



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**PROJETO DE CONTROLADORES
AUTOMÁTICOS COM ATUALIZAÇÃO
DAS CONDIÇÕES INICIAIS**

NEUSA AUGUSTO PEREIRA DA SILVA

Ilha Solteira - SP

1210001582



Universidade Estadual Paulista
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

PROJETO DE CONTROLADORES
AUTOMÁTICOS COM ATUALIZAÇÃO DAS
CONDIÇÕES INICIAIS

Neusa Augusto Pereira da Silva

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Ilha Solteira – SP, janeiro de 2005



FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP-Ilha Solteira

S586p Silva, Neusa Augusto Pereira da
Projeto de controladores automáticos com atualização das condições iniciais / Neusa Augusto Pereira da Silva. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2005
xvi, 200 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2005

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Bibliografia: p. 194-200

1. Controle ótimo. 2. Condições iniciais. 3. Controle automático.

30405033



Projeto de Controladores Automáticos com Atualização das Condições Iniciais

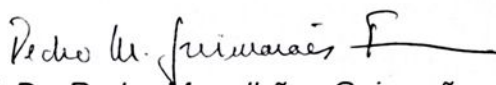
NEUSA AUGUSTO PEREIRA DA SILVA

TESE SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA - CAMPUS DE ILHA
SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA
A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA

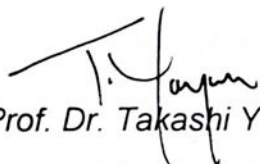
COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira – orientador



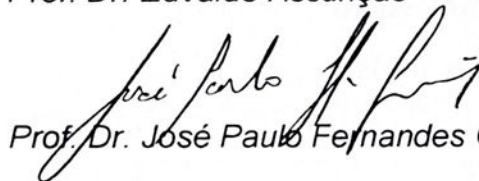
Prof. Dr. Pedro Magalhães Guimarães Ferreira



Prof. Dr. Takashi Yoneyama



Prof. Dr. Edvaldo Assunção

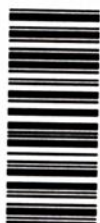


Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia

Ilha Solteira/SP, janeiro de 2005.



1210001582



Proc. 055105-NPD 064/05

UNESP - "CAMPOS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÊC. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
01.06.05	30.06.05
REGISTRADO POR	TOMBO
Ailza	Te. 1582
AQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Doação Autor R\$ 10.00	S586p

Co sys 295578
 sys 58729

Ao meu esposo e companheiro Valdemar,
 aos meus queridos filhos Pedro, Lucas e
 Paulo, à minha querida mãe Maria pela sua
 coragem e exemplo de vida, às minhas
 irmãs Dalva, Irene, Edna e ao meu irmão
 Nelson, dedico.

AGRADECIMENTOS

A Deus Pai, que por meio de Jesus Cristo nos supriu em todas as nossas necessidades. A Ele seja a glória.

Ao Prof. Marcelo, pela sua grande paciência em me orientar, meus profundos e sinceros agradecimentos.

À minha sobrinha Simone, pelo carinho dispensado aos meus filhos suprimindo a minha ausência.

Ao meu cunhado Antônio Carlos, tão presente em todos os momentos de minha vida.

Ao Prof. Edvaldo, que sempre nos encorajou em muitas de nossas dificuldades.

À Prof. Célia, por meio da qual tive a oportunidade de iniciar meus estudos nesta área, minha gratidão.

À amiga Prof. Lizete, que durante todos estes anos sempre acreditou na concretização deste trabalho.

À Erica, que ao longo desta jornada tornou-se mais próxima e amiga.

Aos docentes do Departamento de Matemática, pelo apoio, em especial ao Prof. Marcelo Reicher Soares, pela amizade e atenção em todos os momentos, ao Prof. Luis Antonio Fernandes de Oliveira e Prof. Roseli Arbach Fernandes de Oliveira pela disponibilidade em nos ajudar.

Aos meus irmãos em Cristo pelo amor e pelas orações.

À minha sogra Lindacy, sempre tão prestativa.



Ao técnico Deoclécio, por sua invariável disposição, boa vontade em auxiliar-me, e às pessoas que durante todos estes anos, contribuíram para a concretização deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.



RESUMO

Normalmente os sistemas de controle são projetados objetivando a especificação dos parâmetros do controlador, que é em geral descrito por meio de equações diferenciais. Na maioria dos casos, o controlador é construído artificialmente e é possível também atualizar as suas condições iniciais. Este fato tem sido efetivamente explorado em sistemas com várias estruturas de controle para melhorar as características das respostas transitórias. Este trabalho investiga esta idéia aplicada ao projeto de sistemas de controle com sinais de referência não nulos, no caso do tipo degrau.

Primeiramente são introduzidas de forma clara e precisa as bases da atualização das condições iniciais de controladores dinâmicos, para sistemas lineares invariantes no tempo.

A seguir é proposto um método de atualização ótima das condições iniciais do sistema controlador/observador, quando não é possível medir todos os estados da planta.

Um novo método alternativo para atualização das condições iniciais no controlador, no caso considerado integral, baseado em Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, Linear Matrix Inequalities (LMIs)) é proposto. Este método considera as condições iniciais da planta pertencentes a um conjunto politópico.

Para sistemas discretos, a atualização das condições iniciais no controlador também é introduzido e são formalizados os resultados obtidos, incluindo o estudo realizado no intervalo de tempo finito $[0, N]$.

O problema da atualização das condições iniciais em controladores dinâmicos quando a planta é não-linear é abordado. Para modelar a planta os modelos fuzzy Takagi-Sugeno são utilizados. Os novos resultados são apresentados em termos de LMIs e permitem a consideração de incertezas politópicas nos parâmetros da planta. Exemplos de aplicações comprovam a eficácia do método proposto.



ABSTRACT

In almost all cases, the goal of designing automatic control systems is to obtain the parameters of the controllers, that are usually described by differential equations. Generally the controller is artificially built and it is possible to update its initial conditions. This idea was efficiently explored in control systems designs with several controllers to improved the transient responses. This degree of freedom is investigated in this work, in the design of control systems with an input signal equal to a step.

Initially it is clearly introduced the basis to update the initial conditions in dynamic controllers for linear continuous-time systems.

A method to change, in an optimal way, the initial conditions of the controller/observer systems when the state variables are not completely available is proposed.

A new LMI-based design procedure to update the initial conditions in PI controllers is presented. This method considers that the initial conditions of the plant are in a polytopic set.

For discrete-time systems a procedure to update the initial conditions in the controllers is also introduced and the results are presented. The study for the case of a bounded interval of time $[0, N]$ is also discussed.

The problem of updating the initial conditions of dynamic controllers when the plant is nonlinear is considered. The modeling of the nonlinear system considers the plant described by Takagi-Sugeno (TS) fuzzy models. The new design procedure is based on LMIs and it allows the existence of polytopic



SUMÁRIO

	Página
1. Introdução.....	01
2. Atualização das Condições Iniciais no Controlador para Sistemas Contínuos no Tempo.....	05
2.1 O Problema do Controle Quadrático Ótimo	05
2.2 Especificação das Condições Iniciais Ótimas no Controlador	08
2.3 Especificação das Condições Iniciais Ótimas para Controladores PI.....	16
2.4 Aplicação no controle de um pêndulo invertido.....	22
2.5 Atualização das Condições Iniciais no Sistema Controlador /Observador	34
2.6 Aplicação no Controle de um Pêndulo Invertido com Observador.....	42
2.7 Projeto de Sistema de Controle Utilizando LMI	52
3. Atualização das Condições Iniciais no Controlador para Sistemas Discretos no Tempo.....	75
3.1 O Problema do Controle Ótimo	75
3.2 Especificação das Condições Iniciais Ótimas no Controlador	78
3.3 Exemplo 1	87
3.4 Aplicação no Projeto de Controle do Pêndulo Invertido	89
3.5 O Controle Quadrático Ótimo no Intervalo $[0, N]$	96
4. Atualização das Condições Iniciais no Controlador de Sistemas Não-Lineares.....	105
4.1 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno (TS)	106
4.2 Reguladores com Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno (TS)	113



4.3 Formulação do Problema	116
4.4 Exemplos de Aplicações	130
5. Conclusões.....	162
5.1 Conclusões Gerais.....	162
5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros	164
Apêndice A	165
Apêndice B	168
Apêndice C	178
Apêndice D	180
Apêndice E	181
Apêndice F	186
Apêndice G.....	189
Apêndice H.....	192
Referências Bibliográficas	194



LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 2.1: Sistema realimentado com controlador dinâmico	9
Figura 2.2: Diagrama de blocos do sistema de controle com atualização da condição inicial no controlador, quando $x(0^-) = 0$	14
Figura 2.3: Sistema realimentado com controlador Proporcional Integral (PI)	17
Figura 2.4: Respostas da saída $y(t)$, e da lei de controle $u(t)$, do Exemplo 1, sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador.	21
Figura 2.5: Sistema pêndulo invertido	22
Figura 2.6: Sistema de controle de um pêndulo invertido	23
Figura 2.7: Diagrama de blocos do sistema de controle de um pêndulo invertido com atualização da condição inicial no controlador (PI)	27
Figura 2.8: Curvas de respostas e as curvas de controle ao degrau unitário do sistema projetado pêndulo invertido, sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador, quando $x(0^-) = 0$	30

Figura 2.9 : Curvas de respostas e as curvas de controle ao degrau unitário do sistema projetado pêndulo invertido, sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador, quando $x_p(0^-) = [\pi/8 \ 0.01 \ 0.5 \ 0.01]$ e $\xi(0^-) = 0$	31
Figura 2.10: Respostas do sistema do Exemplo 2, sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador.....	33
Figura 2.11: Sistema Realimentado	34
Figura 2.12: Sistema realimentado com observador	37
Figura 2.13: Curvas de respostas ao degrau unitário do sistema projetado sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador/observador	49
Figura 2.14: Curvas da lei de controle do sistema sem e com atualização, ótima das condições iniciais do controlador/observador, respectivamente, com $t_s = 8s$ para o observador.....	49
Figura 2.15: Curvas da saída do integrador sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador/observador com $t = t_s = 8s$ para o observador.....	50
Figura 2.16: Curvas de respostas ao degrau unitário do sistema projetado sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador/observador, com $t_s = 2s$ para o observador	51
Figura 2.17: Sistema realimentado.....	52
Figura 2.18: Resposta do sistema realimentado com atualização das condições iniciais no controlador	67



Figura 2.19: Respostas do sistema para diferentes valores do vetor de estado inicial da planta, $x_p(0)$, com a atualização das condições iniciais, proposta, descrita na Tabela 2, com $\xi(0^-) = 0$	74
Figura 3.1: Sistema realimentado com controle dinâmico.....	78
Figura 3.2: Sistema realimentado com controlador proporcional integral e realimentação de estados	84
Figura 3.3: Resposta da saída da planta do Exemplo.....	89
Figura 3.4: Diagrama de blocos do sistema de controle de um pêndulo invertido com atualização da condição inicial no controlador (PI).....	93
Figura 3.5: Curvas de respostas ao degrau unitário do sistema pêndulo invertido, sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador	95
Figura 3.6: Curva de resposta ao degrau unitário do sistema do Exemplo 1	99
Figura 3.7: Curva de resposta ao degrau unitário do sistema pêndulo-invertido.....	104
Figura 4.1: Funções de pertinência para as regras 1 e 2 da planta.....	112
Figura 4.2: Curva de resposta ao degrau unitário do sistema pêndulo invertido com atualização ótima das condições iniciais do controlador.....	133
Figura 4.3: Curva de controle ao degrau unitário do sistema projetado pêndulo invertido com atualização das condições iniciais do controlador.....	134



Figura 4.4:	Curvas dos outros estados do sistema projetado pêndulo invertido com atualização das condições iniciais do controlador, quando submetido ao degrau unitário	134
Figura 4.5:	Gráfico do limitante superior do índice de desempenho do sistema em função de $\xi_l = \xi(\infty) - \xi(0)$	135
Figura 4.6:	Sistema Bola-viga.....	136
Figura 4.7:	Curva de resposta ao degrau unitário do sistema bola-viga com atualização ótima das condições iniciais do controlador.....	142
Figura 4.8:	Curva de controle ao degrau unitário do sistema projetado bola-viga com atualização das condições iniciais do controlador.....	142
Figura 4.9:	Curvas dos outros estados do sistema projetado bola-viga com atualização das condições iniciais do controlador, quando submetido ao degrau unitário.....	143
Figura 4.10:	Curva de resposta ao degrau unitário do sistema bola-viga com incertezas politópicas e com atualização ótima das condições iniciais do controlador	152
Figura 4.11:	Curvas de controle ao degrau unitário do sistema projetado bola-viga com incertezas politópicas e com atualização das condições iniciais do controlador.	152
Figura 4.12:	Curvas dos outros estados do sistema projetado bola-viga com incertezas politópicas e com atualização das condições iniciais do controlador, quando submetido ao degrau unitário.....	153



Figura 4.13: Curva de resposta ao degrau de amplitude $r_0 = 0.7737$ do sistema em um RA com atualização ótima das condições iniciais. 160

Figura 4.14: Curva de controle ao degrau de amplitude $r_0 = 0.7737$ do sistema em um RA com atualização ótima das condições iniciais..... 160

Figura 4.15: Curvas de resposta dos outros estados do sistema projetado em um RA com atualização ótima das condições iniciais do controlador..... 161

LISTA DE TABELAS

Página

Tabela 1: Índices de desempenho do sistema com observador com tempo de estabelecimento $t_s = 2s$ e $t_s = 8s$51

Tabela 2: Valor ótimo da atualização para o controlador, dependendo do vetor de estado inicial da planta $x_p(0)$, com $\xi(0^-) = 0$73

LISTA DE SIGLAS E ABREVIACÕES

- MSC : Mode Switching Control (Controle com Chaveamento de Modo).
- IVC : Initial Value Compensation (Compensação do Valor Inicial).
- LMI : Linear Matrix Inequalities (Desigualdades Matriciais Lineares).
- BIBO : Bounded Input Bounded Output (Entrada Limitada-Saída Limitada).
- CDP : Paralled Distributed Compensation (Compensação Paralela Distribuída).
- TS : Takagi e Sugeno.
- TSK : Takagi, Sugeno e Kang.
- PI : Proportional and Integral Controller (Controlador Proporcional e Integral).
- RA : Reator com Agitação.



CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Em várias situações práticas, é necessária a modificação adequada (ou controle) de um sistema, de modo que este comporte-se de forma pré-determinada.

Normalmente, o controle automático de um sistema real tem um dos seguintes objetivos: melhorar a qualidade da variável controlada ou diminuir o custo. Por exemplo, o controle ótimo da trajetória de um avião pode diminuir o consumo de combustível e o controle do processo de fabricação de papel pode melhorar a qualidade do mesmo.

No controle automático de sistemas, o objetivo é obter uma lei de controle que forneça as entradas de um processo, de modo que o sistema tenha um desempenho dinâmico desejado.

Na vasta literatura de controle, pode-se encontrar facilmente a utilização de alocação de pólos em diversos sistemas. Contudo, a localização correta dos zeros, por exemplo de uma função de transferência, pode ser indispensável para obter determinado desempenho no transitório (como exemplificado em Magni *et alii*, 1997; Reis *et alii*, 2003). É possível alocar zeros em função de transferência, aproveitando estruturas de realimentação dinâmicas já existentes (Kienitz e Grubel, 2000). Em muitos sistemas de controle aeroespaciais, que requerem precisão elevada, o projeto de sistemas de controle ótimo têm apresentado um papel muito importante (Betts, 2000; Filatey, 2000). Dentre eles, o projeto de sistemas de controle ótimos baseados na minimização de índices quadráticos de desempenho (Gao *et alii*, 2000; Geromel *et alii*, 1998). Em Ogata (1997), foi

observado que a condição inicial do sistema controlado, influencia o índice de desempenho quadrático.

Na gravação ou leitura de dados em setores de discos rígidos (hard disk drives), o posicionamento da cabeça magnética deve ser rápido e preciso. Para obter essas exigências um sistema de controle denominado *Mode Switching Control* (MSC) com duas estruturas é projetado: a primeira tem o objetivo de atingir rapidamente as proximidades do local desejado e a outra, o posicionamento preciso da cabeça nesta posição. Um sistema de chaveamento faz a seleção dos controladores. Cada controlador pode ser otimamente projetado, minimizando um índice de desempenho quadrático, contudo, quando o chaveamento ocorre, uma variação insignificante para o fim da busca pode algumas vezes causar uma mudança indesejada na resposta transitória. Yamaguchi *et alii* (1992) propuseram um método de Compensação do Valor Inicial (em inglês, *Initial Value Compensation* (IVC)) para melhorar as características da resposta transitória depois do chaveamento. Johansson (2000) também aplicou IVC com o objetivo de reduzir o tempo de estabilização do sistema controlado. Oboe *et alii* (2002) apresentaram um novo método IVC, que reduz o efeito causado pelo chaveamento que pode amplificar por exemplo, a ressonância ou distúrbios repetitivos, quando o controle do sistema é feito chaveando diferentes leis de controle realimentados, baseadas no mesmo estado estimado.

Em Yamaguchi *et alii* (1996a; 1996b; 1997; 1998), foram efetuados outros estudos e propostas de formas alternativas de implementação da atualização das condições iniciais, objetivando o cancelamento de pólos indesejáveis por realocação de zeros ou a introdução de pólos dominantes. Nesses artigos, considerando o método de projeto cujo objetivo foi o de minimizar um índice de desempenho quadrático (denominado IVC I), foram apenas analisados os casos nos quais os sinais de referência são nulos e os sistemas, planta e controlador, discretos no tempo.

Nesta tese é mostrado que em um sistema controlado, com um sinal de referência do tipo degrau, consistindo da planta e de um ou mais controladores

dinâmicos, contínuos no tempo, as condições iniciais no controlador podem ser modificadas, melhorando o desempenho do sistema, segundo um índice quadrático. Uma alteração nas condições iniciais no controlador pode ser interpretada como uma mudança no posicionamento dos zeros do sistema Teixeira *et alii* (2002a; 2002b; 2002c).

Hirata *et alii* (2003) utilizam o IVC para minimizar erros de rastreamento considerando o comportamento da resposta degrau entre amostragem em controle com múltiplas estruturas. Iwasaki *et alii* (2004) propõem através do IVC uma nova metodologia para suprimir a vibração residual em máquinas com operações repetitivas rápidas e alta precisão de posição.

Uma das contribuições desta tese é introduzir de forma clara e precisa as bases da atualização das condições iniciais de controladores dinâmicos, para sistemas lineares invariantes no tempo, o que pode motivar o uso desta técnica, pouco conhecida no Brasil, nas mais variadas aplicações, bem como o estudo de novas arquiteturas de controle. Ela também oferece um procedimento metódico para o projeto de sistemas de controle contínuos e discretos no tempo, com atualização das condições iniciais de modo a minimizar um índice de desempenho quadrático, e permite adicionalmente o rastreamento de sinais de referência não nulos, no caso, do tipo degrau. O texto é organizado de maneira que proporciona uma evolução didática a respeito dos tipos de sistemas considerados. Nos três primeiros capítulos são considerados apenas sistemas lineares invariantes no tempo (contínuos e discretos). Em seguida, são abordados sistemas não-lineares.

No Capítulo 2, são apresentadas as bases da atualização das condições iniciais de controladores dinâmicos, contínuos no tempo. Para atualização ótima das condições iniciais do controlador há necessidade do conhecimento prévio do vetor de estado inicial do sistema. Neste capítulo também é proposto um método de atualização ótima das condições iniciais do sistema controlador/observador, quando não é possível medir todos os estados do sistema. O capítulo finaliza com um método alternativo para atualização das condições iniciais no controlador, no caso considerado integral, baseado em



Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, Linear Matrix Inequalities (LMIs)). Neste método é possível especificar vários índices de desempenho, por exemplo, a taxa de decaimento, restrições nas entradas e saídas e ainda a existência de incertezas politópicas nos parâmetros da planta. São apresentados resultados que consideram as condições iniciais pertencentes a um conjunto politópico.

No Capítulo 3, introduz-se, para sistemas discretos, a atualização das condições iniciais no controlador e formaliza-se os resultados obtidos.

No Capítulo 4, é abordado o problema da atualização das condições iniciais em controladores dinâmicos quando a planta é não-linear. Utiliza-se os modelos fuzzy Takagi-Sugeno para modelar a planta. Os novos resultados obtidos são apresentados em termos de LMIs. Esta metodologia permite entre outras especificações a consideração de incertezas politópicas nos parâmetros da planta. Um exemplo (bola-viga) ilustra este fato. Esta é uma importante contribuição desta tese, pois os métodos de atualizações ótimas das condições iniciais descritos na literatura são restritos aos sistemas lineares.

No Capítulo 5, apresentam-se as conclusões finais.



CAPÍTULO 2

ATUALIZAÇÃO DAS CONDIÇÕES INICIAIS NO CONTROLADOR PARA SISTEMAS CONTÍNUOS NO TEMPO

2.1 O Problema do Controle Quadrático Ótimo

Considere o sistema multivariável a ser controlado definido por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1a)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle do sistema; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são matrizes constantes.

O problema do controle quadrático ótimo, consiste em determinar a matriz constante K do vetor de controle

$$u(t) = -K x(t), \quad (2.1b)$$

de forma a minimizar o índice de desempenho:

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (2.2)$$

sendo que Q é uma matriz real simétrica definida positiva (ou semidefinida positiva) e R é uma matriz real simétrica definida positiva ou $R = 0$. O segundo termo do lado direito da equação (2.2) contabiliza o dispêndio da energia dos sinais de controle. As matrizes Q e R determinam a importância

relativa da convergência do erro (no caso de $x(t)$ para zero) e o dispêndio dessa energia. Admite-se que o vetor de controle $u(t)$ não esteja sujeito a restrições.

Para determinar os elementos da matriz K quando $R > 0$, que minimiza o índice de desempenho, é necessário resolver a seguinte equação de Riccati para uma matriz simétrica definida positiva P (Ogata, 1997):

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (2.3)$$

O *software* MATLAB possui o comando *lqr* que fornece a solução da equação de Riccati para sistemas contínuos e determina a matriz de ganho de retroação ótima, $K = R^{-1}B^T P$.

O Lema 2.1 descrito a seguir será muito útil no estabelecimento dos resultados desta tese:

Lema 2.1: (Chen, 1999) Seja A uma matriz com todos os autovalores com parte real negativa. Então, para toda matriz real simétrica semidefinida positiva $Q = N^T N$ com a propriedade de que (A, N) é observável, a equação de Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q, \quad (2.3a)$$

tem uma única solução P simétrica definida positiva.

Prova: Ver Apêndice A.

O teorema seguinte fornece condições suficientes para existência e unicidade da equação de Riccati.

Teorema 2.1: (Barnett, 1985, p.278) Sejam Q uma matriz real simétrica definida positiva (ou semidefinida positiva) e R uma matriz real simétrica definida positiva. Suponhamos que (A, B) é controlável e (A, N) é observável, sendo $Q = N^T N$. Então, a equação de Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

tem uma única solução P simétrica definida positiva tal que a matriz,

$$A - BR^{-1}B^T P,$$

é estável (possui todos autovalores com parte negativa) e a lei de realimentação

$$u(t) = -R^{-1}B^T P x(t)$$

torna o índice (2.2) mínimo e igual a $x(0)^T P x(0)$.

Prova: Ver Apêndice B, Teorema 2.

Observação 2.1: O valor ótimo do índice de desempenho (2.2) pode ser calculado em termos da condição inicial $x(0)$ e de P , que se relaciona com A , B , Q e R por meio da equação de Riccati. Dessa forma, a condição inicial, em geral influencia o índice de desempenho quadrático. No caso específico no qual o sistema (2.1) representa um sistema controlado, consistindo de uma planta e um ou mais controladores dinâmicos, as condições iniciais podem ser modificadas, proporcionando assim um novo grau de liberdade no projeto de sistemas de controle. Esse fato tem sido aplicado em sistemas com várias estruturas de controle, como compensação do valor inicial (IVC), para melhorar as características das respostas transitórias. Em Yamaguchi *et alii* (1992, 1996a, 1996b) esse método é apresentado para sistemas discretos no tempo, tendo como objetivo sua aplicação em um controlador com chaveamento, quando a entrada de referência é a nula.

A seguir será apresentado com detalhes um novo método, desenvolvido em Teixeira *et alii* (2002a, 2002b), para a especificação ótima das condições iniciais dos controladores, sujeitos a entradas do tipo degrau. Em 2003, Hirata *et alii* apresentam e aplicam uma extensão deste método, pois consideram o erro de rastreamento sujeito a restrições, para sistemas lineares e discretos no tempo. Esta restrição pode ser utilizada para especificar o valor inicial da entrada de controle $u(t)$. Como mencionado na introdução, esta tese apresenta adicionalmente resultados não publicados sobre o assunto, por exemplo, projetos de controladores com atualização das condições iniciais baseados em LMIs considerando plantas não-lineares. Estes resultados são descritos no Capítulo 4.

A análise do método apresentado em Teixeira *et alii* (2002a, 2002b), será desenvolvida de forma didática, com o objetivo de apresentar claramente o potencial da atualização das condições iniciais nos controladores e assim motivar os leitores para novas aplicações desta idéia. Também, a descrição do método proposto visa motivar a sua aplicação de forma independente do tipo do controlador.

2.2 Especificação das Condições Iniciais Ótimas no Controlador

Considere o sistema escalar linear invariante no tempo, controlável e observável:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p(t) &= \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t),\end{aligned}\tag{2.4a}$$

sendo que, $\mathbf{x}_p(t) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados; $u(t) \in \mathfrak{R}$ é a entrada de controle do sistema; $y(t) \in \mathfrak{R}$ é a saída do sistema; $\mathbf{A}_p \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é a matriz característica do sistema; $\mathbf{B}_p \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ é a matriz de entrada do sistema e $\mathbf{C}_p \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$ é a matriz de saída do sistema.

Considere também, que é possível escolher um controlador :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c e(t), \\ u(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) + D_c e(t),\end{aligned}\tag{2.4b}$$

sendo que $\mathbf{x}_c(t) \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de estados do controlador, $e(t) \in \mathfrak{R}$ é o vetor erro, $e(t) = r(t) - y(t)$; sendo $r(t)$ a referência, $\mathbf{A}_c \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ é a matriz característica do controlador, $\mathbf{B}_c \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$ é a matriz de entrada do controlador, $\mathbf{C}_c \in \mathfrak{R}^{1 \times m}$ é a matriz de saída do controlador e $D_c \in \mathfrak{R}$ de tal modo, que o sistema realimentado, mostrado na Figura 2.1, com entrada $r(t)$, e saída $y(t)$, seja estável. Suponha também que o sistema seja observável.

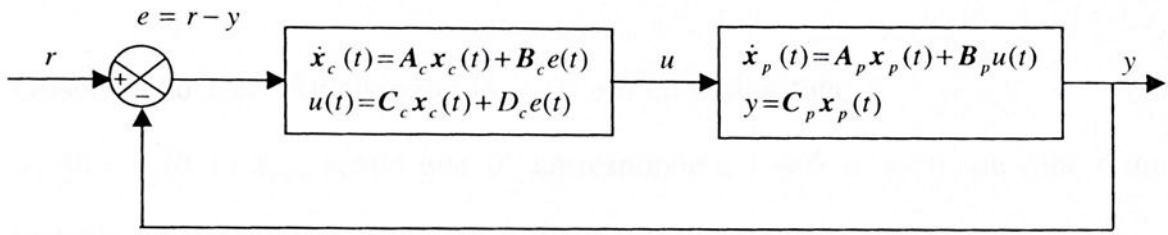


Figura 2.1: Sistema realimentado com controlador dinâmico.

A lei de controle do sistema é:

$$u(t) = C_c x_c(t) + D_c e(t).$$

O sistema completo é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Br(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (2.5a)$$

sendo que,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_p D_c \\ B_c \end{bmatrix}, C = [C_p \ 0]. \quad (2.5b)$$

O problema do projeto de controladores ótimos com atualização das condições iniciais do controlador é definido a seguir.

Problema 2.1: Considere o sistema controlado (2.5a), (2.5b) estável e que na entrada, a referência (função degrau de amplitude r_0) ocorra em $t = 0$, ou seja:

$$r(t) = \begin{cases} r_0, & \text{para } t \geq 0, \\ 0, & \text{para } t < 0, \end{cases}$$

sendo que r_0 é uma constante real conhecida. Determine x_{co} , a atualização de $x_c(t)$ em $t = 0$ de modo que o índice de desempenho,

$$J(x_{co}) = \int_0^{+\infty} \varepsilon(t)^T Q \varepsilon(t) dt, \quad (2.6)$$

seja mínimo.

Em (2.6), Q é uma matriz real simétrica definida positiva (ou semidefinida positiva), $\varepsilon(t)$ representa o erro entre $x(t)$ e o seu valor de regime, isto é:

$$\varepsilon(t) = x(t) - x(\infty), \quad (2.7)$$

com $x(t)$ dado pela equação (2.5a).

Observação 2.2: Atualização de $x_c(t)$ em $t = 0$ significa:

$x_c(0) = x_c(0^-) + x_{co}$, sendo que 0^- corresponde a $t \rightarrow 0$ e $t < 0$, ou seja, é um instante imediatamente anterior à aplicação da função degrau de amplitude r_0 .

Observação 2.3: Em $t = 0^-$, num instante imediatamente anterior à atualização da entrada $r(t)$ e da atualização de $x_c(t)$, pode-se considerar que:

$$x(0^-) = \begin{bmatrix} x_p(0^-)^T & x_c(0^-)^T \end{bmatrix}^T.$$

Em $t = 0$, quando a amplitude $r(t)$ é alterada para r_0 , $x_c(t)$ é atualizada, passando de $x_c(0^-)$ para $x_c(0^-) + x_{co}$ e $x_p(0) = x_p(0^-)$:

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_p(0^-) \\ x_c(0^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta \\ x_{co} \end{bmatrix} = x(0^-) + \begin{bmatrix} \theta \\ x_{co} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Note que o vetor x_{co} pode ser arbitrariamente especificado, pois é uma atualização nas variáveis de estado do controlador, que em geral, é implementado eletronicamente pelo projetista.

O lema seguinte diz qual é o efeito da atualização das condições iniciais no controlador, no valor de regime dos estados e da saída do sistema.

Lema 2.2: Considere o sistema descrito pelas equações (2.5a) e (2.5b). Suponha que:

- (i) o sistema é estável;
- (ii) as condições iniciais no controlador são alteradas, isto é:

$$x(0) = x(0^-) + \begin{bmatrix} \theta \\ x_{co} \end{bmatrix}, \quad x(0^-) = \begin{bmatrix} x_p(0^-) \\ x_c(0^-) \end{bmatrix}$$

sendo $x(0^-)$ a condição inicial antes da atualização e x_{co} a atualização das condições iniciais do controlador ;

(iii) é aplicada uma entrada $r(t) = r_0$, $t \geq 0$, sendo r_0 uma constante real.

Então:

- a) o valor de regime dos estados, $x(\infty) = -A^{-1}Br_0$ permanece inalterado, com a atualização das condições iniciais;
- b) o valor de regime da saída, $y(\infty) = -CA^{-1}Br_0$, permanece inalterado, com atualização das condições iniciais do controlador.

Prova: Considerando o sistema sem a atualização das condições iniciais, isto é, $x(0) = x(0^-)$, aplicando o Teorema do Valor Final (Ogata, 1997), obtém-se de (2.5a):

$$x_{sa}(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_{sa}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_{sa}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sI - A)^{-1}[B(r_0/s) + x(0^-)] = -A^{-1}Br_0. \quad (2.9a)$$

Em (2.9a), $x_{sa}(t)$ designa $x(t)$ sem o ajuste da condição inicial. Assim, o valor da respectiva saída do regime será:

$$y_{sa}(\infty) = Cx_{sa}(\infty) = -CA^{-1}Br_0. \quad (2.9b)$$

Considere agora o sistema com atualização das condições iniciais, ou seja, $x(0) = x(0^-) + \begin{bmatrix} 0 & x_{co}^T \end{bmatrix}^T$. Então, de (2.5a) tem-se que:

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} X(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sI - A)^{-1} \left[B(r_0/s) + x(0^-) + \begin{bmatrix} 0 & x_{co}^T \end{bmatrix}^T \right] = -A^{-1}Br_0$$

e desta forma,

$$y(\infty) = Cx(\infty) = -CA^{-1}Br_0.$$

A prova está concluída.

Observação 2.4: Das equações (2.5a), (2.5b), (2.7) e (2.9a) tem-se para $t > 0$,

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = \dot{x}(t) &= Ax(t) + Br(t) = Ax(t) + Br_0 \\ &= A(x(t) + A^{-1}Br_0) = A(x(t) - x(\infty)) = A\varepsilon(t) \end{aligned} \quad (2.10a)$$

sendo que, de (2.7)-(2.9a),

$$\varepsilon(0) = x(0) - x(\infty) = x(0^-) + \begin{bmatrix} 0 & x_{co}^T \end{bmatrix}^T + A^{-1}Br_0. \quad (2.10b)$$

A solução do problema proposto é apresentado no Teorema 2.2 a seguir:

Teorema 2.2: O Problema 2.1 tem solução quando (A, N) for observável, sendo $Q = N^T N$. Neste caso, a atualização ótima x_{co} das condições iniciais do controlador é única e pode ser calculada pela expressão:

$$x_{co} = - \left(\begin{bmatrix} 0_{m \times n} & I_m \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & I_m \end{bmatrix} P (x(0^-) + A^{-1} B r_0), \quad (2.11)$$

sendo que P é a solução de (2.3a) com Q a matriz dada em (2.6) e A a matriz característica da dinâmica do erro em (2.5b), $x(0^-)$ é a condição inicial do sistema planta-controlador antes da atualização (como descrito nas Observações 2.2 e 2.3), $0_{k \times l}$ denota a matriz $k \times l$ com todos os elementos nulos, I_m é a matriz identidade de ordem m e $A^{-1} B r_0$ representa o valor de regime das variáveis de estado $\begin{bmatrix} x_p(t)^T & x_c(t)^T \end{bmatrix}^T$, do sistema de malha fechada devido à entrada degrau de amplitude r_0 .

Prova: O problema consiste em encontrar o vetor x_{co} , de modo a minimizar o índice

$$J(x_{co}) = \int_0^{+\infty} (\varepsilon(t))^T Q \varepsilon(t) dt, \quad (2.12)$$

sendo a dinâmica do erro dada em (2.10a) por:

$$\dot{\varepsilon}(t) = A \varepsilon(t).$$

Como

$$\varepsilon(t) = e^{At} \varepsilon(0), \quad (2.13)$$

pode-se escrever:

$$J(x_{co}) = \int_0^{+\infty} (\varepsilon(0))^T e^{A^T t} Q e^{At} \varepsilon(0) dt. \quad (2.14)$$

Agora, pela hipótese do teorema, a matriz A tem todos os autovalores com parte real negativa e (A, N) é observável, sendo $Q = N^T N$. Portanto, aplicando

o Lema 2.1, obtém-se uma única matriz $P = P^T > 0$, solução da equação de Lyapunov:

$$(A^T P + P A) = -Q. \quad (2.15)$$

Observe que:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{A^T t} P e^{A t} \right) = e^{A^T t} A^T P e^{A t} + e^{A^T t} P A e^{A t} = e^{A^T t} (A^T P + P A) e^{A t}. \quad (2.15a)$$

Assim, pelas equações (2.14)-(2.15a), o índice de desempenho dado em (2.12) pode ser representado da seguinte forma:

$$J(x_{co}) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a -\frac{d}{dt} ((\varepsilon(t))^T P (\varepsilon(t))) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} -(\varepsilon(t))^T P \varepsilon(t) \Big|_0^a.$$

Como os autovalores de A apresentam parte real negativa, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, obtém-se:

$$J(x_{co}) = (\varepsilon(0))^T P \varepsilon(0). \quad (2.15b)$$

Substituindo $\varepsilon(0)$ em termos de x_{co} , tem-se de (2.10b)

$$J(x_{co}) = \left(x(0^-) + A^{-1} B r_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{co} \end{bmatrix} \right)^T P \left(x(0^-) + A^{-1} B r_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{co} \end{bmatrix} \right).$$

Para encontrar x_{co} que minimize J , basta impor que:

$$\nabla J(x_{co}) = \left[\frac{\partial J}{\partial x_{co1}} \quad \frac{\partial J}{\partial x_{co2}} \quad \dots \quad \frac{\partial J}{\partial x_{com}} \right]^T = 0_{m \times 1}, \quad (2.16)$$

sendo $\nabla J(x_{co})$ o gradiente da função J e

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_{co} \end{bmatrix} = [0_{1 \times n} \quad x_{co1} \quad x_{co2} \quad \dots \quad x_{com}]^T,$$

pois, a matriz Hessiana de J é definida positiva. Então, tem-se de (2.16) que:

$$\nabla J(x_{co}) = 2 \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0_{1 \times n} & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ 0_{1 \times n} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix} P \left(A^{-1} B r_0 + x(0^-) + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ x_{co} \end{bmatrix} \right)$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & I_m \end{bmatrix} P \left(x(0^-) + A^{-1} B r_0 + \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_m \end{bmatrix} x_{co} \right) = 0 \quad (2.17)$$

Logo, obtém-se de (2.17) a expressão (2.11):

$$x_{co} = - \left(\begin{bmatrix} 0_{m \times n} & I_m \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & I_m \end{bmatrix} P \left(x(0^-) + A^{-1} B r_0 \right).$$

Tendo em vista que P é definida positiva, então a inversa na expressão de x_{co} existe.

Este é um grau de liberdade no projeto de controladores, que pode ser explorado quando a referência é nula (Yamaguchi *et alii*, 1996a; 1996b; 1997) ou quando se considera a existência de um sinal de referência $r_0 \neq 0$ (Teixeira *et alii* (2002a; 2002b); Hirata *et alii* (2003); Iwasaki *et alii* (2004)). Os exemplos de aplicação mostrados na seção seguinte atestam a eficácia do método proposto.

Note que se $(A, \sqrt{Q})$ é observável, então o Problema 2.1 tem solução.

Observação 2.5: A atualização de $x_c(t)$ pode ser feita em qualquer instante $t = t_0$. De maneira análoga, nas condições do Teorema 2.2, obtém-se a atualização ótima do controlador em t_0 .

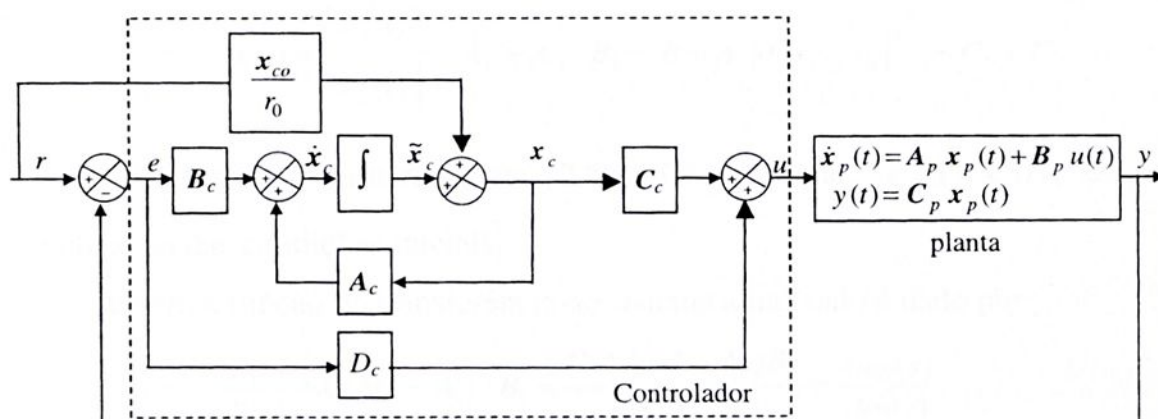


Figura 2.2: Diagrama de blocos do sistema de controle com atualização da condição inicial no controlador, quando $x(0^-) = 0$.

A Figura 2.2 apresenta uma forma de implementação desta idéia, pois observe que:

- (i) para $t < 0$, $r(t) = 0$ e assim $(x_{co}/r_0)r(t) = 0$;
- (ii) para $t \geq 0$, $r(t) = r_0$ e $(x_{co}/r_0)r(t) = x_{co}$.

Pode-se interpretar esta estratégia de controle como o posicionamento ótimo dos zeros da função de transferência $Y(s)/R(s)$.

De fato:

Da Figura 2.2, tem-se :

$$x_c(t) = \tilde{x}_c(t) + x_{co}; \quad \dot{\tilde{x}}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e(t) \quad \text{e} \quad u(t) = C_c x_c(t) + D_c e(t).$$

Assim, com a atualização as equações do sistema são dadas por:

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t), \quad (2.18)$$

$$\dot{\tilde{x}}_c(t) = A_c (\tilde{x}_c(t) + x_{co}) + B_c e(t) \quad (2.19)$$

$$u(t) = C_c (\tilde{x}_c(t) + x_{co}) + D_c e(t). \quad (2.20)$$

A dinâmica do sistema completo é descrita por:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A_1 \bar{x}(t) + B_1 r(t),$$

$$y(t) = C_1 \bar{x}(t),$$

sendo que,

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ \tilde{x}_c(t) \end{bmatrix}; \quad A_1 = A; \quad B_1 = B + A \begin{bmatrix} 0 & x_{co}/r_0 \end{bmatrix}^T \quad \text{e} \quad C_1 = C,$$

com A , B e C as matrizes em (2.5b). Observe que: $\tilde{x}_c(t) = x_c(t)$, sem a atualização das condições iniciais.

Assim, a função de transferência do sistema atualizado é dado por :

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 = \frac{C \text{Adj}(sI - A) B_1}{\det(sI - A)} = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}.$$

Dessa forma vemos que com a atualização das condições iniciais no controlador os pólos permanecem inalterados e os zeros do sistema são realocados.

Observação 2.6: (i) O índice de desempenho dado em (2.2), com lei de controle como em (2.1b), com $x(t)$ satisfazendo (2.1a) pode ser colocado na forma (2.6) pois,

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt = \int_0^{+\infty} x^T(t)Q_t x(t)dt,$$

sendo

$$Q_t = (Q + K^T R K); \quad \dot{x}(t) = (A - BK)x(t);$$

(ii) Se $u(t) = -Kx(t)$ estabiliza o sistema e (A, N) é observável com $Q = N^T N$, pode-se provar que $(A - BK, \tilde{N})$ é observável, sendo $\tilde{Q} = \tilde{N}^T \tilde{N}$ e $\tilde{Q} = Q + K^T R K$ (Lema 1 do Apêndice B) e assim, o índice de desempenho (2.2) pode ser calculado, como descrito por meio das equações (2.15a)-(2.15d):

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt = x(0)^T P_L x(0),$$

sendo $P_L = P_L^T > 0$, a única matriz solução da equação de Lyapunov:

$$(A - BK)^T P_L + P_L (A - BK) = -(Q + K^T R K); \quad (2.20a)$$

(iii) Pode-se provar que se em (2.2) o ganho K é ótimo isto é, $u(t) = -Kx(t)$ minimiza J , então a equação (2.20a) reduz-se à equação (2.3). Assim, neste caso P_L , a solução de (2.20a) e a solução P da equação de Riccati (2.3) são iguais (Apêndice C), ou seja, $P_L = P$.

2.3 Especificação das Condições Iniciais Ótimas para Controladores PI

Considere o sistema SISO linear invariante no tempo, controlável e observável:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u(t), \\ y(t) &= C_p x_p(t), \end{aligned} \quad (2.21)$$

sendo que, $\mathbf{x}_p(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $u(t)$ é a entrada de controle do sistema; $y(t)$ é a saída do sistema; $A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz característica do sistema; $B_p \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é a matriz de entrada do sistema e $C_p \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ é a matriz de saída do sistema.

Considere também, que é possível escolher constantes K_p e K_I de tal modo, que o sistema realimentado da Figura 2.3 com entrada $r(t)$ e saída $y(t)$ seja estável. Suponha também que o sistema é observável.

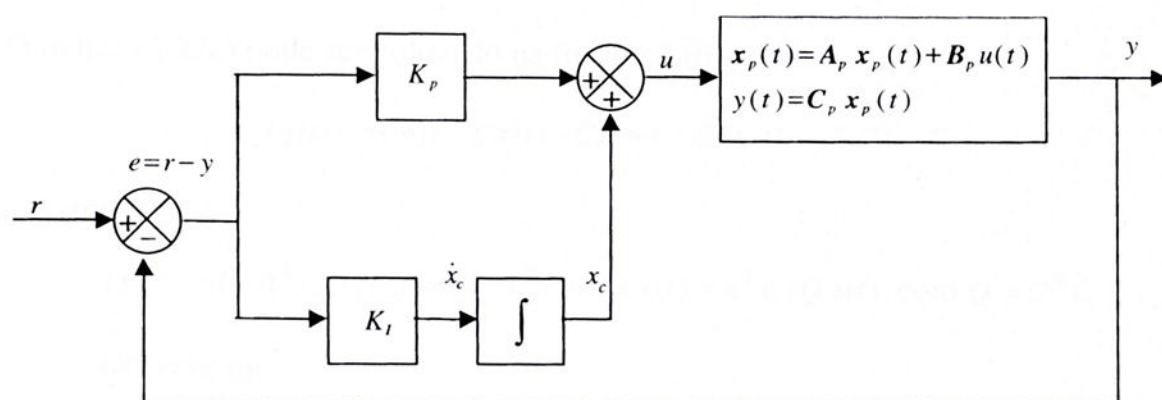


Figura 2.3: Sistema realimentado com controlador Proporcional Integral (PI).

Neste caso o controlador é descrito pelas equações:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= K_I e(t), \\ u(t) &= x_c(t) + K_p e(t),\end{aligned}\tag{2.22}$$

sendo que $x_c(t) \in \mathbb{R}$ é o estado do controlador, $e(t) \in \mathbb{R}$ é o erro, $e(t) = r(t) - y(t)$ e $r(t)$ a referência.

A lei de controle do sistema é:

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t)) + x_c(t).$$

O sistema completo é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} r(t) \\ y(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{2.23a}$$

sendo que

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{K}_p \mathbf{C}_p & \mathbf{B}_p \\ -\mathbf{K}_I \mathbf{C}_p & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \mathbf{K}_p \\ \mathbf{K}_I \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.23b)$$

Considera-se o Problema 2.1 para o sistema (2.23a)-(2.23b) com índice de desempenho dado por:

$$J(\mathbf{x}_{co}) = \int_0^{+\infty} (y(t) - y(\infty))^T (y(t) - y(\infty)) dt. \quad (2.23c)$$

O índice (2.23c) pode ser colocado na forma (2.6), pois

$$(y(t) - y(\infty)) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty)) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(t),$$

e assim,

$$(y(t) - y(\infty))^T (y(t) - y(\infty)) = \boldsymbol{\varepsilon}^T(t) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}^T(t) \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}(t), \text{ com } \mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}.$$

Observe que:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(t).$$

Para o caso do controlador PI, a condição inicial ótima (ver 2.11) é apresentada no Corolário 2.1 a seguir:

Corolário 2.1: Para o sistema (2.23a), (2.23b) a atualização ótima é dada por:

$$\mathbf{x}_{co} = - \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} r_0 + \mathbf{x}(0^-))}{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}^T}, \quad (2.24)$$

sendo que $\mathbf{0}$ denota um vetor de elementos nulos $1 \times n$, $\mathbf{P}$ é a solução de (2.3a), $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} r_0$ representa o valor de regime das variáveis de estado $[\mathbf{x}_p(t)^T \ x_c(t)^T]^T$ do sistema de malha fechada sujeito a entrada degrau de amplitude r_0 e $\mathbf{x}(0^-)$ é a condição inicial do sistema planta-controlador antes da atualização.

2.3.1 Exemplo 1:

Pretende-se a seguir, clarificar o procedimento para atualização das condições iniciais. Considere o sistema realimentado, estável e observável como na Figura 2.3, com:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix}; B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C_p = [1 \quad 0]$$

$$K_p = 1 \text{ e } K_I = 2$$

O sistema realimentado, dado por (2.23a) e (2.23b), possui as equações:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Br(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (2.25)$$

sendo que:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -26 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0 \quad 0]. \quad (2.25a)$$

Como observado anteriormente o Problema 2.1 para o sistema (2.25)-(2.25a) com índice desempenho dado por :

$$J(x_{co}) = \int_0^{+\infty} (y(t) - y(\infty))^T (y(t) - y(\infty)) dt, \quad (2.25b)$$

tem solução.

Supondo que no instante $t = 0$, a amplitude de $r(t)$ é alterada para o valor $r_0 = 1$, então $x_c(t)$ será atualizada, passando de $x_c(0^-)$ para $x_c(0^-) + x_{co}$, sendo x_{co} , o valor da atualização. De acordo com a Observação 2.2, considerando que as condições iniciais da planta e do controlador sejam nulas, isto é:

$$x_p(0^-) = 0 \text{ e } x_c(0^-) = 0,$$

tem-se:

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_p(0^-) \\ x_c(0^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{co} \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad x_{co}]^T,$$

sendo que 0 é o vetor de elementos nulos 2×1 .

O erro entre $x(t)$ e o seu valor de regime é:

$$\varepsilon(t) = x(t) - x(\infty)$$

e de (2.9a),

$$\mathbf{x}(\infty) = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}r_0 = [1 \ 0 \ 25]^T.$$

A dinâmica do erro, de acordo com as Observações 2.3 e 2.4, tem a equação:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}(t),$$

sendo que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty) = [-1 \ 0 \ -25 + x_{co}]^T.$$

O índice de desempenho em (2.25b) é dado por:

$$J(\mathbf{x}_{co}) = \boldsymbol{\varepsilon}(0)^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}(0) \quad (2.25c)$$

sendo que,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.2059 & 0.0196 & -0.0049 \\ 0.0196 & 0.0049 & 0 \\ -0.0049 & 0 & 0.0098 \end{bmatrix},$$

é a solução da equação:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) = -\mathbf{C}^T \mathbf{C},$$

que pode ser obtida usando o comando *lyap* do software MATLAB.

O valor x_{co} da atualização, obtido usando (2.24) é:

$$x_{co} = -\frac{[0 \ 0 \ 1] \mathbf{P} [-1 \ 0 \ -25]^T}{[0 \ 0 \ 1] \mathbf{P} [0 \ 0 \ 1]^T} = 24.5.$$

Assim, como

$$\boldsymbol{\varepsilon}(0) = [-1 \ 0 \ -25 + x_{co}]^T,$$

obtem-se por (2.25c) o índice de desempenho sem atualização ($x_{co} = 0$) e com atualização ($x_{co} = 24.5$):

$$J = \boldsymbol{\varepsilon}(0)^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}(0) = 6.0882 \text{ (sem atualização).}$$

$$J = \boldsymbol{\varepsilon}(0)^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}(0) = 0.2034 \text{ (com atualização);}$$

A Figura 2.4 mostra a resposta do sistema de malha fechada e da lei de controle com e sem atualização das condições iniciais.

