



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Jaime Rezende de Moraes

Conjuntos Minimais de Sistemas Lineares por Partes

São José do Rio Preto
2014

Jaime Rezende de Moraes

Conjuntos Minimais de Sistemas Lineares por Partes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof^o. Dr^o. Paulo Ricardo da Silva

São José do Rio Preto
2014

De Moraes, Jaime Rezende.
Conjuntos minimais de sistemas lineares por partes /
Jaime Rezende de Moraes. -- São José do Rio Preto, 2014
160 f. : il., tabs.

Orientador: Paulo Ricardo da Silva
Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências
Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Ciclo limite.
4. Sistemas lineares. I. Silva, Paulo Ricardo da. II. Universidade
Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.91

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Jaime Rezende de Moraes

Conjuntos Minimais de Sistemas Lineares por Partes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração – Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Luci Any Francisco Roberto
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Marcelo Messias
UNESP – Presidente Prudente

Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia
Universidade Federal de Goiás

São José do Rio Preto
Maio de 2014

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS que é fonte essencial e caminho para conseguir alcançar todos os meus objetivos.

Aos meus pais em especial minha querida mãe Maria, meu irmão e minha cunhada, que sempre deram apoio aos meus estudos.

Aos meus amigos da república: Luis Gustavo, Leandro, Fernando e Vinícius que me acolheram na república e me proporcionaram grandes momentos de descontração.

Aos meus amigos da minha cidade que também me proporcionaram grandes momentos de descontração.

A minha noiva, pelo amor e incentivo durante todo o período de doutorado.

Aos meus amigos da pós-graduação Bruno, Rodrigo, Rubens, Clayton, Oyran , Danilo, e outros do Ibilce pela companhia.

Aos meus professores de pós-graduação que me passaram todo o conhecimento matemático para poder escrever minha tese. Em especial ao Prof^o. Dr. Paulo Ricardo da Silva, pela orientação, paciência e incentivo na elaboração desse trabalho.

A todos que diretamente ou indiretamente me ajudaram na elaboração deste trabalho.

A FAPESP pelo auxílio financeiro.

Aos meus pais,
Pedro e Maria, ao meu irmão,
Gustavo e a minha noiva, Daiana
dedico.

Resumo

O objetivo geral dessa tese é buscar soluções periódicas de sistemas não-suaves. Nossa contribuição nesta tese está relacionada ao estudo de campos de vetores lineares por partes, sistemas não-suaves singularmente perturbados e sistemas diferenciais polinomiais cúbicos em \mathbb{R}^2 que possuem centros. Estudamos campo de vetores planares lineares por partes (PWL). Supomos que os pontos de equilíbrio são do tipo sela ou foco. Estabelecemos uma correspondência entre os PWL e vetores formados por alguns parâmetros: conjuntos em Σ (costura, deslize ou escape), equilíbrio (real, virtual), interseção das separatrizes com Σ , estabilidade e orientação do foco. Chamamos esses vetores de configuração. Reduzimos o número de configuração por uma relação de equivalência e estudamos quais poderiam ter poli-trajetórias fechadas de deslize. Para os sistemas não-suaves singularmente perturbados estudamos duas classes de problemas de perturbação singular não-suave: com uma variedade crítica e com duas variedades críticas. Para a primeira classe damos condições suficientes para persistência de poli-trajetórias fechadas. Para a segunda estudamos a persistência de pontos de equilíbrio. Para os sistemas diferenciais polinomiais cúbicos em \mathbb{R}^2 que possuem centros estudamos o número máximo de ciclos limites que podem bifurcar de algumas famílias de sistemas diferenciais planares polinomiais de grau 3, com integrais primeiras racionais de grau 2, quando eles são perturbados dentro da classe de todos os sistemas polinomiais diferenciais cúbicos.

Palavras-chave: Ciclos Limites. Campo de Vetores Planares. Sistemas Lineares por Partes. Sistemas Não-Suaves. Regularização. Variedade crítica. Centros Isócronos. Método do “averaging”.

Abstract

The main goal of this thesis is to find periodic solutions of non-smooth systems. Our contribution in this thesis is related to the study of piecewise linear vector fields, singularly perturbed non-smooth systems and cubic polynomial differential systems in \mathbb{R}^2 with centers. We study piecewise linear planar vector fields (PWL). We suppose that the equilibrium points are saddle or focus. We establish a correspondence between the PWL vector fields and vectors formed by some of the following parameters: sets on Σ (crossing, sliding or escaping), kind of equilibrium (real or virtual), intersection of the separatrices with Σ , stability and orientation of the focus. Such vectors are called configurations. We reduce the number of the configurations by an equivalent relation and we analyze for which configurations the corresponding PWL vector fields can have or not closed sliding poly-trajectories. For the singularly perturbed non-smooth systems we study two classes of non-smooth singular perturbation problems: with one critical manifold and with two critical manifolds. For the first class we give sufficient conditions for the persistence of closed poly-trajectories. For the second class we give conditions for persistence of equilibrium points. For the cubic polynomial differential systems in \mathbb{R}^2 with centers we study the maximum number of limit cycles that bifurcate from some families of planar polynomial differential systems of degree 3 with rational first integrals of degree 2 when they are perturbed inside the classes of all cubic polynomial differential systems.

Keywords: Limit cycles. Planar Vector Fields. Piecewise Linear Systems. Non-Smooth Systems. Regularization. Critical Manifold. Isochronous Centers. Averaging Method.

Sumário

Introdução	17
1 Resultados do Trabalho	21
2 Conceitos Preliminares	31
2.1 Sistemas Não-Suaves	31
2.2 Campos de Vetores Lineares por Partes	34
2.3 Teoria Geométrica de Perturbações Singulares	35
2.4 Teoria do Averaging de Primeira Ordem	36
3 Campos de Vetores Lineares por Partes com Poli-Trajetórias Fechadas de Deslize	41
3.1 Estudo dos Casos Sela-Sela, Sela-Foco, Foco-Sela e Foco-Foco	41
3.1.1 O Caso Sela-Sela	41
3.1.2 O Caso Sela-Foco (Foco-Sela)	43
3.1.3 O Caso Foco-Foco	44
3.2 Principais Resultados para os sistemas PWL	44
3.3 Prova dos Teoremas 5 e 6	46
3.3.1 Prova do Teorema 5-(a)	46
3.3.2 Prova do Teorema 5-(b)	49
3.3.3 Prova do Teorema 5-(c)	55
3.3.4 Prova do Teorema 6	60
3.4 Prova do Teorema 7.	65
3.5 Exemplos Conhecidos de Poli-Trajetórias de Costura	76

4	Persistência de Poli–Trajetórias Fechadas por Perturbação Singular	81
4.1	Sistemas Não–Suaves Singularmente Perturbados	81
4.2	Principais Resultados para os Sistemas Não–Suaves Singularmente Perturbados	83
4.2.1	Descontinuidade em \mathbf{g}	84
4.3	Prova do Teorema 8	85
4.4	Prova dos Teoremas 9 e 10	88
4.5	Exemplo	91
5	Ciclos limite para uma Classe de Sistemas Diferenciais Polinomiais Cúbicos Contínuos e Descontínuos	93
5.1	Prova do Teorema 11	96
5.2	Prova do Teorema 12	101
6	Ciclos limite de Sistemas Polinomiais Diferenciais Cúbicos com Integrais Primeiras Racionais de Grau 2	113
6.1	Prova do Teorema 13	117
6.1.1	Prova para a Classe P_1	117
6.1.2	Prova para a Classe P_4	123
6.1.3	Prova para a Classe P_6	125
6.2	Prova do Teorema 14	128
6.3	Comentários sobre as classes P_3 e P_5	135
A	Algoritmo no Mathematica para o Sistema 5.2	137
	Referências Bibliográficas	155

Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos não-suaves vem sendo desenvolvido em um ritmo muito rápido nos últimos anos e é, certamente, uma das fronteiras comuns entre Matemática, Física e Engenharia.

Um dos principais problemas na teoria qualitativa de sistemas dinâmicos não-suaves é a determinação de ciclos limite. Ciclos limite de sistemas diferenciais planares foram definidos por Poincaré [49]. No final de 1920 van der Pol [57], Liénard [35] e Andronov [1] mostraram que uma órbita fechada de uma oscilação contínua ocorrida em um circuito tubular à vácuo era um ciclo limite, como considerado por Poincaré. Após esses trabalhos, a não-existência, existência, unicidade e outras propriedades de ciclos limite foram estudados extensivamente por matemáticos e físicos e, mais recentemente por químicos, biólogos, economistas, etc.

Nesse contexto, campos de vetores lineares por partes (PWL) são estudados por muitos pesquisadores e também servem como modelos para uma grande variedade de equipamentos de Engenharia e Biologia, veja por exemplo [21]. O caso mais simples é quando existem duas regiões de linearidade delimitadas por uma linha reta. Um dos pioneiros no estudo de campos de vetores PWL foi Filippov, que estabeleceu convenções sobre o campo de vetores na região de descontinuidade. Depois de Filippov, outros pesquisadores tais como A. Gasull, S. Huan, X. Yang, J. Llibre, E. Ponce, dentre outros, trabalharam nesse assunto. Sabemos que campos de vetores lineares em \mathbb{R}^2 não possuem ciclos limite, porém isso não é verdade para campos de vetores lineares por partes em \mathbb{R}^2 . Existem trabalhos recentes, tais como [23] e [42] que estudam bifurcações de ciclos limite em sistemas lineares por partes em \mathbb{R}^2 .

Tendo em vista que ciclos limite são de grande importância no estudo de sistemas

dinâmicos suaves e não-suaves, uma maneira clássica de produzi-los é perturbando um sistema que tem um centro. Existem vários métodos para obter o número de ciclos limite bifurcando das órbitas periódicas de um centro [2, 5]. A maioria dos métodos são baseados na aplicação de Poincaré, as integrais de Poincaré–Melnikov, as integrais Abelianas e a teoria do “averaging” de primeira ordem. Os três últimos métodos são essencialmente equivalentes.

O estudo do número de ciclos limite de um sistema diferencial polinomial é principalmente motivado pelo 16º problema de Hilbert, que junto com a conjectura de Riemann são dois problemas da lista famosa dos 23 problemas de Hilbert que ainda permanece aberta. Veja [31] e [53] para mais detalhes.

