} d\Pi_{\psi} d\Pi_{\bar{\psi}} (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 \\ &\times \delta^4(p_{\psi} + p_{\bar{\psi}} - p_Z + p_{\bar{Z}}) [f_Z f_{\bar{Z}} - f_{\psi} f_{\bar{\psi}}]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.4.2 Decaimento e Desacoplamento de Partículas Massivas

A seguir, vamos escrever as equações de Boltzmann para os casos específicos de decaimento e desacoplamento de partículas massivas.

• Decaimento

Este caso é bastante simples. Considere uma espécie de partícula massiva ϕ , com taxa de decaimento Γ_{ϕ} e vida média $\tau_{\phi} = 1/\Gamma_{\phi}$. Devido ao seu decaimento, o número de ϕ 's num volume comóvel ($a^3 n_{\phi}$) decresce de acordo com a lei usual de decaimento exponencial:

$$\frac{d}{dt}(a^3 n_{\phi}) = -\Gamma_{\phi}(a^3 n_{\phi}).$$

Daí segue a equação de Boltzmann para o decaimento de uma partícula massiva ϕ :

$$\frac{dn_{\phi}}{dt} + 3Hn_{\phi} = -\Gamma_{\phi}n_{\phi}. \quad (2.50)$$

• Desacoplamento

Da seção anterior, vimos que a densidade de uma partícula não-relativística de massa m em equilíbrio térmico à temperatura T é dada por:

$$n^{EQ} \sim \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} \exp(-m/T). \quad (2.51)$$

Ou seja, se uma partícula massiva permanecesse em equilíbrio térmico com a radiação até os dias de hoje, sua densidade seria desprezível devido ao termo da exponencial negativa. As partículas massivas que conhecemos existem hoje com abundância considerável porque elas se desacoplaram ($\Gamma \lesssim H$) a uma temperatura em que m/T não era muito maior do que 1.

Já sabemos como evoluem as densidades de partículas não-relativísticas em equilíbrio térmico com a radiação (2.51) e de partículas já desacopladas ($n \sim a^{-3}$). Para entender o comportamento na época do desacoplamento, é necessário utilizar a equação de Boltzmann.

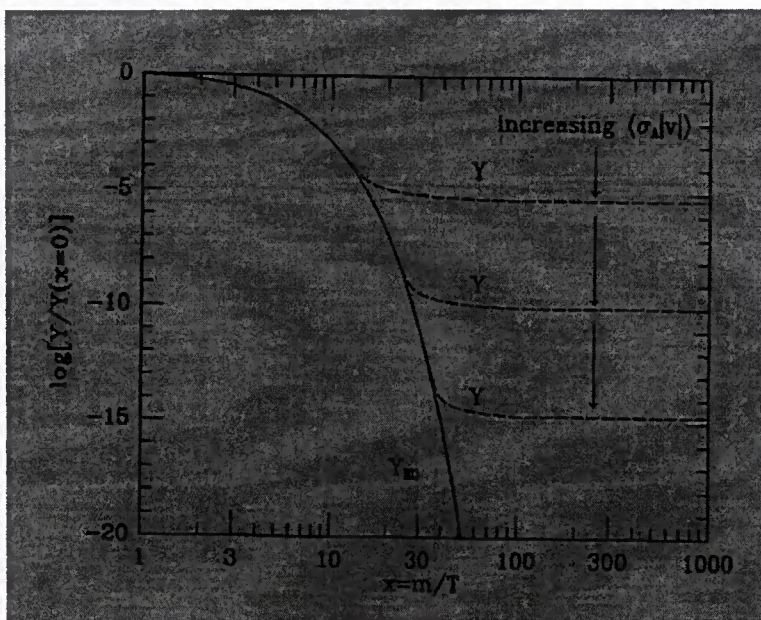


Figura 2.2: Desacoplamento de uma partícula massiva. A linha tracejada indica o número atual de partículas por volume comóvel ($Y \equiv n/s$) e a linha sólida o seu número de equilíbrio por volume comóvel [25].

Voltando ao estudo do processo descrito anteriormente ($Z\bar{Z} \leftrightarrow \psi\bar{\psi}$), suponhamos que ψ e $\bar{\psi}$ sejam fótons e que Z e \bar{Z} sejam partículas massivas X e \bar{X} . Faremos duas hipóteses que simplificarão bastante a equação de Boltzmann deste processo:

- não estamos trabalhando com espécies de férmions degenerados ou condensados de bósons. Neste caso, podemos utilizar a estatística de Maxwell-Boltzmann para todas as partículas, em vez das estatísticas de Bose-Einstein e Fermi-Dirac;
- estamos considerando $\mu = 0$ para todas as partículas.

Neste caso, escrevemos a função de distribuição para os fótons em equilíbrio térmico:

$$f_\gamma = \exp(-E_\gamma/T).$$

Ou seja, na equação de Boltzmann teremos o termo:

$$f_\gamma f_{\gamma'} = \exp[-(E_\gamma + E_{\gamma'})/T].$$

Considerando a conservação da energia no processo, temos que:

$$f_\gamma f_{\gamma'} = \exp[-(E_\gamma + E_{\gamma'})/T] = \exp[-(E_X + E_{\bar{X}})/T] = f_X^{EQ} f_{\bar{X}}^{EQ},$$

onde f_X^{EQ} seria a função de distribuição no espaço de fase das partículas X se estas estivessem em equilíbrio térmico com a radiação. Portanto, podemos escrever que:

$$[f_X f_{\bar{X}} - f_\gamma f_{\gamma'}] = [f_X f_{\bar{X}} - f_X^{EQ} f_{\bar{X}}^{EQ}],$$

e a equação de Boltzmann para n_X é dada:

$$\begin{aligned} \frac{dn_X}{dt} + 3Hn_X &= - \int d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} d\Pi_\gamma d\Pi_{\gamma'} (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 \\ &\times \delta^4(p_\gamma + p_{\gamma'} - p_X + p_{\bar{X}}) [f_X f_{\bar{X}} - f_X^{EQ} f_{\bar{X}}^{EQ}]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Escrevendo $f_X, f_{\bar{X}}, f_X^{EQ}$ e $f_{\bar{X}}^{EQ}$ em termos da função densidade de número de partículas, dada na equação (2.44), temos:

$$\frac{dn_X}{dt} + 3Hn_X = -\langle \sigma_{\gamma\gamma' \rightarrow X\bar{X}} |v| \rangle [(n_X)^2 - (n_X^{EQ})^2], \quad (2.53)$$

onde,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{\gamma\gamma' \rightarrow X\bar{X}} |v| \rangle &= (n_X^{EQ})^{-2} \int d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} d\Pi_\gamma d\Pi_{\gamma'} (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 \\ &\times \delta^4(p_\gamma + p_{\gamma'} - p_X + p_{\bar{X}}) \exp(-E_\gamma/T) \exp(-E_{\gamma'}/T). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Acima, utilizamos que $n_X = n_{\bar{X}}$. O significado da equação (2.53) é o seguinte:

- quando $n_X = n_X^{EQ}$, ou seja, a partícula X ainda está em equilíbrio térmico com a radiação, o número de partículas X criadas via aniquilação de fótons é igual ao de partículas destruídas no processo inverso. Neste caso, o termo de colisão não vai alterar o valor de n_X ;
- com o resfriamento do Universo, vai haver um momento a partir do qual os fótons não terão mais energia suficiente para criar partículas X . Portanto elas vão se desacoplar e teremos $n_X > n_X^{EQ}$. Agora apenas o processo $X\bar{X} \rightarrow \gamma\gamma'$ será efetivo e o termo de colisão vai agir diminuindo a densidade de partículas X ;
- uma terceira situação pode ocorrer durante o período de criação das primeiras partículas X , quando $n_X < n_X^{EQ}$. Se os fótons em questão forem suficientemente energéticos, poderá haver criação de partículas X via aniquilação de fótons.

Capítulo 3

Inflação

3.1 Motivações para o Modelo Inflacionário

O modelo cosmológico padrão é uma teoria muito bem sucedida, que parece descrever o Universo de forma bastante confiável desde a época da nucleossíntese primordial ($t \simeq 10^{-2}$ s) até os dias de hoje. Os maiores sucessos do modelo são:

- a descrição de um Universo em expansão, de acordo com a relação empírica obtida por Hubble;
- a previsão, através do processo de nucleossíntese, das abundâncias de elementos leves como deutério, hélio, etc;
- a previsão da existência da radiação cósmica de fundo, atualmente na frequência de microondas ($T \simeq 3K$), que foi detectada em 1965 por Penzias e Wilson.

Entretanto, a teoria do *Big Bang* se aplica apenas à época em que o Universo está “frio”* o suficiente para poder ser explicado pela física que conseguimos testar em laboratório. Além disso, algumas questões fundamentais são explicadas na forma de condições iniciais extremamente específicas e improváveis, como a planura do Universo e problema do horizonte.

No sentido de tentar resolver esses e outros problemas do modelo padrão, surgiu o cenário do Universo inflacionário. De acordo com ele, o Universo teria passado por uma fase de expansão exponencial antes de começar a evoluir de acordo com a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). A seguir, comentamos os principais problemas que o modelo padrão não explica.

*A temperatura na época da nucleossíntese primordial é da ordem de 10^{10} K.

Problema do Horizonte

Detectamos fótons da radiação de fundo vindos de todas as direções do Universo com praticamente a mesma temperatura. Isso sugere que o Universo atingiu um estado de equilíbrio térmico através de processos de espalhamento. Estes processos, como por exemplo o espalhamento Compton, só podem ter ocorrido de maneira efetiva antes da época do desacoplamento da radiação de fundo[†].