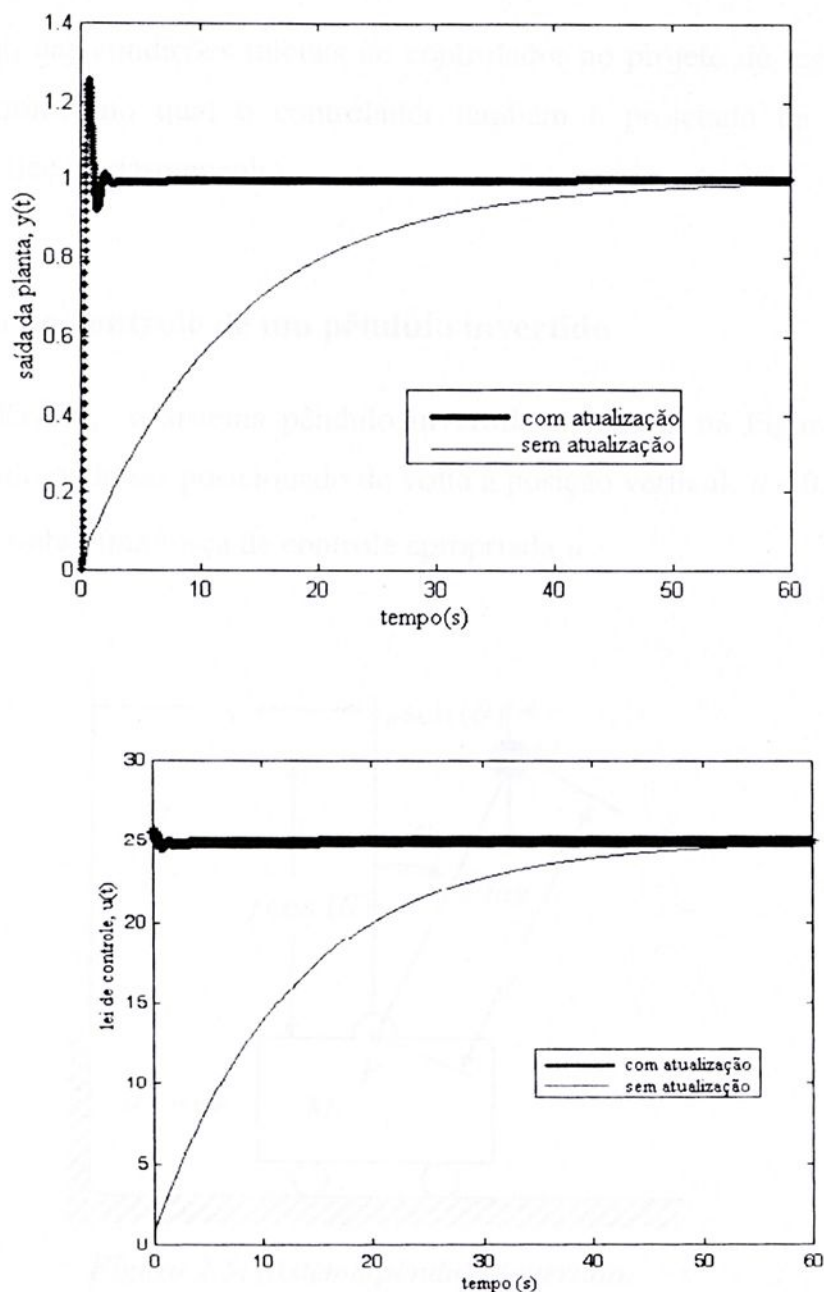


Figura 2.4: Respostas da saída $y(t)$, e da lei de controle $u(t)$, do Exemplo 1, sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador.

Analisando os resultados obtidos com o método de atualização das condições iniciais do controlador proposto pode-se concluir que ele melhorou o desempenho desejado do sistema controlado.

Neste primeiro exemplo, apenas explorou-se o efeito da atualização das condições iniciais no controlador no desempenho do sistema controlado. O controlador PI utilizado apenas estabiliza o sistema de malha fechada e não foi projetado para minimizar o índice de desempenho. No exemplo a seguir utiliza-

se a atualização das condições iniciais no controlador no projeto de reguladores quadráticos ótimos, no qual o controlador também é projetado de modo a minimizar o índice de desempenho.

2.4 Aplicação no controle de um pêndulo invertido

Considera-se, o sistema pêndulo invertido mostrado na Figura 2.5. O pêndulo invertido pode ser posicionado de volta à posição vertical, $\theta = 0$, quando se aplica ao carrinho uma força de controle apropriada u .

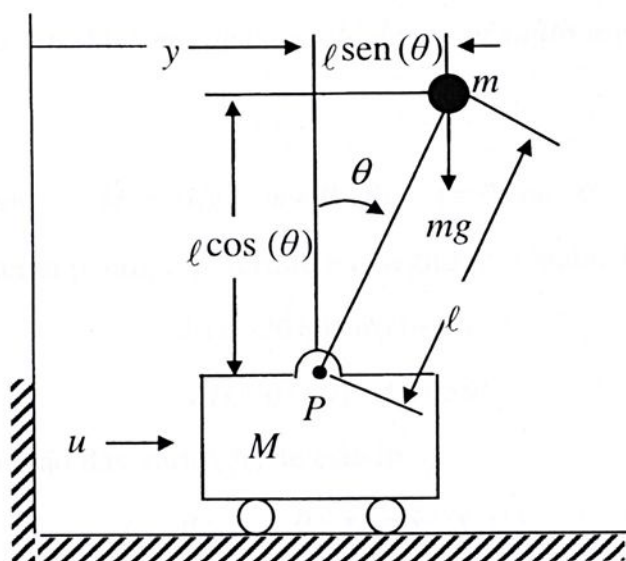


Figura 2.5: Sistema pêndulo invertido.

Para controlar a posição do carrinho, com erro de regime nulo para uma entrada $r(t)$ do tipo degrau se faz a retroação do sinal da posição y (que indica a posição do carrinho), para a entrada e , se insere um integrador no percurso de ação à frente, como mostrado na Figura 2.6. Esta configuração permite um rastreamento robusto, com relação a pequenas variações nos parâmetros da planta, de sinais de referência do tipo degrau.

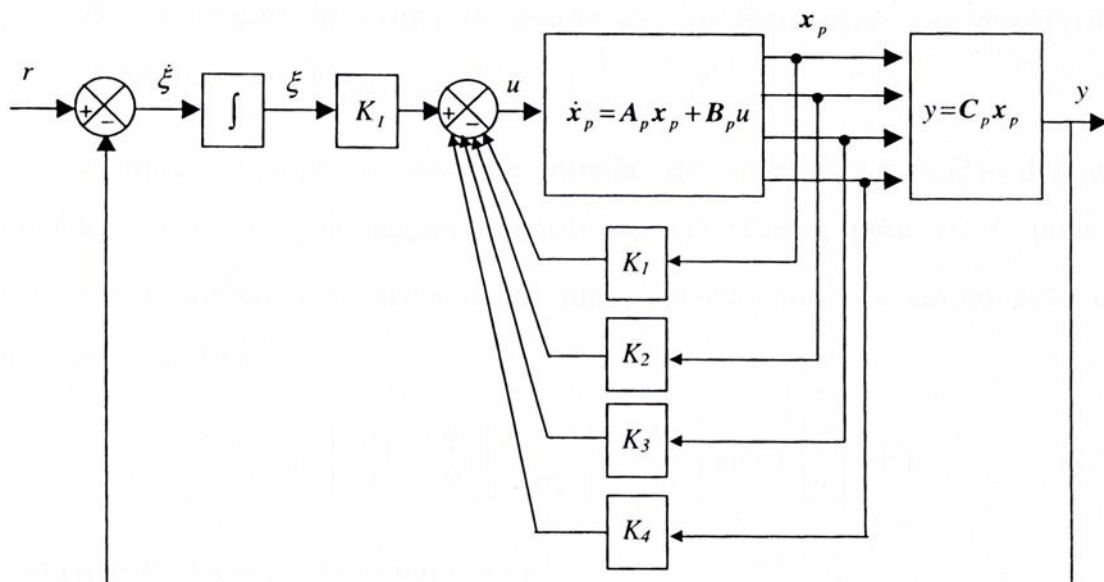


Figura 2.6: Sistema de controle de um pêndulo invertido.

Considerando-se $M = 2\text{Kg}$, $m = 0.1\text{Kg}$, $\ell = 0.5\text{m}$, o modelo matemático linearizado do sistema pêndulo invertido é o seguinte (Ogata, 1997):

$$\ddot{\theta}(t) = 20.601 \theta(t) - u(t), \quad (2.26)$$

$$\ddot{y}(t) = 0.5u(t) - 0.405 \theta(t). \quad (2.27)$$

Seja a definição das variáveis de estado:

$$x_1 = \theta; x_2 = \dot{\theta}; x_3 = y; x_4 = \dot{y}. \quad (2.28)$$

Então, com base nas equações (2.26)-(2.28), e considerando-se a posição do carrinho y como a saída do sistema, são obtidas as seguintes equações:

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t), \quad (2.29)$$

$$y(t) = C_p x_p(t), \quad (2.30)$$

$$u(t) = -Kx_p(t) + K_I \xi(t), \quad K = [K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4], \quad (2.31)$$

$$\dot{\xi}(t) = r(t) - y(t) = r(t) - C_p x_p(t), \quad (2.32)$$

sendo que,

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4095 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}; C_p = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0].$$

2.4.1 Determinação da matriz de ganho de realimentação que minimiza o índice desempenho

Admite-se que, o sinal de entrada de referência (função degrau) aplicado em $t = 0$, seja degrau unitário ($r_0 = 1$). Então, para $t > 0$, pode-se descrever a dinâmica do sistema por uma equação que é a combinação das equações (2.29)-(2.32):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & \mathbf{0} \\ -C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (2.33)$$

sendo que $\mathbf{0}$ denota o vetor nulo 4×1 .

Definam-se,

$$x_e(t) = x_p(t) - x_p(\infty); \quad \xi_e(t) = \xi(t) - \xi(\infty); \quad (2.34a)$$

$$u_e(t) = u(t) - u(\infty).$$

Agora, defina-se o vetor-erro $e(t)$ de dimensão $(n+1)$ por:

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t)^T & \xi_e(t) \end{bmatrix}^T. \quad (2.35)$$

O índice de desempenho considerado para o sistema é:

$$J_1(u_e) = \int_0^{+\infty} (e(t)^T Q e(t) + u_e(t)^T R u_e(t)) dt, \quad (2.36a)$$

sendo que são adotadas as matrizes

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}; \quad R = 0.01, \quad (2.36b)$$

Note que em regime permanente tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & \mathbf{0} \\ -C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty). \quad (2.37b)$$

Logo, como $r(\infty) = r(t) = r_0$ (constante) para $t \geq 0$, tem-se da equação (2.34a), subtraindo-se (2.37b) de (2.33):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & \mathbf{0} \\ -C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \quad (2.38)$$

sendo,

$$u_e(t) = -K x_e(t) + K_I \dot{x}_e(t). \quad (2.39)$$

Assim, da equação (2.35), a equação (2.38) torna-se:

$$\dot{e}(t) = A e(t) + B u_e(t) \quad (2.40a)$$

com,

$$A = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -C_p & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.40b)$$

e a equação (2.39) pode ser descrita por:

$$u_e(t) = -\hat{K} e(t), \quad (2.41a)$$

sendo

$$\hat{K} = [K \quad -K_I]; K = [K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4]. \quad (2.41b)$$

Para se determinar a matriz de ganho de retroação de estado, para a minimização do índice J_1 dado pelas equações (2.36a)-(2.36b), há necessidade de resolver uma equação de Riccati, a equação (2.3), conforme descrito na Seção 2.1. Como (A, B) é controlável e $(A, \sqrt{Q})$ é observável, pelo Teorema 2.1 existe uma única matriz simétrica definida positiva P satisfazendo a equação de Riccati:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0,$$

e a matriz $\hat{K} = R^{-1} B^T P$ é a matriz de ganho de retroação ótima.

Utilizando o *software* MATLAB, determinaram-se as matrizes P e $\hat{K}$:

$$P = \begin{bmatrix} 31.0237 & 4.5655 & 3.7150 & 5.7698 & -0.3183 \\ 4.5655 & 1.1293 & 1.0005 & 1.6220 & -0.0852 \\ 3.7150 & 1.0005 & 2.3892 & 1.7622 & -0.0852 \\ 5.7698 & 1.6220 & 1.7622 & 2.8186 & -0.1503 \\ -0.3183 & -0.0852 & -0.2127 & -0.1503 & 0.1194 \end{bmatrix}; \quad (2.41c)$$

$$\hat{K} = [-168.0620 \quad -31.8293 \quad -11.939 \quad -21.2706 \quad 1].$$

2.4.2 Cálculo do índice de desempenho sem a atualização das condições iniciais

Pelo Teorema 2.1 o valor ótimo do índice de desempenho em (2.36a) é:

$$e(0)^T P e(0). \quad (2.41d)$$

Agora, substituindo (2.31) em (2.29) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p K & B_p K_I \\ -C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t). \quad (2.42)$$

Pelo Teorema do Valor Final, para $R(s) = 1/s$, de (2.42), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} x_p(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_p - B_p K & B_p K_I \\ -C_p & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 11.9391]^T. \quad (2.43)$$

Supondo as condições iniciais nulas, isto é, $x_p(0^-) = 0$ e $\xi(0^-) = 0$ e substituindo (2.43) em (2.34a) obtém-se de (2.35):

$$e(0) = [x_p(0)^T - x_p(\infty)^T \quad \xi(0) - \xi(\infty)]^T = [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -11.9391]^T. \quad (2.43a)$$

Assim, substituindo (2.41c) e (2.43a) em (2.41d), obtém-se o valor ótimo do índice de desempenho em (2.36a) sem atualização:

$$e(0)^T P e(0) = 14.3283.$$

Uma vez determinada a matriz de ganho de realimentação $\hat{K}$ que minimiza o índice em (2.36a), deseja-se verificar o efeito da atualização das condições iniciais no integrador para o índice em (2.36a).

2.4.3 Cálculo do índice de desempenho com a atualização das condições iniciais

O diagrama de blocos está mostrado na Figura 2.7.

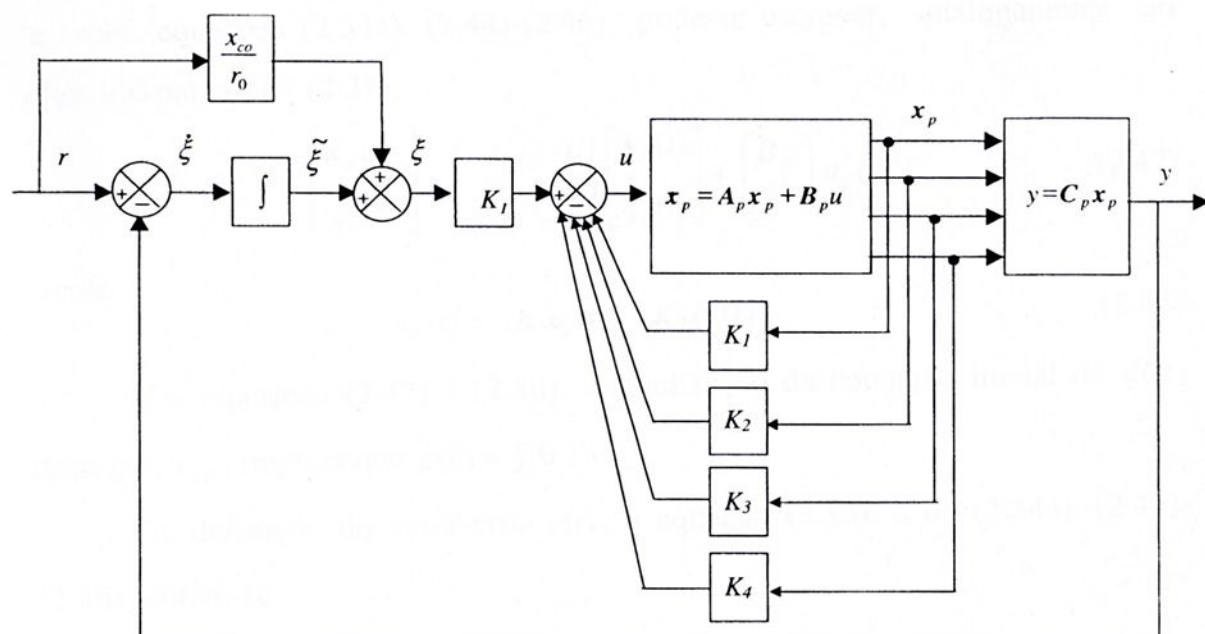


Figura 2.7: Diagrama de blocos do sistema de controle de um pêndulo invertido com atualização da condição inicial no controlador (PI)

Como suposto, as condições iniciais da planta e do controlador são nulas, isto é, $\mathbf{x}_p(0^-) = \mathbf{0}$ e $\xi(0^-) = 0$, tem-se que, com a atualização, $\xi(t)$ passa de $\xi(0^-) = 0$ para $\xi(0) = \mathbf{x}_{co}$.

A Figura 2.7 apresenta uma forma de implementação desta idéia, como observado na seção anterior.

As equações do sistema são dadas por:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p u(t), \quad (2.44)$$

$$u(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}_p(t) + K_I \xi(t) + K_I x_{co}, \quad (2.45)$$

$$\dot{\xi}(t) = r(t) - y(t) = r(t) - \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) \quad (2.46)$$

A dinâmica do sistema completo é descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

e das equações (2.34a), (2.44)-(2.46) pode-se escrever, analogamente ao efetuado para obter (2.38):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & 0 \\ -\mathbf{C}_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \quad (2.47)$$

sendo,

$$u_e(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}_e(t) + K_I \xi_e(t). \quad (2.48)$$

Nas equações (2.47) e (2.48), a atualização da condição inicial de $\xi(t)$, dada por x_{co} , implica que $\xi(0) = \xi(0^-) + x_{co}$.

Da definição do vetor-erro $\mathbf{e}(t)$, a equação (2.35), e de (2.34a), (2.44)-(2.46), obtém-se :

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{e}(t) + \mathbf{B} u_e(t),$$

sendo as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dadas em (2.40).

A equação (2.48) torna-se:

$$u_e(t) = -\hat{\mathbf{K}} \mathbf{e}(t); \quad \hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad K_I]. \quad (2.49)$$

Observe que a dinâmica do vetor-erro do sistema controlado com e sem atualização das condições iniciais no controlador é a mesma, a equação (2.38) e equação (2.47), respectivamente. Dessa forma a matriz $\mathbf{P}$ e por consequência a matriz $\hat{\mathbf{K}}$ não dependem das condições iniciais do sistema e assim, tem-se:

$$J_1(x_{co}) = \int_0^{\infty} (\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + u_e^T \mathbf{R} u_e) dt = \mathbf{e}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{e}(0),$$

sendo que, agora

$$\mathbf{e}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(0) - \mathbf{x}_p(\infty) \\ \xi(0) - \xi(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(0) \\ \xi(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(0)^T & \xi(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{co} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(0^-)^T & \xi(0^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{co} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_{co} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Da equação (2.43), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(\infty)^T & \xi(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 11.9391 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a atualização ótima das condições iniciais do controlador, obtida pela equação (2.11), considerando que $x(\infty) = -A^{-1}Br_0$, é dada por :

$$\begin{aligned} x_{co} &= -\frac{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]P([x_p(0^-)^T \ \xi(0^-)^T] - [x_p(\infty)^T \ \xi(\infty)^T])}{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]P[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T} \\ &= -\frac{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]P(A_1^{-1}B_1r_0)}{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]P[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

sendo que $r_0 = 1$, pois $r(t)$ foi considerado um degrau unitário,

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_p - B_p K & B_p K_I \\ -C_p & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que, de (2.50), x_{co}/r_0 é constante e a atualização ótima da condição inicial de $\xi(t)$ para uma nova entrada $r(t) = r_1$, $t \geq 0$, é utilizando (2.50), dada por

$$\frac{x_{co}}{r_0} r_1 = \frac{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]P(A_1^{-1}B_1)}{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]P[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T} r_1.$$

Este fato justifica a implementação proposta na Figura 2.7.

Substituindo as equações (2.41c) e (2.43) em (2.50), obtém-se o valor ótimo da atualização:

$$x_{co} = 10.1575.$$

Agora

$$e(0) = \begin{bmatrix} x_p(0) - x_p(\infty) \\ \xi(0) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{co} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1.7817 \end{bmatrix}^T. \quad (2.50a)$$

Assim, o índice em (2.41d) usando (2.50a) é:

$$e(0)^T P e(0) = 2.0102.$$

Então, o índice de desempenho do sistema é:

$$J_1 = 14.3282 \text{ (sem atualização); } J_1 = 2.0102 \text{ (com atualização).}$$

A seguir, serão apresentadas as curvas de respostas, $y(t)$ e as curvas do controle $u(t)$, resultantes do sistema a uma solicitação em degrau unitário com e sem atualização das condições iniciais.

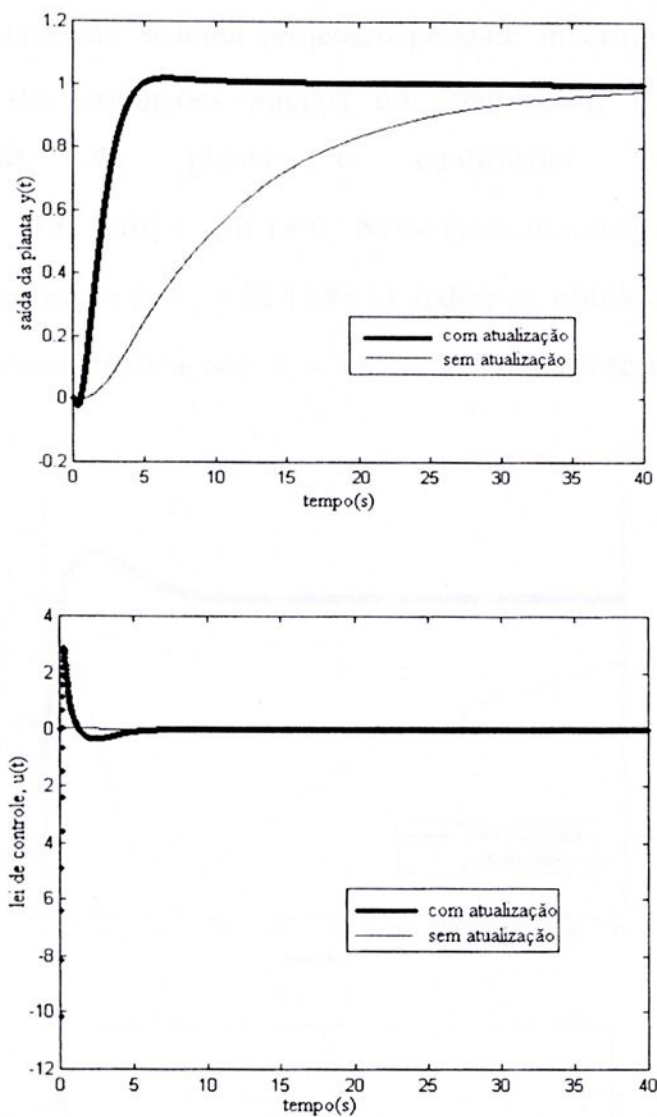


Figura 2.8: Curvas de respostas e as curvas de controle ao degrau unitário do sistema projetado pêndulo invertido, sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador, quando $x(0^-) = 0$.

A figura 2.9 mostra as curvas de respostas $y(t)$, e as curvas de controle $u(t)$ ao degrau unitário do sistema projetado pêndulo invertido, sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador, considerando as condições iniciais da planta e controlador como sendo: $x_p(0^-) = [\pi/8 \ 0.01 \ 0.5 \ 0.01]$ e $\xi(0^-) = 0$. Neste caso, usando a equação (2.50) o valor ótimo da atualização é: $x_{co} = 12.1149$. O índice J_1 obtido é:

$$J_1 = 21.4964(\text{sem atualização}); J_1 = 3.9733(\text{com atualização}).$$

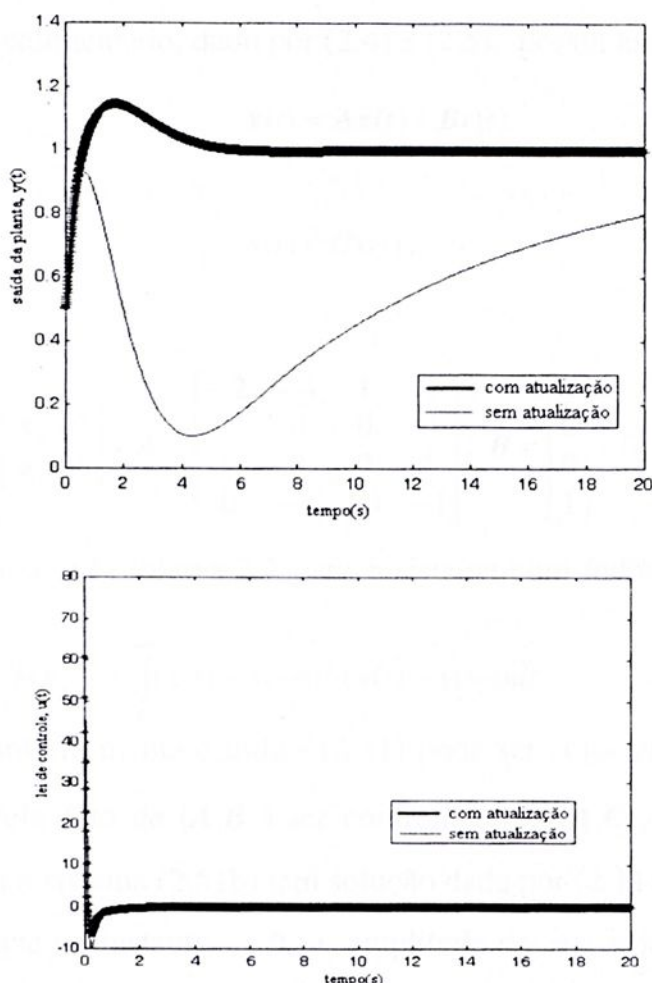


Figura 2.9 : Curvas de respostas e as curvas de controle ao degrau unitário do sistema projetado pêndulo invertido, sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador, quando $x_p(0^-) = [\pi/8 \ 0.01 \ 0.5 \ 0.01]$ e $\xi(0^-) = 0$.

2.4.4 Exemplo 2: Controlador de ordem maior do que 1

Considere o sistema realimentado, como na Figura 2.1, com:

$$A_p = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C_p = [0 \quad 4]; D_p = 0;$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C_c = [1 \quad 0]; D_c = 1,$$

e com índice de desempenho J , dado pela equação (2.6).

O sistema realimentado, dado por (2.4) e (2.5), possui as equações:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t)$$

(2.51a)

$$y(t) = Cx(t),$$

sendo que:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [0 \quad 4 \quad 0 \quad 0].$$

Considerou-se o Problema 2.1 para o sistema com índice de desempenho dado por:

$$J(x_{co}) = \int_0^{+\infty} (y(t) - y(\infty))^T (y(t) - y(\infty)) dt. \quad (2.51)$$

Como mostrado anteriormente o índice (2.51) pode ser colocado na forma (2.6), com $Q = C^T C$. Pelo fato de (A, B) ser controlável e (A, C) ser observável, o Problema 2.1 para o sistema (2.51b) tem solução dada por (2.11).

Supondo que no instante $t = 0$, a amplitude de $r(t)$ seja alterada de zero para $r_0 = 1$, então $x_c(t)$ será atualizada, passando de $x_c(0^-)$ para $x_c(0^-) + x_{co}$ sendo x_{co} , o vetor de atualização. De acordo com a Observação 2.2, supondo que as condições iniciais do controlador e da planta sejam nulas, isto é :

$$x_p(0^-) = 0 \quad \text{e} \quad x_c(0^-) = 0,$$

tem-se:

$$\mathbf{x}(0) = [\mathbf{x}_p(0^-)^T \quad \mathbf{x}_c(0^-)^T]^T + [0 \quad 0 \quad x_{co1} \quad x_{co2}]^T = [0 \quad 0 \quad x_{co1} \quad x_{co2}]^T.$$

O erro entre $\mathbf{x}(t)$ e o seu valor de regime, é:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty)$$

e de (2.8) e (2.9b), obtém-se:

$$\mathbf{x}(\infty) = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}r_0 = [0 \quad 0.25 \quad 0 \quad 0]^T.$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}(0^-) + [0 \quad x_{co}]^T + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}r_0 = [0 \quad -0.25 \quad x_{co1} \quad x_{co2}]^T.$$

O índice de desempenho em (2.51) é dado por:

$$J(\mathbf{x}_{co}) = \boldsymbol{\varepsilon}(0)^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}(0) = [0 \quad -0.25 \quad x_{co1} \quad x_{co2}]^T \mathbf{P} [0 \quad -0.25 \quad x_{co1} \quad x_{co2}]^T, \quad (2.51b)$$

sendo que, $\mathbf{P}$ é a solução da equação (2.3a).

Assim, o índice de desempenho, em (2.51b) sem atualização ($\mathbf{x}_{co} = \mathbf{0}$) é:

$$J = 0.9583.$$

Agora, o vetor $\mathbf{x}_{co}$ de atualização, obtido usando (2.11) é:

$$\mathbf{x}_{co} = [x_{co1} \quad x_{co2}]^T = [0.25 \quad -0.95]^T.$$

Como,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(0) = [0 \quad -0.25 \quad x_{co1} \quad x_{co2}]^T = [0 \quad -0.25 \quad 0.25 \quad -0.95]^T,$$

então, o índice de desempenho em (2.51b) com atualização é:

$$J = 0.4667.$$

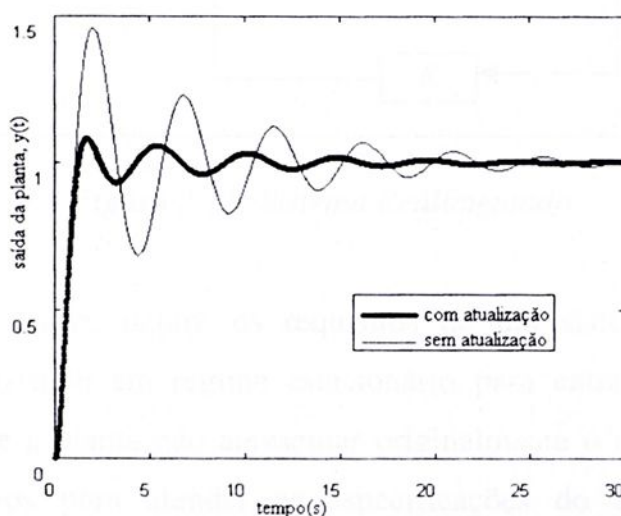


Figura 2.10: Respostas do sistema do Exemplo 2, sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador.

No método de projeto proposto, para a atualização das condições iniciais no controlador, há necessidade do conhecimento prévio do vetor de estado inicial do sistema. Na prática, no entanto, em problemas de controle reais, nem sempre pode-se medir todos os estados de um sistema. A seguir, propõe-se um método, caso os estados do sistema não estejam disponíveis, para realizar a atualização das condições iniciais no sistema controlador/observador para o sistema controlado. Inicialmente, descreve-se um projeto do controlador com lei de controle por realimentação de estado observado. Em seguida, a atualização no sistema controlador/observador é proposta em $t = t_s$, sendo t_s o tempo de estabilização do observador (Ogata, 1997, pg.153).

2.5 Atualização das Condições Iniciais no Sistema Controlador/Observador

Considera-se uma classe de sistemas como mostrado na Figura 2.11, sendo que a planta e o controlador a ser projetado, apresentam as equações como em (2.4a) e (2.4b) respectivamente.

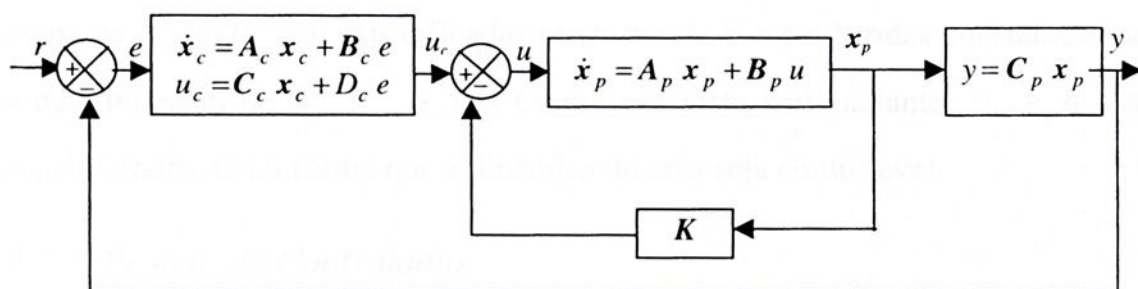


Figura 2.11: Sistema Realimentado.

É comum ter-se, dentre os requisitos de um sistema de controle, a exigência de erro nulo em regime estacionário para entrada degrau ou para entrada rampa. Se a planta não apresentar originalmente o número de pólos na origem necessários para atender as especificações do erro de regime, o controlador projetado poderá incluir integradores os quais fornecerão os pólos na origem. Por exemplo, o erro de regime será nulo para uma entrada $r(t)$ do tipo

degrau, quando a função de transferência de malha aberta apresentar pelo menos um pólo em $s = 0$ e o sistema de malha fechada for estável. Na configuração da Figura 2.11, a matriz A_c do controlador pode ser projetada, considerando o número de pólos em $s = 0$ que a especificação do erro de regime estacionário exigir.

Suponha que o sistema de malha fechada, descrito pelas equações abaixo, seja estável:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (2.51a)$$

sendo,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) \\ \mathbf{x}_c(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p(\mathbf{K} + \mathbf{D}_c\mathbf{C}_p) & \mathbf{B}_p\mathbf{C}_c \\ -\mathbf{B}_c\mathbf{C}_p & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p\mathbf{D}_c \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_p \quad \mathbf{0}]\end{aligned}\quad (2.51b)$$

com $\mathbf{A}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_p \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{C}_p \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e, as matrizes $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $\mathbf{C}_c \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, $\mathbf{D}_c \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ serão obtidas de modo que o sistema realimentado atenda os objetivos do projeto. Neste método de projeto, as matrizes $\mathbf{A}_c$ e $\mathbf{B}_c$ são especificadas previamente e consideradas constantes para a determinação de $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}_c$, e $\mathbf{D}_c$. Como será visto mais adiante, $\mathbf{A}_c$ e $\mathbf{B}_c$ são especificadas de tal forma que a dinâmica do erro seja controlável.

2.5.1 Projeto do Controlador

Caso 1: Vetor de estado da planta disponível

As matrizes constantes $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}_c$ e $\mathbf{D}_c$ da lei de controle,

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{D}_c e(t) \quad (2.52)$$

são determinadas de forma a minimizar o índice de desempenho:

$$J(u_e) = \int_0^{+\infty} (\varepsilon(t))^T \mathbf{Q} \varepsilon(t) + (u_e(t))^T \mathbf{R} (u_e(t)) dt, \quad (2.53a)$$

sendo que,

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2^T \\ Q_2 & Q_4 \end{bmatrix},$$

$Q \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$ com $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $Q_4 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Suponhamos também que, Q é uma matriz simétrica definida positiva, R uma matriz simétrica definida positiva e $\varepsilon(t)$ e $u_e(t)$ respectivamente o erro entre $x(t)$ e $u(t)$ e os seus valores de regime, ou seja

$$\varepsilon(t) = x(t) - x(\infty) \quad ; \quad u_e(t) = u(t) - u(\infty). \quad (2.53b)$$

2.5.1.1 Determinação das Matrizes K , C_c e D_c

Das equações (2.4a)-(2.4b), (2.52) e (2.53b) e com procedimento análogo ao efetuado nas equações (2.37b)-(2.40b), obtém-se a dinâmica do erro $\varepsilon(t)$:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \bar{A} \varepsilon(t) + \bar{B} u_e(t), \quad (2.54)$$

sendo

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$u_e(t) = -\bar{K} \varepsilon(t) \quad ; \quad \bar{K} = [(K + D_c C_p) - C_c].$$

As matrizes A_c e B_c são especificadas a seguir e consideradas constantes para a determinação de K , C_c , e D_c .

As matrizes A_c e B_c são escolhidas de forma que $(\bar{A}, \bar{B})$ seja controlável (Apêndice D). Observe que $(\bar{A}, \sqrt{Q})$ é observável pois posto $\sqrt{Q} = m+n$ (Q é positiva definida). Então, pelo Teorema 2.1 existe $\bar{K}$ ótimo tal que o índice J é minimizado.

Para determinação da matriz $\bar{K}$, resolve-se a equação de Riccati para uma matriz simétrica definida positiva P :

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} - P \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T P + Q = 0. \quad (2.55)$$

O comando *lqr* do MATLAB fornece a solução da equação (2.55) para sistemas contínuos e determina a matriz de ganho de retroação ótima, $\bar{K} = R^{-1} \bar{B}^T P$.

Seja $\bar{K} = [K_1 \ K_2]$ com $K_1 \in \mathbb{R}^n$ e $K_2 \in \mathbb{R}^m$. Dessa forma, os ganhos K e C_c são obtidos:

$$K = K_1 - D_c C_p \text{ e } C_c = -K_2. \quad (2.55a)$$

Caso2: Vetor de estado da planta não disponível

Projeta-se então, um observador de forma que $\tilde{x}(t)$, descrito abaixo, estime o vetor de estado $x_p(t)$ da planta:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_p \tilde{x}(t) + B_p u(t) + L(y - C_p \tilde{x}),$$

sendo L o ganho do observador.

No projeto do observador, os seus pólos são escolhidos de modo que a resposta do observador seja muito mais rápida (por exemplo, 5 vezes) do que a resposta do sistema (Ogata, 1997, pg. 826). No Exemplo 2.6 será mostrado como isto é feito.

A matriz de ganho do observador L , pode ser obtida por meio da Fórmula de Ackermann (Ogata, 1997, pg.822).

A Figura 2.12 mostra o sistema de controle com realimentação do estado observado, com entrada $r(t)$ e saída $y(t)$.

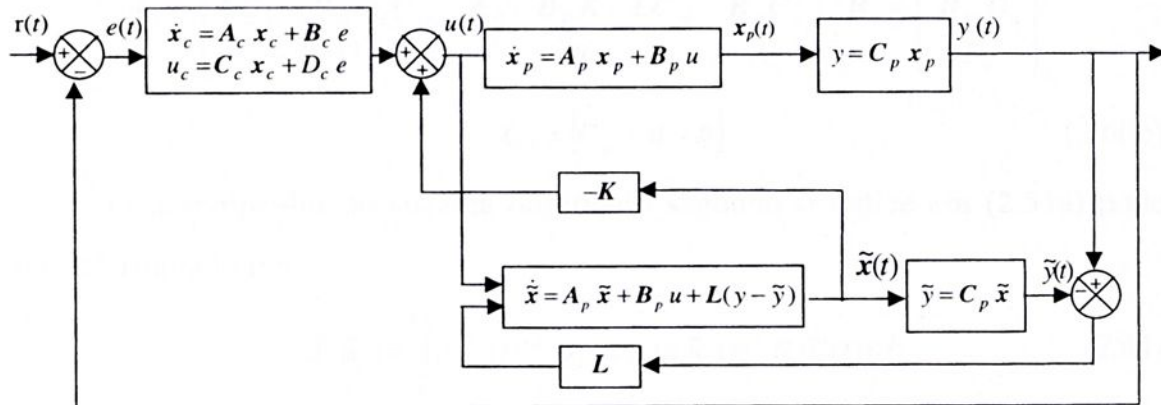


Figura 2.12: Sistema realimentado com observador.

2.5.2 O Desempenho do Sistema Observado

O sistema com observador e realimentado da Figura 2.12, é descrito pelas equações:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p u(t) \quad (2.56)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_p \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_p u(t) + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}_p \tilde{\mathbf{x}}) \quad (2.57)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c e(t), \quad e(t) = r(t) - y(t) \quad (2.58)$$

$$\tilde{u}(t) = -\mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) + D_c e(t). \quad (2.59)$$

Pode-se descrever a dinâmica do sistema por meio da equação:

$$\dot{\mathbf{x}}_T(t) = \mathbf{A}_T \mathbf{x}_T(t) + \mathbf{B}_T r(t), \quad (2.60a)$$

$$y = \mathbf{C}_T \mathbf{x}_T(t),$$

sendo

$$\mathbf{x}_T(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}_c(t) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{D}_c \mathbf{C}_p & -\mathbf{B}_p \mathbf{K} & \mathbf{B}_p \mathbf{C}_c \\ \mathbf{L} \mathbf{C}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{D}_c \mathbf{C}_p & \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{K} - \mathbf{L} \mathbf{C}_p & \mathbf{B}_p \mathbf{C}_c \\ -\mathbf{B}_c \mathbf{C}_p & \mathbf{0} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \mathbf{D}_c \\ \mathbf{B}_p \mathbf{D}_c \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_T = [\mathbf{C}_p \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]. \quad (2.60b)$$

O desempenho do sistema observado segundo o índice em (2.53a) pode ser determinado por:

$$\tilde{J}(\tilde{u}_e) = \int_0^{+\infty} ((\varepsilon_T(t))^T \mathbf{Q}_t \varepsilon_T(t) + \tilde{u}_e(t)^T \mathbf{R} \tilde{u}_e(t)) dt, \quad (2.61)$$

sendo

$$\varepsilon_T(t) = \mathbf{x}_T(t) - \mathbf{x}_T(\infty); \quad \mathbf{x}_T(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}_c(t) \end{bmatrix}; \quad (2.62)$$

$$\tilde{u}_e(t) = \tilde{u}(t) - u(\infty); \quad (2.63)$$

$$\tilde{u}(t) = -\mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) + D_c e(t); \quad (2.64)$$

$$Q_t = \begin{bmatrix} Q_1 & O_{n \times n} & Q_2^T \\ O_{n \times n} & O_{n \times n} & O_{n \times m} \\ Q_2 & O_{m \times n} & Q_4 \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2^T \\ Q_2 & Q_4 \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

sendo Q a matriz da equação (2.53) e t_s o tempo de estabilização do observador.

Com procedimento análogo ao realizado nas equações (2.33)-(2.38b) e utilizando as equações (2.56)-(2.59), obtém-se a dinâmica do erro ε_T :

$$\dot{\varepsilon}_T = \hat{A}_T \varepsilon_T(t) + \hat{B}_T \tilde{u}_e(t) \quad (2.66a)$$

sendo que:

$$\hat{A}_T = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ LC_p & A_p - LC_p & 0 \\ -B_c C_p & 0 & A_c \end{bmatrix}; \hat{B}_T = \begin{bmatrix} B_p \\ B_p \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{u}_e(t) = -\hat{K} \varepsilon_T(t); \hat{K} = [D_c C_p \quad K \quad -C_c]. \quad (2.66b)$$

Para o sistema observado, como não se tem informação sobre as condições iniciais dos estados em $t = 0$, propomos que a atualização se realize no instante $t = t_s$. Nesse instante de tempo, é possível no observador obter $\tilde{x}(t_s^-)$. Pode-se considerar então $x(t_s^-) \equiv \tilde{x}(t_s^-)$. Esse conhecimento é necessário para se fazer a atualização ótima.

A seguir, será proposto um método para escolha das condições iniciais do controlador/observador de modo que o desempenho, segundo um índice quadrático do sistema com observador e realimentado dado por (2.61), seja melhorado.

2.5.3 Especificação das Condições Iniciais Ótimas

O problema do projeto de controladores ótimos com atualização das condições iniciais no observador/controlador é definido a seguir.

Problema 2.2: Considere o sistema controlado (2.60a), (2.60b) estável e que na entrada, o sinal de referência (função degrau de amplitude r_0) ocorra em $t = 0$, isto é,

$$r(t) = \begin{cases} r_0, & \text{para } t \geq 0, \\ 0, & \text{para } t < 0, \end{cases} \quad (2.67)$$

sendo que r_0 é uma constante real conhecida. Determine $\bar{x}_{co}$, a atualização de

$x_{co}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}$ em $t = t_s$, de modo que o índice desempenho:

$$\tilde{J}(\bar{x}_{co}) = \int_0^{+\infty} ((\varepsilon_T(t))^T Q \varepsilon_T(t) + \tilde{u}_e(t)^T R \tilde{u}_e(t)) dt \quad (2.68)$$

seja mínimo.

Tendo em vista as Observações 2.2 e 2.3 para o sistema controlador/observador, tem-se:

$$x_{co}(t_s^-) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t_s^-) \\ x_c(t_s^-) \end{bmatrix}; \quad x_{co}(t_s) = x_{co}(t_s^-) + \bar{x}_{co}$$

sendo $\bar{x}_{co}$ a atualização de $x_{co}(t)$ em $t = t_s$.

Se $x_p(t_s) = x_p(t_s^-)$, então:

$$x(t_s) = \begin{bmatrix} x_p(t_s^-) \\ \tilde{x}(t_s^-) \\ x_c(t_s^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{x}_{co} \end{bmatrix} = x(t_s^-) + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{x}_{co} \end{bmatrix}.$$

Observação 2.7: A escolha da aplicação da atualização das condições iniciais em $t = t_s$ é devida a:

i) $\tilde{x} \approx x_p$ em t_s , independentemente da entrada $r(t)$, pois das equações (2.56)-(2.57) o erro de estimação,

$$e_1(t) = x_p(t) - \tilde{x}(t)$$

satisfaz:

$$\dot{e}_1(t) = (A_p - LC_p)e_1(t),$$

que independe de $r(t)$;

ii) de i), se a entrada de referência (a função degrau unitário de amplitude r_0) ocorre em $t = 0$ ou em $t = t_s$, tem-se $\tilde{x} \approx x_p$ em qualquer situação.

Teorema 2.3 O Problema 2.2 tem solução quando $((\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K}), \tilde{N})$ é observável, sendo $\tilde{Q} = \tilde{N}^T \tilde{N}$, $\tilde{Q} = (Q_t + \hat{K}^T R \hat{K})$ com Q_t e $\hat{K}$ dados respectivamente pelas equações (2.65) e (2.66b). Neste caso, a atualização ótima das condições iniciais $\bar{x}_{co}$ do sistema controlador/observador é única e pode ser calculada, pela expressão:

$$\bar{x}_{co} = - \left(\begin{bmatrix} 0_{(n+m) \times n} & I_{n+m} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0_{n \times (n+m)} \\ I_{n+m} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0_{(n+m) \times n} & I_{n+m} \end{bmatrix} P (x_T(t_s^-) + A_T^{-1} B_T r_0) \quad (2.69a)$$

sendo que P é a solução da equação de Lyapunov:

$$(\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K})^T P + (\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K}) P = -(Q_t + \hat{K}^T R \hat{K}). \quad (2.69b)$$

As matrizes A_T e B_T são definidas pela equação (2.60b) e $\hat{A}_T$ e $\hat{B}_T$ são definidas pelas equações de (2.66b), $x_T(t_s^-)$ é a condição inicial do sistema planta/observador antes da atualização, $0_{n \times (m+n)}$ denota a matriz $n \times (m+n)$ com todos os elementos nulos, I é a matriz identidade de ordem $(m+n)$, $A_T^{-1} B_T r_0$, representa o valor de regime das variáveis de estado, $\begin{bmatrix} x_p(t)^T & \tilde{x}(t)^T & x_c(t)^T \end{bmatrix}^T$, do sistema de malha fechada submetido a uma entrada degrau de amplitude r_0 .

Prova: Observe que minimizar $\tilde{J}(\bar{x}_{co})$ em (2.68) é equivalente a minimizar

$$\tilde{J}_{(t_s, \infty)}(\bar{x}_{co}) = \int_{t_s}^{+\infty} ((\varepsilon_T(t))^T Q_t \varepsilon_T(t) + \tilde{u}_e(t)^T R \tilde{u}_e(t)) dt,$$

pois no intervalo $[0, t_s]$ o índice de desempenho não se altera com a atualização.

Pela equação (2.66b) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{(t_s, \infty)}(\bar{x}_{co}) &= \int_{t_s}^{+\infty} (\varepsilon_T(t))^T (Q_t + \hat{K}^T R \hat{K}) \varepsilon_T(t) dt \\ &= \int_{t_s}^{+\infty} \varepsilon_T(t)^T \tilde{Q} \varepsilon_T(t) dt; \quad \tilde{Q} = (Q_t + \hat{K}^T R \hat{K}). \end{aligned} \quad (2.69c)$$

Das equações (2.66a) e (2.66b), a dinâmica do erro pode ser escrita como:

$$\dot{\varepsilon}_T(t) = (\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K}) \varepsilon(t),$$

sendo, $((\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K}), \tilde{N})$ observável, por hipótese, com $\tilde{Q} = \tilde{N}^T \tilde{N}$ e $\tilde{Q} = (Q_t + \hat{K}^T R \hat{K})$.

Como o sistema (2.60a), (2.60b) é estável, a matriz $(\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K})$ apresenta todos autovalores com parte real negativa. Pela Observação 2.5, após o Teorema 2.2, o Problema 2.2 tem solução e a atualização ótima $\bar{x}_{co}$ de $x_{co}(t)$ em $t = t_s$ é única e pode ser calculada pela expressão:

$$\bar{x}_{co} = - \left(\begin{bmatrix} 0^T & I \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} P (x_T(t_s^-) + A_T^{-1} B_T r_0),$$

sendo P , a solução da equação de Lyapunov:

$$(\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K})^T P + (\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K}) P = -\tilde{Q}. \quad (2.69d)$$

Substituindo a equação (2.69c) na equação (2.69d), obtém-se:

$$(\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K})^T P + (\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K}) P = -(Q_t + \hat{K}^T R \hat{K}).$$

Observação 2.8 : Uma condição suficiente para que $((\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K}), \tilde{N})$ seja observável é que $(\hat{A}_T, \sqrt{Q_t})$ seja observável (Lema1 do Apêndice B).

2.6 Aplicação no Controle de um Pêndulo Invertido com Observador

Caso 1: Vetor de estado do pêndulo disponível

Com base nas equações (2.26)-(2.28), o sistema pêndulo invertido realimentado, mostrado na Figura 2.6, é descrito pelas equações:

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t), \quad (2.70a)$$

$$y(t) = C_p x_p(t),$$

sendo que,

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4095 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix};$$

$$C_p = [0 \ 0 \ 1 \ 0]; \quad u(t) = -Kx_p(t) + K_I \xi(t);$$

$$\dot{\xi}(t) = r(t) - y(t) = e(t). \quad (2.70b)$$

Dessa forma, este sistema pode ser representado pelo diagrama da Figura 2.11 sendo:

$$x_c(t) = \xi(t); \quad A_c = 0; \quad B_c = 1; \quad C_c = K_I; \quad D_c = 0. \quad (2.71)$$

Aplicando-se o projeto do controlador descrito na seção anterior, as matrizes K , $C_c = K_I$, do controle $u(t)$ são determinadas de forma a minimizar o índice de desempenho dado por (2.53):

$$J(u_e) = \int_0^{+\infty} (\varepsilon(t))^T Q \varepsilon(t) + (u_e(t))^T R u_e(t) dt$$

com:

$$\varepsilon(t) = x(t) - x(\infty); \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix};$$

$$u_e(t) = u(t) - u(\infty); \quad Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}; \quad R = 0.01.$$

A dinâmica do erro $\varepsilon(t)$ é:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \bar{A} \varepsilon(t) + \bar{B} u_e(t),$$

sendo:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4095 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $(\bar{A}, \bar{B})$ é controlável e $(A, \sqrt{Q})$ é observável, pelo Teorema 2.1, existe $\bar{K} = [K \quad -K_I]$ tal que o índice J , descrito por (2.53) é minimizado.

Utilizando o comando *lqr* do *MATLAB* obtém-se a matriz ganho de retroação de estado $\bar{K}$,

$$\bar{K} = [-168.0620 \quad -31.8293 \quad -11.9391 \quad -21.2706 \quad 1].$$

Assim, da equação (2.55a)

$$K = [-168.0620 \quad -31.8293 \quad -11.9391 \quad -21.2706], \quad (2.72a)$$

$$K_I = -1. \quad (2.72b)$$

Caso2: Vetor de estado do pêndulo não disponível

Como o sistema é observável, projetou-se um observador de forma que $\tilde{x}(t)$, descrito abaixo, estime o vetor de estado $x_p(t)$ da planta:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_p \tilde{x}(t) + B_p u(t) + L(y(t) - C_p \tilde{x}(t)),$$

sendo L o ganho do observador.