O problema de estudar bifurcações de ciclos limite, de órbitas periódicas de um centro de um sistema polinomial diferencial de grau 2, quando esse sistema é perturbado dentro da classe de todos sistemas diferenciais polinomiais de grau 2, vem sendo estudado intensivamente durante esses últimos 20 anos, veja por exemplo, os livros [16] e [61], e as centenas de referências citadas lá, em particular as referências [27, 36, 50, 62]. Existem poucos trabalhos dedicados ao estudo desse problema para sistemas diferenciais polinomiais cúbicos com centros isócronos. Para um “survey” sobre centros isócronos veja [14].

Nossa contribuição nesse trabalho está relacionada ao estudo de

- sistemas lineares por partes;
- sistemas não-suaves singularmente perturbados;
- algumas famílias de sistemas diferenciais polinomiais cúbicos em \mathbb{R}^2 que possuem centros.

Sobre Sistemas Lineares por Partes

Fizemos uma classificação dos sistemas lineares por partes supondo que os pontos de equilíbrio eram sela ou foco. Essa classificação foi feita com respeito a alguns parâmetros (tipos de pontos de equilíbrio, tipos de conjuntos na linha de descontinuidade: costura,

deslize ou escape, posições relativas das separatrizes das selas, orientação e estabilidade do foco). O vetor formado por esses parâmetros recebe o nome de configuração. Reduzimos o número de configurações por uma relação de equivalência e analisamos para as quais os sistemas lineares por partes poderiam ter órbitas fechadas com segmento de deslize (chamadas aqui de “poli–trajetórias fechadas de deslize”).

Sobre Sistemas Não–Suaves Singularmente Perturbados

No estudo de bifurcações, os sistemas não–suaves singularmente perturbados (também conhecidos como problemas de perturbações singulares não–suaves) ganham uma grande importância. A ideia de desenvolver uma teoria similar à teoria de Fenichel em [22], foi estudada primeiramente em [52]. Nos trabalhos [9, 10] e [11] os autores estenderam a teoria de Fenichel, obtendo resultados que garantem a persistência de pontos de equilíbrio ou órbitas periódicas do campo de Filippov e de algumas singularidades típicas que ocorrem na linha de descontinuidade (regular–dobra, dobra–dobra, dobra–cúspide etc). Dando continuidade ao que foi feito em [9, 10] e [11], nós estudamos a persistência de órbitas periódicas para os sistemas não–suaves singularmente perturbados. Para tal, usamos a técnica de regularização desenvolvida por J. Sotomayor e M.A. Teixeira [55].

Sobre Sistemas Diferenciais Polinomiais Cúbicos

Estudamos algumas famílias de centros (alguns isócronos) de sistemas diferenciais polinomiais cúbicos em \mathbb{R}^2 , com integrais primeiras racionais de grau 2. Perturbamos esses sistemas dentro da classe de todos os sistemas polinomiais cúbicos, (suaves e não–suaves) e analisamos o número máximo de ciclos limite que o sistema perturbado possui. Esse estudo foi feito usando a teoria do “averaging” de primeira ordem.

A tese está organizada com se segue.

No Capítulo 1, damos uma descrição informal dos nossos resultados. Eles são tratados formalmente nos Capítulos 3, 4, 5 e 6. No Capítulo 2, apresentamos alguns conceitos preliminares cruciais para o desenvolvimento do nosso trabalho. No Capítulo 3, estudamos os sistemas lineares por partes em \mathbb{R}^2 (PWL). Na Seção 3.2, apresentamos os principais

resultados para os sistemas PWL e na Seção 3.3, os provamos. No Capítulo 4, estudamos os sistemas não-suaves singularmente perturbados. Na Seção 4.2, apresentamos os principais resultados para os sistemas não-suaves singularmente perturbados e nas Seções 4.3 e 4.4, os provamos. Nos Capítulos 5 e 6 estudamos algumas famílias de sistemas diferenciais polinomiais de grau 3 em \mathbb{R}^2 que possuem um centro. Os resultados são provados nas Seções 5.1, 5.2, 6.1 e 6.2. No Apêndice A, damos explicitamente os cálculos feitos com o manipulador algébrico Mathematica para colocar uma classe de sistemas dada no Capítulo 5 na forma padrão do “averaging” e calcular a função média.

Capítulo 1

Resultados do Trabalho

Nesse trabalho, iniciamos com o estudo da classe de campos de vetores lineares por partes

$$F(x, y) = \begin{cases} F^+(x, y) & \text{se } x \geq 0, \\ F^-(x, y) & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

onde, $F^+(x) = (F_1^+(x), F_2^+(x)) = A^+x + b^+$ e $F^-(x) = (F_1^-(x), F_2^-(x)) = A^-x + b^-$, $A^+ = (a_{ij}^+)$ e $A^- = (a_{ij}^-)$ são matrizes constantes (2×2) e $b^+ = (b_1^+, b_2^+) \in \mathbb{R}^2$ e $b^- = (b_1^-, b_2^-) \in \mathbb{R}^2$ são vetores constantes em \mathbb{R}^2 .

Estudamos campos de vetores PWL satisfazendo que os pontos de equilíbrio nos semiplanos esquerdo e direito são sela ou foco, mais especificamente consideramos as seguintes configurações: *sela-sela*, *sela-foco*, *foco-sela* e *foco-foco*. Dizemos que o campo de vetores (2.3) é do tipo **sela-sela** se os pontos de equilíbrio de F^- e F^+ são selas. Analogamente definimos campo de vetores do tipo **foco-sela**, **sela-foco** e **foco-foco**.

Classificamos os campos de vetores com respeito a alguns parâmetros. Para o caso sela-sela temos 4 parâmetros: conjuntos em Σ (deslize, escape ou costura), ponto de equilíbrio (real, virtual), interseção das variedades estável e instável correspondentes ao sistema F^- com Σ e interseção das variedades estável e instável correspondentes ao sistema F^+ com Σ . Para o caso sela-foco temos 5 parâmetros: consideramos os três primeiros parâmetros do caso sela-sela e adicionamos mais 2 parâmetros: orientação e estabilidade do foco. Para o caso foco-foco temos 6 parâmetros: removemos o terceiro parâmetro do caso sela-foco e adicionamos dois parâmetros para o foco do sistema F^- : orientação e estabilidade. Uma **configuração** é um vetor formado pelos parâmetros anteriores.

Definimos as classes $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}'_2$, e \mathcal{P}_3 que são formadas por configurações sela–sela, sela–foco, foco–sela e foco–foco, respectivamente. Definimos três relações de equivalência R_1, R_2 e R_3 que essencialmente consideram equivalentes duas configurações que tem retratos de fase simétricos com relação aos eixos x e y , e estudamos a cardinalidade dos espaços quocientes $\mathcal{P}_1/R_1, (\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}'_2)/R_2$ e \mathcal{P}_3/R_3 . Além disso, analisamos para quais configurações do espaço quociente os correspondentes campos de vetores PWL podem ter ou não poli–trajetórias fechadas de deslize. Para a definição de poli–trajetória fechada de deslize, veja Definição 1. O Capítulo 3 será totalmente dedicado ao estudo mencionado anteriormente.

Primeiro Resultado. Nosso primeiro resultado corresponde aos Teoremas 5, 6 e 7 nas páginas 34 e 35. O primeiro resultado diz que as cardinalidades dos espaços quocientes $\mathcal{P}_1/R_1, (\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}'_2)/R_2$ e \mathcal{P}_3/R_3 são 22, 28 e 28, respectivamente. Em sequência obtemos que 21 das 22 configurações da classe \mathcal{P}_1/R_1 , 20 das 28 configurações da classe $(\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}'_2)/R_2$ e 17 das 28 configurações da classe \mathcal{P}_3/R_3 não possuem poli–trajetórias fechadas de deslize. Por fim, estudamos os sinais de algumas expressões formadas pelos parâmetros dados nas matrizes A^\pm e nos vetores b^\pm , para dizer quais das 20 configurações restantes podem ter ou não poli–trajetórias fechadas de deslize.

Existem muitos trabalhos recentes relacionando sistemas dinâmicos não–suaves e perturbações singulares. Indicamos os artigos [7, 17] para uma primeira leitura sobre o assunto. Além disso, o volume onde [17] está publicado, é dedicada a dinâmica e bifurcações de sistemas não–suaves, onde muitas aplicações são fornecidas.

O sistema dinâmico não–suave que iremos considerar no Capítulo 4 é do tipo

$$\dot{x} = X(x) = \begin{cases} X_-(x), & \text{se } h(x) \leq 0, \\ X_+(x), & \text{se } h(x) \geq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde, $X_-(x)$ e $X_+(x)$ são campos de vetores em \mathbb{R}^n de classe C^r , $r \geq 1$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tendo 0 como um valor regular. Denotamos $X \in \Omega^r$ e designamos $\Sigma^- = \{h(x) \leq 0\}$ e $\Sigma^+ = \{h(x) \geq 0\}$ os domínios de X . O conjunto $\Sigma = \{h(x) = 0\}$ é chamado de *conjunto de descontinuidade*.

No Capítulo 4, estamos interessados em perturbações singulares de sistemas dinâmicos não–suaves. Essencialmente, consideramos duas classes. A primeira é dada por sistemas

do tipo

$$S_\varepsilon : \quad \dot{x} = \begin{cases} F^-(x, y, \varepsilon), & \text{se } h(x, y) \leq 0 \\ F^+(x, y, \varepsilon), & \text{se } h(x, y) \geq 0 \end{cases} \quad \varepsilon \dot{y} = G(x, y, \varepsilon), \quad (1.2)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, ε é um parâmetro positivo pequeno, F^\mp , G e h são funções de classe C^r , com $r \geq 1$. A segunda classe é dada por sistemas do tipo

$$S_\varepsilon^* : \quad \varepsilon \dot{x} = \begin{cases} f^-(x, y, \varepsilon), & \text{se } h(x, y) \leq 0 \\ f^+(x, y, \varepsilon), & \text{se } h(x, y) \geq 0 \end{cases} \quad \dot{y} = g(x, y, \varepsilon), \quad (1.3)$$

onde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, f^\mp , $g = (g_1, \dots, g_n)$ e h são funções de classe C^r , com $r \geq 1$.