Porém, considerando o modelo do *Big Bang*, não é possível que o Universo inteiro tenha se termalizado. Isso porque, devido ao tamanho finito do horizonte, não haveria tempo das diferentes regiões interagirem antes da época do desacoplamento. Ou seja, a distância que a luz poderia viajar antes deste período é muito menor que a atual distância de horizonte causal:

$$\int_{t_{inic}}^{t_{des}} \frac{dt}{a(t)} \ll \int_{t_{des}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.1)$$

onde t_i , t_{des} e t_0 são respectivamente os instantes de tempo inicial, do desacoplamento e o atual.

Portanto, detectamos hoje fótons vindos de diversas regiões do Universo que, de acordo com o modelo de expansão de FRW, não deveriam estar termalizadas. O problema do horizonte é exatamente descobrir porque fótons provenientes de regiões que deveriam ser tão distintas têm a mesma temperatura.

Problema da Estrutura em Larga Escala

Uma suposição básica do modelo cosmológico padrão é que o Universo seja homogêneo e isotrópico. Mas como se deu a formação das estruturas galácticas nesse Universo sem inomogeneidades? Medidas do satélite COBE mostram que existe anisotropia na temperatura da radiação cósmica de fundo da ordem de 10^{-5} . Porém, o modelo padrão não pode explicar a origem dessas perturbações que resultaram na presente estrutura de larga escala do Universo.

[†]É chamada época do desacoplamento ou de recombinação o período em que o Universo está frio o bastante para que a atração coulombiana entre prótons e elétrons seja capaz de formar átomos de hidrogênio. Desta forma, os elétrons livres responsáveis pelo espalhamento dos fótons desaparecem, tornando o Universo transparente à radiação.

Problema da Planura

A equação de Friedmann (2.13) nos mostra como Ω evolui com o tempo:

$$|\Omega(t) - 1| = \frac{|k|}{a(t)^2 H(t)^2}. \quad (3.2)$$

Utilizando as relações entre o fator de escala e o tempo para Universo dominado por matéria ($a_M \propto t^{2/3}$) e por radiação ($a_R \propto t^{1/2}$), concluímos que:

Domínio da Matéria:

$$|\Omega(t) - 1| \propto t^{2/3}.$$

Domínio da Radiação :

$$|\Omega(t) - 1| \propto t.$$

Essas equações mostram que quanto mais nos afastamos do *Big Bang*, mais Ω se afasta de 1, ou seja, $\Omega = 1$ é um ponto crítico instável. Para obtermos o Universo que observamos hoje (aproximadamente plano) é necessário que o valor inicial da abundância Ω tenha sido extremamente próximo da unidade, conforme mostrado na tabela abaixo [31]:

<u>Idade do Universo</u>	<u>Período</u>	<u>$\Omega(t) - 1$</u>
10^5 anos	Recombinação	10^{-3}
10^{-10} s	Transição Eletro-Fraca	10^{-26}
10^{-43} s	Época de Planck	10^{-60}

Em virtude disso, para que o modelo cosmológico padrão concorde com o nosso atual conhecimento observacional do Universo, a abundância total Ω deve ter seu valor inicial extremamente bem ajustado. O problema da planura reside em explicar esse ajuste que, a princípio, não parece natural.

Relíquias Indesejáveis

As teorias de partículas modernas prevêm uma superprodução de partículas que ainda não conseguimos detectar e que seriam relíquias de processos ocorridos no Universo primitivo. Essas relíquias deveriam contribuir bastante para a atual densidade de energia do Universo de modo que teríamos $\Omega \gg 1$, ou seja, uma

situação observacionalmente proibida. Por isso elas são chamadas de “reliquias indesejáveis”.

Entre elas podemos citar os defeitos topológicos decorrentes de processos de transição de fase, como por exemplo quebras de simetrias previstas nas Teorias de Grande Unificação. Atualmente porém, duas outras partículas reliquias têm despertado maior interesse entre os pesquisadores. Elas são os gravitinos [32, 33], parceiros supersimétricos dos grávitons, e os campos escalares associados à teoria de supercordas (*moduli*) [33, 34]. O grande problema aqui é explicar porque não detectamos essas reliquias e não sentimos seus efeitos na curvatura do Universo.

Para tratar estas questões que ficaram em aberto no modelo cosmológico padrão, surgiu o cenário do Universo inflacionário. Seu objetivo não é substituir a teoria do *Big Bang*, mas sim fornecer as condições iniciais necessárias para este modelo. A idéia é que a inflação ocorra num estágio anterior à época da nucleossíntese já que, a partir desse período, o modelo cosmológico padrão se aplica muito bem à descrição da evolução do Universo.

3.2 Dinâmica Inflacionária

3.2.1 Universo de De Sitter

Durante a inflação, como o próprio nome sugere, há um rápido crescimento do fator de escala. Utilizando o modelo de FRW, percebemos que isto pode ocorrer caso a densidade de energia do Universo seja dominada pela energia do vácuo. Conforme visto anteriormente (seção 2.2.2), a equação de estado para o vácuo é $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ e, substituindo essa equação na condição de conservação de energia, obtém-se que ρ_Λ é uma constante em relação ao fator de escala $a(t)$.

Para um Universo dominado pela energia de vácuo, a equação de Friedmann é dada por:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (3.3)$$

Acima, a presença do fator de escala no denominador do termo de curvatura k provoca o que chamamos de *redshifting* da curvatura. Isto significa que com o rápido crescimento de $a(t)$, k/a^2 pode ser desprezado em relação ao termo de ρ_Λ , o qual permanece constante. Portanto, ficamos com:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3}. \quad (3.4)$$

A solução para esta equação diferencial é dada por:

$$a(t) \sim \exp(Ht), \quad (3.5)$$

sendo $H = (8\pi G\rho_\Lambda/3)^{1/2}$ uma constante.

Este modelo é denominado modelo de De Sitter. Ao evoluir de acordo com esse cenário, a geometria do Universo se aproxima cada vez mais da geometria plana já que, conforme mencionamos, com o rápido crescimento do fator de escala o termo de curvatura vai a zero. Ou seja, no caso do modelo inflacionário, $\Omega = 1$ é um atrator ao invés de ser um ponto crítico instável. Portanto, não necessitamos de ajuste fino nas condições iniciais para obtermos hoje um Universo plano. Desta forma, está resolvido o problema da planura.

O problema das relíquias também é facilmente solucionado, já que elas seriam “diluídas” caso o fator de escala expandisse exponencialmente. O problema da criação das inomogeneidades no Universo primitivo é solucionado a partir de flutuações quânticas do campo escalar responsável pela inflação. Adiante, falaremos mais sobre a dinâmica deste campo.

O problema do horizonte também é resolvido já que, se a expansão for suficientemente grande, todo o Universo observado pode ter vindo de uma única região que estava causalmente conectada antes da inflação. Ou seja, detectamos fótons de apenas uma região termalizada que, com a inflação, cresceu mais que o tamanho do nosso horizonte.

3.2.2 A Equação de Movimento do Campo Escalar

A idéia de inflação reside no fato do Universo primitivo ser governado, por um certo intervalo de tempo, pela equação de estado do vácuo. Isso pode ser obtido caso a densidade de energia do Universo seja dominada pela densidade de energia de um campo escalar (ϕ), denominado campo do inflaton.

Nas teorias de partículas, campos escalares são ingredientes fundamentais nos processos de quebra espontânea de simetria, que ocorrem por exemplo nas teorias de unificação como a GUT (*Grand Unified Theories*) e a eletrofraca. O campo de Higgs, associado à quebra de simetria eletrofraca, é o exemplo mais famoso de campo escalar fundamental.

Em 1980, Alan Guth [35] estudava propriedades das teorias de grande unificação e notou que elas previam um grande número de defeitos topológicos, mais especificamente monopolos. A densidade dessas relíquias seria tão alta que sua contribuição para a abundância total chegaria a $\Omega > 4$. Para acabar com este problema, Guth imaginou que uma quebra de simetria associada com um campo escalar poderia gerar uma equação de estado similar à do vácuo e, dessa forma, levar o Universo a um período de expansão exponencial[‡].

Neste modelo, o campo de inflaton vai tunelar de uma região de falso vácuo, onde ele está preso, para o vácuo verdadeiro do seu potencial. O tunelamento ocorre através de uma transição de fase de primeira ordem, onde ocorre a nucleação de bolhas. É nas regiões das bolhas que se obtém a pressão negativa necessária para iniciar a inflação.

Entretanto, esse modelo apresenta alguns problemas referentes principalmente ao término do período inflacionário, devido à nucleação das bolhas. Por isso, ele foi modificado mais tarde por Linde [37], Albrecht e Steinhardt [38]. Seu modelo foi chamado de “Nova Inflação” e consistiu basicamente em modificar o potencial do inflaton de modo que, neste novo enfoque, ele adquira a equação de estado do vácuo ao rolar lentamente na direção do mínimo do potencial.

Hoje existem vários outros modelos eficientes para gerar inflação, com vários potenciais que podem ser utilizados. Um desses modelos, que será utilizado neste trabalho, é a chamada inflação caótica [39]. Alguns parâmetros para um modelo simples de inflação caótica são: $V(\phi) = m_\phi^2 \phi^2 / 2$, $m_\phi \simeq 10^{-6} m_{pl}$ e $V(\phi) < (m_{pl})^4$.

Agora vamos entender em que condições a equação de estado do campo do inflaton pode se aproximar da equação de estado para o vácuo, utilizando um potencial geral $V(\phi)$. A densidade de Lagrangiana para uma teoria com um campo escalar minimalmente acoplado à gravitação é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (3.6)$$

Utilizando o teorema de Noether, calcula-se o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.7)$$

Tomando os valores $\mu = \nu = 0$ na expressão acima, calculamos a densidade de energia do campo (ρ):

$$\rho = T^{00} = \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 + V(\phi) + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2. \quad (3.8)$$

[‡]Para uma breve revisão deste modelo, leia [36].