No projeto do observador os seus pólos foram escolhidos de modo que tenha resposta mais rápida (≈ 5 vezes) do que a do sistema de malha fechada (Ogata, 1997, pg. 826). O tempo de estabelecimento do sistema de malha fechada, com os ganhos (2.72a) e (2.72b) é aproximadamente $t_s = 40s$ (conforme Fig. 2.8). Dessa forma, a parte real dos autovalores dominantes, λ_i , $i = 1, 2$ da matriz característica do erro, $(A_p - LC_p)$, devem satisfazer:

$$t_s = \frac{4.0}{\text{real}(\lambda_i)}, \text{ com } t_s = 8s \text{ sendo } i = 1, 2.$$

Escolheu-se por autovalores dominantes da matriz característica do erro, $(A_p - LC_p)$, como sendo:

$$\lambda_1 = -0.5000 + 0.5243j; \quad \lambda_2 = -0.5000 - 0.5243j$$

e os outros autovalores como

$$\lambda_3 = \lambda_4 = -3.0.$$

Usando a fórmula de Arckermann (Ogata, 1997, pg. 821), obteve-se:

$$L = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0.3188 \\ -1.5269 \\ 0.0070 \\ 0.0361 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

A Figura 2.12 representa o sistema de controle com realimentação do estado observado, com entrada, $r(t)$ e saída $y(t)$, que pode ser descrito por meio da equação que é a combinação das equações (2.56)-(2.59); (2.70a)-(2.71) e (2.72)-(2.73):

$$\mathbf{x}_T(t) = \mathbf{A}_T \mathbf{x}_T(t) + \mathbf{B}_T(t) r(t) \quad (2.74a)$$

$$y(t) = \mathbf{C}_T \mathbf{x}_T(t)$$

sendo

$$\mathbf{x}_T(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}_c(t) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & -\mathbf{B}_p \mathbf{K} & \mathbf{B}_p \mathbf{K}_I \\ \mathbf{L} \mathbf{C}_p & (\mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{K} - \mathbf{L} \mathbf{C}_p) & \mathbf{B}_p \mathbf{K}_I \\ -\mathbf{C}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$= 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0206 & 0 & 0 & 0 & -0.1681 & -0.0318 & -0.0119 & -0.0213 & 0.0010 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0005 & 0 & 0 & 0 & 0.0840 & 0.0159 & 0.0060 & 0.0106 & -0.0005 \\ 0 & 0 & -0.3188 & 0 & 0 & 0.0010 & 0.3188 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5269 & 0 & -0.1475 & -0.0318 & 1.5150 & -0.0213 & 0.0010 \\ 0 & 0 & 0.0070 & 0 & 0 & 0 & -0.0070 & 0.0010 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0361 & 0 & 0.0835 & 0.0159 & -0.0302 & 0.0106 & -0.0005 \\ 0 & 0 & -0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T;$$

$$\mathbf{C}_T = [\mathbf{C}_p \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (2.74b)$$

2.6.1 Cálculo do Índice de Desempenho sem a atualização das condições iniciais do sistema observado

O desempenho do sistema observado é dado pela equação (2.61);

$$\tilde{J}(\tilde{u}_e) = \int_0^{+\infty} (\varepsilon_T(t))^T \mathbf{Q}_T \varepsilon_T(t) + (\tilde{u}_e(t))^T \mathbf{R} \tilde{u}_e(t) dt$$

sendo

$$\varepsilon_T(t) = \mathbf{x}_T(t) - \mathbf{x}_T(\infty) \quad ; \quad \tilde{u}_e(t) = \tilde{u}(t) - u(\infty), \quad (2.75a)$$

$$\tilde{u}(t) = -\mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_I \xi(t), \quad (2.75b)$$

$$Q_t = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} ; R = 0.01 .$$

A dinâmica do vetor-erro $\varepsilon_T(t)$ de dimensão $(2n+1)$ é dado pela equação:

$$\dot{\varepsilon}_T(t) = \hat{A}_T \varepsilon_T(t) + \hat{B}_T u_e(t) , \quad (2.76a)$$

sendo que:

$$\hat{A}_T = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ LC_p & (A_p - LC_p) & 0 \\ -C_p & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.026 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3188 & 0 & 0 & 0.0010 & 0.3188 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5269 & 0 & 0.0206 & 0 & 1.5269 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0070 & 0 & 0 & 0 & -0.0070 & 0.0010 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0361 & 0 & -0.0005 & 0 & -0.0361 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_T = \begin{bmatrix} B_p \\ B_p \\ 0 \end{bmatrix} = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0]^T ; u_e(t) = -\hat{K} \varepsilon(t) ;$$

$$\hat{K} = [0 \quad K \quad -K_I]$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -168.0620 \quad -31.8293 \quad -11.939 \quad -21.2706 \quad 1], \quad (2.76b)$$

sendo que K e K_I já foram calculados e são dados em (2.72a) e (2.72b).

Como a matriz $(\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K})$ apresenta todos autovalores com parte real negativa e $((\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K}), \sqrt{\tilde{Q}})$ sendo $\tilde{Q} = (Q_t + \hat{K}^T R \hat{K})$ é observável, existe uma única matriz P definida positiva que satisfaz a equação de Lyapunov:

$$(\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K})^T P + (\hat{A}_T - \hat{B}_T \hat{K}) P = -(Q_t + \hat{K}^T R \hat{K}).$$

Então, o índice $\tilde{J}(\tilde{u}_e)$ é dado por:

$$\tilde{J}(\tilde{u}_e) = \tilde{J}_{(0,t_s)}(\tilde{u}_e) + \tilde{J}_{(t_s,+\infty)}(\tilde{u}_e) = \tilde{J}_{(0,t_s)}(\tilde{u}_e) + (\varepsilon_T(t_s))^T P \varepsilon_T(t_s), \quad (2.77a)$$

sendo a matriz P :

$$P = 10^7 \times \begin{bmatrix} 0.0004 & -0.0000 & 0.0189 & 0.0000 & -0.0004 & 0.0000 & -0.0189 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0013 & -0.0000 & 0.0552 & 0.0000 & -0.0013 & 0.0001 & -0.0552 & -0.0000 \\ 0.0189 & -0.0000 & 0.8603 & -0.0000 & -0.0189 & -0.0000 & -0.8603 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0552 & -0.0000 & 2.3577 & -0.0000 & -0.0552 & 0.0000 & -2.3577 & -0.0000 \\ -0.0004 & 0.0000 & -0.0189 & -0.0000 & 0.0004 & -0.0000 & 0.0189 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0013 & 0.0000 & -0.0552 & -0.0000 & 0.0013 & -0.0000 & 0.0552 & -0.0000 \\ -0.0189 & 0.0000 & -0.8603 & 0.0000 & 0.0189 & -0.0000 & 0.8603 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0552 & 0.0000 & -2.3577 & 0.0000 & 0.0552 & -0.0000 & 2.3577 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (2.77b)$$

As condições iniciais da planta antes da atualização podem ser obtidas, simulando o sistema até $T=t_s=8$ s, e considerando $x_p(t_s)=\tilde{x}(t_s)$. Em aplicações em tempo real, $x_p(t_s)$ seria obtido medindo-se $\tilde{x}(t_s)$ em $t=t_s$. Para a simulação foi considerado:

$$x_p(0) = [0.0001 \quad 0.0001 \quad 0.0001 \quad 0.000060] \quad \text{e} \quad \tilde{x}(0) = 0$$

e obteve-se:

$$x_p(t_s) = \tilde{x}(t_s) = [0.0010 \quad 0.0004 \quad 0.388 \quad -0.0589]; \quad \xi(t_s) = 6.0672.$$

Pelo Teorema do Valor Final, das equações (2.74a) e (2.74b), para $R(s)=1/s$, degrau unitário, obtém-se:

$$x_T(\infty) = \begin{bmatrix} x_p(\infty) \\ \tilde{x}(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} = -(A_T)^{-1} B_T = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 11.9391]^T.$$

E assim,

$$\varepsilon_T(t_s) = x_T(t_s) - x_T(\infty) =$$

$$\varepsilon_T(t_s) = [0.0010 \quad 0.0004 \quad -0.6112 \quad 0.0589 \quad 0.0010 \quad 0.0004 \quad -0.6112 \quad 0.0589 \quad -5.8719]^T. \quad (2.78)$$

Substituindo (2.78) e (2.77b) em (2.77a), obtém-se:

$$\tilde{J}(\tilde{u}_e) = \tilde{J}_{(0,t_s)}(\tilde{u}_e) + 3.4690 \approx 11.0407 + 3.4690 \approx 14.5097.$$

2.6.2 Cálculo do Índice de Desempenho com atualização das condições iniciais do sistema Controlador / Observador

As condições do Teorema 2.2 são satisfeitas para o sistema (2.74a) e (2.74b). Então, o Problema 2.2 tem solução e neste caso, a atualização das iniciais do controlador / observador é única e pode ser calculada pela expressão:

$$\bar{x}_{co} = - \left(\begin{bmatrix} 0_{5 \times 4} & I_5 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0_{4 \times 5} \\ I_5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0_{5 \times 4} & I_5 \end{bmatrix} P (x(t_s^-) + A_T^{-1} B_T r_0)$$

sendo P dada pela equação (2.77b), as matrizes A_T e B_T dadas por (2.60b) e $r_0 = 1$, pois foi considerado um degrau unitário.

O vetor ótimo da atualização é dado por:

$$\bar{x}_{co} = \begin{bmatrix} -2.19 \times 10^{-11} \\ 3.36 \times 10^{-11} \\ 3.8 \times 10^{-13} \\ -9.4 \times 10^{-13} \\ 4.8601 \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Observe que a atualização nas variáveis de estado do observador é aproximadamente nula, pois em $t = t_s$ (tempo de estabelecimento do observador) $x_p \approx \tilde{x}$.

Agora:

$$\begin{aligned} \varepsilon_T(t_s) &= \varepsilon_T(t_s^-) + \begin{bmatrix} 0 & \bar{x}_{co} \end{bmatrix}^T \\ &= [0.0010 \quad 0.0004 \quad -0.6112 \quad 0.0589 \quad 0.0010 \quad 0.0004 \quad -0.6112 \quad -0.0589 \quad -1.0118]. \end{aligned}$$

Assim, o índice $\tilde{J}$ obtido usando a atualização é:

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\bar{x}_{co}) &= \tilde{J}_{(0,t_s)}(\tilde{u}_e) + \tilde{J}_{(t_s,+\infty)}(\bar{x}_{co}) = \tilde{J}_{(0,t_s)}(\tilde{u}_e) + (\varepsilon_T(t_s))^T P \varepsilon_T(t_s) \approx 11.0407 + 0.6490 \\ &\approx 11.6897. \end{aligned}$$

Dessa forma, o índice de desempenho do sistema observado é:

$$\tilde{J}_{(t_s,+\infty)} = 3.4690 \text{ (sem atualização); } \tilde{J}_{(t_s,+\infty)} = 0.6490 \text{ (com atualização).}$$

A Figura 2.13 mostra as curvas de respostas, resultantes do sistema a uma solicitação em degrau unitário com e sem atualização das condições iniciais.

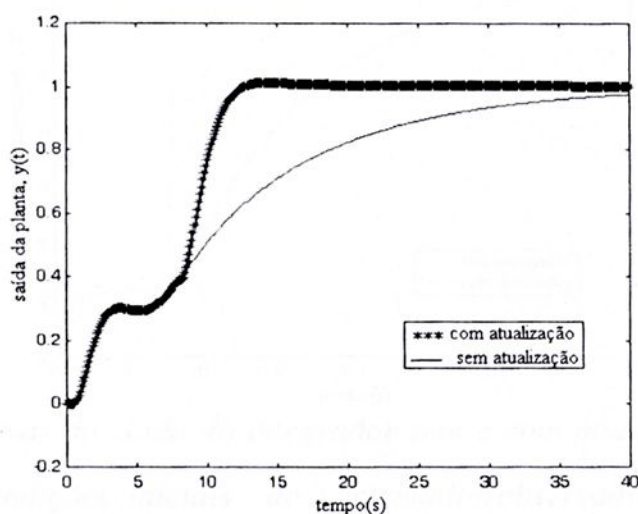


Figura 2.13: Curvas de respostas ao degrau unitário do sistema projetado sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador/observador

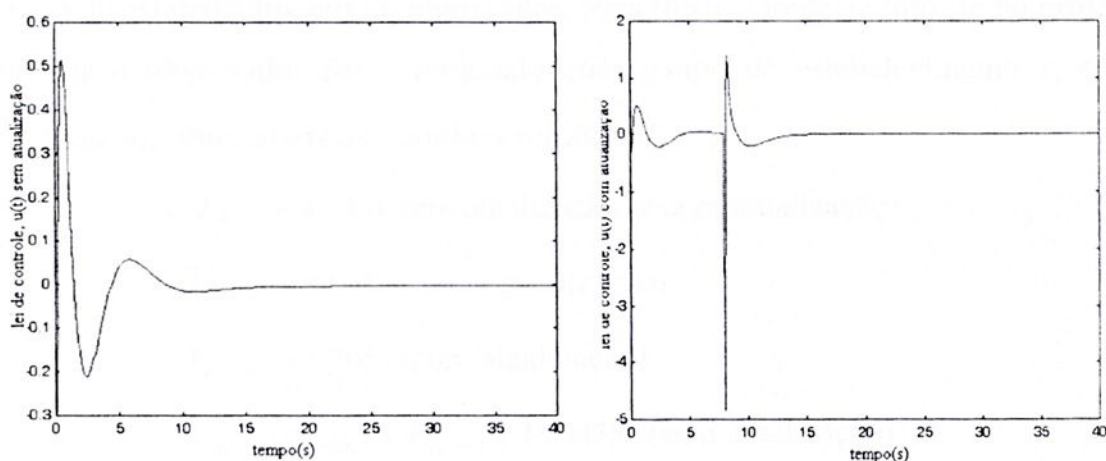


Figura 2.14: Curvas da lei de controle do sistema sem e com atualização, ótima das condições iniciais do controlador/observador, respectivamente, com $t_s = 8s$ para o observador.

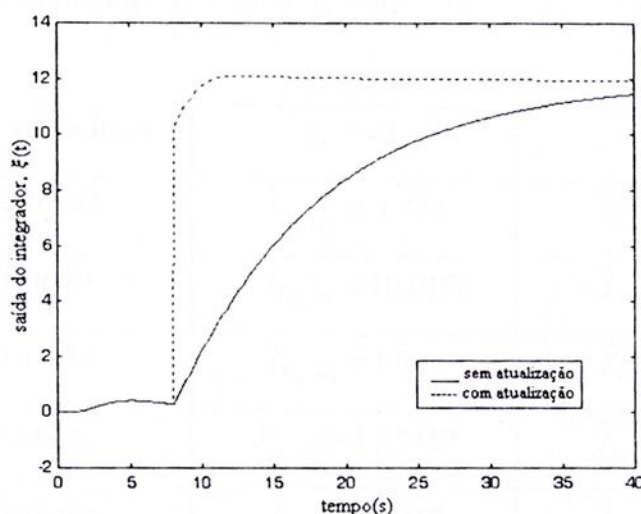


Figura 2.15: Curvas da saída do integrador sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador/observador com $t = t_s = 8s$ para o observador.

Observe que a melhoria do índice de desempenho do sistema depende do tempo de estabelecimento do observador. Para ilustração deste fato, se no projeto anterior o observador fosse projetado com tempo de estabelecimento $t_s = 2s$ (≈ 20 vezes), obteríamos os seguintes resultados:

$$\tilde{J}_{(0,t_s)} \approx 4.333 \text{ (sem atualização e com atualização),}$$

$$\tilde{J}_{(t_s,+\infty)} \approx 10.0106 \text{ (sem atualização),}$$

$$\tilde{J}_{(t_s,+\infty)} \approx 1.705, \text{ (com atualização),}$$

$$\tilde{J}_{(0,+\infty)} = \tilde{J}_{(0,t_s)} + \tilde{J}_{(t_s,+\infty)} \approx 14.3439, \text{ (sem atualização)}$$

$$\tilde{J}_{(0,+\infty)} = \tilde{J}_{(0,t_s)} + \tilde{J}_{(t_s,+\infty)} \approx 6.0381 \text{ (com atualização).}$$

A Tabela 1 apresenta os dados obtidos considerando o tempo de estabelecimento para o observador como $t_s = 2s$ e $t_s = 8s$, respectivamente.

Tabela 1: Índices de desempenho do sistema com observador com tempo de estabelecimento $t_s = 2s$ e $t_s = 8s$.

condições sobre os índices	$t_s = 2s$	$t_s = 8s$
com e sem atualização	$\tilde{J}_{(0, t_s)} \cong 4.333$	$\tilde{J}_{(0, t_s)} \cong 11.0407$
sem atualização	$\tilde{J}_{(t_s, \infty)} \cong 10.0106$	$\tilde{J}_{(t_s, \infty)} \cong 3.4690$
com atualização	$\tilde{J}_{(t_s, \infty)} \cong 1.705$	$\tilde{J}_{(t_s, \infty)} \cong 0.6490$
sem atualização	$\tilde{J}_{(0, \infty)} \cong 14.3439$	$\tilde{J}_{(0, \infty)} \cong 14.5097$
com atualização	$\tilde{J}_{(0, \infty)} \cong 6.038$	$\tilde{J}_{(0, \infty)} \cong 11.6897$

Note que os resultados obtidos são melhores quanto menor for o tempo de estabelecimento do observador, $t = t_s$, instante este em que é aplicada a atualização das condições iniciais.

As curvas de respostas do sistema projetado, são mostradas na figura seguinte.

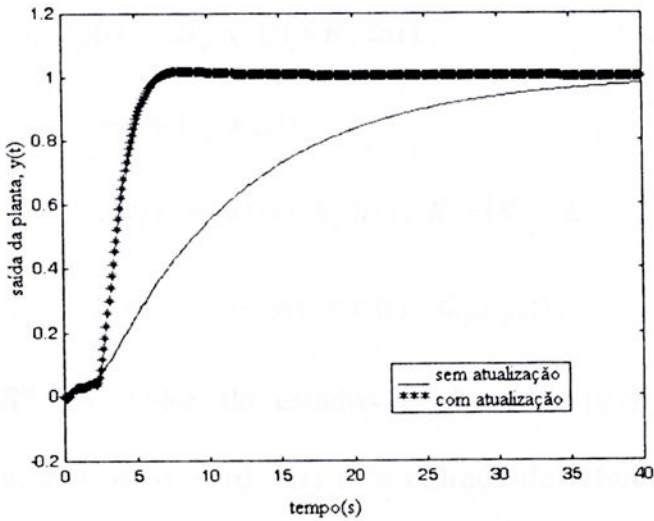


Figura 2.16: Curvas de respostas ao degrau unitário do sistema projetado sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador/observador, com $t_s = 2s$ para o observador.

A seguir, apresenta-se um método alternativo para atualização das condições iniciais no controlador usando LMI.

2.7 Projeto do Sistema de Controle Utilizando LMI

Dado o sistema indicado na Figura 2.17, projetaremos simultaneamente uma matriz $\hat{K} = [-K \ K_I]$ e as condições iniciais ótimas, ξ_{lo} , do controlador, no caso considerado do tipo integral:

$$u(t) = -Kx_p(t) + K_I \xi(t). \quad (2.79)$$

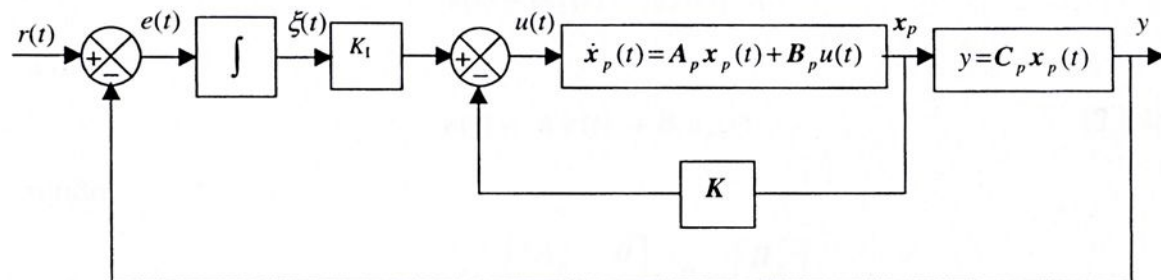


Figura 2.17: Sistema realimentado

O sistema é descrito em variáveis de estado como:

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t), \quad (2.80)$$

$$y(t) = C_p x_p(t), \quad (2.81)$$

$$u(t) = -Kx(t) + K_I \xi(t), \quad K = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4], \quad (2.82)$$

$$\dot{\xi}(t) = r(t) - y(t) = r(t) - C_p x_p(t), \quad (2.83)$$

sendo que $x_p(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados da planta; $u(t) \in \mathbb{R}$ é a entrada do controle do sistema; $e(t)$ é o erro; $r(t)$ é a entrada de referência; $A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C_p \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $B_p \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ são matrizes constantes.

Das equações (2.80)-(2.83) pode-se descrever a dinâmica do sistema por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t),$$

sendo que 0 denota um vetor com todos elementos nulos e com dimensão $n \times 1$.

Considere,

$$x_e(t) = x_p(t) - x_p(\infty);$$

$$\xi_e(t) = \xi(t) - \xi(\infty);$$

$$u_e(t) = u(t) - u(\infty).$$

Por procedimento análogo ao realizado nas equações (2.34b)-(2.39) e definindo o vetor-erro $e(t)$ de dimensão $(n+1)$ por

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t)^T & \xi_e(t) \end{bmatrix}^T,$$

tem-se:

$$\dot{e}(t) = A e(t) + B u_e(t) \quad (2.84a)$$

sendo,

$$A = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -C_p & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$u_e(t) = -K x_e(t) + K_I \xi_e(t) = -\hat{K} e(t),$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K & -K_I \end{bmatrix}. \quad (2.84b)$$

Substituindo (2.84b) em (2.84a) tem-se:

$$\dot{e}(t) = (A - B\hat{K}) e(t).$$

2.7.1 Análise da Estabilidade Segundo Lyapunov

Neste caso, o estudo da estabilidade segundo Lyapunov para o sistema realimentado (2.84a) é realizado através do estudo das seguintes desigualdades matriciais lineares (em inglês, Linear Matrices Inequalities (LMIs)):

$$P(A - B\hat{K}) + (A - B\hat{K})^T P < 0,$$

$$P > 0, \quad (2.85)$$

sendo $P = P^T$. Portanto, deve-se resolver (2.85) obtendo-se o valor de $\hat{K}$. Observe que (2.85) não é uma LMI, pois tem o termo $PB\hat{K}$. Assim, é necessária a seguinte manipulação de (2.85):

$$PA - PB\hat{K} + A^T P - \hat{K}^T B P < 0. \quad (2.86)$$

Agora, multiplicando-se ambos os lados de (2.86) por P^{-1} , observando que P^{-1} é simétrica e $P^{-1} > 0$, tem-se:

$$P^{-1}[PA - PB\hat{K} + A^T P - \hat{K}^T B P]P^{-1} < 0,$$

então

$$AP^{-1} - B\hat{K}P^{-1} + P^{-1}A^T - P^{-1}\hat{K}^TB < 0.$$

Defina,

$$X = P^{-1} \text{ e } M = \hat{K}P^{-1} = \hat{K}X.$$

Assim:

$$AX + XA^T - M^TB^T - BM < 0, \quad (2.87)$$

$$X > 0,$$

sendo $X = X^T$, são LMIs. Se estas LMIs forem factíveis, isto é, apresentarem pelo menos uma solução X e M , então o ganho do controlador é dado por:

$$\hat{K} = M X^{-1}.$$

A utilização de LMIs em projetos de controle é ampla e vem apresentando resultados satisfatórios, além de propor à comunidade mundial de pesquisadores uma nova linha teórica, facilitando a resolução de problemas que até então não apresentavam solução. A idéia é descrever a solução do problema de interesse como a solução de um conjunto de LMIs. Então, quando estas LMIs são factíveis, uma solução pode ser obtida facilmente (Boyd et al., 1994), utilizando-se programas computacionais disponíveis tais como LMISol (Oliveira et al., 1997) e o LMI Control Toolbox do Matlab.

No projeto de controle ótimo deseja-se minimizar um índice de desempenho. Tanaka and Wang (2001), projetam um controlador fuzzy ótimo para sistemas não-lineares resolvendo um problema de otimização que minimiza o limite superior de um índice de desempenho quadrático. A seguir, é aplicada esta idéia para projeto de controle ótimo, para sistemas lineares.

2.7.2 Índice de Desempenho

A matriz de ganho de retroação de estado, $\hat{K} = [K \quad -K_I]$ é obtida, de modo a minimizar o limite superior do índice J_1 :

$$J_1(u_e) = \int_0^{+\infty} (e^T(t) Q e(t) + u_e^T(t) R u_e(t)) dt \quad (2.88)$$

sendo que Q é uma matriz real simétrica definida positiva e R é uma matriz real simétrica definida positiva ou $R = 0$.

O teorema seguinte fornece um limitante superior para J_1 .

Teorema 2.4 : O sistema (2.84a)-(2.84b) pode ser estabilizado pelo controlador (2.79), se existir uma matriz simétrica definida positiva X e uma matriz M satisfazendo:

$$A X + X A^T - M^T B^T - B M + \begin{bmatrix} X & -M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ -M \end{bmatrix} < 0, \quad (2.89a)$$

$$X > 0, \quad (2.89b)$$

Além disso, o índice de desempenho satisfaz

$$J_1(u_e) < e^T(0) P e(0), \quad (2.90)$$

sendo $P = X^{-1}$ e $\hat{K} = M P$.

Prova: Seja,

$$\hat{e}(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ u_e(t) \end{bmatrix}.$$

Então, o índice em (2.88) pode ser escrito:

$$J_1(u_e) = \int_0^{+\infty} \hat{e}^T(t) \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \hat{e}(t) dt. \quad (2.91a)$$

Agora,

$$\hat{e}(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ u_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I e(t) \\ -\hat{K} e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -\hat{K} \end{bmatrix} e(t),$$

sendo I a matriz identidade de ordem n . Dessa forma (2.91a) pode ser reescrito:

$$J_1(u_e) = \int_0^{\infty} e^T(t) \begin{bmatrix} I & -\hat{K}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -\hat{K} \end{bmatrix} e(t) dt = \int_0^{\infty} e^T(t) C_1^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_1 e(t) dt, \quad (2.91b)$$

sendo que:

$$C_1 = \begin{bmatrix} I \\ -\hat{K} \end{bmatrix}. \quad (2.91c)$$

Suponha que seja possível encontrar uma matriz P , $P^T = P$, $P > 0$ tal que:

$$P(A - B\hat{K}) + (A - B\hat{K})^T P < -C_1^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_1, \quad (2.92a)$$

ou seja,

$$P(A - B\hat{K}) + (A - B\hat{K})^T P + C_1^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_1 < 0. \quad (2.92b)$$

Note que $-C_1^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_1 \leq 0$.

A desigualdade (2.92b) é equivalente a (2.89a). De fato, multiplicando, ambos os lados de (2.92b), por P^{-1} , tem-se:

$$P^{-1}A^T - P^{-1}\hat{K}^T B^T + AP^{-1} - B\hat{K}P^{-1} + P^{-1}C_1^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_1 P^{-1} < 0.$$

Sejam

$$X = P^{-1}; \quad M = \hat{K}P^{-1}.$$

Assim,

$$XA^T - M^T B^T + AX - BM + \begin{bmatrix} X & -M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ -M \end{bmatrix} < 0.$$

A seguir, prova-se que o índice de desempenho satisfaz

$$J_1(u_e) < e^T(0) P e(0).$$

Considere a candidata a função de Lyapunov:

$$V(e(t)) = e^T(t) P e(t).$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V(e(t))) &= \frac{d}{dt}(e^T(t) P e(t)) = \dot{e}^T(t) P e(t) + e^T(t) P \dot{e}(t) \\ &= [(A - B\hat{K})e(t)]^T P e(t) + e^T(t) P [(A - B\hat{K})e(t)] \end{aligned}$$

$$= e^T(t)[(A - B\hat{K})P + P(A - B\hat{K})]e(t)$$

$$< -e^T(t)C_1^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_1 e(t).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(e^T(t)P e(t)) < -e^T(t)C_1^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_1 e(t).$$

Integrando ambos os lados de $[0, +\infty)$, tem-se:

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(e^T(t)P e(t)) dt < \int_0^{+\infty} -e^T(t)C_1^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_1 e(t) dt = -J_1(u_e).$$

Assim,

$$J_1(u_e) < \lim_{b \rightarrow +\infty} -e^T(t)P e(t) \Big|_0^b = e^T(0)P e(0),$$

pois $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$.

Corolário 2.1: Se (A, B) for controlável, sempre existe uma matriz definida positiva X e uma matriz M satisfazendo (2.89a) e (2.89b).

Prova: Como (A, B) é controlável, existe $\hat{K}$ tal que $A - B\hat{K}$ é assintoticamente estável. Então, pelo Teorema de Lyapunov dados $\delta > 0$, Q , R e $\hat{K}$ de modo que $A - B\hat{K}$ é assintoticamente estável, existe $P = P^T > 0$ tal que:

$$(A - B\hat{K})^T P + P(A - B\hat{K}) = -(Q + \hat{K}^T R \hat{K}) - \delta I.$$

Como $\delta I > 0$, pode-se escrever:

$$(A - B\hat{K})^T P + P(A - B\hat{K}) + (Q + \hat{K}^T R \hat{K}) = -\delta I < 0$$

De (2.91c), tem-se:

$$(Q + \hat{K}^T R \hat{K}) = C_1^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_1,$$

e assim:

$$(A - B\hat{K})^T P + P(A - B\hat{K}) + C_1^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_1 < 0.$$

Logo, existe $P^T = P > 0$, simétrica definida positiva:

$$(A - B\hat{K})^T P + P(A - B\hat{K}) + C_1^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_1 < 0.$$

Com demonstrado no teorema anterior, esta desigualdade é equivalente a :

$$XA^T - M^T B^T + AX - BM + \begin{bmatrix} X & -M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ -M \end{bmatrix} < 0,$$

sendo

$$X = P^{-1}; M = \hat{K} P^{-1}.$$

Corolário 2.2: Se (A, B) é controlável existem $K \in \Re^n$ e $K_I \in \Re$ tais que o sistema (2.84a)-(2.84b) é estabilizado pela lei de controle dada na equação (2.79).

Prova: Decorre imediatamente do corolário anterior, observando que $\hat{K} = [K \quad -K_I]$.

A desigualdade (2.89a) pode ser transformada em LMI. O complemento de Schur (Boyd et al., 1994) converte uma classe de desigualdades não-lineares, em desigualdades matriciais lineares (LMIs). O complemento de Schur é ilustrado a seguir (VanAntwerp, 2000).

Seja a desigualdade matricial não-linear:

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0, R(x) > 0, \quad (2.93)$$

sendo $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ são afins em x . Então o sistema (2.93) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0.$$

Apresenta-se um projeto do controlador “sub-ótimo”, baseado em LMIs, que estabiliza o sistema e minimiza o limite superior do índice de desempenho baseado no resultado do Teorema 2.4.

Teorema 2.5 : Dadas as matrizes A e B do sistema (2.84a)-(2.84b), e a condição inicial $e(0)$, então as matrizes $X = X^T$ e M que permitem a

determinação do ganho de realimentação para minimizar o limite superior do índice desempenho J_1 pode ser obtido resolvendo as seguintes LMIs:

$$\begin{array}{l} \text{minimize } \lambda \\ X, M \end{array}$$

sujeito a

$$X > 0, \quad (2.94)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & e^T(0) \\ e(0) & X \end{bmatrix} > 0, \quad (2.95)$$

$$\begin{bmatrix} A X + X A^T - M^T B^T - B M & X \sqrt{Q} & -M^T \sqrt{R} \\ \sqrt{Q} X & -I & 0 \\ -\sqrt{R} M & 0 & -1 \end{bmatrix} < 0. \quad (2.96)$$

Da solução das LMIs, o ganho de realimentação pode ser obtido pela expressão:

$$\hat{K} = M X^{-1}.$$

Então, o índice de desempenho satisfaz $J_1(u_e) < e^T(0) P e(0) < \lambda$, sendo

$$X = P^{-1}.$$

Prova: i) A desigualdade (2.89a) :

$$A X + X A^T - M^T B^T - B M + \begin{bmatrix} X & -M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ -M \end{bmatrix} < 0,$$

é equivalente a:

$$-(A X + X A^T - M^T B^T - B M) - \begin{bmatrix} X \sqrt{Q} & -M^T \sqrt{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} X \\ -\sqrt{R} M \end{bmatrix} > 0.$$

Pelo complemento de Schur tem-se:

$$\begin{bmatrix} -(A X + X A^T - M^T B^T - B M) & X \sqrt{Q} & -M^T \sqrt{R} \\ \sqrt{Q} X & I & 0 \\ -\sqrt{R} M & 0 & 1 \end{bmatrix} > 0,$$

que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} A X + X A^T - M^T B^T - B M & X \sqrt{Q} & -M^T \sqrt{R} \\ \sqrt{Q} X & -I & 0 \\ -\sqrt{R} M & 0 & -1 \end{bmatrix} < 0,$$

pela seguinte propriedade:

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2^T \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2^T \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & -X_2^T \\ -X_2 & X_3 \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -X_1 & X_2^T \\ X_2 & -X_3 \end{bmatrix} < 0.$$

ii) A desigualdade :

$$e^T(0) P e(0) < \lambda,$$

é equivalente a:

$$\lambda - e^T(0) X^{-1} e(0) > 0,$$

sendo $X = P^{-1}$.

Pelo Complemento de Schur, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \lambda & e^T(0) \\ e(0) & X \end{bmatrix} > 0,$$

e além disso,

$$J_1(u_c) < e^T(0) P e^T(0) < \lambda.$$

2.7.3 Condições Iniciais Ótimas no Controlador

Para determinar as condições iniciais ótimas é crucial o fato que o valor de regime dos estados $x_p(\infty)$, não dependa da matriz de ganho de realimentação ótima. O lema seguinte, fornece uma condição para isso: a planta $\{A_p, B_p, C_p\}$ descrita em (2.80)-(2.81) não deve apresentar zeros de transmissão na origem. Agora, como $A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_p \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $C_p \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, então os zeros de transmissão da planta (2.80)-(2.81) são os números $s_k \in \mathbb{C}$ ($k = 1, 2, \dots, p \leq n$), para os quais o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} s_k I - A_p & -B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = 0,$$

tem solução (x_0, u_0) não trivial (Cruz, 1996).

Lema 2.3: Suponha que a planta (2.80)-(2.81) não possua zeros de transmissão na origem. Então:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{B}_p \\ -\mathbf{C}_p & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ r_0 \end{bmatrix}, \quad (2.97)$$

sendo r_0 a amplitude da entrada de referência, a função degrau.

Prova: Das equações (2.80) e (2.81), tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p u(t),$$

$$\dot{\xi}(t) = r(t) - y(t) = r(t) - \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t).$$

No estado estacionário tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(\infty) = \mathbf{0} = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(\infty) + \mathbf{B}_p u(\infty),$$

$$\dot{\xi}(\infty) = 0 = r_0 - \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(\infty),$$

que podem ser combinadas como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{B}_p \\ -\mathbf{C}_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix}.$$

Pela hipótese, a origem não é zero de transmissão da planta, assim

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{B}_p \\ -\mathbf{C}_p & 0 \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & -\mathbf{B}_p \\ \mathbf{C}_p & 0 \end{bmatrix} = n+1.$$

Logo, essa matriz é inversível. Portanto, tem-se (2.97).

Considere,

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty),$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, $\mathbf{e}(0)$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{e}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(0) - \mathbf{x}_p(\infty) \\ \xi(0) - \xi(\infty) \end{bmatrix}.$$

Sejam,

$$\mathbf{e}_p(0) = \mathbf{x}_p(0) - \mathbf{x}_p(\infty),$$

$$\xi_l = \xi(0) - \xi(\infty).$$

Assim,

$$e(0) = \begin{bmatrix} e_p^T(0) & \xi_l \end{bmatrix}^T. \quad (2.98)$$

Note que o valor de $e_p(0)$ é conhecido e independente do ganho $\hat{K}$ e o valor de ξ_l pode ser escolhido de forma conveniente. Assim, a escolha de ξ_l é um novo grau de liberdade no projeto de controladores.

O problema do projeto de controladores ótimos, com atualização das condições iniciais do controlador, usando LMIs é definido a seguir.

Problema 2.3: Considere o sistema descrito pelas equações (2.80)-(2.83). Suponha que a entrada de referência (função degrau de amplitude r_0) ocorra em $t = 0$, ou seja:

$$r(t) = \begin{cases} r_0, & \text{para } t \geq 0, \\ 0, & \text{para } t < 0, \end{cases}$$

sendo que r_0 é uma constante real. Determine ξ_{lo} , a atualização de $\xi_l(t)$ em $t = 0$, de modo que exista $P = P^T$, tais que:

- (i) $P(A - B\hat{K}) + (A - B\hat{K})^T P < 0$;
- (ii) o limitante superior do índice de desempenho

$$J_1(u_e) = \int_0^{+\infty} (e^T Q e + u_e^T R u_e) dt,$$

seja minimizado.

A solução do problema proposto é apresentada no Teorema 2.6 a seguir:

Teorema 2.6: Dadas as matrizes A e B do sistema (2.84a)-(2.84b), e a condição inicial $e_p(0)$, então o problema proposto tem solução, resolvendo as seguintes LMIs:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \lambda \\ & X_{11}, X_{12}, X_{22}, M_1, M_2, \xi_l \\ & \text{s.a} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12}^T \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad (2.99)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & e_p^T(0) & \xi_l \\ e_p(0) & X_{11} & X_{12}^T \\ \xi_l & X_{12} & X_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad (2.100)$$

$$\begin{bmatrix} X_{11}A_p^T + A_pX_{11} - M_1^TB_p - B_pM_1 & A_pX_{12}^T - X_{11}C_p^T - B_pM_2 & X_{11}Q_{11} + X_{12}^TQ_{12} & X_{11}Q_{12}^T + X_{12}^TQ_{22} & -M_1^T\sqrt{R} \\ X_{12}A_p^T - C_pX_{11} - M_2^TB_p^T & -X_{12}C_p^T - C_pX_{12}^T & X_{12}Q_{11} + X_{22}Q_{12} & X_{12}Q_{12}^T + X_{22}Q_{22} & -M_2^T\sqrt{R} \\ Q_{11}X_{11} + Q_{12}^TX_{12} & Q_{11}X_{12}^T + Q_{12}^TX_{22} & -I & 0 & 0 \\ Q_{12}X_{11} + Q_{22}X_{12} & Q_{12}X_{12}^T + Q_{22}X_{22} & 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{R}M_1 & -\sqrt{R}M_2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.101)$$

sendo que:

$$M = [M_1 \quad M_2]; \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12}^T \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix}; \quad \sqrt{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12}^T \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix};$$

$$e_p(0) = x_p(0) - x_p(\infty) = x_p(0) - [I_n \quad 0] \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ -C_p & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r_0 \end{bmatrix}. \quad (2.101a)$$

Da solução das LMIs (2.99)-(2.101), o ganho do controlador é obtido da seguinte forma:

$$\hat{K} = MX^{-1}.$$

Neste caso, a atualização ótima das condições iniciais do controlador é dada por:

$$\xi_{lo} = \xi_l + \xi(\infty) - \xi(0^-), \quad (2.102a)$$

sendo $\xi(0^-)$ a condição do controlador antes da atualização e

$$e(\infty) = -\hat{A}^{-1}\hat{B}r_0, \quad (2.102b)$$

com

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_p - B_pK & B_pK_l \\ -C_p & 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Prova: As LMIs (2.99)-(2.101) são obtidas a partir das LMIs (2.94)-(2.96), reescrevendo:

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12}^T \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix}; M = [M_1 \quad M_2]; \sqrt{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12}^T \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix};$$

$$e(0) = \begin{bmatrix} e_p(0) \\ \xi_l \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -C_p & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note que a expressão de $e_p(0)$, descrita em (2.101a), segue diretamente do Lema 2.3, e não depende do ganho $\hat{K}$.

O valor da atualização, ξ_{lo} , decorre do fato de que:

$$\xi_l = \xi(0) - \xi(\infty), \quad (2.103)$$

pois, o valor inicial do controlador, antes da atualização é indicado por $\xi(0^-)$ e resolvendo as LMIs, obtém-se ξ_l e de (2.103), tem-se:

$$\xi(0) = \xi_l + \xi(\infty).$$

Assim, $\xi(0)$ é o valor inicial ótimo do controlador. Então, como $\xi(0) = \xi(0^-) + \xi_{lo}$ o valor da atualização ξ_{lo} é:

$$\xi_{lo} = (\text{valor inicial ótimo}) - (\text{valor inicial real}),$$

ou seja,

$$\xi_{lo} = \xi_l + \xi(\infty) - \xi(0^-).$$

2.7.4 Exemplo de Aplicação

Considerou-se, novamente, o problema do pêndulo invertido sobre o carro, conforme ilustrado na Figura 2.5 e com equações (2.29)-(2.32). O índice de desempenho do sistema é o descrito em (2.41a)-(2.41b).

O problema de projeto de controlador com atualização das condições iniciais, utilizando LMIs, é:

Minimize λ e encontre $X_{11} = X_{11}^T$, X_{12} , $X_{22} = X_{22}^T$, M_1 , M_2 , ξ_l sujeito a (2.99), (2.100) e (2.101), sendo:

$$x(0^-) = [x_p(0)^T \quad \xi(0^-)]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \text{ e}$$

$$e_p(0) = x_p(0) - x_p(\infty) = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 0].$$

O software *LMISol* forneceu λ , ξ_l e as matrizes X_{11} , X_{12} , X_{22} , M_1 , M_2 que solucionam as LMIs acima.

A solução obtida foi:

$$\hat{K} = MX^{-1} = [-123.4044 \quad -20.6700 \quad -11.442 \quad -18.0065 \quad 1.2971];$$

$$P = X^{-1} = \begin{bmatrix} 61.9943 & 10.5429 & 8.8190 & 12.5896 & -1.0146 \\ 10.5429 & 2.4999 & 2.0479 & 2.9834 & -0.2368 \\ 8.8190 & 2.0479 & 3.9382 & 3.1880 & -0.4691 \\ 12.5896 & 2.9834 & 3.1880 & 4.5495 & -0.3709 \\ -1.0146 & -0.2368 & -0.4691 & -0.3709 & 0.2068 \end{bmatrix};$$

$$\xi_l = -2.2597; \quad \lambda = 15.7488.$$

Assim,

$$K = [-123.4044 \quad -20.6700 \quad -11.442 \quad -18.0065];$$

$$K_I = -1.2971.$$

Portanto,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_p - B_p K & B_p K_I \\ -C_p & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -102.8034 & -20.6700 & -11.442 & -18.0065 & 1.2971 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 61.2117 & 10.3350 & 5.7221 & 9.0033 & -0.6486 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad e(\infty) = -\hat{A}^{-1} \hat{B} r_0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 8.8228]^T \text{ e } \xi(\infty) = 8.8228.$$

Logo, considerando $\xi(0^-) = 0$, obtém-se de (2.102a), a atualização ótima das condições iniciais do controlador como:

$$\xi_{lo} = \xi_l + \xi(\infty) - \xi(0^-) = 6.5631.$$

O Teorema 2.6 resolve o Problema 2.3, obtendo simultaneamente o ganho $\hat{K}$, “sub-ótimo”, $\hat{K} = [K \quad K_I]$ e ξ_l que fornece a atualização ótima no controlador ξ_{lo} sendo $\xi_{lo} = \xi_l + \xi(\infty) - \xi(0^-)$. Observe que esse valor ótimo depende de $\hat{K}$ pois, $\xi(\infty) = -\hat{A}^{-1} \hat{B} r_0$ com as matrizes $\hat{A}$ e $\hat{B}$ dadas em (2.102b). Dessa forma, fica difícil a comparação da resposta do sistema controlado sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador.

O índice de desempenho obtido foi:

$$J_1 = 2.0984.$$

Para obter o valor do índice de desempenho foi utilizado o *software Simulink* para a simulação e as equações (2.29)-(2.32).

Observação 2.8: O índice J_1 obtido acima é um pouco diferente do obtido na pág.29, com atualização ($J_1 = 2.102$). Note também que os ganhos K e K_f obtidos acima não são exatamente os mesmos dos obtidos nas págs. 27-33. Isso decorre do fato que o método de atualização das condições iniciais apresentado anteriormente, encontra o valor ótimo exato da atualização, enquanto que este método alternativo, usando LMIs, obtém um valor ótimo aproximado da atualização. A vantagem desse método alternativo é que outras restrições no projeto podem ser facilmente incorporadas, por exemplo: restrição da saída, restrição na entrada.

A seguir, apresenta-se na Figura 2.18 a resposta do sistema realimentado considerando ξ_l como um novo grau de liberdade e resolvendo respectivamente as LMIs (2.99)-(2.101).



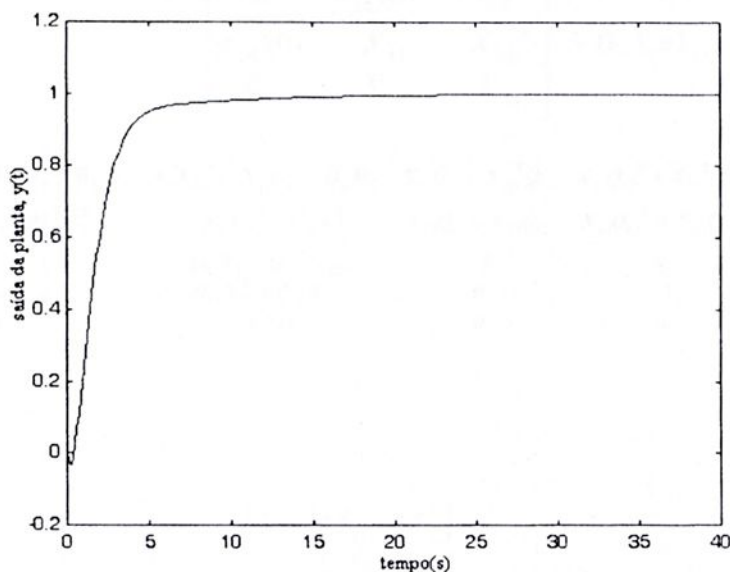


Figura 2.18: Resposta do sistema realimentado com atualização das condições iniciais no controlador.

Para aplicação dos Teorema 2.5 e 2.6 é necessário o conhecimento prévio do vetor de estado inicial, $\mathbf{x}_p(0)$. O teorema a seguir, mostra que é possível projetar o controlador e encontrar a condição inicial ótima do controlador para todos os vetores de estado inicial da planta $\mathbf{x}_p(0)$ em um politopo de vértices $\mathbf{x}_{pk}(0)$, $k = 1, \dots, r$.

Teorema 2.7: Dadas as matrizes A e B do sistema (2.84a)-(2.84b), suponha

que $\mathbf{x}_p(0) = \sum_{k=1}^r \rho_k \mathbf{x}_{pk}(0)$, $\mathbf{x}_{pk}(0) \in \mathcal{R}^n$, $\rho_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^r \rho_k = 1$ então, o problema

proposto tem solução resolvendo as seguintes LMIs :

$$\text{minimize } \lambda$$

$$\mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_{12}, \mathbf{X}_{22}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \xi_l$$

s.a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12}^T \\ \mathbf{X}_{12} & \mathbf{X}_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad (2.104)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & e_{pk}(0)^T & \xi_{lk} \\ e_{pk}(0) & X_{11} & X_{12}^T \\ \xi_{lk} & X_{12} & X_{22} \end{bmatrix} > 0, k=1, \dots, r \quad (2.105)$$

$$\begin{bmatrix} X_{11}A_p^T + A_pX_{11} - M_1^TB_p - B_pM_1 & A_pX_{12}^T - X_{11}C_p^T - B_pM_2 & X_{11}Q_{11} + X_{12}^TQ_{12} & X_{11}Q_{12}^T + X_{12}^TQ_{22} & -M_1^T\sqrt{R} \\ X_{12}A_p^T - C_pX_{11} - M_2^TB_p^T & -X_{12}C_p^T - C_pX_{12}^T & X_{12}Q_{11} + X_{22}Q_{12} & X_{12}Q_{12}^T + X_{22}Q_{22} & -M_2^T\sqrt{R} \\ Q_{11}X_{11} + Q_{12}^TX_{12} & Q_{11}X_{12}^T + Q_{12}^TX_{22} & -I & 0 & 0 \\ Q_{12}X_{11} + Q_{22}X_{12} & Q_{12}X_{12}^T + Q_{22}X_{22} & 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{R}M_1 & -\sqrt{R}M_2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.106)$$

sendo que:

$$M = [M_1 \quad M_2];$$

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12}^T \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix}; \sqrt{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12}^T \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix};$$

$$\hat{K} = MX^{-1};$$

$$\xi_l = [\xi_{lk}], \quad k = 1, \dots, r;$$

$$e_{pk}(0) = x_{pk}(0) - x_p(\infty), \quad k = 1, \dots, r,$$

$$\text{sendo } x_p(\infty) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ -C_p & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r_0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a atualização ótima das condições iniciais no controlador é dada por:

$$\xi_{lo} = \sum_{k=1}^r \rho_k \xi_{lk} + \xi(\infty) - \xi(0^-), \quad (2.107)$$

sendo $\xi(\infty)$, obtido através das equações (2.102b) e $\xi(0^-)$ a condição inicial do controlador antes da atualização.