Em [10], os autores provaram que pontos de equilíbrio ou órbitas periódicas hiperbólicos do sistema (1.2) para $\varepsilon = 0$, sobre a *região de deslize*, persistem para $\varepsilon \sim 0$, com algumas condições. Em [9], eles estudaram a persistência de *pontos de dobra*, *pontos de cúspide* e *pontos de equilíbrio regular*. Pontos de dobra são caracterizados por contato quadrático das órbitas de $X^- = (F^-, G/\varepsilon)$ ou $X^+ = (F^+, G/\varepsilon)$ com Σ e pontos de cúspide são caracterizados pelo contato cúbico. Quando o contato não é tangencial, ele é dito *regular*. Dizemos que $p_0 \in \mathbb{R}^{n+2}$ é um *ponto de equilíbrio regular hiperbólico* de X^- se $X^-(p_0) = 0$, $X^+ \cdot h(p_0) \neq 0$ e $DX^-(p_0)$ tem autovalores com parte real diferente de zero. A persistência dessas singularidades foi provada para os casos: regular–dobra, dobra–dobra, cúspide–regular, dobra–cúspide e regular–equilíbrio. Regular–dobra significa que o contato de X^- com Σ é regular e o contato de X^+ com Σ é formado por um ponto de dobra e vice-versa. Para os outros casos é análogo (veja Figura 1.1).

Uma questão aberta é: *dada uma poli-trajetória fechada do sistema S_0 , ela se desdobra para $\varepsilon \sim 0$?* Existe um grande número de trabalhos que são dedicados a esta questão, por exemplo, [9, 10, 21, 29, 52]. Para ilustrar, considere a seguinte família de sistemas a um parâmetro

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} -1 + \frac{2}{10^{-2}}(x_2 - x_1), & \text{se } x_1 \leq 0 \\ 1 + \frac{2}{10^{-2}}(x_2 - x_1), & \text{se } x_1 \geq 0 \end{cases}, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{10^{-2}}(x_2 - x_1), \quad \varepsilon \dot{y} = y. \quad (1.4)$$

Para $\varepsilon = 0$, temos o sistema

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} -1 + \frac{2}{10^{-2}}(x_2 - x_1), & \text{se } x_1 \leq 0 \\ 1 + \frac{2}{10^{-2}}(x_2 - x_1), & \text{se } x_1 \geq 0 \end{cases}, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{10^{-2}}(x_2 - x_1), \quad y = 0, \quad (1.5)$$

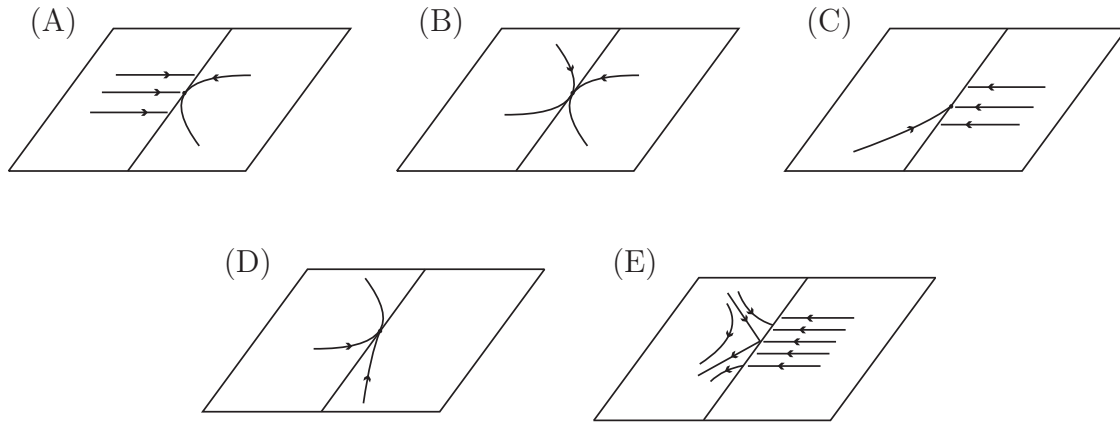


Figura 1.1: As figuras (A), (B), (C), (D) e (E) representam os casos regular–dobra, dobra–dobra, cúspide–regular, dobra–cúspide e regular–equilíbrio, respectivamente.

que está definido no plano $\{y = 0\}$. De acordo com [52], o sistema (1.5) tem uma poli–trajetória fechada hiperbólica Γ . Veja a Figura 1.2.

O sistema (1.4) tem poli–trajetórias fechadas para $\varepsilon \sim 0$? Obtemos uma resposta a essa pergunta considerando um parâmetro adicional $\lambda \in \mathbb{R}$ (veja o Teorema 8, Seção 4.2). Problemas que são modelados por perturbações singulares com dois parâmetros de perturbação estão sendo estudados por muitos pesquisadores, por exemplo, veja [19], [20] e [30]. Também foram estudados recentemente em [11] e [47]. Nosso propósito é discutir essas questões.

A principal diferença entre os sistemas S_ε e S_ε^* é a dinâmica quando $\varepsilon = 0$. O sistema S_0 está definido sobre uma variedade suave dada por $G(x, y, 0) = 0$ enquanto o sistema S_0^* está definido em duas variedades suaves $f^\mp(x, y, 0) = 0$ que podem se interceptar de maneira não–suave. Em [29] os autores estudaram o sistema S_ε^* para o caso bidimensional, supondo que

$$f^-(x, y, \varepsilon) = f^+(x, y, \varepsilon), \forall (x, y) \in \Sigma = \{h = 0\}, \forall \varepsilon \geq 0. \quad (1.6)$$

As *variedades críticas* são os conjuntos $\mathcal{M}_\varepsilon^\mp = \{(x, y) : f^\mp(x, y, \varepsilon) = 0\}$. A equação (1.6) diz que \mathcal{M}_0^\mp intercepta o conjunto descontinuidade nos mesmos pontos.

Em sequência, resumimos os principais resultados obtidos para os sistemas S_ε e S_ε^* . Os resultados são dados mais precisamente na Seção 4.2.

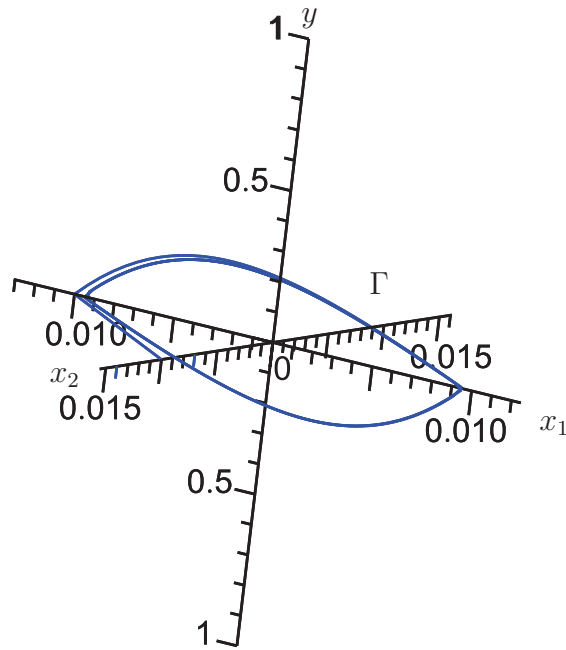


Figura 1.2: Órbita periódica do sistema (1.5).

Segundo Resultado. Considere o sistema S_ε , com $h(x, y) = x_1$ e $n = 2$. Suponha que para $\varepsilon = 0$ ele tem uma poli-trajetória fechada hiperbólica Γ_0 . Então,

- Existe um ciclo limite $\Gamma_{\lambda,0}$ da regularização de S_0 , tal que $\Gamma_{\lambda,0} \rightarrow \Gamma_0$, quando $\lambda \rightarrow 0$, de acordo com a distância de Hausdorff;
- Existe um ciclo limite $\Gamma_{\lambda,\varepsilon}$ da regularização de S_ε , tal que $\Gamma_{\lambda,\varepsilon} \rightarrow \Gamma_0$, quando $(\lambda, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)$, de acordo com a distância de Hausdorff;

Terceiro resultado. Considere o sistema S_ε^* com $h(x, y) = x$. Suponha que $f^-(x, y, 0) = f^+(x, y, 0)$ e $f^-(x, y, \varepsilon) \neq f^+(x, y, \varepsilon)$, para $(x, y) \in \Sigma = \{x = 0\}$ e $\varepsilon > 0$.

- Obtemos a persistência de pontos de equilíbrio de

$$0 = \begin{cases} f^-(x, y, 0) \\ f^+(x, y, 0) \end{cases} \quad \dot{y} = g(x, y, 0) \quad (1.7)$$

sobre Σ , para o sistema reduzido regularizado $S_{\lambda,0}^*$ (definido na Subseção 4.1) e para o campo deslizando associado ao sistema S_ε^* , para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno.

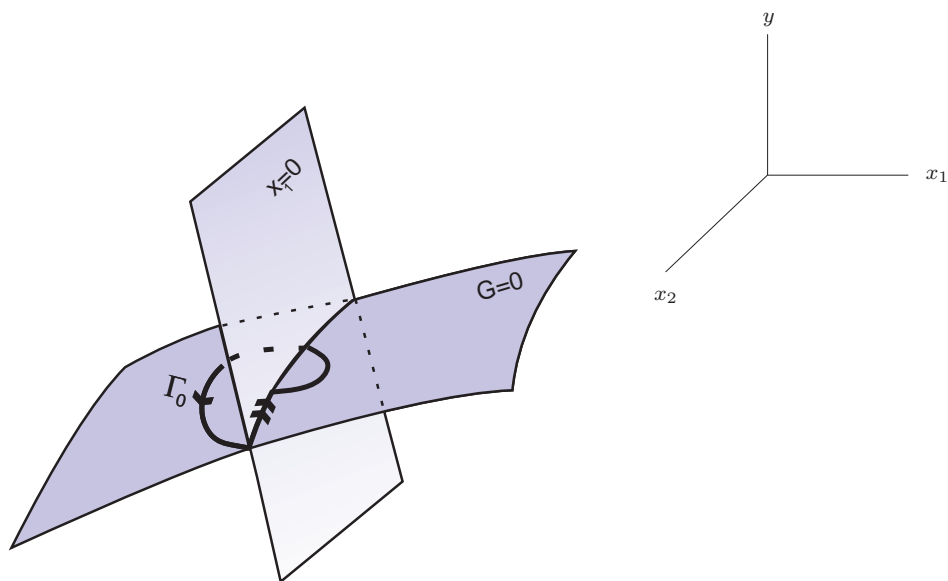


Figura 1.3: Uma poli-trajetória fechada Γ_0 sobre a variedade crítica. Note que a interseção da variedade crítica com a variedade de comutação fornece uma nova variedade onde a poli-trajetória fechada desliza.