Para $\mu = \nu = i$ temos

$$T^{ii} = (\partial^i \phi)^2 - V(\phi) + \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2,$$

e a pressão (p) é dada pela expressão :

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 T^{ii} \\ p &= \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - V(\phi) - \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Analisando as expressões (3.8) e (3.9), percebemos que a equação de estado do campo escalar tem a mesma forma da equação para o vácuo ($p_\Lambda = -\rho_\Lambda$) se este campo for aproximadamente homogêneo e estático, ou seja, se pudermos desprezar os termos em $\dot{\phi}$ e $\nabla\phi$.

Escrevendo a derivada espacial utilizando coordenadas comóveis ficamos com:

$$\nabla\phi = \frac{1}{a(t)} \nabla_{\text{comóvel}}\phi. \quad (3.10)$$

Percebemos então que podemos realmente desprezar a variação espacial do campo, já que com a grande expansão de $a(t)$ o termo acima à direita tende a se anular. Desta forma, a densidade e a pressão são dadas por:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + V(\phi), \\ p &= \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - V(\phi). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para calcular a equação de movimento vamos utilizar a conservação do tensor energia-momento:

$$d(\rho a^3) = -p d(a^3). \quad (3.12)$$

Derivando em relação ao tempo, temos:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.13)$$

Agora basta substituírmos ρ e p dados pelas equações (3.11) e obteremos a seguinte equação de movimento para o campo escalar:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (3.14)$$

onde $V'(\phi) = dV(\phi)/d\phi$.

Para um potencial do tipo quadrático, esta é a equação de um oscilador harmônico amortecido. Portanto, esperamos que o campo “role” em direção ao mínimo do potencial e então passe a oscilar em torno deste ponto. $3H\dot{\phi}$ é o termo de amortecimento. Ele surge por causa da expansão do Universo, “freinando” o campo ϕ e, desta forma, diminuindo sua densidade de energia.

A equação (3.14) descreve um campo ϕ estável. Porém, a evolução do campo segundo esta equação vai resultar num Universo que, devido ao período de inflação, estará praticamente sem matéria ou radiação e à temperatura muito baixa. Ao fim da inflação, é necessário um mecanismo capaz de reaquecer e popular o Universo, criando partículas relativísticas. Só com isso o Universo terá as condições iniciais necessárias para entrar na fase de evolução governada pelas equações de Friedmann.

O mecanismo para criação de partículas é obtido considerando os acoplamentos do campo escalar com os demais campos de matéria (relativística e não-relativística), durante a fase oscilatória do campo. Isso é introduzido fenomenologicamente na equação de movimento através de um termo proporcional à largura total de decaimento do campo Γ_ϕ ,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) + \Gamma_\phi\dot{\phi} = 0. \quad (3.15)$$

Para resolver esta equação faremos distinção entre duas fases. A primeira é a fase em que o campo rola lentamente o potencial, em direção ao seu ponto de mínimo. Nesta fase poderemos considerar $\dot{\phi}$ pequeno o bastante para que a equação de estado do campo se assemelhe à do vácuo e a fase de inflação se inicie. Já na segunda fase, o campo oscila coerentemente em torno do mínimo do potencial e haverá produção de partículas. A seguir, detalhamos cada uma dessas fases.

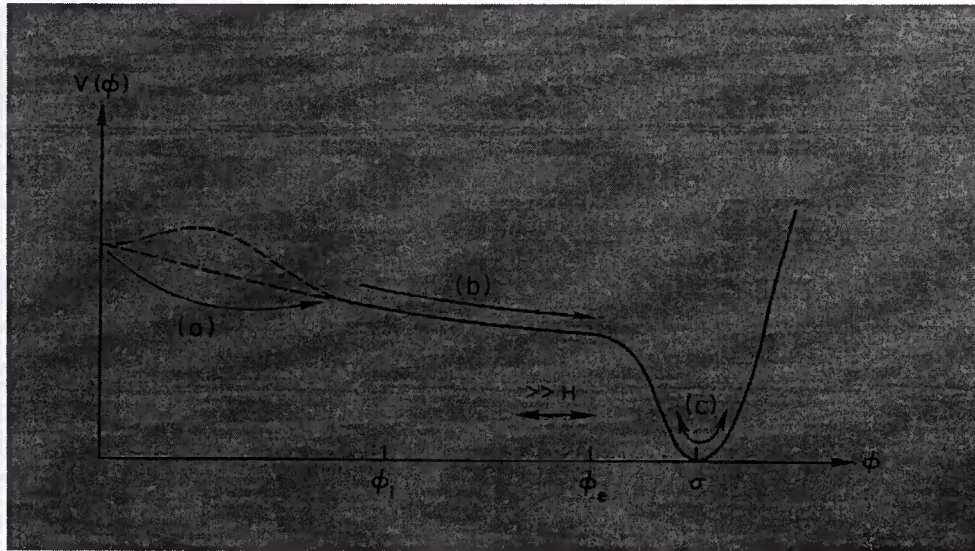


Figura 3.1: Ilustração de um potencial inflacionário hipotético, onde se vê claramente a fase de rolamento lento (b) e a fase de oscilações coerentes (c). ϕ_i e ϕ_e representam, respectivamente, os valores do campo no início e no fim do período de rolamento lento.

Aproximação de Rolamento Lento

Neste período o campo ϕ praticamente não decai e portanto o último termo da equação (3.15) é nulo. Para que a densidade de energia e a pressão de ϕ se relacionem através da equação de estado do vácuo, é necessário que:

$$\dot{\phi}^2/2 \ll V(\phi). \quad (3.16)$$

Para assegurar que a condição em $\dot{\phi}$ seja satisfeita, impomos que $\ddot{\phi}$ seja desprezível, ou seja,

$$\ddot{\phi} \ll V'(\phi). \quad (3.17)$$

As relações (3.16) e (3.17) são conhecidas como condições de rolamento lento. Aplicando-as à equação de Friedmann e à equação de movimento do campo temos,

$$H^2 = 8\pi G V(\phi)/3, \quad (3.18)$$

$$3H\dot{\phi} = -V'(\phi). \quad (3.19)$$

Substituindo $\dot{\phi}$ dado pela equação (3.19) nas condições de rolamento lento, obtemos as condições que o potencial deve obedecer nesta fase:

$$V'(\phi)/V(\phi) \ll (48\pi G)^{\frac{1}{2}},$$

$$V''(\phi)/V(\phi) \ll 24\pi G.$$

Enquanto o potencial satisfizer os requisitos acima, a fase de rolamento lento persistirá e o Universo continuará expandindo exponencialmente. A expressão que indica a expansão do fator de escala é obtida resolvendo as equações (3.18) e (3.19) para H . O resultado é:

$$N(\phi_i \rightarrow \phi_f) = \ln[a_f/a_i] = -8\pi G \int_{\phi_i}^{\phi_f} V(\phi)/V'(\phi)d\phi. \quad (3.20)$$

onde o índice i denota o início da fase de rolamento lento e o índice f significa o fim desta fase. Portanto, o Universo vai aumentar seu tamanho em e^N vezes. Para que a inflação resolva os problemas do modelo padrão citados no início deste capítulo, precisamos de $N \gtrsim 60$.

Fase das Oscilações Coerentes ou do Reaquecimento

De acordo com a teoria inflacionária, grande parte das partículas elementares que populam o Universo foram criadas durante o processo de reaquecimento, após o período de expansão exponencial. A idéia é que o reaquecimento do Universo ocorre devido à produção de partículas durante a fase oscilatória do campo ϕ .

Quando as condições de rolamento lento perdem a validade, o campo escalar vai oscilar em torno do mínimo do potencial ($\phi = \sigma$) com frequência $w^2 = V''(\sigma)$. Para o potencial mais simples do modelo de inflação caótica, $V = m_\phi^2 \phi^2/2$, a frequência de oscilação é $w = m_\phi$. Isto pode ser interpretado como uma onda coerente de partículas ϕ , não-relativísticas, com momento zero e densidade de partículas dada por:

$$n_\phi = \frac{\rho_\phi}{m_\phi} = \frac{m_\phi}{2} \phi^2.$$

Quando a escala de tempo do Universo (t) é da ordem de $(\Gamma_\phi)^{-1}$, as “partículas” ϕ vão decair, conforme a equação (3.15). Os produtos deste decaimento vão interagir entre si e atingir um estado de equilíbrio térmico a uma certa temperatura T . Esta temperatura é conhecida como temperatura de reaquecimento (T_{rq}).

Vamos estimar como decresce a densidade de energia do campo ϕ neste regime. Multiplicando a eq.(3.15) por $\dot{\phi}$, temos:

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\dot{\phi}^2 + \Gamma_\phi\dot{\phi}^2 = 0, \quad (3.21)$$

onde utilizamos que $\dot{\rho}_\phi = \dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\phi}V'(\phi)$.

Para oscilações rápidas de ϕ , $\dot{\phi}^2$ oscila como uma senoide e podemos substituí-lo por sua média sobre um ciclo de oscilação ($\langle \dot{\phi}^2 \rangle$). Lembrando que para o oscilador

harmônico são válidas as relações :

$$\begin{aligned}\langle \dot{\phi}^2 \rangle &= 2\langle V(\phi) \rangle \\ 2\langle V(\phi) \rangle &= \rho_\phi,\end{aligned}\tag{3.22}$$

a equação (3.21) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi + \Gamma_\phi\rho_\phi = 0.\tag{3.23}$$

Esta equação nada mais é que a equação de Boltzmann que governa o decaimento de uma partícula massiva (vista na seção 2.4.2). A solução dessa equação diferencial é dada por:

$$\rho_\phi(t) = \rho_\phi^i(a(t)/a_i)^{-3}\exp(-\Gamma_\phi(t - t_i)),\tag{3.24}$$

onde a_i e t_i são o fator de escala e o instante de tempo quando começa a fase das oscilações coerentes. Da solução acima observamos, conforme havíamos comentado, que ϕ se comporta como matéria não-relativística, ou seja, $\rho_\phi \sim a^{-3}$.

