



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

A large, abstract geometric design in shades of blue and white. It features a central circle with several overlapping triangles and lines, creating a complex, crystalline structure. The design is set against a white background with blue corner accents.

**PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

O GRUPO DAS TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

SARA VERONICA PAEZ CASTELLANOS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

SARA VERONICA PAEZ CASTELLANOS

O grupo das transformações de Möbius

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. THAÍS FERNANDA MENDES MONIS

Rio Claro - SP
2024

C348g

Castellanos, Sara Veronica Paez

O grupo das Transformações de Möbius / Sara Veronica Paez

Castellanos. -- Rio Claro, 2024

75 p. : il., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientadora: Thaís Fernanda Mendes Monis

1. Transformações de Möbius. 2. Plano complexo estendido. 3.
Esfera de Riemann. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade
Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados
fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Impacto potencial desta pesquisa

Esse trabalho constitui um estudo da literatura sobre as funções complexas de variável complexa, com particular atenção ao Grupo das Transformações de Möbius. O campo da matemática abstrata é um campo de pesquisa básica que continuamente nos dá linguagem para tratarmos de diversos problemas nas mais distintas áreas do conhecimento, tais como Física, Engenharia, Biologia, Ciências Sociais, etc. No caso da teoria das funções complexas, vemos conectadas diversas áreas da Matemática tais como a Análise, a Álgebra, a Teoria dos Números, a Geometria e a Topologia, o que a torna uma área de grande interesse. Embora clássico, o tema das transformações de Möbius permanece relevante e atraente, haja vista o trabalho de William P. Thurston sobre a geometria das variedades de dimensão 3, onde tais transformações, juntamente com a geometria hiperbólica, tomam papel vital. O desenvolvimento desse trabalho permitiu que a candidata se desenvolvesse profissionalmente, tornando-se conversante nesse tema de pesquisa e com potencial para a continuidade dos seus estudos a nível de doutoramento. O texto resultante tem potencial didático para ser explorado em cursos de graduação e de pós-graduação como texto de apoio.

Potential impact of this research

This work is a study of the literature on complex functions of complex variables, with particular attention to the Möbius Transformations Group. The field of abstract mathematics is a field of basic research that continually gives us language to deal with various problems in the most diverse areas of knowledge, such as Physics, Engineering, Biology, Social Sciences, etc. In the case of the theory of complex functions, we see several areas of mathematics connected, such as analysis, algebra, number theory, geometry and topology, which makes it an area of great interest. Although classical, the theme of Möbius transformations remains relevant and attractive, given the work of William P. Thurston on the geometry of dimension 3- dimensional manifolds, where such transformations, together with hyperbolic geometry, play a vital role. The development of this work has allowed the candidate to develop professionally, becoming a conversationalist on this research topic and with the potential to continue her studies at doctoral level. The resulting text has the didactic potential to be explored in undergraduate and postgraduate courses as a supporting text.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

SARA VERONICA PAEZ CASTELLANOS

O grupo das transformações de Möbius

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas do
Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. THAÍS FERNANDA MENDES MONIS Orientadora
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. SUZETE MARIA SILVA AFONSO
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. NATALIA ANDREA VIANA BEDOYA
CCET / UFSCAR /São Carlos (SP)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 18 de abril de 2024.

*Aos meus amados pais, Braulio e Alcira,
aos meus irmãos e aos meus avós.
Em memória da minha amada avó Virginia, que descanse em paz,
dedico este momento.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, expresso minha profunda gratidão a Deus por conceder-me a oportunidade de dar continuidade aos meus estudos e de fortalecer minha coragem e determinação mental para perseverar.

Aos meus pais, Braulio e Alcira, manifesto meu reconhecimento. Mesmo à distância, eles me forneceram ânimo e valor nos momentos difíceis, incentivando-me a não desistir quando a vontade de fazê-lo surgia.

Aos meus irmãos, agradeço por sua constante preocupação com o meu bem-estar, sempre empenhados em proporcionar minha felicidade da melhor maneira possível.

Ao meu companheiro Abraão, expresso minha gratidão por seus esforços em compreender-me e por sua paciência, mesmo nos momentos em que minha irritação e desânimo eram evidentes. Apesar de nossas diferenças culturais, trabalhamos juntos para superar os desafios.

À professora Thaís, meu apreço por sua compreensão, paciência e orientação ao longo desta jornada educacional. Suas contribuições foram essenciais para que eu descobrisse a melhor maneira de assimilar o conteúdo.

À professora Suzete, expresso meu reconhecimento pelo seu apoio incondicional e pela busca incessante de alternativas para promover meu desenvolvimento profissional. E à Professora Natalia por todas as recomendações e esclarecimentos para melhorar o trabalho e por toda sua dedicação ao mesmo.

Às secretárias Elisa e Inajara, agradeço pela disposição constante em me auxiliar e aconselhar em processos e demais atividades.

Ao meu amigo Francisco, colega em toda esta jornada do mestrado, que sempre esteve presente para me ajudar e orientar, e expresso minha gratidão também para a querida Ana Melo pelo acolhimento, amor e carinho, grata sempre.

Deixo meus agradecimentos finais para minhas queridas Colombianas Jeimy, Diana e Nicoll, que foram minha força e meu ponto de apoio quando sentia saudades de meu país, e todos aqueles amigos que esqueço de mencionar, cujas contribuições foram fundamentais, direta ou indiretamente, para a concretização deste trabalho, meu sincero agradecimento.

*"Vamos tentar!
Se não tentarmos, não vamos saber se conseguiremos."
Toru Kumon*

Resumo

Neste trabalho, propomos um estudo sobre o Grupo das Transformações de Möbius. Sabemos que a teoria das funções complexas conecta diversas áreas da Matemática tais como a Análise, a Álgebra, a Teoria dos Números, a Geometria e a Topologia, tornando-a, assim, uma área de grande interesse. Embora clássico, o tema das transformações de Möbius permanece relevante e atraente, haja vista o trabalho de William P. Thurston sobre a geometria das variedades de dimensão 3, onde tais transformações, juntamente com a geometria hiperbólica, tomam papel vital.

Palavras-chave: Transformações de Möbius. Plano complexo estendido. Esfera de Riemann.

Abstract

In this work, we propose a study on the Group of Möbius transformations. We know that the theory of complex functions connects several areas of mathematics, such as analysis, algebra, number theory, geometry and topology, thus making it an area of great interest. Although classical, the topic of Möbius transformations remains relevant and attractive, given William P. Thurston's work on the geometry of 3-dimensional manifolds, where these transformations, along with hyperbolic geometry, play a vital role.

Keywords: Möbius transformation. Extend complex plane. Riemann Sphere.

Lista de Figuras

2.1	Representação geométrica de $C(t) = 1 - it$	24
2.2	Representação geométrica da curva $C(t) = \cos t + i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$	25
3.1	Projeção estereográfica	45
3.2	Ilustração Teorema 3.17.	56
3.3	Ilustração Teorema 3.17.	56
4.1	Interpretação geométrica da equação (4.19).	68
4.2	Interpretação geométrica da equação (4.19), sob a transformação inversão. . . .	69
4.3	Interpretação geométrica da equação (4.22).	70
4.4	Interpretação geométrica de (4.22), sob a transformação translação.	71
4.5	Interpretação geométrica de (4.26), sob a transformação inversão.	71
4.6	Interpretação geométrica de (4.27), sob a transformação translação.	72

Sumário

1	Introdução	12
2	Preliminares	14
2.1	Sobre espaços métricos e noções topológicas no plano complexo	14
2.2	Limite de funções e continuidade	17
2.3	Funções analíticas e holomorfas	19
2.3.1	Transformações Conformes	23
2.4	Funções meromorfas	27
2.4.1	Séries	27
2.4.2	Séries de potências	30
2.4.3	Série de Laurent	35
2.4.4	Singularidade Isolada	40
2.4.5	Singularidades Isoladas no Infinito	43
3	Esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$	45
3.1	Plano complexo estendido	45
3.1.1	Compacidade	48
3.2	Comportamento de funções no infinito	49
3.3	Círculos em $\overline{\mathbb{C}}$	55
4	Transformações de Möbius	57
4.1	Transformações de Möbius no plano complexo estendido	59
4.2	Transformações de Möbius como matrizes	61
4.3	Imagens de círculos e retas através de transformações de Möbius.	62
4.4	Exemplos	67
5	Conclusão	73
	Referências	74

1 Introdução

Foi August Ferdinand Möbius, matemático alemão nascido em 1790 e falecido em 1868, quem introduziu o que é conhecido hoje como as transformações de Möbius. Em alguns textos elas são frequentemente referidas como: transformações racionais lineares, transformações conformes especiais ou transformações homográficas.

Tendo em mente que uma transformação estabelece uma correspondência entre números ou pontos, no caso da teoria de variável complexa, um exemplo simples de uma transformação é o deslocamento paralelo do plano complexo que substitui o ponto z por $z + a$ [1].

Existem quatro tipos especiais de transformações de Möbius, que são: translações, homotetias, rotações e inversões. Em geral, uma transformação de Möbius é qualquer combinação dos quatro tipos simples de transformações. Esses tipos especiais de transformações tornam as propriedades das transformações mais visíveis.

Nesta dissertação, são mostradas algumas preliminares importantes para lidar com as transformações de Möbius. Será mostrado em detalhes que o conjunto de transformações de Möbius forma um grupo com a composição de funções como operação e, além disso, esta transformação pode ser associada a uma matriz complexa quadrada de ordem dois. Também será verificado que essas transformações são conformes (preservam ângulos). Desta maneira, procuramos abordar o grupo de transformações de Möbius a partir do ponto de vista de suas propriedades algébricas, topológicas e geométricas.

Dos tipos mais simples de transformações, pode-se concluir que uma transformação de Möbius tem a capacidade de transformar linhas retas ou círculos em círculos ou linhas retas. Assim, um comportamento interessante de figuras sob as transformações de Möbius pode ser determinado tanto geometricamente quanto analiticamente.

O texto está organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 2, serão apresentadas diversas noções básicas da teoria de variável complexa. Entre essas noções, abordaremos conceitos como métrica, alguns princípios da topologia, limite de funções e continuidade, analiticidade e funções holomorfas, transformações conformes. Além disso, faremos uma explanação detalhada sobre funções meromorfas, abordando-as de um ponto de vista analítico, com o objetivo de entender o conceito de singularidades, um tópico fundamental para o desenvolvimento de nosso estudo. É importante ressaltar que os cálculos apresentados nesse capítulo terão relevância e aplicação ao longo do trabalho.
- No Capítulo 3, apresentamos a esfera de Riemann, que estabelece uma relação entre o plano complexo e a esfera, por meio da projeção estereográfica. Neste capítulo, exploramos algumas propriedades topológicas da esfera de Riemann. Além disso, fornecemos uma descrição detalhada das funções meromorfas abordando-as sob perspectivas tanto algébricas quanto topológicas. É relevante destacar que as funções

meromorfas realizam um mapeamento da esfera de Riemann em si mesma. O resultado principal, que estabelece uma conexão entre conceitos analíticos e algébricos, é que uma função f é meromorfa se, e somente se, é uma função racional.

- No Capítulo 4, definimos as transformações de Möbius. O conjunto destas transformações possui estrutura de grupo sob a operação de composição de funções. Além disso, exploramos as propriedades geométricas das transformações de Möbius em relação aos círculos na esfera de Riemann, demonstrando e ilustrando essas propriedades por meio de diversos exemplos.

As figuras presentes no texto foram todas elaboradas pela autora utilizando o software Geogebra.

2 Preliminares

Neste primeiro capítulo, serão citadas algumas definições, teoremas, propriedades e notações necessárias para o desenvolvimento do trabalho. Algumas das demonstrações de teoremas ou proposições terão uma referência bibliográfica, outras serão realizadas em detalhes no decorrer do trabalho.

Neste capítulo, serão abordados diversos conceitos fundamentais. Primeiramente, será apresentada a definição de aplicação holomorfa, seguida das condições de Cauchy-Riemann, que são essenciais para determinar a analiticidade de uma função. Além disso, serão discutidas a definição de aplicação conforme e a definição de função meromorfa. Para ilustrar esses conceitos, serão fornecidos exemplos pertinentes ao longo do capítulo.

As referências bibliográficas para a escrita deste capítulo foram [1, 2, 3, 4] e [5].

2.1 Sobre espaços métricos e noções topológicas no plano complexo

Os espaços métricos constituem uma classe especial da classe dos chamados espaços topológicos, nos quais a noção de distância toma lugar para definir a noção de continuidade de funções.

Nesta seção, nossa motivação será compreender algumas das noções topológicas no plano complexo. Para isso, começaremos por definir métrica e, depois, a noção de distância entre dois números complexos.

Definição 2.1. Sejam M um conjunto não vazio e d uma função definida em $M \times M$ que assume valores nos números reais não negativos, ou seja,

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Diz-se que d é uma métrica ou distância sob M se, e somente se, para quaisquer $x, y, z \in M$ as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $d(x, x) = 0$ (a distância de um ponto a si mesmo é zero);
2. $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$ (positividade);
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria);
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular).

Um espaço métrico é um par (M, d) onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M .

Definição 2.2. Se $z = x + iy$ e $w = a + ib$ são números complexos dados, $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, a distância entre eles é definida por

$$d(z, w) := \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

que coincide com o módulo de $z - w$, ou seja, $d(z, w) = |z - w|$.

Pode-se verificar que $(\mathbb{C}, d)$ é um espaço métrico.

A Teoria dos Espaços Métricos motiva a definição de espaços topológicos, como segue:

Definição 2.3. Sejam X um conjunto e t uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo:

1. $\emptyset \in t, X \in t$,
2. a interseção de dois membros de t está em t ,
3. a união de qualquer coleção de membros de t está em t .

Uma tal coleção t de subconjuntos de X é chamada uma **topologia** para X . O conjunto X juntamente com a coleção t é chamado um **espaço topológico** e é denotado por (X, t) , comumente abreviado simplesmente por X quando a coleção t considerada está clara. Os elementos da coleção t são chamados os **abertos** do espaço topológico (X, t) .

Exemplo 2.4. Um espaço métrico (M, d) dá origem a um espaço topológico (M, t) declarando o seguinte: dado $U \subset M$, $U \in t$ se, e somente se, para todo $x \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(x, y) < \varepsilon \implies y \in U$. O espaço topológico (M, t) resultante é chamado metrizável.

Consequentemente, $(\mathbb{C}, t)$ é um espaço topológico metrizável, onde t é a topologia associada à métrica d .

Definição 2.5. Seja $(\mathbb{C}, d)$ o espaço métrico definido acima. Tomemos um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ e um raio $r > 0$. Definimos os seguintes conjuntos:

- O disco aberto de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raio $r > 0$ como sendo o conjunto:

$$D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

- O disco fechado de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raio $r > 0$ como sendo o conjunto:

$$\overline{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

- O círculo de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raio $r > 0$ como sendo o conjunto:

$$S(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

- O disco furado de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raio $r > 0$ como sendo o conjunto, sem o centro:

$$D(z_0, r) - \{z_0\} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

(Vizinhança e Vizinhança Perfurada) Todo conjunto V que contém um disco aberto de centro z_0 e raio $r > 0$, para algum r , é chamado de vizinhança de z_0 e é representado por $V_r(z_0)$. A vizinhança perfurada, denotada por $V_r^*(z_0)$, é obtida excluindo-se o ponto z_0 de $V_r(z_0)$, ou seja, $V_r^*(z_0) = V_r(z_0) - \{z_0\}$. Esta é chamada uma vizinhança perfurada de z_0 .

(Ponto Interior e Conjunto Aberto) O ponto z_0 é considerado um ponto interior de um conjunto C se existe um disco aberto de centro z_0 todo contido em C . Um conjunto C é aberto se todos os seus pontos são interiores.

(Conjunto Fechado e Ponto de Acumulação) Um subconjunto F de $\mathbb{C}$ é dito fechado em $\mathbb{C}$ quando o seu complementar é aberto. Se A é um subconjunto de $\mathbb{C}$ e z_0 é um ponto de $\mathbb{C}$, dizemos que z_0 é ponto de acumulação ou ponto limite de A se toda vizinhança de z_0 intercepta A em algum ponto diferente do próprio z_0 .

Definição 2.6. Se $f : X \rightarrow Y$, onde X e Y são espaços topológicos. Diz-se que f é uma aplicação aberta se, para cada conjunto aberto $U \subset X$, o conjunto $f(U)$ é aberto em Y .

Definição 2.7. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, para cada subconjunto aberto $V \subset Y$, o conjunto $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X .

Definição 2.8. Uma função $f : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos é um homeomorfismo se f é bijetiva, contínua, e sua função inversa, $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também é contínua.

Definição 2.9. Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação de recobrimento se, para todo $y \in Y$, existe uma vizinhança V de y tal que $f^{-1}(V)$ consiste de conjuntos abertos disjuntos, cada um mapeado homeomorficamente sobre V por f . Nesse caso, X é um espaço de recobrimento de Y .

Definição 2.10. Dados os pontos x e y do espaço topológico X , um caminho em X de x a y é uma aplicação contínua $f : [a, b] \rightarrow X$ de algum intervalo fechado na reta real para X , tal que $f(a) = x$ e $f(b) = y$. Um espaço X é considerado conexo por caminhos (c.p.c.) se cada par de pontos em X pode ser unidos por um caminho em X [5].

Definição 2.11. Um espaço topológico X é dito conexo quando os seus únicos subconjuntos simultaneamente aberto e fechado são o $\emptyset$ e o próprio X .

Proposição 2.12. *Seja X um espaço topológico c.p.c.. Então X é conexo.*

Demonstração. Ver [6], Theorem 12.8, pág. 95. □

Definição 2.13. Um conjunto aberto e conexo em $\mathbb{C}$ é chamado de domínio ou região.

Proposição 2.14. *Todo subconjunto conexo, aberto e não vazio de $\mathbb{C}$ é conexo por caminhos. Em particular, $D \subset \mathbb{C}$ é um domínio se, e somente se, D é aberto em $\mathbb{C}$ e é conexo por caminhos.*

Demonstração. O resultado e a demonstração são semelhantes ao dado em [6], Theorem 12.9, p. 96. □

2.2 Limite de funções e continuidade

As propriedades de limite e continuidade conhecidas para funções reais permanecem válidas para funções de variáveis complexas. Este capítulo abrange definições importantes que serão aplicadas ao longo do texto. As provas não serão fornecidas, uma vez que se tratam de resultados conhecidos. Tais resultados podem ser encontrados nos seguintes textos: [2, 3, 4, 7].

Definição 2.15. Seja z_0 um ponto de acumulação do domínio D de uma função f . Diz-se que f tem limite L quando z tende a z_0 , se dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - L| < \epsilon, \text{ sempre que } z \in D \text{ e } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Escreve-se:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

Uma função $f(z)$ é chamada contínua em um ponto z_0 se $f(z_0)$ existe e, além disso, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, ou seja, se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de tal forma que se $|z - z_0| < \delta$ é possível garantir que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

Exemplo 2.16. Vamos demonstrar que, pelo uso da definição de limite, temos

$$\lim_{z \rightarrow 3i} \left(\frac{z^2 + 9}{4(z - 3i)} \right) = \frac{3i}{2}.$$

Considere a função $f(z) = \frac{z^2 + 9}{4(z - 3i)}$. Primeiro, observamos que

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| &= \left| \frac{z^2 + 9}{4(z - 3i)} - \frac{3i}{2} \right| = \left| \frac{(z - 3i)(z + 3i)}{4(z - 3i)} - \frac{3i}{2} \right| \\ &= \left| \frac{z + 3i}{4} - \frac{3i}{2} \right| \\ &= \left| \frac{1}{4}(z - 3i) \right| \\ &= \frac{1}{4}|z - 3i|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Portanto, para qualquer $\epsilon > 0$, podemos escolher $\delta = 4\epsilon$. Se $|z - 3i| < \delta$, de acordo com (2.1), temos

$$\left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| = \frac{1}{4}|z - 3i| < \frac{1}{4}\delta = \frac{1}{4}(4\epsilon) = \epsilon.$$

Assim, demonstramos que $\lim_{z \rightarrow 3i} \left(\frac{z^2 + 9}{4(z - 3i)} \right) = \frac{3i}{2}$.