- Os pontos de equilíbrio do sistema (1.7) sobre Σ persistem para a regularização do sistema S_ε^* (essa regularização está definida na Subseção 4.1).

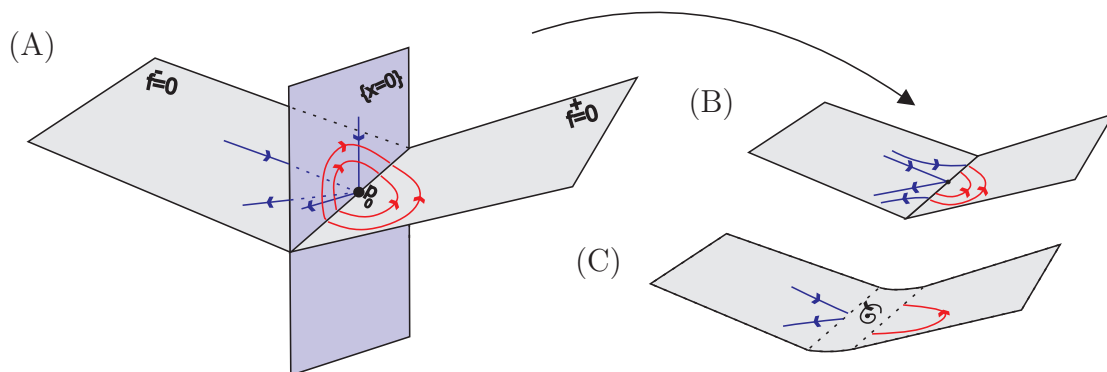


Figura 1.4: As figuras (A), (B) e (C) representam a situação geométrica no Exemplo 1.

Se $\frac{\partial f^\mp}{\partial x} \neq 0$, então $f^\mp(x, y, 0) = 0$, fornece $x = \xi^-(y)$, para $x \leq 0$ e $x = \xi^+(y)$, para

$x \geq 0$. Assim, o sistema (1.7) é na verdade

$$\dot{y} = \begin{cases} g(\xi^-(y), y, 0), & \text{se } \xi^-(y) \leq 0, \\ g(\xi^+(y), y, 0), & \text{se } \xi^+(y) \geq 0. \end{cases}$$

Temos que $\{y : \xi^-(y) = 0\} = \{y : \xi^+(y) = 0\}$. Se $\{y : \xi^-(y) < 0\} = \{y : \xi^+(y) > 0\}$ ou $\{y : \xi^-(y) > 0\} = \{y : \xi^+(y) < 0\}$, então o sistema (1.7) torna-se dois sistemas suaves definidos na mesma região. Se $\{y : \xi^-(y) < 0\} = \{y : \xi^+(y) < 0\}$, então o sistema (1.7) é um sistema suave por partes com fronteira em Σ . Para ilustrar, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 1. Considere o sistema singularmente perturbado.

$$\varepsilon \dot{x} = \begin{cases} x - y_1 + y_2 + \varepsilon, & \text{se } x \leq 0 \\ -2x - y_1 + y_2 - \varepsilon, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = x + y_2 - 1 + \varepsilon, \\ \dot{y}_2 = x - y_1 - y_2 + 2 + \varepsilon. \end{cases} \quad (1.8)$$

Para $\varepsilon = 0$, obtemos $x = y_1 - y_2$ para $x \leq 0$, e $x = (y_2 - y_1)/2$ para $x \geq 0$. Assim, temos dois sistemas suaves dados por

$$\dot{y}_1 = y_1 - 1, \quad \dot{y}_2 = -2y_2 + 2, \quad \text{se } y_1 - y_2 \leq 0, \quad (1.9)$$

$$\dot{y}_1 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2 - 1, \quad \dot{y}_2 = -\frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + 2, \quad \text{se } y_1 - y_2 \leq 0. \quad (1.10)$$

O ponto $(0, 1, 1)$ é um ponto de equilíbrio de ambos sistemas. Para o sistema (1.9) o ponto de equilíbrio é uma sela e para o sistema (1.10) é um foco atrator. Além disso, os sistemas (1.9) e (1.10) estão definidos na mesma região e seus retratos de fase são projetados nos conjuntos $\{f^-(x, y, 0) = 0\}$ e $\{f^+(x, y, 0) = 0\}$, respectivamente (veja Figura 1.4). Fazemos um processo padrão de regularização (veja Subseção 2.1) sobre a variedade crítica $\mathcal{M}_0^- \cup \mathcal{M}_0^+$, onde $\mathcal{M}_0^- = \{(x, y_1, y_2) : x \leq 0 \text{ e } x - y_1 + y_2 = 0\}$ e $\mathcal{M}_0^+ = \{(x, y_1, y_2) : x \geq 0 \text{ e } -2x - y_1 + y_2 = 0\}$. Assim, obtemos o sistema regularizado

$$-x - 2y_1 + 2y_2 - (3x)\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) = 0, \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = x + y_2 - 1, \\ \dot{y}_2 = x - y_1 - y_2 + 2. \end{cases} \quad (1.11)$$

Note que o ponto $(0, 1, 1)$ também é um ponto de equilíbrio do sistema (1.11). Defina $F(x, y_1, y_2) = -x - 2y_1 + 2y_2 - (3x)\varphi(x/\lambda)$. Desde que $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 1) = -1$ temos que

$F = 0$ define $x = \zeta(y_1, y_2)$, localmente em torno do ponto $(0, 1, 1)$. Assim o sistema (1.11) torna-se

$$\dot{y}_1 = \zeta(y_1, y_2) + y_2 - 1, \quad \dot{y}_2 = \zeta(y_1, y_2) - y_1 - y_2 + 2. \quad (1.12)$$

Pelo Teorema da Função Implícita, temos $\zeta_{y_1}(1, 1) = -2$ e $\zeta_{y_2}(1, 1) = 2$. Assim, a linearização do sistema (1.12) em $(0, 1, 1)$ é

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \zeta_{y_1}(1, 1) & \zeta_{y_2}(1, 1) \\ \zeta_{y_1}(1, 1) & \zeta_{y_2}(1, 1) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

e o ponto de equilíbrio $(0, 1, 1)$ é um foco atrator para o sistema regularizado (1.12). Um cálculo simples mostra que a região de deslize é $\{(y_1, y_2) : -y_1 + y_2 \neq \pm\varepsilon\}$. O campo deslizando associado ao sistema (1.8), para $\varepsilon > 0$, tem um ponto de equilíbrio dado por $(1 + 2\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ e sua estabilidade é determinada analisando a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} = \varepsilon \mathbf{B}.$$

Assim, o ponto de equilíbrio do campo deslizando associado ao sistema (1.8) é um foco atrator.

Quarto resultado. Agora, adicionemos uma descontinuidade na função g no sistema S_ε^* e suponhamos que h não depende da variável x . Obtemos então o sistema

$$\varepsilon \dot{x} = \begin{cases} f^-(x, y, \varepsilon), & \text{se } h(y) \leq 0 \\ f^+(x, y, \varepsilon), & \text{se } h(y) \geq 0 \end{cases}, \quad \dot{y} = \begin{cases} g^-(x, y, \varepsilon), & \text{se } h(y) \leq 0 \\ g^+(x, y, \varepsilon), & \text{se } h(y) \geq 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Sob algumas hipóteses que explicitamos no Capítulo 4, pontos de equilíbrio e órbitas periódicas do campo deslizando associado ao sistema (1.13) para $\varepsilon = 0$, persistem para o campo deslizando associado ao sistema (1.13), para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno.

Esses três últimos resultados são tratados detalhadamente no Capítulo 4.

Quinto resultado. Nos Capítulos 5 e 6 estudamos algumas famílias de sistemas diferenciais polinomiais de grau 3, com integrais primeiras racionais de grau 2 que possuem centros. Estudamos o número máximo de ciclos limite que podem bifurcar quando perturbamos esses sistemas dentro de todas as classes dos sistemas diferenciais polinomiais

cúbicos. Considerando a família (5.1) dada na página 79, temos que o número máximo de ciclos limite que bifurcam, quando a perturbamos dentro da classe de todos os sistemas polinomiais diferenciais cúbicos contínuos é 3, e descontínuos é pelo menos 12. Para as famílias P_1 , P_2 , P_4 e P_6 dadas nas páginas 98 e 99, obtemos que o número máximo de ciclos limite que bifurcam, quando as perturbamos dentro da classe de todos os sistemas polinomiais diferenciais cúbicos contínuos é 3 (veja a Tabela 6.1). Obtemos esses números usando a teoria do “averaging” de primeira ordem.

No próximo capítulo, apresentamos conceitos preliminares sobre as teorias envolvidas para desenvolver esse trabalho: sistemas descontínuos, regularização, sistemas lineares por partes e por fim teoria geométrica das perturbações singulares.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Nesse capítulo, damos alguns conceitos preliminares cruciais para o desenvolvimento do nosso trabalho. Começamos apresentando os sistemas não-suaves e o processo de regularização. Em seguida, apresentamos os campos de vetores lineares por partes em \mathbb{R}^2 , alguns resultados básicos da teoria geométrica das perturbações singulares e, por fim, apresentamos alguns resultados sobre a teoria do “averaging” de primeira ordem que serão usados nos Capítulos 5 e 6.

2.1 Sistemas Não–Suaves

Seguindo a terminologia de Filippov, o sistema (1.1) define 3 regiões em Σ :

$$\begin{aligned}\Sigma^c &= \{x \in \Sigma : (X_+.h)(X_-.h) > 0\} \text{ (região de costura),} \\ \Sigma^e &= \{x \in \Sigma : X_+.h > 0 \text{ e } X_-.h < 0\} \text{ (região de escape),} \\ \Sigma^s &= \{x \in \Sigma : X_+.h < 0 \text{ e } X_-.h > 0\} \text{ (região de deslize),}\end{aligned}$$

onde $X_i.h(x) = \langle \nabla h(x), X_i(x) \rangle$, $i \in \{-, +\}$. De acordo a convenção de Filippov as trajetórias deslizam sobre $\Sigma^s \cup \Sigma^e$ e são governadas pelo campo de vetores pertencente ao cone gerado por X_- e X_+ e tangente a Σ , chamado *campo deslizante*. Sua expressão é dada por

$$X^\Sigma(x) = \frac{(X_-.h)X_+ - (X_+.h)X_-}{(X_- - X_+).h}. \quad (2.1)$$

Dizemos que $x \in \Sigma$ é um *ponto regular* se

- (i) $(X_- \cdot h(x))(X_+ \cdot h(x)) > 0$ ou
(ii) $(X_- \cdot h(x))(X_+ \cdot h(x)) < 0$ e $X^\Sigma(x) \neq 0$.