Para o limite de g_* constante, a primeira lei da termodinâmica fornece um meio simples de obter a equação da evolução da densidade de energia da radiação [§] (ρ_R):

$$\begin{aligned}d(a^3\rho_R) &= -p_R d(a^3) - d(a^3\rho_\phi) \\ \dot{\rho}_R + 4H\rho_R - \Gamma_\phi\rho_\phi &= 0.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Desta forma, para um Universo que só possui radiação e o campo do inflaton, temos três equações que governam o reaquecimento:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi + \Gamma_\phi\rho_\phi &= 0, \\ \dot{\rho}_R + 4H\rho_R - \Gamma_\phi\rho_\phi &= 0, \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3}(\rho_\phi + \rho_R).\end{aligned}\tag{3.26}$$

A temperatura de reaquecimento (T_{rq}), ou seja, a temperatura do Universo quando $t = 1/\Gamma_\phi$ é calculada de maneira aproximada assumindo a conversão instantânea da densidade de energia do inflaton em densidade de energia de radiação quando $\Gamma_\phi = H(a_{rq})$ (a_{rq} é o fator de escala quando $T = T_{rq}$):

$$\Gamma_\phi = H(a_{rq}) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_\phi}.$$

Utilizando que $G = 1/m_{pl}^2$:

[§]Supondo que nenhum outro processo além do decaimento do inflaton altere sua densidade de energia.

$$\rho_\phi = \frac{3}{8\pi} \Gamma_\phi^2 m_{pl}^2.$$

Então fazendo $\rho_\phi(T_{rq}) = \rho_R(T_{rq})$ obtemos:

$$\frac{3}{8\pi} \Gamma_\phi^2 m_{pl}^2 = \frac{\pi^2}{30} g_* T_{rq}^4$$

$$T_{rq} = 7,2 \times 10^8 \sqrt{\frac{\Gamma_\phi}{\text{GeV}}} \text{ GeV} \quad (3.27)$$

onde o resultado final foi obtido substituindo-se $g_* = 200$ e $m_{pl} = 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV}$.

Para que não haja problema de superprodução de gravitinos [32], a temperatura de reaquecimento não deve ser maior que $T_{rq} = 10^9 \text{ GeV}$. Por outro lado, segundo o modelo cosmológico padrão, o processo de nucleossíntese se inicia para $T \simeq 10 \text{ MeV}$. Portanto, a temperatura de reaquecimento deve ter seu valor limitado entre $10 \text{ MeV} \lesssim T_{rq} \lesssim 10^9 \text{ GeV}$.

Ao contrário do que se poderia esperar, T_{rq} não é a temperatura mais alta que o Universo atinge neste período. Isso vai ser importante neste trabalho pois vai permitir que, para $T_{rq} = 10^9 \text{ GeV}$, haja produção de partículas X ($m_X = 10^{12} \text{ GeV}$) via aniquilação de fótons (mostraremos isto em mais detalhes no capítulo seguinte). Resolvendo o sistema de equações (3.26), obtemos um gráfico que ilustra a evolução das densidades de energia ρ_ϕ e ρ_R na época do reaquecimento:

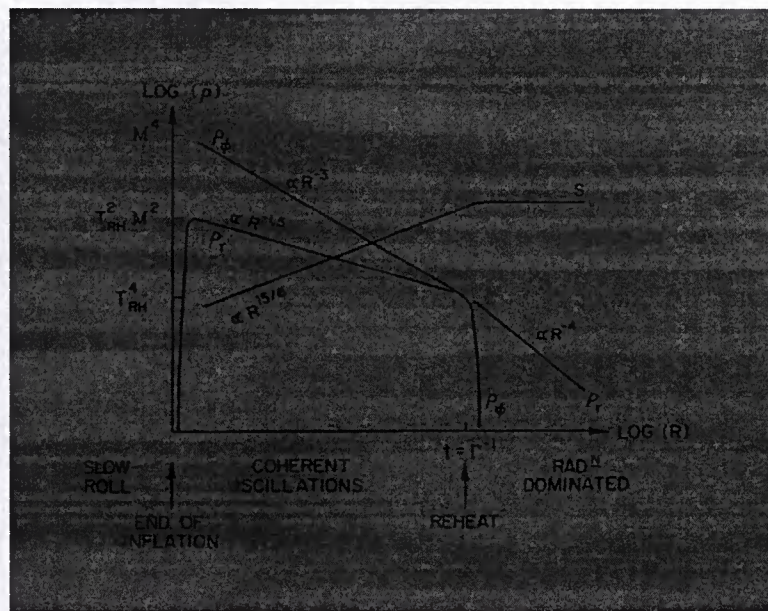


Figura 3.2: Evolução de ρ_ϕ , ρ_R (no gráfico indicado por ρ_r) e da entropia (S) durante o período de reaquecimento. O fator de escala é denotado por R . [25]

De acordo com a figura anterior, ρ_R (e conseqüentemente T) tem sua magnitude rapidamente aumentada de 0 para um valor máximo logo no início da fase das oscilações coerentes. Após este período transiente as partículas criadas se diluem continuamente devido à expansão do Universo. Mesmo havendo um pico de produção de partículas relativísticas em $t = (\Gamma_\phi)^{-1}$, isto não é suficiente para reverter o resfriamento.

Podemos obter uma expressão para T_{max} resolvendo a equação diferencial para ρ_R , dada em (3.26). Para isso, substituímos nesta equação o valor de ρ_ϕ (fornecido na expressão para H) e supomos que Γ_ϕ seja pequeno em relação a H . Desta forma, ficamos com:

$$\rho_R(t) \simeq \frac{\Gamma_\phi}{10\pi G} \frac{1}{t} \left[1 - \left(\frac{t}{t_i} \right)^{-5/3} \right], \quad (3.28)$$

onde novamente, t_i é o instante em que o período oscilatório se inicia.

Na solução acima, encontramos um ponto de máximo em $t_{max} = (8/3)^{3/5} t_i$, onde podemos fazer $t_i \sim H^{-1}(t_i)$. $H(t_i) (\equiv H_i)$ por sua vez, é estimado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{3H_i^2}{8\pi G} &= \rho_\phi \sim m_\phi^4, \\ H_i &\propto \frac{m_\phi^2}{m_{pl}} \quad \Rightarrow \quad t_{max} = (8/3)^{3/5} \frac{m_{pl}}{m_\phi^2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Substituindo t_{max} obtido acima na expressão (3.28), e igualando este resultado à equação de $\rho(T) (= (g_*\pi^2/30)T^4)$, encontramos que:

$$T_{max} \simeq 0,8 \left(\frac{m_\phi^2 \Gamma_\phi}{g_*} m_{pl} \right)^{1/4}. \quad (3.30)$$

Podemos também escrever este resultado em termos de T_{rq} , obtendo:

$$\boxed{T_{max} \simeq (T_{rq} m_\phi)^{1/2}} \quad \text{cool!} \quad (3.31)$$

Logo, para um modelo em que $T_{rq} = 10^9$ GeV e $m_\phi = 10^{13}$ GeV, a temperatura máxima na fase de oscilações coerentes é da ordem de 10^{11} GeV. Para um modelo em que se leva em conta a produção de partículas não-relativísticas durante o reaquecimento (como por exemplo a produção de partículas X que será vista no próximo capítulo), para os mesmos parâmetros foi obtida $T_{max} \simeq 10^{12}$ GeV [8].

Capítulo 4

Produção de Partículas X Durante a Fase de Reaquecimento

4.1 Resolução das Equações de Boltzmann

No capítulo anterior, deduzimos as equações que governam o processo de reaquecimento do Universo após a inflação. Essas equações descrevem o caso em que ϕ decai apenas em partículas relativísticas e estas, por sua vez, não sofrem outros processos capazes de modificar sua densidade.

Porém, em princípio, acoplamentos do campo ϕ com campos de matéria não-relativística também podem ser permitidos. Além disso, os fótons gerados pelo decaimento de ϕ podem se aniquilar, criando partículas massivas.

A produção das partículas supermassivas X é representada nas equações de Boltzmann através de termos que descrevem os processos citados acima. A partir da solução dessas equações, juntamente com as conclusões obtidas no primeiro capítulo sobre a abundância de partículas X , pretendemos obter uma melhor compreensão dos possíveis processos de produção destas partículas no período do reaquecimento.

Para efeito de simplificação, descreveremos o processo de reaquecimento com apenas uma espécie de partícula não-relativística produzida: a partícula supermassiva X . Portanto, no modelo que utilizamos, proposto por Chung, Kolb e Riotto [8], a energia do Universo na época do reaquecimento pode ser dividida em apenas três componentes: energia do campo do inflaton (ρ_ϕ), energia da radiação (ρ_R) e a energia das partículas X (ρ_X).

Para construirmos as equações de Boltzmann que descrevem este sistema, assumiremos que a radiação esteja em equilíbrio térmico. A largura de decaimento total do inflaton é Γ_ϕ ; B_X é a razão de ramificação para o decaimento $\phi \rightarrow X\bar{X}$ e $(1 - B_X)$ para $\phi \rightarrow \gamma\gamma'$. Consideraremos nula a largura de decaimento da partícula X ($\Gamma_X = 0$), já que, de acordo com o que foi mencionado no capítulo 1, a vida média dessa partícula deve ser maior ou da ordem da idade do Universo.