Prova: Decorre diretamente do Teorema 2.6, observando que toda solução de (2.105) fornece uma solução de (2.100), pois:

$$\begin{aligned} \text{(i) } e_p(0) &= x_p(0) - x_p(\infty) = \sum_{k=1}^r \rho_k x_{pk}(0) - x_p(\infty) \\ &= \sum_{k=1}^r \rho_k (x_{pk}(0) - x_p(\infty)), \text{ pois } \sum_{k=1}^r \rho_k = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \begin{bmatrix} \lambda & e_{pk}(0)^T & \xi_{lk} \\ e_{pk}(0) & X_{11} & X_{12}^T \\ \xi_{lk} & X_{12} & X_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad k=1, \dots, r \Rightarrow \\
 & \sum_{k=1}^r \rho_k \begin{bmatrix} \lambda & e_{pk}(0)^T & \xi_{lk} \\ e_{pk}(0) & X_{11} & X_{12}^T \\ \xi_{lk} & X_{12} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \sum_{k=1}^r \rho_k e_{pk}(0)^T & \sum_{k=1}^r \rho_k \xi_{lk} \\ \sum_{k=1}^r \rho_k e_{pk}(0) & X_{11} & X_{12}^T \\ \sum_{k=1}^r \rho_k \xi_{lk} & X_{12} & X_{22} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \lambda & e_p(0)^T & \sum_{k=1}^r \rho_k \xi_{lk} \\ e_p(0) & X_{11} & X_{12}^T \\ \sum_{k=1}^r \rho_k \xi_{lk} & X_{12} & X_{22} \end{bmatrix} > 0.
 \end{aligned}$$

2.7.5 Exemplo de Aplicação

Considerou-se o problema do pêndulo invertido descrito pelas equações (2.29) a (2.32), com vetor de estado inicial,

$$x_p(0) = [x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0) \quad x_4(0)]^T, \quad (2.108)$$

satisfazendo :

$$\begin{aligned}
 x_{1\min} &\leq x_1(0) \leq x_{1\max}, \\
 x_{2\min} &\leq x_2(0) \leq x_{2\max}, \\
 x_{3\min} &\leq x_3(0) \leq x_{3\max}, \\
 x_{4\min} &\leq x_4(0) \leq x_{4\max}.
 \end{aligned} \quad (2.109)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 x_1(0) &= \alpha_1 x_{1\min} + \alpha_2 x_{1\max}, \\
 x_2(0) &= \alpha_3 x_{2\min} + \alpha_4 x_{2\max}, \\
 x_3(0) &= \alpha_5 x_{3\min} + \alpha_6 x_{3\max}, \\
 x_4(0) &= \alpha_7 x_{4\min} + \alpha_8 x_{4\max}
 \end{aligned} \quad (2.110)$$

com

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1; \alpha_3 + \alpha_4 = 1; \alpha_5 + \alpha_6 = 1; \alpha_7 + \alpha_8 = 1; \alpha_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, 8. \quad (2.111)$$

Então, por (2.110) e (2.111), pode-se escrever:

$$x_p(0) = \begin{bmatrix} (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_5 + \alpha_6)(\alpha_7 + \alpha_8)(\alpha_1 x_{1\min} + \alpha_2 x_{1\max}) \\ (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_5 + \alpha_6)(\alpha_7 + \alpha_8)(\alpha_3 x_{2\min} + \alpha_4 x_{2\max}) \\ (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_7 + \alpha_8)(\alpha_5 x_{3\min} + \alpha_6 x_{3\max}) \\ (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_5 + \alpha_6)(\alpha_7 x_{4\min} + \alpha_8 x_{4\max}) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{16} \rho_k A_k,$$

sendo

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_7; & \rho_2 &= \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_8; & \rho_3 &= \alpha_1 \alpha_3 \alpha_6 \alpha_7; \\ \rho_4 &= \alpha_1 \alpha_3 \alpha_6 \alpha_8; & \rho_5 &= \alpha_1 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_7; & \rho_6 &= \alpha_1 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_8; \\ \rho_7 &= \alpha_1 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_7; & \rho_8 &= \alpha_1 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_8; & \rho_9 &= \alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_7; \\ \rho_{10} &= \alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_8; & \rho_{11} &= \alpha_2 \alpha_3 \alpha_6 \alpha_8; & \rho_{12} &= \alpha_2 \alpha_3 \alpha_7 \alpha_8; \\ \rho_{13} &= \alpha_2 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_7; & \rho_{14} &= \alpha_2 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_8; & \rho_{15} &= \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_7; & \rho_{16} &= \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_8; \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\rho_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{16} \rho_k = 1,$$

$A_k = [a_{ik}]$, com $a_{ik} = x_{i\min}$ ou $a_{ik} = x_{i\max}$, $i = 1, \dots, 4$, ou seja

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} x_{1\min} \\ x_{2\min} \\ x_{3\min} \\ x_{4\min} \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} x_{1\min} \\ x_{2\min} \\ x_{3\min} \\ x_{4\max} \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} x_{1\min} \\ x_{2\min} \\ x_{3\max} \\ x_{4\min} \end{bmatrix}; A_4 = \begin{bmatrix} x_{1\min} \\ x_{2\max} \\ x_{3\min} \\ x_{4\min} \end{bmatrix}; A_5 = \begin{bmatrix} x_{1\max} \\ x_{2\min} \\ x_{3\min} \\ x_{4\min} \end{bmatrix}; \\ A_6 &= \begin{bmatrix} x_{1\max} \\ x_{2\max} \\ x_{3\min} \\ x_{4\min} \end{bmatrix}; A_7 = \begin{bmatrix} x_{1\max} \\ x_{2\min} \\ x_{3\min} \\ x_{4\min} \end{bmatrix}; A_8 = \begin{bmatrix} x_{1\max} \\ x_{2\min} \\ x_{3\min} \\ x_{4\max} \end{bmatrix}; A_9 = \begin{bmatrix} x_{1\min} \\ x_{2\max} \\ x_{3\max} \\ x_{4\min} \end{bmatrix}; A_{10} = \begin{bmatrix} x_{1\min} \\ x_{2\max} \\ x_{3\min} \\ x_{4\max} \end{bmatrix}; \\ A_{11} &= \begin{bmatrix} x_{1\min} \\ x_{2\min} \\ x_{3\max} \\ x_{4\max} \end{bmatrix}; A_{12} = \begin{bmatrix} x_{1\max} \\ x_{2\max} \\ x_{3\max} \\ x_{4\min} \end{bmatrix}; A_{14} = \begin{bmatrix} x_{1\max} \\ x_{2\min} \\ x_{3\max} \\ x_{4\max} \end{bmatrix}; A_{15} = \begin{bmatrix} x_{1\min} \\ x_{2\max} \\ x_{3\max} \\ x_{4\max} \end{bmatrix}; A_{16} = \begin{bmatrix} x_{1\max} \\ x_{2\max} \\ x_{3\max} \\ x_{4\max} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dessa forma, $x_p(0)$ está no politopo de vértices A_k .

Para ilustração, considerou-se:

$$x_{1\min} = -\pi/3; \quad x_{1\max} = \pi/3;$$

$$x_{2\min} = -\pi/10; x_{2\max} = \pi/10;$$

$$x_{3\min} = -1.2; x_{3\max} = 1.2;$$

$$x_{4\min} = -0.1; x_{4\max} = 0.1.$$

Assim, $e_{pk}(0) = x_{pk}(0) - x_p(\infty) = A_k - [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$; $k = 1, \dots, 16$, são dados

por:

$$e_{p1} = [-1.0472 \ -0.3142 \ -2.2000 \ -0.1000]^T;$$

$$e_{p2} = [-1.0472 \ -0.3142 \ -2.2000 \ 0.1000]^T;$$

$$e_{p3} = [-1.0472 \ -0.3142 \ 0.2000 \ -0.1000]^T;$$

$$e_{p4} = [-1.0472 \ -0.3142 \ 0.2000 \ 0.1000]^T;$$

$$e_{p5} = [-1.0472 \ 0.3142 \ -2.2000 \ -0.1000]^T;$$

$$e_{p6} = [-1.0472 \ 0.3142 \ -2.2000 \ 0.1000]^T;$$

$$e_{p7} = [-1.0472 \ 0.3142 \ 0.2000 \ -0.1000]^T;$$

$$e_{p8} = [-1.0472 \ 0.3142 \ 0.2000 \ 0.1000]^T;$$

$$e_{p9} = [-1.0472 \ -0.3142 \ -2.2000 \ -0.1000]^T;$$

$$e_{p10} = [1.0472 \ -0.3142 \ -2.2000 \ 0.1000]^T;$$

$$e_{p11} = [1.0472 \ -0.3142 \ 0.2000 \ -0.1000]^T;$$

$$e_{p12} = [1.0472 \ -0.3142 \ 0.2000 \ 0.1000]^T;$$

$$e_{p13} = [1.0472 \ 0.3142 \ -2.2000 \ -0.1000]^T;$$

$$e_{p14} = [1.0472 \ 0.3142 \ -2.2000 \ 0.1000]^T;$$

$$e_{p15} = [1.0472 \ 0.3142 \ 0.2000 \ -0.1000]^T;$$

$$e_{p16} = [1.0472 \ 0.3142 \ 0.2000 \ 0.1000]^T.$$

As matrizes Q e R que definem o índice de desempenho foram adotadas como sendo:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}; \quad R = 0.01.$$

Aplicando o Teorema 2.7:

Minimize λ e encontre $X_{11}, X_{12}, X_{22}, M_1, M_2, \xi_l$ sujeito a (2.104)-(2.106).

O software LMISol (Oliveira et al., 1997) forneceu λ e as matrizes X_{11} , X_{12} , X_{22} , M_1 , M_2 , ξ_l que solucionam as LMIs.

A solução obtida foi:

$$\lambda = 71.2895 ;$$

$$\hat{K} = MX^{-1} = [-128.4377 \quad -21.6821 \quad -8.6279 \quad -15.3897 \quad 0.7873];$$

$$P = X^{-1} = \begin{bmatrix} 32.9235 & 4.9388 & 4.0010 & 6.1730 & -0.3731 \\ 4.9388 & 1.2352 & 1.0684 & 1.7188 & -0.0987 \\ 4.0010 & 1.0684 & 2.5104 & 1.8584 & -0.2404 \\ 6.1730 & 1.7188 & 1.8584 & 2.9471 & -0.1721 \\ -0.3731 & -0.0987 & -0.2404 & -0.11721 & 0.1324 \end{bmatrix};$$

$$\xi_l = [\xi_{lk}] =$$

$$\begin{bmatrix} -7.2936 & -7.0336 & -2.9355 & -2.6756 & -6.8252 & -6.5652 & -2.4671 & -2.2072 \\ -7.2936 & -1.1646 & 2.9335 & 3.1935 & -0.9562 & -0.6962 & 3.4019 & 3.6619 \end{bmatrix}.$$

De (2.110) e (2.111) dado $x_p(0) = [x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0) \quad x_4(0)]^T$, obtém-se:

$$\alpha_1 = \frac{x_1(0) - x_{1\max}}{x_{1\min} - x_{1\max}}; \quad \alpha_2 = 1 - \alpha_1; \quad \alpha_3 = \frac{x_2(0) - x_{2\max}}{x_{2\min} - x_{2\max}}, \quad \alpha_4 = 1 - \alpha_3;$$

$$\alpha_5 = \frac{x_3(0) - x_{3\max}}{x_{3\min} - x_{3\max}}; \quad \alpha_6 = 1 - \alpha_5; \quad \alpha_7 = \frac{x_4(0) - x_{4\max}}{x_{4\min} - x_{4\max}}, \quad \alpha_8 = 1 - \alpha_7.$$

E portanto, de (2.112) calcula-se ρ_i , $i = 1, \dots, 16$.

O valor ótimo da atualização é obtido usando (2.107):

$$\xi_{lo} = \sum_{k=1}^r \rho_k \xi_{lk} + \xi(\infty) - \xi(0^-).$$

A Tabela 2 descreve o valor ótimo da atualização, ξ_{lo} , do controlador obtido usando a equação (2.107) dependendo do vetor de estado inicial, $x_p(0)$, no politopo. Para o cálculo, considerou-se $\xi(0^-) = 0$. De (2.102b), o valor obtido de $e(\infty)$ foi:

$$e(\infty) = -\hat{A}^{-1} \hat{B} r_0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 10.9592]^T,$$

e assim,

$$\xi(\infty) = 10.9592.$$

Tabela 2: Valor ótimo da atualização para o controlador, dependendo do vetor de estado inicial da planta $\mathbf{x}_p(0)$, com $\xi(0^-) = 0$.

$\mathbf{x}_p(0)$	ξ_{lo} (atualização)	J_1 (índice)
$[-\pi/3 \quad -\pi/10 \quad -1.2 \quad -0.1]$	3.6656	64.6200
$[-\pi/5 \quad -\pi/10 \quad 1 \quad 0.1]$	9.0904	13.3467
$[\pi/8 \quad 0.01 \quad 0.5 \quad 0.01]$	10.9158	4.0872
$[\pi/10 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0.1]$	10.2282	3.2836
$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$	8.7765	2.0332

A Figura 2.19 apresenta a resposta do sistema, $y(t)$ com atualização para diferentes valores do vetor de estado inicial.

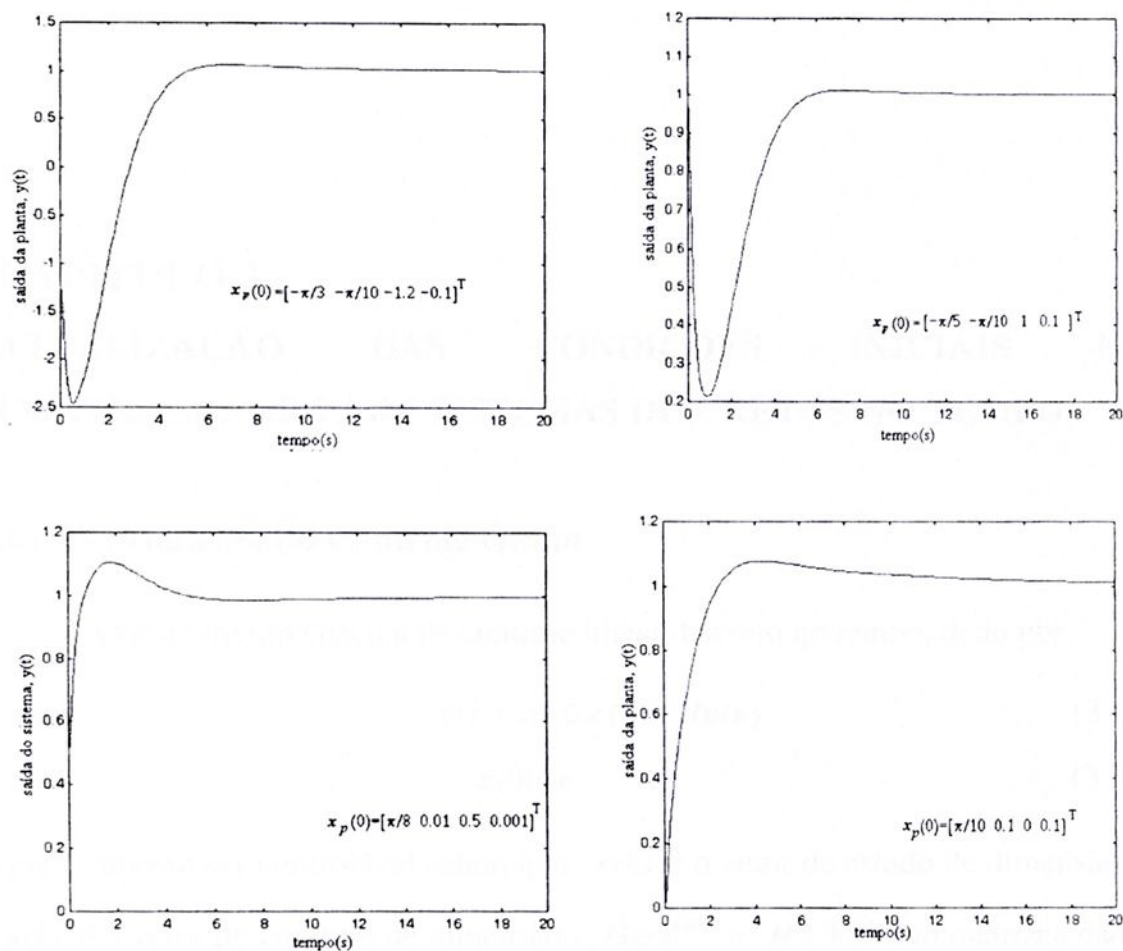


Figura 2.19: Respostas do sistema para diferentes valores do vetor de estado inicial da planta, $x_p(0)$, com a atualização das condições iniciais, proposta, descrita na Tabela 2, com $\xi(0^-) = 0$.

CAPÍTULO 3

ATUALIZAÇÃO DAS CONDIÇÕES INICIAIS NO CONTROLADOR PARA SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO

3.1 O Problema do Controle Ótimo

Considere um sistema de controle linear discreto no tempo, dado por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c} \quad (3.1b)$$

que é suposto ser controlável sendo que $\mathbf{x}(k)$ é o vetor de estado de dimensão n , $\mathbf{u}(k)$ é o vetor de controle de dimensão r , $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ são matrizes dadas com $\mathbf{G}$ não singular, possuindo todos os autovalores com módulo menor que 1.

Fixado $N \geq 1$, o problema de controle quadrático ótimo discreto no intervalo $[0, N]$ consiste em encontrar a seqüência de controle ótima, $\mathbf{u}(k)$, $k=0, \dots, N$, que minimize o índice quadrático de desempenho:

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)) \quad (3.2)$$

sendo que $\mathbf{Q}$ é uma matriz real simétrica definida positiva (ou semidefinida positiva) e $\mathbf{R}$ é uma matriz real simétrica definida positiva.

As matrizes $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ são selecionadas de forma a ponderar a importância relativa das medições de desempenho causadas pelo vetor de estado $\mathbf{x}(k)$ ($k=0, 1, 2, \dots, N$), a importância relativa do vetor $\mathbf{u}(k)$ ($k=0, 1, 2, \dots, N$), respectivamente.

O seguinte teorema resolve o problema de controle quadrático ótimo discreto no intervalo $[0, N]$.

Teorema 3.1: (Franklin et al., 1998 , pg. 365) A lei de controle ótimo para o sistema (3.1a), (3.1b) com índice quadrático (3.2) é :

$$u(k) = -K(k)x(k)$$

sendo que a $K(k)$ é a matriz de retroação $r \times n$:

$$K(k) = [R + H^T P(k+1)H]^{-1} H^T P(k+1)G$$

e $P(k)$ é a solução da equação discreta de Riccati

$$P(k) = Q + G^T P(k+1)G - G^T P(k+1)H [R + H^T P(k+1)H]^{-1} H^T P(k+1)G,$$

determinada recursivamente, com condição final

$$P(N) = Q,$$

isto é, pode ser resolvida unicamente caminhando-se para trás, variando k de $N-1$ até 0. Além disso, o valor mínimo do índice de desempenho é

$$\frac{1}{2} x^T(0) P(0) x(0). \quad (3.3)$$

Note que o valor mínimo do índice desempenho J , dado pela equação (3.3) é uma função de $P(0)$ e do estado inicial $x(0)$.

Prova: ver Apêndice E.

3.1.1 Controle Quadrático Ótimo em Estado Estacionário

O processo de controle visto anteriormente é finito (N é finito). Neste caso, a matriz de ganho de retroação $K(k)$ se torna uma matriz variante no tempo.

Agora, o problema de controle quadrático ótimo considerado é quando o processo continua sem limite, isto é, N cresce ilimitadamente. Na medida que N cresce ilimitadamente, a solução ótima de controle se torna uma solução de estado estacionário e a matriz de ganho variante no tempo $K(k)$ se torna uma

matriz de ganho constante. Uma tal matriz de ganho constante $K(k)$ é chamada matriz de ganho em estado (regime) estacionário e será descrita por K .

Para o problema de tempo infinito ($N = +\infty$), o índice desempenho é:

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)). \quad (3.4)$$

O teorema seguinte fornece condições suficientes para existência e unicidade da solução da equação de Riccati e a seqüência de controle ótima $u(k)$, $k \geq 0$ que minimiza o índice de desempenho dado por (3.4).

Teorema 3.2: (Antsaklis and Michel, 1997, pg.349) Sejam Q uma matriz real simétrica definida positiva (ou semidefinida positiva) e R uma matriz real simétrica definida positiva. Suponhamos que (G, H) seja controlável e $(G, \sqrt{Q})$ seja observável, então a equação de Riccati,

$$P = Q + G^T P G - G^T P H (R + H^T P H)^{-1} H^T P G \quad (3.5)$$

tem uma única solução P simétrica definida positiva tal que a matriz,

$$G - H (R + H^T P H)^{-1} H^T P G,$$

apresenta todos os autovalores com módulo menor que 1 e a lei de realimentação

$$u(k) = -(R + H^T P H)^{-1} H^T P G x(k)$$

torna o índice (3.4) mínimo e igual:

$$\frac{1}{2} x(0)^T P x(0).$$

3.2 Especificação das Condições Iniciais Ótimas no Controlador

Considere o sistema de controle linear discreto, controlável e observável definido pelas equações:

$$\mathbf{x}_p(k+1) = \mathbf{G}_p \mathbf{x}_p(k) + \mathbf{H}_p u(k) \quad (3.6a)$$

$$y(k) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(k)$$

sendo que, $\mathbf{x}_p(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado; $u(k) \in \mathbb{R}$ é a entrada de controle do sistema; $\mathbf{G}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $\mathbf{H}_p \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ $y(k) \in \mathbb{R}$ é a saída do sistema e $\mathbf{C}_p \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

Considere também, que é possível escolher um controlador:

$$\mathbf{x}_c(k+1) = \mathbf{G}_c \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{H}_c e(k) \quad (3.6b)$$

$$u(k) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(k) + D_c e(k)$$

sendo que $\mathbf{x}_c \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de estado, $e \in \mathbb{R}$ é o vetor erro, $e(k) = r(k) - y(k)$; $r(k)$ a referência; $\mathbf{G}_c \in \mathbb{R}^{m \times m}$; $\mathbf{H}_c \in \mathbb{R}^{m \times 1}$; $\mathbf{C}_c \in \mathbb{R}^{1 \times m}$; $D_c \in \mathbb{R}$, de tal modo que o sistema realimentado, mostrado na Figura 3.1, com entrada $r(k)$, e saída $y(k)$ seja estável.

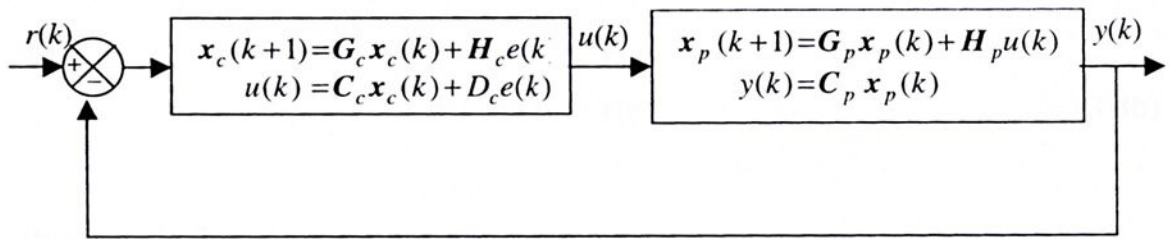


Figura 3.1: Sistema realimentado com controle dinâmico.

O sistema completo é descrito pelas equações:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}r(k) \quad (3.7a)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

sendo que

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{x}_c(k) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p - \mathbf{H}_p \mathbf{D}_c \mathbf{C}_p & \mathbf{H}_p \mathbf{C}_c \\ -\mathbf{H}_c \mathbf{C}_p & \mathbf{G}_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_p \mathbf{D}_c \\ \mathbf{H}_c \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_p \quad 0] \quad (3.7b)$$

O problema do projeto em estado estacionário de controladores ótimos com atualização das condições iniciais do controlador é definido a seguir.

Problema 3.1: Considere o sistema controlado (3.7a), (3.7b) estável e que na entrada, a referência (função degrau de amplitude r_0) ocorra em $t=0$, ou seja:

$$r(k) = \begin{cases} r_0 & , \text{ se } k \geq 0, \\ 0 & , \text{ se } k < 0, \end{cases}$$

sendo que r_0 é uma constante real. Determine, $\mathbf{x}_{co}$, a atualização de $\mathbf{x}_c(k)$ em $k=0$, de modo que o índice de desempenho,

$$J(\mathbf{x}_{co}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (\boldsymbol{\varepsilon}(k)^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}(k)) \quad (3.8a)$$

seja mínimo.

Em (3.8a), $\mathbf{Q}$ é uma matriz real simétrica definida positiva (ou semidefinida positiva), $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$ representa o erro entre $\mathbf{x}(k)$ e o seu valor de regime, isto é:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(\infty). \quad (3.8b)$$

Observação 3.1: A atualização de $\mathbf{x}_c(k)$ em $k=0$ significa: $\mathbf{x}_c(0) = \mathbf{x}_c(0^-) + \mathbf{x}_{co}$ sendo que, de (3.7a), como $r(k) = 0$ para $k < 0$, $\mathbf{x}(0^-) = \mathbf{G}\mathbf{x}(-1)$ é o valor de $\mathbf{x}(0)$ antes da atualização e $k = -1$ corresponde ao instante T segundos antes da aplicação da função degrau de amplitude r_0 , sendo T o período de amostragem.

Tem-se que:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(0^-) \\ \mathbf{x}_c(0^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0^-) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{x}_c(k) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p - \mathbf{H}_p \mathbf{D}_c \mathbf{C}_p & \mathbf{H}_p \mathbf{C}_c \\ -\mathbf{H}_c \mathbf{C}_p & \mathbf{G}_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_p \mathbf{D}_c \\ \mathbf{H}_c \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_p \quad 0] \quad (3.7b)$$

O problema do projeto em estado estacionário de controladores ótimos com atualização das condições iniciais do controlador é definido a seguir.

Problema 3.1: Considere o sistema controlado (3.7a), (3.7b) estável e que na entrada, a referência (função degrau de amplitude r_0) ocorra em $t=0$, ou seja:

$$r(k) = \begin{cases} r_0 & , \text{ se } k \geq 0, \\ 0 & , \text{ se } k < 0, \end{cases}$$

sendo que r_0 é uma constante real. Determine, $\mathbf{x}_{co}$, a atualização de $\mathbf{x}_c(k)$ em $k=0$, de modo que o índice de desempenho,

$$J(\mathbf{x}_{co}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (\boldsymbol{\varepsilon}(k))^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}(k) \quad (3.8a)$$

seja mínimo.

Em (3.8a), $\mathbf{Q}$ é uma matriz real simétrica definida positiva (ou semidefinida positiva), $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$ representa o erro entre $\mathbf{x}(k)$ e o seu valor de regime, isto é:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(\infty). \quad (3.8b)$$

Observação 3.1: A atualização de $\mathbf{x}_c(k)$ em $k=0$ significa: $\mathbf{x}_c(0) = \mathbf{x}_c(0^-) + \mathbf{x}_{co}$ sendo que, de (3.7a), como $r(k) = 0$ para $k < 0$, $\mathbf{x}(0^-) = \mathbf{G}\mathbf{x}(-1)$ é o valor de $\mathbf{x}(0)$ antes da atualização e $k = -1$ corresponde ao instante T segundos antes da aplicação da função degrau de amplitude r_0 , sendo T o período de amostragem.

Tem-se que:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(0^-) \\ \mathbf{x}_c(0^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0^-) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Vale um resultado análogo ao Lema 2.2 para sistemas discretos no tempo, quanto ao efeito da atualização das condições iniciais no controlador no valor de regime dos estados e da saída. Isso é o que diz o lema seguinte.

Lema 3.1. Considere o sistema descrito pelas equações (3.7a) e (3.7b). Suponha que:

- (i) o sistema seja estável;
- (ii) as condições iniciais do controlador sejam alteradas, isto é:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0^-) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(0) \\ \mathbf{x}_c(0) \end{bmatrix},$$

sendo $\mathbf{x}(0^-)$ a condição inicial antes da atualização e $\mathbf{x}_{co}$ a atualização das condições iniciais do controlador;

- (iii) seja aplicada uma entrada $r(k) = r_0$, $k \geq 0$, sendo r_0 uma constante real.

Então:

- a) o valor de regime dos estados, $\mathbf{x}(\infty) = (\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} r_0$ permanece inalterado, com a atualização das condições iniciais, sendo que $\mathbf{I}$ denota a matriz identidade de ordem n ;
- b) o valor de regime da saída, $y(\infty) = \mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} r_0$, permanece inalterado, com atualização das condições iniciais do controlador.

Prova: Considerando o sistema sem a atualização das condições iniciais, isto é, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0^-)$ e aplicando o Teorema do Valor Final (Franklin et al., 1998), obtém-se de (3.7a):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{sa}(\infty) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{sa}(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \mathbf{X}_{sa}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \left[\mathbf{H} \left(\frac{z}{z-1} \right) r_0 + z\mathbf{x}(0) \right] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} r_0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Em (3.10), $\mathbf{x}_{sa}(k)$ designa $\mathbf{x}(k)$ sem o ajuste da condição inicial. Assim o valor da saída será:

$$y_{sa}(\infty) = \mathbf{C} \mathbf{x}_{sa}(\infty) = \mathbf{C} (\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} r_0. \quad (3.11)$$

Considere agora o sistema com atualização das condições iniciais, ou seja,

$x(0) = x(0^-) + \begin{bmatrix} 0 & x_{co}^T \end{bmatrix}^T$. Então de (3.7a) tem-se que:

$$\begin{aligned} x(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)(zI - G)^{-1} \left[H \left(\frac{z}{z-1} \right) r_0 + z \left(x(0^-) + \begin{bmatrix} 0 & x_{co}^T \end{bmatrix}^T \right) \right] \\ &= (I - G)^{-1} H r_0 \end{aligned}$$

e desta forma,

$$y(\infty) = Cx(\infty) = C(I - G)^{-1} H r_0,$$

e a prova está concluída.

Para a solução do problema proposto, necessita-se do lema seguinte, análogo ao Lema 2.2 para sistemas contínuos no tempo.

Lema 3.2: (Chen (1999), pág. 135) Seja G uma matriz com todos os autovalores com módulo menor que 1. Para toda matriz real simétrica semidefinida positiva $Q = N^T N$ com a propriedade que (G, N) é observável, a equação discreta de Lyapunov

$$G^T P G - P = -N^T N, \quad (3.12a)$$

tem uma única solução P simétrica definida positiva dada por:

$$P = \sum_{k=1}^{+\infty} (G^T)^k Q G^k. \quad (3.12b)$$

Prova: Apêndice F.

A solução do problema proposto é apresentada no teorema a seguir:

Teorema 3.3. O Problema 3.1 tem solução quando (G, N) , for observável, sendo $Q = N^T N$. Neste caso, a atualização ótima das condições iniciais do controlador é única e pode ser calculada pela expressão:

$$x_{co} = - \left(\begin{bmatrix} 0_{m \times n} & I_m \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & I_m \end{bmatrix} P (Gx(-1) - (I_n - G)^{-1} H r_0) \quad (3.13)$$

sendo que P é a solução de (3.12a), $Gx(-1)$ é a condição inicial do sistema planta-controlador antes da atualização (como descrito na Observação 3.1), $\mathbf{0}_{k \times \ell}$ denota a matriz $k \times \ell$ com todos os elementos nulos e I_ℓ a matriz identidade de ordem ℓ .

Prova: O problema consiste em encontrar o vetor x_{co} , de modo a minimizar o índice

$$J(x_{co}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (\varepsilon(k))^T Q(\varepsilon(k)). \quad (3.14)$$

Tem-se pelas equações (3.7a), (3.7b), (3.8b) e $x(\infty) = (I - G)^{-1} H r_0$ que:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k+1) &= x(k+1) - x(\infty) = Gx(k) + Hr_0 - x(\infty) \\ &= Gx(k) + (I - G)x(\infty) - x(\infty) \\ &= G(x(k) - x(\infty)) = G\varepsilon(k). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Devido a (3.15), para $k \geq 0$, tem-se:

$$\varepsilon(k) = G^k \varepsilon(0), \quad (3.16)$$

sendo que:

$$\varepsilon(0) = x(0) - x(\infty) = \left(Gx(-1) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ x_{co} \end{bmatrix} - (I - G)^{-1} Hr_0 \right). \quad (3.17)$$

Dessa forma, pode-se escrever de (3.14) e (3.16),

$$\begin{aligned} J(x_{co}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (G^k \varepsilon(0))^T Q(G^k \varepsilon(0)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (\varepsilon(0))^T (G^T)^k Q G^k \varepsilon(0) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon(0))^T \sum_{k=0}^{+\infty} (G^T)^k Q G^k \varepsilon(0) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon(0)^T P \varepsilon(0), \end{aligned} \quad (3.18)$$

sendo que $P = P^T > 0$, dada em (3.12b), é a solução da equação (3.12a).

Substituindo $\varepsilon(0)$ em termos de x_{co} em (3.18), o resto da prova é similar a prova do Teorema 2.2 para sistema contínuo no tempo.

Observação 3.2: i) O índice de desempenho dado em (3.4), com lei de controle $u(k) = -Kx(k)$, com $x(k)$ satisfazendo (3.1) pode ser colocado na forma (3.8a) pois,

$$\begin{aligned} J(u) &= \sum_{k=1}^{+\infty} x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} x^T(k) \tilde{Q} x(k) \end{aligned}$$

sendo,

$$\tilde{Q} = (Q + K^T R K); \quad x(k+1) = (G - HK)x(k);$$

ii) Se $u(k) = -Kx(k)$ estabiliza o sistema e $(G, \sqrt{Q})$ é observável, então pode-se provar que $(G - HK, \tilde{N})$ é observável, sendo $\tilde{Q} = \tilde{N}^T \tilde{N}$, $\tilde{Q} = Q + K^T R K$ (Corolário 1 do Apêndice B) e assim, o índice de desempenho (3.4) pode ser calculado, conforme descrito nas equações (3.14)-(3.18):

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)) \\ &= \frac{1}{2} x(0)^T P_L x(0) \end{aligned}$$

sendo $P_L = P_L^T > 0$, a única matriz solução da equação de Lyapunov:

$$(G - HK)^T P_L (G - HK) - P_L = -(Q + K^T R K); \quad (3.19)$$

iii) Pode-se provar que se em (3.4) o ganho K é ótimo isto é, $u(k) = -Kx(k)$ minimiza J , então a equação (3.19) reduz-se à equação (3.5). Assim, neste caso P_L , a solução de (3.19) e a solução P da equação de Riccati (3.5) são iguais (Lema do Apêndice G).

3.2.1 Especificação das Condições Ótimas para Controlador Integral e Retroação de Estados

Considere o sistema de controle discreto no tempo, controlável e observável, definido pelas equações:

$$\mathbf{x}_p(k+1) = \mathbf{G}_p \mathbf{x}_p(k) + \mathbf{H}_p u(k), \quad (3.18)$$

$$u(k) = K_I v(k) - \mathbf{K} \mathbf{x}_p(k), \quad (3.19)$$

$$v(k+1) = r(k) - y(k) + v(k), \quad (3.20)$$

$$y(k) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(k), \quad (3.21)$$

sendo que $\mathbf{x}_p(k)$ é o vetor de estado de dimensão n , $u(k)$ é o vetor de controle, $\mathbf{G} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{H} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ são matrizes dadas com $\mathbf{G}$ matriz não singular, K_I é a constante de ganho integral e $\mathbf{K}$ a constante de ganho de retroação.

No projeto do controlador os ganhos K_I e $\mathbf{K}$ são determinados de forma que o sistema seja estável e exiba uma resposta transitória aceitável para a entrada degrau unitário. A Figura 3.2 apresenta o sistema de controle considerado.

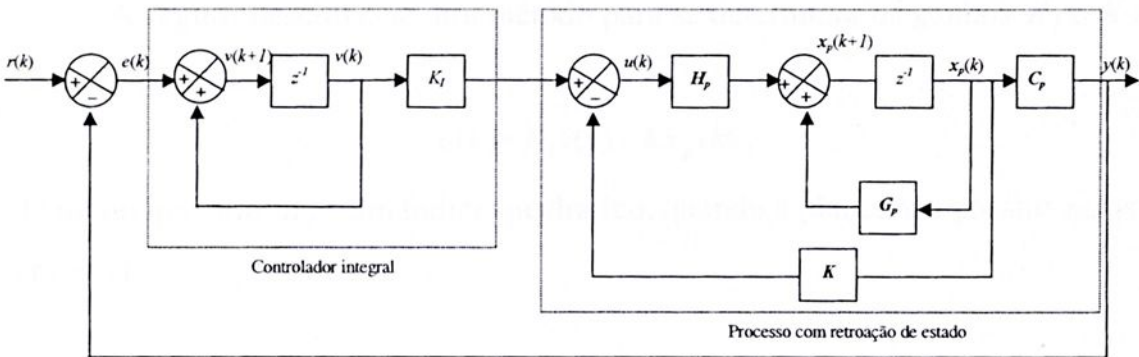


Figura 3.2: Sistema realimentado com controlador proporcional integral e realimentação de estados

O sistema de malha fechada para entrada em degrau unitário pode ser descrito pelas equações abaixo:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}r(k) \quad (3.22a)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ v(k) \end{bmatrix}; \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p - \mathbf{H}_p \mathbf{K} & \mathbf{H}_p \mathbf{K}_I \\ -\mathbf{C}_p & 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.22b)$$

Para o sistema (3.22a) e (3.22b) a solução do Problema 3.1 é apresentada no corolário seguinte.

Corolário 3.1 : Para o sistema (3.22a) e (3.22b), a atualização das condições ótimas no integrador, referente ao Problema 3.1, é dada por:

$$\mathbf{x}_{co} = \frac{-[\mathbf{0} \quad 1] \mathbf{P} (\mathbf{G} \mathbf{x}(-1) - (\mathbf{G} - \mathbf{I}_n)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{r}_0)}{[\mathbf{0} \quad 1] \mathbf{P} [\mathbf{0} \quad 1]^T} \quad (3.22c)$$

sendo que $\mathbf{0}$ denota um vetor de elementos nulos $1 \times n$, $\mathbf{P}$ é a solução de (3.12a) e $\mathbf{G} \mathbf{x}(-1)$ é a condição inicial do sistema planta-integrador antes da atualização.

Prova: Segue do Teorema 3.3, quando a ordem do controlador é $m=1$.

A seguir, descreve-se um método para se determinar os ganhos K_I e $\mathbf{K}$ do vetor de controle,

$$u(k) = K_I v(k) - \mathbf{K} \mathbf{x}_p(k),$$

de modo que minimize um índice quadrático, quando a planta não possuir zeros em $z = 1$.

3.2.1.1 Projeto do Controlador

Considere o sistema de controle de malha fechada para entrada degrau unitário descrito pelas equações (3.22a)-(3.22b).

Os ganhos K_I e $\mathbf{K}$ do vetor de controle,

$$u(k) = K_I v(k) - \mathbf{K} \mathbf{x}_p(k), \quad (3.23a)$$

são determinados de forma que o índice de desempenho:

$$J(u_e) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (x_e(k))^T Q x_e(k) + (u_e(k))^T R u_e(k) \quad (3.23b)$$

seja minimizado, sendo que Q e R são matrizes simétricas definidas positivas, $x_e(k)$ e $u_e(k)$ são respectivamente o erro entre $x(k)$ e $u(k)$ e os seus valores de regime, ou seja:

$$x_e(k) = x(k) - x(\infty); \quad u_e(k) = u(k) - u(\infty) \quad (3.23c)$$

3.2.1.1.1 Determinação dos ganhos K_I e K

Com procedimento análogo ao realizado para o caso contínuo, pode-se obter a dinâmica do erro $x_e(k)$ utilizando as equações (3.18)-(3.21), (3.23a) e (3.23c):

$$x_e(k+1) = \hat{G}x_e(k) + \hat{H}u_e(k), \quad (3.24a)$$

sendo que

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ -C_p & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} H_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_e(k) = -\hat{K}x_e(k); \quad \hat{K} = [K \quad -K_I] \quad (3.24b)$$

Nas condições anteriores $(\hat{G}, \hat{H})$ é controlável (Apêndice H). Observe que $(\hat{G}, \sqrt{Q})$ é observável pois: posto $\sqrt{Q} = n+1$ (Q é positiva definida).

Então, pelo Teorema 3.2, existe $\hat{K}$ ótimo tal que o índice J é minimizado.

Para a determinação da matriz $\hat{K}$, resolve-se a equação algébrica de Riccati

$$P = Q + \hat{G}^T P G - \hat{G}^T P H (R + H^T P H)^{-1} H^T P G. \quad (3.25)$$

O comando *dlqr* do *MATLAB* fornece a solução da equação (3.25) para sistemas discretos e determina a matriz de ganho de retroação, ótima

$$\hat{K} = (R + H^T P H)^{-1} H^T P G.$$

Seja $\hat{K} = [K \quad -K_I]$ com $K \in \mathbb{R}^n$ e $K_I \in \mathbb{R}$. Dessa forma os ganhos K_I e K são obtidos.

3.3 Exemplo 1

Considere o sistema realimentado, como na Figura 3.1, com:

$$G_p = \begin{bmatrix} 0.9048 & 0 \\ 0.9516 & 1 \end{bmatrix}; \quad H_p = \begin{bmatrix} 0.9516 \\ 0.4837 \end{bmatrix}; \quad C_p = [0 \quad 0.1];$$

$$G_c = 0.3679; \quad C_c = -3.5650; \quad D_c = 6.64 \quad H_c = 1.$$

O sistema realimentado, dado por (3.7a) e (3.7b), possui as equações:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}r(k), \quad (3.27a)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k),$$

sendo que:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{x}_c(k) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.9048 & -0.6319 & -3.3926 \\ 0.9516 & 0.6788 & -1.7245 \\ 0 & -0.1 & 0.3679 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 6.3188 \\ 3.2120 \\ 1.0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [0 \quad 0.1 \quad 0]. \quad (3.27b)$$

Adotou-se o índice de desempenho dado como em (3.8a) com $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$:

$$J(x_{co}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (\varepsilon(k)^T \mathbf{Q} \varepsilon(k)). \quad (3.27c)$$

Supondo que no instante $k=0$, a amplitude de $r(k)$ é alterada para o valor $r_0=1$, então $\mathbf{x}_c(k)$ será atualizada, passando de $\mathbf{x}_c(0^-)$ para $\mathbf{x}_c(0^-) + \mathbf{x}_{co}$ sendo $\mathbf{x}_{co}$, o valor da atualização. De acordo com a Observação 3.1, considerando que as condições iniciais da planta e do controlador sejam nulas, isto é:

$$\mathbf{x}_p(0^-) = 0 \text{ e } \mathbf{x}_c(0^-) = 0, \quad (3.28)$$

tem-se:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(0^-) \\ \mathbf{x}_c(0^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad \mathbf{x}_{co}]^T, \quad (3.29)$$

sendo que $\mathbf{0}$ é o vetor de elementos nulos 2×1 .

O erro entre $\mathbf{x}(k)$ e o seu valor de regime, é:

$$\varepsilon(k) = x(k) - x(\infty)$$

e de (3.10),

$$x(\infty) = (I - G)^{-1} H r_0 = [0 \ 10 \ 0 \ 0]^T \quad (3.30)$$

A dinâmica do erro, de acordo com a equação (3.15) é:

$$\varepsilon(k+1) = G\varepsilon(k),$$

sendo que,

$$\begin{aligned} \varepsilon(0) &= x(0) - x(\infty) = [0 \ 0 \ x_{co}]^T - (I - G)^{-1} H r_0 \\ &= [0 \ -10 \ x_{co}]^T. \end{aligned} \quad (3.31)$$

O índice em (3.27c) é dado por:

$$J(x_{co}) = \frac{1}{2} (\varepsilon(0))^T P \varepsilon(0), \quad (3.32a)$$

sendo que,

$$P = \begin{bmatrix} 0.0728 & -0.0031 & -0.3354 \\ -0.0031 & 0.0205 & 0.0530 \\ -0.3354 & 0.0530 & 1.8883 \end{bmatrix}, \quad (3.32b)$$

é a solução da equação:

$$G^T P G - P = -C^T C,$$

que pode ser obtida usando o comando *dlyap* do *MATLAB*.

O valor x_{co} da atualização, obtido de (3.13), com $x(-1) = 0$ é:

$$x_{co} = -\frac{[0 \ 0 \ 1] P [0 \ -10 \ 0]^T}{[0 \ 0 \ 1] P [0 \ 0 \ 1]^T} = 0.2806.$$

Como, de (3.31)

$$\varepsilon(0) = [0 \ -10 \ x_{co}]^T,$$

obtem-se de (3.32a)-(3.32b) o índice de desempenho sem atualização ($x_{co} = 0$):

$$J = \frac{1}{2} (\varepsilon(0))^T P \varepsilon(0) = 1.0259,$$

e o índice de desempenho com atualização ($x_{co} = 0.2806$):

$$J = \frac{1}{2} (\varepsilon(0))^T P \varepsilon(0) = 0.9516.$$

A Figura 3.3 mostra a resposta do sistema de malha fechada com e sem atualização das condições iniciais, considerando o tempo de amostragem $T=0.2s$.

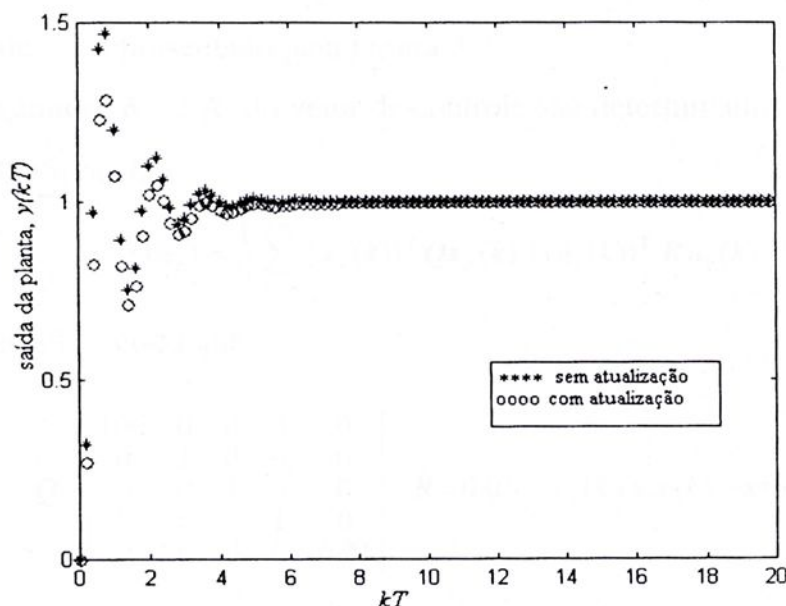


Figura 3.3: Resposta da saída da planta do Exemplo 1.

O exemplo a seguir mostra o efeito da atualização das condições iniciais no projeto de controle do pêndulo-invertido.

3.4 Aplicação no Projeto de Controle do Pêndulo Invertido

O sistema considerado é o apresentado no Seção 2.3, descrito por meio das equações (2.26)-(2.28).

Como se deve projetar um sistema de controle digital, o primeiro passo é discretizar a equação de estado (2.29)-(2.32). A discretização foi feita utilizando o período de amostragem $T=0.1s$. Obtém-se o seguinte sistema equivalente:

$$\mathbf{x}_p(k+1) = \mathbf{G}_p \mathbf{x}_p(k) + \mathbf{H}_p u(k), \quad (3.33)$$

$$u(k) = K_I v(k) - K \mathbf{x}_p(k), \quad (3.34)$$

$$v(k+1) = r(k) - y(k) + v(k), \quad (3.35)$$

$$y(k) = C_p \mathbf{x}_p(k), \quad (3.36)$$

sendo que:

$$G_p = \begin{bmatrix} 1.1048 & 0.1035 & 0 & 0 \\ 2.1316 & 1.1048 & 0 & 0 \\ -0.0025 & -0.0001 & 1 & 0 \\ -0.0508 & -0.0025 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad H_p = \begin{bmatrix} -0.0051 \\ -0.1035 \\ 0.0025 \\ 0.0501 \end{bmatrix}; \quad C_p = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad (3.37)$$

e K_I é a constante de ganho integral e K a constante de ganho de retroação. Este sistema pode ser representado pela Figura 3.2.

Os ganhos K_I e K do vetor de controle são determinados de forma que o índice de desempenho:

$$J(u_e) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (x_e(k))^T Q x_e(k) + (u_e(k))^T R u_e(k) \quad (3.37a)$$

seja minimizado, sendo que:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}; \quad R = 0.01; \quad x_e(k) = x(k) - x(\infty);$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_p(k) \\ v(k) \end{bmatrix}; \quad u_e(k) = u(k) - u(\infty).$$

3.4.1 Determinação dos ganhos K_I e K

O sistema de malha fechada para entrada degrau unitária descritas por (3.22a) e (3.22b) são:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hr(k), \quad (3.38a)$$

$$y(k) = Cx(k),$$

sendo que:

$$G = \begin{bmatrix} G_p - H_p K & H_p K_I \\ -C_p & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [C_p \quad 0]. \quad (3.38b)$$

A dinâmica do erro dada por (3.24a)-(3.24b) é:

$$x_e(k+1) = \hat{G}x_e(k) + \hat{H}u_e(k), \quad (3.39a)$$

sendo que:

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 1.1048 & 0.1035 & 0 & 0 & 0 \\ 2.1316 & 1.1048 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0025 & -0.0001 & 1 & 0.1 & 0 \\ -0.0508 & -0.0025 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \hat{H} = \begin{bmatrix} -0.0051 \\ -0.1035 \\ 0.0025 \\ 0.0501 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$u_e(k) = -\hat{K}x_e(k); \hat{K} = [K \quad -K_I]. \quad (3.39b)$$

Como o sistema é controlável e $(\hat{G}, \sqrt{Q})$ é observável existe $\hat{K}$ ótimo, tal que o índice J é minimizado. Para determinar a matriz de ganho de retroação de estado, $\hat{K}$, há necessidade de resolver as equações de Riccati, dadas em (3.5), conforme descrito na seção anterior. Utilizando o *Matlab*, determinou-se a matriz de retroação de estado $\hat{K}$, que minimiza o índice J como:

$$\hat{K} = [-86.3684 \quad -17.9759 \quad -9.3713 \quad -11.3125 \quad 0.3488]. \quad (3.40)$$

Dessa forma obtém-se de (3.39b):

$$K_I = -0.3488, \quad K = [-86.3684 \quad -17.9759 \quad -9.3713 \quad -11.3125]. \quad (3.41)$$

3.4.2 Cálculo do Índice de Desempenho sem atualização das condições iniciais

Por cálculo análogo ao realizado nas equações (3.14)-(3.18), o índice (3.37a) é dado por:

$$\frac{1}{2} (x_e(0))^T P x_e(0) \quad (3.42)$$

sendo que:

$$P = \begin{bmatrix} 478.2660 & 72.4357 & 99.2253 & 98.8017 & -4.0014 \\ 72.4357 & 18.4557 & 25.5823 & 26.3545 & -1.0106 \\ 99.2253 & 25.5823 & 69.5129 & 44.1094 & -3.2430 \\ 98.8017 & 26.3545 & 44.1094 & 45.2822 & -1.7610 \\ -4.0014 & -1.0106 & -3.2430 & -1.7610 & 0.2787 \end{bmatrix} \quad (3.43a)$$

é a única solução, $P = P^T > 0$, da equação

$$(\hat{G} - \hat{H}\hat{K})^T P (\hat{G} - \hat{H}\hat{K}) - P = -Q,$$

com

$$Q_t = (Q + \hat{K}^T R \hat{K}) = 10^3 \times \begin{bmatrix} 7.4695 & 1.5526 & 0.8395 & 0.9770 & -0.0301 \\ 1.5526 & 0.3241 & 0.1747 & 0.2034 & -0.0063 \\ 0.8395 & 0.1747 & 0.1945 & 0.1100 & -0.0034 \\ 0.9770 & 0.2034 & 0.1100 & 0.1290 & -0.0039 \\ -0.0301 & -0.0063 & -0.1290 & -0.0039 & 0.0011 \end{bmatrix} \quad (3.43b)$$

Agora:

$$\mathbf{x}_e(0) = \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty).$$

Supondo as condições iniciais nulas, isto é,

$$\mathbf{x}_p(0^-) = 0 \quad \text{e} \quad v(0^-) = 0$$

e como, por (3.10)

$$\mathbf{x}(\infty) = (\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{r}_0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 26.8651]^T,$$

sendo $r_0 = 1$, obtém-se:

$$\mathbf{x}_e(0) = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -26.8651]^T.$$

Logo, o índice de desempenho em (3.37a) sem atualização é:

$$\frac{1}{2} (\mathbf{x}_e(0))^T \mathbf{P} \mathbf{x}_e(0) = 96.3780.$$

Deseja-se a seguir, verificar o efeito da atualização das condições iniciais no integrador para o índice em (3.37a).

3.4.3 Cálculo do índice de desempenho com atualização das condições iniciais

A Figura 3.4 apresenta uma forma de implementação da atualização das condições iniciais do integrador que passa de $v(0^-) = 0$ para $v(0) = \mathbf{x}_{co}$

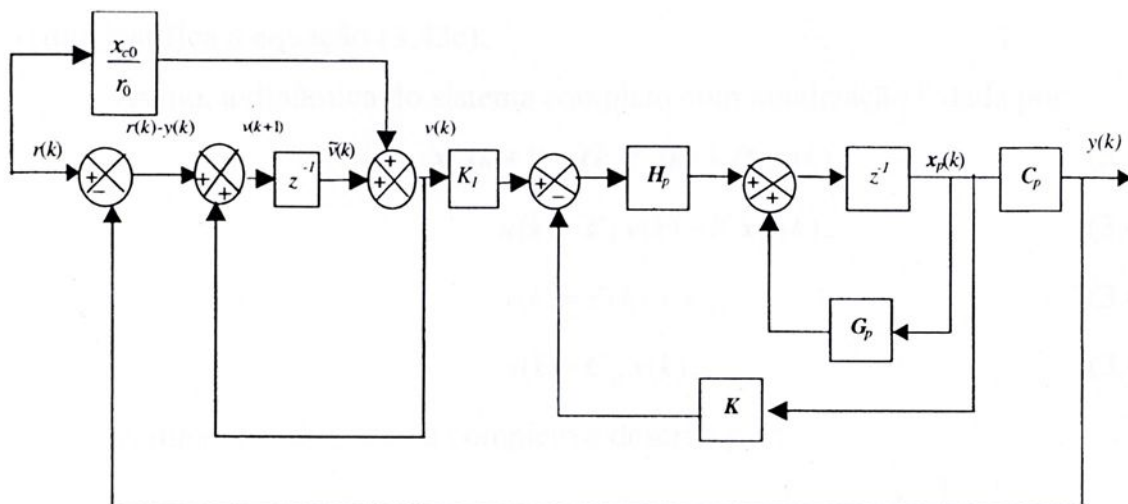


Figura 3.4: Diagrama de blocos do sistema de controle de um pêndulo invertido com atualização da condição inicial no controlador (PI).