Além disso, não é necessário utilizar a definição completa toda vez que um limite precisa ser calculado. Neste caso, usando propriedades de limites, podemos concluir que

$$\lim_{z \rightarrow 3i} \frac{z^2 + 9}{4(z - 3i)} = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{(z - 3i)(z + 3i)}{4(z - 3i)} = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{z + 3i}{4} = \frac{6i}{4} = \frac{3i}{2}.$$

As propriedades do limite para funções complexas são análogas às funções reais, seguindo as mesmas regras para limites de soma, produto, quociente, etc., sendo estabelecidas de forma semelhante.

Teorema 2.17. *Sejam f e g duas funções, e $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L_1$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = L_2$. Então, as seguintes relações são válidas:*

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = L_1 + L_2.$
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = L_1 L_2.$
3. Se $L_2 \neq 0$, então $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} = \frac{L_1}{L_2}.$

Da mesma forma, existem propriedades de limites para funções contínuas em variáveis complexas que são análogas às propriedades para funções contínuas em variáveis reais.

Teorema 2.18. *A soma e o produto de funções contínuas são funções contínuas. O quociente de duas funções contínuas f e g em um ponto z_0 é uma função contínua em z_0 , desde que $g(z_0) \neq 0$.*

A continuidade da composição entre funções contínuas também é válida.

Teorema 2.19. *Seja g uma função cujo domínio contém o ponto z_0 e cuja imagem está contida no domínio de uma função f . Nestas condições, se g é contínua em z_0 e f é contínua em $g(z_0)$, então a função composta $f(g(z))$ será contínua no ponto z_0 .*

Exemplo 2.20. A função $f(z) = \operatorname{Re} z^2$ é contínua em $\mathbb{C}$, onde $\operatorname{Re}(w)$ denota a parte real do número complexo w , ou seja, se $w = a + bi$ então $\operatorname{Re}(w) = a$.

1. $f(z) = \operatorname{Re} z$ é contínua em $\mathbb{C}$ pois, dados $\epsilon > 0$ e $w \in \mathbb{C}$, tomando $\delta = \epsilon$, se $z \in \mathbb{C}$ e $|z - w| < \delta = \epsilon$, então:

$$|f(z) - f(w)| = |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w| = |\operatorname{Re}(z - w)| \leq |z - w| < \epsilon.$$

2. A função $g(z) = z^2$ é contínua em $\mathbb{C}$ pois, dados $\epsilon > 0$ e $w \in \mathbb{C}$, tomando $\delta < \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{1+2|w|} \right\}$, se $|z - w| < \delta$, então:

$$\begin{aligned} |g(z) - g(w)| &= |z^2 - w^2| \\ &= |z - w||z + w|. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Como $|z - w| < \delta$, então $|z + w| < \delta + 2|w|$. Substituindo em (2.2), temos:

$$\begin{aligned} |g(z) - g(w)| &= |z - w||z + w| \\ &< \delta(\delta + 2|w|) \\ &< \delta(1 + 2|w|) \\ &< \frac{\epsilon}{1 + 2|w|}(1 + 2|w|) = \epsilon. \end{aligned}$$

Como f e g são contínuas em $\mathbb{C}$, então $f \circ g$ é contínua em $\mathbb{C}$, ou seja, $\operatorname{Re} z^2$ é contínua em $\mathbb{C}$.

Corolário 2.21. *Uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é contínua no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ se, e somente se, suas partes real e imaginária são contínuas nesse ponto.*

2.3 Funções analíticas e holomorfas

Serão discutidos alguns conceitos de análise de funções complexas necessários para o nosso estudo. Se o leitor desejar mais informações e detalhes sobre teoremas e provas, pode consultar as referências [1, 2, 3] e [8].

Definição 2.22. Seja f uma função cujo domínio é um conjunto $D \subset \mathbb{C}$, aberto e conexo por caminhos, e seja z um ponto de D . Diz-se que f é derivável no ponto z se o limite

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe. Neste caso, $f'(z)$ se chama a derivada de f no ponto z .

Teorema 2.23. Se f é derivável em z_0 , então f é contínua em z_0 .

Teorema 2.24. Se f e g são deriváveis em z_0 , então também o são:

1. $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$.
2. $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.
3. $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.
4. $\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$, desde que $f(z_0) \neq 0$.

Para a composição de funções, temos a Regra da Cadeia, como segue:

Teorema 2.25. Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ com $f(A) \subset B$ funções complexas. Se f é derivável em z_0 e g é derivável em $f(z_0)$, então $g \circ f$ é derivável em z_0 e

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

Os conceitos de função analítica e função holomorfa são introduzidos a seguir.

Definição 2.26. Diz-se que uma função f é holomorfa em D , onde D é um conjunto aberto e conexo por caminhos, se f é derivável em cada ponto de D . A função f é analítica no ponto z_0 se f é derivável em um disco aberto que contém z_0 .

Exemplo 2.27. A função $f(z) = |z|^2$ é derivável em $z = 0$, mas não é holomorfa. Com efeito, pela Definição 2.22, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)\overline{(z+h)} - z\bar{z}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z\bar{z} + z\bar{h} + h\bar{z} + h\bar{h} - z\bar{z}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z\bar{h} + h\bar{z} + h\bar{h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{z\bar{h}}{h} + \bar{z} + \bar{h} \right). \end{aligned}$$

Agora, se $z = 0$, então o $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{z\bar{h}}{h} + \bar{z} + \bar{h} \right) = 0$. Em outras palavras, $f'(0) = 0$.

Se $z \neq 0$, uma vez que não existe $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$, observamos que f é derivável somente em zero e, conseqüentemente, não é holomorfa.

Como uma observação adicional, o limite não existe para todo $z \neq 0$. Portanto, $f(z)$ é derivável somente em $z = 0$. Dado que f não é derivável em nenhuma vizinhança de 0, ela também não é analítica em $z = 0$.

Apresentaremos uma condição necessária e suficiente para que uma função f seja derivável em um ponto específico. O seguinte critério é extremamente útil para verificar a analiticidade de uma função complexa. O teorema a seguir fornece condições necessárias para que uma função f seja derivável em um ponto $z_0 \in D$.

Teorema 2.28. *Suponha que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja derivável em um ponto $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. Então as quatro derivadas parciais $u_x(x_0, y_0)$, $u_y(x_0, y_0)$, $v_x(x_0, y_0)$ e $v_y(x_0, y_0)$ existem e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:*

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Demonstração. Sob a hipótese de que a derivada $f'(z_0)$ existe, o quociente da diferença

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

deve se aproximar do limite $f'(z_0)$ à medida que h se aproxima de 0 de qualquer maneira. Primeiro, deixamos $h \rightarrow 0$ através de valores reais. Em seguida, com $h = h_1 + ih_2$.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h_1 + ih_2 \rightarrow 0} \frac{f((x_0 + iy_0) + (h_1 + ih_2)) - f(x_0 + iy_0)}{h_1 + ih_2} \\ &= \lim_{\substack{h_1 = 0 \\ h_2 \rightarrow 0}} \frac{f((x_0 + h_1) + i(y_0 + h_2)) - f(x_0 + iy_0)}{h_1 + ih_2} \\ &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + i(y_0 + h_2)) - f(x_0 + iy_0)}{ih_2} \\ &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h_2) + iv(x_0, y_0 + h_2) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{ih_2} \\ &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0))}{ih_2} \\ &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0)}{ih_2} + i \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0)}{ih_2} \\ &= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \right) + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\
 &= \lim_{h_1 + ih_2 \rightarrow 0} \frac{f((x_0 + h_1) + i(y_0 + h_2)) - f(x_0 + iy_0)}{h_1 + ih_2} \\
 &= \lim_{\substack{h_2 = 0 \\ h_1 \rightarrow 0}} \frac{f((x_0 + h_1) + i(y_0 + h_2)) - f(x_0 + iy_0)}{h_1 + ih_2} \\
 &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f((x_0 + h_1) + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{h_1} \\
 &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h_1, y_0) + iv(x_0 + h_1, y_0) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{h_1} \\
 &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h_1, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + h_1, y_0) - v(x_0, y_0))}{h_1} \\
 &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h_1, y_0) - u(x_0, y_0)}{h_1} + i \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h_1, y_0) - v(x_0, y_0)}{h_1} \\
 &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Igualando as partes reais e imaginárias de (2.5) e (2.4), se obtém

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x},
 \end{aligned}$$

que são as equações de Cauchy-Riemann. □

Exemplo 2.29. A função a seguir mostra que as equações de Cauchy-Riemann podem ser satisfeitas em um ponto, mas a função pode não ser derivável nesse ponto. Dada a função:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^3}{|z|^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

onde $z = x + iy$ e $z \neq 0$, então

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{(\overline{x + iy})^3}{|z|^2} = \frac{(x - iy)^3}{(x^2 + y^2)} = \frac{x^3 - 3xy^2 + i(-3x^2y + y^3)}{x^2 + y^2}.$$

Assim que $f = u + iv$, onde

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad \text{e} \quad v(x, y) = \begin{cases} \frac{-3x^2y + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\text{Por isso, } \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0+h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0,0+h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0+h,0) - v(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0,0+h) - v(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0.$$

Portanto, as equações de Cauchy-Riemann para estas funções u e v estão satisfeitas no ponto $(0,0)$. Agora, observemos os seguintes limites:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}^3}{h h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{h}}{h} \right)^2.$$

$$\text{Se } h = h_1 + ih_2, \text{ então } \lim_{h_1+ih_2 \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{h}_1 + i\bar{h}_2}{h_1 + ih_2} \right)^2 = \lim_{h_1+ih_2 \rightarrow 0} \left(\frac{h_1 - ih_2}{h_1 + ih_2} \right)^2.$$

$$\text{Mas } \lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \rightarrow 0}} \left(\frac{h_1 - ih_2}{h_1 + ih_2} \right)^2 = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \left(\frac{-ih_2}{ih_2} \right)^2 = \lim_{h_2 \rightarrow 0} (-1)^2 = 1, \text{ enquanto isso}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h_2 = h_1 \\ h_1 \rightarrow 0}} \left(\frac{h_1 - ih_2}{h_1 + ih_2} \right)^2 &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^2 \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{(1-i)^2}{(1+i)^2} \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{1-2i-1}{1+2i-1} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{-2i}{2i} = -1. \end{aligned}$$

Dado que os limites são diferentes quando z se aproxima de 0 por dois caminhos diferentes, conclui-se que o limite não existe. Por isso, a função f não é derivável em 0.

Em seguida, será apresentada uma condição necessária e suficiente para caracterizar funções deriváveis em termos das equações de Cauchy-Riemann.

Teorema 2.30. *Uma condição necessária e suficiente para que uma função*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

seja analítica em um domínio D é que as quatro derivadas parciais u_x , u_y , v_x , e v_y existam, sejam contínuas, e satisfaçam as condições de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

em cada ponto de D (ver [3]).

Definição 2.31. Uma função que é holomorfa sobre todo o plano complexo é chamada de função inteira.

Exemplo 2.32. Usando as equações de Cauchy-Riemann será mostrado que a função $f(z) = z^2$ para $z = x + iy$ é inteira.

Temos $f(x + iy) = x^2 + 2ixy - y^2$, de onde obtemos

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad e \quad v(x, y) = 2xy.$$

As derivadas parciais são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x. \end{aligned}$$

Observa-se que as equações de Cauchy-Riemann (2.3) são satisfeitas para todos os valores de z e, além disso, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ são contínuas em todo o plano complexo. Portanto, f é uma função inteira.

2.3.1 Transformações Conformes

Intuitivamente, o ângulo formado pela interseção de duas curvas no plano complexo é equivalente ao ângulo formado pelos vetores tangentes dessas curvas no ponto de interseção. Diz-se que uma transformação $w = f(z)$ preserva os ângulos em um ponto $a \in \mathbb{C}$ se, sempre que tomarmos duas curvas simples arbitrárias no plano complexo que se cruzam no ponto a , o ângulo formado por essas curvas no ponto a é igual ao ângulo formado pelas imagens correspondentes a essas curvas sob f , no ponto $f(a)$. As funções que preservam ângulos em um ponto são chamadas de aplicações conformes nesse ponto. Essa definição será apresentada de modo mais formal nesta seção.

Algumas referências consideradas úteis foram [2, 3, 7].

Definição 2.33. Um arco contínuo C é definido como um conjunto de pontos $z = (x, y)$ no plano complexo, tais que

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad a \leq t \leq b,$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas do parâmetro real t .

É útil descrever os pontos de C por meio da equação

$$z = z(t), \quad a \leq t \leq b, \quad \text{onde } z(t) = x(t) + iy(t).$$

Dizemos que:

1. C é uma curva fechada em $[a, b]$, com $a < b$, se $z(a) = z(b)$.
2. C é uma curva simples se é injetiva em (a, b) .
3. C é regular se $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe, é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e não se anula no intervalo aberto (a, b) .
4. Um contorno é um arco contínuo formado por um número finito de arcos regulares.

Exemplo 2.34. A equação $C(t) = 1 - it$, t número real, pode ser reescrita como uma equação paramétrica de uma reta, $C(t) = (1, 0) + t(0, -1)$. Assim, vemos que a imagem de C é a reta que passa pelo ponto $(1, 0)$ e possui $v = (0, -1)$ por vetor diretor.

Com essas informações, é possível visualizar e entender a posição de C no plano cartesiano (ver a Figura 2.1).

t	$C(t)$
0	1
$1/2$	$1 - i/2$
1	$1 - i$
2	$1 - 2i$

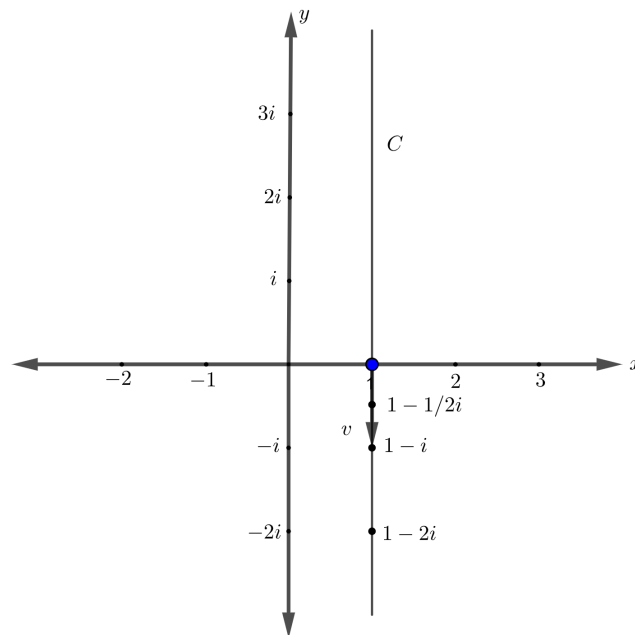


Figura 2.1: Representação geométrica de $C(t) = 1 - it$.

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Exemplo 2.35. Se $C(t) = \cos t + i \sin t$, para $0 \leq t \leq 2\pi$, deseja-se determinar se a curva C é uma curva fechada simples.

Suponha que $C(t_1) = C(t_2)$, onde $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$, então $\cos t_1 + i \sin t_1 = \cos t_2 + i \sin t_2$. Portanto, $\cos t_1 = \cos t_2$ e $\sin t_1 = \sin t_2$.

$$\text{Se } \cos t_1 = \cos t_2, \text{ então } t_1 = t_2, \text{ ou } t_1 + t_2 = 2\pi. \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Se } \sin t_1 = \sin t_2, \text{ então } t_1 = t_2, \text{ ou} \\ (t_1, t_2 \in [0, 2\pi], \text{ e, } t_1 + t_2 = \pi) \text{ ou,} \\ (t_1, t_2 \in [\pi, 2\pi], \text{ e, } t_1 + t_2 = 3\pi). \end{aligned} \quad (2.7)$$

A partir de (2.6) e (2.7), podemos concluir que $t_1 = t_2$ ou $\{t_1, t_2\} = \{0, 2\pi\}$, ou seja, C é simples em $[0, 2\pi]$. Como $C(0) = C(2\pi) = 1$, C é fechada.

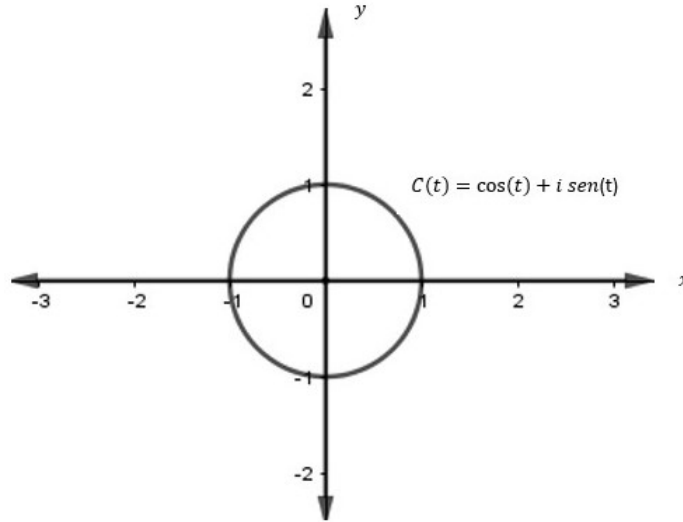


Figura 2.2: Representação geométrica da curva $C(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Além disso, para $t \in [0, 2\pi]$, $|C(t)|^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, o que significa que C representa uma circunferência com centro na origem e raio 1 (ver Figura 2.2).

Em $\mathbb{C}$ temos o produto interno usual:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle w_1, w_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

onde $w_1 = x_1 + iy_1$ e $w_2 = x_2 + iy_2$.

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, dados números complexos $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $w_1 \neq 0$, $w_2 \neq 0$,

$$-1 \leq \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{|w_1||w_2|} \leq 1.$$

Assim, o ângulo entre w_1 e w_2 é definido como sendo

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{|w_1||w_2|} \right) \in [0, \pi].$$

Proposição 2.36. *Sejam $z, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ quaisquer. Então, $\langle zw_1, zw_2 \rangle = |z|^2 \langle w_1, w_2 \rangle$.*

Demonstração. Sejam $z = a + bi$, $w_1 = a_1 + b_1 i$, $w_2 = a_2 + b_2 i$. Então:

$$\begin{aligned} zw_1 &= (aa_1 - bb_1) + (ab_1 + a_1b)i \\ zw_2 &= (aa_2 - bb_2) + (ab_2 + a_2b)i \\ \langle zw_1, zw_2 \rangle &= (aa_1 - bb_1)(aa_2 - bb_2) + (ab_1 + a_1b)(ab_2 + a_2b) \\ &= a^2 a_1 a_2 - a b a_1 b_2 - a b b_1 a_2 + b^2 b_1 b_2 + a^2 b_1 b_2 + a b b_1 a_2 + a b a_1 b_2 + b^2 a_1 a_2 \\ &= (a^2 + b^2) a_1 a_2 + (a^2 + b^2) b_1 b_2 \\ &= (a^2 + b^2) (a_1 a_2 + b_1 b_2) \\ &= |z|^2 \langle w_1, w_2 \rangle. \end{aligned}$$

□

Definição 2.37. Se C_1 e C_2 são duas curvas suaves que tem interseção no ponto $C_1(t_0) = z_0 = C_2(t_0)$, definimos o ângulo entre as curvas C_1 e C_2 no ponto z_0 como sendo o ângulo formado entre $C'_1(t_0)$ e $C'_2(t_0)$, desde que $C'_1(t_0)$ e $C'_2(t_0)$ sejam ambos não nulos, ou seja,

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle C'_1(t_0), C'_2(t_0) \rangle}{|C'_1(t_0)| |C'_2(t_0)|} \right),$$

onde $C'_2(t_0)$ e $C'_1(t_0)$ são os vetores tangentes não nulos de C_2 e C_1 em z_0 .