Considerando o decaimento do inflaton em partículas X e radiação, e a criação de partículas X via aniquilação de fótons num Universo em expansão, as equações de Boltzmann que vão descrever a variação das densidades de energia ρ_ϕ , ρ_R e ρ_X são:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi + \Gamma_\phi &= 0, \\ \dot{\rho}_R + 4H\rho_R - (1 - B_X)\Gamma_\phi\rho_\phi - \frac{\langle\sigma|v\rangle}{m_X}[(\rho_X)^2 - (\rho_X^{EQ})^2] &= 0, \\ \dot{\rho}_X + 3H\rho_X - B_X\frac{m_X}{m_\phi}\Gamma_\phi\rho_\phi + \frac{\langle\sigma|v\rangle}{m_X}[(\rho_X)^2 - (\rho_X^{EQ})^2] &= 0.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Estas três equações diferenciais acopladas indicam a transferência de energia entre os três componentes do nosso modelo. O termo $\langle\sigma|v\rangle$ que aparece nas equações para ρ_R e ρ_X acima foi calculado anteriormente na seção 2.4.2 (eq.(2.54)) e traduz o processo $\gamma\gamma' \leftrightarrow X\bar{X}$. Já a função de Hubble é dada pela expressão:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_\phi + \rho_R + \rho_X).$$

Para resolver o sistema de equações (4.1) é conveniente trabalharmos com grandezas adimensionais e comóveis, que absorvam o efeito da expansão do Universo. Para isso, utilizaremos as seguintes definições :

$$\alpha_\phi = \frac{\Gamma_\phi}{m_\phi}, \quad \alpha_X = \langle\sigma|v\rangle(m_X)^2, \quad (4.2)$$

$$\Phi \equiv \frac{\rho_\phi a^3}{m_\phi}, \quad R \equiv \rho_R a^4, \quad X \equiv \frac{\rho_X a^3}{m_X}. \quad (4.3)$$

Outra modificação útil é trocar a variável independente t (tempo) por uma nova variável proporcional ao fator de escala: $x = am_\phi$.

Com essas mudanças de variáveis, o sistema de equações diferenciais adquire a nova forma ($' = d/dx$):

$$\begin{aligned}\Phi' &= -c_1 \frac{x}{\sqrt{\Phi x + R + Xx\frac{m_X}{m_\phi}}} \Phi, \\ R' &= (1 - B_X)c_1 \frac{x^2}{\sqrt{\Phi x + R + Xx\frac{m_X}{m_\phi}}} \Phi + c_2 \frac{x^{-1}}{\sqrt{\Phi x + R + Xx\frac{m_X}{m_\phi}}} (X^2 - X_{EQ}^2), \\ X' &= -c_3 \frac{x^{-2}}{\sqrt{\Phi x + R + Xx\frac{m_X}{m_\phi}}} (X^2 - X_{EQ}^2) + c_1 B_X \frac{x}{\sqrt{\Phi x + R + Xx\frac{m_X}{m_\phi}}} \Phi.\end{aligned}\quad (4.4)$$

As quantidades c_1 , c_2 e c_3 são constantes adimensionais com os seguintes valores:

$$c_1 = \sqrt{\frac{3}{8\pi G} \frac{\alpha_\phi}{m_\phi}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{3}{8\pi G} \frac{\alpha_X}{m_X}},$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{3}{8\pi G} \frac{m_\phi}{m_X^2}} \alpha_X.$$

A grandeza X_{EQ} fornece o valor de equilíbrio de X , ou seja, seu valor após o desacoplamento. Sua expressão é obtida substituindo ρ_X^{EQ} (equação (2.27)) na definição de X :

$$X_{EQ} = \frac{m_X^3}{m_\phi^3} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} x^3 \left(\frac{T(x)}{m_X}\right)^{3/2} \exp(-m_X/T(x)).$$

A expressão para a temperatura é obtida através da função $\rho_R(T)$, e de forma adimensional e comóvel escrevemos:

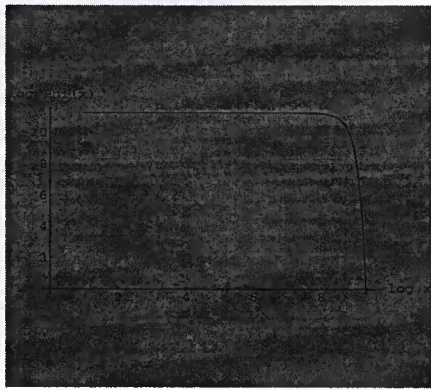
$$T(x) = m_X \left(\frac{30}{g_*\pi^2}\right)^{1/4} \frac{m_\phi R^{1/4}}{m_X x}.$$

Finalmente, para resolvermos numericamente o sistema de equações (4.4), é necessário definirmos suas condições iniciais. Para o instante inicial, onde $x = x_i$, espera-se que as densidades de energia de radiação e de partículas X sejam nulas, e portanto, $R(x_i) = X(x_i) = 0$. A expressão para $\Phi_i = \Phi(x_i)$ é obtida a partir da taxa inicial de expansão do Universo (H_i):

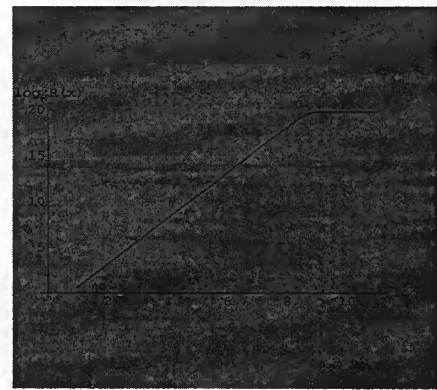
$$\Phi_i = \frac{3}{8\pi} \frac{m_{pl}^2}{m_\phi^2} \frac{H_i^2}{m_\phi^2} x_i^3.$$

Com o propósito de ilustração, utilizamos $H_i = m_\phi$, de acordo com o modelo mais simples de inflação caótica.

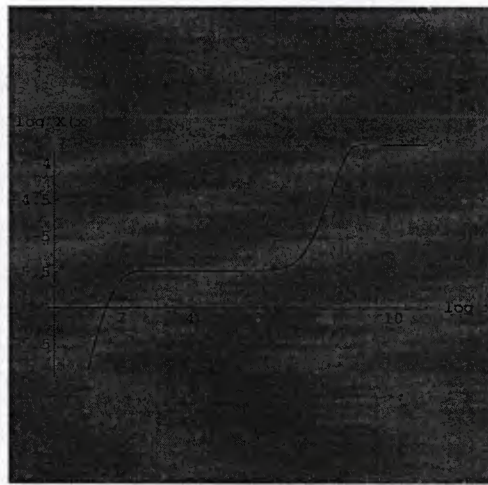
A seguir, mostramos os gráficos das soluções obtidas para a evolução das densidades de energia ρ_X , ρ_R e ρ_ϕ (na verdade, as grandezas X , R , Φ) como função do fator de escala modificado, x :



(a)



(b)



(c)

Figura 4.1: Nas figuras (a), (b) e (c) mostramos, respectivamente, as evoluções de $\Phi(x)$, $R(x)$ e $X(x)$ para $T_{rq} = 10^9$ GeV e $B_X = 10^{-15}$. As unidades são arbitrárias.

Para obtenção destes gráficos escolhemos $x_i = 1$. Porém, utilizando outros diferentes valores de x_i , as soluções do sistema de equações (4.4) permanecem inalteradas, sendo apenas deslocadas no eixo de x . Os parâmetros utilizados nos nossos cálculos foram*: $m_\phi = 10^{13}$ GeV, $m_X = 10^{12}$ GeV, $g_* = 200$ e $\langle \sigma|v| \rangle = 10^{-26}$ (GeV) $^{-2}$, $T_{rq} = 10^9$ GeV e $B_X = 10^{-15}$. O valor de B_X foi escolhido de forma a evitar que a produção de partículas do segundo patamar fosse exagerada.

*Estes parâmetros foram propostos em [8], com excessão de B_X .

A largura de decaimento (Γ_ϕ) é obtida em função da temperatura de reaquecimento (T_{rq}), assumindo a conversão instantânea da densidade de energia do inflaton em densidade de energia de radiação, conforme equação (3.27):

$$\Gamma_\phi = 1,93 \times \left(\frac{T_{rq}}{10^9 \text{ GeV}} \right)^2 \text{ GeV.} \quad (4.5)$$

4.2 Resultados e Discussões

4.2.1 Interpretação dos Gráficos

Observando os gráficos da figura 4.1, percebemos que o fator de escalar modificado (x) para $T = T_{rq}$, tem o valor de $x_{rq} = 5 \times 10^8$. Este é o ponto onde ocorre o maior decaimento de inflatons e a partir do qual os valores de X e R se estabilizam.

Por outro lado, de acordo com o que foi comentado no capítulo anterior, isto não quer dizer que não haja produção de radiação para $x < x_{rq}$. Do gráfico 4.1-(b), percebemos que a radiação é produzida continuamente desde $x_i = 1$ até x_{rq} . Isto também havia sido observado no gráfico da figura 3.2, que leva em conta a expansão do Universo. A partir dele concluímos que a densidade máxima de radiação, e consequentemente a temperatura máxima (T_{max}), não são obtidas quando $t = (\Gamma_\phi)^{-1}$ mas sim, ocorrem logo na fase inicial das oscilações coerentes. Para o sistema de equações (4.4), com $T_{rq} = 10^9$ GeV, T_{max} é da ordem de 10^{12} GeV [8].

Graças a isto, o processo $\gamma\gamma' \rightarrow X\bar{X}$ pode ocorrer de maneira efetiva, juntamente com o decaimento direto do inflaton em partículas X . Os dois mecanismos de criação de partículas X são mostrados na figura 4.1-(c), onde cada patamar indica partículas geradas devido a um diferente processo de produção.

O primeiro patamar se deve ao processo $\gamma\gamma' \rightarrow X\bar{X}$ e ocorre para $x(T_{max}) \simeq 50$. Este processo só vai ocorrer se $T_{rq} \sim 10^9$ GeV, já que para temperaturas de reaquecimento menores os fótons não serão suficientemente energéticos para produzir as partículas X .

O segundo ocorre em $x = x_{rq}$ e corresponde às partículas X criadas via decaimento direto dos inflatons, quando $t = (\Gamma_\phi)^{-1}$.