Da Figura 3.4, sem atualização quando $x_{co} = 0$, tem-se:

$$v(k) = \tilde{v}(k); \quad v(k+1) = v(k) + e(k);$$

$$u(k) = -Kx_p(k) + K_I v(k),$$

e com atualização:

$$v(k) = \tilde{v}(k) + x_{co}; \quad (3.43c)$$

$$u(k) = -Kx_p(k) + K_I v(k).$$

Do diagrama, a equação (3.43c) é obtida tomando a transformada-z:

$$Z\{v(k+1)\} = zV(z) - zv(0),$$

e portanto

$$\frac{1}{z} Z\{v(k+1)\} = V(z) - v(0),$$

e considerando $v(0) = v(0^-) + x_{co}$, então:

$$V(z) = \frac{1}{z} Z\{v(k+1)\} + v(0^-) + x_{co}.$$

Como no diagrama é suposto que $v(0^-) = 0$, tem-se:

$$V(z) = \frac{1}{z} Z\{v(k+1)\} + x_{co}, \quad (3.43d)$$

o que justifica a equação (3.43c).

Assim, a dinâmica do sistema completo com atualização é dada por:

$$\mathbf{x}_p(k+1) = \mathbf{G}_p \mathbf{x}_p(k) + \mathbf{H}_p \mathbf{u}(k), \quad (3.44)$$

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}_I \mathbf{v}(k) - \mathbf{K} \mathbf{x}_p(k), \quad (3.45)$$

$$\mathbf{v}(k) = \tilde{\mathbf{v}}(k) + \mathbf{x}_{co}, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(k). \quad (3.47)$$

A dinâmica do sistema completo é descrita por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k+1) \\ \tilde{\mathbf{v}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p - \mathbf{H}_p \mathbf{K} & \mathbf{H}_p \mathbf{K}_I \\ -\mathbf{C}_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \tilde{\mathbf{v}}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_p \mathbf{K}_I \frac{\mathbf{x}_{co}}{r_0} \\ 1 \end{bmatrix} r(k),$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \tilde{\mathbf{v}}(k) \end{bmatrix}, \quad (3.48a)$$

sendo que $r(k) = r_0$ é a função degrau.

Note que esta equação é equivalente à equação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k+1) \\ \mathbf{v}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p - \mathbf{H}_p \mathbf{K} & \mathbf{H}_p \mathbf{K}_I \\ -\mathbf{C}_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k),$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix}, \quad (3.48b)$$

com $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(0^-) + \mathbf{x}_{co}$.

A atualização da condição ótima no integrador dada por (3.22c) é

$$\mathbf{x}_{co} = \frac{-[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{P} [\mathbf{G}\mathbf{x}(-1) - (\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{r}_0]}{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{P} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T} = 15.2269, \quad (3.49)$$

sendo que $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ são dadas por (3.39b) e $\mathbf{P}$ por (3.43b).

De modo similar ao efetuado nas equações (3.14)-(3.18), obtém-se o índice de desempenho com atualização:

$$\frac{1}{2} (\mathbf{x}_e(0))^T \mathbf{P} \mathbf{x}_e(0), \quad (3.50a)$$

sendo

$$\mathbf{x}_e(0) = \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0^-) + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix}^T.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_e(0) &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 15.2269] - [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 26.8651] \\ &= [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -11.6382]. \end{aligned} \quad (3.50b)$$

Substituindo (3.50b) em (3.50a), obtém-se o índice de desempenho com atualização:

$$\left(\frac{1}{2} \mathbf{x}_e(0)^T\right) \mathbf{P} \mathbf{x}_e(0) = 31.7703.$$

Então, o índice de desempenho do sistema é:

$$J = 96.3780 \text{ (sem atualização); } J = 31.7703 \text{ (com atualização).}$$

A seguir, serão apresentadas as curvas de respostas, resultantes do sistema a uma solicitação em degrau unitário com e sem atualização das condições iniciais. Na Figura 3.5 também é mostrada a curva do controle $u(t)$.

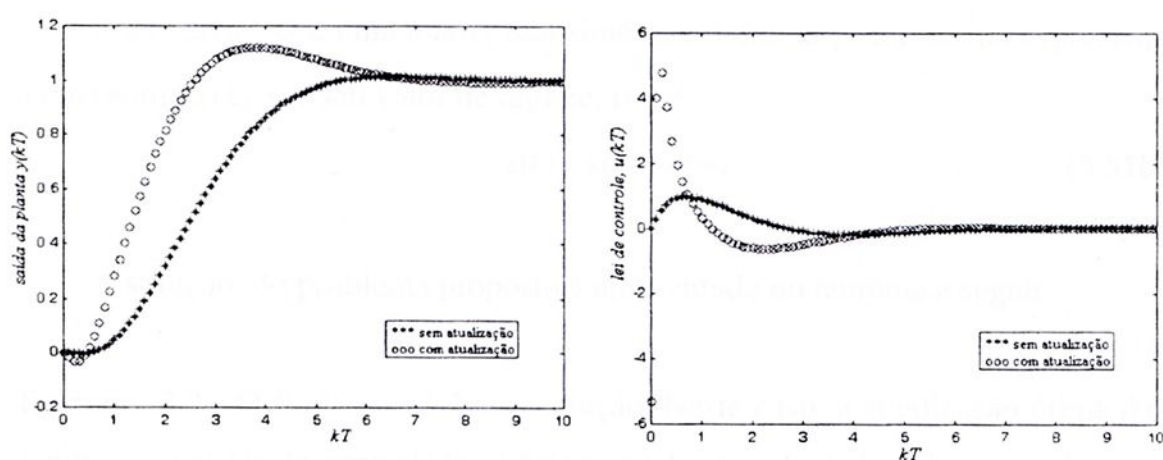


Figura 3.5: Curvas de respostas ao degrau unitário do sistema pêndulo invertido, sem e com atualização ótima das condições iniciais do controlador.

Observação 3.3: A descrição do sistema de controle do pêndulo invertido com atualização das condições iniciais por meio da equação (3.48a) permite, de maneira análoga ao caso contínuo, interpretar esta estratégia de controle como um posicionamento ótimo dos zeros da função de transferência.

3.5 O Controle Quadrático Ótimo no intervalo $[0, N]$

Neste caso, o problema do projeto de controladores ótimos com atualização das condições iniciais do controlador é definido a seguir.

Problema 3.2: Considere o sistema controlado (3.7a), (3.7b) estável e que na entrada a referência (função degrau de amplitude r_0) ocorra em $k = 0$, ou seja :

$$r(k) = \begin{cases} r_0, & \text{se } k \geq 0 \\ 0, & \text{se } k < 0, \end{cases}$$

sendo que r_0 é uma constante real. Determine x_{co} , a atualização de $x_c(k)$ em $k=0$, de modo que o índice de desempenho

$$J(x_{co}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (\varepsilon(k))^T Q \varepsilon(k) \quad (3.51a)$$

seja mínimo.

Em (3.51a), Q é uma matriz real simétrica definida positiva, $\varepsilon(k)$ representa o erro entre $x(k)$ e o seu valor de regime, isto é:

$$\varepsilon(k) = x(k) - x(\infty). \quad (3.51b)$$

A solução do problema proposto é apresentado no teorema a seguir.

Teorema 3.2. O Problema 3.2 tem solução. Neste caso, a atualização ótima das condições iniciais do controlador é única e pode ser calculada pela expressão:

$$x_{co} = - \left(\begin{bmatrix} 0_{m \times n} & I_m \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & I_m \end{bmatrix} P (Gx(-1) - (I_{n+m} - G)^{-1} H r_0) \quad (3.52a)$$

sendo que,

$$P = \sum_{k=0}^N (G^T)^k Q G^k, \quad (3.52b)$$

$x(0^-)$ é a condição inicial do sistema planta-controlador antes da atualização (como descrito na Observação 3.1), $\theta_{k \times \ell}$ denota a matriz $k \times \ell$ com todos os elementos nulos e I_ℓ é a matriz identidade de ordem ℓ .

Prova: O problema consiste em encontrar o vetor x_{co} , de modo a minimizar o índice

$$J(x_{co}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (\varepsilon(k))^T Q \varepsilon(k). \quad (3.53)$$

Por (3.15) e (3.17), tem-se:

$$\varepsilon(k+1) = G\varepsilon(k),$$

$$\varepsilon(0) = \left(x(0^-) + \begin{bmatrix} \theta \\ x_{co} \end{bmatrix} \right) - (I - G)^{-1} H r_0.$$

Dessa forma:

$$\varepsilon(k) = G^k \varepsilon(0),$$

e podemos escrever J como:

$$J(x_{co}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (G^k \varepsilon(0))^T Q G^k \varepsilon(0). \quad (3.54)$$

De (3.54), obtém-se:

$$J(x_{co}) = \frac{1}{2} \varepsilon(0)^T \sum_{k=0}^N (G^T)^k Q G^k \varepsilon(0).$$

Portanto,

$$J(x_{co}) = \frac{1}{2} \varepsilon(0)^T P \varepsilon(0), \quad (3.55)$$

sendo

$$P = \sum_{k=0}^N (G^T)^k Q G^k > 0.$$

Substituindo $\varepsilon(0)$ em termos de x_{co} em (3.55), o resto da prova é similar ao caso em estado estacionário.

Observação 3.4: O Teorema 3.2 também é válido se Q em (3.51a) for semi-definida positiva e as seguintes condições forem satisfeitas:

- i) (G, N) , for observável, sendo $Q = N^T N$;
- ii) $N \geq n - 1$.

3.5.1 Exemplo 1

Considere o mesmo sistema dado no Exemplo 1 da Seção 3.3 com equações (3.27a) e (3.27b). Adotou-se o índice de desempenho dado como em (3.51a) com $Q = C^T C$:

$$J(x_{co}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (\varepsilon(k)^T Q \varepsilon(k)).$$

Supondo que no instante $k=0$, a amplitude de $r(k)$ é alterada para o valor $r_0=1$, então $x_c(k)$ será atualizada, passando de $x_c(0^-)$ para $x_c(0^-) + x_{co}$, sendo x_{co} o valor da atualização dado por (3.52).

Suponha também que $N=10$ e que as condições iniciais da planta e do controlador sejam nulas, isto é:

$$x_p(-1)=0 \quad \text{e} \quad x_c(-1)=0.$$

Assim,

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_p(-1) \\ x_c(-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{co} \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad x_{co}]^T$$

A dinâmica do erro, de acordo com a equação (3.15) é:

$$\varepsilon(k+1) = G\varepsilon(k),$$

sendo que,

$$\varepsilon(0) = x(0) - x(\infty) = [0 \quad -10 \quad x_{co}], \quad (3.55a)$$

pois de (3.10),

$$x(\infty) = (I - G)^{-1} H r_0 = [0 \quad 10 \quad 0]^T.$$

De (3.52b),

$$P = \sum_{k=0}^{10} (G^T)^k C^T C G^k = \begin{bmatrix} 0.0676 & -0.0027 & -0.3007 \\ -0.0027 & 0.0202 & 0.0495 \\ -0.3007 & 0.0495 & 1.6482 \end{bmatrix}$$

O valor x_{co} da atualização, obtido de (3.52a) é:

$$x_{co} = \frac{-[0 \quad 0 \quad 1] P [0 \quad -10 \quad 0]^T}{[0 \quad 0 \quad 1] P [0 \quad 0 \quad 1]^T} = 0.3014. \quad (3.55b)$$

Por (3.55) e substituindo $x_{co} = 0$ em (3.55a), obtém-se o índice de desempenho sem atualização:

$$J = \frac{1}{2} \varepsilon(0)^T P \varepsilon(0) = 1.019.$$

Agora, substituindo (3.55b) em (3.55a) tem-se

$$\varepsilon(0) = [0 \quad -10 \quad x_{co}]^T = [0 \quad -10 \quad 0.3014], \quad (3.55c)$$

e por (3.55) e (3.55c) obtém-se o índice de desempenho com atualização:

$$J = \frac{1}{2} \varepsilon(0)^T P \varepsilon(0) = 0.9316.$$

Então: $J = \frac{1}{2} \varepsilon(0)^T P \varepsilon(0) = 1.019$ (sem atualização); $J = \frac{1}{2} \varepsilon(0)^T P \varepsilon(0) = 0.9316$ (com atualização).

A Figura 3.6 mostra a resposta do sistema de malha fechada, com e sem atualização das condições iniciais.

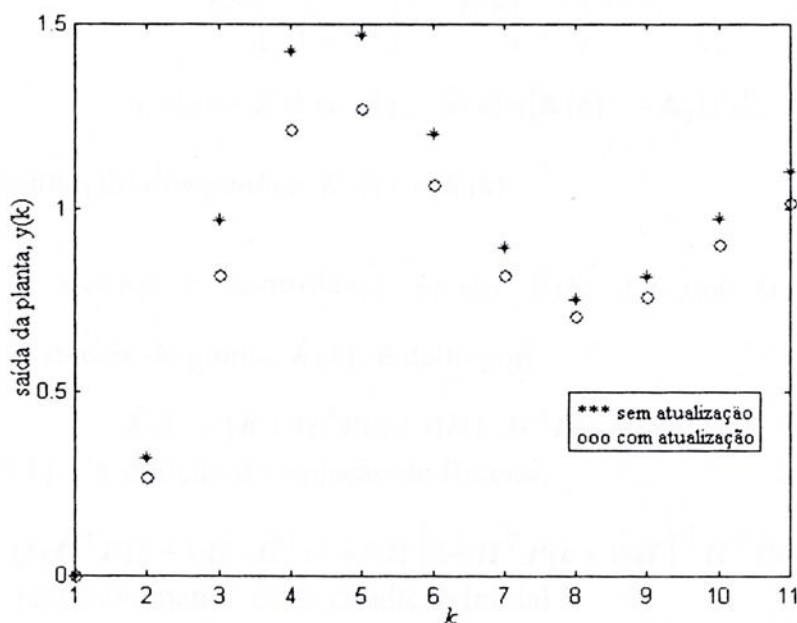


Figura 3.6: Curva de resposta ao degrau unitário do sistema do Exemplo 1.

3.5.2 Exemplo 2

Considere o mesmo sistema apresentado na Seção 3.4 do pêndulo invertido. O sistema é descrito por meio das equações (3.33)-(3.37).

Agora, os ganhos $K_I(k)$ e $K(k)$ do vetor de controle são determinados de forma que o índice de desempenho:

$$J(u_e) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [x_e^T(k) Q x_e(k) + u_e(k)^T R u_e(k)], \quad (3.56)$$

é minimizado, sendo que:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}; \quad R = 0.01; \quad x_e(k) = x(k) - x(\infty);$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_p(k) \\ v(k) \end{bmatrix}; \quad u_e(k) = u(k) - u(\infty).$$

A dinâmica do erro $x_e(k)$ é descrita em (3.24a) e (3.24b) como:

$$x_e(k+1) = \hat{G}x_e(k) + \hat{H}u_e(k),$$

sendo que

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ -C_p & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} H_p \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$u_e(k) = -\hat{K}(k)x_e(k); \quad \hat{K}(k) = [K(k) \quad -K_I(k)].$$

3.5.2.1 Determinação dos ganhos $K_I(k)$ e $K(k)$

Como o sistema é controlável, existe $\hat{K}(k)$ tal que o índice J é minimizado. A matriz de ganho $\hat{K}(k)$, é dado por:

$$\hat{K}(k) = [R + H^T P(k+1)H]^{-1} H^T P(k+1)G$$

sendo que $P(k)$ é a solução da equação de Riccati,

$$P(k) = Q + \hat{G}^T P(k+1)\hat{G} - \hat{G}^T(k+1)H [R + H^T P(k+1)H]^{-1} H^T P(k+1)\hat{G}$$

determinada recursivamente, com condição inicial

$$P(N) = Q,$$

sendo $\hat{G}$ dada por (3.39a).

Escolhendo $N=40$, por recorrência, obtém-se:

$\hat{K}(40) =$	[	0	0	0	0	0	];
$\hat{K}(39) =$	[	-30.4543	-6.4754	0.0968	1.9493	0	];
$\hat{K}(38) =$	[	-53.3330	-9.7526	0.1592	1.1419	-0.0005	];
$\hat{K}(37) =$	[	-60.5746	-10.9744	0.1483	0.1761	-0.0015	];
$\hat{K}(36) =$	[	-62.9498	-11.5066	0.0966	-0.4918	-0.0025	];
$\hat{K}(35) =$	[	-64.1306	-11.8321	0.0098	-0.9857	-0.0032	];
$\hat{K}(34) =$	[	-65.0246	-12.0959	-0.1131	1.4117	-0.0030	];
$\hat{K}(33) =$	[	-65.8634	-12.3444	-0.2734	-1.8202	-0.0016	];
$\hat{K}(32) =$	[	-66.7098	-12.5927	-0.4714	-2.2307	0.0013	];
$\hat{K}(31) =$	[	-67.5800	-12.8452	-0.7070	-2.6495	0.0059	];
$\hat{K}(30) =$	[	-68.4762	-13.1026	-0.9796	-3.0777	0.0123	];
$\hat{K}(29) =$	[	-69.3964	-13.3647	-1.2877	-3.5146	0.0206	];
$\hat{K}(28) =$	[	-70.3371	-13.6304	-1.6291	-3.9587	0.0308	];
$\hat{K}(27) =$	[	-71.2934	-13.8985	-2.0007	-4.4078	0.0428	];
$\hat{K}(26) =$	[	-72.2595	-14.1676	-2.3987	-4.8595	0.0564	];
$\hat{K}(25) =$	[	-73.2287	-14.4360	-2.8181	-5.3107	0.0714	];
$\hat{K}(24) =$	[	-74.1934	-14.7017	-3.2535	-5.7582	0.0876	];
$\hat{K}(23) =$	[	-75.1456	-14.9627	-3.6990	-6.1984	0.1047	];
$\hat{K}(22) =$	[	-76.0771	-15.2169	-4.1484	-6.6278	0.1223	];
$\hat{K}(21) =$	[	-76.9800	-15.4625	-4.5956	-7.0430	0.1401	];
$\hat{K}(20) =$	[	-77.8472	-15.6975	-5.0348	-7.4408	0.1578	];
$\hat{K}(19) =$	[	-78.6722	-15.9205	-5.4608	-7.8185	0.1752	];
$\hat{K}(18) =$	[	-79.4502	-16.3257	-6.2563	-8.5058	0.2080	];
$\hat{K}(17) =$	[	-80.1773	-16.3257	-6.2563	-8.5058	0.2080	];
$\hat{K}(16) =$	[	-80.8512	-16.5066	-6.6195	-8.8129	0.2230	];
$\hat{K}(15) =$	[	-81.4710	-16.6727	-6.9571	-9.0949	0.2370	];
$\hat{K}(14) =$	[	-82.0368	-16.8240	-7.2680	-9.3521	0.2499	];
$\hat{K}(13) =$	[	-82.5498	-16.9611	-7.5522	-9.5851	0.2617	];
$\hat{K}(12) =$	[	-83.0122	-17.0844	-7.8100	-9.7948	0.2724	];
$\hat{K}(11) =$	[	-83.4266	-17.1949	-8.0424	-9.9827	0.2820	];
$\hat{K}(10) =$	[	-83.7961	-17.2933	-8.2506	-10.1501	0.2906	];
$\hat{K}(9) =$	[	-84.1242	-17.3805	-8.4362	-10.2986	0.2982	];
$\hat{K}(8) =$	[	-84.4142	-17.4576	-8.6008	-10.4299	0.3049	];
$\hat{K}(7) =$	[	-84.6696	-17.5255	-8.7463	-10.5454	0.3108	];
$\hat{K}(6) =$	[	-84.8939	-17.5851	-8.8743	-10.6468	0.3160	];
$\hat{K}(5) =$	[	-85.0903	-17.6372	-8.9865	-10.7356	0.3205	];
$\hat{K}(4) =$	[	-85.2619	-17.6827	-9.0847	-10.8131	0.3244	];
$\hat{K}(3) =$	[	-85.4113	-17.7224	-9.1704	-10.8806	0.3278	];
$\hat{K}(2) =$	[	-85.5413	-17.7569	-9.2450	-10.9393	0.3308	];
$\hat{K}(1) =$	[	-85.6542	-17.7868	-9.3097	-10.9903	0.3333	];
$\hat{K}(0) =$	[	-85.7520	-17.8127	-9.3658	-11.0344	0.3355	];



3.5.2.2 O cálculo do índice de desempenho sem atualização das condições iniciais

O valor do índice,

$$J(u_e) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{40} [\mathbf{x}_e(k)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_e(k) + u_e(k)^T R u_e(k)], \quad (3.57)$$

pode ser obtido diretamente do Teorema 3.1, ou usando o Teorema 3.2, como mostrado a seguir.

Por (3.39b):

$$u_e(k) = -\hat{\mathbf{K}}(k) \mathbf{x}_e(k)$$

e substituindo em (3.57), obtém-se:

$$J(u_e) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{40} \mathbf{x}_e(k)^T \mathbf{Q}_t(k) \mathbf{x}_e(k), \quad (3.57a)$$

sendo

$$\mathbf{Q}_t(k) = \mathbf{Q} + \mathbf{K}(k)^T R \mathbf{K}(k). \quad (3.57b)$$

Agora, por (3.39a) e (3.39b), a dinâmica do erro pode ser escrita como:

$$\mathbf{x}_e(k+1) = (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}})(k) \mathbf{x}_e(k). \quad (3.58)$$

Como $\mathbf{x}_e(0)$ é um valor conhecido, a solução de (3.58) é dada por:

$$\mathbf{x}_e(k) = \prod_{j=0}^{k-1} (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}}(j)) \mathbf{x}_e(0). \quad (3.59)$$

Dessa forma, substituindo (3.59) em (3.57a):

$$\begin{aligned} J(u_e) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{40} \mathbf{x}_e(0)^T \left[\prod_{j=0}^{k-1} (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}}(j)) \right] \mathbf{Q}_t(k) \left[\prod_{j=0}^{k-1} (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}}(j)) \right] \mathbf{x}_e(0) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_e(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}_e(0), \end{aligned}$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{k=0}^{40} \left[\prod_{j=0}^{k-1} (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}}(j)) \right] \mathbf{Q}_t(k) \left[\prod_{j=0}^{k-1} (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}}(j)) \right] \\ &= \begin{bmatrix} 472.5379 & 70.9326 & 95.7452 & 96.2335 & 3.8602 \\ 70.9326 & 18.0604 & 24.6814 & 25.6795 & -0.9747 \\ 95.7452 & 24.6814 & 67.2297 & 42.5629 & -3.1415 \\ 96.2335 & 25.6795 & 42.5629 & 44.1296 & -1.6990 \\ -3.8602 & -0.9747 & -3.1415 & -1.6990 & 0.2736 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.60)$$

De (3.10), tem-se:

$$\mathbf{x}(\infty) = (\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{r}_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 26.8651]^T,$$

sendo $\mathbf{r}_0 = 1$, obtém-se:

$$\mathbf{x}_e(0) = [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -21.8651]^T.$$

Logo, o índice de desempenho do sistema sem atualização das condições iniciais é:

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}_e(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}_e(0) = 47.9392.$$

3.5.2.3 Cálculo do índice de desempenho com atualização das condições iniciais

As equações do sistema são dadas pelas equações de (3.44)-(3.47). A atualização das condições iniciais ótima no integrador dada por (3.52a) é:

$$\mathbf{x}_{co} = - \frac{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{P} [\mathbf{x}(0^-) - (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}) \hat{\mathbf{H}}]}{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{P} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T} = 10.4227$$

sendo que $\hat{\mathbf{G}}$ e $\hat{\mathbf{H}}$ são dadas por (3.39b), $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}_I$ são os valores encontrados em (3.41), que são referentes aos valores em estado estacionário e $\mathbf{P}$ por (3.60).

De modo similar ao efetuado no caso estacionário, obtém-se:

$$J(\mathbf{x}_{co}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_e(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}_e(0) \quad (3.61)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_e(0) &= \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}(0^-) + [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{x}_{co}]^T - \mathbf{x}(\infty) \\ &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10.4227]^T - [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 26.8651]^T \\ &= [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -16.4424]^T. \end{aligned} \quad (3.61a)$$

Substituindo (3.61a) em (3.61), obtém-se o índice de desempenho com atualização:

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}_e(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}_e(0) = 18.9405.$$

Então:

$$J = 47.9392 \text{ (sem atualização); } J = 18.9405 \text{ (com atualização).}$$



A seguir, serão mostradas as curvas de respostas, resultantes do sistema a uma solicitação em degrau unitário com e sem atualização das condições iniciais.

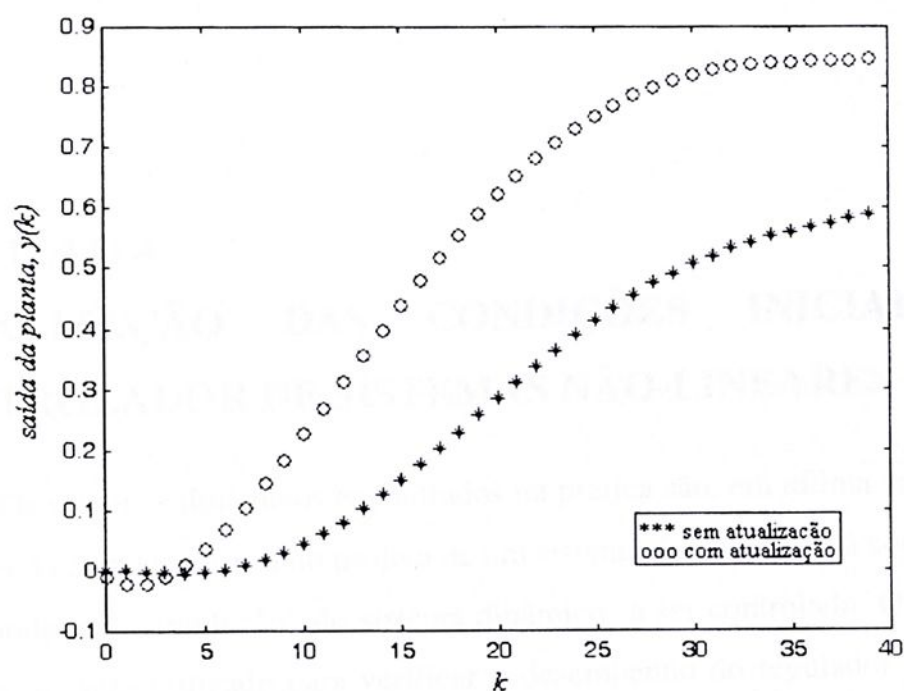


Figura 3.7: Curva de resposta ao degrau unitário do sistema pêndulo-invertido.

CAPÍTULO 4

ATUALIZAÇÃO DAS CONDIÇÕES INICIAIS NO CONTROLADOR DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

Os sistemas dinâmicos encontrados na prática são, em última análise, não-lineares. O primeiro passo no projeto de um sistema de controle é a construção de um “modelo de simulação” do sistema dinâmico a ser controlado. O modelo de simulação será utilizado para verificar o desempenho do regulador projetado e deve incluir todas as características relevantes do processo. Normalmente o modelo de simulação é muito complicado para o projeto de sistemas de controle. Assim, necessita-se de um modelo simplificado, denominado “modelo de projeto” (Fridland, 1996). O modelo de projeto deve capturar as características essenciais do projeto. A técnica mais comum para a obtenção de um modelo de projeto de plantas não-lineares é sem dúvida a linearização da planta em um ponto de interesse. Com este método o modelo de projeto é em geral um sistema linear invariante no tempo e o projeto de reguladores é relativamente simples em muitos casos. Entretanto, este modelo de projeto descreve bem a dinâmica do sistema somente em uma vizinhança do ponto no qual o sistema foi linearizado. Assim, nos casos onde o sistema pode operar em regiões distantes do ponto de operação, este modelo de projeto não é, em geral, adequado. Neste caso deve-se adotar um modelo de projeto mais sofisticado, que considere adicionalmente a dinâmica da planta em regiões distantes do ponto de operação mencionado. Uma possível solução para este problema é a representação da planta não-linear por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) ou Takagi-Sugeno-Kang (T-S-K) (Takagi e Sugeno,

1985), (Sugeno e Kang, 1988). A idéia destes modelos consiste da descrição aproximada ou exata de um sistema não linear como a combinação de um certo número de modelos lineares invariantes no tempo locais, que descrevem aproximadamente o comportamento deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Desta forma, pode-se interpretar a técnica tradicional de linearização em apenas um ponto de operação como um caso particular dos modelos fuzzy T-S-K, consistindo apenas de um modelo local. Esta classe de modelos de projeto permite que o engenheiro utilize o seu conhecimento sobre o sistema que vai ser controlado, na definição do número de modelos locais e dos pontos ou regiões nas quais estes modelos locais serão definidos.

O modelo global do sistema é obtido através da combinação fuzzy destes modelos lineares locais. A idéia é que para cada modelo linear local seja projetado um controle de realimentação linear. O regulador global resultante, que é não-linear em geral, é uma combinação fuzzy de reguladores lineares individuais.

Mais significativamente, problemas como as análises de estabilidade e o projeto de controle são reduzidos a problemas descritos por LMIs (Boyd et al., 1994). Numericamente, os problemas de LMIs podem ser resolvidos muito eficientemente por meio de algumas ferramentas poderosas disponíveis na literatura de programação matemática (Boyd et al., 1994). Desta forma, a solução encontrada para tais problemas descritos por LMIs é equivalente a encontrar soluções para o problema original.

4.1 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno (TS)

Neste método de modelagem as dinâmicas do sistema são capturadas por um conjunto de implicações fuzzy que caracterizam relações locais no espaço de estados. A principal característica de um modelo Takagi-Sugeno é a descrição das dinâmicas locais de cada implicação fuzzy (regra) por sistemas lineares (ou afins).



A descrição local da planta dinâmica a ser controlada está disponível nos termos dos modelos lineares locais. Portanto têm-se os seguintes modelos lineares locais:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) &= C_i x(t)\end{aligned}$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$ (r é o número de modelos lineares), o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$, o vetor entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$, o vetor saída $y(t) \in \mathbb{R}^q$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$. A informação acima é então fundida com as regras *se-então* disponíveis, onde a i -ésima regra pode ter a forma (Takagi e Sugeno, 1985):

$$\begin{aligned}\text{Regra } i : \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } M_p^i \\ & \text{ENTÃO } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Tem-se que M_j^i $j = 1, 2, \dots, p$ é o conjunto fuzzy j da regra i e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ são as variáveis premissas. Seja $\mu_{ij}(z_j(t))$ a função de pertinência do conjunto fuzzy M_j^i e defina:

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_{ij}(z_j(t)), \quad z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_n(t)] \quad \text{e} \quad \alpha_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))},$$

sendo $\alpha_i(z(t))$ o peso normalizado para cada regra (Tanaka e Wang, 2001).

Uma escolha para obtenção de um modelo fuzzy Takagi-Sugeno para sistemas não-lineares é adotar $z(t) = x(t)$, sendo $x(t)$ o vetor de estado do sistema não-linear. Esta escolha é feita em todos os desenvolvimentos teóricos deste trabalho.

Desta forma, dado um par $(x(t), u(t))$, o sistema fuzzy resultante é tido como a média ponderada dos modelos locais, e tem a forma (Tanaka e Wang, 2001):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} \\
 &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) A_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) B_i \right) u(t) \\
 &= A(\alpha) x(t) + B(\alpha) u(t)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

O sistema não forçado ($u(t) = 0$) é definido como segue:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) (A_i x(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) A_i x(t). \tag{4.2a}$$

A saída para ambos os casos, forçado e não forçado, é dada por

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} \\
 &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) C_i x(t) \\
 &= C(\alpha) x(t).
 \end{aligned}$$

Note que, para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$\alpha_i(x(t)) = \frac{w_i(x(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))}, \quad \alpha_i(x(t)) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) = 1. \tag{4.3}$$

Os modelos fuzzy Takagi-Sugeno têm sido úteis na descrição aproximada de sistemas não-lineares. É bem conhecido que sistemas fuzzy aditivos $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^p$, como modelo fuzzy TSK, podem aproximar uniformemente qualquer função contínua $f: U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^p$ em um domínio compacto U (Kosko, 1997). No caso do modelo fuzzy TSK, quanto maior o número de modelos locais, melhor será a aderência do modelo à equação diferencial não-linear da planta.

Em (Teixeira and Zak, 1999) os modelos locais são construídos para sistemas não-lineares da forma:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad (4.4)$$

sendo que $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $x = 0$ é um ponto de equilíbrio, ou seja, $f(0) = 0$.

Suponha que $x = 0$ é o único ponto de equilíbrio deste sistema. Então, um modelo local linear para a operação em $x \approx 0$ pode ser obtido através da linearização por meio da série de Taylor em $x = 0$. Agora, surge o problema da obtenção de um modelo local linear que represente aproximadamente a planta descrita em (4.4), em $x \approx x_0$, sendo que $x_0 \neq 0$. Em (Teixeira and Zak, 1999) foi descrita uma solução ótima do problema :

$$f(x) + G(x)u \approx Ax + Bu \quad \text{para todo } u \text{ e } x \approx x_0$$

e

$$f(x_0) + G(x_0)u = Ax_0 + Bu \quad \text{para todo } u.$$

A solução encontrada foi a seguinte:

$$G(x_0) = B \quad (4.5)$$

e se a_i^T é a i -ésima linha de A , então

$$a_i = \nabla f_i(x_0) + \frac{f_i(x_0) - x_0^T \nabla f_i(x_0)}{\|x_0\|} x_0, \quad x_0 \neq 0 \quad (4.6)$$

sendo $\|x_0\|^2 = x_0^T x_0$ e $\nabla f_i(x) = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_3} \right]^T$ é o vetor gradiente de $f_i(x)$.

Observe que quando x_0 é o ponto de equilíbrio, isto é $x_0 = 0$, então $a_i = \nabla f_i(x_0)$.

A seguir, apresenta-se como exemplo as descrições dos modelos locais do pêndulo invertido sobre um carro.

Exemplo 4.1: (Daruichi, 2003)

Considere o problema do equilíbrio e balanço de um pêndulo invertido sobre um carro (Teixeira and Žak, 1999):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g \sin(x_1)}{4l/3 - mla \cos^2(x_1)} \\ x_4 \\ \frac{-mag \sin(2x_1)/2}{4/3 - ma \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a \cos(x_1)}{4l/3 - mla \cos^2(x_1)} \\ 0 \\ \frac{4a/3}{4/3 - ma \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} u \quad (4.7)$$

$$= \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \\ g_4(x) \end{bmatrix} u = f(x) + G(x)u, \quad (4.8)$$

sendo $g=9,8\text{m/s}^2$, $M=8\text{kg}$, $m=2\text{kg}$, $l=0,5\text{m}$ e $a=1/(m+M)$.

Observe que o modelo (4.7) está na forma (4.4).

Deseja-se obter os modelos locais lineares em dois pontos como descrito abaixo:

Regra 1: SE $x_1(t)$ está próximo de 0 rad

ENTÃO $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$

Regra 2: SE $x_1(t)$ está próximo de $\frac{\pi}{3}$ rad

ENTÃO $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$.

Em ambos os casos, assume-se que u é arbitrária.

O primeiro modelo local é construído em torno do ponto de operação $x_{01} = 0$ (então $x_1 = 0$); utilizando a linearização por Taylor em torno do ponto de equilíbrio $(x_{01}, u_0) = (0, 0)$.

Sejam as funções $f_2(x)$ e $f_4(x)$ que contém as não linearidades do sistema :

$$f_2(x) = \frac{g \sin(x_1)}{4l/3 - mla \cos^2(x_1)}; \quad f_4(x) = \frac{-mag \sin(2x_1)/2}{4/3 - ma \cos^2(x_1)};$$

e seus respectivos gradientes no ponto de operação $x_{01} = 0$:

$$\nabla f_2(\theta) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\theta) \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\theta) \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\theta) \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\theta) \right)^T = [17.2941 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T ;$$

$$\nabla f_4(\theta) = \left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}(\theta) \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(\theta) \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_3}(\theta) \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_4}(\theta) \right)^T = [-1.7294 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T .$$

Como $B_1 = G(\theta)$, tem-se que o primeiro modelo local, é dado por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.2941 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.7294 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1765 \\ 0 \\ 0.1176 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

O segundo modelo local é obtido usando (4.6) com

$$x_{02} = \left[\frac{\pi}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \text{ (então } x_1 = \frac{\pi}{3} \text{)}. \text{ Dessa forma, tem-se:}$$

$$f_2(x_{02}) = 13.2266; \quad \nabla f_2(x_{02}) = [5.8512 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (4.9)$$

Substituindo (4.9) em (4.6), obtém-se a segunda linha a_2^T de A_2 , ou seja

$$a_2^T = [12.6304 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

De modo semelhante, calcula-se a quarta linha de A_2 :

$$f_4(x_{02}) = -0.6613; \quad \nabla f_4(x_{02}) = [0.8529 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \text{ e}$$

$$a_4^T = [-0.6315 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

Lembrando que $B_2 = G(x_{02})$, o segundo modelo em torno do ponto

$x_1 = \frac{\pi}{3}$ é dado por :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.6304 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6315 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0779 \\ 0 \\ 0.1038 \end{bmatrix}. \quad (4.9a)$$

Nesta tese serão utilizadas as seguintes funções $\alpha_1(x_1(t))$ e $\alpha_2(x_1(t))$, também empregadas em (Pietrobon, 1999):

$$\alpha_1(x_1(t)) = \left\{ 1.0 - \frac{1.0}{1.0 + e^{(-7.0(x_1(t) - \pi/6)}} \right\} \left\{ \frac{1.0}{1.0 + e^{(-7.0(x_1(t) - \pi/6)}} \right\}$$

e

$$\alpha_2(x_1(t)) = 1 - \alpha_1(x_1(t))$$

e suas respectivas curvas são ilustradas na Fig. 4.1.

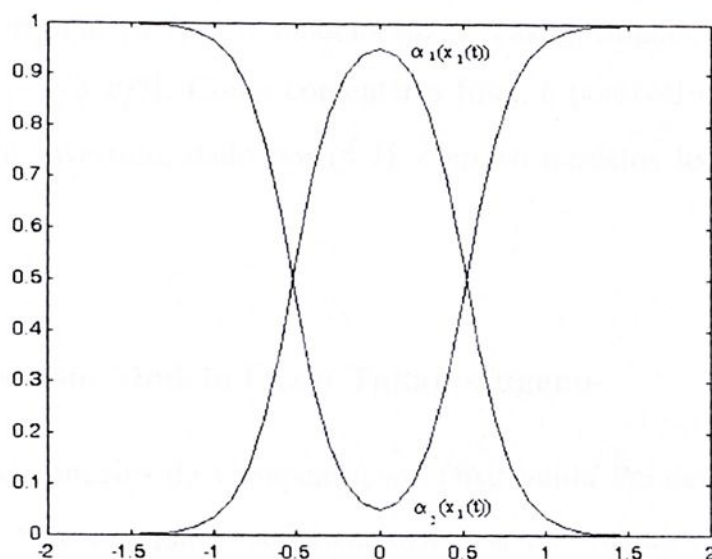


Figura 4.1: Funções de pertinência para as regras 1 e 2 da planta.

Então um modelo fuzzy TS do sistema não-linear (4.7) pode ser obtido da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = (\alpha_1(x_1)A_1 + \alpha_2(x_1)A_2)x(t) + (\alpha_1(x_1)B_1 + \alpha_2(x_1)B_2)u(t), \quad (4.9b)$$

sendo $(\alpha_1(x_1) + \alpha_2(x_1)) = 1$, $\alpha_1(x_1) \geq 0$, $\alpha_2(x_1) \geq 0$ e A_i, B_i , $i = 1, 2$ matrizes dadas pelas equações (4.8) e (4.9a) respectivamente.

Note que, as funções f e g que descrevem o sistema pêndulo invertido em (4.8) possuem as seguintes características:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x), \\ \nabla f(-x) &= \nabla f(x), \\ g(x) &= g(-x). \end{aligned} \quad (4.9c)$$

Para sistemas cujos pontos são simétricos em relação a origem e possuem características descritas em (4.9c), os modelos locais para pontos simétricos são iguais (Daruich, 2003, pg.47). Dessa forma, o sistema não-linear (4.7) é representado pelo modelo fuzzy TS (4.9b), no intervalo $[-\pi/3, \pi/3]$.

Para a modelagem do pêndulo invertido, podem também serem utilizadas funções $\alpha_1(x_1(t))$ e $\alpha_2(x_1(t))$ otimizadas, seguindo o procedimento concebido em (Daruichi, 2003), com o objetivo de minimizar o erro de modelagem entre o sistema não-linear original (4.7) e o modelo fuzzy Takagi-Sugeno (4.8), (4.9a)-(4.9c), para $x_1 \in [-\pi/3, \pi/3]$. Como comentário final, é possível descrever exatamente o pêndulo invertido, dado por (4.7), com 16 modelos locais (Daruichi (2003)).

4.2 Reguladores com Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno

Utiliza-se o conceito de Compensação Distribuída Paralela (CDP) para projetar reguladores fuzzy para estabilizar sistemas não-lineares descritos por modelos fuzzy. A idéia é projetar um compensador para cada regra do modelo fuzzy. Para cada regra, são utilizadas técnicas de projeto de controle linear. O regulador global resultante, que é não-linear em geral, é uma combinação fuzzy de cada regulador linear individual. A CDP oferece um procedimento para projetar um regulador para o modelo fuzzy Takagi-Sugeno, onde cada regra de controle é projetada a partir da correspondente regra de um modelo Takagi-Sugeno da planta. O regulador fuzzy projetado compartilha os mesmos conjuntos de regras com o modelo fuzzy nas partes premissas. Para o modelo fuzzy (4.1), sendo $i = 1, 2, \dots, r$, os reguladores fuzzy via CDP possuem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E... E } z_p(t) \text{ é } M_p^i \\ & \text{ENTÃO } u(t) = -K_i x(t). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Portanto, de forma análoga à efetuada na obtenção de (4.2), o regulador fuzzy é dado por:

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) K_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) K_i x(t) \\
&= -K(\alpha) x(t).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

O objetivo do projeto do regulador fuzzy é determinar os ganhos de realimentação locais K_i nas partes conseqüentes. Tendo em vista a equação (4.3), então, para a lei de controle (4.11), a equação (4.2) é dada por (4.12) (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998):

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) - B(\alpha)K(\alpha)x(t) \\
&= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A(\alpha)x(t) - B(\alpha)K(\alpha)x(t) \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \{A_i - B_i K_j\} x(t) \\
&= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(x(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j} \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} x(t)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

sendo

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad \text{e} \quad \sum_{i < j} = \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{j=1 \\ (i < j)}}^r. \tag{4.13}$$

4.2.1 Condições para Estabilidade de Reguladores Fuzzy

As condições suficientes para estabilidade de sistemas fuzzy contínuos no tempo são derivadas usando funções de Lyapunov quadráticas do tipo $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$ (Tanaka e Sugeno, 1992), (Teixeira, Pietrobon & Assunção, 2000). Os principais resultados são descritos abaixo.

Lema 4.1: O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fuzzy contínuo descrito por (4.2a) é globalmente assintoticamente estável se existe uma matriz simétrica positiva definida comum P tal que

$$A_i^T P + P A_i < 0 \tag{4.14}$$

$i = 1, 2, \dots, r$; isto é, para todos os subsistemas.



Prova: Segue diretamente da aplicação da função de Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)$.

Lema 4.2: O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (4.12) é globalmente assintoticamente estável se existir uma matriz simétrica positiva definida comum P tal que

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, \quad (4.15)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, r$ e

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad (4.16)$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, r$; $i < j$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(\mathbf{x}(t))\alpha_j(\mathbf{x}(t)) = 0, \forall \mathbf{x}(t)$, sendo G_{ij} dada em (4.13).

Prova: Segue diretamente do Lema 4.1.

Observação 4.1: Nas condições do Lema 4.2, o problema do projeto para determinar os ganhos de realimentação K_i para $i=1, \dots, r$ pode ser definido por meio de LMIs como segue:

Encontre matrizes $X = X^T > 0$, e M_i ($i = 1, 2, \dots, r$) que satisfaçam as seguintes LMIs:

$$A_i X + X A_i^T - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0, \quad \forall i = 1, \dots, r$$

$$A_i X + X A_i^T - B_i M_j - M_j^T B_i^T + X A_j^T + A_j X - M_i^T B_j^T - B_j M_i < 0,$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, r$; $i < j$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(\mathbf{x}(t))\alpha_j(\mathbf{x}(t)) = 0, \forall \mathbf{x}(t)$.

Os ganhos de realimentação K_i e a matriz comum P podem ser obtidos a partir das soluções X e M_i como:

$$P = X^{-1} \text{ e } K_i = M_i X^{-1}.$$

Essas condições de estabilidade, em geral, são conservativas. Foram propostas em (Tanaka & Wang, 1998) condições mais relaxadas que as condições

descritas anteriormente. Recentemente as condições para a estabilidade foram flexibilizadas, vide (Teixeira, Pietrobom & Assunção, 2000) e (Teixeira, Assunção e Avellar, 2003).

A seguir apresenta-se o problema estudado anteriormente, atualização das condições iniciais ótimas no controlador, para o caso em que são consideradas plantas não-lineares.

4.3 Formulação do Problema

Considere o sistema não-linear da forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p(t) &= f(\mathbf{x}_p(t), u(t)), \\ y(t) &= C\mathbf{x}_p(t),\end{aligned}\tag{4.17}$$

sendo $f(\mathbf{x}_p, u)$ continuamente diferenciável num domínio $D_x \times D_u \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_p(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}$ é a entrada de controle e $y(t) \in \mathbb{R}$ é a saída do sistema. Suponha que o sistema possa ser colocado na forma (4.4).

Seja $(\mathbf{x}_e, u_e) \in D_x \times D_u$ um ponto de equilíbrio do sistema. Seja r_0 uma constante real. Deseja-se projetar um controlador de modo que a saída do sistema atinja e se mantenha no valor r_0 , ou seja:

$$y(t) \rightarrow r_0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty\tag{4.18}$$

e ainda, que todos os sinais envolvidos sejam limitados.

Hipótese 1: Suponha que para o sistema (4.17) exista um único par $(\mathbf{x}_{ss}, u_{ss}) \in D_x \times D_u$ tal que:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}_{ss}, u_{ss}) = 0, \\ C\mathbf{x}_{ss} - r_0 = 0. \end{cases}\tag{4.19}$$

Para o projeto do controlador, considera-se a planta com um integrador para obter o sistema aumentado:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p(t) = f(\mathbf{x}_p(t), u(t)), \\ \dot{\xi}(t) = r_0 - \mathbf{C}\mathbf{x}_p(t), \end{cases} \quad (4.20a)$$

$$(4.20b)$$

sendo $e(t) = r_0 - \mathbf{C}\mathbf{x}_p(t)$, o erro de rastreamento.

Representando o sistema (4.20a) por meio de um modelo Takagi-Sugeno, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p(t) &= \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}_p(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \mathbf{B}_i \right) u(t) \\ &= \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}(\alpha) u(t) \end{aligned}$$

com $\alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) = 1$ e $u(t) \in \mathbb{R}$.

Dessa forma o sistema (4.20a)-(4.20b) pode ser representado na forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \bar{\mathbf{A}}_i \right) \mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \bar{\mathbf{B}}_i \right) u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_0, \quad (4.21)$$

sendo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (4.22)$$

com $\alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) = 1$ e $u(t) \in \mathbb{R}$.

Em Korba et al. (2003), o sistema aumentado (4.21)-(4.22) é denominado sistema fuzzy estendido.

Para o objetivo desejado, a lei de controle u deve realimentar o sistema de modo que o sistema em malha fechada possua um ponto de equilíbrio $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\xi})$ assintoticamente estável com $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{ss}$.

O controlador consiste de duas partes: $u_1(t)$ é baseado nas variáveis de estado $\mathbf{x}_p(t)$ do sistema a ser controlado e $u_2(t)$ é baseado no estado adicional $\xi(t)$:

$$u_1(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \mathbf{K}_i \mathbf{x}_p(t); \quad u_2(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \mathbf{K}_i^i \xi(t). \quad (4.23)$$

A lei de controle é determinada por:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u_2(\xi) - u_1(x_p) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x_p(t)) K_i^i \xi(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(x_p(t)) K_i x_p(t) \\
 &= - \sum_{i=1}^r \alpha_i(x_p(t)) \hat{K}_i x(t),
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

com $\hat{K}_i = [-K_i \ K_i^i]$ e $x(t) = [x_p(t) \ \xi(t)]^T$.

Substituindo (4.24) em (4.21), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x_p(t)) \alpha_j(x_p(t)) \bar{G}_{ij} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_0 \\
 &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(x_p(t)) \bar{G}_{ii} x_p(t) + 2 \sum \alpha_i(x_p(t)) \alpha_j(x_p(t)) \left\{ \frac{\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ji}}{2} \right\} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_0
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

sendo

$$\bar{G}_{ij} = \bar{A}_i - \bar{B}_i \hat{K}_j = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j^i \\ -C & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

Teorema 4.1: O ponto de equilíbrio do sistema fuzzy de malha fechada descrito por (4.25)-(4.26) é assintoticamente estável, se $r_0 = 0$ e se existir uma matriz simétrica definida positiva comum P tal que:

$$\bar{G}_{ii}^T P + P \bar{G}_{ii} < 0, \tag{4.27}$$

para todo $i = 1, 2, \dots, r$; e

$$\left(\frac{\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ji}}{2} \right) \leq 0. \tag{4.28}$$

$i, j = 1, 2, \dots, r$; $i < j$, excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(x_p(t)) \alpha_j(x_p(t)) = 0, \forall x_p(t)$.

Prova: segue diretamente do Lema 4.2.

O lema a seguir será importante para a solução do problema proposto.

Lema 4.3: Suponha que o sistema não-linear (4.17), satisfaça a Hipótese 1. Suponha também, que o sistema aumentado planta com integrador, na forma (4.21)-(4.22), satisfaça a seguinte condição: o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\xi}) \in \mathfrak{R}^{n+1}$ com $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{ss}$, é tal que:

$$\mathbf{A}_i \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_i u_{ss} = 0, \forall i = 1, \dots, r. \quad (4.29)$$

Então, neste caso, o ponto de equilíbrio do sistema fuzzy de malha fechada descrito por (4.25)-(4.26) é assintoticamente estável, se existir uma matriz simétrica definida positiva comum $\mathbf{P}$ verificando as condições (4.27) e (4.28).

Prova: Defina:

$$\varepsilon(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e; \quad u_e(t) = u(t) - u_{ss}. \quad (4.30)$$

Então o sistema (4.21)-(4.22) se escreve como:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\varepsilon(t) + \mathbf{x}_e) \bar{\mathbf{A}}_i \right) (\varepsilon(t) + \mathbf{x}_e) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\varepsilon(t) + \mathbf{x}_e) \bar{\mathbf{B}}_i \right) (u_e(t) + u_{ss}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_0. \quad (4.31)$$

Dessa forma, de (4.31) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = & \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\varepsilon(t) + \mathbf{x}_e) \bar{\mathbf{A}}_i \right) \varepsilon(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\varepsilon(t) + \mathbf{x}_e) \bar{\mathbf{B}}_i \right) u_e(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\varepsilon(t) + \mathbf{x}_e) \bar{\mathbf{A}}_i \right) \mathbf{x}_e \\ & + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\varepsilon(t) + \mathbf{x}_e) \bar{\mathbf{B}}_i \right) u_{ss} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Agora, da Hipótese 1 e de (4.29), então,

$$\bar{\mathbf{A}}_i \mathbf{x}_e + \bar{\mathbf{B}}_i u_{ss} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ss} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ 0 \end{bmatrix} u_{ss} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B}_i u_{ss} \\ -\mathbf{C} \mathbf{x}_{ss} + r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, r. \quad (4.33)$$

Assim, substituindo (4.33) em (4.32), obtém-se:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(\sum_{i=1}^r \beta_i(\varepsilon(t)) \bar{\mathbf{A}}_i \right) \varepsilon(t) + \left(\sum_{i=1}^r \beta_i(\varepsilon(t)) \bar{\mathbf{B}}_i \right) u_e(t), \quad (4.34)$$

com $\beta_i(\varepsilon(t)) = \alpha_i(\varepsilon(t) + \mathbf{x}_e)$, $i = 1, \dots, r$.