Definição 2.38. Seja $f(z)$ uma função complexa definida no domínio D e seja z_0 um ponto em D . Dizemos que $f(z)$ é conforme em z_0 se, para cada par de curvas suaves, C_1 e C_2 , em D que tem interseção em z_0 , o ângulo entre C_1 e C_2 em z_0 é igual ao ângulo entre $f \circ C_1$ e $f \circ C_2$ em $f(z_0)$, ou seja,

$$\arccos \left(\frac{\langle C'_1(t_0), C'_2(t_0) \rangle}{|C'_1(t_0)| |C'_2(t_0)|} \right) = \arccos \left(\frac{\langle (f \circ C_1)'(t_0), (f \circ C_2)'(t_0) \rangle}{|(f \circ C_1)'(t_0)| |(f \circ C_2)'(t_0)|} \right)$$

onde $C_1(t_0) = C_2(t_0) = z_0$.

Teorema 2.39. Se f é uma função holomorfa em um domínio D que contém z_0 , e se $f'(z_0) \neq 0$, então $f(z)$ é uma aplicação conforme em z_0 .

Demonstração. Sejam C_1 e C_2 curvas suaves em D , com $z_0 = C_1(t_0) = C_2(t_0)$. Como $f(z)$ é uma função complexa e C é uma curva suave, então $f \circ C$ é a curva correspondente à imagem sob f de C . Portanto, as imagens de C_1 e C_2 por f são as curvas $f \circ C_1$ e $f \circ C_2$.

Deseja-se mostrar que o ângulo θ entre C_1 e C_2 em z_0 é igual ao ângulo ϕ entre $f \circ C_1$ e $f \circ C_2$ em $f(z_0)$.

De acordo com a Definição 2.37, o ângulo entre $f \circ C_1$ e $f \circ C_2$ em $f(z_0)$ é

$$\begin{aligned} \phi &= \arccos \left(\frac{\langle (f \circ C_1)'(t_0), (f \circ C_2)'(t_0) \rangle}{|(f \circ C_1)'(t_0)| |(f \circ C_2)'(t_0)|} \right), \text{ pela Regra da Cadeia, Teorema 2.25} \\ &= \arccos \left(\frac{\langle f'(C_1(t_0))C'_1(t_0), f'(C_2(t_0))C'_2(t_0) \rangle}{|f'(C_1(t_0))C'_1(t_0)| |f'(C_2(t_0))C'_2(t_0)|} \right) \\ &= \arccos \left(\frac{\langle f'(z_0)C'_1(t_0), f'(z_0)C'_2(t_0) \rangle}{|f'(z_0)C'_1(t_0)| |f'(z_0)C'_2(t_0)|} \right), \text{ pela Proposição 2.36} \\ &= \arccos \left(\frac{|f'(z_0)|^2 \langle C'_1(t_0), C'_2(t_0) \rangle}{|f'(z_0)|^2 |C'_1(t_0)| |C'_2(t_0)|} \right) \\ &= \arccos \left(\frac{\langle C'_1(t_0), C'_2(t_0) \rangle}{|C'_1(t_0)| |C'_2(t_0)|} \right) = \theta \end{aligned}$$

igual ao ângulo entre $C'_1(t_0)$ e $C'_2(t_0)$. De acordo com a Definição 2.38, $f(z)$ é conforme em z_0 . $\square$

Exemplo 2.40. A função $g(z) = z^2$ é holomorfa em todo o plano complexo, conforme demonstrado no Exemplo 2.32. Além disso, de acordo com o Teorema 2.39, a função inteira $g(z) = z^2$ é conforme em todos os pontos z , $z \neq 0$, uma vez que $g'(z) = 2z \neq 0$ para $z \neq 0$.

Exemplo 2.41. Suponhamos que desejamos analisar a função $f(z) = e^z$ quanto à sua propriedade de ser uma aplicação conforme em um ponto específico, $z_0 = 1 + i$, no plano complexo.

De acordo com o Teorema 2.39, para que f seja uma aplicação conforme em z_0 , é necessário que a derivada de $f(z)$ em z_0 seja diferente de zero. Portanto, devemos calcular a derivada de $f(z)$ no ponto $z_0 = 1 + i$.

A função $f(z) = e^z$ tem a seguinte derivada:

$$f'(z) = e^z.$$

Agora, calculando a derivada em $z_0 = 1 + i$:

$$f'(1 + i) = e^{1+i} \neq 0.$$

Portanto, de acordo com o Teorema 2.39, podemos concluir que a função $f(z) = e^z$ é uma aplicação conforme em $z_0 = 1 + i$.

2.4 Funções meromorfas

Uma função $f(z)$ é meromorfa num domínio D se $f(z)$ é analítica em D , exceto possivelmente em singularidades isoladas, cada uma das quais é chamada um pólo.

Para compreender o conceito, é necessário entender termos como singularidades e pólos, os quais estão relacionados com o desenvolvimento de sequências e séries. Para mais informações, consulte as referências [7, 8, 9].

2.4.1 Séries

Uma sequência é uma lista ordenada de números, enquanto que uma série é uma soma infinita de termos de uma sequência. Uma série pode ser convergente, quando a soma dos seus termos é finita, ou divergente, quando essa soma é infinita. Formalmente:

Definição 2.42. Uma sequência numérica é uma função do conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ em $\mathbb{C}$,

$$z : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

O número complexo $z(n)$ é chamado de n -ésimo termo ou termo geral da sequência.

Dessa maneira, uma sequência fica expressa através dos pontos $z(0), z(1), z(2), \dots, z(n)$, ou seja, através do conjunto imagem de z , $\{z_n\}$, ($n \in \mathbb{N}$), onde a notação z_n significa $z_n = z(n)$.

Definição 2.43. Uma sequência infinita $\{z_n\}$ de números complexos tem limite z se, para todo número positivo ϵ existe um número natural n_0 tal que

$$|z_n - z| < \epsilon \text{ sempre que } n > n_0.$$

Quando existir o limite e for igual a um número complexo z , diremos que a sequência converge e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

Uma sequência que não possui limite é chamada de divergente.

Definição 2.44. Uma sequência infinita $\{z_n\}$ de números complexos é dita de Cauchy se, para todo número positivo ϵ existe um número natural n_0 tal que

$$|z_n - z_m| < \epsilon \text{ sempre que } m, n > n_0.$$

Teorema 2.45. *Toda sequência de Cauchy de números complexos é convergente.*

Demonstração. Ver [10], p. 165-166. □

Tentando somar os termos de uma sequência de números complexos $\{z_n\}$ se obtém uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n + \dots$$

que é denominada série infinita ou simplesmente série, onde z_n é chamado de termo geral da série.

Vamos considerar a sequência formada pelas somas parciais definida de maneira recursiva como:

$$\begin{aligned} s_0 &= z_0 \\ s_1 &= s_0 + z_1 = z_0 + z_1 \\ s_2 &= s_1 + z_2 = z_0 + z_1 + z_2 \\ &\dots \\ s_n &= s_{n-1} + z_n = (z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1}) + z_n. \end{aligned}$$

Estas somas parciais formam uma nova sequência, a sequência é denotada por s_n , cujo n -ésimo termo é denotado por s_n . Assim, se existir o limite

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n z_i,$$

a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ será dita convergente e o limite s será denominado a soma da série. Caso contrário, ou seja, se a sequência (s_n) for divergente, a série será dita divergente.

Definição 2.46. A série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é dita absolutamente convergente se a série $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ for convergente.

Teorema 2.47. *Se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, então $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge, e*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|.$$

Demonstração. Considere a sequência das somas parciais: $s_0 = z_0$, $s_1 = z_0 + z_1$, etc. Desejamos provar que $\{s_n\}$ é convergente. Para tal, em vista do Teorema 2.45, basta provarmos que $\{s_n\}$ é de Cauchy. Vejamos:

Como, por hipótese, $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ é convergente, existe $q \in \mathbb{C}$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 natural tal que $\left| \sum_{j=0}^n |z_j| - q \right| < \epsilon/2$, sempre que $n > n_0$. Assim, se $m > n > n_0$,

$m = n + k$, com $k \in \mathbb{N}$,

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots + |z_{n+k}| = \left| \sum_{j=0}^{n+k} |z_j| - \sum_{j=0}^n |z_j| \right| \quad (2.8)$$

$$= \left| \left(\sum_{j=0}^{n+k} |z_j| - q \right) + \left(q - \sum_{j=0}^n |z_j| \right) \right| \quad (2.9)$$

$$\leq \left| \sum_{j=0}^{n+k} |z_j| - q \right| + \left| q - \sum_{j=0}^n |z_j| \right| \quad (2.10)$$

$$< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad (2.11)$$

Como $|s_m - s_n| = |z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+k}| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots + |z_{n+k}|$, segue que para $m, n > n_0$, $|s_m - s_n| < \epsilon$. Ou seja, $\{s_n\}$ é de Cauchy.

Portanto, $\{s_n\}$ é convergente.

□

Para mais informações com respeito aos critérios de convergência o leitor pode consultar [1, 2, 4, 8].

Teorema 2.48. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ uma série de números complexos. Se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge então a sequência $\{z_n\}$ converge a 0.*

Demonstração. Considere a sequência das somas parciais: $s_0 = z_0$, $s_1 = z_0 + z_1$, etc. Por hipótese, $\{s_n\}$ converge. Logo, também $\{s_{n-1}\}$ também converge e para o mesmo limite. Veja que $z_n = s_n - s_{n-1}$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0.$$

Observe que utilizamos acima propriedades de limites de sequências. Para mais detalhes, ver [10].

□

A série geométrica

Uma série particularmente importante é a série geométrica, definida da seguinte maneira: Seja $r \in \mathbb{C}$ e consideremos uma série geométrica de razão r :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

A soma parcial de ordem n é dada por $s_n = \sum_{j=0}^n r^j = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$. Podemos observar que

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1} = s_n + r^{n+1} \\ &= 1 + r(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) = 1 + r s_n. \end{aligned}$$

Logo, $(1 - r)s_n = 1 - r^{n+1}$, ou seja, se $r \neq 1$, temos

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Vamos examinar mais detalhadamente a convergência de r^n , $n \geq 1$, onde $r \in \mathbb{C}$ está fixado. Temos três possibilidades:

- $|r| < 1$: Neste caso, $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n = 0$. Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.
- $|r| > 1$: Neste caso, $\left| \frac{1}{r} \right| = \frac{1}{|r|} < 1$. Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} \right)^n = 0$. Daí concluímos que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$.
- $|r| = 1$: Neste caso, r^n , $n \geq 1$, converge se, e somente se, $r = 1$. Suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = a$. Podemos verificar que $|a| = \lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n = 1$. Além disso, temos

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} r r^n = r \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = r a.$$

Como $a \neq 0$, obtemos $r = 1$ e, portanto $a = 1$.

Considerando essas possibilidades, vemos que a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge se, e somente se, $|r| < 1$ e, neste caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Se $|r| \geq 1$, o termo geral r^n não convergirá a 0 e, assim, a série geométrica divergirá. Para futuras referências, consideraremos o resultado estabelecido acima como teorema:

Teorema 2.49. *A série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}.$$

Se $|r| \geq 1$, a série geométrica é divergente.

Determinar o valor da soma de uma série nem sempre é uma tarefa fácil. Contudo, existem alguns testes de convergência que auxiliam na análise das condições que garantem a convergência (ou divergência) de uma série. Para obter informações mais detalhadas sobre esses testes, recomenda-se consultar fontes como [2, 7, 8], por exemplo.

2.4.2 Séries de potências

Séries de funções complexas

Sequências de funções serão consideradas a partir de agora, ou seja, uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ uma função da variável complexa z , $f_n(z)$, definida em um subconjunto de $\mathbb{C}$.

Uma série de funções é uma soma infinita:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots$$

cujos termos f_n são, em geral, funções de uma variável complexa z , todas com um domínio comum de definição.

No caso de uma série convergente, os termos assumem o significado de soma da série, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z)$$

onde s_n é a soma parcial de ordem n :

$$s_n(z) = \sum_{i=0}^n f_i(z).$$

Convergência simples ou pontual

Seja $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ uma série convergente, para todo z num certo conjunto D . Então, dado qualquer $\epsilon > 0$, para cada $z \in D$ existe N tal que

$$\text{se } n \geq N \text{ então } |s(z) - s_n(z)| < \epsilon,$$

onde $s_n(z)$ é a soma parcial.

É importante observar que, em geral, N depende não somente de ϵ mas também do valor z considerado.

Convergência uniforme

Definição 2.50. Diz-se que uma sequência de funções $\{f_n(z)\}$, definidas num mesmo domínio D , converge uniformemente para uma função $f(z)$ se for sempre possível determinar um índice N em correspondência a cada $\epsilon > 0$, tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$, $\forall z \in D$, sempre que $n > N$.

Teorema 2.51. (*Teste M de Weierstrass*) Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ uma série numérica convergente e $f_n(z)$ uma sequência de funções definidas em um conjunto D , satisfazendo a condição $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo n e todo $z \in D$. Então, a série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente em D .

Teorema 2.52. *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

uma série de funções contínuas, uniformemente convergente para f num conjunto D . Então,

1. *f é contínua em D .*
2. *No caso da convergência ser uniforme ao longo de um contorno C , a integral de f sobre C pode ser obtida integrando a série de potências termo a termo.*
3. *Se a convergência é uniforme numa região simplesmente conexa R , onde as funções f_n são analíticas, então f também é analítica em R , e suas derivadas podem ser obtidas derivando a série de potências termo a termo um número conveniente de vezes.*

Dentre as séries de funções, nosso foco será nas séries de potências centradas em z_0 , na forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

onde os coeficientes a_n e o ponto z_0 são constantes complexas. Se a série de potências está centrada em $z_0 = 0$, sua forma se simplifica para: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Teorema 2.53. *A toda série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ está associado um número r , onde $0 \leq r \leq +\infty$, tal que a série converge absolutamente em $|z - z_0| < r$ e uniformemente em qualquer disco $|z - z_0| \leq r' < r$. Ela diverge em $|z - z_0| > r$. O número r é chamado o raio de convergência da série, e o disco de raio r e centro z_0 é denominado disco de convergência.*

Série de Taylor

Aqui, será fornecida uma caracterização das funções analíticas como aquelas que podem ser desenvolvidas em séries de potências.

Teorema 2.54. *Toda série de potências*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (2.12)$$

representa uma função analítica no seu disco de convergência $|z - z_0| < r$. Essa série pode ser derivada termo a termo um número arbitrário de vezes. Além disso, as séries resultantes possuem o mesmo raio de convergência r da série original e representam as derivadas da função f .

Demonstração. Dado um número complexo z qualquer no disco $|z - z_0| < r$, é evidente que existe $r' < r$ tal que $|z - z_0| < r'$. Dentro deste disco, a série (2.12) converge uniformemente de acordo com o Teorema 2.53, permitindo, assim, a derivação termo a termo. Isso é possível devido ao fato de as séries de potências serem somas de polinômios e, como os polinômios são funções contínuas, são analíticos. Assim,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1} \quad (2.13)$$

converge pelo menos no disco $|z - z_0| < r$, o que significa que seu raio de convergência r' é pelo menos igual a r .

Suponhamos que r' poderia ser maior do que r . Seja r'' tal que $r < r'' < r'$ e seja z tal que $r < |z - z_0| < r''$. A série (2.13) converge uniformemente em $r < |z - z_0| < r''$ de acordo com o Teorema 2.53; portanto, pode ser integrada ¹ termo a termo ao longo do caminho C , que conecta z_0 a z com base no Teorema 2.52. Isso resulta em

$$\oint_C \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z).$$

¹Teoria da integração: textos guia; livros [7] e [3], Capítulos 3 e 4, respectivamente.

Esta série deve, então, convergir pelo menos para $|z - z_0| < r''$, o que é uma contradição. Assim, fica provado que as séries (2.12) e (2.13) possuem o mesmo raio de convergência.

Considerando uma série de potências:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

Esta série tem derivada de todas as ordens no disco $|z - z_0| < r$. Isso é uma consequência direta do fato de que $f(z)$ é uma série de potências convergente com raio $r > 0$. Dentro desse raio, a função $f(z)$ é infinitamente diferenciável.

Para encontrar uma k -ésima derivada $f^{(k)}(z)$, começamos derivando termo a termo a série de potências $f(z)$, k vezes. Vamos observar o seguinte padrão:

$$\begin{aligned} f'(z) &= a_1 + 2a_2(z - z_0) + \dots + na_n(z - z_0)^{n-1} + \dots \\ f''(z) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(z - z_0) + \dots + n(n-1)a_n(z - z_0)^{n-2} + \dots \\ f'''(z) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(z - z_0)^{n-3} + \dots \\ &\dots \\ f^{(k)}(z) &= k!a_k + \dots + n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(z - z_0)^{n-k} + \dots \end{aligned}$$

podemos reescrever essa soma como:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(z - z_0)^{n-k}.$$

Portanto, provamos que $f(z)$ tem derivada de todas as ordens no disco $|z - z_0| < r$, e uma k -ésima derivada de $f(z)$ é representada como uma série de potências. $\square$

Teorema 2.55. (Da série de Taylor) *Seja f uma função analítica numa região R , z_0 um ponto qualquer de R , e $r_0 > 0$ tal que o disco $|z - z_0| \leq r_0$ esteja todo contido em R . Então, nesse disco a função f pode ser desenvolvida em série de potências de $z - z_0$. Esse desenvolvimento é conhecido como a série de Taylor da função f em relação ao ponto z_0 , e é dado por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n.$$

No caso em que $z_0 = 0$, essa série é chamada de série de Maclaurin da função f .

Demonstração. Sejam z um ponto qualquer do disco $|z - z_0| < r_0$, e números positivos r , r_1 , com $r = |z - z_0|$, e r_1 tal que $r < r_1 < r_0$. Consideramos C_1 e C como discos centrados em z_0 com raio r_1 e r , respectivamente.

Pela fórmula integral de Cauchy (página 101, livro [7]), podemos escrever:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

onde C_1 é o círculo $|\xi - z_0| = r_1$. Agora, observe que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}, \text{ pela série geométrica, Teorema 2.49} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

multiplicando ambos lados da equação (2.14) por $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$ e integrando ao longo de C_1 , se obtém a expressão de f :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \right) d\xi. \quad (2.15)$$

Como $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = \frac{r}{r_1} < 1$ e $f(\xi)$ é contínua, podemos afirmar que $f(\xi)$ é limitada por uma constante M sobre o círculo C_1 , temos:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \right| \leq \frac{M}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^n \leq \frac{M}{r_1}$$

daqui e de acordo com o Teste M de Weierstrass 2.51, a série em (2.15) converge uniformemente em $\xi \in C_1$. Portanto, podemos integrá-la termo a termo,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right) (z - z_0)^n.$$

Agora, pela fórmula integral de Cauchy para derivadas (página 103 do livro [7]), temos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Este é o desenvolvimento procurado, assim podemos escrever:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (2.16)$$

□

Exemplo 2.56. 1. Consideremos a função exponencial $f(z) = e^z$. Temos o seguinte: $f'(z) = e^z$, $f''(z) = e^z$, ..., $f^n(z) = e^z$ e $f^n(0) = 1$.