4.2.2 Expressão para $\Omega_X h^2$

A expressão para o valor atual da abundância de partículas X ($\Omega_X h^2$) pode ser calculada utilizando o valor da abundância atual de energia de radiação ($\Omega_R h^2 = 4.3 \times 10^{-5}$):

$$\frac{\Omega_X h^2}{\Omega_R h^2} = \frac{\rho_X(x_0)}{\rho_R(x_0)}. \quad (4.6)$$

onde o índice “0” indica atual.

Obtém-se a expressão para $\rho_R(x)$ substituindo $T \propto g_*^{-1/3} a^{-1}$ na expressão (2.28) de $\rho_R(T)$:

$$\rho_R(x) = \rho_R(x_{rq}) \left(\frac{g_*(x_{rq})}{g_*(x)} \right)^{1/3} \left(\frac{x_{rq}}{x} \right)^4. \quad (4.7)$$

Lembrando que $\rho_X \propto a^{-3}$, podemos escrever que:

$$\rho_X(x_0) = \rho_X(x_{rq}) \left(\frac{x_{rq}}{x_0} \right)^3. \quad (4.8)$$

Voltando à equação (4.6) e substituindo $\rho_X(x_0)$ e $\rho_R(x_0)$, ficamos com a seguinte expressão para $\Omega_X h^2$:

$$\Omega_X h^2 = \Omega_R h^2 \frac{\rho_X(x_{rq}) T_{rq}}{\rho_R(x_{rq}) T_0}. \quad (4.9)$$

Em virtude de sua grande massa, vamos supor que as partículas X sejam criadas já desacopladas. Desta forma, $\rho_X(x_{rq})$ pode ser escrita em termos do valor final da grandeza comóvel X (X_F). Ou seja,

$$X \equiv \frac{\rho_X x^3}{m_\phi^3 m_X} \implies \rho_X(x_{rq}) = X_F m_\phi^3 m_X x_{rq}^{-3}. \quad (4.10)$$

Para obtermos uma expressão para $\rho_R(x_{rq})$, utilizamos a definição da taxa de expansão do Universo para $x = x_{rq}$:

$$\begin{aligned} \rho_R(x_{rq}) &= \frac{3}{8\pi} H_{rq}^2 m_{pl}^2 \\ &= \frac{3}{8\pi} m_{pl}^2 H_i^2 \left(\frac{x_i}{x_{rq}} \right)^3. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Finalmente, substituindo as expressões (4.10) e (4.11) na equação (4.9), encontramos a expressão que nos fornece a abundância de partículas X produzidas durante a fase de reaquecimento:

$$\Omega_X h^2 = 1,5 \times 10^{18} \left(\frac{T_{rq}}{10^9 \text{ GeV}} \right) \frac{X_F m_X m_\phi^3}{x_i^3 H_i^2 m_{pl}^2}, \quad (4.12)$$

onde foi utilizado o valor atual da temperatura da radiação, $T_0 = 2,37 \times 10^{-13}$ GeV ($\simeq 2,7$ K).

Na figura 4.1-(c), X_F equivale ao valor de X no segundo patamar: $X_F = 1,8 \times 10^{-4}$. Isso nos fornece $\Omega_X h^2 = 20,97$, o que obviamente está excluído observacionalmente e foi utilizado aqui apenas para efeito de ilustração. Daí percebemos que para uma razão de ramificação extremamente pequena, já há superprodução de partículas X .

Podemos calcular a abundância de partículas X criadas devido apenas à aniquilação de fótons. Para isso fazemos $B_X = 0$ nas equações de Boltzmann e o resultado é $\Omega_X h^2 \simeq 0,38$, que por si só, já é compatível com as medidas observacionais. Este valor concorda com o resultado obtido por Chung, Kolb e Riotto [8], onde os autores resolvem praticamente o mesmo sistema de equações 4.4 para o caso em que $T_{rq} = 10^9$ GeV e $B_X = 0$.

Conforme já foi comentado, para modelos com temperaturas de reaquecimento mais baixas, o processo $\gamma\gamma' \rightarrow X\bar{X}$ é suprimido. Esses modelos foram recentemente analisados e constatou-se que eles podem ser interessantes para a criação de partículas candidatas à matéria escura fria [40]. A seguir, investigamos se nestes casos o decaimento direto $\phi \rightarrow X\bar{X}$ pode ser mais efetivo, de forma que este processo possa ocorrer sem gerar superprodução de partículas X .

Analisando a expressão (4.9), observamos que ao diminuir T_{rq} a abundância de partículas X também diminui. Porém, o valor de $\Omega_X h^2$ pode ser mantido diminuindo-se T_{rq} e ao mesmo tempo aumentando o valor de $\rho_X(x_{rq})$. Para isso, basta aumentarmos X_F , ou melhor, aumentarmos a razão de ramificação B_X . Deste modo, para temperaturas de reaquecimento mais baixas, é possível ter maiores razões de ramificação sem aumentar a quantidade de partículas supermassivas produzidas.

4.2.3 Aproximação Analítica \times Resultados Numéricos

Resolvemos o sistema de equações de Boltzmann (4.4) numericamente para vários B_X e T_{rq} e obtivemos os respectivos X_F . Com os valores de X_F , o cálculo de $\Omega_X h^2$ é imediato, de acordo com a equação (4.12). A seguir, mostramos algumas tabelas com os valores de X_F e $\Omega_X h^2$:

$T_{rq} = 10^9$ GeV			$T_{rq} = 10^3$ GeV		
B_X	X_F	$\Omega_X h^2$	B_X	X_F	Ω
0	$3,3 \times 10^{-6}$	0,38	0	0	0
10^{-15}	$1,8 \times 10^{-4}$	20,97	10^{-15}	$1,78 \times 10^{-4}$	$2,06 \times 10^{-5}$
10^{-11}	1,78	$2,06 \times 10^5$	10^{-11}	1,78	$2,06 \times 10^{-1}$
10^{-9}	$1,78 \times 10^2$	$2,06 \times 10^7$	10^{-9}	$1,78 \times 10^2$	$2,06 \times 10^1$
10^{-5}	$1,78 \times 10^6$	$2,06 \times 10^{11}$	10^{-5}	$1,78 \times 10^6$	$2,06 \times 10^5$
10^{-3}	$1,78 \times 10^8$	$2,06 \times 10^{13}$	10^{-3}	$1,78 \times 10^8$	$2,06 \times 10^7$

$T_{rq} = 10^8$ GeV			$T_{rq} = 10^{-1}$ GeV		
B_X	X_F	Ω	B_X	X_F	Ω
0	$2,0 \times 10^{-12}$	$2,3 \times 10^{-8}$	0	0	0
10^{-15}	$1,78 \times 10^{-4}$	2,06	10^{-15}	$1,78 \times 10^{-4}$	$2,06 \times 10^{-9}$
10^{-11}	1,78	$2,06 \times 10^4$	10^{-11}	1,78	$2,06 \times 10^{-5}$
10^{-9}	$1,78 \times 10^2$	$2,06 \times 10^6$	10^{-9}	$1,78 \times 10^2$	$2,06 \times 10^{-3}$
10^{-5}	$1,78 \times 10^6$	$2,06 \times 10^{10}$	10^{-5}	$1,78 \times 10^6$	$2,06 \times 10^1$
10^{-3}	$1,78 \times 10^8$	$2,06 \times 10^{12}$	10^{-3}	$1,78 \times 10^8$	$2,06 \times 10^3$

$T_{rq} = 10^5$ GeV			$T_{rq} = 10^{-2}$ GeV		
B_X	X_F	Ω	B_X	X_F	Ω
0	0	0	0	0	0
10^{-15}	$1,78 \times 10^{-4}$	$2,06 \times 10^{-3}$	10^{-15}	$1,78 \times 10^{-4}$	$2,06 \times 10^{-10}$
10^{-11}	1,78	$2,06 \times 10^1$	10^{-11}	1,78	$2,06 \times 10^{-6}$
10^{-9}	$1,78 \times 10^2$	$2,06 \times 10^3$	10^{-9}	$1,78 \times 10^2$	$2,06 \times 10^{-4}$
10^{-5}	$1,78 \times 10^6$	$2,06 \times 10^7$	10^{-5}	$1,78 \times 10^6$	2,06
10^{-3}	$1,78 \times 10^8$	$2,06 \times 10^9$	10^{-3}	$1,78 \times 10^8$	$2,06 \times 10^2$

Figura 4.2: Tabelas com os valores de $\Omega_X h^2$ e X_F obtidos através da resolução numérica do sistema de equações (4.4), para diferentes valores de B_X e T_{rq} .

As tabelas acima confirmam que para $B_X = 0$, a produção de partículas X somente é efetiva para $T_{rq} = 10^9$ GeV. Além disso, percebemos que X_F é praticamente independente de T_{rq} [†] e linear em B_X . Já a abundância varia linearmente, tanto em relação à B_X como à T_{rq} :

$$X_F = 1,78 \times 10^{11} B_X,$$

[†]Isso só não é verdade para $T_{rq} = 10^9$ GeV e $B_X < 10^{-15}$ pois nesses casos a produção de partículas X via aniquilação de fótons passa a ser importante.

$$\Omega_X h^2 \simeq 2,06 \times 10^7 \left(\frac{T_{rq}}{\text{GeV}} \right) B_X. \quad (4.13)$$

Esta dependência também é obtida analiticamente. Para isso, estimamos ρ_X da seguinte forma :

$$\begin{aligned} n_X &= n_\phi B_X \\ \rho_X(x_{rq}) &= \frac{\rho_\phi(x_{rq})}{m_\phi} B_X m_X \\ &= \frac{3}{8\pi} \frac{m_{pl}^2}{m_\phi} H_{rq}^2 B_X m_X. \end{aligned} \quad (4.14)$$

$\rho_X = B_X \rho_\phi$

Se igualarmos esta expressão à equação (4.10) e substituirmos H_{rq} conforme feito na equação (4.11), obtemos:

$$X_F = \frac{3}{8\pi} \frac{(m_{pl})^2}{m_\phi^2} B_X = 1,78 \times 10^{11} B_X. \quad (4.15)$$

Ou seja, nossa estimativa de X_F (e consequentemente $\Omega_X h^2$) concorda perfeitamente com os resultados numéricos.