Dessa forma, especificando a lei de controle como

$$u_e(t) = - \sum_{i=1}^r \beta_i(\varepsilon(t)) \hat{K}_i \varepsilon(t), \quad (4.35)$$

que é equivalente a (4.24) tem-se que se existir uma matriz simétrica definida positiva comum P satisfazendo (4.27) e (4.28) então a origem, $\varepsilon = 0$, do sistema fuzzy descrito por (4.34) é assintoticamente estável.

Tem-se que de (4.24):

$$u_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\bar{x}) \hat{K}_i x_e = \sum_{i=1}^r (\alpha_i(\bar{x}) K_i^i \bar{\xi} - \alpha_i(\bar{x}) K_i \bar{x}),$$

e portanto:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(\bar{x}) K_i^i \bar{\xi} = u_{ss} + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\bar{x}) K_i \bar{x},$$

ou seja:

$$\bar{\xi} = \frac{u_{ss} + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\bar{x}) K_i \bar{x}}{\sum_{i=1}^r \alpha_i(\bar{x}) K_i^i}. \quad (4.36)$$

Note que em geral $\bar{\xi}$ depende de r_0 (se $\bar{x}$ depender de r_0).

Em Korba et al. (2003) foi analisada a estabilidade assintótica quando $r_0 = 0$, para o sistema estendido (4.21)-(4.22) com a estabilidade BIBO, quando $r_0 \neq 0$.

4.3.1 Projeto do Controlador Fuzzy Ótimo

O controlador fuzzy ótimo é projetado resolvendo um problema de otimização que minimiza o limite superior de desempenho quadrático (Tanaka e Wang, 2001).

Considera-se o sistema aumentado planta com integrador descrito pelas equações (4.21)-(4.22):

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(x_p(t)) \bar{A}_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(x_p(t)) \bar{B}_i \right) u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_0, \quad (4.37)$$

sendo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad (4.38)$$

com $\alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) = 1$, $u \in \Re$.

Suponha que o erro $\varepsilon(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e$ possa ser descrito como em (4.34):

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(\sum_{i=1}^r \beta_i(\varepsilon(t)) \bar{\mathbf{A}}_i \right) \varepsilon(t) + \left(\sum_{i=1}^r \beta_i(\varepsilon(t)) \bar{\mathbf{B}}_i \right) u_e(t), \quad (4.39)$$

sendo $u_e(t) = u(t) - u_{ss}$, $\beta_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^r \beta_i = 1$.

4.3.1.1 Índice de Desempenho

Com base em (Tanaka e Wang, 2001), os ganhos do controlador fuzzy $\hat{\mathbf{K}}_i = [\mathbf{K}_i \quad -\mathbf{K}_l^i]$, $i = 1, \dots, r$, serão projetados de modo a minimizar o limite superior do seguinte índice quadrático:

$$J(u_e) = \int_0^{+\infty} [\varepsilon^T(t) \mathbf{Q} \varepsilon(t) + u_e^T(t) \mathbf{R} u_e(t)] dt, \quad (4.40)$$

sendo que $\mathbf{Q}$ é uma matriz real simétrica definida positiva (ou semi-definida positiva) e $\mathbf{R}$ é uma matriz real simétrica definida positiva, ou $\mathbf{R} = \mathbf{0}$,

O teorema seguinte apresenta condições suficientes para projetar os ganhos $\hat{\mathbf{K}}_i$ do controlador fuzzy de modo a estabilizar o sistema (4.20a), (4.20b) e encontrar um limitante superior para o índice desempenho em (4.40).

Teorema 4.2: O sistema fuzzy (4.21), (4.22) pode ser estabilizado pelo controlador fuzzy (4.24) se existir uma matriz definida positiva comum $\mathbf{X}$ e matrizes $\mathbf{M}_i$, $i = 1, \dots, r$ satisfazendo:

$$\mathbf{X} \bar{\mathbf{A}}_i^T + \bar{\mathbf{A}}_i \mathbf{X} - \bar{\mathbf{B}}_i \mathbf{M}_i - \mathbf{M}_i^T \bar{\mathbf{B}}_i^T + \begin{bmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{M}_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -\mathbf{M}_i \end{bmatrix} < 0, i = 1, \dots, r \quad (4.41)$$

e

$$\begin{aligned}
& X\bar{A}_i^T + \bar{A}_i X + X\bar{A}_j^T + \bar{A}_j X - M_i^T \bar{B}_j^T - \bar{B}_j M_i - M_j^T \bar{B}_i^T - \bar{B}_i M_j \\
& + [X \quad -M_j^T] \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ -M_j \end{bmatrix} + [X \quad -M_i^T] \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ M_i \end{bmatrix} < 0, \quad i < j \quad (4.42)
\end{aligned}$$

excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(x_p(t))\alpha_j(x_p(t)) = 0, \forall x_p(t) \in D_x$.

Além disso, o índice de desempenho em (4.40) satisfaz:

$$J(u_e) < \varepsilon^T(0)P\varepsilon(0), \quad (4.43)$$

sendo $P = X^{-1}$, $\hat{K}_i = M_i P$.

Prova: Seja

$$\hat{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ u_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \sum_{i=1}^r \beta_i(\varepsilon(t))(-\hat{K}_i \varepsilon(t)) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \beta_i(\varepsilon(t)) \begin{bmatrix} I \\ -\hat{K}_i \end{bmatrix} \varepsilon(t). \quad (4.44)$$

A equação (4.40) pode ser escrita como:

$$J(u_e) = \int_0^{+\infty} \hat{\varepsilon}^T(t) \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \hat{\varepsilon}(t) dt. \quad (4.45)$$

Suponha que, exista uma matriz definida positiva comum P ,

$$P^T = P, \quad P > 0$$

satisfazendo:

$$(\bar{A}_i - \bar{B}_i \hat{K}_i)^T P + P(\bar{A}_i - \bar{B}_i \hat{K}_i) < -C_i^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_i, \quad i = 1, \dots, r \quad (4.46)$$

e

$$\begin{aligned}
& (\bar{A}_i - \bar{B}_i \hat{K}_i)^T P + P(\bar{A}_i - \bar{B}_i \hat{K}_i) + (\bar{A}_j - \bar{B}_j \hat{K}_i)^T P + P(\bar{A}_j - \bar{B}_j \hat{K}_i) \\
& < -C_i^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_i - C_j^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_j^T, \quad i < j \quad (4.47)
\end{aligned}$$

sendo:

$$C_i = \begin{bmatrix} I \\ -\hat{K}_i \end{bmatrix}, \quad (4.47a)$$

e I a matriz identidade de ordem $(n+1)$.

As desigualdades (4.46) e (4.47) são equivalentes a (4.41) e (4.42) respectivamente. De fato, multiplicando, ambos os lados de (4.46) por P^{-1} , tem-se:

$$P^{-1}\bar{A}_i^T - P^{-1}\hat{K}_i^T\bar{B}_i^T + \bar{A}_iP^{-1} - \bar{B}_i\hat{K}_iP^{-1} + P^{-1}C_i^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_iP^{-1} < 0. \quad (4.48)$$

Sejam

$$X = P^{-1} \quad \text{e} \quad M_i = \hat{K}_iP^{-1}. \quad (4.49)$$

Assim,

$$X\bar{A}_i^T + \bar{A}_iX - \bar{B}_iM_i - M_i^T\bar{B}_i^T + XC_i^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_iX < 0. \quad (4.50)$$

Como $C_i = \begin{bmatrix} I \\ -\hat{K}_i \end{bmatrix}$, tem-se:

$$XC_i^T = X \begin{bmatrix} I & -\hat{K}_i^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & -M_i^T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_iX = \begin{bmatrix} X \\ -M_i \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Substituindo (4.51) em (4.50), obtém-se (4.41). Analogamente, verifica-se que (4.47) é equivalente a (4.42).

A seguir, prova-se que o índice de desempenho satisfaz:

$$J(u_e) < \varepsilon^T(0)P\varepsilon(0).$$

Considere a candidata a função de Lyapunov:

$$V(\varepsilon(t)) = \varepsilon^T(t)P\varepsilon(t). \quad (4.52)$$

Observe que:

$$-C_i^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_i - C_j^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_j \leq -C_i^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_j - C_j^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_i.$$

Então, tem-se de (4.46) e (4.47) que:

$$\frac{d}{dt}(V(\varepsilon(t))) = \frac{d}{dt}(\varepsilon^T(t)P\varepsilon(t)) = \dot{\varepsilon}^T(t)P\varepsilon(t) + \varepsilon^T(t)P\dot{\varepsilon}(t) \quad (4.53)$$

$$= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \beta_i(\varepsilon(t))\beta_j(\varepsilon(t))\varepsilon^T(t)\{(\bar{A}_i - \bar{B}_i\hat{K}_j)^T P + P(\bar{A}_i - \bar{B}_i\hat{K}_j)\}\varepsilon(t) \quad (4.54)$$

$$= \sum_{i=1}^r \beta_i^2(\varepsilon(t))\varepsilon(t)^T\{(\bar{A}_i - \bar{B}_i\hat{K}_i)^T P + P(\bar{A}_i - \bar{B}_i\hat{K}_i)\}\varepsilon(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^r \sum_{i \neq j} \beta_i(\varepsilon(t))\beta_j(\varepsilon(t))\varepsilon^T(t)\{(\bar{A}_i - \bar{B}_i\hat{K}_j)^T P + P(\bar{A}_i - \bar{B}_i\hat{K}_j)\}\varepsilon(t) \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned}
&< -\sum_{i=1}^r \beta_i^2(\varepsilon(t)) \varepsilon^T(t) C_i^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_i \varepsilon(t) \\
&- \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} \beta_i(\varepsilon(t)) \beta_j(\varepsilon(t)) \varepsilon^T(t) \left\{ C_i^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_i + C_j^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_j \right\} \varepsilon(t)
\end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned}
&< -\varepsilon^T(t) \left\{ \sum_{i=1}^r \beta_i^2(\varepsilon(t)) C_i^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_i \right\} \varepsilon(t) \\
&- \varepsilon^T(t) \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} \beta_i(\varepsilon(t)) \beta_j(\varepsilon(t)) C_i^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_j + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} \beta_i(\varepsilon(t)) \beta_j(\varepsilon(t)) C_j^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} C_i \right\} \varepsilon(t) \\
&= -\hat{\varepsilon}^T(t) \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \hat{\varepsilon}(t),
\end{aligned} \quad (4.57)$$

devido ao fato que de (4.44) e de (4.47a), tem-se:

$$\hat{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^r \beta_i(\varepsilon(t)) C_i \varepsilon(t).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon^T(t) P \varepsilon(t)) < -\hat{\varepsilon}^T(t) \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \hat{\varepsilon}(t). \quad (4.58)$$

Integrando ambos os lados no intervalo $[0, \infty)$, obtém-se

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(\varepsilon^T(t) P \varepsilon(t)) dt < - \int_0^{+\infty} (-\hat{\varepsilon}^T(t) \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \hat{\varepsilon}(t)) dt = -J(u_\varepsilon). \quad (4.59)$$

Assim,

$$J(u_\varepsilon) < \lim_{a \rightarrow +\infty} -\varepsilon^T(t) P \varepsilon(t) \Big|_0^a = \varepsilon^T(0) P \varepsilon(0), \quad (4.60)$$

pois, de (4.52)-(4.57),

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0. \quad (4.61)$$

Considerando o sistema dado pelas equações (4.37)-(4.38) satisfazendo (4.39), apresenta-se um projeto do controlador fuzzy “sub-ótimo”, baseado em LMIs que estabiliza o sistema e minimiza um limite superior do índice de desempenho em (4.40), baseado no resultado do Teorema 4.2.

Teorema 4.3: Dadas as matrizes do sistema, $\bar{A}_i, \bar{B}_i, i = 1, \dots, r$ e a condição inicial $\varepsilon(0)$, então as matrizes $X = X^T, M_i, i = 1, \dots, r$, que permitem a determinação dos ganhos de realimentação para estabilizar e para minimizar o limite superior do índice de desempenho em (4.40) podem ser obtidas resolvendo-se as seguintes LMIs:

$$\underset{X, M_1, M_2, \dots, M_r}{\text{minimize}} \lambda$$

sujeito a

$$X > 0, \quad (4.62)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon^T(0) \\ \varepsilon(0) & X \end{bmatrix} > 0, \quad (4.63)$$

$$\begin{bmatrix} X\bar{A}_i^T + \bar{A}_i X - \bar{B}_i M_i - M_i^T \bar{B}_i^T & X\sqrt{Q} & -M_i^T \sqrt{R} \\ \sqrt{Q} X & -I & 0 \\ -\sqrt{R} M_i & 0 & -1 \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (4.64)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} X\bar{A}_i^T + \bar{A}_i X - \bar{B}_i M_i - M_i^T \bar{B}_i^T \\ + X\bar{A}_j^T + \bar{A}_j X - \bar{B}_j M_j - M_j^T \bar{B}_j^T \end{pmatrix} & X\sqrt{Q} & -M_j^T \sqrt{R} & X\sqrt{Q} & -M_i^T \sqrt{R} \\ \sqrt{Q} X & -I & 0 & 0 & 0 \\ -M_j \sqrt{R} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \sqrt{Q} X & 0 & 0 & -I & 0 \\ -M_i \sqrt{R} & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.65)$$

para os pares $(i, j), i < j$, tais que $\alpha_i(x_p(t))\alpha_j(x_p(t)) \neq 0$ para algum $x_p \in D_x$.

Da solução das LMIs, o ganho de realimentação é obtido como:

$$\hat{K}_i = M_i X^{-1},$$

para todo i . Então, o índice de desempenho em (4.40) satisfaz

$$J(u_e) < \varepsilon^T(0) P \varepsilon(0) < \lambda.$$

Prova: A desigualdade (4.41) é equivalente a:

$$-X\bar{A}_i^T - \bar{A}_i X + \bar{B}_i M_i + M_i^T \bar{B}_i^T - \begin{bmatrix} X\sqrt{Q} & -M_i^T \sqrt{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} X \\ -\sqrt{R} M_i \end{bmatrix} > 0. \quad (4.66)$$

Pelo Complemento de Schur obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -X\bar{A}_i^T - \bar{A}_i X + \bar{B}_i M_i + M_i^T \bar{B}_i^T & X\sqrt{Q} & -M_i^T \sqrt{R} \\ X\sqrt{Q} & I & 0 \\ -\sqrt{R} M_i & 0 & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad (4.67)$$

que é equivalente a desigualdade (4.64):

$$\begin{bmatrix} X\bar{A}_i^T + \bar{A}_i X - \bar{B}_i M_i - M_i^T \bar{B}_i^T & X\sqrt{Q} & -M_i^T \sqrt{R} \\ \sqrt{Q} X & -I & 0 \\ -\sqrt{R} M_i & 0 & -1 \end{bmatrix} < 0.$$

De modo semelhante a desigualdade (4.42) pode ser transformada na desigualdade (4.65).

Agora, a desigualdade

$$\varepsilon^T(0)P\varepsilon(0) < \lambda,$$

é equivalente a

$$\lambda - \varepsilon^T(0)P\varepsilon(0) > 0,$$

e pelo Complemento de Schur, tem-se (4.63).

Observações 4.2:

(1) Como

$$\varepsilon(t) = x(t) - x_e = \begin{bmatrix} x_p(t) - \bar{x} \\ \xi(t) - \bar{\xi} \end{bmatrix}, \quad x_e = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$$

então,

$$\varepsilon(0) = \begin{bmatrix} x_p(0) - \bar{x} \\ \xi(0) - \bar{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \xi_l \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

(2) Note que o valor de x_0 é conhecido e independente dos ganhos de realimentação $\hat{K}_i$ (Lema 2.3) e o valor de ξ_l pode ser escolhido de forma convenient-

te. Assim, a escolha de ξ_l é um novo grau de liberdade no projeto de controladores.

4.3.1.2 Especificação Ótima das Condições Iniciais no Controlador

O problema do projeto de controladores ótimos, com atualização das condições iniciais do controlador, para sistemas não-lineares é definido a seguir.

Problema 4.1: Considere o sistema descrito pelas equações (4.21)-(4.22), satisfazendo a Hipótese 1 e (4.29). Suponha que a entrada de referência (função de grau de amplitude r_0) ocorra em $t = 0$, ou seja:

$$r(t) = \begin{cases} r_0, & \text{para } t \geq 0, \\ 0, & \text{para } t < 0, \end{cases}$$

sendo que r_0 é uma constante real conhecida. Determine ξ_{lo} , a atualização de $\xi_l(t)$ em $t = 0$, de modo que exista $P = P^T$, tal que:

$$(i) \quad (\bar{A}_i - \bar{B}_i \hat{K}_i)^T P + P(\bar{A}_i - \bar{B}_i \hat{K}_i) < 0, \quad i = 1, \dots, r;$$

$$(ii) \quad \frac{((\bar{A}_i - \bar{B}_i \hat{K}_j) + (\bar{A}_j - \bar{B}_j \hat{K}_i))^T P + P((\bar{A}_i - \bar{B}_i \hat{K}_j) + (\bar{A}_j - \bar{B}_j \hat{K}_i))}{2} \leq 0,$$

para os pares (i, j) , $i < j$ tais que $\alpha_i(x_p(t))\alpha_j(x_p(t)) \neq 0$ para algum $x_p \in D_i$;

(iii) o limitante superior, λ do índice de desempenho em (4.40)

$$J(\xi_{lo}) = \int_0^{+\infty} (\varepsilon^T Q \varepsilon + u_e^T R u_e) dt, \quad (4.68a)$$

seja minimizado.

A solução do problema proposto é apresentada no Teorema 4.4 a seguir:

Teorema 4.4: O Problema 4.1 tem solução, quando as seguintes LMIs forem factíveis:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \lambda \\ & X_{11}, X_{12}, X_{22}, M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1r}, M_{21}, M_{22}, \dots, M_{2r}, \xi_l \end{aligned}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12}^T \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad (4.69)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & x_0^T & \xi_l \\ x_0 & X_{11} & X_{12}^T \\ \xi_l & X_{12} & X_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad (4.70)$$

$$\begin{bmatrix} U_{11}^i & U_{12}^{iT} & X_{11}Q_{11} + X_{12}^T Q_{12} & X_{11}Q_{12}^T + X_{12}^T Q_{22} & -M_{i1}^T \sqrt{R} \\ U_{12}^i & 0 & X_{12}Q_{11} + X_{22}Q_{12} & X_{12}Q_{12}^T + X_{22}Q_{22} & M_{i2}^T \sqrt{R} \\ Q_{11}X_{11} + Q_{12}^T X_{12} & Q_{11}X_{12}^T + Q_{12}^T X_{22} & -I & 0 & 0 \\ Q_{12}X_{11} + Q_{22}X_{12} & Q_{12}X_{12}^T + Q_{22}X_{22} & 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{R}M_{i1} & \sqrt{R}M_{i2} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.71)$$

$i = 1, \dots, r.$

$$\begin{bmatrix} U_{11}^i + U_{11}^j & U_{12}^{iT} + U_{12}^{jT} & V_{11} & V_{12} & -M_{i1}^T \sqrt{R} & V_{11} & V_{12} & -M_{j1}^T \sqrt{R} \\ U_{12}^i + U_{12}^j & 0 & V_{21} & V_{22} & M_{i2}^T \sqrt{R} & V_{21} & V_{22} & M_{j2}^T \sqrt{R} \\ V_{11}^T & V_{12} & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_{12}^T & V_{22} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{R}M_{i1} & -\sqrt{R}M_{i2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ V_{11}^T & V_{21}^T & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ V_{12}^T & V_{22}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{R}M_{j1} & -\sqrt{R}M_{j2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.72)$$

para os pares (i, j) , $i < j$ tais que $\alpha_i(x_p(t))\alpha_j(x_p(t)) \neq 0$, para algum $x_p \in D_x$

sendo que:

$$U_{11}^i = A_i^T X_{11} - C^T X_{12} + X_{11} A_i - X_{12}^T C - M_{i1}^T B_i^T - B_i M_{i1};$$

$$U_{12}^{iT} = A_i^T X_{12}^T - C^T X_{22} - M_{i2}^T B_i^T;$$

$$V_{11} = X_{11}Q_{11} + X_{12}^T Q_{12}; \quad V_{12} = X_{11}Q_{12}^T + X_{12}^T Q_{22};$$

$$V_{21} = X_{12}Q_{11} + X_{22}Q_{12}; \quad V_{22} = X_{12}Q_{12}^T + X_{22}Q_{22}.$$

Quando estas LMIs são factíveis, o ganho de realimentação e atualização ótima são obtidos, respectivamente pelas seguintes expressões:

$$\hat{K}_i = M_i X^{-1},$$

para todo i , com

$$M_i = [M_{i1} \quad M_{i2}], \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12}^T \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix}; \quad \sqrt{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12}^T \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$\xi_{lo} = \xi_l + \xi(\infty) - \xi(0^-), \quad (4.73)$$

sendo que $\xi(0^-)$ é a condição inicial no integrador antes da atualização.

Então, o índice desempenho em (4.68a) satisfaz:

$$J(\xi_{lo}) < \varepsilon^T(0) P \varepsilon(0) < \lambda.$$

Prova: : As LMIs (4.69)-(4.71) são obtidas a partir das LMIs (4.63)-(4.65), re-escrevendo:

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12}^T \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix}; \quad \varepsilon(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ \xi_l \end{bmatrix}; \quad \sqrt{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12}^T \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}; \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O valor da atualização, ξ_{lo} , decorre do fato que:

$$\xi_l = \xi(0) - \xi(\infty), \quad (4.74)$$

pois, o valor da condição inicial do controlador, antes da atualização é indicado por $\xi(0^-)$ e resolvendo as LMIs, obtém-se ξ_l e de (4.74), tem-se:

$$\xi(0) = \xi_l + \xi(\infty). \quad (4.75)$$

Assim, $\xi(0)$ é o valor inicial ótimo do controlador. Então, o valor da atualização é:

$$\xi_{lo} = (\text{valor inicial ótimo}) - (\text{valor inicial real}),$$

ou seja,

$$\xi_{lo} = \xi_l + \xi(\infty) - \xi(0^-).$$

Para ilustrar o procedimento do projeto de controladores com atualização das condições iniciais para sistemas não lineares serão apresentados quatro exemplos: o primeiro será de um pêndulo invertido sobre um carro, o segundo o de um sistema bola-viga, o terceiro exemplo consiste no controle de um sistema incerto (sistema bola-viga com incertezas do tipo politópicas nos parâmetros da planta) e o quarto exemplo é o controle de um processo químico.

4.4 Exemplos de Aplicações

4.4.1 O Sistema Pêndulo Invertido sobre um Carro

Considere o sistema pêndulo invertido sobre um carro descrito pela equação (4.7) (Teixeira e Žak, 1999):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g \sin(x_1)}{4l/3 - mla \cos^2(x_1)} \\ x_4 \\ \frac{-mag \sin(2x_1)/2}{4/3 - ma \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a \cos(x_1)}{4l/3 - mla \cos^2(x_1)} \\ 0 \\ \frac{4a/3}{4/3 - ma \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} u$$

sendo $g=9,8\text{m/s}^2$, $M=8\text{kg}$, $m=2\text{kg}$, $l=0,5\text{m}$ e $a=1/(m+M)$.

Como obtido anteriormente, um modelo fuzzy TS do sistema não-linear (4.7) pode ser descrito no intervalo $[-\pi/3, \pi/3]$ por dois modelos locais:

$$\dot{x}_p(t) = (\alpha_1(x_p)A_1 + \alpha_2(x_p)A_2)x_p(t) + (\alpha_1(x_p)B_1 + \alpha_2(x_p)B_2)u(t)$$

sendo,

$$x_p(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad x_4(t)]^T;$$

$$\alpha_1(x_p) + \alpha_2(x_p) = 1, \quad \alpha_1(x_p) \geq 0, \quad \alpha_2(x_p) \geq 0,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.2941 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.7294 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1765 \\ 0 \\ 0.1176 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.6304 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6315 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0779 \\ 0 \\ 0.1038 \end{bmatrix}.$$

As funções $\alpha_1(x_p(t))$ e $\alpha_2(x_p(t))$ consideradas, são as mesmas apresentadas no Exemplo 4.1.

Para o projeto do controlador de modo que a saída do sistema atinja e se mantenha no valor r_0 é considerado o sistema aumentado:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p(t) = \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}_p(t) + \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \mathbf{B}_i \right) u(t), \\ \dot{\xi}(t) = r_0 - \mathbf{C} \mathbf{x}_p(t), \end{cases} \quad (4.76)$$

$$(4.77)$$

sendo,

$$\mathbf{C} = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad \alpha_1(\mathbf{x}_p(t)) \in [0,1], \quad \alpha_2(\mathbf{x}_p(t)) \in [0,1],$$

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) = 1 \quad \text{e} \quad u(t) \in \mathfrak{R}.$$

Assim, o sistema aumentado pode ser representado por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \bar{\mathbf{A}}_i \right) \mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \bar{\mathbf{B}}_i \right) u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_0,$$

com:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note que as hipóteses do Lema 4.3 estão satisfeitas para o sistema (4.7), pois para $\mathbf{x} \in D_x$ e $D_x = \{\mathbf{x}_p = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \in \mathfrak{R}^{4 \times 1} : |x_1| < \pi/2\}$ existe um único par $(\mathbf{x}_{ss}, u_{ss})$ tal que:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}_{ss}, u_{ss}) = 0, \\ r_0 - \mathbf{C} \mathbf{x}_{ss} = 0, \end{cases}$$

sendo $\mathbf{x}_{ss} = [0 \ 0 \ r_0 \ 0]^T$ e $u_{ss} = 0$. Além disso, o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\xi})$

com $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{ss}$ para o sistema aumentado (4.76)-(4.77) verifica:

$$\mathbf{A}_i \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_i u_{ss} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Logo, a dinâmica do erro do sistema aumentado é dada por (4.34):

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \left(\sum_{i=1}^2 \beta_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \bar{\mathbf{A}}_i \right) \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \left(\sum_{i=1}^2 \beta_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \bar{\mathbf{B}}_i \right) u_e(t),$$

com $\beta_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^2 \beta_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = 1.$

Portanto, pelo Teorema 4.4, utilizando LMIs a solução do Problema 4.1 pode ser formulada da seguinte forma:

Minimize λ e encontre $\mathbf{X}_{11} = \mathbf{X}_{11}^T, \mathbf{X}_{12}, \mathbf{X}_{22} = \mathbf{X}_{22}^T, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \xi_l$ sujeito a (4.69), (4.70), (4.71) e (4.72), sendo $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ -1 \ 0]^T$, pois foi considerado

$x_p(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e $r_0 = 1$. As matrizes de ponderações utilizadas no índice de desempenho (4.40) foram:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \text{ e } R = 0.01.$$

O *software* LMISol (Oliveira et al., 1997) forneceu λ , ξ_l e as matrizes X_{11} , X_{12} , X_{22} , M_1 , M_2 que solucionam as LMIs acima.

A solução obtida foi:

$$\hat{K}_1 = M_1 X^{-1} = [-2197.398 \quad -601.995 \quad -147.903 \quad -257.502 \quad 18.030] ;$$

$$\hat{K}_2 = M_2 X^{-1} = [-1732.569 \quad -472.654 \quad -112.579 \quad -97.119 \quad 13.702] ;$$

$$P = X^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0371 & -0.1365 & -0.0033 & 0.0073 & -0.0011 \\ -0.1365 & 0.5663 & 0.0340 & -0.1565 & -0.0019 \\ 0.0033 & 0.0340 & 0.5371 & -0.3058 & 0.7829 \\ 0.0073 & -0.1565 & -0.3058 & 0.4488 & -0.0405 \\ -0.0011 & -0.0019 & 0.7829 & -0.0405 & 5.6437 \end{bmatrix} ;$$

$$\lambda = 23.8928 ; \xi_l = -3.3158 .$$

Assim:

$$K_1 = [-2197.3986 \quad -601.9957 \quad -147.9039 \quad -257.5025] ;$$

$$K_l^1 = -18.0320 ;$$

$$K_2 = [-1732.5691 \quad -472.6544 \quad -112.5795 \quad -97.1191] ;$$

$$K_l^2 = -13.7015 ;$$

$$\lambda = 23.8928 ; \xi_l = -3.3158 .$$

Portanto, como neste caso:

$$\alpha_1(\bar{x}) = 0.9507 ; \alpha_2(\bar{x}) = 0.0493, \text{ da equação (4.36):}$$

$$\bar{\xi} = \frac{(\alpha_1(\bar{x})K_1\bar{x} + \alpha_2(\bar{x})K_2\bar{x})}{(\alpha_1(\bar{x})K_l^1 + \alpha_2(\bar{x})K_l^2)} = 8.2028 . \quad (4.77a)$$

Logo, considerando $\xi(0^-) = 0$, e como $\bar{\xi} = \xi(\infty)$ obtém-se de (4.73):

$$\xi_{lo} = \xi_l + \xi(\infty) - \xi(0^-) = -3.3158 + 8.2028 = 4.8870 .$$

A seguir, apresenta-se na Figura 4.2 a saída, $y(t)$ do sistema realimentado com atualização das condições iniciais no controlador. Note que $y(\infty) = r_0 = 1$, como desejado. Também, é mostrado na Figura 4.4 os outros estados do sistema quando este é submetido a uma entrada degrau unitário. Dessa figura pode ser visto que o deslocamento angular θ do pêndulo, $x_1(t)$, permanece no intervalo $[-\pi/3, \pi/3]$ no qual foi considerado o modelo fuzzy TS do sistema não-linear do pêndulo invertido.

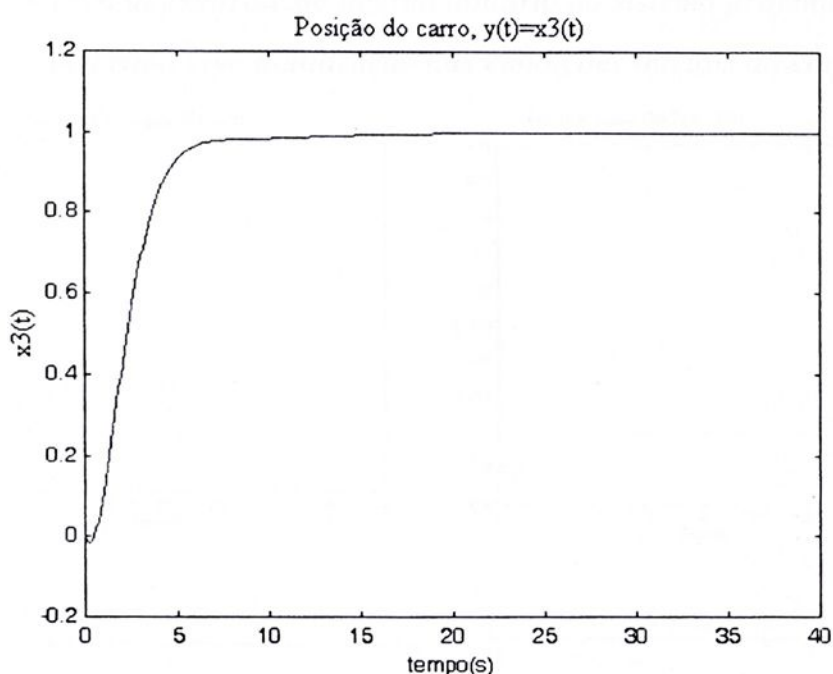


Figura 4.2: Curva de resposta ao degrau unitário do sistema pêndulo invertido com atualização ótima das condições iniciais do controlador.

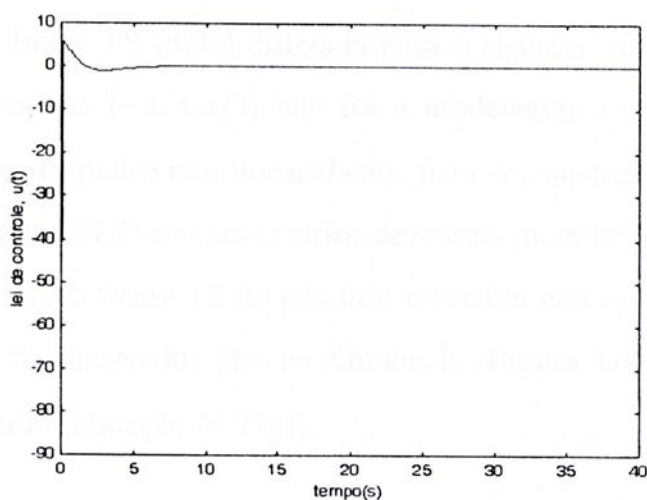


Figura 4.3: Curva de controle ao degrau unitário do sistema projetado pêndulo invertido com atualização das condições iniciais do controlador.

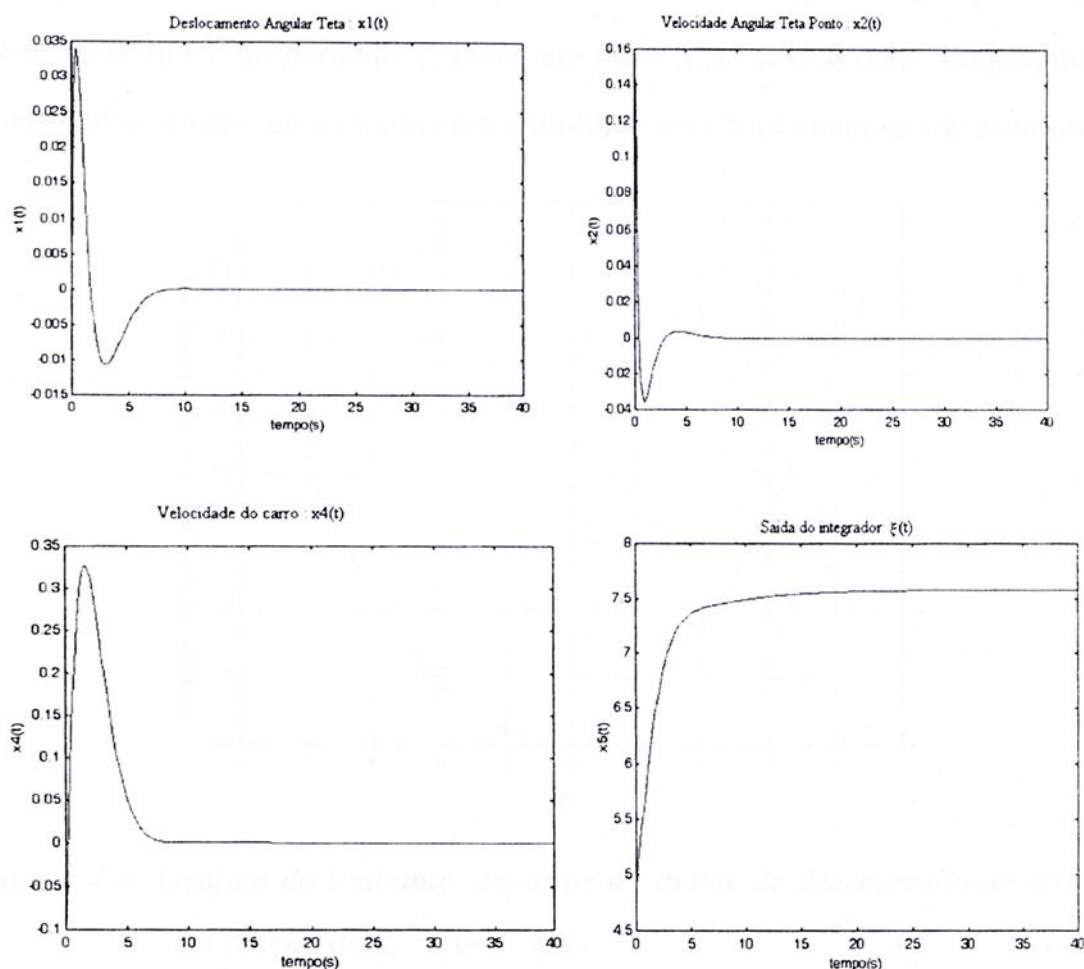


Figura 4.4: Curvas dos outros estados do sistema projetado pêndulo invertido com atualização das condições iniciais do controlador, quando submetido ao degrau unitário.

Observação 4.2

- (1) A modelagem fuzzy TS (4.9a) utilizada para o sistema não-linear pêndulo invertido no intervalo $[-\pi/3, \pi/3]$ não foi a modelagem exata, pois como o sistema (4.7) possui quatro não linearidades, para se construir uma aproximação exata do sistema (4.7) são necessários dezesseis modelos locais.
- (2) Devido à modelagem fuzzy TS do pêndulo invertido não ser exata o valor de regime da saída do integrador $\xi(t)$ na simulação (Figura 4.4) foi diferente do valor teórico obtido (equação (4.77a)).

Para efeito de comparação, na Figura 4.5 é ilustrado o gráfico do limitante superior do índice de desempenho do sistema em função de $\xi_l = \xi(\infty) - \xi(0)$. Observa-se que considerando ξ_l como um novo grau de liberdade no projeto do controlador, o valor encontrado para o limitante constitui um ponto de mínimo.

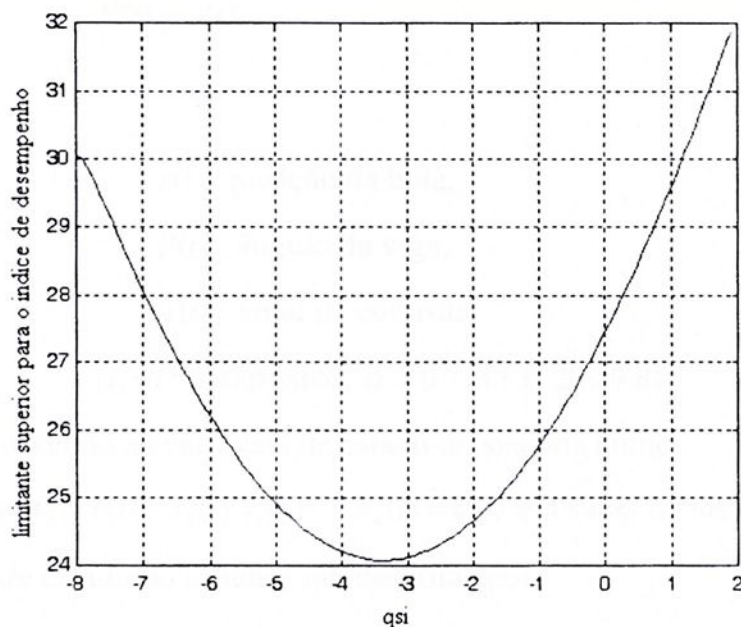


Figura 4.5: Gráfico do limitante superior do índice de desempenho do sistema em função de $\xi_l = \xi(\infty) - \xi(0)$.

4.4.2 O Sistema Bola-viga

Considere o sistema bola-viga mostrado na Figura 4.6.

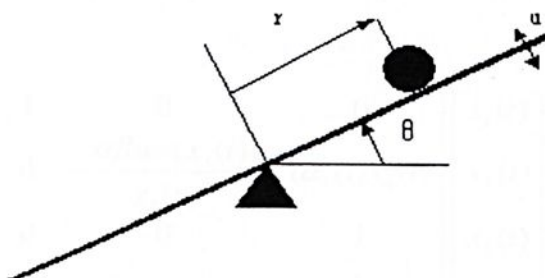


Figura 4.6: Sistema Bola-viga.

A dinâmica do sistema (Wang, 1997, pg.217) pode ser descrita como:

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) - \alpha r(t) \dot{\theta}^2(t) + \alpha \beta \sin(\theta(t)) &= 0, \\ \ddot{\theta}(t) &= u(t), \end{aligned} \quad (4.78)$$

sendo:

$r(t)$: posição da bola,

$\theta(t)$: ângulo da viga,

$u(t)$: sinal de controle,

α, β : parâmetros, $\alpha = 0.7143$ e $\beta = 9.81$.

Considerando as variáveis de estado do sistema como:

$x_1(t) = r(t)$; $x_2(t) = \dot{r}(t)$; $x_3(t) = \theta(t)$; $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$ e a saída do sistema $y(t) = x_1(t)$,

as equações de estado do sistema são descritas por:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (4.79)$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha x_1(t) x_4^2(t) - \alpha \beta \sin(x_3(t)), \quad (4.80)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t), \quad (4.81)$$

$$\dot{x}_4(t) = u(t). \quad (4.82)$$

Supõe-se que:

$$-1 \leq x_1(t) \leq 1; -1 \leq x_2(t) \leq 1; -\frac{\pi}{12} \leq x_3(t) \leq \frac{\pi}{12}; -2 \leq x_4(t) \leq 2.$$

A seguir, o sistema não-linear (4.79)-(4.82) será transformado na forma generalizada do sistema fuzzy T-S (Taniguchi et al., 2001).

O sistema fuzzy T-S generalizado pode ser construído de (4.79)-(4.82) rescrevendo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha\beta \sin(x_3(t))}{x_3(t)} & \alpha x_1(t)x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.83)$$

sendo

$$\mathbf{x}_p(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T;$$

$$\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}_p(t)) = \frac{-\alpha\beta \sin(x_3(t))}{x_3(t)}; \quad \tilde{f}_{24}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha x_1(t)x_4(t), \quad (4.84)$$

as funções que contém as não-linearidades do sistema.

Então (4.83) é representado como:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (4.85)$$

$$\dot{x}_2(t) = \tilde{f}_{23}(\mathbf{x}_p(t))x_3(t) + \tilde{f}_{24}(\mathbf{x}_p(t))x_4(t), \quad (4.86)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t), \quad (4.87)$$

$$\dot{x}_4(t) = u(t). \quad (4.88)$$

Para obter a forma generalizada, é necessário determinar os valores máximo e mínimo das funções $\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}_p(t))$ e $\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}_p(t))$ no conjunto considerado. Sejam

$$a_{231} = \max_{x(t)} \{ \tilde{f}_{23}(\mathbf{x}_p(t)) \} = -6.9275;$$

$$a_{232} = \min_{x(t)} \{ \tilde{f}_{23}(\mathbf{x}_p(t)) \} = -7.0073;$$

$$a_{241} = \max_{x(t)} \{ \tilde{f}_{24}(\mathbf{x}_p(t)) \} = 1.4286;$$

$$a_{242} = \min_{x(t)} \{ \tilde{f}_{24}(\mathbf{x}_p(t)) \} = -1.4286.$$

Segundo o método proposto por Taniguchi et al. (2001), a função não-linear $\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}_p(t))$ pode ser representada, de forma exata, por um modelo fuzzy

TS, considerando dois modelos locais: a_{231} e a_{232} , ou sejam existem $\sigma_{231}(\mathbf{x}_p(t))$ e $\sigma_{232}(\mathbf{x}_p(t))$ tais que:

$$\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}_p(t)) = \sigma_{231}(\mathbf{x}_p(t))a_{231} + \sigma_{232}(\mathbf{x}_p(t))a_{232} \quad (4.88a)$$

sendo

$$0 \leq \sigma_{231}(\mathbf{x}_p(t)), \sigma_{232}(\mathbf{x}_p(t)) \leq 1,$$

$$\sigma_{231}(\mathbf{x}_p(t)) + \sigma_{232}(\mathbf{x}_p(t)) = 1,$$

$$\sigma_{231}(\mathbf{x}_p(t)) = \frac{\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}_p(t)) - a_{232}}{a_{231} - a_{232}}.$$

Da mesma forma a função $\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}_p(t))$ pode ser representada exatamente por:

$$\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}_p(t)) = \xi_{241}(\mathbf{x}_p(t))a_{241} + \xi_{242}(\mathbf{x}_p(t))a_{242}$$

sendo que $\xi_{241}(\mathbf{x}_p(t))$ e $\xi_{242}(\mathbf{x}_p(t))$ satisfazem:

$$0 \leq \xi_{241}(\mathbf{x}_p(t)), \xi_{242}(\mathbf{x}_p(t)) \leq 1, \quad \xi_{241}(\mathbf{x}_p(t)) + \xi_{242}(\mathbf{x}_p(t)) = 1.$$

Então, tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{23}(\mathbf{x}_p(t)) &= (\xi_{241}(\mathbf{x}_p(t)) + \xi_{242}(\mathbf{x}_p(t)))(\sigma_{231}(\mathbf{x}_p(t))a_{231} + \sigma_{232}(\mathbf{x}_p(t))a_{232}) \\ &= \xi_{241}(\mathbf{x}_p(t))\sigma_{231}(\mathbf{x}_p(t))a_{231} + \xi_{241}(\mathbf{x}_p(t))\sigma_{232}(\mathbf{x}_p(t))a_{232} + \xi_{242}(\mathbf{x}_p(t))\sigma_{231}(\mathbf{x}_p(t))a_{231} \\ &\quad + \xi_{242}(\mathbf{x}_p(t))\sigma_{232}(\mathbf{x}_p(t))a_{232}. \end{aligned}$$

Agora, defina:

$$\alpha_1(\mathbf{x}_p(t)) = \xi_{241}(\mathbf{x}_p(t))\sigma_{231}(\mathbf{x}_p(t)), \quad \alpha_2(\mathbf{x}_p(t)) = \xi_{241}(\mathbf{x}_p(t))\sigma_{232}(\mathbf{x}_p(t)), \quad (4.88b)$$

$$\alpha_3(\mathbf{x}_p(t)) = \xi_{242}(\mathbf{x}_p(t))\sigma_{231}(\mathbf{x}_p(t)), \quad \alpha_4(\mathbf{x}_p(t)) = \xi_{242}(\mathbf{x}_p(t))\sigma_{232}(\mathbf{x}_p(t)). \quad (4.88c)$$

Assim,

$$\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{231} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{232} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{231} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{232}. \quad (4.88d)$$

Usando os passos descritos acima para a função $\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}_p(t))$, tem-se:

$$\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{241} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{242} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{241} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{242}. \quad (4.88e)$$

Substituindo (4.88d)-(4.88e) em (4.83) pode-se obter uma aproximação exata do sistema (4.79)–(4.82) com os modelos fuzzy TS:

$$\dot{x}_p(t) = \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i(x_p(t)) A_i \right) x_p(t) + \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i(x_p(t)) B_i \right) u(t)$$

sendo

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23i} & a_{24i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

com $i = 1, 2, 3, 4$; com $\alpha_i(x_p(t))$ dadas por (4.88b)-(4.88c). Portanto os modelos locais são:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.0073 & 1.4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.9275 & 1.4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.0073 & -1.4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.9275 & -1.4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.88f)$$

De uma maneira geral segundo este método, se o sistema apresentar s funções não-lineares, serão necessários 2^s modelos locais para a sua representação exata através de modelos TS.

Para o projeto do controlador de modo que a saída do sistema se mantenha no valor r_0 é considerado o sistema aumentado:

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i(x_p(t)) A_i \right) x_p(t) + \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i(x_p(t)) B_i \right) u(t), & (4.89) \\ \dot{\xi}(t) = r_0 - Cx_p(t), & (4.90) \end{cases}$$

sendo

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]; \alpha_i(x_p(t)) \in [0,1], i = 1, \dots, 4; \sum_{i=1}^4 \alpha_i(x_p(t)) = 1 \text{ e}$$

$$u(t) \in \mathfrak{R}.$$

Assim, o sistema aumentado pode ser representado por:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i(x_p(t)) \bar{A}_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i(x_p(t)) \bar{B}_i \right) u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_0,$$

sendo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Note que as hipóteses do Lema 4.3 estão satisfeitas para o sistema (4.79)-(4.82), pois para $\mathbf{x} \in D_x$ e $D_x = \{\mathbf{x}_p = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1} : |x_3| < \pi/2\}$ existe um único par $(\mathbf{x}_{ss}, u_{ss})$ tal que:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}_{ss}, u_{ss}) = 0 \\ r_0 - \mathbf{C}\mathbf{x}_{ss} = 0 \end{cases},$$

sendo $\mathbf{x}_{ss} = [r_0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e $u_{ss} = 0$. Além disso, o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\xi})$ com

$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{ss}$ para o sistema aumentado (4.89)-(4.90) verifica:

$$\mathbf{A}_i \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_i u_{ss} = 0, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Assim, a dinâmica do erro do sistema aumentado é dada por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \left(\sum_{i=1}^4 \beta_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \bar{\mathbf{A}}_i \right) \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \left(\sum_{i=1}^4 \beta_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \bar{\mathbf{B}}_i \right) u_e(t),$$

com $\beta_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \geq 0$, $\beta_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = \alpha_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t) + \mathbf{x}_e)$, $i = 1, \dots, 4$, e $\sum_{i=1}^4 \beta_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = 1$.

Portanto, pelo Teorema 4.4, a solução do Problema 4.1 pode ser formulado da seguinte forma:

Minimize λ e encontre $\mathbf{X}_{11} = \mathbf{X}_{11}^T$, $\mathbf{X}_{12}$, $\mathbf{X}_{22} = \mathbf{X}_{22}^T$, $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$, ξ_l sujeito a (4.69), (4.70), (4.71) e (4.72), sendo $\mathbf{x}_0 = [-1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, pois foi considerado $\mathbf{x}_p(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e $r_0 = 1$.

O *software LMISol* forneceu λ, ξ_l e as matrizes $\mathbf{X}_{11}$, $\mathbf{X}_{12}$, $\mathbf{X}_{22}$, $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$, que solucionam as LMIs acima.