Os pontos de Σ que não são regulares são chamados de *singulares*. A fronteira entre as regiões Σ^c , Σ^s e Σ^e é dada por pontos singulares que são caracterizados por $X_i \cdot h(x) = 0$, $i = +$ ou $i = -$.

O processo de regularização foi introduzido por Sotomayor e Teixeira em [55] para estudar campos de vetores descontínuos. Esse processo consiste em uma família a um parâmetro de campos de vetores X_λ em \mathbb{R}^n , tais que para cada $\lambda_0 > 0$ temos

- (i) X_{λ_0} é igual a X_+ em todos os pontos de Σ^+ cuja distância a Σ é maior do que λ_0 .
(ii) X_{λ_0} é igual a X_- em todos os pontos de Σ^- cuja distância a Σ é maior do que λ_0 .

Uma função C^∞ , $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é chamada de *função transição* se $\varphi(s) = -1$ para $s \leq -1$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(s) = 1$ para $s \geq 1$ e $\varphi'(s) > 0$ para $s \in (-1, 1)$ (veja Figura 2.1).

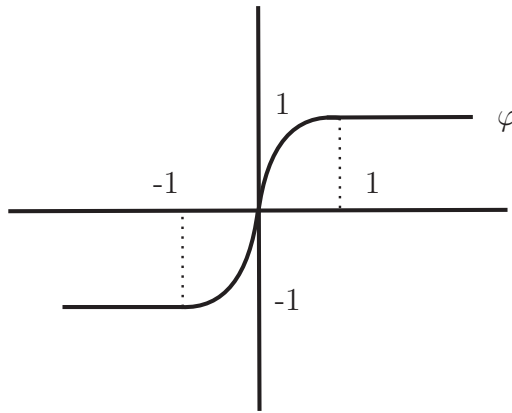


Figura 2.1: Gráfico da função transição φ .

A regularização do sistema (1.1) é dada por

$$\dot{x} = X_\lambda(x) = \frac{X_+ + X_-}{2} + \varphi\left(\frac{h(x)}{\lambda}\right) \frac{X_+ - X_-}{2}, \quad (2.2)$$

onde φ é a função transição. Denote $\varphi_\lambda = \varphi(h(x)/\lambda)$. A *zona de regularização* é a zona em torno da região de descontinuidade Σ , dada por $\varphi_\lambda^{-1}(-1, 1)$.

Agora, iremos apresentar a definição de poli-trajetória fechada. Problemas relacionados a poli-trajetórias fechadas podem ser encontrados em [8, 54].

Definição 1. *Considere um campo de vetores não-suave X em \mathbb{R}^2 na forma (1.1).*

1. *Uma curva Γ é uma **poli-trajetória fechada** de X se Γ é fechada e as seguintes condições são satisfeitas.*

- Γ contém arcos de pelo menos dois dos campos de vetores $X^-|_{\Sigma^-}$, $X^+|_{\Sigma^+}$ e X^Σ .
- A transição entre arcos de X^- e arcos de X^+ (e vice versa) acontece em pontos de costura.
- A transição entre arcos de X^- (ou X^+) e arcos de X^Σ acontece através de pontos de dobra ou pontos regulares na região de deslize ou escape, respeitando orientação.

2. *Seja Γ uma poli-trajetória fechada de X . Dizemos que*

- Γ é uma **poli-trajetória fechada de costura** se Γ encontra Σ somente em pontos de costura (ver Fig. 2.2).
- Γ é uma **poli-trajetória fechada de deslize** se Γ contém pelo menos um arco de X^Σ . Γ é chamada poli-trajetória de deslize de X^- se ela contém arcos de X^- e não contém arcos de X^+ . Analogamente para X^+ (ver Fig. 2.2).

3. *Seja Γ uma poli-trajetória fechada de X . Dizemos que Γ é **hiperbólica** se*

- Γ é uma poli-trajetória de costura e $\eta'(p) \neq 1$ onde η é a aplicação de primeiro retorno definida em um segmento N com $p \in N \cap \Gamma$;
- Γ é uma poli-trajetória de deslize e todos os arcos de X^Σ são de deslize ou todos são de escape.

Na próxima seção, definimos campos de vetores lineares por partes.

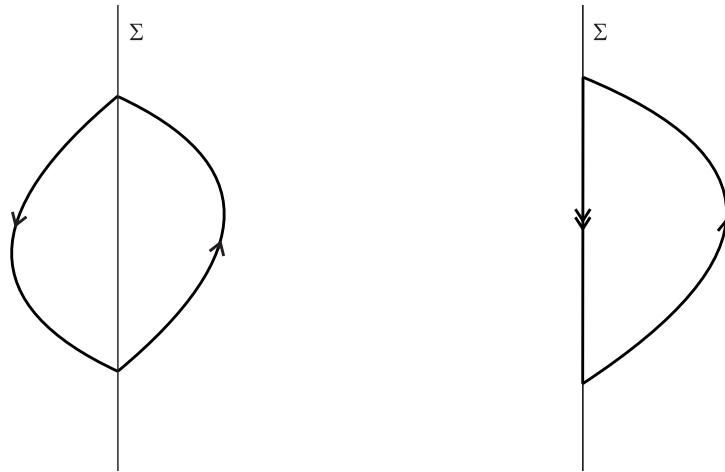


Figura 2.2: Poli-trajetórias fechadas de costura e deslize, respectivamente.

2.2 Campos de Vetores Lineares por Partes

Campos de vetores lineares não possuem ciclos limite, mas existem muitos exemplos de campos de vetores PWL com poli-trajetórias fechadas hiperbólicas (veja Exemplos 4, 5 e 6). Um dos principais problemas na teoria qualitativa das equações diferenciais planares é identificar a existência e o número de ciclos limite. Este problema tem sido estudado recentemente em PWL, veja por exemplo, [23, 32].

Denote $\Sigma = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$, $\Sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ e $\Sigma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$. Seja Ω^L o espaço dos campos de vetores F em \mathbb{R}^2 definidos por:

$$F(x, y) = \begin{cases} F^+(x, y) & \text{se } x \geq 0, \\ F^-(x, y) & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde, $F^+(x) = (F_1^+(x), F_2^+(x)) = A^+x + b^+$ e $F^-(x) = (F_1^-(x), F_2^-(x)) = A^-x + b^-$, $A^+ = (a_{ij}^+)$ e $A^- = (a_{ij}^-)$ são matrizes constantes (2×2) e $b^+ = (b_1^+, b_2^+) \in \mathbb{R}^2$, $b^- = (b_1^-, b_2^-) \in \mathbb{R}^2$ são vetores constantes em \mathbb{R}^2 e $x = (x, y)$.

Dizemos que (2.3) é um **campo de vetores linear por partes (PWL)** e denotamos $F \in \Omega^L$. Escrevemos $F = (F^+, F^-)$, que adotamos ser bi-avaliado nos pontos de Σ .

Seguindo a terminologia de Filippov, distinguimos os seguintes conjuntos em Σ :

$$\Sigma^c = \{(0, y) : F_1^+(0, y) \cdot F_1^-(0, y) > 0\} \text{ (conjunto de costura).}$$

$$\Sigma^e = \{(0, y) : F_1^+(0, y) > 0 \text{ e } F_1^-(0, y) < 0\} \text{ (conjunto de escape).}$$

$$\Sigma^s = \{(0, y) : F_1^+(0, y) < 0 \text{ e } F_1^-(0, y) > 0\} \text{ (conjunto de desliz).}$$

A fronteira entre os conjuntos Σ^c , Σ^s e Σ^e é dada por pontos de dobra. Dizemos que $(0, y) \in \Sigma$ é um **ponto de dobra** para o campo de vetores PWL (2.3) se $F_1^-(0, y) = 0$ e $a_{12}^- F_2^-(0, y) \neq 0$, ou $F_1^+(0, y) = 0$ e $a_{12}^+ F_2^+(0, y) \neq 0$. O campo de vetores PWL (2.3) tem no máximo dois pontos de dobra. De fato, se $a_{12}^\pm = 0$, então o campo de vetores não tem pontos de dobra. Se $a_{12}^\pm \neq 0$, então as equações $F_1^\pm(0, y) = 0$ implicam a existência de dois pontos de dobra.

O campo deslizante dado na seção anterior é agora dado por $F^\Sigma(y) = (0, g(y))$, onde

$$\dot{y} = g(y) = \frac{F_1^+(x)F_2^-(x) - F_1^-(x)F_2^+(x)}{F_1^+(x) - F_1^-(x)}, \quad x = (x, y) \in \Sigma^e \cup \Sigma^s. \quad (2.4)$$

2.3 Teoria Geométrica de Perturbações Singulares

Nesta seção apresentamos um resultado de Fenichel sobre perturbações singulares. Sejam $w = (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e f, g funções de classe C^r , com $r \geq 1$. Um *problema de perturbação singular* é um sistema dado por

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y, \varepsilon). \quad (2.5)$$

Para $\varepsilon = 0$, temos o *problema reduzido* dado por

$$\dot{x} = f(x, y, 0), \quad g(x, y, 0) = 0. \quad (2.6)$$

O conjunto \mathcal{M}_0 definido por $g(x, y, 0) = 0$ é chamado *variedade crítica* (também conhecido na literatura como *variedade lenta*). Fazendo um reescalonamento do tempo $\tau = t/\varepsilon$, o sistema (2.5) se transforma no sistema

$$x' = \varepsilon f(x, y, \varepsilon), \quad y' = g(x, y, \varepsilon). \quad (2.7)$$

Os sistemas (2.5) e (2.7) são chamados sistemas *lento* e *rápido*, respectivamente. Para $\varepsilon > 0$, eles tem o mesmo retrato de fase. Para $\varepsilon = 0$, o sistema (2.7) recebe o nome de *problema de camada*. Adicionamos ao sistema rápido (2.7) a equação trivial $\varepsilon' = 0$ que fornece o seguinte sistema

$$x' = \varepsilon f(x, y, \varepsilon), \quad y' = g(x, y, \varepsilon) \quad \varepsilon' = 0. \quad (2.8)$$

Seja X_ε o campo de vetores associado ao sistema (2.8). Denote $J(x_0, y_0)$ a matriz jacobiana de $X_\varepsilon \times \{0\}$ no ponto $(x_0, y_0, 0)$. Assumimos que $J(x_0, y_0)$ tem k^s autovalores com parte real negativa e k^u autovalores com parte real positiva, para $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_0$. Os correspondentes auto-espacos estável e instável tem dimensões k^s e k^u , respectivamente.