A seguir, traçamos um gráfico de B_X em função de T_{rq} para os valores limites de $\Omega_X h^2$ e τ_X . Esses valores foram relacionados no capítulo 1 ao vincularmos a abundância das partículas X ao fluxo detectado de raios cósmicos de altíssimas energias (RCAE's) e supondo que elas sejam uma fração da matéria escura fria (equação (1.21)).

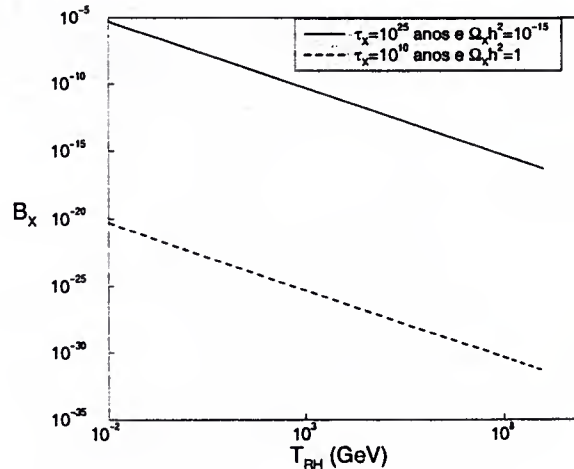


Figura 4.3: Gráfico de B_X em função de T_{rq} para os dois valores limites de τ_X (ou $\Omega_X h^2$).

Do gráfico mostrado na figura 4.3, para a menor temperatura de reaquecimento permitida, $T_{rq} = 10^{-2}$ GeV. B_X pode vir a ser da ordem de 10^{-5} . Este é o limite superior encontrado para a eficiência do processo $\phi \rightarrow X\bar{X}$, de modo que ele seja o responsável pela geração das partículas supermassivas. Os valores válidos para B_X devem estar entre a linha tracejada ($\tau_X = 10^{25}$ anos e $\Omega_X h^2 = 1$) e a linha contínua ($\tau_X = 10^{10}$ anos e $\Omega_X h^2 = 10^{-15}$).

Conclusões

Investigamos o modelo de geração de raios cósmicos de altíssimas energias a partir do decaimento de partículas X supermassivas, relíquias do período pós-inflacionário. Utilizando dados do fluxo detectado de eventos de raios cósmicos com energia da ordem de 10^{20} eV, limitamos algumas propriedades das partículas X , como sua vida média e abundância. Além disso, estudamos a produção dessas partículas no período de reaquecimento do Universo, obtendo vínculos para a razão de ramificação do decaimento direto do inflaton em partículas X .

Os primeiros resultados obtidos foram os limites para τ_X e $\Omega_X h^2$. Segundo nossa estimativa, para uma partícula que se comporte como matéria escura fria, com massa $m_X = 10^{12}$ GeV, sua vida média será limitada entre 10^{10} e 10^{25} anos e sua abundância entre 10^{-15} e 1.

Em seguida, investigamos a criação das partículas X durante o período de reaquecimento após a inflação. Neste caso temos duas possibilidades. A primeira ocorre para temperatura de reaquecimento máxima ($\simeq 10^9$ GeV). Neste cenário, as partículas supermassivas podem ser produzidas através da aniquilação de fótons, sem haver necessidade do acoplamento direto entre os campos de ϕ e X . A segunda possibilidade de produção ocorre quando temos temperaturas de reaquecimento mais baixas (10^{-2} GeV $< T_{rq} < 10^9$ GeV). Agora, apenas a produção via decaimento direto do inflaton pode ocorrer. Quanto menor o valor de T_{rq} , mais eficiente pode ser este processo, podendo chegar até $B_X \simeq 10^{-5}$ sem que haja superprodução de partículas supermassivas.

Apêndice A

Unidades e Convenções

Unidades

Adotamos o sistema de unidades naturais,

$$\hbar = c = k_B = 1,$$

de modo que as relações dimensionais são dadas por:

$$[\text{energia}] = [\text{massa}] = [\text{temperatura}] = [\text{comprimento}]^{-1} = [\text{tempo}]^{-1}.$$

Normalmente utilizamos como unidade de energia um GeV. Abaixo mostramos alguns fatores de conversão úteis.

Temperatura:	$1\text{GeV} = 1,1605 \times 10^{13}\text{K}$
Massa:	$1\text{GeV} = 1,7827 \times 10^{-24}\text{g}$
Comprimento:	$1\text{GeV}^{-1} = 1,9733 \times 10^{-14}\text{cm}$ $1\text{Mpc} = 3,0856 \times 10^{24}\text{cm}$
Tempo:	$1\text{GeV}^{-1} = 6,5822 \times 10^{-25}\text{s}$

Métrica de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Apêndice B

Tensor Energia-Momento do Fluido Perfeito

Um fluido perfeito é caracterizado por três quantidades:

- a quadri-velocidade própria, $u^\mu = dx^\mu/d\tau$;
- campo escalar que descreve a densidade própria, $\rho = \rho(x)$;
- campo escalar de pressão, $p = p(x)$.

A expressão para o tensor energia-momento de um fluido perfeito, é definida da seguinte forma [41]:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}.$$

É interessante analisarmos $T^{\mu\nu}$ para o caso de um referencial comóvel com o fluido. Nesse caso, $u^i = 0$ e $u^0 = 1$, e as componentes do tensor adquirem formas bastante simplificadas:

$$\begin{aligned}T^{00} &= \rho, \\T^{i0} &= 0, \\T^{ij} &= -g^{ij}p.\end{aligned}$$

Ou seja, nesse caso $T^\mu{}_\nu$ é dado pela seguinte matriz diagonal:

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p).$$

Apêndice C

Algumas definições da Relatividade Geral

Neste trabalho, consideramos conhecidas as noções básicas de Relatividade Geral necessárias à compreensão do modelo cosmológico padrão e do modelo de inflação. Neste apêndice, apenas comentaremos algumas das definições e equações que mais utilizamos.

C.1 Derivada Covariante

Por definição, o operador derivada aplicado a um tensor de qualquer ordem deve se transformar também como um tensor. Isso é verdade, como sabemos, para o caso de derivações de escalares (tensores de ordem zero).

Porém, para o caso de tensores de ordens superiores, isso quase sempre não é verdade, e vai depender do sistema de coordenadas que estivermos utilizando. Por isso, num sistema de coordenadas arbitrário, utiliza-se a definição de derivada covariante, que se transforma como um tensor em qualquer sistema de coordenadas:

$$B_{\alpha;\beta} \equiv \frac{\partial B_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} B_{\mu},$$

ou

$$A_{\alpha\beta;\mu} \equiv \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} A_{\nu\beta} - \Gamma^{\nu}_{\beta\mu} A_{\alpha\nu},$$

onde $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ são em geral, funções do espaço e do tempo e são chamados de símbolos de Christoffel. Eles são obtidos em termos da métrica, através da expressão:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right).$$

C.2 Tensor de Riemann, Tensor de Ricci e Escalar de Ricci

- O tensor de Riemann é definido como sendo [42]:

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}.$$

Este tensor, também conhecido como tensor de curvatura, tem um importante papel em especificar as propriedades geométricas locais do espaço-tempo. Isso porque se este tensor for nulo em qualquer ponto, o espaço-tempo será plano.

Por processos de contração, podemos construir tensores de ordens mais baixas a partir de $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$. O tensor

$$R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\beta\nu} = R^{\nu}_{\alpha\beta\nu}$$

é chamado de tensor de Ricci. Contraindo este tensor com a métrica, obtém-se o escalar de Ricci, ou escalar de curvatura:

$$\mathcal{R} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}.$$

Neste trabalho, utilizamos os tensores citados para a métrica de Robertson-Walker. Neste caso, os componentes não nulos da conexão são:

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2} h^{il} \left(\frac{\partial h_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial h_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^l} \right), \\ \Gamma^0_{ij} &= \frac{\dot{a}}{a} h_{ij}, \\ \Gamma^i_{0j} &= \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j, \end{aligned}$$

onde os índices latinos representam apenas as três coordenadas espaciais ($i, j = 1, 2, 3$) e $h_{ij} = -g_{ij}$.

A partir desses resultados, calcula-se também as componentes não nulas do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= - \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \right] g_{ij}, \end{aligned}$$

e o escalar de Ricci:

$$\mathcal{R} = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right].$$

Apêndice D

Termo de Colisão da Equação de Boltzmann

Para derivar o termo de colisão da equação de Boltzmann, utilizamos a teoria de colisões moleculares, conforme descrito em [43, 44].

Neste caso, algumas hipóteses são feitas de maneira a não termos que utilizar teoria do caos para tratar nosso problema. Essas hipóteses são:

- o gás de partículas é suficientemente diluído de modo que só consideramos colisões binárias;
- a força externa \vec{F} , que entrou no termo de Liouville não influi na magnitude da seção de choque de colisão;
- as velocidades iniciais anteriores à colisão não estão correlacionadas.

Estamos então interessados em saber como se dá a variação total do número de partículas com velocidade entre \vec{v} e $\vec{v} + d\vec{v}$, num volume $d^3\vec{r}$ localizado entre \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$, devido às colisões binárias. Isso é dado pela expressão:

$$C[f]d^3\vec{r}d^3\vec{v}dt = (C^+[f] - C^-[f])d^3\vec{r}d^3\vec{v}dt, \quad (\text{D.1})$$

onde $C[f]$ é a variação total, $C^+[f]$ fornece o número de partículas que após a colisão adquirem velocidade na faixa entre \vec{v} e $\vec{v} + d\vec{v}$ e $C^-[f]$ fornece o número de partículas que antes da colisão tinham velocidade nesta faixa, mas que têm sua velocidade alterada para fora da faixa após a colisão.