A solução obtida foi:

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = [-141.1298 \quad -128.2134 \quad 350.4747 \quad 32.7597 \quad 11.1160];$$

$$\hat{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = [-282.2522 \quad -248.8542 \quad 646.3109 \quad 59.5080 \quad 22.2725];$$

$$\hat{\mathbf{K}}_3 = \mathbf{M}_3 \mathbf{X}^{-1} = [-380.4650 \quad -332.6655 \quad 849.1262 \quad 68.6874 \quad 30.0392];$$

$$\hat{\mathbf{K}}_4 = \mathbf{M}_4 \mathbf{X}^{-1} = [-380.0326 \quad -332.3035 \quad 848.3673 \quad 68.6187 \quad 30.0049];$$

$$P = X^{-1} = \begin{bmatrix} 97.8503 & 78.0777 & -189.4519 & -14.2444 & -7.7501 \\ 78.0777 & 67.1980 & -166.0543 & -12.6437 & -6.1707 \\ -189.4519 & -166.0543 & 425.9044 & 32.7177 & 14.9547 \\ -14.2444 & -12.6437 & 32.7177 & 3.1115 & 1.1239 \\ -7.7501 & -6.1707 & 14.9547 & 1.1239 & 1.4624 \end{bmatrix};$$

$$\lambda = 75.3461; \xi_l = -4.9401.$$

Assim,

$$K_1 = [-141.1298 \quad -128.2134 \quad 350.4747 \quad 32.7597]; \quad K_l^1 = -11.1160;$$

$$K_2 = [-282.2522 \quad -248.8542 \quad 646.3109 \quad 59.5080]; \quad K_l^2 = -22.2725;$$

$$K_3 = [-380.4650 \quad -332.6655 \quad 849.1262 \quad 68.6874]; \quad K_l^3 = -30.0392;$$

$$K_4 = [-380.0326 \quad -332.3035 \quad 848.3673 \quad 68.6187]; \quad K_l^4 = -30.0049.$$

Portanto, como neste caso:

$$\alpha_1(\bar{x}) = 0.0001065; \alpha_2(\bar{x}) = 0.0001065, \alpha_3(\bar{x}) = 0.4999; \alpha_4(\bar{x}) = 0.4999,$$

da equação (4.36):

$$\bar{\xi} = \frac{(\alpha_1(\bar{x})K_1\bar{x} + \alpha_2(\bar{x})K_2\bar{x} + \alpha_3(\bar{x})K_3\bar{x} + \alpha_4(\bar{x})K_4\bar{x})}{(\alpha_1(\bar{x})K_l^1 + \alpha_2(\bar{x})K_l^2 + \alpha_3(\bar{x})K_l^3 + \alpha_4(\bar{x})K_l^4)} = 12.6657. \quad (4.91)$$

Logo, considerando $\xi(0^-) = 0$, obtém-se de (4.73):

$$\xi_{lo} = \xi_l + \xi(\infty) - \xi(0^-) = -4.9401 + 12.6657 = 7.7256.$$

A seguir, apresenta-se nas Figura 4.7 e 4.8, respectivamente a saída, $y(t)$, e a lei de controle, $u(t)$ do sistema realimentado com atualização das condições iniciais no controlador. Também, é mostrado na Figura 4.9 os outros estados do sistema quando este é submetido a uma entrada degrau unitário. Dessa figura pode ser visto que os estados permanecem dentro dos intervalos considerados para o modelo fuzzy T-S generalizado do sistema não linear bola-viga. Nas simulações foram consideradas as matrizes Q e R como:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} ; R=0.01.$$

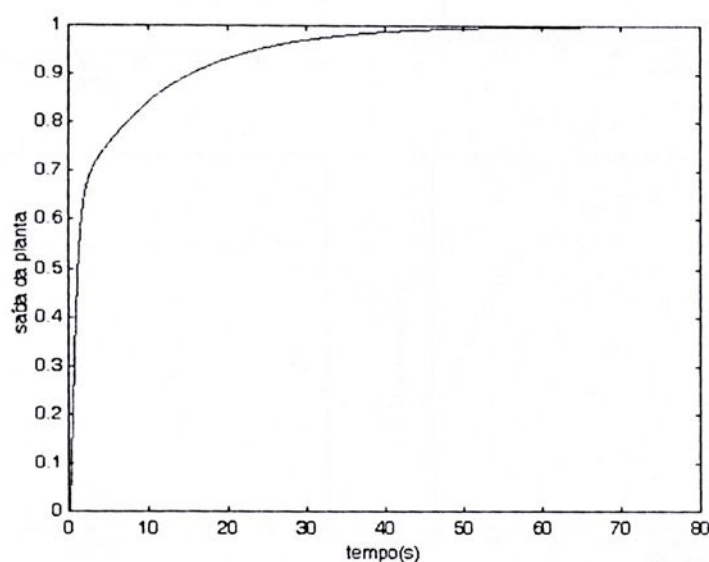


Figura 4.7: Curva de resposta ao degrau unitário do sistema bola-viga com atualização ótima das condições iniciais do controlador.

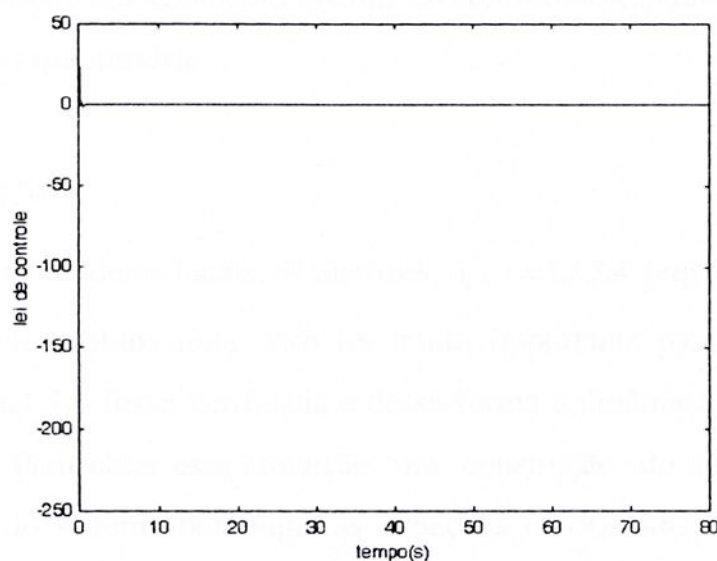


Figura 4.8: Curva de controle ao degrau unitário do sistema projetado bola-viga com atualização das condições iniciais do controlador.

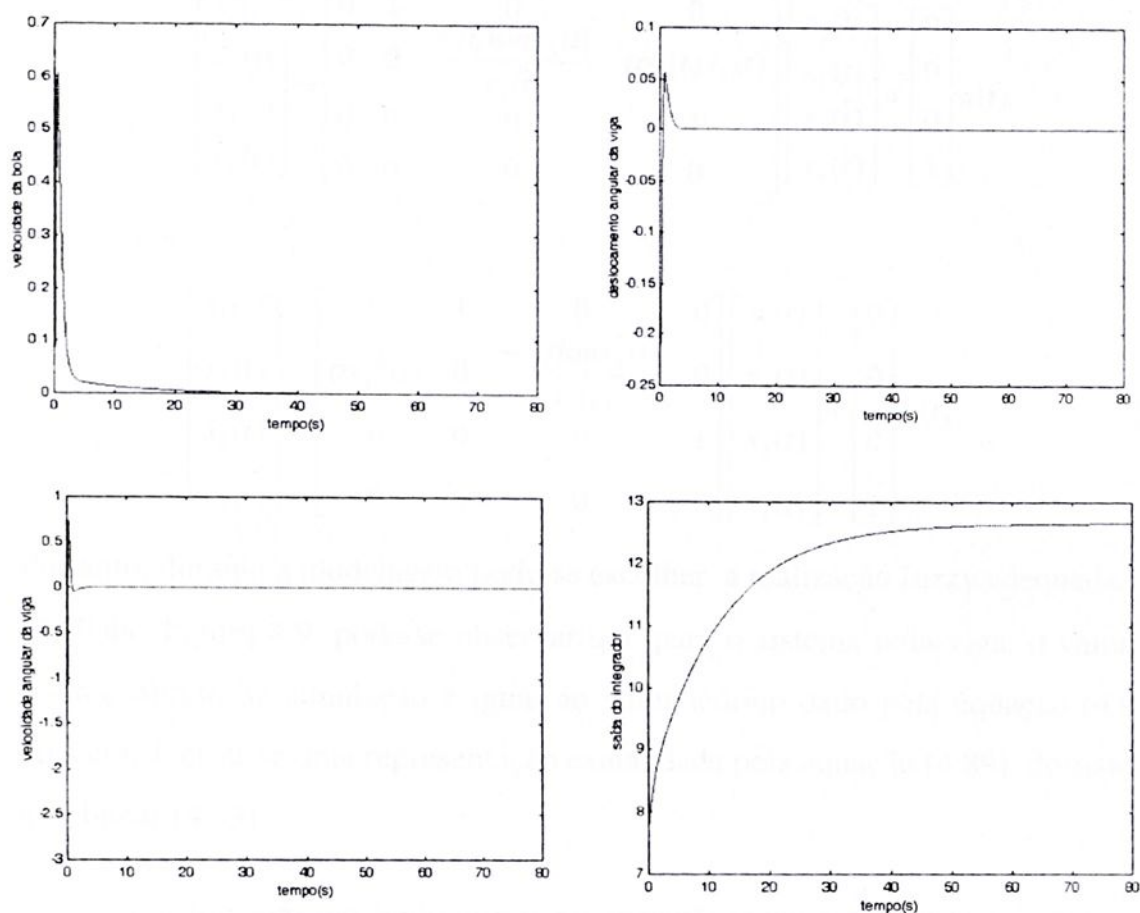


Figura 4.9: Curvas dos outros estados do sistema projetado bola-viga com atualização das condições iniciais do controlador, quando submetido ao degrau unitário.

Observação 4.3:

(1) Em todos os modelos locais, as matrizes A_i , $i = 1, 2, 3, 4$ (equação (4.88f)) possuem a primeira coluna nula. Isso foi muito importante para que a condição (4.29) do Lema 4.3 fosse verificada e dessa forma a dinâmica do erro possuía a forma (4.34). Para obter essa condição, na construção do sistema fuzzy T-S generalizado do sistema bola-viga, as equações (4.79)-(4.82), foram reescritas como em (4.83):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha\beta\sin x_3(t)}{x_3(t)} & \alpha x_1(t)x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

e não como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha x_4^2(t) & 0 & \frac{-\alpha\beta\sin x_3(t)}{x_3(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Portanto, durante a modelagem pode-se escolher a realização fuzzy adequada.

(2) Pela Figura 4.9, pode-se observar que para o sistema bola-viga, o valor de regime obtido na simulação é igual ao valor teórico dado pela equação (4.91), pois considerou-se uma representação exata, dada pela equação (4.89), do sistema não-linear (4.83).

A seguir será mostrado que se no exemplo anterior existirem incertezas do tipo politópicas nos parâmetros da planta, a metodologia proposta também se aplica.

4.4.3 O Controle de um Sistema Incerto

Considere o sistema bola-viga como mostrado na Figura 4.6.

A dinâmica do sistema (Wang, 1997, pg.217) pode ser descrita como em (4.78):

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) - \alpha r(t)\dot{\theta}^2(t) + \alpha \beta \sin(\theta(t)) &= 0, \\ \ddot{\theta}(t) &= u(t), \end{aligned} \tag{4.92}$$

sendo:

$r(t)$: posição da bola,

$\theta(t)$: ângulo da viga,

$u(t)$: sinal de controle,

α, β : parâmetros constantes do sistema.

Suponha que o parâmetro α possua incertezas do tipo politópicas, ou seja, $\alpha \in [0.2, 1.2]$. Assim,

$$\alpha = \bar{\alpha}_1 0.2 + \bar{\alpha}_2 1.2, \quad (4.92a)$$

sendo

$$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \geq 0 \text{ e } \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = 1. \quad (4.92b)$$

Considere também que $\beta = 9.81$.

Supondo as variáveis de estado do sistema como:

$x_1(t) = r(t)$; $x_2(t) = \dot{r}(t)$; $x_3(t) = \theta(t)$; $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$ e a saída do sistema $y(t) = x_1(t)$,

as equações de estado do sistema são descritas por:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (4.93)$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha x_1(t) x_4^2(t) - \alpha \beta \sin(x_3(t)), \quad (4.94)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t), \quad (4.95)$$

$$\dot{x}_4(t) = u(t). \quad (4.96)$$

Supõe-se que durante a operação:

$$-1 \leq x_1(t) \leq 1; -1 \leq x_2(t) \leq 1; -\frac{\pi}{12} \leq x_3(t) \leq \frac{\pi}{12}; -2 \leq x_4(t) \leq 2. \quad (4.96a)$$

A seguir, o sistema não-linear (4.93)–(4.96) será transformado na forma generalizada do sistema fuzzy T-S (Taniguchi et al., 2001) com incertezas do tipo politópicas.

O sistema fuzzy T-S generalizado pode ser construído descrevendo (4.93)–(4.96) como mostrado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha \beta \sin(x_3(t))}{x_3(t)} & \alpha x_1(t) x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.97)$$

A representação das incertezas dos parâmetros do sistema na forma

politópica, supõe que a estrutura do sistema incerto varia de acordo com uma combinação convexa dos dois sistemas vértices que delimitam o politópo, ou seja, de (4.92a)–(4.92b) pode-se representar a equação (4.97) como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} &= \bar{\alpha}_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-0.2\beta \sin(x_3(t))}{x_3(t)} & 0.2x_1(t)x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ &+ \bar{\alpha}_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1.2\beta \sin(x_3(t))}{x_3(t)} & 1.2x_1(t)x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \end{aligned} \quad (4.98)$$

com

$$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \geq 0 \text{ e } \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = 1.$$

Assim, o sistema dinâmico não-linear (4.98) com incertezas do tipo politópica pode ser descrito por:

$$\dot{x}_p(t) = \sum_{k=1}^2 \bar{\alpha}_k (A_k(x_p(t))x_p(t) + B_k u(t)),$$

sendo

$$\begin{aligned} x_p(t) &= [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T; \\ A_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\bar{\alpha}_k \beta \sin(x_3(t))}{x_3(t)} & \bar{\alpha}_k x_1(t)x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k=1,2. \text{ e } \bar{\alpha}_1 = 0.2; \bar{\alpha}_2 = 1.2. \end{aligned}$$

Para cada sistema vértice correspondente a A_k ($k=1,2$), será utilizado como anteriormente, equações (4.88a) – (4.88e), o método proposto por Taniguchi et al., (2001) para a obtenção dos modelos lineares locais. As funções que contém as não-linearidades de cada sistema vértice são:

$$\tilde{f}_{231}(x_p(t)) = \frac{-0.2\beta \sin(x_3(t))}{x_3(t)}; \quad \tilde{f}_{241}(x_p(t)) = 0.2x_1(t)x_4(t). \quad (4.99a)$$

$$\tilde{f}_{232}(\mathbf{x}_p(t)) = \frac{-1.2\beta \sin(x_3(t))}{x_3(t)}; \quad \tilde{f}_{242}(\mathbf{x}_p(t)) = 1.2 x_1(t)x_4(t). \quad (4.99b)$$

Para obter a forma generalizada, obteve-se os valores máximos e mínimos destas funções no conjunto considerado em (4.96a):

$$\begin{aligned} a_{2311} &= \max_{x(t)} \{\tilde{f}_{231}(\mathbf{x}_p(t))\} = -1.9397; \\ a_{2321} &= \min_{x(t)} \{\tilde{f}_{231}(\mathbf{x}_p(t))\} = -1.9620; \\ a_{2411} &= \max_{x(t)} \{\tilde{f}_{241}(\mathbf{x}_p(t))\} = 0.4; \\ a_{2421} &= \min_{x(t)} \{\tilde{f}_{241}(\mathbf{x}_p(t))\} = -0.4. \end{aligned} \quad (4.100a)$$

$$\begin{aligned} a_{2312} &= \max_{x(t)} \{\tilde{f}_{232}(\mathbf{x}(t))\} = -11.6380; \\ a_{2322} &= \min_{x(t)} \{\tilde{f}_{232}(\mathbf{x}(t))\} = -11.7720; \\ a_{2412} &= \max_{x(t)} \{\tilde{f}_{242}(\mathbf{x}(t))\} = 2.4; \\ a_{2422} &= \min_{x(t)} \{\tilde{f}_{242}(\mathbf{x}(t))\} = -2.4. \end{aligned} \quad (4.100b)$$

Usando os passos descritos nas equações (4.88a) – (4.88e) obtém-se:

$$\tilde{f}_{231}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{2311} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{2321} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{2311} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{2321},$$

$$\tilde{f}_{241}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{2411} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{2421} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{2411} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{2421},$$

$$\tilde{f}_{232}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{2312} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{2322} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{2312} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{2322},$$

$$\tilde{f}_{242}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{2412} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{2422} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{2412} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{2422},$$

sendo as funções de pertinência $\alpha_i(\mathbf{x}_p(t))$, $i=1,2,3,4$ dadas pelas equações (4.88a) – (4.88c).

Os modelos locais para o primeiro sistema vértice são:

$$A_{i1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23i1} & a_{24i1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_{i1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; i=1,2,3,4; \quad (4.101)$$

e para o segundo:

$$A_{i2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23i2} & a_{24i2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_{i1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.102)$$

Desta forma, das equações (4.100a), (4.100b), (4.101) e (4.102) resultam:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.9397 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.9397 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.103a)$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.9620 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{41} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.9620 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.103b)$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11.6380 & 2.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11.6380 & -2.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.103c)$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11.7720 & 2.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{42} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11.7720 & -2.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.103d)$$

$$B_{ik} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \text{ para } i=1,2,3,4 \text{ e } k=1,2. \quad (4.104)$$

Então, um modelo fuzzy TS com incertezas do tipo politópicas para o sistema (4.98) pode ser representado por:

$$\dot{x}_p(t) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^4 \alpha_i(x_p(t)) \bar{\alpha}_k(A_{ik}x_p(t) + B_{ik}u(t)), \quad (4.105)$$

sendo: $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \geq 0$ e $\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = 1$; $\alpha_i(x_p(t))$, $i=1,2,3,4$ descritas pelas equações (4.88a) – (4.88c); as matrizes A_{ik} e B_{ik} , $i=1,2,3,4$ e $k=1,2$ dadas pelas equações (4.103a) – (4.103d) e (4.104) respectivamente.

Definindo $\beta_{ik}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \bar{\alpha}_k$, tem-se de (4.105):

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^4 \beta_{ik}(\mathbf{x}_p(t)) (\mathbf{A}_{ik} \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_{ik} u(t)), \quad (4.106)$$

com $\beta_{ik}(\mathbf{x}_p(t)) \geq 0$ e $\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^4 \beta_{ik}(\mathbf{x}_p(t)) = 1$.

Para o projeto do controlador de modo que a saída do sistema se mantenha no valor r_0 é considerado o sistema aumentado:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p(t) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^4 \beta_{ik}(\mathbf{x}_p(t)) (\mathbf{A}_{ik} \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_{ik} u(t)), \\ \dot{\xi}(t) = r_0 - \mathbf{C} \mathbf{x}_p(t), \end{cases} \quad (4.107)$$

sendo

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]; \beta_{ik}(\mathbf{x}_p(t)) \in [0,1], i = 1, \dots, 4; \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^4 \beta_{ik}(\mathbf{x}_p(t)) = 1 \text{ e } u(t) \in \mathcal{R}.$$

Assim, o sistema aumentado pode ser representado por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^4 \beta_{ik}(\mathbf{x}_p(t)) \bar{\mathbf{A}}_{ik} \right) \mathbf{x}(t) + \left(\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^4 \beta_{ik}(\mathbf{x}_p(t)) \bar{\mathbf{B}}_{ik} \right) u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_0, \quad (4.108a)$$

sendo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{A}}_{ik} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ik} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{B}}_{ik} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ik} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.108b)$$

Como as condições do Lema 4.3 são satisfeitas para o sistema (4.93) – (4.96), com $\mathbf{x}_{ss} = [r_0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e $u_{ss} = 0$, o Problema 4.1 para o sistema (4.108a)-(4.108b) tem solução pelo Teorema 4.4.

Observe que na equação (4.107) o modelo fuzzy TS que representa o sistema bola-viga tem oito modelos locais, quatro correspondente a cada sistema vértice. Tendo em vista a definição de $\beta_{ik}(\mathbf{x}_p(t))$ em (4.105) e (4.106), então a lei de controle tem a seguinte forma:

$$u(t) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^2 \bar{\alpha}_k \sum_{i=1}^4 \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^4 \beta_{ik}(\mathbf{x}_p(t)) \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{x}(t).$$

Dessa forma para as LMIs descritas pelas equações (4.71)–(4.72), considerou-se $r=8$ com

$$A_1 = \bar{A}_{11}; \quad A_2 = \bar{A}_{21}; \quad A_3 = \bar{A}_{31}; \quad A_4 = \bar{A}_{41};$$

$$A_5 = \bar{A}_{12}; \quad A_6 = \bar{A}_{22}; \quad A_7 = \bar{A}_{32}; \quad A_8 = \bar{A}_{42};$$

$$B_i = \bar{B}_{i1} = \bar{B}_{i2} \quad i=1, \dots, 8;$$

$$M_{11} = M_{51}; \quad M_{12} = M_{52};$$

$$M_{21} = M_{61}; \quad M_{22} = M_{62};$$

$$M_{31} = M_{71}; \quad M_{32} = M_{72};$$

$$M_{41} = M_{81}; \quad M_{42} = M_{82}.$$

Note que pelas definições acima, que A_i e A_{i+4} , $i=1,2,3,4$ são iguais a $\bar{A}_{i1}$ ou $\bar{A}_{i2}$. Este fato explica as igualdades com os ganhos M_{ij} , considerando ainda que, pelo Teorema 4.4 os M_{ij} estão relacionados com os ganhos $\hat{K}_i$, $i=1,2,3,4$.

Portanto, pelo Teorema 4.4, a solução do Problema 4.1 pode ser formulada da seguinte forma:

Minimize λ e encontre $X_{11} = X_{11}^T$, X_{12} , $X_{22} = X_{22}^T$, M_1, M_2, M_3, M_4 , ξ_i sujeito a (4.69), (4.70), (4.71) e (4.72), sendo $x_0 = [-1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, pois foi considerado $x_p(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e $r_0 = 1$.

O software *LMISol* forneceu λ, ξ_i e as matrizes X_{11} , X_{12} , X_{22} , M_1, M_2, M_3, M_4 , que solucionam as LMIs acima.

A solução obtida foi:

$$\hat{K}_1 = M_1 X^{-1} = \begin{bmatrix} -676.9801 & -1446.4656 & 4884.5638 & 369.9371 & 42.4254 \end{bmatrix};$$

$$\hat{K}_2 = M_2 X^{-1} = \begin{bmatrix} -709.9410 & -1516.6888 & 5120.7466 & 386.13404 & 44.4917 \end{bmatrix};$$

$$\hat{K}_3 = M_3 X^{-1} = \begin{bmatrix} -722.8162 & -1544.1927 & 5213.6265 & 393.0954 & 45.2986 \end{bmatrix};$$

$$\hat{K}_4 = M_4 X^{-1} = \begin{bmatrix} -663.3406 & -1417.3322 & 4786.2695 & 362.5059 & 41.5706 \end{bmatrix};$$

$$P = X^{-1} = \begin{bmatrix} 1427.378 & 3006.276 & -10029.160 & -725.876 & -89.533 \\ 3006.276 & 6409.596 & -21407.526 & -1550.942 & -188.441 \\ -10029.160 & -21407.526 & 72259.376 & 5236.840 & 628.548 \\ -725.876 & -1550.942 & 5236.840 & 396.771 & 45.490 \\ -89.533 & -188.441 & 628.548 & 45.490 & 6.343 \end{bmatrix};$$

$$\lambda = 169.4395; \xi_l = -13.8847.$$

Assim,

$$K_1 = [-676.9801 \quad -1446.4656 \quad 4884.5638 \quad 369.9371]; \quad K_l^1 = -42.4254;$$

$$K_2 = [-709.9410 \quad -1516.6888 \quad 5120.7466 \quad 386.1304]; \quad K_l^2 = -44.4917;$$

$$K_3 = [-722.8162 \quad -1544.1927 \quad 5213.6265 \quad 393.0954]; \quad K_l^3 = -45.2986;$$

$$K_4 = [-663.3406 \quad -1417.3322 \quad 4786.2695 \quad 362.5059]; \quad K_l^4 = -41.5706$$

Portanto, como neste caso:

$$\alpha_1(\bar{x}) = 0.0001065; \alpha_2(\bar{x}) = 0.0001065, \alpha_3(\bar{x}) = 0.4999; \alpha_4(\bar{x}) = 0.4999,$$

da equação (4.36):

$$\bar{\xi} = \frac{(\alpha_1(\bar{x})K_1\bar{x} + \alpha_2(\bar{x})K_2\bar{x} + \alpha_3(\bar{x})K_3\bar{x} + \alpha_4(\bar{x})K_4\bar{x})}{(\alpha_1(\bar{x})K_l^1 + \alpha_2(\bar{x})K_l^2 + \alpha_3(\bar{x})K_l^3 + \alpha_4(\bar{x})K_l^4)} = 15.9568. \quad (4.109)$$

Logo, considerando $\xi(0^-) = 0$, obtém-se de (4.73):

$$\xi_{lo} = \xi_l + \xi(\infty) - \xi(0^-) = -13.8847 + 15.9568 = 2.0721.$$

A seguir, apresenta-se nas Figura 4.10 e 4.11, respectivamente a saída, $y(t)$, e a lei de controle, $u(t)$ do sistema realimentado com atualização das condições iniciais no controlador, considerando o valor do parâmetro como sendo $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 1.2$ respectivamente. Também, é mostrado na Figura 4.12 os outros estados do sistema quando este é submetido a uma entrada degrau unitário. Dessa figura pode ser visto que os estados permanecem dentro dos intervalos considerados para o modelo fuzzy T-S generalizado do sistema não linear bola-viga. Nas simulações foram consideradas as matrizes Q e R como:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}; \quad R=1.$$

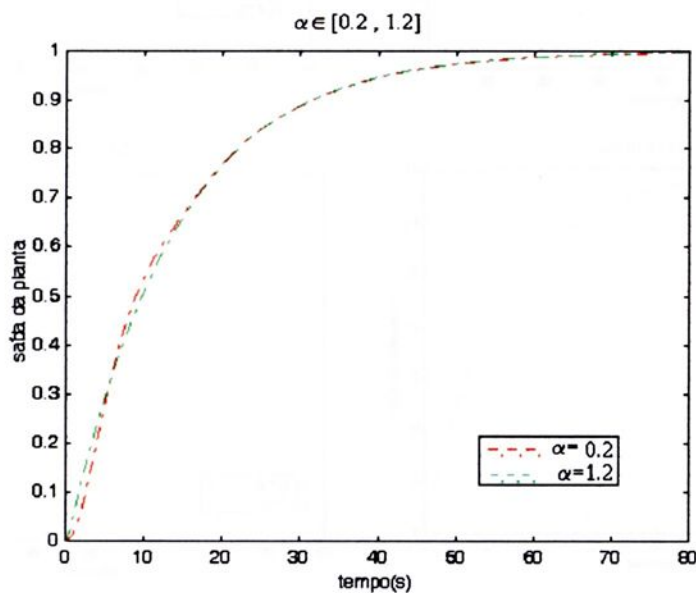


Figura 4.10: Curva de resposta ao degrau unitário do sistema bola-viga com incertezas politópicas e com atualização ótima das condições iniciais do controlador.

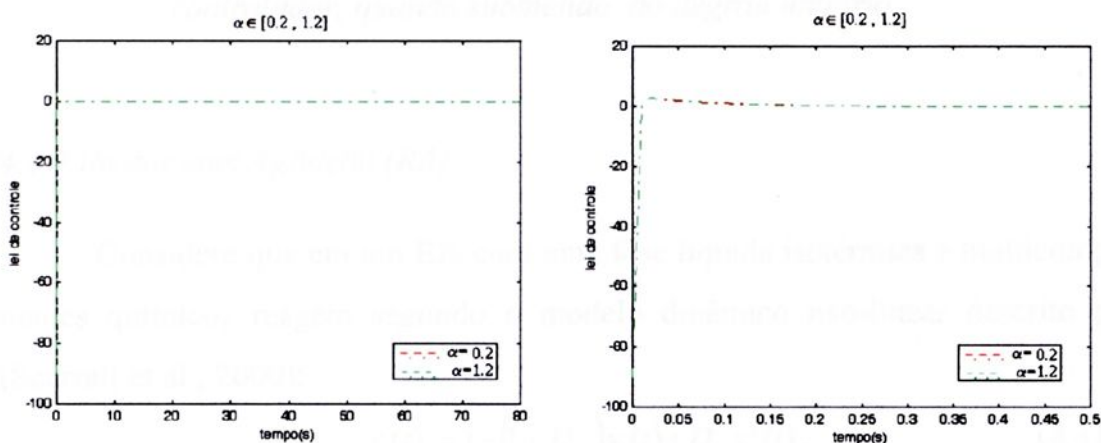


Figura 4.11: Curvas de controle ao degrau unitário do sistema projetado bola-viga com incertezas politópicas e com atualização das condições iniciais do controlador.

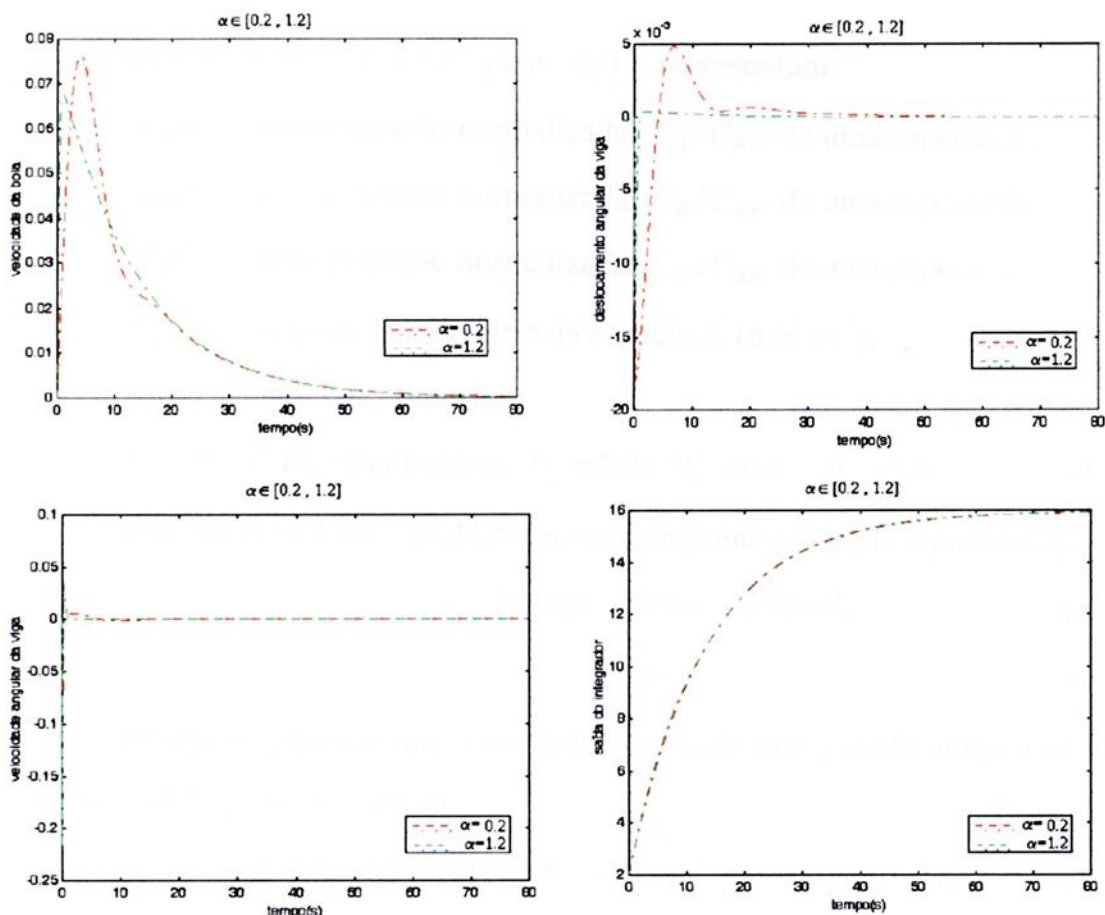


Figura 4.12: Curvas dos outros estados do sistema projetado bola-viga com incertezas politópicas e com atualização das condições iniciais do controlador, quando submetido ao degrau unitário.

4.4.4 Reator com Agitação (RA)

Considere que em um RA com uma fase líquida isotérmica e multicomponentes químicos reagem segundo o modelo dinâmico não-linear descrito por (Scarratt et al., 2000):

$$\dot{x}_1(t) = 1 - (1 + D_{a_1})x_1(t) + D_{a_2}x_2^2(t), \quad (4.110)$$

$$\dot{x}_2(t) = D_{a_1}x_1(t) - x_2(t) - (D_{a_2} + D_{a_3})x_2^2(t) + u(t), \quad (4.111)$$

$$\dot{x}_3(t) = D_{a_3}x_2^2(t) - x_3(t), \quad (4.112)$$

$$y(t) = x_3(t), \quad (4.113)$$

sendo que $x_i(t) > 0$, $i=1,2,3$ para $t \geq 0$ e representam:

$x_1(t)$: concentração normalizada C_A/C_{AF} de uma espécie A,

$x_2(t)$: concentração normalizada C_B/C_{AF} de uma espécie B,

$x_3(t)$: concentração normalizada C_C/C_{AF} de uma espécie C,

C_{AF} : regime estacionário da espécie A (mol.m^{-1}),

$u(t)$: sinal de controle,

D_{a_1}, D_{a_2} e D_{a_3} : parâmetros, $D_{a_1}=3.0$; $D_{a_2}=0.5$; $D_{a_3}=1.0$. (4.113a)

O sistema (4.110) – (4.112) possui o seguinte ponto de equilíbrio (x_e, u_e) :

$$x_e = [0.3467 \quad 0.8796 \quad 0.7737], \quad (4.113b)$$

$$u_e(t) = 1. \quad (4.113c)$$

Deseja-se projetar um controlador de modo que a saída atinja e se mantenha no valor $r_0 = 0.7737$ e que:

$$0.25 \leq x_1(t) \leq 0.4; \quad 0.8 \leq x_2(t) \leq 1.1; \quad 0.5 \leq x_3(t) \leq 0.8. \quad (4.113c)$$

A seguir, o sistema (4.110) – (4.113) será descrito em outras coordenadas de maneira que possa ser representado por um modelo fuzzy T-S generalizado.

Defina:

$$\tilde{x}_2(t) = x_2^2(t), \quad (4.114)$$

$$u_N(t) = u(t) - x_2(t). \quad (4.115)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2(t) &= 2x_2(t)\dot{x}_2(t) \\ &= 2x_2(t) [D_{a_1}x_1(t) - x_2(t) - (D_{a_2} + D_{a_3})x_2^2(t) + u(t)] \\ &= 2x_2(t) [D_{a_1}x_1(t) - (D_{a_2} + D_{a_3})\tilde{x}_2(t) + u_N(t)]. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Dessa forma de (4.114) – (4.115), o sistema (4.110) – (4.113) pode ser representado por:

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = 1 - (1 + D_{a_1})x_1(t) + D_{a_2}\tilde{x}_2(t), \quad (4.117)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = 2D_{a_1}x_1(t)\sqrt{\tilde{x}_2(t)} - 2x_2(t)(D_{a_2} + D_{a_3})\tilde{x}_2(t) + 2\sqrt{\tilde{x}_2(t)}u_N(t), \quad (4.118)$$

$$\dot{x}_3(t) = D_{a_3}\tilde{x}_2(t) - x_3(t), \quad (4.119)$$

$$y(t) = x_3(t). \quad (4.120)$$

Considerando,

$$\Delta x_1(t) = x_1(t) - 0.25 \text{ e } \Delta u_N(t) = D_{a_1} 0.25 + u_N(t), \quad (4.121)$$

tem-se de (4.99):

$$\Delta \dot{x}_1(t) = -(1 + D_{a_1}) \Delta x_1(t) + D_{a_2} \tilde{x}_2(t). \quad (4.122)$$

Finalmente o sistema não linear (4.110) – (4.113) nas variáveis $\Delta x_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)$ e $x_3(t)$ se descreve como:

$$\Delta \dot{x}_1(t) = -(1 + D_{a_1}) \Delta x_1(t) + D_{a_2} \tilde{x}_2(t) \quad (4.123)$$

$$\ddot{\tilde{x}}_2(t) = 2 D_{a_1} \sqrt{\tilde{x}_2(t)} \Delta x_1(t) - 2 \sqrt{\tilde{x}_2(t)} (D_{a_2} + D_{a_3}) \tilde{x}_2(t) + 2 \sqrt{\tilde{x}_2(t)} \Delta u_N(t), \quad (4.124)$$

$$\dot{x}_3(t) = D_{a_3} \tilde{x}_2(t) - x_3(t), \quad (4.125)$$

$$y(t) = x_3(t). \quad (4.126)$$

De (4.123) – (4.125) e considerando os valores adotados dos parâmetros D_{a_1} , D_{a_2} e D_{a_3} em (4.113a), temos:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1(t) \\ \ddot{\tilde{x}}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0.5 & 0 \\ 6\sqrt{\tilde{x}_2(t)} & -3\sqrt{\tilde{x}_2(t)} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{\tilde{x}_2(t)} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u_N(t) \quad (4.127)$$

Das equações (4.114)–(4.115), (4.121), (4.113a)–(4.113b) e definindo-se $\Delta_p \mathbf{x}(t) = [\Delta x_1(t) \quad \tilde{x}_2(t) \quad x_3(t)]$, obtém-se que $(\Delta_p \mathbf{x}(t), \Delta u_N) = (\Delta_p \mathbf{x}_e, \Delta u_e)$ é ponto de equilíbrio do sistema não-linear (4.127), sendo:

$$\Delta_p \mathbf{x}_e = [0.096 \quad 0.7737 \quad 0.7737], \quad (4.128)$$

$$\Delta u_e = 0.8704. \quad (4.129)$$

O sistema descrito pela equação (4.127) possui uma única função não-linear:

$$\tilde{f}(\Delta_p \mathbf{x}(t)) = \sqrt{\tilde{x}_2(t)}. \quad (4.130)$$

De (4.113a), (4.113c), (4.114), (4.115) e (4.121) tem-se:

$$0 \leq \Delta x_1(t) \leq 0.15; \quad 0.64 \leq \tilde{x}_2(t) \leq 1.21; \quad 0.5 \leq x_3(t) \leq 0.8. \quad (4.131)$$

Para construir um modelo fuzzy T-S generalizado T-S (Taniguchi et al., 2001), é necessário determinar os valores máximo e mínimo da função $\tilde{f}(\Delta_p \mathbf{x}(t))$ no conjunto considerado na equação (4.131):

$$D = \{(\Delta x_1(t), \tilde{x}_2(t), x_3(t)): 0 \leq \Delta x_1(t) \leq 0.15; 0.64 \leq \tilde{x}_2(t) \leq 1.21; 0.5 \leq x_3(t) \leq 0.8\}.$$

Agora,

$$a_1 = \max_D \tilde{f}(\Delta_p \mathbf{x}(t)) = 1.1,$$

$$a_2 = \min_D \tilde{f}(\Delta_p \mathbf{x}(t)) = 0.8.$$

Segundo o método proposto por Taniguchi et al (2001), a função não-linear $\tilde{f}(\Delta_p \mathbf{x}(t))$ pode ser representada, de forma exata, por um modelo fuzzy TS considerando dois modelos locais: a_1 e a_2 , ou sejam existem $\alpha_1(\Delta_p \mathbf{x}(t))$ e $\alpha_2(\Delta_p \mathbf{x}(t))$ tais que:

$$\tilde{f}(\Delta_p \mathbf{x}(t)) = \alpha_1(\Delta_p \mathbf{x}(t))a_1 + \alpha_2(\Delta_p \mathbf{x}(t))a_2, \quad (4.132)$$

sendo

$$0 \leq \alpha_1(\Delta_p \mathbf{x}(t)); \alpha_2(\Delta_p \mathbf{x}(t)) \leq 1,$$

$$\alpha_1(\Delta_p \mathbf{x}(t)) + \alpha_2(\Delta_p \mathbf{x}(t)) = 1,$$

$$\alpha_1(\Delta_p \mathbf{x}(t)) = \frac{\tilde{f}(\Delta_p \mathbf{x}(t)) - a_2}{a_1 - a_2}.$$

De (4.130) e substituindo (4.132) em (4.127) resulta:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \alpha_1(\Delta_p \mathbf{x}(t)) \left(\begin{bmatrix} -4 & 0.5 & 0 \\ 6a_1 & -3a_1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2a_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u_N(t) \right) \\ &+ \alpha_2(\Delta_p \mathbf{x}(t)) \left(\begin{bmatrix} -4 & 0.5 & 0 \\ 6a_2 & -3a_2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u_N(t) \right). \end{aligned}$$

Logo, pode-se obter uma representação exata do sistema (4.127) com os modelos fuzzy TS:

$$\Delta_p \dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i (\Delta_p \mathbf{x}(t) A_i) \right) \Delta \mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i (\Delta_p \mathbf{x}(t) B_i) \Delta u_N(t) \right)$$

sendo

$$\Delta_p \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix};$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0.5 & 0 \\ 6.6 & -3.3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0.5 & 0 \\ 4.8 & -2.4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para o projeto do controlador de modo que a saída se mantenha no valor $r_0 = 0.7737$ é considerado o sistema aumentado:

$$\begin{cases} \Delta_p \dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i (\Delta_p \mathbf{x}(t) A_i) \right) \Delta_p \mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i (\Delta_p \mathbf{x}(t) B_i) \right) \Delta_p u_N(t), & (4.133) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = r_0 - C \Delta_p \mathbf{x}(t), & (4.134) \end{cases}$$

sendo

$$C = [0 \quad 0 \quad 1]; \alpha_i(\Delta_p \mathbf{x}(t)) \in [0, 1], \quad i=1, 2; \quad \sum_{i=1}^2 \alpha_i(\Delta_p \mathbf{x}(t)) = 1.$$

Assim, o sistema aumentado pode ser representado por:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i (\Delta_p \mathbf{x}(t) \bar{A}_i) \right) \Delta \mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i (\Delta_p \mathbf{x}(t) \bar{B}_i) u_N(t) \right) u_N(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_0,$$

sendo

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \Delta_p \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}; \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As hipóteses do Lema 4.3 estão satisfeitas para o sistema (4.123)–(4.126) pois considerando D dado pela equação (4.131), para $\Delta_p \mathbf{x} \in D$ existe um único par $(\mathbf{x}_{ss}, u_{ss})$ tal que:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}_{ss}, u_{ss}) = 0, \\ r_0 - C\mathbf{x}_{ss} = 0, \end{cases}$$

sendo

$$\mathbf{x}_{ss} = \Delta_p \mathbf{x}_e = [0.0967 \quad 0.7737 \quad 0.7737]^T,$$

$$u_{ss} = \Delta u_e(t) = 0.8704.$$

Além disso, o ponto de equilíbrio $\Delta \mathbf{x}_e = (\Delta \bar{\mathbf{x}}, \bar{\xi})$ com $\Delta \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{ss}$ para o sistema aumentado (4.133)–(4.134) verifica:

$$A_i \Delta \bar{\mathbf{x}} + B_i u_{ss} = 0, \quad i=1, 2.$$

Assim, a dinâmica do erro do sistema aumentado é dada por:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(\sum_{i=1}^2 \beta_i(\varepsilon(t)) \bar{A}_i \right) \varepsilon(t) + \left(\sum_{i=1}^2 \beta_i(\varepsilon(t)) \bar{B}_i \right) u_e(t),$$

com $\beta_i(\varepsilon(t)) \geq 0$, $\beta_i(\varepsilon(t)) = \alpha(\varepsilon(t) + \Delta \mathbf{x}_e)$, $i=1, 2$, e $\sum_{i=1}^2 \beta_i(\varepsilon(t)) = 1$.

Portanto, pelo Teorema 4.4, a solução do Problema 4.1 pode ser formulado da seguinte forma:

Minimize λ e encontre $X_{11} = X_{11}^T$, X_{12} , $X_{22} = X_{22}^T$, M_1 , M_2 , ξ_ℓ sujeito a (4.69), (4.70), (4.71) e (4.72), sendo $\mathbf{x}_0 = [-0.0967 \quad -0.1337 \quad -0.2737]^T$, pois foi considerado $\Delta_p \mathbf{x}(0) = [0 \quad 0.64 \quad 0.5]^T$ e $r_0 = 0.7737$.

O software *LMISol* forneceu λ_1 , ξ_ℓ e as matrizes X_{11} , X_{12} , X_{22} , M_1 , M_2 que solucionam as LMIs citadas.

A solução obtida foi :

$$\hat{K}_1 = M_1 X^{-1} = [13.0434 \quad 2.1530 \quad 2.0127 \quad -0.6571];$$

$$\hat{K}_2 = M_2 X^{-1} = [16.2062 \quad 2.9816 \quad 2.5210 \quad -0.8167];$$

$$P = \begin{bmatrix} 14.6012 & 0.7813 & -0.0419 & -0.0156 \\ 0.7813 & 0.4543 & 0.2363 & -0.0801 \\ -0.00419 & 0.2363 & 1.1049 & -0.3159 \\ -0.0156 & -0.0801 & -0.3159 & 0.3361 \end{bmatrix};$$

$$\lambda = 30.8353 \quad ; \quad \xi_t = -0.2705.$$

Assim,

$$K_1 = [13.0434 \quad 2.1530 \quad 2.0127]; \quad K_1^1 = 0.6571;$$

$$K_2 = [16.2062 \quad 2.9816 \quad 2.5210]; \quad K_1^2 = 0.8167.$$

Portanto, como neste caso:

$$\alpha_1(\Delta \bar{x}) = 0.2583 \quad ; \quad \alpha_2(\Delta \bar{x}) = 0.7417,$$

da equação (4.36) tem-se $\bar{\xi} = 8.1871$.

Logo, considerando $\xi(0^-) = 0$, obtém-se de (4.73) o valor da atualização ótima no integrador:

$$\xi_{t_0} = \xi_t + \bar{\xi}(\infty) - \xi(0^-) = -0.2705 + 8.1871 - 0 = 7.9166.$$

A seguir, apresenta-se nas Figuras 4.13 e 4.14, respectivamente a saída, $y(t)$, e a lei de controle, $u(t)$ do sistema realimentado com atualização das condições iniciais no controlador. Também, é mostrado na Figura 4.15 os outros estados do sistema quando este é submetido a uma entrada de grau de amplitude r_0 . Dessa figura pode ser visto que os estados permanecem dentro dos intervalos considerados para o modelo fuzzy T-S generalizado do sistema não-linear descrito pelas equações (4.92)-(4.95).

Nas simulações as matrizes Q e R que aparecem em LMIs (4.79) e (4.72) foram adotadas como sendo:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.01 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = 0.01.$$

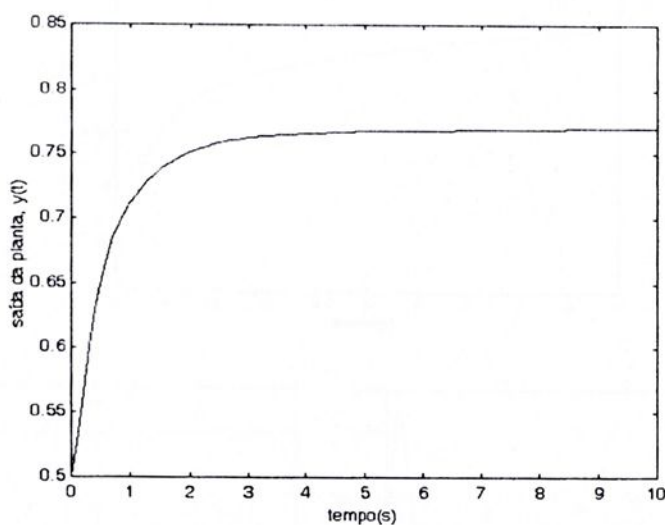


Figura 4.13: Curva de resposta ao degrau de amplitude $r_0 = 0.7737$ do sistema em um RA com atualização ótima das condições iniciais.

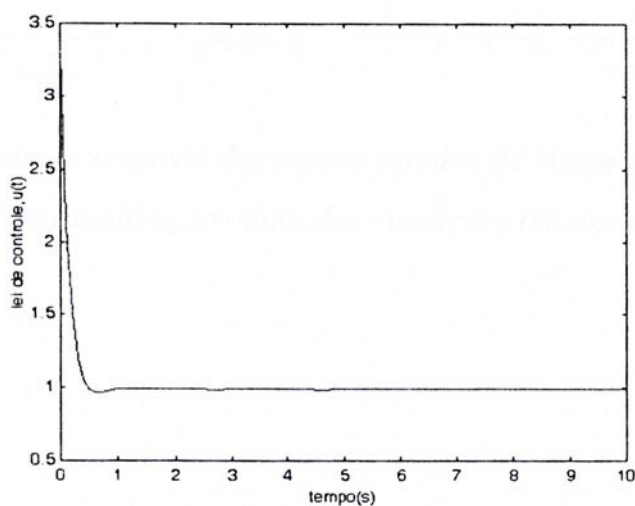


Figura 4.14: Curva de controle ao degrau de amplitude $r_0 = 0.7737$ do sistema em um RA com atualização ótima das condições iniciais.

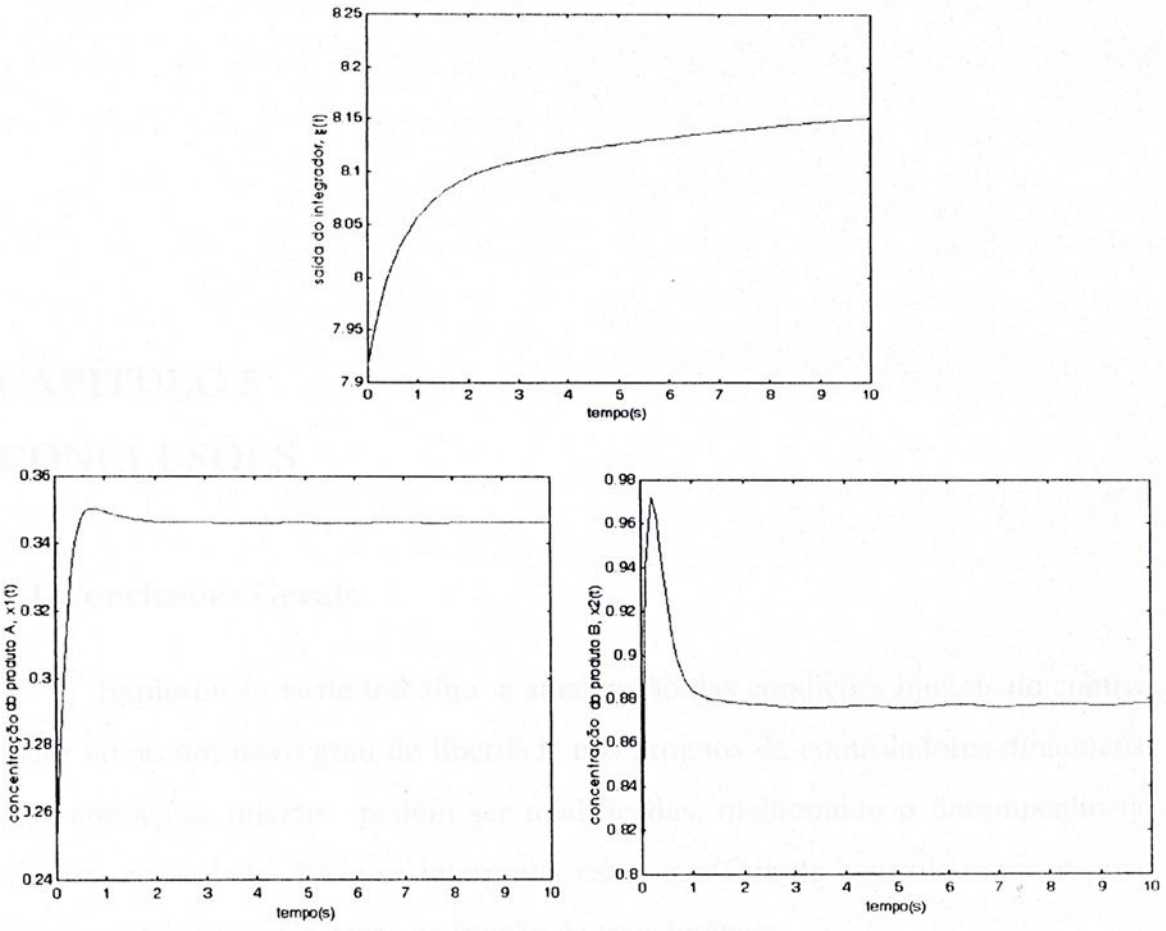


Figura 4.15: Curvas de resposta dos outros estados do sistema projetado em um RA com atualização ótima das condições iniciais do controlador.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

5.1 Conclusões Gerais

Explorou-se neste trabalho a atualização das condições iniciais do controlador como um novo grau de liberdade nos projetos de controladores dinâmicos. As condições iniciais podem ser modificadas, melhorando o desempenho do sistema controlado. Pode-se interpretar esta estratégia de controle como o posicionamento ótimo dos zeros da função de transferência.

Procurou-se clarificar de forma precisa as bases da atualização das condições iniciais de controladores dinâmicos, para sistema lineares no tempo, o que pode motivar o uso desta técnica pouco conhecida no Brasil.

Uma das contribuições desta tese é oferecer um procedimento metódico para o projeto de sistemas contínuos e discretos no tempo, com atualização das condições iniciais de modo a minimizar um índice de desempenho quadrático que permite adicionalmente o rastreamento de sinais de referência não nulos, no caso, do tipo degrau. Também é proposto um método de atualização ótima das condições iniciais do sistema controlador/observador, quando não é possível medir todos os estados do sistema.