Portanto, neste caso, o desenvolvimento de (2.16) com $z_0 = 0$ nos dá a série de Maclaurin da exponencial. Como e^z é analítica para todo valor de z , temos:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \text{ quando } |z| < \infty.$$

2. Vamos expressar o desenvolvimento em série de Taylor da função $f(z) = \frac{1}{1-z}$ com centro no ponto $z_0 = 2i$. Apresentaremos dois métodos para fazê-lo:

(a) Utilizando a série geométrica (Teorema 2.49): Adicionando e subtraindo $2i$ no denominador, obtemos:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z+2i-2i} = \frac{1}{1-2i-(z-2i)} = \frac{1}{1-2i} \frac{1}{1-\frac{z-2i}{1-2i}}.$$

Agora, escrevemos $\frac{1}{1-\frac{z-2i}{1-2i}}$ como uma série de potências usando o Teorema

2.49, com z substituído pela expressão $\frac{z-2i}{1-2i}$ como:

$$1 + \frac{z-2i}{1-2i} + \left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^2 + \dots$$

Portanto, a série de Taylor de $f(z)$ em torno do ponto $z_0 = 2i$ é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-2i} \left[1 + \frac{z-2i}{1-2i} + \left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{1-2i} + \frac{1}{(1-2i)^2}(z-2i) + \frac{1}{(1-2i)^3}(z-2i)^2 + \frac{1}{(1-2i)^4}(z-2i)^3 + \dots \end{aligned}$$

O raio de convergência é $|z-2i| = \sqrt{5}$ pois, para a convergência da série geométrica

$$1 + \frac{z-2i}{1-2i} + \left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^2 + \dots$$

precisamos que $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right| < 1$, resultando em $|z-2i| < \sqrt{5}$.

(b) Utilizando derivadas sucessivas: Derivando $f(z) = \frac{1}{1-z}$, obtemos:

$$f'(z) = (1-z)^{-2}, \quad f''(z) = 2(1-z)^{-3}, \quad f'''(z) = 3 \cdot 2(1-z)^{-4}, \dots$$

generalizando, temos $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$. Substituindo z por $z_0 = 2i$, temos

$f^{(n)}(2i) = \frac{n!}{(1-2i)^{n+1}}$. Portanto, o desenvolvimento em série de Taylor da função f em relação ao ponto $2i$ é dado por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-2i)^{n+1}} (z-2i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-2i} \left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^n,$$

donde recuperamos novamente o raio de convergência $r = \sqrt{5}$.

2.4.3 Série de Laurent

Se uma função f não é analítica em um ponto z_0 , não podemos aplicar o Teorema de Taylor nesse ponto. Além disso, esse ponto é considerado como uma singularidade ou ponto singular da função. Entretanto, é possível encontrar uma representação em série para $f(z)$ que contenha tanto potências positivas quanto negativas de $z - z_0$.

Teorema 2.57. *Seja f uma função analítica numa região anular $G : r < |z - z_0| < R$. Então, para todo z nesta região,*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.17)$$

onde os coeficientes a_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (2.18)$$

sendo C um contorno fechado em G , envolvendo z_0 uma vez no sentido anti-horário.

Demonstração. Sejam r_1 e r_2 tais que $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$.

Designemos por C_1 e C_2 os círculos de centro z_0 e raios r_1 e r_2 , respetivamente, orientados no sentido positivo. Ao conectar C_1 e C_2 por um arco L , obtemos um contorno fechado $\gamma = C_2 + L - C_1 - L$, dentro de uma região onde a função f é regular. De acordo com a fórmula de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

As integrais ao longo de L e $-L$ se cancelam mutuamente; portanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (2.19)$$

Seguindo o método da prova do Teorema 2.55 da mesma maneira, obtemos a série de potências positivas que aparece na equação (2.17), a qual, substituída em (2.19), nos dá

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Quanto a esta última integral, notamos primeiro que

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{(z - z_0) - (\xi - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Vemos que um argumento semelhante é usado na prova do Teorema 2.55. Além disso, esta série converge uniformemente em $\xi \in C_1$, logo,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n}} d\xi. \end{aligned}$$

Escrevendo $n + 1$ como novo índice n , obtemos

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} d\xi.$$

Já que a integral que aparece em (2.18) tem o mesmo valor qualquer que seja o contorno C descrito no teorema, em particular C_1 e C_2 ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} d\xi = a_{-n}.$$

Substituindo em (2.20), obtemos o desenvolvimento dado por (2.17) e (2.18),

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

□

Exemplo 2.58. 1. Vamos expandir $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ em uma série de Laurent válida

para $0 < |z| < 1$. É importante notar que a função f tem duas singularidades isoladas, $z = 0$ e $z = 1$. Nosso objetivo é representar f como uma série que inclui apenas potências inteiras, tanto negativas quanto não negativas, de z .

Podemos escrever $f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-z}$, e utilizar o Teorema 2.49 da série geométrica a fim de expressar f como uma série:

$$f(z) = \frac{-1}{z} (1 + z + z^2 + z^3 + \dots).$$

Observe que a série infinita entre parentêses converge para $|z| < 1$. No entanto, após multiplicarmos essa expressão por $\frac{-1}{z}$, a série resultante é

$$f(z) = \frac{-1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

a qual é convergente quando $0 < |z| < 1$.

2. Vamos expandir a função $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ em uma série de Laurent válida

para $0 < |z-1| < 2$. Novamente, nosso objetivo é expressar a função apenas em termos das potências de $z-1$ e, para isso, precisamos reescrever $z-3$ em relação a $z-1$. Isso pode ser feito escrevendo

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{-2 + (z-1)} = \frac{-1}{2(z-1)^2} \frac{1}{1 - \frac{z-1}{2}},$$

conforme o Teorema 2.49 da série geométrica, substituindo o símbolo z por $\frac{z-1}{2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{2(z-1)^2} \left[1 + \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} + \frac{(z-1)^3}{2^3} + \dots \right] \\ &= -\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}(z-1) - \dots \end{aligned}$$

3. Encontrar a expansão da série de Laurent em torno de $z_0 = 0$ que representa a função $f(z) = \frac{10}{(z+2)(z^2+1)}$ para $1 < |z| < 2$. Ao decompor a função em frações parciais, obtemos:

$$\frac{10}{(z+2)(z^2+1)} = \frac{a}{z+2} + \frac{b}{z+i} + \frac{c}{z-i}$$

onde $a = 2$, $b = -1 + 2i$ e $c = -(1 + 2i)$. Agora, observe que

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad \text{desde que } |z| < 2.$$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{i}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n}{z^{n+1}} \quad \text{desde que } |i| < |z|.$$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{i}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} \quad \text{desde que } |i| < |z|.$$

Portanto,

$$\frac{10}{(z+2)(z^2+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n + (-1+2i) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n}{z^{n+1}} - (1+2i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}}$$

desde que $1 < |z| < 2$.

Expansão em séries de potências no infinito

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa definida em um domínio D tal que $D = \mathbb{C} \setminus K$, onde $K \subset \mathbb{C}$ é um compacto. Isso equivale a dizer que existe $r > 0$ tal que $|z| > r \implies z \in D$. Dizemos que a função $f(z)$ é analítica em $z = \infty$ quando a função $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ é analítica em $w = 0$. Portanto, ao realizar uma mudança de variável, substituindo $w = \frac{1}{z}$, $z = \frac{1}{w}$, estudar o comportamento de $f(z)$ em $z = \infty$ equivale a estudar o comportamento de $g(w)$ em $w = 0$.

Se $f(z)$ é analítica em ∞ , então $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ pode ser expresso como uma série de potências centrada em $w = 0$,

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots, \quad |w| < r.$$

Assim, $f(z)$ pode ser representado por uma série convergente em potências decrescentes de z ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots, \quad |z| > \frac{1}{r}.$$

Essa série converge absolutamente se $|z| > \frac{1}{r}$, e, para qualquer $r' > \frac{1}{r}$, converge uniformemente para $|z| \geq r'$.

Exemplo 2.59. Para $n \geq 0$, $f(z) = \frac{1}{z^n}$ é considerada analítica no ponto $z = \infty$, uma vez que $g(w) = f(1/w) = w^n$ é analítica em $w = 0$.

Zeros de uma Função Analítica

Considere uma função $f(z)$ analítica em z_0 . Então,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

em alguma vizinhança $|z - z_0| < r$. Pode ocorrer que $f(z_0) = 0$, mas $f(z)$ não é identicamente nula. Nesse caso, dizemos que z_0 é um zero da função f .

Se todos os coeficientes a_n se anulam, então f se anula em toda a vizinhança $|z - z_0| < r$. Logo, se f não é identicamente nula nessa vizinhança, deve existir $m > 0$ tal que a_m seja o primeiro coeficiente não nulo, isto é,

$$a_0 = \dots = a_{m-1} = 0 \text{ e } a_m \neq 0,$$

ou seja, de acordo com o Teorema 2.54, $a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$ a fórmula para os coeficientes da série de potências de $f(z)$, tem um zero de ordem m em z_0 se,

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \text{ e } f^{(m)}(z_0) \neq 0,$$

o que ocorre se, e somente se, a expansão em séries de potências de $f(z)$ tem a forma

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + a_{m+2}(z - z_0)^{m+2} + \dots$$

onde $a_m \neq 0$. Colocando em evidência o fator $(z - z_0)^m$ da série de potências, obtemos

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^m (a_m + a_{m+1}(z - z_0) + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \dots) \\ &= (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Ao definir $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n$, concluímos que se z_0 é um zero de ordem m da função f então, numa vizinhança de z_0 ,

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \text{ e } g(z_0) \neq 0,$$

onde $g(z)$ é analítica em z_0 e $g(z_0) = a_m \neq 0$. Um zero de ordem 1 é chamado de zero simples.

Exemplo 2.60. 1. Consideremos a função $f(z) = (z-5)^3$. Ao avaliar $f(5)$, $f'(5)$, $f''(5)$, observamos que $f(5) = 0$, $f'(5) = 0$, $f''(5) = 0$, mas $f'''(5) = 6 \neq 0$. Isso mostra que a função f possui um zero de ordem (ou multiplicidade) 3 em $z_0 = 5$.

2. Vamos considerar a função analítica $f(z) = z \operatorname{sen}(z^2)$, que possui um zero em $z = 0$. Ao substituir z por z^2 na expansão da série de Maclaurin da função $\operatorname{sen} z$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \text{ obtemos:} \\ \operatorname{sen} z^2 &= z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \dots \end{aligned}$$

Ao fatorar z^2 da série anterior, podemos reescrever f da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(z) &= z \left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \dots \right) \\ &= z^3 \left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \dots \right) \\ &= z^3 g(z). \end{aligned}$$

Onde $g(0) = 1$ e $g(z)$ é uma função analítica. Isso mostra que $z = 0$ é um zero de ordem 3 para a função f .

Observação 2.61. Se $f(z)$ é analítica no ∞ e $f(\infty) = 0$, define-se a ordem do zero de $f(z)$ em $z = \infty$ da forma usual, fazendo a mudança de variável $w = \frac{1}{z}$. Portanto, $f(z)$ tem zero em $z = \infty$ de ordem m se $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ tem um zero em $w = 0$ de ordem m . Neste contexto,

$$g(w) = a_m w^m + a_{m+1} w^{m+1} + a_{m+2} w^{m+2} + \dots, \text{ onde } a_m \neq 0.$$

Dessa forma, $f(z)$ tem a representação em séries:

$$f(z) = \frac{a_m}{z_m} + \frac{a_{m+1}}{z_{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{z_{m+2}} + \dots, \quad |z| > R, \text{ onde } a_m \neq 0.$$

2.4.4 Singularidade Isolada

Um ponto z_0 é uma singularidade isolada de $f(z)$, se $f(z)$ for analítica em algum disco perfurado $D(z_0, r) - \{z_0\}$ centrado em z_0 . Por exemplo, a função $f(z) = \frac{1}{z}$ tem uma singularidade isolada em $z = 0$.

Seja z_0 uma singularidade isolada de uma função $f(z)$, de forma que o desenvolvimento de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

seja válido numa certa vizinhança perfurada $0 < |z - z_0| < r$ de z_0 . A parte da série com potências negativas de $z - z_0$, a saber

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

é chamada a parte principal da série. Classificamos a singularidade isolada em z_0 de acordo com o número de termos na parte principal da série, ou seja, se a parte principal da expansão de Laurent contém zero, um número finito ou um número infinito de termos.

1. **Singularidades removíveis.** É possível que todos os coeficientes na parte principal sejam nulos, ou seja, $a_{-n} = 0$ para $n = 1, 2, \dots$. Nesse caso, a função $f(z)$ pode ser representada da seguinte forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

Essa série de potências define uma função analítica em $|z - z_0| < r$, com o valor a_0 no ponto $z = z_0$. Podemos, portanto, definir $f(z_0) = a_0$. Dessa forma, podemos observar que tal singularidade pode ser removida, bastando definir f de maneira apropriada no ponto z_0 .

2. **Singularidade do tipo pólo.** Se a parte principal da série possui um número finito de termos não nulos, ou seja, se existe $m > 0$ tal que $a_m \neq 0$ e $a_{-n} = 0$ para $n > m$, então a função $f(z)$ pode ser expressa da seguinte maneira:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0.$$

Neste caso, z_0 é denominado um pólo de ordem m da função f . Se z_0 é um pólo de ordem 1, é então chamado de pólo simples.

Teorema 2.62. *Seja z_0 uma singularidade isolada de $f(z)$. Então z_0 é um polo de $f(z)$ de ordem n se, e somente se, $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$, onde $g(z)$ é analítica em z_0 e $g(z_0) \neq 0$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $f(z)$ tem um pólo de ordem n em z_0 . Isso implica que $f(z)$ pode ser expandido em uma série de Laurent:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots, \quad (2.21)$$

válido em um certo disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$. Ao fatorar $\frac{1}{(z - z_0)^n}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - z_0)^n} (a_{-n} + \dots + a_{-2}(z - z_0)^{n-2} + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + \\ + a_0(z - z_0)^n + a_1(z - z_0)^{n+1} + \dots), \end{aligned}$$

a equação (2.21) confirma que $f(z)$ pode ser escrito na forma $\frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$. Identificando

$$\begin{aligned} g(z) = a_{-n} + \dots + a_{-2}(z - z_0)^{n-2} + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + \\ + a_0(z - z_0)^n + a_1(z - z_0)^{n+1} + \dots, \end{aligned} \quad (2.22)$$

como uma série de potências válida para o disco aberto $|z - z_0| < R$, por hipótese, z_0 é um pólo de ordem n de f , e, portanto, devemos ter $a_{-n} \neq 0$. Se definirmos $g(z_0) = a_{-n}$, então segue de (2.22) que $g(z)$ é analítica em todo o disco $|z - z_0| < R$.

($\Leftarrow$) Se $g(z)$ é analítica em z_0 e $g(z_0) \neq 0$, então, em alguma vizinhança $|z - z_0| < R$, $g(z)$ escreve-se como

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k,$$

com $b_0 \neq 0$. Logo, $f(z)$ se escreve como

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} = \frac{b_0}{(z - z_0)^n} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \sum_{j=0}^{\infty} b_{n+j}(z - z_0)^j.$$

Portanto, $f(z)$ tem um pólo de ordem n em z_0 . □

3. **Singularidade essencial.** Se a parte principal contém um número infinito de termos não nulos, então $z = z_0$ é chamada de singularidade essencial.

Definição 2.63. Dizemos que uma função $f(z)$ é meromorfa num domínio D se f é analítica em D , exceto possivelmente em singularidades isoladas, cada uma das quais é um pólo.

Observação 2.64. As adições e multiplicações de funções meromorfas também resultam em funções meromorfas. Além disso, os quocientes de funções meromorfas são meromorfos, desde que o denominador não seja igual a zero.

Exemplo 2.65. 1. A função $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ possui uma singularidade isolada em $z = 0$. Vamos examinar o tipo de singularidade apresentada por essa função.

A expressão para a função seno na forma da série de Maclaurin é dada por:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

ao dividir toda a expressão por z , obtemos:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Esta expressão é válida para todos os valores de z . Observamos que todos os coeficientes da parte principal da serie de Laurent são iguais a zero, ou seja, $a_{-n} = 0$ para $n = 1, 2, \dots$. Concluimos que $z = 0$ é uma singularidade removível.

Além disso, a função $f(z)$ pode ser estendida para ser uma função inteira, definindo $f(0) = 1$. Dessa forma, a função é bem definida e contínua em todo o plano complexo. De fato, f também é analítica em $z = 0$ porque é representada pela série de Taylor centrada em zero:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

uma série de Maclaurin.

2. Pensando na série de Maclaurin associada à função $f(z) = \operatorname{sen} z$, que foi usada como exemplo anteriormente, agora realizamos uma divisão por z^2 , resultando na seguinte expressão:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots \quad \text{para } 0 < |z| < \infty.$$

Assim, ao examinarmos a parte principal da série de Laurent da função, podemos observar que o coeficiente $a_{-1} = 1 \neq 0$. Isso nos leva a concluir que $z = 0$ é um polo de ordem 1 (simples) da função $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$.

3. A função $f(z) = e^{3/z}$ apresenta uma singularidade no ponto $z = 0$. Inicialmente, considerando a série de Maclaurin da função e^z ,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

agora ao substituir z por $3/z$, se obtém

$$f(z) = e^{3/z} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{2!z^2} + \frac{3^3}{3!z^3} + \dots, \quad \text{válida para } 0 < |z| < \infty.$$

Essa representação é a expansão da série de Laurent da função $f(z)$. Como essa expansão inclui infinitos termos negativos de potências de z , podemos concluir que a singularidade isolada em $z = 0$ da função $f(z)$ é essencial.

4. A função $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ é meromorfa no plano complexo. Podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z - i)(z + i)}.$$

A função possui singularidades isoladas em $z = -i$ e $z = i$. Conforme o Teorema 2.62, tanto i e $-i$ são pólos. Portanto, podemos concluir que $f(z)$ é meromorfa em todo o plano complexo.

2.4.5 Singularidades Isoladas no Infinito

Uma função $f(z)$ possui uma singularidade isolada no ∞ se for analítica fora de algum conjunto limitado. Em outras palavras, existe $R > 0$ tal que $f(z)$ é analítica para $|z| > R$. Assim, $f(z)$ tem uma singularidade isolada no ∞ se, e somente se, $g(w) = f(1/w)$ tem uma singularidade isolada em $w = 0$. Classificamos a singularidade isolada de $f(z)$ no ∞ de acordo com a singularidade isolada de $g(w)$ em $w = 0$.

Suponha que $f(z)$ tem uma expansão em série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad |z| > R.$$

- A singularidade de $f(z)$ no ∞ é removível se $a_n = 0$ para todo $n > 0$.
Caso em que $f(z)$ é analítica no ∞ .
- A singularidade de $f(z)$ no ∞ é essencial se $a_n \neq 0$ para infinitos $n > 0$.
- Para $m \geq 1$ fixo, $f(z)$ tem um pólo de ordem m no ∞ se $a_m \neq 0$ enquanto $a_n = 0$ para $n > m$.

Suponha que $f(z)$ tem um pólo de ordem m no ∞ . Nesse caso, a expansão em série de Laurent de $f(z)$ é dada por:

$$f(z) = a_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \dots, \quad |z| > R$$

onde $a_m \neq 0$.

Podemos definir a parte principal de $f(z)$ no ∞ como um polinômio

$$P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0.$$

Incluir a constante a_0 na parte principal é conveniente, pois garante que $f(z) - P(z)$ não é apenas analítica em ∞ , mas também se anula lá.

Exemplo 2.66. Vamos verificar se a função $f(z) = e^z$ tem uma singularidade essencial no ∞ . A expressão em série de Maclaurin de $f(z)$ é dada por:

$$f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots.$$

A função $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = 1 + \frac{1}{w} + \frac{1}{2!w^2} + \frac{1}{3!w^3} + \dots$ tem uma singularidade essencial em $w = 0$, uma vez que apresenta infinitas potências negativas na expansão e, além disso, tem um número infinito de termos não nulos. Portanto, podemos concluir que a singularidade de $f(z)$ no ∞ é essencial.