Definição 2. Dizemos que $K \subset \mathcal{M}_0$ compacto, é normalmente hiperbólico se as partes reais dos autovalores de $D_2g(x, y, 0)$ são diferentes de zero, para todo $(x, y) \in K$.

Definição 3. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ conjuntos compactos. A distância de Hausdorff entre A e B é $D(A, B) = \max_{z_1 \in A, z_2 \in B} \{d(z_1, B), d(z_2, A)\}$.

Teorema 1 (Fenichel [22]). Se $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_0$ é uma variedade invariante compacta normalmente hiperbólica de dimensão j do sistema reduzido (2.6), com uma variedade estável local W^s de dimensão j^s e uma variedade instável local W^u de dimensão j^u , então existe uma família ε -contínua \mathcal{N}_ε tal que

- (i) $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$;
- (ii) \mathcal{N}_ε é uma variedade invariante hiperbólica do sistema (2.5), com uma variedade estável local $\mathcal{N}_\varepsilon^s$ de dimensão $(j^s + k^s)$ e uma variedade instável local $\mathcal{N}_\varepsilon^u$ de dimensão $(j^u + k^u)$.

2.4 Teoria do Averaging de Primeira Ordem

Nesta seção mostramos alguns resultados conhecidos que precisamos para provar nossos resultados para as classes dadas nos Capítulos 5 e 6. O seguinte teorema fornece soluções periódicas de um sistema diferencial contínuo. Veja [58] para uma demonstração.

Considere o sistema diferencial

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.9)$$

com $x \in D$, onde D é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n e $t \geq 0$. Além disso, assumimos que $F(t, x)$ é T -periódica em t . Separadamente, considere em D a equação diferencial “média”

$$\dot{y} = \varepsilon f(y), \quad y(0) = x_0, \quad (2.10)$$

onde

$$f(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt.$$

Teorema 2. *Considere os dois problemas de valor inicial (2.9) e (2.10). Suponha que:*

(i) *F , seu Jacobiano $\partial F/\partial x$, seu Hessiano $\partial^2 F/\partial x^2$ estão definidos, são contínuos e limitados por uma constante independente de ε em $[0, \infty) \times D$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.*

(ii) *F é T -periódica em t (T independente de ε).*

(iii) *$y(t)$ pertence a D no intervalo de tempo $[0, 1/\varepsilon]$.*

Então, as seguintes sentenças valem.

(a) *Para $t \in [0, 1/\varepsilon]$ temos que $x(t) - y(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

(b) *Se p é um ponto de equilíbrio da função “averaging” (2.10) e*

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{y=p} \neq 0,$$

então existe uma solução T -periódica $x(t, \varepsilon)$ da equação (2.9) tal que $x(0, \varepsilon) \rightarrow p$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

(c) *A estabilidade ou instabilidade da solução periódica $x(t, \varepsilon)$ é dada pela estabilidade ou instabilidade do ponto de equilíbrio p do sistema (2.10). De fato, o ponto de equilíbrio p tem o comportamento dado pela aplicação de Poincaré associada a solução periódica $x(t, \varepsilon)$.*

O seguinte teorema é uma versão descontínua do teorema anterior que fornece soluções periódicas de um sistema diferencial descontínuo periódico. Veja [41] para uma prova.

Teorema 3. *Considere o seguinte sistema diferencial descontínuo*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.11)$$

com

$$\begin{aligned} F(t, x) &= F_1(t, x) + \text{sign}(h(t, x))F_2(t, x), \\ R(t, x, \varepsilon) &= R_1(t, x, \varepsilon) + \text{sign}(h(t, x))R_2(t, x, \varepsilon), \end{aligned}$$

onde $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R_1, R_2 : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, T -periódicas na variável t e D é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n . Suponhamos também que h é uma função C^1 tendo 0 como um valor regular. Denote por $\mathcal{M} = h^{-1}(0)$, por $\Sigma = \{0\} \times D \not\subseteq \mathcal{M}$, por $\Sigma_0 = \Sigma \setminus \mathcal{M} \neq \emptyset$ e seus elementos por $z \equiv (0, z) \notin \mathcal{M}$.

Defina a função “averaging” $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$f(x) = \int_0^T F(t, x) dt.$$

Assuma as três seguintes condições.

- (i) F_1, F_2, R_1, R_2 e h são localmente L -Lipschitz com respeito a x .
- (ii) Para $a \in \Sigma_0$ com $f(a) = 0$ existe uma vizinhança V de a tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$ e $d_B(f, V, a) \neq 0$, (i.é. o grau de Brouwer de f em a é diferente de zero).
- (iii) Se $(\partial h / \partial t)(t, z) \neq 0$, então para todo $(t_0, z_0) \in \mathcal{M}$ temos $(\partial h / \partial t)(t_0, z_0) \neq 0$. Se $(\partial h / \partial t)(t_0, z_0) \equiv 0$, então $(\langle \nabla_x h, F_1 \rangle^2 - \langle \nabla_x h, F_2 \rangle^2)(t_0, z_0) > 0$, para todo $(t_0, z_0) \in [0, T] \times \mathcal{M}$.

Então, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $x(\cdot, \varepsilon)$ do sistema (2.11) tal que $x(t, \varepsilon) \rightarrow a$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Se a função f do Teorema 3 for de classe C^1 , então é suficiente checar que o Jacobiano de f avaliado em a é diferente de zero para mostrar que $d_B(f, V, a) \neq 0$. Para mais detalhes, veja o Teorema 1.1.2 de [46].

Considere um sistema planar

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (2.12)$$

onde $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. Suponha que o sistema (2.12) tem uma família contínua de órbitas periódicas

$$\{\Gamma_h\} \subset \{(x, y) : H(x, y) = h, h_1 < h < h_2\}$$

onde H é uma integral primeira de (2.12). Considere as seguintes perturbações do sistema (2.12)

$$\dot{x} = P(x, y) + \varepsilon p(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) + \varepsilon q(x, y), \quad (2.13)$$

onde $p, q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas.

O próximo teorema (veja o Teorema 5.2 de [6] para uma prova) fornece uma ferramenta para transformar o sistema perturbado (2.13) na forma padrão da teoria do “averaging” dada no Teorema 2.

Teorema 4. *Considere o sistema (2.12) e sua integral primeira H . Assuma que $xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0$ para todo (x, y) pertencente as órbitas periódicas $\{\Gamma_h\}$. Seja $\rho : (\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2}) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ uma função contínua tal que*

$$H(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \sin \varphi) = R^2, \quad (2.14)$$

para todo $R \in (\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2})$ e todo $\varphi \in [0, 2\pi)$. Então a equação diferencial que descreve a dependência entre a raiz quadrada da energia $R = \sqrt{h}$ e o ângulo φ para o sistema (2.13) é

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.15)$$

onde $\mu = \mu(x, y)$ é o fator integrante do sistema (2.12), correspondente a integral primeira H , $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$ e $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$.

Lembramos que μ é o fator integrante correspondente a integral primeira H do sistema (2.12) se

$$\mu P = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{e} \quad \mu Q = \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Capítulo 3

Campos de Vetores Lineares por Partes com Poli–Trajetórias Fechadas de Deslize

Nesse capítulo, estudamos os campos de vetores lineares por partes (PWL) em \mathbb{R}^2 . A seguir, apresentamos algumas notações convenientes para o estudo dos casos sela–sela, sela–foco, foco–sela e foco–foco.

3.1 Estudo dos Casos Sela–Sela, Sela–Foco, Foco– Sela e Foco–Foco

Classificamos os campos de vetores (2.3) com respeito aos pontos de equilíbrio (sela ou foco) em cada semi-plano e com respeito aos conjuntos na descontinuidade (deslize, escape e costura). Além disso, se existem pontos de equilíbrio do tipo sela, analisamos a interseção de Σ com as variedades estável e instável dessas singularidades.

3.1.1 O Caso Sela–Sela

Dizemos que um ponto de equilíbrio p do tipo sela é *real* quando ele pertence ao semi-plano aberto onde definimos o correspondente sistema diferencial linear e é chamado *virtual* se

ele pertence ao outro semi-plano aberto. Aqui, não estamos considerando o caso onde o ponto de equilíbrio pertence a Σ .

Introduzimos as seguintes notações.

- (a) **C**, **S** e **E** representam respectivamente os conjuntos de costura, deslize e escape na linha de descontinuidade. Assim temos por exemplo, as seguintes combinações: **C**, **CS**, **CSC**. Em nossa notação **CSC** significa que Σ é dado por

$$\Sigma = (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, +\infty)$$

no qual $(-\infty, a) \cup (b, +\infty) \subset \Sigma^c$, $(a, b) \subset \Sigma^s$ e a, b são pontos de dobra. Analogamente para os outros casos.

- (b) **R** e **V** representam ponto de equilíbrio real e virtual, respectivamente. Por exemplo, se o ponto de equilíbrio p^- de F^- é real e o ponto de equilíbrio p^+ de F^+ é virtual, denotamos **RV**.
- (c) \mathbf{W}_L^s e \mathbf{W}_L^u representam respectivamente as variedades estável e instável sobre o semi-plano esquerdo e \mathbf{W}_R^s e \mathbf{W}_R^u representam respectivamente as variedades estável e instável sobre o semi-plano direito, isto é, $\mathbf{W}_L^\lambda = \mathbf{W}_L^\lambda(p^-) \cap \Sigma^-$ e $\mathbf{W}_R^\lambda = \mathbf{W}_R^\lambda(p^+) \cap \Sigma^+$, para $\lambda \in \{s, u\}$.
- (d) \mathbf{F}_L e \mathbf{F}_R representam a coordenada y dos pontos de dobra dos campos de vetores F^- e F^+ , respectivamente. Por comodidade, chamamos \mathbf{F}_L e \mathbf{F}_R de pontos de dobra porque a coordenada x desses pontos de dobra é igual a zero.