No volume $d^3\vec{r}$, consideremos as partículas A com velocidade próxima de \vec{v} . Elas são espalhadas por colisões com as partículas A_1 , que estão no mesmo volume $d^3\vec{r}$ e têm velocidade \vec{v}_1 . A probabilidade de ocorrer esta colisão, onde a partícula A muda sua velocidade de \vec{v} para \vec{v}' e a partícula A_1 têm sua velocidade modificada de \vec{v}_1 para \vec{v}'_1 , é dada pela quantidade:

$$\sigma'(\vec{v}, \vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}', \vec{v}'_1)d^3\vec{v}'d^3\vec{v}'_1. \quad (\text{D.2})$$

Portanto, para obter o termo $C^-[f]d^3\vec{r}d^3\vec{v}dt$ na equação (D.1), ou seja, o decréscimo induzido por colisões do número de partículas localizadas em $d^3\vec{r}$ com velocidade entre \vec{v} e $\vec{v}+d\vec{v}$, devemos primeiramente multiplicar a probabilidade (D.2) pelo fluxo relativo de partículas A atingidas por partículas A_1 ,

$$|\vec{v} - \vec{v}_1|f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3\vec{v},$$

e então multiplicar pelo número de partículas A_1 que podem realizar esse espalhamento,

$$f(\vec{r}, \vec{v}_1, t)d^3\vec{r}d^3\vec{v}_1.$$

Finalmente, somamos o resultado sobre todas as possíveis velocidades iniciais \vec{v}_1 de A_1 e sobre todas as possíveis velocidades finais \vec{v}' e \vec{v}'_1 . Daí obtemos que:

$$C^-[f]d^3\vec{r}d^3\vec{v}dt = \int_{\vec{v}} \int_{\vec{v}_1} \int_{\vec{v}'_1} [|\vec{v} - \vec{v}_1|f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3\vec{v}] \times [f(\vec{r}, \vec{v}_1, t)d^3\vec{r}d^3\vec{v}_1][\sigma'(\vec{v}, \vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}', \vec{v}'_1)d^3\vec{v}'d^3\vec{v}'_1]. \quad (D.3)$$

Para calcular $C^+[f]$, basta considerarmos a colisão inversa:

$$\vec{v}', \vec{v}'_1 \rightarrow \vec{v}, \vec{v}_1,$$

e teremos,

$$C^+[f]d^3\vec{r}d^3\vec{v}dt = \int_{\vec{v}} \int_{\vec{v}_1} \int_{\vec{v}'_1} [|\vec{v}' - \vec{v}'_1|f(\vec{r}, \vec{v}', t)d^3\vec{v}'] \times [f(\vec{r}, \vec{v}'_1, t)d^3\vec{r}d^3\vec{v}'_1][\sigma(\vec{v}', \vec{v}'_1 \rightarrow \vec{v}, \vec{v}_1)d^3\vec{v}d^3\vec{v}_1]. \quad (D.4)$$

Antes de realizarmos a subtração (D.1), simplificamos as equações para $C^-[f]$ e $C^+[f]$, notando que:

1. $\sigma'(\vec{v}, \vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}', \vec{v}'_1) = \sigma(\vec{v}', \vec{v}'_1 \rightarrow \vec{v}, \vec{v}_1)$.

2. Podemos introduzir as velocidades relativas:

$$\begin{aligned} \vec{V} &\equiv \vec{v} - \vec{v}_1, \\ \vec{V}' &\equiv \vec{v}' - \vec{v}'_1. \end{aligned} \quad (D.5)$$

onde, utilizando a conservação de energia para colisões elásticas, temos que $|\vec{V}'| = |\vec{V}| \equiv V$.

3. É interessante utilizarmos as abreviações :

$$\begin{aligned} f &\equiv f(\vec{r}, \vec{v}, t), \\ f' &\equiv f(\vec{r}, \vec{v}', t), \\ f_1 &\equiv f(\vec{r}, \vec{v}_1, t), \\ f'_1 &\equiv f(\vec{r}, \vec{v}'_1, t). \end{aligned} \tag{D.6}$$

Assim, escrevendo a seção de choque diferencial em termos do ângulo sólido de espalhamento, ficamos com a seguinte expressão para o termo de colisão:

$$C[f] = \int_{\vec{v}_1} \int_{\Omega'} (f' f'_1 - f f_1) V \sigma d\Omega' d^3 \vec{v}_1.$$

que pode ser escrito de maneira mais geral para uma distribuição $f = f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ como:

$$C[f] = \int_{\vec{p}_1} \int_{\Omega'} (f' f'_1 - f f_1) V \sigma d\Omega' d^3 \vec{p}_1.$$

Para uma interação do tipo $Z\bar{Z} \rightarrow \psi\bar{\psi}$, a seção de choque diferencial é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma d\Omega' &= \frac{1}{V 2E_Z 2E_{\bar{Z}}} \left(g \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_\psi}{2E_\psi} \right) \left(g \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_{\bar{\psi}}}{2E_{\bar{\psi}}} \right) \\ &\times |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_Z + p_{\bar{Z}}) [f_Z f_{\bar{Z}} - f_\psi f_{\bar{\psi}}]. \end{aligned} \tag{D.7}$$

onde a função delta quadri-dimensional impõem a conservação de energia e momento, e o termo $|\mathcal{M}|^2$ inclui fatores de simetria para partículas idênticas nos estados final e inicial do processo.

Referências

- [1] L. O'C. Drury, *Contemp. Phys.* **35**, 232 (1994).
- [2] K. Greisen, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 748 (1966).
- [3] G. T. Zatsepin and V. A. Kuzmin, *JETP Lett.* **4**, 78 (1966)
- [4] P. Bhattacharjee e G. Sigl, *Phys. Rep.* **327**, 109 (2000).
- [5] V. A. Kuzmin e V. A. Rubakov, *Phys. Atom. Nucl.* **61** 1028 (1998).
- [6] G. F. Giudice e R. Rattazzi, e-print hep-ph/9801271;
S. Raby, *Phys. Rev.* **D56**, (1997).
- [7] K. Hamaguchi, Y. Nomura e T. Yanagida, hep-ph/98053456;
K. Benakli, J. Ellis e D. V. Nanopoulos, hep-ph/9803333.
- [8] D. J. H. Chung, E. W. Kolb e A. Riotto, *Phys. Rev.* **D60**, 63504 (1999).
- [9] M. Nagano e A. A. Watson, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 689 (2000).
- [10] S. Yoshida e H. Dai, *J. Phys. G* **24**, 905 (1998).
- [11] J. Linsley, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 146 (1962).
- [12] M. A. Lawrence et al., *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.* **17**, 733 (1991).
- [13] N. N. Efimov et al., *Proc. International Symposium on Astrophysical Aspects of Most Energetic Cosmic Rays*, eds. M. Nagano e F. Takahara (World Scientific, Singapore) 1991.
- [14] R. G. Brownlee et al., *Can. J. Phys.* **46**, S259 (1968); M. M. Winn *J. Phys. G* **12**, 653 (1986).
- [15] N. Hayashida et al., *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3491 (1994); M. Takeda et al., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1163 (1998).

- [16] J. D. Bird et al., Phys. Rev. Lett. **71**, 3401 (1993).
- [17] D. Kieda et al., HIRES Collaboration, Proceeds. 26th ICRC Salt Lake (1999).
- [18] E. Fermi, Phys. Rev. **75**, 1169 (1949).
- [19] E. Waxmann e J. Miralda-Escudé, Astrophys. J. Lett. **472**, L89 (1996).
- [20] P. P. Kronberg, Rep. Prog. Phys. **57**, 325 (1994).
- [21] A. Letellier-Selvon, e-print astro-ph/0006111.
- [22] F. A. Aharonian and J. W. Cronin, Phys. Rev. **D50**, 1892 (1994).
- [23] A. M. Hillas, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **22**, 425 (1984).
- [24] A. Olinto, e-print astro-ph/0002006.
- [25] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, 1990).
- [26] S. Perlmutter et al, Nature **391**, 51 (1998).
- [27] P. de Bernardis et al, Nature **404**, 955 (2000).
- [28] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (Jonh Wiley & Sons, 1972).
- [29] J. V. Narlikar, *Introduction to Cosmology* (Cambridge University Press, 1993).
- [30] J. Bernstein, *Kinetic Theory in the Expanding Universe* (Cambridge University Press, 1988).
- [31] R. Aldrovandi e J. G. Pereira, *An Introductory Course on Physical Cosmology* (notas de aula disponíveis na web: www.ift.unesp.br).
- [32] J. Ellis, J. Kim e D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. **B145**, 181 (1984).
- [33] A. R. Liddle e D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, 2000).
- [34] B. de Carlos, J. A. Casas, F. Quevedo e E. Roulet, Phys. Lett. **B318**, 447 (1993).
- [35] A. H. Guth, Phys. Rev. **D23**, 347 (1981).
- [36] G. S. Watson, e-print astro-ph/0005003.

- [37] A. D. Linde, Phys. Lett **B108** 389 (1982);
A. D. Linde, Phys. Lett **B129** 177 (1983).
- [38] A. Albrecht e P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett **48** 1220 (1982).
- [39] A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood Academic Publishers, 1990).
- [40] G. F. Giudice, E. W. Kolb e A. Riotto, e-print hep-ph/0005123.
- [41] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1996).
- [42] L. Landau e E. Lifchitz, *Teoria do Campo* (Hemus).
- [43] F. Reif, *Fundamental of statistical and thermal physics* (McGraw-Hill, 1965).
- [44] S. R. A. Salinas, *Introdução à Física Estatística* (EdUSP, 1997).