3 Esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$

3.1 Plano complexo estendido

Este capítulo começa apresentando uma relação entre a esfera de Riemann e o plano complexo, através da projeção estereográfica.

É conveniente ampliar o conjunto de números complexos, introduzindo o símbolo ∞ , chamado de ponto infinito. Uma vez introduzido esse elemento, que não é um número complexo, a aritmética com os números complexos é definida por: $a + \infty = \infty + a = \infty$ para todo a complexo, e $b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty$ para todo $b \neq 0$, incluindo $b = \infty$. Não se pode definir as operações $\infty \pm \infty$ e $0 \cdot \infty$. No entanto, deve ser escrito, por acordo especial, $\frac{a}{0} = \infty$ para $a \neq 0$ e $\frac{b}{\infty} = 0$ para $b \neq \infty$. A elaboração desta seção se beneficiou da consulta das fontes [2, 9, 11, 12].

O conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, denotado por $\overline{\mathbb{C}}$, é chamado plano complexo estendido.

A maneira de visualizar ∞ é com a esfera de Riemann, com projeções estereográficas: Considere a esfera de Riemann de raio um.

$$S^2 := \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 : \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\}.$$

O plano complexo denotado como:

$$\mathbb{C} := \{(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

O ponto $N = (0, 0, 1)$ é chamado de pólo norte da esfera de Riemann (ver Figura 3.1).

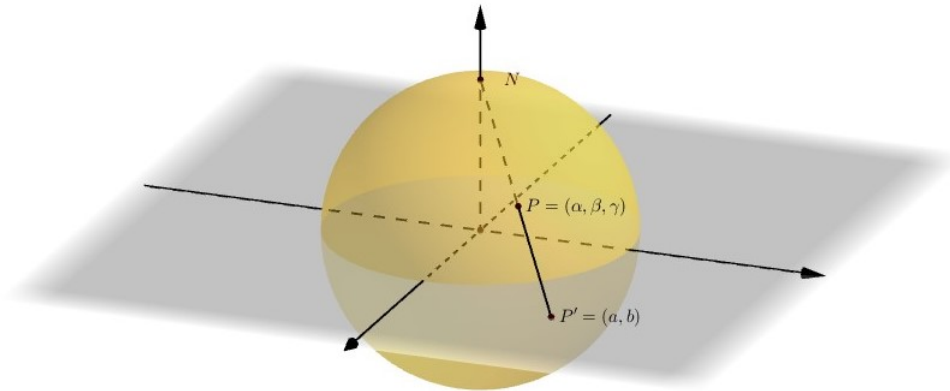


Figura 3.1: Projeção estereográfica
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Traçando uma linha reta unindo o ponto N e qualquer ponto $P \neq N$ da esfera, esta linha reta intersecta o plano complexo em apenas um ponto P' , onde sua terceira coordenada é, portanto, zero. Assim, convencionamos denotar P' simplesmente por (a, b) , de maneira que para cada ponto $P(\alpha, \beta, \gamma)$ da esfera, um único ponto é associado, $P'(a, b)$ do plano complexo. Reciprocamente, a linha reta que une o ponto N e qualquer ponto P' do plano complexo intersecta a esfera em um ponto $P \neq N$ de uma forma única.

Esta construção estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos da esfera menos o pólo norte com os pontos do plano complexo.

Em suma, o conceito inicial consiste em estabelecer uma transformação bijetora dos pontos da esfera que não incluem o ponto N para o plano complexo $\mathbb{C}$. Contudo, a abordagem intuitiva busca incorporar o ponto N no âmbito da transformação. Nesse sentido, quando um ponto P se aproxima de N , a linha reta que passa por P e N tende a tornar-se tangente à esfera S^2 no ponto N , resultando em uma situação em que não há interseção com o plano complexo, uma interpretação que pode ser considerada como uma interseção no "infinito". Por essa razão, a proposta é expandir o plano complexo, adicionando um elemento que será denominado infinito, criando assim um novo conjunto denominado plano complexo estendido $\overline{\mathbb{C}}$. A projeção estereográfica é inicialmente definida entre $S^2 - \{N\}$ e $\mathbb{C}$, podendo ser estendida para uma função bijetora entre S^2 e $\overline{\mathbb{C}}$, atribuindo ao ponto $N \in S^2$ o ponto $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

Esta aplicação $T : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$, é chamada de projeção estereográfica. Formalmente, queremos ver como esta aplicação é definida. Seja $P = (\alpha, \beta, \gamma) \in S^2 - \{N\}$, e considere a reta que passa por N e P :

$$\begin{aligned} X &= N + t(P - N), \quad t \in \mathbb{R} \\ (a, b, c) &= (0, 0, 1) + t((\alpha, \beta, \gamma) - (0, 0, 1)), \quad t \in \mathbb{R} \\ &= (t\alpha, t\beta, 1 + t(\gamma - 1)), \quad t \in \mathbb{R} \\ a &= t\alpha, \quad t \in \mathbb{R} \\ b &= t\beta, \quad t \in \mathbb{R} \\ c &= 1 + t(\gamma - 1), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

isolando t , terá

$$t = \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c - 1}{\gamma - 1}.$$

Quando $c = 0$, esta linha reta intercepta o plano complexo no ponto $z = (a, b)$. Então $t = \frac{1}{1 - \gamma}$, logo as coordenadas teriam a seguinte forma,

$$a = \frac{\alpha}{1 - \gamma}, \quad b = \frac{\beta}{1 - \gamma}, \quad c = 1 + \left(\frac{1}{1 - \gamma} \right)(\gamma - 1) = 0.$$

Portanto, a aplicação $T : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$T(\alpha, \beta, \gamma) = (a, b) = \left(\frac{\alpha}{1 - \gamma}, \frac{\beta}{1 - \gamma} \right). \quad (3.1)$$

Agora, será observado, de forma recíproca, como a projeção estereográfica atua para identificar os elementos do plano complexo em direção à esfera e, assim, obtemos a aplicação inversa da projeção estereográfica, como segue:

$$T^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S^2 - \{N\},$$

por (3.1) tem-se que, $a = \frac{\alpha}{1-\gamma}$, $b = \frac{\beta}{1-\gamma}$, logo

$$\alpha = a(1-\gamma), \beta = b(1-\gamma). \quad (3.2)$$

Se $\alpha^2 = a^2(1-\gamma)^2$, $\beta^2 = b^2(1-\gamma)^2$, então

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (a^2 + b^2)(1-\gamma)^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (a^2 + b^2)(1-\gamma)^2 + \gamma^2 \\ 1 &= (a^2 + b^2)(1-\gamma)^2 + \gamma^2 \\ 1 - \gamma^2 &= (a^2 + b^2)(1-\gamma)^2 \\ 1 + \gamma &= (a^2 + b^2)(1-\gamma) \\ 1 + \gamma &= a^2 + b^2 - \gamma(a^2 + b^2) \\ \gamma(1 + (a^2 + b^2)) &= a^2 + b^2 - 1 \\ \gamma(1 + a^2 + b^2) &= a^2 + b^2 - 1 \\ \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1}, \end{aligned}$$

substituindo γ em (3.2) tem-se que

$$\alpha = \frac{2a}{a^2 + b^2 + 1} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Seja $z = a + ib$, $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ e $|z|^2 = a^2 + b^2$, logo

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2a}{a^2 + b^2 + 1} = \frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1} = \frac{(z + \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \\ \beta &= \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1} = \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1} = \frac{(z - \bar{z})}{i(|z|^2 + 1)}, \\ \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Portanto, a aplicação inversa $T^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{N\}$, é dada por:

$$T^{-1}(a, b) = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} \right).$$

Assim, os elementos da esfera estão sob a função inversa da projeção estereográfica. Com isso, determinou-se que a projeção é uma aplicação sobrejetiva. Além disso, esta função inversa pode ser descrita de forma complexa assim:

$$T^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Observação 3.1. $\overline{\mathbb{C}}$ é chamado plano complexo estendido e definido como $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, onde ∞ é chamado o ponto no infinito. Fazendo a extensão $T : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ pela bijeção $T : S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ definindo $T(N) = \infty$.

Pode-se observar graficamente que os pontos P em S^2 próximos a N correspondem sob T a números complexos $P' = (a, b) = z$ com $|z|$ grande, de modo que o ponto P' está se aproximando ao ∞ . Agora, se o ponto P está próximo ao polo sul de S^2 , ou seja, próximo ao ponto $(0, 0, -1)$, esse ponto irá corresponder a um número complexo z , onde $|z|$ é pequeno. Já os pontos do equador de S^2 corresponderão a pontos do círculo unitário, que é constituído dos $z \in \mathbb{C}$, onde $|z| = 1$.

3.1.1 Compacidade

Diz-se que uma coleção A de subconjuntos de um espaço X é uma cobertura de X se a união dos elementos de A for igual a X . É chamada uma cobertura aberta de X se seus elementos forem subconjuntos abertos de X .

Definição 3.2. Um espaço topológico X é compacto se toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita, ou seja, sempre que uma família de abertos cuja união é X , então existe uma subfamília finita cuja união também é X .

Teorema 3.3. *Dado um espaço métrico X , este é compacto se, e somente se, toda sequência infinita $x_1, x_2, x_3, \dots$ de pontos em X possui uma subsequência convergente para X , ou seja, existe uma subsequência $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$ com $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} \in X$.*

Demonstração. Ver [10], pág. 222, Proposição 7. □

O Teorema de Heine-Borel afirma que um subespaço X de $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, for fechado e limitado. Formalmente:

Teorema 3.4. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Então X é compacto se, e somente se, X é fechado em $\mathbb{R}^n$ e é limitado.*

Por exemplo, a S^2 é compacta, uma vez que cumpre as condições do Teorema de Heine-Borel.

Outras propriedades importantes sobre compacidade são as seguintes, as quais podem ser encontradas em [5] ou [6]:

Proposição 3.5. *Sejam X um espaço topológico e seja $Y \subset X$ um subespaço. Se X é compacto e Y é fechado em X então Y é compacto.*

Proposição 3.6. *Se M é um espaço métrico e $X \subset M$ é um subespaço compacto então X é fechado em M .*

Com ajuda da projeção estereográfica, definiremos uma topologia para $\overline{\mathbb{C}}$, como se segue.

Da Topologia, temos o conceito de topologia quociente: Dado um espaço topológico X , um conjunto Y e uma função sobrejetora $f : X \rightarrow Y$, a topologia quociente determinada pela f , que é uma topologia para Y , é dada pelo seguinte: $V \subset Y$ é declarado um aberto de Y se, e somente se, $f^{-1}(V)$ é aberto no espaço topológico X (ver [5]).

Assim, consideraremos em $\overline{\mathbb{C}}$ a topologia quociente determinada pela projeção estereográfica estendida, $T : S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$.

Teorema 3.7. *Com a topologia dada acima, T se torna um homeomorfismo.*

Demonstração. Como a topologia em $\overline{\mathbb{C}}$ é a topologia quociente determinada por T , T é automaticamente contínua.

Agora, basta mostrarmos que T é também aberta. Seja $U \subset S^2$ um aberto qualquer. Temos que $T(U)$ é aberto em $\overline{\mathbb{C}}$ se, e somente se, $T^{-1}(T(U))$ é aberto em S^2 . Mas, uma vez que T é bijeção, $T^{-1}(T(U)) = U$, o qual foi tomado aberto em S^2 . Portanto, T é também aberta.

Logo, T é um homeomorfismo. □

Teorema 3.8. *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto (ver [13]).*

Corolário 3.9. $\overline{\mathbb{C}}$ é compacto.

Demonstração. Pelo Teorema de Heine-Borel, S^2 é compacto. Como T é contínua e $\overline{\mathbb{C}} = T(S^2)$, conclui-se que $\overline{\mathbb{C}}$ é compacto. $\square$

Dados $r > 0$ e $z_0 \in \mathbb{C}$, definimos a vizinhança básica U_{r,z_0} do infinito em $\overline{\mathbb{C}}$ por

$$U_{r,z_0} = (\mathbb{C} - \overline{D_r(z_0)}) \cup \{\infty\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\} \cup \{\infty\}, \quad z_0 \in \mathbb{C}, \quad r > 0.$$

Observação 3.10. Pode-se mostrar que os conjuntos abertos de $\overline{\mathbb{C}}$ são dos seguintes dois tipos:

1. Conjuntos abertos em $\mathbb{C}$, e
2. $\overline{\mathbb{C}} \setminus K = (\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$, onde $K \subset \mathbb{C}$ é um subconjunto compacto.

De fato, como $T : S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ é um homeomorfismo, ele induz uma correspondência biunívoca entre os abertos de S^2 e os abertos de $\overline{\mathbb{C}}$. Como $S^2 \setminus \{N\}$ é aberto em S^2 , segue que $\mathbb{C} = T(S^2 \setminus \{N\})$ é aberto em $\overline{\mathbb{C}}$. Logo, se $A \subset \mathbb{C}$ é um aberto de $\mathbb{C}$, como $\mathbb{C}$ é aberto em $\overline{\mathbb{C}}$, A é aberto em $\overline{\mathbb{C}}$. Agora, suponha A um aberto de $\overline{\mathbb{C}}$ tal que $\infty \in A$. Então, $K = \overline{\mathbb{C}} \setminus A \subset \mathbb{C}$. Ademais, K é fechado em $\overline{\mathbb{C}}$, uma vez que A é aberto. Então, $L = T^{-1}(K)$ é fechado em S^2 . Como S^2 é compacto, L é compacto. Logo, $K = T(L)$ é compacto. Portanto, $A = \overline{\mathbb{C}} \setminus K = (\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$, com onde $K \subset \mathbb{C}$ é um subconjunto compacto.

Teorema 3.11. *Toda sequência infinita em $\overline{\mathbb{C}}$ tem uma subsequência convergente.*

Demonstração. É uma consequência do fato de S^2 ser um espaço métrico compacto (garantido pelo Teorema de Heine-Borel), do Teorema 3.3, e do fato de $\overline{\mathbb{C}}$ ser homeomorfo a S^2 . $\square$

3.2 Comportamento de funções no infinito

Conceitos como a analiticidade, meromorfismo, entre outros, no conjunto de números complexos são definidos em conjuntos (domínios) que não contêm o ponto no infinito. O objetivo nesta seção é definir tais conceitos incluindo o ponto no infinito. Para isso, utilizaremos a transformação $J(z) = \frac{1}{z}$ definida em $\overline{\mathbb{C}}$ assim:

$$\begin{aligned} J : \overline{\mathbb{C}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ 0 &\longmapsto \infty \\ \infty &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

Observe-se que J é uma involução (é injetiva e sobrejetiva, e J^2 é a identidade).

Seja $P = z = a + ib \in \mathbb{C} - \{0\}$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $P^* = J(z) = z^{-1} = \frac{a - ib}{z\bar{z}}$.

Então o ponto $Q = T^{-1}(P) \in S^2$ tem as correspondentes coordenadas em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} T^{-1}(P) = T^{-1}(a, b) &= \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{2a}{z\bar{z} + 1}, \frac{2b}{z\bar{z} + 1}, \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \right) \\ &= (\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned}$$

e as coordenadas de $Q^* = T^{-1}(P^*)$ são:

$$T^{-1}(P^*) = T^{-1}(J(z)) = T^{-1}\left(\frac{a}{z\bar{z}}, \frac{-b}{z\bar{z}}\right) = (\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$$

fazendo um desenvolvendo nas coordenadas:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \frac{2\left(\frac{a}{z\bar{z}}\right)}{\left(\frac{a}{z\bar{z}}\right)^2 + \left(\frac{-b}{z\bar{z}}\right)^2 + 1} = \frac{2a(z\bar{z})^{-1}}{(z\bar{z})^{-1} + 1} = \frac{2a}{1 + z\bar{z}} = \alpha, \\ \beta^* &= \frac{2\left(\frac{-b}{z\bar{z}}\right)}{\left(\frac{a}{z\bar{z}}\right)^2 + \left(\frac{-b}{z\bar{z}}\right)^2 + 1} = \frac{-2b(z\bar{z})^{-1}}{(z\bar{z})^{-1} + 1} = \frac{-2b}{1 + z\bar{z}} = -\beta, \\ \gamma^* &= \frac{\left(\frac{a}{z\bar{z}}\right)^2 + \left(\frac{-b}{z\bar{z}}\right)^2 - 1}{\left(\frac{a}{z\bar{z}}\right)^2 + \left(\frac{-b}{z\bar{z}}\right)^2 + 1} = \frac{(z\bar{z})^{-1} - 1}{(z\bar{z})^{-1} + 1} = \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} = -\gamma. \end{aligned}$$

A transformação $J(z) = \frac{1}{z}$ atua sobre os pontos na esfera de Riemann, gerando uma nova transformação, $T^{-1}JT$. Essa transformação representa uma rotação da esfera de Riemann S^2 em torno de um eixo específico, denominado eixo α , por um ângulo π radianos, equivalente a 180 graus.

Isso implica que a transformação $T^{-1}JT$ leva cada ponto $Q = (\alpha, \beta, \gamma)$ na esfera de Riemann S^2 a um ponto $Q^* = (\alpha, -\beta, -\gamma)$ na mesma esfera, onde as coordenadas β e γ são invertidas tornando-se $-\beta$ e $-\gamma$, enquanto a coordenada α permanece inalterada. Essa operação é análoga a uma rotação da esfera em torno do eixo α , resultando em uma mudança de 180 graus no plano.

Essa descrição ilustra a aplicação $T^{-1}JT$ na esfera de Riemann e sua interpretação geométrica como uma rotação em torno do eixo α por um ângulo de π radianos. Por conveniência, será feita referência a essa rotação como a função J ao invés de $T^{-1}JT$.

Suponha que a função $f(z)$ esteja definida em um domínio $D \setminus \{\infty\}$, onde D é uma vizinhança de ∞ em $\bar{\mathbb{C}}$. Em outras palavras, $f(z)$ é uma função válida em números complexos, exceto aqueles que estão suficientemente distantes do infinito.

Para estender o domínio de $f(z)$ e incluir o infinito, propomos definir $f(\infty)$ como sendo $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$, sempre que o limite existir. Quando estendemos o domínio da

função f para incluir o infinito, ela se torna contínua no infinito, desde que o limite seja um valor finito, ou seja, se existe e é finito

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} f(z^{-1}) = \lim_{z \rightarrow 0} (f \circ J)(z).$$

A função $f(z)$ é considerada analítica, meromorfa e possui outras propriedades semelhantes no ∞ , desde que essas propriedades sejam satisfeitas após a aplicação $f \circ J$ e cumpram a propriedade correspondente em 0.

Exemplo 3.12. 1. Dada a função $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$, desejamos analisar sua analiticidade nos pontos 0 e ∞ e determinar a ordem de seus zeros nestes pontos.

Para avaliar a função no ∞ , realizamos a substituição das variáveis, $z = \frac{1}{w}$, onde w se aproxima de 0 (correspondendo a z se aproximando de ∞).

$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w^2}{1 + w^2}$, conforme w se aproxima a 0, $f\left(\frac{1}{w}\right)$ se aproxima ao 0 devido ao termo w^2 . Como $g(w) = \frac{w^2}{1 + w^2} = w^2 \frac{1}{1 + w^2} = w^2 h(w)$, com $h(0) \neq 0$, temos que g possui um zero de ordem 2 em $w = 0$. Consequentemente, $f(z)$ tem um zero de ordem 2 em ∞ .

2. Considere $f(z) = z^3$. Veremos que a função $f(z)$ é meromorfa no ∞ e vamos determinar a ordem do pólo.

Para realizar esta análise, estudaremos o comportamento de $g(w) = f(1/w)$ em $w = 0$. Ao considerar $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^3}$, observamos que a função $g(w)$ tem uma singularidade isolada em $w = 0$. De acordo com o Teorema 2.62, essa singularidade é um pólo de ordem 3. Consequentemente, pela Definição 2.63, concluímos que $g(w)$ é meromorfa com um pólo de ordem 3 em $w = 0$. Portanto, podemos afirmar que $f(z)$ é uma função meromorfa no ∞ com um pólo de ordem 3 nesse ponto.