Consideramos os seguintes parâmetros.

- (n_1) 39 possibilidades para as regiões em Σ (**C**, **S**, **E**, **CC**, etc), (3+3.3+3.3.3).
- (n_2) 4 possibilidades para os pontos de equilíbrio (**RR**, **RV**, **VR**, **VV**).
- (n_3) Posição relativa das variedades invariantes no semi-plano esquerdo com Σ . Existem 4 escolhas possíveis para o parâmetro n_3 :

$$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma = \emptyset, \quad \mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset, \quad \mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L, \quad \mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L.$$

(n_4) Posição relativa das variedades invariantes no semi-plano direito com Σ . Existem 4 escolhas possíveis para o parâmetro n_4 :

$$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma = \emptyset, \quad \mathbf{W}_R^u \cap \Sigma = \emptyset, \quad \mathbf{W}_R^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_R, \quad \mathbf{W}_R^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_R.$$

Denote

$$\mathcal{P}_1 = \{(n_1, n_2, n_3, n_4) \mid n_1 \in \{1, \dots, 39\}, n_2, n_3, n_4 \in \{1, \dots, 4\}\}.$$

Definição 4. *Uma configuração sela-sela é um vetor $p = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathcal{P}_1$.*

3.1.2 O Caso Sela–Foco (Foco–Sela)

Dizemos que um ponto de equilíbrio do tipo foco é *real* se ele pertence ao semi-plano aberto onde definimos o correspondente sistema diferencial linear e ele é chamado *virtual* caso contrário.

Os parâmetros (n_1), (n_2) e (n_3) introduzidos na Subseção 3.1.1 são os mesmos. Agora, $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, $n_3 = m_3$ e considere os novos parâmetros.

(m'_3) Posição relativa das variedades invariantes no semi-plano direito com Σ . Existem 4 escolhas possíveis para o parâmetro n_3 :

$$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma = \emptyset, \quad \mathbf{W}_R^u \cap \Sigma = \emptyset, \quad \mathbf{W}_R^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_R, \quad \mathbf{W}_R^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_R.$$

(m_4) Orientabilidade do foco no semi-plano direito. $m_4 = -1$ e $m_4 = +1$, representam a orientação anti-horária e horária, respectivamente.

(m'_4) Orientabilidade do foco no semi-plano esquerdo. $m'_4 = -1$ e $m'_4 = +1$, representam a orientação anti-horária e horária, respectivamente.

(m_5) Estabilidade do foco no semi-plano direito. $m_5 < 0$ e $m_5 > 0$, representam foco atrator e foco repulsor, respectivamente.

(m'_5) Estabilidade do foco no semi-plano esquerdo. $m'_5 < 0$ e $m'_5 > 0$, representam foco atrator e foco repulsor, respectivamente.

Denote

$$\mathcal{P}_2^1 = \{(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \mid m_1 \in \{1, \dots, 39\}, m_2, m_3 \in \{1, \dots, 4\}, m_4, m_5 \in \{1, 2\}\}.$$

$$\mathcal{P}_2^2 = \{(m_1, m_2, m'_3, m'_4, m'_5) \mid m_1 \in \{1, \dots, 39\}, m_2, m'_3 \in \{1, \dots, 4\}, m'_4, m'_5 \in \{1, 2\}\}.$$

Definição 5. *Uma configuração sela-foco é um vetor $p = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \in \mathcal{P}_2^1$. Uma configuração foco-sela é um vetor $p' = (m_1, m_2, m'_3, m'_4, m'_5) \in \mathcal{P}_2^2$. Denotamos $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2^1 \cup \mathcal{P}_2^2$.*

3.1.3 O Caso Foco–Foco

Agora $s_1 = n_1$, $s_2 = n_2$ e considere os novos parâmetros a seguir.

- (s_3) Orientabilidade do foco no semi-plano esquerdo. $s_3 = -1$ e $s_3 = +1$, representam a orientação anti-horária e horária, respectivamente.
- (s_4) Estabilidade do foco no semi-plano esquerdo. $s_4 < 0$ e $s_4 > 0$, representam foco atrator e foco repulsor, respectivamente.
- (s_5) Orientabilidade do foco no semi-plano direito. $s_5 = -1$ e $s_5 = +1$, representa a orientação anti-horária e horária, respectivamente.
- (s_6) Estabilidade do foco no semi-plano direito. $s_6 < 0$ e $s_6 > 0$, representam foco atrator e foco repulsor, respectivamente.

Denote

$$\mathcal{P}_3 = \{(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) \mid s_1 \in \{1, \dots, 39\}, s_2 \in \{1, \dots, 4\}, s_3, s_4, s_5, s_6 \in \{1, 2\}\}.$$

Definição 6. *Uma configuração foco–foco é um vetor $p = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) \in \mathcal{P}_3$.*

3.2 Principais Resultados para os sistemas PWL

Nesta seção enunciamos os principais resultados para os sistemas PWL.

Denotamos por φ^p um fluxo em \mathbb{R}^2 de um campo de vetores PWL $F = (F^-, F^+)$ satisfazendo que o retrato de fase de F apresenta a configuração p .

Definição 7. *Seja $p, q \in \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2$ ou 3 configurações e φ^p um fluxo com configuração p . Dizemos que p e q são relacionados por R_i se*

- (i) *a configuração correspondente ao fluxo $\varphi^p(\pm t, x, y)$ é igual a q ou*
- (ii) *a configuração correspondente ao fluxo $\bar{\varphi}(t, x, y) = f_\lambda(\varphi^p(\pm t, x, y))$ é igual a q para algum $\lambda = 1, 2, 3$, onde $f_1(x, y) = (-x, y)$, $f_2(x, y) = (x, -y)$ e $f_3(x, y) = (-x, -y)$.*

Essa definição não depende do fluxo φ^p . Temos que R_i é uma relação de equivalência para $i = 1, \dots, 3$, assim podemos definir os espaços quocientes $\widehat{\mathcal{P}}_1 = \mathcal{P}_1/R_1$, $\widehat{\mathcal{P}}_2 = (\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}'_2)/R_2$ e $\widehat{\mathcal{P}}_3 = \mathcal{P}_3/R_3$. Essencialmente, as relações de equivalência introduzidas acima consideram iguais duas configurações que são obtidas uma da outra via movimentos rígidos ou mudanças na orientação.

Teorema 5. *Considere os seguintes itens.*

- (a) *A cardinalidade do conjunto $\widehat{\mathcal{P}}_1$ é 22, i.é. o conjunto $\widehat{\mathcal{P}}_1$ tem 22 configurações sela-sela.*
- (b) *A cardinalidade do conjunto $\widehat{\mathcal{P}}_2$ é 28, i.é. o conjunto $\widehat{\mathcal{P}}_2$ tem 28 configurações sela-foco (ou foco-sela).*
- (c) *A cardinalidade do conjunto $\widehat{\mathcal{P}}_3$ é 28, i.é. o conjunto $\widehat{\mathcal{P}}_3$ tem 28 configurações foco-foco.*

O próximo teorema diz quais configurações obtidas no Teorema 5 podem ter poli-trajetórias fechadas de deslize.

Teorema 6 (Não existência de poli-trajetórias fechadas de deslize). *Considere os seguintes itens.*

- (a) *Se um campo de vetores PWL do tipo sela-sela tem uma poli-trajetória fechada de deslize, então sua configuração é dada pela linha 13 da Tabela 3.1.*
- (b) *Se um campo de vetores PWL do tipo sela-foco tem uma poli-trajetória fechada de deslize, então sua configuração é dada pelas linhas 1, 6, 11, 17, 21 e 25-27 da Tabela 3.2.*

(c) Se um campo de vetores PWL do tipo foco–foco tem uma poli–trajetória fechada de deslize, então sua configuração é dada pelas linhas 3, 6, 10–12, 17, 20 e 23–26 da Tabela 3.3.

Teorema 7. Para cada uma das 20 configurações listadas no Teorema 6 encontramos um ou no máximo dois polinômios quadráticos $R(a_{ij}^\pm, b_j^\pm)$ e $S(a_{ij}^\pm, b_j^\pm)$, $i, j = 1, 2$, cujos sinais determinam o conjunto de parâmetros para os quais podem existir poli–trajetórias fechadas de deslize.

A existência de poli–trajetórias fechadas de deslize depende de algumas desigualdades que são relacionadas com: posição dos pontos de equilíbrio (real ou virtual), sinal da derivada do campo deslizante e o determinante das matrizes A^\pm do sistema (2.3). Cada uma dessas expressões é um polinômio que depende dos parâmetros a_{ij}^\pm e b_j^\pm do sistema (2.3).

3.3 Prova dos Teoremas 5 e 6

Nesta seção, provamos os Teoremas 5 e 6. Por comodidade, dizemos somente o termo configuração na prova dos Teoremas 5, 6 e 7, em vez de configuração sela–sela, configuração sela–foco e configuração foco–foco.

3.3.1 Prova do Teorema 5-(a)

Combinando as possíveis escolhas para os parâmetros n_1, n_2, n_3, n_4 , temos 2496 configurações possíveis porém, nem todas são realizáveis. O lema a seguir nos diz o número de configurações realizáveis para o caso sela–sela.

Lema 1. Se o campo de vetores (2.3) é do tipo sela–sela, então a cardinalidade do conjunto \mathcal{P}_1 é 88, i.é, o conjunto \mathcal{P}_1 tem 88 configurações sela–sela.

Demonstração. Temos que:

- (i) Se $\mathbf{W}_{\Lambda_1}^{\lambda_1} \cap \Sigma = \emptyset$ e $\mathbf{W}_{\Lambda_2}^{\lambda_2} \cap \Sigma = \emptyset$ para $\Lambda_1 \neq \Lambda_2 \in \{L, R\}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \{s, u\}$, então $F^{\Lambda_1}, F^{\Lambda_2}$ não tem pontos de dobra. Isso reduz o número de configurações para 1920.