Para sistema lineares contínuos no tempo é apresentado um novo método alternativo para atualização das condições iniciais no controlador, no caso considerado do tipo integral, baseado em LMIs, incluindo incertezas politópicas nas condições iniciais da planta. A vantagem desse método é que outras restrições



no projeto podem ser facilmente incorporadas por exemplo: incertezas politópicas nos parâmetros da planta, restrições na saída e restrições na entrada. Pelo nosso conhecimento, a atualização ótima das condições iniciais com o uso de LMIs ainda não havia sido feita.

Para sistemas discretos a atualização das condições iniciais no controlador também foi analisada e os resultados obtidos foram formalizados, incluindo o estudo realizado no intervalo de tempo finito $[0, N]$. Esta também é uma outra contribuição original desta tese.

Outra contribuição inédita é a abordagem do problema da atualização das condições iniciais em controladores dinâmicos quando a planta é não-linear. Utiliza-se os modelos fuzzy Takagi-Sugeno para modelar a planta. Para a resolução deste problema encontrou-se uma condição, dada pelo Lema 4.3, que permite o rastreamento da saída do sistema para uma entrada do tipo degrau. Esta condição envolve a descrição das dinâmicas locais do modelo Takagi-Sugeno que representam o sistema não-linear. Nos exemplos apresentados, foi possível durante a modelagem escolher uma realização fuzzy adequada de maneira que esta condição(equação (4.29) do Lema 4.3) fosse satisfeita. Os novos resultados obtidos são apresentados em termos de LMIs e como no caso linear, possibilitam a especificação de várias restrições no projeto, por exemplo, incertezas politópicas nos parâmetros da planta, restrições na saída e restrições na entrada. Pelo nosso conhecimento, a atualização ótima das condições iniciais para sistemas dinâmicos não-lineares diferentes daqueles com dois modos de operação lineares descritos em (Yamaguchi *et alii* (1996a; 1996b; 1997; 1998); Oboe *et alii* (2002); Hirata *et alii* (2003)), ainda não havia sido feita.

Os métodos propostos foram aplicados no controle ótimo de um pêndulo invertido, de um sistema bola-viga e de um processo químico. Incertezas nos parâmetros da planta também foram consideradas no projeto.

Exemplos mostram a eficácia da metodologia proposta.



5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Pesquisas futuras, relacionadas aos problemas abordados nesta tese, podem ser as seguintes:

- (i) Estudar as classes de sistemas não-lineares que podem ser realizadas com modelos fuzzy Takagi-Sugeno e satisfazendo a condição (4.29) do Lema 4.3;
- (ii) Aplicar os resultados no controle de sistemas dinâmicos (lineares ou não-lineares) reais;
- (iii) Explorar a técnica de atualização das condições iniciais em outras configurações de controle, por exemplo, no controle adaptativo ou com estrutura variável;
- (iv) Generalizar os resultados obtidos para o caso multivariável;
- (v) Considerar adicionalmente restrições no sinal de controle.
- (vi) Generalizar o caso não-linear para sistema discretos no tempo, sem e com observadores de estado.



APÊNDICE A

Lema 1:(Chen, 1999) Seja A uma matriz com todos os autovalores com parte real negativa. Então, para toda matriz real simétrica semidefinida positiva $Q = N^T N$ com a propriedade de que (A, N) é observável, a equação de Lyapunov

$$P A + A^T P = -Q, \quad (\text{A.1})$$

tem uma única solução P simétrica positiva definida.

Prova: Se A possui todos os autovalores com parte real negativa, então a integral

$$P = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt, \quad (\text{A.2})$$

converge e P está bem definida.

Observe que:

$$\begin{aligned} P A + A^T P &= \int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} A dt + \int_0^{+\infty} A^T e^{A^T t} Q e^{A t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{A t}) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{A^T b} Q e^{A b} - Q = -Q. \end{aligned}$$

Assim, P satisfaz a equação (A.1). Para mostrar a unicidade de P , suponha que exista P_a também solução de (A.1). Então,

$$(P_a - P)A + A^T(P_a - P) = 0.$$

Mas, isto implica que

$$e^{A^T t}(P_a - P)A e^{At} + e^{A^T t}A^T(P_a - P)e^{At} = 0, \quad t \geq 0.$$

Integrando ambos os lados no intervalo $[0, +\infty)$,

$$0 = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} [e^{A^T t}(P_a - P)e^{At}] dt = -(P_a - P).$$

Claramente, P é simétrica. Para mostrar que é definida positiva, note que, para todo vetor constante z , $n \times 1$, não nulo, definindo-se $v = e^{At} z$, observe que o integrando de $z^T P z$, de (A2), é dado por:

$$v^T Q v = v^T N^T N v = (N v)^T (N v)$$

e não se anula para $t \geq 0$, pois:

- $v(t) = e^{At} z \neq 0, \forall t \geq 0$ e
- se $v^T N^T N v = 0$, então $(N v)^T (N v) = 0$,

o que implica que $N v = 0$. Será mostrado por absurdo que tal situação nunca ocorrerá.

Diferenciando a equação obtida acima, tem-se:

$$\begin{aligned} N \frac{dv}{dt} = 0 &\Rightarrow N \frac{d}{dt}(e^{At} z) = N (A e^{At} z + e^{At} \dot{z}) \\ &= N (e^{At} A z + e^{At} 0) = N e^{At} A z = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$N A e^{At} z = 0 \Rightarrow N A v = 0.$$

Diferenciando esta última equação mais uma vez obtém-se:

$$N A \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow N A e^{At} A z = 0 \Rightarrow N A^2 v = 0.$$

Repetindo este processo de diferenciação, obtém-se:

$$N v = 0,$$

$$NAv = 0,$$

$$\vdots$$

$$N A^{n-1} v = 0.$$

Combinando as equações precedentes, obtém-se:.

$$[N^T \ A^T N^T \ (A^2)^T N^T \dots \ (A^{n-1})^T N^T]^T v = 0.$$

Agora, como (A, N) é observável,

$$\text{posto}[N^T \ A^T N^T \ (A^2)^T N^T \dots \ (A^{n-1})^T N^T]^T = n.$$

Logo, $v = 0$, o que é um absurdo. Assim, por contradição, o integrando é positivo para todo $t \geq 0$ e desta forma

$$z^T P z > 0, \quad \forall z \neq 0,$$

mostrando que P é definida positiva.

APÊNDICE B

Considere o sistema escalar linear invariante no tempo, controlável e observável:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{B.1}$$

sendo que, $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $u \in \mathbb{R}$ é a entrada de controle do sistema; $y \in \mathbb{R}$ é a saída do sistema; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz característica do sistema; $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é a matriz de entrada do sistema e $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ é a matriz de saída do sistema.

Teorema 1: (Rugh, 1996, pg.232) O sistema linear (B.1) é observável se e somente se

$$\text{posto} \begin{bmatrix} C \\ sI - A \end{bmatrix} = n, \tag{B.2}$$

para todo escalar complexo s , sendo I a matriz identidade de ordem n .

Lema 1: Sejam Q uma matriz de ordem n , real, simétrica e semidefinida positiva, A uma matriz de ordem n e o par $(A, \sqrt{Q})$ observável. Então, o par $((A - BK), \tilde{N})$ será observável, sendo: $\tilde{Q} = \tilde{N}^T \tilde{N}$ e $\tilde{Q} = Q + K^T R K$ com R uma matriz real simétrica definida positiva e $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ qualquer.

Prova: Como $(A, \sqrt{Q})$ é observável,

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ sI - A \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ K \\ sI - A \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2a})$$

para todo escalar complexo s , sendo I a matriz identidade de ordem n e $K \in \mathbb{R}^{l \times n}$ qualquer.

Tem-se :

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ K \\ sI - A \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ K \\ sI - (A - BK) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2b})$$

pois:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ K \\ sI - (A - BK) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ K \\ sI - A \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2c})$$

Agora, como $R > 0$, existe uma matriz não singular T tal que:

$$R = T^T T.$$

Sendo T não singular, tem-se :

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ K \\ sI - (A - BK) \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ TK \\ sI - (A - BK) \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\left((A - BK), \begin{pmatrix} \sqrt{Q} \\ TK \end{pmatrix} \right), \quad (\text{B.2d})$$

é observável.

Agora, como $R = T^T T$, então:

$$\begin{aligned} \tilde{Q} = (Q + K^T R K) &= \begin{bmatrix} \sqrt{Q} & K^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} & K^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ K \end{bmatrix} \\ &= \tilde{N}^T \tilde{N}, \end{aligned} \quad (\text{B.2e})$$

sendo

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ TK \end{bmatrix}.$$

De (B.2d) e (B.2e), tem-se que

$$((A - BK), \tilde{N})$$

é observável.

Lema 2: (Ogata, 1997, pg.909) Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (\text{B.3})$$

sendo que, $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz característica do sistema. Seja Q uma matriz de ordem n , real, simétrica e semidefinida positiva. Suponhamos que o par $(A, \sqrt{Q})$ é observável. Então, a função

$$V(x) = x^T Q x,$$

não se anula ao longo de qualquer trajetória $x = x(t)$, não nula, de (B.1).

Prova: Suponhamos que exista uma solução $x = x(t)$ de (B.1) tal que $V(x(t)) = 0$. Então,

$$V(x(t)) = x^T(t) \sqrt{Q} \sqrt{Q} x(t) = 0.$$

Logo,

$$\sqrt{Q} x(t) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Diferenciando (B.4) em relação a t e usando (B.3), tem-se:

$$\sqrt{Q} \dot{x}(t) = \sqrt{Q} A x(t) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Diferenciando, agora, (B.5) em relação a t , e utilizando a equação (B.3), obtém-se:

$$\sqrt{Q} A \dot{x}(t) = \sqrt{Q} A^2 x(t) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Repetindo esse processo, resulta:

$$\sqrt{Q} A^3 x(t) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{Q} A^{n-1} x(t) = 0.$$

Combinando essas equações, tem-se:



$$\begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{Q}A \\ \vdots \\ \sqrt{Q}A^{n-1} \end{bmatrix} x(t) = 0.$$

Como

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{Q}A \\ \vdots \\ \sqrt{Q}A^{n-1} \end{bmatrix} = n,$$

pois $(A, \sqrt{Q})$ é observável, então, $x = x(t) = 0$.

Lema 3: (Ogata, 1997, pg.951) Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\text{B.7})$$

sendo

$$u = g(x),$$

a lei de controle, sem restrições, e o índice de desempenho

$$J(u) = \int_0^{+\infty} L(x, u) dt. \quad (\text{B.8})$$

Suponhamos que a origem do sistema

$$\dot{x}(t) = f(x, g(x))$$

seja assintoticamente estável e seja $V(x)$ uma função de Lyapunov.

Uma condição suficiente para que u_1 seja a lei de controle ótimo, isto é, minimiza o índice J , é que u_1 minimiza $H(x, u)$, sendo

$$H(x, u) = \frac{dV}{dt} + L(x, u) \quad (\text{B.9a})$$

e

$$H(x, u_1) = 0,$$

ou seja

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{u=u_1} = -L(x, u_1). \quad (\text{B.9b})$$

Prova: Integrando ambos os membros da equação (B.9b), tem-se:

$$V(x(\infty)) - V(x(0)) = - \int_0^{+\infty} L(x(t), u_1(t)) dt . \quad (\text{B.10})$$

Como a origem do sistema é assintoticamente estável $x(\infty) = 0$ e $V(x(\infty)) = 0$.

Suponhamos por absurdo que $u_1(t)$, não seja ótimo e que o vetor de controle $u_2(t)$ forneça um valor menor de J . Então:

$$\int_0^{+\infty} L(x(t), u_2(t)) dt < \int_0^{+\infty} L(x(t), u_1(t)) dt . \quad (\text{B.11})$$

Como por hipótese $u_1(t)$, minimiza $H(x, u)$ e $H(x, u_1) = 0$, então:

$$H(x, u) \geq 0 ,$$

para todo u . Portanto,

$$H(x, u_2) = \left. \frac{dV}{dt} \right|_{u=u_2} + L(x, u_2) \geq 0 .$$

Integrando ambos os membros desta igualdade no intervalo $[0, \infty)$, obtém-se:

$$V(x(\infty)) - V(x(0)) \geq - \int_0^{+\infty} L(x, u_2) dt .$$

Como $x(\infty) = 0$ e $V(x(\infty)) = 0$,

$$V(x(0)) \leq \int_0^{+\infty} L(x, u_2) dt . \quad (\text{B.12})$$

Então, das equações (B.10) e (B.12)

$$\int_0^{+\infty} L(x(t), u_1(t)) dt \leq \int_0^{+\infty} L(x(t), u_2(t)) dt .$$

Isto contradiz (B.11).

Considere o sistema (B.1) com índice de desempenho dado por

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt . \quad (\text{B.13})$$

sendo que Q é uma matriz real simétrica definida positiva (ou semidefinida positiva) e R é uma matriz real simétrica definida positiva, ou $R = 0$. Admite-se que o vetor de controle $u(t)$ não esteja sujeito a restrições. O

problema do controle quadrático ótimo, consiste em determinar a matriz constante K do vetor de controle $u(t) = -Kx(t)$, de forma a minimizar o índice de desempenho J . O teorema seguinte fornece condições suficientes para existência e unicidade do vetor de controle ótimo.

Teorema 2 (Barnett, 1985, pg. 278) : Sejam Q uma matriz real simétrica definida positiva (ou semidefinida positiva) e R uma matriz real simétrica definida positiva. Suponhamos que (A, B) é controlável e $(A, \sqrt{Q})$ é observável, então a equação de Ricatti

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (\text{B.14a})$$

tem uma única solução P simétrica definida positiva tal que a matriz,

$$A - BR^{-1}B^T P, \quad (\text{B.14b})$$

apresenta todos autovalores com parte real negativa e a lei de realimentação

$$u(t) = -R^{-1}B^T Px(t),$$

torna o índice dado por (B.13) mínimo e igual a $x(0)^T P x(0)$.

Prova (Kailath, 1980, pg. 236)

(i) *Existência*:

Como (A, B) é controlável, existe K_1 tal que $A - BK_1$ é assintoticamente estável. Observe que, como $R > 0$, existe uma matriz não singular T tal que:

$$R = T^T T,$$

e

$$(Q + K_1^T R K_1) = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} & K_1^T \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ K_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} & K_1^T \\ 0 & T^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ K_1 \end{bmatrix}.$$

Como $(A, \sqrt{Q})$, é observável, então, pelas equações (B.2a)-(B.2c), tem-se que $\left((A - BK_1), \begin{pmatrix} \sqrt{Q} \\ K_1 \end{pmatrix} \right)$ é observável. Agora, como T é não singular, tem-se que

$\left((A - BK_1), \begin{pmatrix} \sqrt{Q} \\ TK_1 \end{pmatrix} \right)$ também é observável. Aplicando o Lema 1 do Apêndice A,

existe uma única matriz $P_1^T = P_1 > 0$ tal que :

$$(A - BK_1)^T P_1 + P_1(A - BK_1) = -(Q + K_1^T R K_1) \quad (\text{B.15})$$

Então, para

$$u_1(t) = -K_1 x(t),$$

tem-se por (B.15)

$$\begin{aligned} J(u_1) &= \int_0^{+\infty} x^T(t)(Q + K_1^T R K_1)x(t)dt = \int_0^{+\infty} x^T(t)((A - BK_1)^T P_1 + P_1(A - BK_1))x(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} (\dot{x}^T(t)P_1 + P_1\dot{x}(t))dt = - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(x^T(t)P_1x(t)) = \lim_{b \rightarrow +\infty} -x^T(t)P_1x(t)\Big|_0^b = x_0^T P_1 x_0, \end{aligned}$$

sendo,

$$x(0) = x_0.$$

Seja

$$K_2 = R^{-1}B^T P_1. \quad (\text{B.16})$$

Então,

$$(A - BK_2)^T P_1 + P_1(A - BK_2) = -(Q + K_2^T R K_2) - (TK_2 - TK_1)^T (TK_2 - TK_1), \quad (\text{B.17})$$

sendo que $R = T^T T$.

De fato,

$$(A - BK_2)^T P_1 + P_1(A - BK_2) = A^T P_1 + P_1 A - K_2^T B^T P_1 - P_1 B K_2. \quad (\text{B.18})$$

De (B.15), tem-se:

$$A^T P_1 + P_1 A = K_1^T B^T P_1 + P_1 B K_1 - (Q + K_1^T R K_1), \quad (\text{B.19})$$

que substituindo em (B.18) e considerando que $R = T^T T$, resulta em (B.17).

De (B.17), conclui-se que $(A - BK_2)$ é estável. Aplicando o Lema 1 do Apêndice A, seja P_2 a única solução $P_2^T = P_2 > 0$ de

$$(A - BK_2)^T P_2 + P_2(A - BK_2) = -(Q + K_2^T R K_2). \quad (\text{B.20})$$

Considerando agora,

$$u_2(t) = -K_2 x(t),$$

obtem-se que:

$$J(u_2) = - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_2 \mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}_2 \mathbf{x}_0.$$

De (B.17) e (B.20), tem-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_2)^T \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_2) - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_2)^T \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_2 (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_2) \\ = -(\mathbf{TK}_2 - \mathbf{TK}_1)^T (\mathbf{TK}_2 - \mathbf{TK}_1) \leq 0 \end{aligned}$$

e assim,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}(t)) \leq \frac{d}{dt} (\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}_2 \mathbf{x}(t)).$$

Integrando no intervalo $[0, +\infty)$ resulta em,

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{P}_2 \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_0.$$

Dessa forma, construímos uma seqüência de ganhos $\mathbf{K}_i = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}_{i-1}$ e uma seqüência de $\{\mathbf{x}_0^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_0\}$ decrescente e limitada pois $\mathbf{x}_0^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_0 > 0$, para $\mathbf{x}_0 \neq 0$. Esta seqüência tem limite $\mathbf{x}_0^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}_0$.

Como $\mathbf{x}_0$ é qualquer, tem-se:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}_i = \bar{\mathbf{P}}; \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{K}_i = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{K}}; \quad (\text{B.21})$$

e da igualdade,

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_i)^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_i) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}_i^T \mathbf{R} \mathbf{K}_i) \quad (\text{B.22})$$

conclui-se que

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B} \bar{\mathbf{K}})^T \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \bar{\mathbf{K}}) = -(\mathbf{Q} + \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}). \quad (\text{B.23})$$

Logo, o sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{x}(t)$ é estável, pois

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}(t)$$

é uma função de Lyapunov para o sistema. Como $\bar{\mathbf{P}}$ satisfaz (B.23), então $\bar{\mathbf{P}} > 0$.

Substituindo $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} \bar{\mathbf{P}}$ em (B.23), tem-se:

$$\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A} - \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = 0,$$

ou seja $\bar{\mathbf{P}} > 0$ é solução da equação de Riccati e

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B} \bar{\mathbf{K}}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}})$$

apresenta todos os autovalores com parte real negativa.

(ii) *Relação entre K e P para garantir J mínimo:*

Pelo Lema 3, a condição suficiente para que $u_1(t) = -Kx(t)$, estabiliza o sistema

$$\dot{x}(t) = A x(t) + Bu(t),$$

e minimiza J é que $u_1(t) = -Kx(t)$, minimiza

$$H(x, u) = \frac{dV}{dt} + x^T(t)(Q + K^T R K)x(t)$$

e
$$H(x, u_1) = 0,$$

sendo

$$V(x) = x^T P x,$$

com $P > 0$, uma solução de

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K). \quad (B.24)$$

Agora,

$$H(x, u) = x^T(t)(A - BK)^T P x(t) + x^T(t)P(A - BK)x(t) + x^T(t)(Q + K^T R K)x(t). \quad (B.25)$$

Logo, como $R = T^T T$, (B.25) pode ser escrita como:

$$H(x, u) = x^T(t) \left(A^T P + PA + [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - PBR^{-1} B^T P + Q \right) x(t).$$

A minimização de $H(x, u)$ com respeito a K requer a minimização de

$$x^T(t) [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] x(t)$$

com relação a K . Como a última expressão é não-negativa, o mínimo ocorre quando a mesma for zero, ou seja quando

$$TK = (T^T)^{-1} B^T P.$$

Por conseguinte,

$$K = T^{-1} (T^T)^{-1} B^T P = R^{-1} B^T P,$$

onde P é uma solução de (B.24). Agora como $H(x, u_1) = 0$, então, de (B.25) e

$$K = R^{-1} B^T P,$$

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + PBRB^T P + Q = 0$$

Portanto, a lei ótima para o problema do sistema de controle quadrático ótimo, quando o índice de desempenho é dado por (B.13), é linear e é dada por

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1} B^T P x(t). \quad (B.26)$$

A matriz P na equação (B.26) precisa satisfazer (B.24) ou a equação de Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

(iii) *Unicidade:*

Suponhamos que existam duas soluções P_1 e P_2 da equação de Riccati.

Então:

$$A^T P_1 + P_1 A - P_1 B R^{-1} B^T P_1 + Q = 0;$$

$$A^T P_2 + P_2 A - P_2 B R^{-1} B^T P_2 + Q = 0.$$

Essas equações podem ser reescritas por:

$$(A - B \overline{K}_1)^T \overline{P}_1 + \overline{P}_1 (A - B \overline{K}_1) = -(Q + \overline{K}_1^T R \overline{K}_1); \quad \overline{K}_1 = R^{-1} B^T \overline{P}_1$$

$$(A - B \overline{K}_2)^T \overline{P}_2 + \overline{P}_2 (A - B \overline{K}_2) = -(Q + \overline{K}_2^T R \overline{K}_2); \quad \overline{K}_2 = R^{-1} B^T \overline{P}_2$$

Dessa forma tem-se:

$$J(u_1) = - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (x^T(t) \overline{P}_1 x(t)) = x_0^T \overline{P}_1 x_0;$$

$$J(u_2) = - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (x^T(t) \overline{P}_2 x(t)) = x_0^T \overline{P}_2 x_0.$$

Portanto,

$$x_0^T \overline{P}_1 x_0 = x_0^T \overline{P}_2 x_0,$$

para todo x_0 . Assim, $\overline{P}_1 = \overline{P}_2$.



APÊNDICE C

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{C1}$$

sendo que, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é a entrada de controle do sistema; $y \in \mathbb{R}$ é a saída do sistema; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz característica do sistema; $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é a matriz de entrada do sistema e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ é a matriz de saída do sistema e

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)\tag{C2}$$

a lei de controle, sem restrições, e o índice de desempenho

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + u(t)^T \mathbf{R}u(t)) dt\tag{C3}$$

sendo que $\mathbf{Q}$ é uma matriz simétrica definida positiva (ou semidefinida) e $\mathbf{R}$ é uma matriz simétrica definida positiva.

Suponha que, $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ seja controlável e $(\mathbf{A}, \sqrt{\mathbf{Q}})$ seja observável.

Lema : Nas condições anteriores, se $\mathbf{K}$ é ótimo, ou seja $\mathbf{u}_1(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ minimiza o índice J , então a matriz definida positiva $\mathbf{P}_L = \mathbf{P}_L^T$ que é solução da equação Lyapunov:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_L (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K})\tag{C4}$$

também é a solução da equação de Riccati:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}.\tag{C5}$$

Prova: Pelo Teorema 2.1 o ganho ótimo é dado por $K = R^{-1}B^T P$, sendo $P = P^T$ a matriz definida positiva solução da equação (C5).

Assim, (C5) pode ser reescrita por :

$$A^T P + PA - K^T B^T P + Q = 0. \quad (C6)$$

Somando-se $-PBK + PBK$ em (C6), tem-se

$$A^T P + PA - K^T B^T P - PBK + PBK + Q = 0,$$

equivalentemente,

$$A^T P + PA - K^T B^T P - PBK + K^T R K + Q = 0 \quad (C7)$$

pois,

$$K^T R K = PBK = PBR^{-1}B^T P.$$

Pode-se escrever (C7) na forma:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K).$$

Logo, P é solução da equação (C4). Agora, como por hipótese $(A, \sqrt{Q})$ é observável e pelo Lema 1 do Apêndice B, $(A - BK, \tilde{N})$ é observável sendo $(Q + K^T R K) = \tilde{N}^T \tilde{N}$. Assim, pelo Lema 1 do Apêndice A, existe uma única $P_L^T = P > 0$ que satisfaz (C4). Logo, tem-se que $P_L = P$.

APÊNDICE D

Especificação das matrizes A_c e B_c no Projeto do Controlador

Considera-se uma classe de sistemas como mostrado na Figura 2.11, sendo que a planta e o controlador a ser projetado, apresentam as equações como em (2.4a) e (2.4b) respectivamente.

As matrizes A_c e B_c podem ser escolhidas de forma que $(\bar{A}, \bar{B})$ seja controlável, sendo

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, dada a planta controlável e observável, escolha matrizes A_c e B_c de modo que o sistema (A_c, B_c, C_c) , satisfaça as seguintes condições: i) controlabilidade; ii) não apresente cancelamento entre os seus pólos e os zeros de (A_p, B_p, C_p) . De fato, considere agora o sistema $(\bar{A}, \bar{B}, \tilde{C})$, sendo $\tilde{C} = [0_{1 \times n} \quad C_c]$. Ele pode ser visto como uma associação em série dos sistemas (A_p, B_p, C_p) $(A_c, -B_c, C_c)$, que são controláveis. Dessa forma nas condições anteriores, $(\bar{A}, \bar{B}, \tilde{C})$ é controlável (Kailath, 1980, pg. 156).



APÊNDICE E

Considere um sistema de controle linear discreto no tempo dado por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (\text{E.1a})$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c} \quad (\text{E.1b})$$

que é suposto ser controlável sendo que $\mathbf{x}(k)$ é o vetor de estado *de* dimensão n , $\mathbf{u}(k)$ é o vetor de controle de dimensão r , $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ são matrizes dadas com $\mathbf{G}$ matriz não singular.

Considere também para o sistema (E.1a) e (E.1b) o seguinte índice de desempenho,

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)), \quad (\text{E.2})$$

sendo que $\mathbf{Q}$ é uma matriz real simétrica definida positiva (ou semidefinida positiva) e $\mathbf{R}$ é uma matriz real simétrica definida positiva.

O seguinte teorema resolve o problema de controle quadrático ótimo discreto no intervalo $[0, N]$.

Teorema : (Franklin, 1997, pg. 365) A lei de controle ótimo para o sistema (E.1a), (E.1b) com índice quadrático (E.2) é :

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)$$

sendo que a $\mathbf{K}(k)$ é a matriz de retroação $m \times n$:

$$\mathbf{K}(k) = [\mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{G} \quad (\text{E.3})$$

e $\mathbf{P}(k)$ é a solução da equação de Riccati

$$P(k) = Q + G^T P(k+1) G - G^T P(k+1) H [R + H^T P(k+1) H]^{-1} H^T P(k+1) G,$$

determinada recursivamente, com condição final

$$P(N) = Q.$$

Além disso, o valor mínimo do índice de desempenho é

$$J = \frac{1}{2} x^T(0) P(0) x(0).$$

Prova: O índice J a ser minimizado é dado por (E.2):

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)),$$

sujeito a restrição especificada na equação (E.1a):

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k).$$

Esse problema de minimização com restrição será resolvido usando o método dos multiplicadores de Lagrange. Para cada k , existirá um vetor, denotado por $\lambda(k+1)$. Define-se um novo índice de desempenho L como sendo,

$$L = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2} [(x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)) + \lambda^T(k+1) (x(k+1) - Gx(k) + Hu(k))], \quad (E.3)$$

e encontra-se o mínimo de L com respeito a $x(k)$, $u(k)$, e $\lambda(k)$. Note que para um controle ótimo que obedece a equação (E1.a), os índices de desempenho J e L são iguais em valor.

A condição necessária para a minimização de L é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial u(k)} = u^T(k) R + \lambda^T(k+1) H = 0 \end{array} \right. \quad (E.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda(k+1)} = -x(k+1) + Gx(k) + Hu(k) = 0 \end{array} \right. \quad (E.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x(k)} = x^T(k) Q - \lambda^T(k) + \lambda^T(k+1) G = 0 \end{array} \right. \quad (E.6)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, N$.

O conjunto de equações dado por (E.6) e (E.4) podem ser reescritas por :

$$\lambda(k) = G^T \lambda(k+1) + Qx(k), \quad (E.7)$$

$$u(k) = -R^{-1} H^T \lambda(k+1). \quad (E.8)$$

De (E.7), tem-se:



$$\lambda(k+1) = (G^T)^{-1} \lambda(k) - (G^T)^{-1} Qx(k), \quad (E.9)$$

e de (E.5), obtém-se:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \quad (E.10)$$

que é a equação (E.1a).

Assim, as equações (E.10), (E.8) e (E.9) ou (E.7) acopladas são as equações de diferenças, definindo solução ótima de $x(k)$, $\lambda(k)$, $u(k)$ contanto que a condição inicial (ou final) sejam conhecidas. A condição inicial sobre $x(k)$ é dada, mas $\lambda(0)$ não é conhecida.

Da equação (E.2), vemos que como $R > 0$, para minimizar J , $u(N)$ deve ser tão pequeno quanto possível e da equação (E.5) $u(N)$ não tem efeito sobre $x(N)$. Assim, a equação (E.4) sugere que :

$$\lambda(N+1) = 0 \quad (E.11)$$

e a equação (E.6) mostra que a condição de fronteira adequada é :

$$\lambda(N) = Qx(N). \quad (E.12)$$

Assim, a solução do problema de controle ótimo deve satisfazer as equações de diferença (E.10) e (E.7), ou seja :

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ \lambda(k) = G^T \lambda(k+1) + Qx(k), \end{cases} \quad (E.13a)$$

$$(E.13b)$$

com $u(k)$ dado por (E.8). A condição final sobre λ é dado pela equação (E.12).

Suponhamos que $\lambda(k)$ possa ser escrito sob a forma :

$$\lambda(k) = P(k)x(k) \quad (E.14)$$

sendo $P(k)$ uma matriz simétrica real, $n \times n$. Substituindo (E.14) e (E.13a) em (E.4), tem-se:

$$Ru(k) = -H^T \lambda(k+1) = -H^T P(k+1)x(k+1) = -H^T P(k+1)(Gx(k) + Hu(k)). \quad (E.15)$$

Resolvendo para $u(k)$, obtém-se:

$$u(k) = -[R + H^T P(k+1)H]^{-1} H^T P(k+1)Gx(k). \quad (E.16)$$

Seja

$$S = [R + H^T P(k+1)H].$$

Para $P(k+1)$ pelo menos semidefinida positiva, tem-se que S é inversível e a equação (E.16), torna-se:

$$u(k) = -S^{-1}H^T P(k+1)Gx(k). \quad (E.17)$$

Substituindo, agora, (E.14) em (E.7), elimina-se λ :

$$P(k)x(k) = G^T P(k+1)x(k+1) + Qx(k). \quad (E.18)$$

Substituindo (E.5) em (E.18), resulta:

$$P(k)x(k) = G^T P(k+1)[Gx(k) + Hu(k)] + Qx(k). \quad (E.19)$$

Usando (E.17) em (E.19), obtém-se:

$$P(k)x(k) = G^T P(k+1)[Gx(k) - HS^{-1}H^T P(k+1)Gx(k)] + Qx(k). \quad (E.20)$$

Rearranjando, os termos da equação (E.20):

$$[P(k) - G^T P(k+1)G + G^T P(k+1)HS^{-1}H^T P(k+1)G - Q]x(k) = 0 \quad (E.21)$$

Como (E.21) deve ser verdadeiro para todo $x(k)$ então, a matriz coeficiente deve ser identicamente nula. Disso resulta uma equação de diferenças descrevendo a solução de $P(k)$,

$$P(k) = G^T [P(k+1) - P(k+1)HS^{-1}H^T P(k+1)]G + Q, \quad (E.22)$$

a qual pode ser escrita como:

$$P(k) = G^T M(k+1)G + Q, \quad (E.23)$$

sendo

$$M(k+1) = P(k+1) - P(k+1)H[R + H^T P(k+1)H]^{-1} H^T P(k+1). \quad (E.24)$$

Dessa forma, a solução do problema é descrita por meio das relações recursivas (E.23) e (E.24) com uma condição de fronteira simples obtida a partir das equações (E.12) e (E.14), ou seja:

$$P(N) = Q \quad (E.25)$$

Por conseguinte, a equação (E.24), pode ser resolvida unicamente caminhando-se para trás, variando k de $N-1$ até 0. Isto é, pode se obter $M(N)$, $M(N-1)$, ..., $M(1)$, começando com $M(N)$ pois $P(N)$ é conhecido. Disso, resulta a determinação recursiva de $P(N-1)$, ..., $P(0)$, a partir da equação (E.23).

Para obter, $u(k)$, utiliza-se a equação (E.16), obtendo-se:



$$u(k) = -K(k)x(k),$$

sendo que:

$$K(k) = [R + H^T P(k+1)H]^{-1} H^T P(k+1)G \quad (\text{E.26})$$

com $P(k)$ dada por (E.22).

Avalia-se, em seguida, o valor mínimo do índice desempenho, J em termos de λ e P . Se substituirmos $\lambda^T(k+1)H$ e $\lambda^T(k+1)G$ dadas em (E.4) e (E.6), respectivamente, na equação (E.3), temos :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) - \lambda^T(k+1)x(k+1) \\ &\quad + (\lambda^T(k) - x^T(k)Q)x(k) + (-u^T(k)Ru(k))] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [\lambda^T(k)x(k) - \lambda^T(k+1)x(k+1)] \\ &= \frac{1}{2} \lambda^T(0)x(0) - \frac{1}{2} \lambda^T(N+1)x(N+1). \end{aligned}$$

Pela equação (E.11), tem-se:

$$\lambda^T(N+1) = 0.$$

De (E.14), resulta:

$$J = \frac{1}{2} x^T(0)P(0)x(0).$$

APÊNDICE F

Lema : (Chen (1999), pág.135) Seja G uma matriz com todos os autovalores com norma menor que 1. Então, para toda matriz real simétrica semidefinida positiva $Q = N^T N$ com a propriedade que (G, N) é observável, a equação de Lyapunov discreta

$$G^T P G - P = -Q, \quad (F.1)$$

tem uma única solução P simétrica definida positiva dada por:

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} (G^T)^k Q G^k. \quad (F.2)$$

Prova: Como G possui todos os autovalores com norma menor que 1, isso implica em estabilidade exponencial (Rugh (1996), pg.429) , isto é, existe $\gamma > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que:

$$\|G^k\| = \|(G^T)^k\| \leq \gamma \lambda^k, \quad k \geq 0.$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|(G^T)^k Q G^k\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \|(G^T)^k\| \|Q\| \|G^k\|$$

$$\leq \|Q\| \gamma^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{2k}$$

$$= \|Q\| \frac{\gamma^2}{1-\lambda^2}.$$

Assim, a série dada em (F.2) é absolutamente convergente, portanto convergente.

Dessa forma, a matriz P dada em (F.2) está bem definida.

Para verificar que P é solução de (F.1), note:

$$\begin{aligned} G^T P G - P &= G^T \sum_{k=0}^{+\infty} (G^T)^k Q G^k G - \sum_{k=0}^{+\infty} (G^T)^k Q G^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (G^T)^{k+1} Q G^{k+1} - \sum_{k=0}^{+\infty} (G^T)^k Q G^k \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} (G^T)^j Q G^j - \sum_{k=1}^{+\infty} (G^T)^k Q G^k - Q \\ &= -Q. \end{aligned}$$

Agora, para mostrar a unicidade de P , suponha que exista P_a , também solução de (F.1). Então

$$G^T P G - P = -Q,$$

e

$$G^T P_a G - P_a = -Q,$$

isso implica que

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{+\infty} (G^T)^k Q G^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (G^T)^k (P_a - G^T P_a G) G^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (G^T)^k P_a G^k + \sum_{k=0}^{+\infty} -(G^T)^{k+1} P_a G^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (G^T)^k P_a G^k + \sum_{j=1}^{+\infty} -(G^T)^j P_a G^j = P_a, \end{aligned}$$

isto é, qualquer solução de (F.1) é igual a P dada por (F.2).

Observe que P é simétrica e semidefinida positiva, pois para $k=0$, o termo em (F.2) é Q . Para mostrar que P é definida positiva, note que para todo vetor v , $n \times 1$, não nulo,



$$v^T P v = v^T \sum_{k=0}^{+\infty} G^k Q G^k v = \sum_{k=0}^{+\infty} (N G^k v)^T (N G^k v).$$

Suponhamos que $v^T P v = 0$, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (N G^k v)^T N G^k v = \sum_{k=0}^{+\infty} \|N G^k v\|^2 = 0$$

como $\|N G^k v\|^2 \geq 0$, $\forall k$, então:

$$\|N G^k v\|^2 = 0 \Leftrightarrow N G^k v = 0, \forall k.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} N \\ N G \\ N G^2 \\ \vdots \\ N G^{n-1} \end{bmatrix} v = 0.$$

Como o sistema (G, N) é observável,

$$\text{posto} \begin{bmatrix} N & N G & N G^2 & \dots & N G^{n-1} \end{bmatrix}^T = n,$$

e portanto, $v = 0$, o que é absurdo.

Assim,

$$v^T P v > 0, \forall v \neq 0.$$

Logo, P é positiva definida.

APÊNDICE G

Considere o sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k), \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

sendo que, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é a entrada de controle do sistema; $y \in \mathbb{R}$ é a saída do sistema; $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz característica do sistema com $\mathbf{G}$ matriz não singular; $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é a matriz de entrada do sistema e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ é a matriz de saída do sistema e

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \quad (\text{G.2})$$

a lei de controle e o índice de desempenho

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\mathbf{x}(k)^T \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + u(k)^T \mathbf{R}u(k)) \quad (\text{G.3})$$

sendo que $\mathbf{Q}$ é uma matriz simétrica definida positiva (ou semidefinida) e $\mathbf{R}$ é uma matriz simétrica definida positiva.

Suponha que, $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ seja controlável e $(\mathbf{G}, \sqrt{\mathbf{Q}})$ seja observável.

Lema: Nas condições anteriores, se $\mathbf{K}$ é ótimo, ou seja $u_1(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$ minimiza o índice J , então a matriz definida positiva $\mathbf{P}_L = \mathbf{P}_L^T$ que é solução da equação de Lyapunov:

$$(\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})^T \mathbf{P}_L (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}) - \mathbf{P}_L = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \quad (\text{G.4})$$

também é a solução da equação de Riccati:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{H} (\mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{G}. \quad (\text{G.5})$$

Prova: Pelo Teorema 3.2 o ganho ótimo é dado por

$$K = (R + H^T P H)^{-1} H^T P G, \quad (G.5a)$$

sendo $P = P^T$ a matriz definida positiva solução da equação (G5).

Assim, (G.5) pode ser reescrita como:

$$P = Q + G^T P G - G^T P H K. \quad (G.6)$$

Somando-se $-K^T R K + K^T R K$ em (G6), tem-se

$$P = Q + G^T P G - G^T P H K - K^T R K + K^T R K. \quad (G.7)$$

Agora,

$$K^T R K = K^T R (R + H^T P H)^{-1} H^T P G, \quad (G.8)$$

$$\begin{aligned} (R + H^T P H)^{-1} &= [(I + H^T P H R^{-1}) R]^{-1} \\ &= R^{-1} (I + H^T P H R^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$R(R + H^T P H)^{-1} = (I + H^T P H R^{-1})^{-1}$$

usando o lema de inversão de matrizes:

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (I + CA^{-1} B)^{-1} CA^{-1}$$

com $A = I$, $B = H^T P H$ e $C = R^{-1}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} (I + H^T P H R^{-1})^{-1} &= I - H^T P H (I + R^{-1} H^T P H)^{-1} R^{-1} \\ &= I - H^T P H (R(I + R^{-1} H^T P H))^{-1}. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} R(R + H^T P H)^{-1} &= I - H^T P H [R(I + R^{-1} H^T P H)]^{-1} \\ &= I - H^T P H (R + H^T P H)^{-1}. \end{aligned} \quad (G.9)$$

Substituindo (G.9) em (G.8), e tem-se de (G.5a):

$$\begin{aligned} K^T R K &= K^T [I - H^T P H (R + H^T P H)^{-1}] H^T P G \\ &= K^T [H^T P G - H^T P H (R + H^T P H)^{-1} H^T P G] \\ &= K^T [H^T P G - H^T P H K] \\ &= K^T H^T P (G - H K) \end{aligned} \quad (G.10)$$



Substituindo (G.10) em (G.7), obtém-se:

$$P = Q + G^T P G - G^T P H K - K^T H^T P (G - H K) + K^T R K. \quad (\text{G.11})$$

A equação (G.11), pode ser reescrita como:

$$G^T P (G - H K) - K^T H^T P (G - H K) - P = -(Q + K^T R K),$$

equivalentemente:

$$(G - H K)^T P (G - H K) - P = -(Q + K^T R K).$$

Logo, P é solução da equação (G4). Agora, como por hipótese $(G, \sqrt{Q})$ é observável, pelo Lema 1 do Apêndice B, $(G - H K, \tilde{N})$ é observável sendo $(Q + K^T R K) = \tilde{N}^T \tilde{N}$. Assim, pelo Lema 3.2, existe uma única $P_L^T = P > 0$ que satisfaz (G.4). Logo, tem-se que $P_L = P$.

APÊNDICE H

Projeto do Controlador –Especificação dos Ganhos K e K_I

Considera-se uma classe de sistemas como mostrado na Figura 3.2, com os ganhos K e K_I do controlador integral com realimentação de estados a ser projetado, apresentando equações como em (3.22a) e (3.22b):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}r(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

sendo que:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p - \mathbf{H}_p \mathbf{K}_I \mathbf{C}_p - \mathbf{H}_p \mathbf{K} & \mathbf{H}_p \mathbf{K}_I \\ -\mathbf{C}_p & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_p \mathbf{K}_I \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ v(k) \end{bmatrix}.$$

Suponha-se que o sistema $(\mathbf{G}_p, \mathbf{H}_p, \mathbf{C}_p)$ não possua zeros em $z = 1$.

Para determinação dos ganhos K e K_I , de modo a minimizar o índice dado em (3.23b):

$$J(u_e) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (\mathbf{x}_e(k))^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_e(k) + (u_e(k))^T \mathbf{R} u_e(k),$$

considerou-se, a equação da dinâmica do erro:

$$\mathbf{x}_e(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\mathbf{x}_e(k) + \hat{\mathbf{H}}u_e(k),$$

sendo que

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p & 0 \\ -\mathbf{C}_p & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_e(k) = -\hat{K}x_e(k) ; \quad \hat{K} = [K \quad -K_I].$$

Afirmção: Nas condições anteriores, o sistema $(\hat{G}, \hat{H})$ é controlável.

De fato, considere agora o sistema $(\hat{G}, \hat{H}, \hat{C})$, sendo $\hat{C} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times n} & \hat{K} \end{bmatrix}$. Ele pode ser visto como uma associação em série dos sistemas (G_p, H_p, C_p) e $(G_c, -H_c, C_c)$, com $G_c = H_c = 1$ que são controláveis. Dessa forma nas condições anteriores, como não há cancelamento entre os pólos de $(G_c, -H_c, C_c)$ e os zeros de (G_p, H_p, C_p) então o sistema $(\hat{G}, \hat{H}, \hat{C})$ é controlável (Kailath, 1980).



Referências Bibliográficas

- Antsaklis, J. P. e Michel, N. A. (1997). *Linear Systems*, McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering, New York, New York, USA.
- Barnett, S e Cameron, R. G. (1985). *Introduction to Mathematical Control Theory*. Oxford University Press Inc., New York, USA.
- Betts, J.T. (2000). Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method, *J.Comput Appl math* 120(1-2): 27-40.
- Boyd, S. e El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, USA.
- Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, New York, Oxford, USA.
- Chen, C. T. (1993). *Analog and Digital Control System Design*, Saunders College Publishing, USA.
- Cruz, J. J. (1996). *Controle Robusto Multivariável*, Editora da Universidade de São Paulo, S.P.
- Czornik, A. (1997). On discrete-time linear quadratic control, *Systems & Control Letters* 36: 101-107.

- Daruichi, E. R. M. M. (2003). *Modelagem e controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno*. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira-FEIS, Ilha Solteira-SP. Tese de Doutorado.
- Franklin, G. F., e Powell, J. D., Workman, M. (1998). *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, USA.
- Franklin, G. F. e Emami-Naeini, A. (1994). *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, USA.
- Feng, G., Cao, S. G., Rees, N. W. e Chak, C. K. (1997). Design of fuzzy control systems with guarantees stability, *Fuzzy Sets and Systems* **85**: 1-10.
- Filatyevev, A. S. (2000). " Paradoxes " of optimal solutions in problems of space vehicle injection and reentry, *Acta Astronaut* 47(1):11-18.
- Gao, F., Liu, W. Q., Sreeram V. e Teo KL. (2000). Characterization and selection of global optimal output feedback gains for linear time-invariant systems, *Optimal Control Applications & Methods*. 21(5): 195-209.
- Geromel, J. C., de Souza, C. C., Skelton e R. E. (1998). Static output feedback controllers: stability and convexity, *IEEE Transactions on Automatic Control* 43 (1): 120-125.
- Hirata, M., Tomizuka, M. (2003). Multi-rate short track-seeking control of hard disk drives for computation saving, *Proceedings of the 42nd. IEEE Conference on Decision and Control*, pg. 3420-3423.
- Horie, K. e Conway, B. A. (1999). Optimal aeroassisted orbital interception, *J Guid Control Dynam* 22(5): 625-631.



- Johansson, M. (2000) Optimal initial value compensation for fast settling times in mode-switching control systems, *In Proceeding of the 39th IEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Austrália, pp. 5137-5142.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.
- Kientiz, H. K. e Grubel G. (2000). Zero assignment in a scalar control system transferer function exploiting linear dynamic feedback structures, *In: XIII. Congresso Brasileiro de Automática*. Anais, UFSC-SC, Florianópolis.
- Korba, P., Babuska, R., Verbruggen, H. B. e Frank, P.M. (2003). Fuzzy gain scheduling: controller and observer design based on Lyapunov method and convex optimization, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, no. 3: 285-298.
- Kosko, B. (1997). *Fuzzy Engineering*, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice-Hall, USA.
- Liu, W.Q., Yan, W. Y. e Teo, K. L. (1996). Initial and transient response improvement for singular systems, *Automatic*, vol 32, N° 3, pp. 461-464.
- Magni, J. F., Bennani, S. e Terlouw, J. (1997). Robust fligh control: a design challenge, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, v. 224, Springer, Berlim.
- McLean, D. e Zaludin, Z. A. (1999) Stabilization of longitudinal motion of a hipersonic transport aircraf, *TI Meas Control* 21(2-3): 99-105.
- Oboe, R. e Federico, M. (2002). Initial value compensation applied to disturbance observer-based servo control in hdd, *In Advanced Motion Control*, AMC '2002-7th International Workshop, Maribor, Slovenia.



- Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineerring*, Prentice-Hall, New Jersey-USA.
- Oliveira, M. C., Farias, D. P. e Geromel, J. C. (1997). *LMISol, User's guide*, UNICAMP, Campinas-SP, Brasil.
- Pierri, P. S. (1999). *Uma técnica de imposição de zeros para auxílio em projeto de sistemas de controle*. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Tese de Doutorado.
- Reis, C. A., Messaoudi, A. e Silva, N. A. P. (2003), O Sobre-Sinal e a Resposta Inversa em Sistemas de Controle Lineares Contínuos no Tempo. *SBA-Controle & Automação* (artigo aceito para publicação).
- Rugh, J. W. (1996). *Linear System Theory*, Prentice-Hall, New Jersey, USA.
- Scarratt, J.C., Zinober, A. S. I. e Mills, R.E. (2000). Improved dynamical adaptive backstepping second-order sliding mode control. *Proceedings of the 6th IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*, Austrália, pp.251-260.
- Tanaka, K. e Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems, *Fuzzy Sets and Systems* **45**(2):136-156.
- Tanaka, K., Taniguchi, T. e Wang, H. (1998). Fuzzy control based on quadratic performance function – a linear matrix inequality approach. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa-Florida, pp.2914-2919.
- Tanaka, K. e Wang, H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis –A Linear Matrix Inequality Approach*, John Wiley and Sons, Inc, USA.



- Taniguchi, T., Tanaka, K., Yamafuji, K. e Wang, H. O. (1999a) A new PDC for fuzzy reference models, *IEEE International Fuzzy Systems Conference Proceedings*, pp.898-903.
- Taniguchi, T., Tanaka, K., Yamafuji, K. e Wang, H. O. (1999b). Nonlinear model foowing control via Takagi-Sugeno fuzzy model, *Proceedings of the American Control Conference*, pp.1837-1841.
- Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohatake, H. e Wang, H. O.(2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 9(4): 525-537.
- Teixeira, M.C.M., Assunção, E. e Avellar, R. G. (2003). On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 11(5): 613-623.
- Teixeira, M. C. M. e Žak S. H. (1999). Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 7 (2):133-142.
- Teixeira, M. C. M., Silva, N. A P., Reis, C. A. e Assunção E. (2002a). Projeto de sistemas de controle com atualização das condições iniciais no controlador, *In XIV Congresso Brasileiro de Automática, Anais*, Natal, RN, pg.1341-1348.
- Teixeira, M. C. M., Silva, N. A. P., Reis, C. A. e Assunção E. (2002b). Projeto de reguladores quadráticos ótimos com atualização das condições iniciais no controlador, *1º Congresso Temático de Dinâmica e Controle da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, Anais*, DINCON 2002, São José do Rio Preto-SP.

- Teixeira, M. C. M., Silva, N. A. P., Reis, C. A. e Assunção E. (2002c). Projeto de reguladores quadráticos ótimos com atualização das condições iniciais no controlador, *SBA-Control & Automação* (artigo em revisão).
- Teixeira, M. C. M., Silva, N. A. P., Reis, C. A. e Assunção E. (2004). Projeto de controle de sistemas discretos com atualização das condições iniciais no controlador, *3º Congresso Temático de Dinâmica e Controle da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional*, Anais, DINCON 2004, Ilha Solteira-SP.
- Teixeira, M. C. M., Pietrobon, H.C, Assunção, E. (2000). Novos resultados para o projeto de reguladores fuzzy utilizando LMIs, *Controle e Automação* **11**: 37-48.
- VanAntwerp et al., (2000). A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities, *Journal of Process Control* vol. 10 (4), pp.363-385.
- Yamaguchi, T., Shishida, K., Hirai, H., Tsuneta, K. e Sato, M. (1992). Improvement of servo robustness for digital sector servo system, *IEEE Transactions on Magnetics*, **28** (5) pp. 2910-2912.
- Yamaguchi, T., Shishida, K., Tohyama, S. e Hirai H. (1996a). Mode switching control design with initial value compensation and its application to head positioning control on magnetic disk drives, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **43** (1), pp. 65-73.
- Yamaguchi, T., Soyama, Y., Hosokawa, H., Tsuneta, K. e Hirai H. (1996b). Improvement of settling response of disk drive head positioning servo using mode switching control with value compensation, *IEEE Transactions on Magnetics*, **32** (3), pp.1767-1772.
- Yamaguchi, T., Shishida, K., Soyama, Y., Hosokawa, H., Ohsawa, H., Numasato, H., Arai, T., Tsuneta, K. e Hirai H. (1997). A mode-



switching controller with Initial value compensation for hard disk drive servo control, *Control Eng. Practice*, **5** (11), pp.1525-1532.

Yamaguchi, T., Numasato, H. e Hirai, H. (1998). A mode-switching control for motion control and Its appication to disk drives: design of optimal mode-switching conditions, *IEEE Transactions on Mechatronics*, **3** (3), pp. 202-209.

Zeng, F., Wang, Q., Lee,T. e Huang, X.(2001). Robust PI controller design of nonlinear systems via fuzzy modeling approach, *IEEE Transactios on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans* **31** (6): 666-675.

Wang, L. (1997). *A Course in Fuzzy Systems and Control*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, USA.

Wong, P.W., Yeung, L.F. and Wu, A. (2001). Model based fuzzy controller design on tracking control problem of nonlinear dynamic system, *IEEE International Fuzzy Systems Conference*, pp. 1519-1522.





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Campus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 - Ilha Solteira - SP
www.dee.feis.unesp.br