Com base nessa informação, é possível estender alguns teoremas que são válidos para funções definidas em $\mathbb{C}$ para funções definidas em $\bar{\mathbb{C}}$.

Teorema 3.13. *Seja f analítica numa região R de $\mathbb{C}$, com zeros numa sequência de pontos z_i , a qual tende ao limite $z^* \in R$. Então f é identicamente nula em R .*

Demonstração. Como f é uma função analítica em R , é também contínua em R . Portanto, $\lim_{i \rightarrow \infty} f(z_i) = f\left(\lim_{i \rightarrow \infty} z_i\right) = f(z^*) = 0$, devido a convergência dos zeros z_i para z^* .

Suponha, por contradição, que f não seja identicamente nula em R . Então, pode-se expandir f em uma série de potências em torno de z^* :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z^*)^n,$$

na qual nem todos os coeficientes a_n são nulos. Suponha que o primeiro coeficiente não nulo na série é a_m , ou seja, $a_m \neq 0$ e $a_n = 0$ para $n < m$. Se a_m é o primeiro coeficiente não nulo na série, então podemos expressar a função $f(z)$ em termos de $(z - z^*)^m$ e de uma função analítica $g(z)$ da seguinte forma

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z^*)^n = (z - z^*)^m g(z),$$

onde $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k}(z - z^*)^k$ é analítica em R e $g(z^*) = a_m \neq 0$.

Dado que $g(z^*) = a_m \neq 0$, $|g(z^*)| = 2\epsilon$, para algum $\epsilon > 0$. Devido a continuidade de $|g(z)|$, existe um $\delta > 0$ tal que se $|z - z^*| < \delta$ então $||g(z)| - |g(z^*)|| < \epsilon$. Portanto, no disco $|z - z^*| < \delta$,

$$|g(z^*)| - \epsilon < |g(z)| < |g(z^*)| + \epsilon,$$

e isso implica que $|g(z)| > |g(z^*)| - \epsilon = 2\epsilon - \epsilon = \epsilon > 0$ neste disco. Assim, $f(z) \neq 0$ num disco com centro z^* , o que contradiz a hipótese de que z^* é um ponto limite de zeros de f .

Portanto, f é identicamente nula em R . $\square$

Teorema 3.14. *Seja f uma função analítica sobre uma região R de $\overline{\mathbb{C}}$. Se f tem zeros em uma sequência infinita de pontos z_n em R , com o limite $z^* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ em R , então f é identicamente nula em R .*

Demonstração. Considere o caso em que $z^* \neq \infty$. Da convergência de z_n a z^* , tomando, por exemplo, $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies |z_n - z^*| < 1$. Logo, para todo $n > n_0$, $z_n \neq \infty$. Portanto, omitindo um número finito de termos, podemos supor que $z_n \in \mathbb{C}$ para todo n .

Considere $R' = R - \{\infty\}$, que é uma região em $\mathbb{C}$. De fato, uma vez que R é uma região de $\overline{\mathbb{C}}$, R é uma parte que é aberta, não vazia e conexa de $\overline{\mathbb{C}}$. Ao remover o elemento ∞ de R , ainda temos uma parte de $\mathbb{C}$ que é aberta, não vazia e conexa, o que significa que R' também é uma região em $\mathbb{C}$. Agora, se f é analítica em R' e temos zeros em uma sequência infinita de pontos $z_n \in R'$ que convergem para um ponto $z^* \in R'$, então de acordo com o Teorema 3.13, a função f deve ser identicamente nula em R' .

Se $\infty \notin R$, isso significa que $R = R'$ e o resultado está provado, pois a função f é identicamente igual a zero em R' , que é a mesma região.

Se $\infty \in R$, então existe $r > 0$ tal que $|z| > r \implies z \in R$ (ver Observação 3.10). Considere uma sequência $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}$ tal que $|w_n| > r + n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f é analítica em ∞ , f é, em particular, contínua em ∞ e, portanto, $f(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$, uma vez que $w_n \in R'$, para todo n e $f(w) = 0$, para todo $w \in R'$. Logo, f é identicamente nula em R .

Agora, suponha que $z^* = \infty$. Excluindo-se um número finito de termos se preciso for, pode-se supor que $z_n \neq 0$, para todo n . Considere a região $\tilde{R} = R - \{0\}$, a qual contém $z^* = \infty$, e seja $R^* = \{z^{-1} | z \in \tilde{R}\}$ (que conterà o 0). Então, $w_n = 1/z_n$ é uma sequência em R^* . Como f é analítica na região $\tilde{R} = R - \{0\}$, a função $f \circ J$ é analítica na região $R^* = \{z^{-1} | z \in \tilde{R}\}$, onde $J : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ é como já definido anteriormente: $J(z) = z^{-1}$ se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $J(0) = \infty$ e $J(\infty) = 0$. Veja que w_n é uma sequência de zeros de $f \circ J$ em R^* e $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0 \in R^*$. Logo, pelo Teorema 3.13, $f \circ J$ é identicamente nula em R^* e, consequentemente, f é identicamente nula em $\tilde{R} = R - \{0\}$.

Se $0 \notin R$ isso implica que $R = \tilde{R}$ e o resultado está provado, pois f é identicamente igual a zero em $\tilde{R}$.

Se $0 \in R$ então, devido à continuidade, $f(0) = 0$. Portanto, f é identicamente igual a zero em R . $\square$

Apresentamos como é possível ampliar o infinito no domínio da função f . De maneira semelhante, podemos incluir ∞ na imagem de f : se f é uma função meromorfa em um ponto $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ e possui um pólo nesse ponto z_0 (ou seja, $(z - z_0)^k f(z)$ é uma função analítica em z_0 para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$), podemos então definir $f(z_0) = \infty$. Assim, os

pólos de f correspondem aos zeros de $J \circ f$. Definimos $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ como sendo meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ se é meromorfa em cada $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Temos imediatamente:

- Se f é meromorfa em $\overline{\mathbb{C}}$, então f é contínua sobre $\overline{\mathbb{C}}$.
- Cada função constante $f(z) = k \in \mathbb{C}$ é meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$. Entretanto, é importante notar que a função constante $f(z) = \infty$ não é considerada meromorfa em $\overline{\mathbb{C}}$. Isso ocorre porque a condição para uma função ser meromorfa é que ela seja analítica em todos os pontos, exceto aqueles onde ocorre um pólo. No caso de uma função constante igual a ∞ , ela não atende essa condição, pois não é analítica em todos os pontos do domínio $\overline{\mathbb{C}}$. Portanto, a função constante $f(z) = \infty$ não se enquadra na categoria de funções meromorfas em $\overline{\mathbb{C}}$.
- As funções meromorfas sobre $\overline{\mathbb{C}}$ possuem a seguinte propriedade de fechamento: se f e g são meromorfas sobre $\overline{\mathbb{C}}$ então também o são $f \pm g$, fg e f/g , desde que g não seja identicamente nula.

Definição 3.15. Suponha que f seja analítica em $z_0 \in \mathbb{C}$, com $f(z_0) = c \in \mathbb{C}$. Se f não é constante, então existe um $n \geq 1$ para o qual $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, e chamamos o menor desses n de multiplicidade da solução de $f(z) = c$ em $z = z_0$. Isso significa que podemos escrever $f(z)$, próximo a $z = z_0$, como a soma infinita

$$f(z) = c + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j,$$

onde $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Se f é meromorfa em $z_0 \in \mathbb{C}$, com um pólo de ordem n em z_0 , dizemos que $f(z_0) = \infty$ possui multiplicidade n . Nesse caso, podemos expressar $f(z)$ próximo de $z = z_0$ como a seguinte série infinita

$$f(z) = \sum_{j=-n}^{\infty} a_j (z - z_0)^j,$$

onde a_j são constantes e $a_{-n} \neq 0$, e chamaremos $\sum_{j=-n}^{-1} a_j (z - z_0)^j$ de parte principal de f em z_0 .

Da mesma forma, se $z_0 = \infty$, dizemos que $f(\infty) = c$ possui multiplicidade n se $(f \circ J)(0) = c$ possui multiplicidade n .

Por exemplo, se f tem um pólo de ordem n em ∞ , significa que $f \circ J$ possui um pólo de ordem n em 0 e, portanto, próximo a 0 , $f \circ J$ se escreve na forma

$$f \circ J(w) = f(1/w) = \sum_{j=-n}^{\infty} b_j w^j,$$

onde $b_{-n} \neq 0$. Escrevendo $z = 1/w$, temos que para z próximo a ∞ ,

$$f(z) = \sum_{j=-n}^{\infty} b_j \left(\frac{1}{z}\right)^j = \sum_{j=-\infty}^n a_j z^j,$$

onde $a_j = b_{-j}$, $a_n \neq 0$. Chamamos $\sum_{j=1}^n a_j z^j$ de parte principal de f no ∞ .

Ainda, pontos com multiplicidade 1 são chamados de pontos simples e pontos com multiplicidade $n > 1$ são chamados pontos múltiplos.

Teorema 3.16. *Uma função $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ é racional, se e somente se, ela é meromorfa em $\overline{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que f seja uma função racional, ou seja, existem dois polinômios $p(z)$ e $q(z)$, onde $p(z)$ e $q(z)$ têm coeficientes complexos, e $q(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, de modo que $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{(z - \alpha_1)^{m_1} \dots (z - \alpha_r)^{m_r}}{(z - \beta_1)^{n_1} \dots (z - \beta_s)^{n_s}}$.

Observamos que f é diferenciável em todos os pontos, exceto em $z = \infty$ e nas raízes β_j de $q(z)$, onde β_j são os zeros de $q(z)$ (isto é, $q(\beta_j) = 0$ para $1 \leq j \leq s$). Portanto, f é analítica em $\mathbb{C} - \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_s\}$, o que significa que f é suave e bem definida em todos os pontos do plano complexo, exceto nos pontos onde $q(z)$ se anula (os pólos). Em cada um desses pólos β_j , f possui um pólo de ordem n_j , onde a ordem n_j é igual à multiplicidade da raiz β_j no denominador $q(z)$.

Enquanto no ∞ , f é analítica se o grau do polinômio $p(z)$ for menor ou igual ao grau do polinômio $q(z)$. Caso contrário, a função f possui um pólo no ∞ de ordem igual a $\text{grau}(p) - \text{grau}(q)$. Portanto, f é analítica em todo $\mathbb{C} - \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_s\}$, com pólos em β_j de ordem n_j , e possivelmente um pólo no ∞ de ordem $\text{grau}(p) - \text{grau}(q)$, dependendo das relações entre os graus de $p(z)$ e $q(z)$. Concluimos que f é meromorfa no $\overline{\mathbb{C}}$, pois é suave e bem definida na maioria dos pontos do plano complexo, exceto nos pólos (onde possui pólos de ordem definida) e possivelmente no ∞ (onde pode ter um pólo de ordem determinada pelos graus de $p(z)$ e $q(z)$).

($\Leftarrow$) Suponhamos que f seja meromorfa no $\overline{\mathbb{C}}$, o que significa que f é suave na maioria dos pontos, exceto em um número finito de pólos, denotados com $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_s$ com ordens correspondentes $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$, e exceto possivelmente com o ∞ também como pólo. Sem perda de generalidade, podemos supor que ∞ não é pólo de f (pois, caso seja, trabalhamos com a função $1/f$). Isso nos dá que f é limitada próxima do ∞ . Definimos uma nova função $g(z)$ da seguinte maneira:

$$g(z) = (z - \beta_1)^{n_1} (z - \beta_2)^{n_2} \dots (z - \beta_s)^{n_s} f(z).$$

A função $g(z)$ é construída multiplicando $f(z)$ por uma combinação específica de termos $(z - \beta_j)$ que anulam os pólos de $f(z)$. Portanto, $g(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$, uma vez que não possui os pólos de $f(z)$. Como $g(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$, g possui uma expansão de Taylor

$$g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

válido para todo $z \in \mathbb{C}$, com $a_1, a_2, \dots$ sendo coeficientes complexos. Além disso, g é meromorfa no ∞ , pois f o é, o que equivale a $(g \circ J)(z)$ ser meromorfa em 0, ou seja, 0 é um pólo de $g \circ J$ ou $g \circ J$ é analítica em 0. Veja que a composição $(g \circ J)(z)$ terá uma expansão de Taylor da forma

$$(g \circ J)(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots$$

Como 0 é no máximo pólo de $(g \circ J)$, $a_j = 0$ para j suficientemente grande. Portanto, podemos concluir que $g(z)$ é um polinômio. Consequentemente, podemos escrever $g(z)$ na forma de um polinômio

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_k z^k$$

onde k é o grau do polinômio.

Agora, podemos expressar $f(z)$ em termos de $g(z)$ e dos pólos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ da seguinte maneira

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - \beta_1)^{n_1} \dots (z - \beta_s)^{n_s}}.$$

Isso significa que f é uma função racional, uma vez que é representada como um quociente de dois polinômios. $\square$

3.3 Círculos em $\overline{\mathbb{C}}$

Podemos definir um círculo em S^2 como a interseção entre a esfera S^2 e um plano Π em $\mathbb{R}^3$, desde que essa interseção tenha mais do que um ponto, ou seja, Π corta a S^2 e não é um plano tangente a S^2 .

Teorema 3.17. *A projeção estereográfica preserva círculos.*

Demonstração. Usando a bijeção $T : S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, definimos um círculo em $\overline{\mathbb{C}}$ como sendo a imagem sob T de qualquer círculo em S^2 . Se C é um círculo em $\overline{\mathbb{C}}$ correspondente a um plano Π com equação

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

sob a projeção estereográfica, substituindo as equações, tem-se,

$$\begin{aligned} a \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \right) + b \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \right) + c \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) + d &= 0 \\ \frac{2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1) + d(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2 + 1} &= 0, \\ 2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1) + d(x^2 + y^2 + 1) &= 0, \\ x^2(c + d) + y^2(c + d) + 2ax + 2by - c + d &= 0, \\ (c + d)(x^2 + y^2) + 2ax + 2by - c + d &= 0, \end{aligned}$$

onde $z = x + iy$. Escrevendo $A = c + d$, $B = a - ib$, $D = d - c$

$$A|z|^2 + 2a \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + 2b \left(\frac{z - \bar{z}}{2} \right) - c + d = 0$$

$$Az\bar{z} + zb + \bar{z}\bar{b} + D = 0$$

Esta equação pode ser um círculo ou uma reta, dependendo do valor de A .

Se $A \neq 0$, o círculo C , que é a interseção do plano $a\alpha + b\beta + c\gamma + d = 0$ com a esfera S^2 , é um círculo que não passa pelo pólo norte (veja que se $A = c + d \neq 0$, o ponto $N = (0, 0, 1)$ não satisfaz a equação $a\alpha + b\beta + c\gamma + d = 0$). Sua imagem em $\overline{\mathbb{C}}$ é um círculo em $\mathbb{C}$.

Agora se $A = 0$, círculo C , que é a interseção do plano $a\alpha + b\beta + c\gamma + d = 0$ com a esfera S^2 , é um círculo que contém o pólo norte, $N = (0, 0, 1)$. Vemos, nesse caso, que a equação da imagem desse círculo representa uma reta em $\mathbb{R}^2$; este caso corresponde a círculos em $\overline{\mathbb{C}}$ contendo o ∞ ou, equivalentemente, círculos em S^2 contendo o pólo norte $N = (0, 0, 1)$. $\square$

As figuras a seguir são uma representação visual do Teorema 3.17, o que ajuda ao leitor a compreender melhor o conteúdo deste teorema.

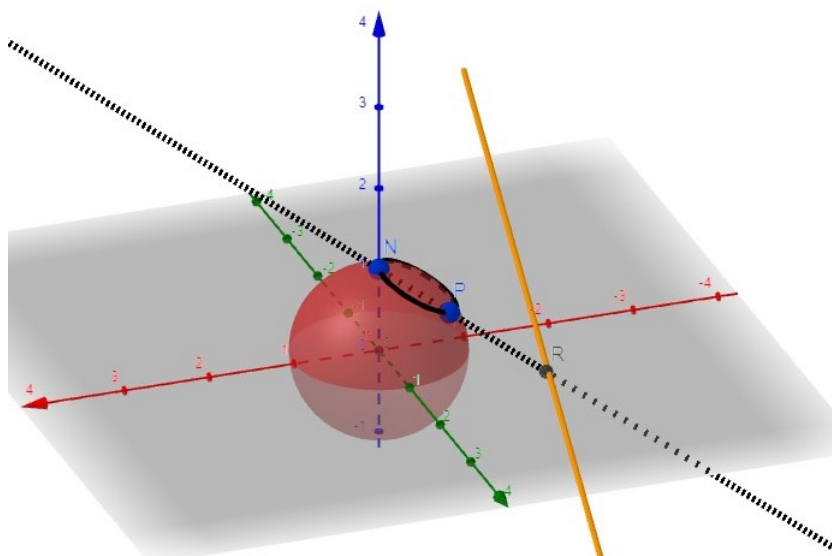


Figura 3.2: Ilustração Teorema 3.17.
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

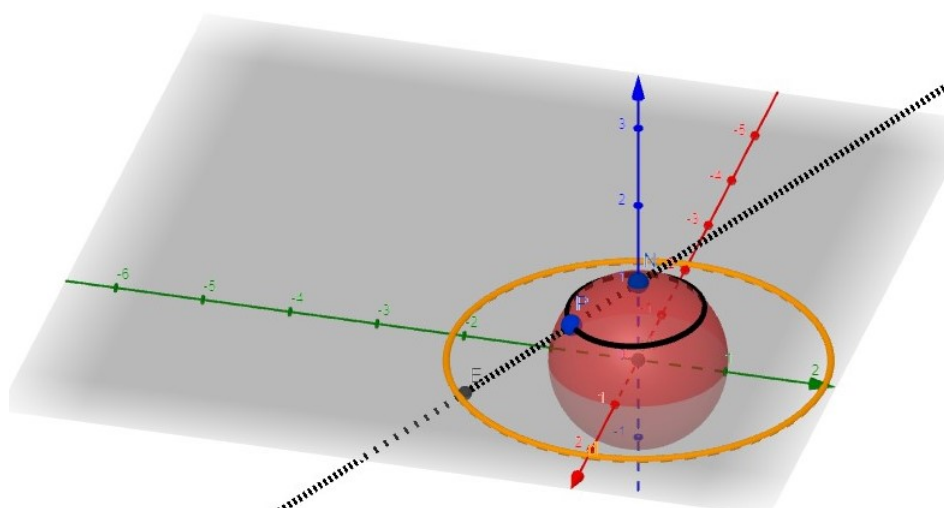


Figura 3.3: Ilustração Teorema 3.17.
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

4 Transformações de Möbius

Neste capítulo, nosso propósito é definir as transformações de Möbius. A partir disso, apresentaremos algumas propriedades notáveis, como por exemplo, o fato de que cada transformação de Möbius pode ser decomposta em outras simples, ou o comportamento de um círculo ou uma reta no plano sob uma transformação de Möbius. Além disso, é importante destacar que o conjunto dessas transformações tem estrutura algébrica de grupo sob a relação composição entre funções. A maneira como este tópico é abordado baseia-se nas fontes [9] e [12].

Definição 4.1. Se $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tais que $ad - bc \neq 0$, a função complexa definida por

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d},$$

é chamada uma transformação de Möbius.

Observação 4.2. A condição $ad - bc \neq 0$ é introduzida para evitar que as transformações de Möbius sejam constantes. Suponha $ad - bc = 0$, o que implica $ad = bc$. Portanto, podemos considerar dois casos:

1. Se $d \neq 0$, então

$$a = \frac{bc}{d} \quad e \quad T(z) = \frac{\frac{bc}{d}z + b}{cz + d} = \frac{b\left(\frac{cz}{d} + 1\right)}{d\left(\frac{cz}{d} + 1\right)} = \frac{b}{d}.$$

2. Se $a \neq 0$, então

$$d = \frac{bc}{a} \quad e \quad T(z) = \frac{az + b}{cz + \frac{bc}{a}} = \frac{a\left(z + \frac{b}{a}\right)}{c\left(z + \frac{b}{a}\right)} = \frac{a}{c}.$$

Na verdade, a condição $ad - bc \neq 0$ nos trás uma consequência ainda mais rica do que simplesmente as transformações não serem constantes. Essa condição nos garantirá que T é na verdade uma bijeção (ver Observação 4.8 mais adiante).

Definição 4.3. Tipos simples de transformações de Möbius: Seja T uma transformação de Möbius, então:

1. Se $T(z) = z + b$, então T é uma translação.
2. Se $T(z) = az$, com $a \in \mathbb{C}$ e $|a| = 1$, então T é uma rotação.
3. Se $T(z) = az$, onde $a > 0$, então T é chamada de homotetia.
4. Se $T(z) = \frac{1}{z}$, onde $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então T é uma inversão.

Se uma transformação T se encaixar em um dos tipos 1 a 4 acima, ela é chamada de uma transformação de Möbius do tipo simples.

Teorema 4.4. *Se T é uma transformação de Möbius, então T é uma composição de tipos simples de transformações de Möbius.*

Demonstração. Seja $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ uma transformação de Möbius.

1. Se $c = 0$, então $T(z) = \frac{az + b}{d} = \frac{az}{d} + \frac{b}{d}$. Definimos $T_1(z) = \frac{a}{d}z$ e $T_2(z) = z + \frac{b}{d}$. Logo, $T(z) = (T_2 \circ T_1)(z)$. Portanto, T é uma composição de uma homotetia e uma translação.
2. Se $c \neq 0$, então

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{c^2(az + b)}{c^2(cz + d)} = \frac{c^2az + bc^2 - adc + adc}{c^2(cz + d)} \\ &= \frac{ac(cz + d) + c(b - ad)}{c^2(cz + d)} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Definimos $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$, $T_2(z) = \frac{1}{z}$, $T_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2}z$, $T_4(z) = z + \frac{a}{c}$.

Ao compor essas transformações, obtemos:

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(z) &= T_2(T_1(z)) = T_2\left(z + \frac{d}{c}\right) = \frac{1}{z + \frac{d}{c}} = \frac{c}{cz + d}. \\ T_3 \circ (T_2(T_1(z))) &= T_3((T_2(T_1(z)))) = T_3\left(\frac{c}{cz + d}\right) \\ &= \frac{bc - ad}{c^2} \left(\frac{c}{cz + d}\right) \\ &= \frac{bc - ad}{c(cz + d)}. \end{aligned}$$

$$T_4 \circ (T_3(T_2(T_1(z)))) = T_4(T_3(T_2(T_1(z)))) = T_4\left(\frac{bc - ad}{c(cz + d)}\right) = \frac{bc - ad}{c(cz + d)} + \frac{a}{c}.$$

Portanto, $T(z) = (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z)$. Assim, T é uma composição de uma translação, inversão, homotetia e, finalmente, uma translação.

□

4.1 Transformações de Möbius no plano complexo estendido

Até o momento, concentramos nossa análise nas transformações de Möbius em $\mathbb{C}$. Agora, nossa intenção é estabelecer uma relação entre as transformações de Möbius definidas no plano complexo estendido, de modo que as propriedades que são observadas em $\mathbb{C}$ sejam facilmente herdadas pelas transformações definidas em $\overline{\mathbb{C}}$, sem maiores dificuldades.

Define-se, para $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, tais que $ad - bc \neq 0$, $T : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ da seguinte maneira:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \text{ e } c \neq 0, \\ \frac{a}{c}, & \text{se } z = \infty \text{ e } c \neq 0, \\ \infty, & \text{se } z = -\frac{d}{c} \text{ e } c \neq 0, \\ \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, & \text{se } z \in \mathbb{C} \text{ e } c = 0, \\ \infty, & \text{se } z = \infty \text{ e } c = 0. \end{cases}$$

A definição é fornecida para garantir a continuidade das transformações de Möbius em $\overline{\mathbb{C}}$. A fim de justificar essa continuidade, será utilizado o conceito de limite infinito.

Se $c = 0$,

$$T(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{d} = \infty.$$

Se $c \neq 0$,

$$T(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}.$$

$$T\left(-\frac{d}{c}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(-\frac{d}{c}) + b}{c(-\frac{d}{c}) + d} = \frac{\frac{ad-bc}{c}}{d - d} = \infty.$$

Ao estender o domínio dessa maneira, a transformação de Möbius passa a ser uma aplicação bijetiva, o que significa que há uma transformação de Möbius inversa definida no plano complexo estendido.

De fato, se $T(z) = w$, onde $w = \frac{az + b}{cz + d}$, isolando z da igualdade resulta na expressão $z = \frac{-dw + b}{cw - a}$, desde que $ad - bc \neq 0$.

Seja $S(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}$ com $w \neq \frac{a}{c}$. Ao calcular $T(S(w))$, obtemos

$$\begin{aligned} T(S(w)) &= T\left(\frac{-dw + b}{cw - a}\right) = \frac{a\left(\frac{-dw + b}{cw - a}\right) + b}{c\left(\frac{-dw + b}{cw - a}\right) + d} = \frac{-adw + ab + bcw - ab}{-cdw + bc + dcw - ad} \\ &= \frac{w(bc - ad)}{bc - ad} = w, \text{ se } w \neq \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que $S(T(z)) = z$. Portanto, S é a transformação inversa de T , ou seja, $T^{-1} = S$.

Teorema 4.5. *A composição das transformações de Möbius é uma transformação de Möbius.*

Demonstração. Sejam $T_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ e $T_2(z) = \frac{ez+f}{kz+l}$ transformações de Möbius. Então,

$$\begin{aligned} (T_1 \circ T_2)(z) &= T_1(T_2(z)) = \frac{a\left(\frac{ez+f}{kz+l}\right) + b}{c\left(\frac{ez+f}{kz+l}\right) + d} = \frac{aez + fa + bkz + lb}{cez + cf + dkz + ld} \\ &= \frac{(ae + bk)z + fa + lb}{(ce + dk)z + cf + ld} \\ &= \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}, \end{aligned}$$

onde $a_1 = ae + bk$, $b_1 = fa + lb$, $c_1 = ce + dk$, e $d_1 = cf + ld$, são os componentes da transformação Möbius resultante.

Além disso,

$$\begin{aligned} (ae + bk)(cf + ld) - (fa + lb)(ce + dk) &= aecf + aeld + bkcf + bkld - \\ &\quad (face + fadk + lbce + lbdk) \\ &= aeld + bkcf - fadk - lbce \\ &= (ad - bc)(el - fk) \neq 0, \text{ já que} \\ &\quad ad - bc \neq 0 \text{ e } el - fk \neq 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.6. *As transformações de Möbius são conformes.*

Demonstração. Suponha $c \neq 0$.

Se $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$, por definição, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Logo,

$$\begin{aligned} T'(z) &= \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} \\ &= \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0, \text{ já que } ad - bc \neq 0. \end{aligned}$$

De acordo ao Teorema 2.39, a transformação T é conforme.

□

4.2 Transformações de Möbius como matrizes

Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $ad-bc \neq 0$, uma transformação de Möbius. A essa transformação, podemos associar uma matriz quadrada dada por:

$$M_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad-bc \neq 0.$$

No entanto, esta atribuição não é totalmente única, pois se $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0, 1$, então a transformação $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ também pode ser expressa como $T(z) = \frac{kaz+kb}{kcz+kd}$.

Ao representarmos essas transformações em termos de matrizes, temos:

$$M_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_{kT} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}, \text{ onde } k \neq 0, 1.$$

É importante destacar que essas matrizes não são iguais, embora representem a mesma transformação. A fundamentação deste segmento tem como base os recursos bibliográficos [1, 11].

Observação 4.7. O produto de matrizes corresponde à composição de transformações de Möbius.

De fato, consideremos $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ e $S(z) = \frac{a'z+d'}{c'z+d'}$ definidas pelas matrizes:

$$M_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_S = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

$$\text{Então, } M_T M_S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

A composição de T com S , denotada por $(T \circ S)$, pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} (T \circ S)(z) &= T(S(z)) = T\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) = \frac{a\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) + b}{c\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) + d} \\ &= \frac{aa'z + ab' + b(c'z + d')}{ca'z + cb' + d(c'z + d)} \\ &= \frac{(aa' + bc')z + ab' + bd'}{(ca' + dc')z + cb' + dd'}, \end{aligned}$$

a matriz correspondente à composição é dada por: $M_{T \circ S} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$

Portanto, foi demonstrado que

$$M_{T \circ S} = M_T M_S.$$

Observação 4.8. Sob a composição de funções, o conjunto das transformações de Möbius têm a estrutura de grupo. Isso é ilustrado pelos seguintes pontos:

1. Já foi provado que a composição das transformações de Möbius é uma transformação de Möbius.
2. O elemento identidade das transformações de Möbius ocorre quando $a = d = 1$ e $b = c = 0$, ou seja, $T(z) = \frac{z+0}{0+1} = \frac{z}{1} = z$. Além disso, o elemento identidade corresponde à matriz identidade, com as mesmas condições: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. O inverso de uma transformação de Möbius corresponde à transformação $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$. Além disso, o inverso de uma transformação de Möbius T corresponde ao inverso da matriz M_T , ou seja, $M_{T^{-1}} = (M_T)^{-1}$. De fato, como $T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$, então $M_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} d & -b \\ c & -a \end{pmatrix}$, logo,

$$M_T M_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -cb+da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $(M_T)^{-1} = M_{T^{-1}}$.

4.3 Imagens de círculos e retas através de transformações de Möbius.

Estudaremos as transformações de círculos e retas quando são afetadas pelos tipos simples de transformações de Möbius (translação, rotação, homotetia e inversão). Para ver tal comportamento, serão consideradas as equações gerais de círculos e retas no plano complexo.

A equação de uma linha reta no plano complexo é expressa como:

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, ax + by + c = 0\}, \text{ onde } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Se $z = x + iy$, então $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Substituindo isso na equação da linha reta, obtemos:

$$\begin{aligned} a \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + b \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + c &= 0 \\ a \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + b \left(\frac{(z - \bar{z})(-i)}{2} \right) + c &= 0 \\ az + a\bar{z} - ibz + ib\bar{z} + 2c &= 0 \\ z(a - ib) + \bar{z}(a + ib) + 2c &= 0. \end{aligned}$$

Se $\beta = a + ib$, $\gamma = 2c$, então $\bar{\beta} = a - ib$, e obtemos a equação da reta:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{\beta} + \bar{z}\beta + \gamma = 0\}. \quad (4.2)$$

A equação cartesiana de um círculo com centro (h, k) e raio r é dada por:

$$\begin{aligned}(x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + k^2 &= r^2.\end{aligned}$$

Como $z = x + iy$, substituindo no último resultado, obtemos:

$$\begin{aligned}|z|^2 - 2h \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) - 2k \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + h^2 + k^2 &= r^2 \\ |z|^2 - 2h \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) - 2k \left(\frac{(z - \bar{z})(-i)}{2} \right) + h^2 + k^2 &= r^2 \\ |z|^2 - h(z + \bar{z}) - k(i\bar{z} - iz) + h^2 + k^2 &= r^2 \\ |z|^2 - hz - h\bar{z} - ik\bar{z} + ikz + h^2 + k^2 &= r^2 \\ z\bar{z} - z(h - ik) - \bar{z}(h + ik) + h^2 + k^2 &= r^2. \text{ Se } w = h + ik, \text{ então:} \\ z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + \bar{w}w - r^2 &= 0.\end{aligned}$$

Se multiplicarmos a última equação por um número real α , onde $\alpha \neq 0$, obteremos uma equação equivalente, ou seja:

$$\alpha z\bar{z} - \alpha z\bar{w} - \alpha \bar{z}w + \alpha \bar{w}w - \alpha r^2 = 0.$$

Se as seguintes substituições são feitas nesta equação, $\beta = -\alpha w$ e $\gamma = \alpha \bar{w}w - \alpha r^2$, esta última equação pode ser expressa por:

$$\alpha z\bar{z} + z\bar{\beta} + \bar{z}\beta + \gamma = 0. \quad (4.3)$$

Observe que:

$$\begin{aligned}|\beta|^2 &= \beta\bar{\beta} = (-\alpha w)(-\alpha \bar{w}) = \alpha^2 \bar{w}w \\ &= \alpha(\alpha \bar{w}w) = \alpha(\gamma + \alpha r^2) = \alpha\gamma + \alpha^2 r^2 \\ &\geq \alpha\gamma.\end{aligned}$$

Ou seja, se olharmos para as deduções de (4.2) e (4.3), foi demonstrada a seguinte propriedade:

Proposição 4.9. *Seja $\mathfrak{F}$ a família de retas e círculos em $\mathbb{C}$. Então $L \in \mathfrak{F}$ se, e somente se, a equação de L pode ser escrita como:*

$$\alpha z\bar{z} + z\bar{\beta} + \bar{z}\beta + \gamma = 0, \text{ onde } \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \text{ e } |\beta|^2 \geq \alpha\gamma. \quad (4.4)$$

No caso de $\alpha = 0$, (4.4) corresponde a uma reta; caso contrário, corresponde a um círculo.

Os resultados a seguir mostram como as retas e os círculos são transformados pelos diferentes tipos de transformações de Möbius.

Proposição 4.10. *Por meio de translações, homotetias e rotações, as imagens de retas são retas e as imagens de círculos são círculos.*

Demonstração. Seja $L \in \mathfrak{F}$, então, por (4.4), a equação tem a forma:

$$\alpha z\bar{z} + z\bar{\beta} + \bar{z}\beta + \gamma = 0, \quad (4.5)$$

onde

$$|\beta|^2 \geq \alpha\gamma. \quad (4.6)$$

- **Translação:** Sejam $b \in \mathbb{C}$ e T a translação definida por $w = T(z) = z + b$, portanto, $z = w - b$, que ao ser substituída em (4.5), é obtido:

$$\begin{aligned} \alpha(w - b)\overline{(w - b)} + (w - b)\bar{\beta} + \overline{(w - b)}\beta + \gamma &= 0, \\ \alpha w\bar{w} + w(\bar{\beta} - \alpha\bar{b}) + \bar{w}(\beta - \alpha b) + (\alpha b\bar{b} - b\bar{\beta} - \bar{b}\beta + \gamma) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |\beta - \alpha b|^2 &= \beta\bar{\beta} - \alpha\bar{\beta}\bar{b} - \alpha\bar{\beta}b + \alpha^2 b\bar{b} \\ &\geq \alpha\gamma - \alpha\bar{\beta}\bar{b} - \alpha\bar{\beta}b + \alpha^2 b\bar{b}, \text{ por (4.6),} \\ &= \alpha(\gamma - \beta\bar{b} - \bar{\beta}b + \alpha b\bar{b}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Então, segue-se de (4.7) e (4.8), que a imagem de L por T é um elemento em $\mathfrak{F}$. Além disso, se $\alpha = 0$, ambos (4.5) e (4.7) representam retas, caso contrário representam círculos.

- **Rotação:** Seja $\theta \in (0, 2\pi)$ e R a rotação definida por $w = R(z) = rz = e^{i\theta}z$, logo, $z = e^{-i\theta}w$, que ao ser substituída em (4.5) resulta em:

$$\begin{aligned} \alpha(e^{-i\theta}w)\overline{(e^{-i\theta}w)} + e^{-i\theta}w\bar{\beta} + \overline{(e^{-i\theta}w)}\beta + \gamma &= 0, \\ \alpha(e^{-i\theta}w)\overline{(e^{-i\theta}\bar{w})} + e^{-i\theta}w\bar{\beta} + \overline{(e^{-i\theta}\bar{w})}\beta + \gamma &= 0, \\ \alpha w\bar{w} + we^{-i\theta}\bar{\beta} + \bar{w}e^{i\theta}\beta + \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |e^{i\theta}\beta|^2 &= |e^{i\theta}|^2|\beta|^2 = |\beta|^2, \text{ por (4.6),} \\ &\geq \alpha\gamma. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Em seguida, segue-se por (4.9) e (4.10), que a imagem de L através de R é um elemento em $\mathfrak{F}$. Além disso, se $\alpha = 0$, ambos (4.5) e (4.9) representam retas, caso contrário, círculos.

- **Homotetia:** Seja $r > 0$ e H a homotetia definida por $w = H(z) = rz$, logo, $z = \frac{1}{r}w$, que ao ser substituído em (4.5), resulta em:

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{1}{r}w\right)\overline{\left(\frac{1}{r}w\right)} + \frac{1}{r}w\bar{\beta} + \overline{\left(\frac{1}{r}w\right)}\beta + \gamma &= 0, \\ \alpha\left(\frac{1}{r}w\right)\overline{\left(\frac{1}{r}\bar{w}\right)} + \frac{1}{r}w\bar{\beta} + \overline{\left(\frac{1}{r}\bar{w}\right)}\beta + \gamma &= 0, \\ \alpha\frac{w\bar{w}}{r^2} + \frac{w}{r}\bar{\beta} + \frac{\bar{w}}{r}\beta + \gamma &= 0, \\ \alpha w\bar{w} + wr\bar{\beta} + \bar{w}r\beta + \gamma r &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |r\beta|^2 &= |r|^2|\beta|^2 = r^2|\beta|^2, \text{ por (4.6),} \\ &\geq r^2\alpha\gamma, \\ &= \alpha(r^2\gamma). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Em seguida, segue-se por (4.11) e (4.12), que a imagem de L através de H é um elemento em $\mathfrak{F}$. Além disso, se $\alpha = 0$, ambos (4.5) e (4.11) representam retas, caso contrário, círculos.

□

Agora veremos como são as imagens dos elementos da coleção $\mathfrak{F}$, através da transformação inversão. Para esse fim, um elemento arbitrário da coleção $\mathfrak{F}$ é novamente considerado, o qual satisfaz (4.5) e (4.6). A transformação inversão, denotada por

$$I: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \frac{1}{z}.$$

Portanto, se $z \neq 0$, então $w = I(z) = \frac{1}{z}$, onde $z = \frac{1}{w}$ com $w \neq \infty$. Quatro casos da expressão (4.5) serão analisados a seguir:

1. Para $\alpha = 0$ e $\gamma = 0$, a equação (4.5) se reduz a

$$z\bar{\beta} + \bar{z}\beta = 0. \quad (4.13)$$

Esta equação representa uma reta, pois $z = 0$ a satisfaz, tornando (4.13) a equação de uma reta que passa pela origem. Substituindo $z = \frac{1}{w}$ na equação (4.13), temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w}\bar{\beta} + \overline{\left(\frac{1}{w}\right)}\beta &= 0, \\ \frac{1}{w}\bar{\beta} + \frac{1}{\bar{w}}\beta &= 0, \\ \bar{w}\bar{\beta} + w\beta &= 0, \quad \text{portanto,} \\ \bar{w}\bar{\beta} + w\overline{(\bar{\beta})} &= 0, \end{aligned}$$

representando assim uma reta que passa pela origem.

2. Para $\alpha = 0$ e $\gamma \neq 0$, a equação (4.5) se torna

$$z\bar{\beta} + \bar{z}\beta + \gamma = 0. \quad (4.14)$$

Esta equação corresponde a uma reta que não passa pela origem, pois $z = 0$ não a satisfaz. Fazendo a substituição de $z = \frac{1}{w}$ na equação (4.14), temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w}\bar{\beta} + \overline{\left(\frac{1}{w}\right)}\beta + \gamma &= 0, \\ \frac{1}{w}\bar{\beta} + \frac{1}{\bar{w}}\beta + \gamma &= 0, \\ \bar{w}\bar{\beta} + w\beta + \bar{w}w\gamma &= 0, \\ \bar{w}w + \bar{w}\frac{\bar{\beta}}{\gamma} + w\frac{\overline{(\bar{\beta})}}{\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

De acordo com o Lema 4.9, esta equação é a representação de um círculo e, dado que $w = 0$ a satisfaz, o círculo passa pela origem.

3. Para $\alpha \neq 0$ e $\gamma = 0$, a equação (4.5) torna-se:

$$\alpha z \bar{z} + z \bar{\beta} + \bar{z} \beta = 0. \quad (4.16)$$

Como $z = 0$ satisfaz (4.16) e, além disso, $|\beta|^2 \geq 0 = \alpha\gamma$, então (4.16) representa um círculo que passa pela origem. Substituindo $z = \frac{1}{w}$ na equação (4.16), temos:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{1}{w} \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \frac{1}{w} \bar{\beta} + \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} \beta &= 0, \\ \alpha \frac{1}{w\bar{w}} + \frac{1}{w} \bar{\beta} + \frac{1}{\bar{w}} \beta &= 0, \\ \alpha + \bar{w} \bar{\beta} + w \beta &= 0 \\ \bar{w} \bar{\beta} + w \overline{(\beta)} + \alpha &= 0. \end{aligned}$$

A ultima equação é a representação de uma reta que não passa pela origem.

4. Para $\alpha \neq 0$ e $\gamma \neq 0$, neste caso, a equação (4.5) com a condição (4.6) representa um círculo que não passa pela origem:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{1}{w\bar{w}} + \frac{1}{w} \bar{\beta} + \frac{1}{\bar{w}} \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + \bar{w} \bar{\beta} + w \beta + w\bar{w} \gamma &= 0, \\ w\bar{w} + w \overline{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)} + \bar{w} \frac{\bar{\beta}}{\gamma} + \frac{\alpha}{\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Além disso,

$$\left| \frac{\beta}{\gamma} \right|^2 \geq \frac{\alpha\gamma}{\gamma^2} = 1 \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right). \quad (4.18)$$

De acordo com o Lema 4.9, a equação (4.17) com a condição (4.18) representa um círculo que não passa pela origem, já que $\frac{\alpha}{\gamma} \neq 0$.

Portanto, a seguinte afirmação foi comprovada:

Proposição 4.11. *Dada a transformação inversão:*

$$\begin{aligned} I: \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z}, \end{aligned}$$

e dado $L \in \mathfrak{F}$, então:

1. Uma reta que passa pela origem, sob I , é transformada em uma reta que atravessa a origem.
2. Uma reta que não passa pela origem, sob I , é transformada em um círculo que passa pela origem.
3. Um círculo que atravessa a origem, sob I , é transformado em uma reta que não passa pela origem.
4. Um círculo que não passa pela origem, sob I , é transformado em um círculo que não passa pela origem.

4.4 Exemplos

1. Dada a equação

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4 \quad (4.19)$$

deseja-se determinar a imagem sob a transformação por inversão.

A transformação inversão está determinada por $w = I(z) = \frac{1}{z}$, de onde $z = \frac{1}{w}$.

Se $z = x + iy$, então $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Substituindo x e y em (4.19), temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{z + \bar{z}}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 &= 4, \\ \left(\frac{z + \bar{z} - 4}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 &= 4, \\ (z + \bar{z} - 4)^2 + (i\bar{z} - iz)^2 &= 16, \\ 4z\bar{z} - 8z - 8\bar{z} &= 0, \\ z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

De acordo com o Lema 4.9, esta é a representação de um círculo que atravessa a origem no plano complexo. Agora, pela inversão, temos $z = \frac{1}{w}$ e, substituindo em (4.20), temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \frac{1}{\bar{w}} - \frac{2}{w} - \frac{2}{\bar{w}} &= 0, \\ \frac{1}{w\bar{w}} - \frac{2}{w} - \frac{2}{\bar{w}} &= 0, \\ 1 - 2\bar{w} - 2w &= 0, \\ 2\bar{w} + 2w - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Por (4.4), a equação (4.21) é a equação de uma linha reta que não passa pela origem. Já que $w = u + iv$, substituindo na equação (4.21), obtemos

$$\begin{aligned} 2(u - iv) + 2(u + iv) - 1 &= 0, \\ 2u - 2iv + 2u + 2iv - 1 &= 0, \\ 4u - 1 &= 0, \\ u &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Esta é a imagem do círculo (4.19) sob a transformação inversão.

2. Dada a função linear

$$y = 3x + 5, \quad (4.22)$$

deseja-se determinar a imagem sob a transformação de Möbius dada por

$$T(z) = \frac{z + 2}{z + 1}. \quad (4.23)$$

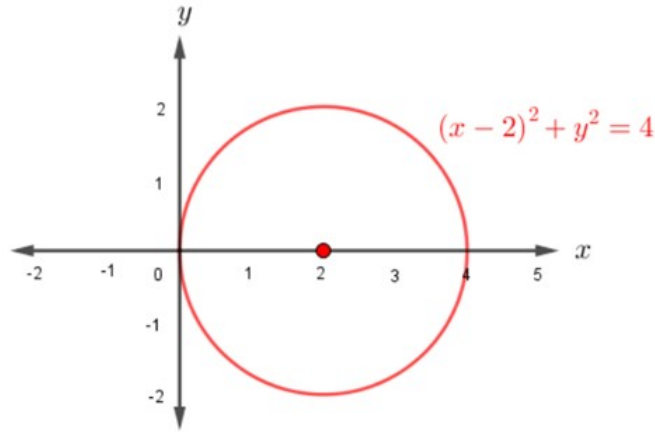


Figura 4.1: Interpretação geométrica da equação (4.19).

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

De acordo com a composição de transformações de Möbius, a equação (4.23) assume a seguinte forma:

$$T(z) = 1 + \frac{1}{z + 1}. \quad (4.24)$$

Portanto, a transformação (4.24) é a composição de uma translação, de uma inversão e de uma translação. Nos itens (a), (b) e (c), cada uma das transformações da função (4.22) será discutida em mais detalhes.

(a) Seja $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Substituindo em (4.22), isso equivale a:

$$\begin{aligned} \frac{z - \bar{z}}{2i} - 3 \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) &= 5, \\ \frac{(\bar{z} - z)i}{2} - \left(\frac{3z + 3\bar{z}}{2} \right) &= 5, \\ (\bar{z} - z)i - (3z + 3\bar{z}) &= 10, \\ \bar{z}i - zi - 3z - 3\bar{z} &= 10, \\ z(-3 - i) + \bar{z}(-3 + i) - 10 &= 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Usando a equação (4.7), para calcular a imagem da reta representada em (4.25) por meio da translação $w_1 = z + 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} w_1(-3 - i) + \bar{w}_1(-3 + i) + (-1(-3 - i) - 1(-3 + i) - 10) &= 0, \\ w_1(-3 - i) + \bar{w}_1(-3 + i) + (6 - 10) &= 0, \\ w_1(-3 - i) + \bar{w}_1(-3 + i) - 4 &= 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

o que representa uma reta que não passa pela origem.

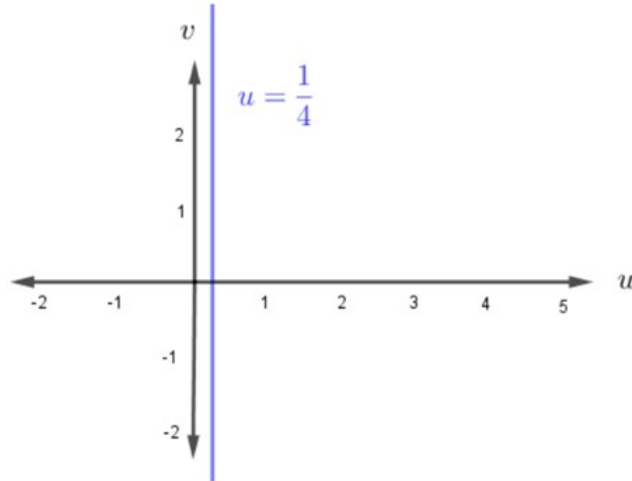


Figura 4.2: Interpretação geométrica da equação (4.19), sob a transformação inversão.
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Como $w_1 = u_1 + iv_1$, substituindo na equação (4.26), obtemos:

$$\begin{aligned}(u_1 + iv_1)(-3 - i) + (u_1 - iv_1)(-3 + i) - 4 &= 0, \\ -6u_1 + 2v_1 - 4 &= 0, \\ v_1 &= 3u_1 + 2.\end{aligned}$$

Essa é a imagem da função (4.22) (veja Figura 4.3) sob a translação $w_1 = z + 1$ (veja a Figura 4.4).

(b) Por (4.15), a imagem da reta (4.26) através da transformação inversão

$w_2 = \frac{1}{w_1}$ é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\overline{w_2}(-3 + i) + w_2(-3 + i) + (-4)w_2\overline{w_2} &= 0, \\ (-4)w_2\overline{w_2} + (-3 + i)w_2 + (-3 - i)\overline{w_2} &= 0,\end{aligned}\tag{4.27}$$

o que representa um círculo que passa pela origem. Como $w_2 = u_2 + iv_2$, substituindo na equação (4.27), obtemos:

$$\begin{aligned}(-4)(u_2^2 + v_2^2) + (-3 + i)(u_2 + iv_2) + (-3 - i)(u_2 - iv_2) &= 0, \\ (-4)(u_2^2 + v_2^2) - 3u_2 - 3iv_2 + iu_2 - v_2 - 3u_2 + 3iv_2 - iu_2 &= 0, \\ -4u_2^2 - 4v_2^2 - 6u_2 - 2v_2 &= 0, \\ \left(u_2 + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(v_2 + \frac{1}{4}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)^2.\end{aligned}$$

Esta é a imagem da reta (4.26) sob a inversão $w_2 = \frac{1}{w_1}$ (veja a Figura 4.5).

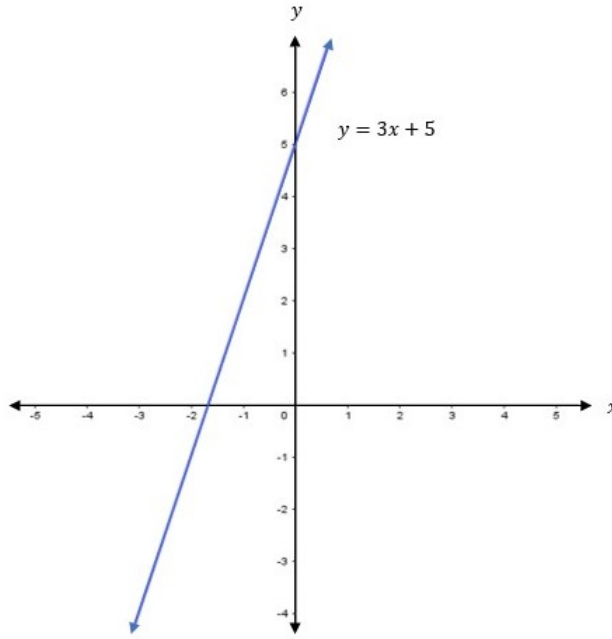


Figura 4.3: Interpretação geométrica da equação (4.22).

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

- (c) A imagem do círculo (4.27) através da transformação translação $w_3 = 1 + w_2$ é outro círculo. De fato, para (4.7), a equação (4.27) é transformada em:

$$(-4)w_3\overline{w_3} + w_3\overline{(-3 - i - (-4))} + \overline{w_3}(-3 - i - (-4)) +$$

$$((-4)\overline{1}1 - 1\overline{(-3 - i)} - \overline{1}(-3 - i) + 0) = 0,$$

$$(-4)w_3\overline{w_3} + w_3\overline{(-3 - i + 4)} + \overline{w_3}(-3 - i + 4) +$$

$$(-4 - (-3 + i) - (-3 - i)) = 0,$$

$$(-4)w_3\overline{w_3} + w_3\overline{(1 - i)} + \overline{w_3}(1 - i) + 2 = 0,$$

$$(-4)w_3\overline{w_3} + w_3(1 + i) + \overline{w_3}(1 - i) + 2 = 0.$$

Isso representa um círculo que não passa pela origem.

Já que $w_3 = u_3 + iv_3$, substituindo na última equação, obtemos:

$$(-4)(u_3 + iv_3)(u_3 - iv_3) + (u_3 + iv_3)(1 + i) + (u_3 - iv_3)(1 - i) + 2 = 0,$$

$$(-4)\left(u_3^2 + v_3^2\right) + 2u_3 - 2v_3 + 2 = 0,$$

$$-4u_3^2 - 4v_3^2 + 2u_3 - 2v_3 + 2 = 0,$$

$$\left(u_3 + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(v_3 + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)^2.$$

Esta é a imagem do círculo (4.27) sob a translação $w_3 = 1 + w_2$ (veja Figura 4.6).

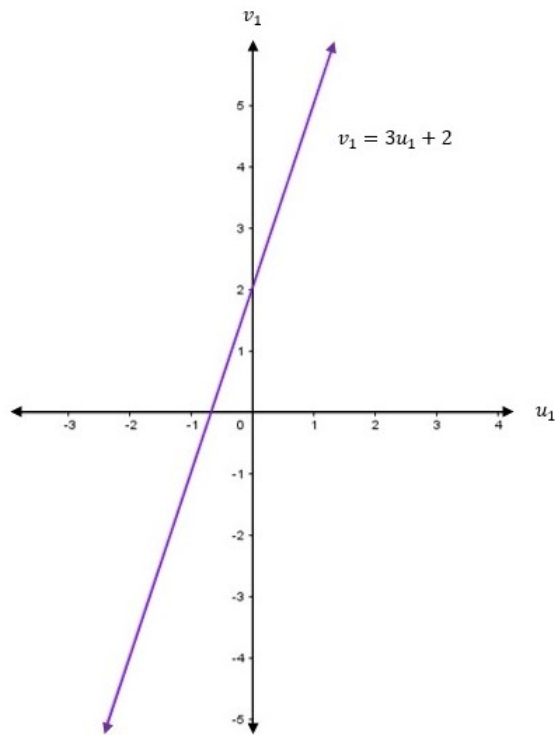


Figura 4.4: Interpretação geométrica de (4.22), sob a transformação translação.
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

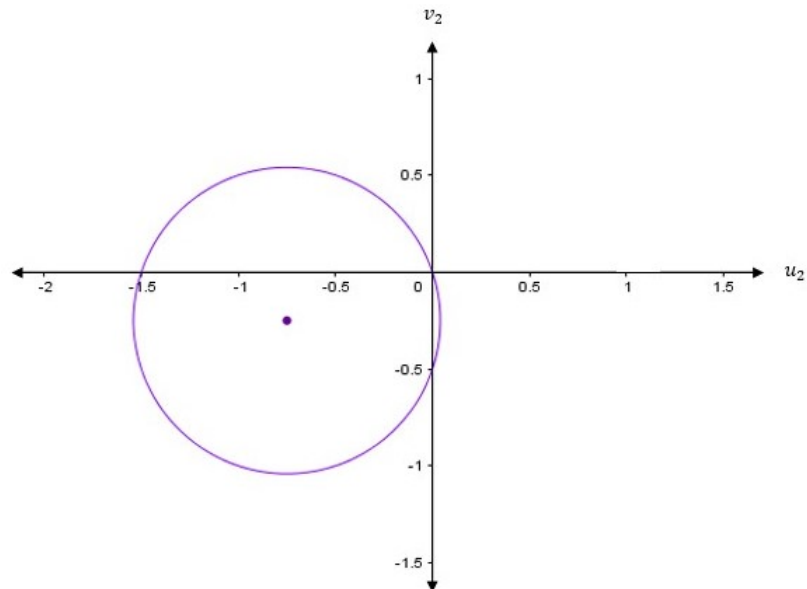


Figura 4.5: Interpretação geométrica de (4.26), sob a transformação inversão.
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

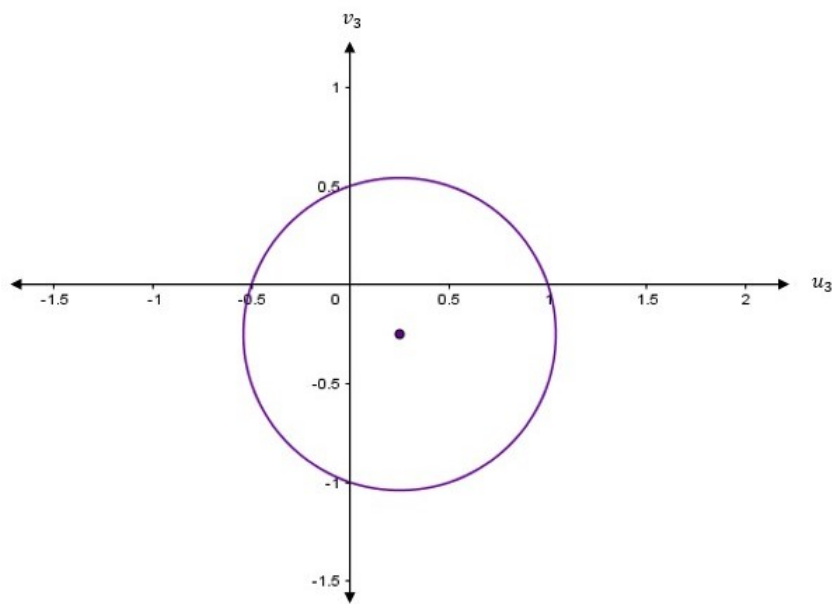


Figura 4.6: Interpretação geométrica de (4.27), sob a transformação translação.
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

5 Conclusão

1. A partir da definição de transformação de Möbius, podemos identificar os tipos simples de transformação: translação, rotação, homotetia e inversão. Além disso, é possível observar que uma transformação de Möbius pode ser representada como uma composição desses tipos simples de transformação.
2. A análise das transformações sobre uma família de retas e círculos permite concluir que essa família é invariante sob as transformações translação, rotação e homotetia. Ou seja, o efeito geométrico das transformações não altera a configuração da família de retas e círculos.
3. Uma matriz quadrada complexa de ordem dois, com entradas nos complexos, pode ser associada a uma transformação de Möbius. Além disso, o conjunto dessas transformações têm estrutura de grupo sob a operação composição de funções.
4. Tanto a transformação de Möbius quanto a projeção estereográfica são aplicações conformes, ou seja, preservam os ângulos em todos os pontos de seu domínio.

Referências

- [1] AHLFORS, L. V. *Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [2] BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. *Variable compleja y aplicaciones*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana de Espana S.L., 2004.
- [3] GROVE, E. A.; LADAS, G. *Introduction to complex variables*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1974.
- [4] CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable*. United States of America: Springer-Verlag, 1978.
- [5] MUNKRES, J. *Topology*. United States of America: Prentice Hall, Incorporated, 2000. (Featured Titles for Topology).
- [6] KOSNIOWSKI, C. *A first course in algebraic topology*. United States of America: Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980. viii+269 p. ISBN 0-521-23195-7.
- [7] GERALDO, A. *Variáveis complexas e aplicações*. Rio de Janeiro: Sindicato nacional dos editores de livros, 2008.
- [8] GAMELIN, T. *Complex Analysis*. New York: Springer New York, 2003.
- [9] JONES, G.; SINGERMAN, D. *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint*. Inglaterra: Cambridge University Press, 1987.
- [10] LIMA, E. L. *Espaços métricos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011. (Projeto Euclides).
- [11] SCHWERDTFEGGER, H. *Geometry of Complex Numbers*. New York: Dover Publications, 2012.
- [12] OLSEN, J. *The Geometry of Möbius Transformations*. University of Rochester: Spring, 2010.
- [13] LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral*. [S.l.]: Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, 1970.