- (ii) Se $\mathbf{W}_{\Lambda_1}^{\lambda_1} \cap \Sigma \neq \emptyset$, $\mathbf{W}_{\Lambda_1}^{\lambda_2} \cap \Sigma \neq \emptyset$ e $\mathbf{W}_{\Lambda_2}^{\lambda_3} \cap \Sigma = \emptyset$ para $\Lambda_1 \neq \Lambda_2 \in \{L, R\}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_3 \in \{s, u\}$, então existe somente um ponto de dobra. Esse fato reduz o número de configurações para 960.
- (iii) Se $\mathbf{W}_{\Lambda_1}^{\lambda_1} \cap \Sigma \neq \emptyset$ e $\mathbf{W}_{\Lambda_2}^{\lambda_2} \cap \Sigma \neq \emptyset$ para todo $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \{L, R\}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \{s, u\}$, então existem um ou dois pontos de dobra. Isso reduz o número de configurações para 912.
- (iv) Para os casos sem pontos de dobra ou com somente um ponto de dobra, para cada escolha dos parâmetros n_2, n_3 e n_4 , existe somente uma escolha possível para n_1 . Isso reduz o número de configurações para 496.
- (v) Para as configurações com dois pontos de dobra, com os parâmetros n_2 assumindo **RV** ou **VR**, e n_3 e n_4 dados por $\mathbf{W}_{\Lambda_1}^s \cap \Sigma > F_{\Lambda_1}$, $\mathbf{W}_{\Lambda_2}^s \cap \Sigma < F_{\Lambda_2}$, $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \{L, R\}$, $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, existe somente uma escolha possível para n_1 . O mesmo acontece com n_2 assumindo **RR** ou **VV**, e n_3 e n_4 dados por $\mathbf{W}_{\Lambda_1}^s \cap \Sigma > F_{\Lambda_1}$, $\mathbf{W}_{\Lambda_2}^s \cap \Sigma > F_{\Lambda_2}$ ou $\mathbf{W}_{\Lambda_1}^s \cap \Sigma < F_{\Lambda_1}$, $\mathbf{W}_{\Lambda_2}^s \cap \Sigma < F_{\Lambda_2}$, $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \{L, R\}$, $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$. Isso reduz o número de configurações para 288. Para os outros casos com dois pontos de dobra, para cada escolha dos parâmetros n_2, n_3 e n_4 existem duas escolhas possíveis para n_1 . Assim podemos reduzir o número de configurações para 88, como queríamos.

□

Prova do Teorema 5-(a). De acordo com o Lema 1, temos que a cardinalidade de \mathcal{P}_1 é 88. Essas configurações podem ser reduzidas a 44 configurações, considerando o item (i) da relação R_1 , por exemplo, as configurações

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E} & \mathbf{RR} \quad \mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset \quad \mathbf{W}_R^u \cap \Sigma = \emptyset \\ \mathbf{S} & \mathbf{RR} \quad \mathbf{W}_L^s \cap \Sigma = \emptyset \quad \mathbf{W}_R^s \cap \Sigma = \emptyset \end{array}$$

são equivalentes. Assim pela relação R_1 consideramos as linhas da Tabela 3.1. Ainda podemos reduzir a 22 configurações (veja Tabela 3.1). De fato, as configurações correspondentes as linhas 27, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 40 e 44 são equivalentes as configurações correspondentes as linhas 26, 3, 29, 6, 7, 8, 33, 10, 32, 9,

SELA-SELA						
1	E	RR	$W_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$W_R^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma \neq \emptyset$
2	C	RR	$W_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma = \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma = \emptyset$
3	EC	RR	$W_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma > F_R$	$W_R^u \cap \Sigma < F_R$
4	S	VV	$W_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$W_R^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma \neq \emptyset$
5	C	VV	$W_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma = \emptyset$	$W_R^u \cap \Sigma \neq \emptyset$
6	SC	VV	$W_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma > F_R$	$W_R^u \cap \Sigma < F_R$
7	C	VR	$W_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$W_R^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma \neq \emptyset$
8	S	VR	$W_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma = \emptyset$	$W_R^u \cap \Sigma \neq \emptyset$
9	CS	VR	$W_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma > F_R$	$W_R^u \cap \Sigma < F_R$
10	CE	VR	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L^u \cap \Sigma < F_L$	$W_R^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma \neq \emptyset$
11	CC	RR	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L^u \cap \Sigma < F_L$	$W_R^s \cap \Sigma < F_R$	$W_R^u \cap \Sigma > F_R$
12	CEC	RR	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L^u \cap \Sigma < F_L$	$W_R^s \cap \Sigma < F_R$	$W_R^u \cap \Sigma > F_R$
13	ES	RV	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L^u \cap \Sigma < F_L$	$W_R^s \cap \Sigma < F_R$	$W_R^u \cap \Sigma > F_R$
14	ES	RR	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L \cap \Sigma < F_L$	$W_R^s \cap \Sigma > F_R$	$W_R^u \cap \Sigma < F_R$
15	CC	RV	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L^u \cap \Sigma < F_L$	$W_R^s \cap \Sigma > F_R$	$W_R^u \cap \Sigma < F_R$
16	CEC	RV	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L^u \cap \Sigma < F_L$	$W_R^s \cap \Sigma > F_R$	$W_R^{s u} \cap \Sigma < F_R$
17	ES	VV	$W_L^s \cap \Sigma < F_L$	$W_L^u \cap \Sigma > F_L$	$W_R^s \cap \Sigma < F_R$	$W_R^u \cap \Sigma > F_R$
18	CC	VV	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L^u \cap \Sigma < F_L$	$W_R^s \cap \Sigma < F_R$	$W_R^u \cap \Sigma > F_R$
19	CEC	VV	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L^u \cap \Sigma < F_L$	$W_R^s \cap \Sigma < F_R$	$W_R^u \cap \Sigma > F_R$
20	ECS	RR	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L^u \cap \Sigma < F_L$	$W_R^s \cap \Sigma > F_R$	$W_R^u \cap \Sigma < F_R$
21	ECS	VV	$W_L^s \cap \Sigma < F_L$	$W_L^u \cap \Sigma > F_L$	$W_R^s \cap \Sigma < F_R$	$W_R^u \cap \Sigma > F_R$
22	SCE	RV	$W_L^s \cap \Sigma < F_L$	$W_L^u \cap \Sigma > F_L$	$W_R^s \cap \Sigma > F_R$	$W_R^u \cap \Sigma < F_R$
23	CSC	RR	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L^u \cap \Sigma < F_L$	$W_R^s \cap \Sigma < F_R$	$W_R^u \cap \Sigma > F_R$
24	CSC	RV	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L^u \cap \Sigma < F_L$	$W_R^s \cap \Sigma > F_R$	$W_R^u \cap \Sigma < F_R$
25	CSC	VV	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L^u \cap \Sigma < F_L$	$W_R^s \cap \Sigma < F_R$	$W_R^u \cap \Sigma > F_R$
26	CE	RR	$W_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma < F_R$	$W_R^u \cap \Sigma > F_R$
27	EC	RR	$W_L^s \cap \Sigma > F_L$	$W_L^u \cap \Sigma < F_L$	$W_R^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma \neq \emptyset$
28	CE	RR	$W_L^s \cap \Sigma < F_L$	$W_L^u \cap \Sigma > F_L$	$W_R^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma \neq \emptyset$
29	CS	VV	$W_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$W_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$W_R^s \cap \Sigma < F_R$	$W_R^u \cap \Sigma > F_R$

30	SC	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma \neq \emptyset$
31	CS	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma \neq \emptyset$
32	SC	VR	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_R$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_R$
33	EC	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma \neq \emptyset$
34	C	RV	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma \neq \emptyset$
35	E	RV	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma \neq \emptyset$
36	CE	RV	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_R$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_R$
37	EC	RV	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_R$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_R$
38	CS	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma \neq \emptyset$
39	SC	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma \neq \emptyset$
40	SE	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_R$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_R$
41	CC	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_R$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_R$
42	CEC	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_R$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_R$
43	CSC	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_R$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_R$
44	SCE	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_R^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_R$	$\mathbf{W}_R^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_R$

Tabela 3.1: Possíveis configurações para o caso sela-sela usando o item (i) da relação R_1 . As linhas 1 – 22 representam as configurações do Teorema 5-(a). A linha destacada representa a configuração que pode ter poli-trajetórias fechadas de deslize.

15, 24, 16, 13 e 87 respectivamente, pela relação R_1 (use $f_3(x, y) = (-x, -y)$), e as configurações correspondentes as linhas 3, 6, 9, 10, 12, 16 e 19 são equivalentes as configurações 26, 29, 32, 33, 23, 24 e 25 respectivamente, também pela R_1 (use $f_1(x, y) = (x, -y)$).

□

3.3.2 Prova do Teorema 5-(b)

Combinando as possíveis escolhas para os parâmetros m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 , temos 2496 configurações possíveis, todavia nem todas são realizáveis. O seguinte lema nos diz quais são realizáveis para o caso sela-foco.

Lema 2. *Se o campo de vetores (2.3) é do tipo sela-foco, então a cardinalidade do con-*

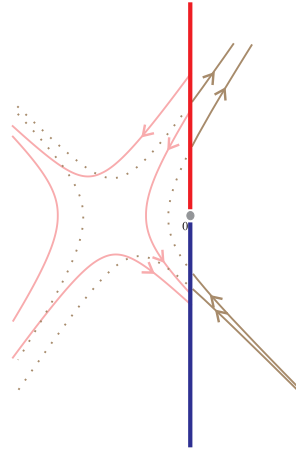


Figura 3.1: Linha 13 da Tabela 3.1.

junto \mathcal{P}_2 é 112, i.e., o conjunto \mathcal{P}_2 tem 112 configurações sela-foco.

Demonstração. Temos que:

- (i) Se $\mathbf{W}_L^\lambda \cap \Sigma = \emptyset$, $\lambda \in \{s, u\}$, então existe somente um ponto de dobra para F . Isso reduz o número de configurações para 1536.
- (ii) Se $\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$ e $\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma \neq \emptyset$, então existem um ou dois pontos de dobra. Isso reduz o número de combinações para 1440.
- (iii) Para o caso com somente um ponto de dobra, para cada escolha dos parâmetros m_2, m_3, m_4 e m_5 , existe somente uma escolha possível para m_1 . Isso reduz o número de combinações para 928.
- (iv) Para as configurações com dois pontos de dobra, para os parâmetros m_2 assumindo **RR** ou **RV**, e m_3, m_4 e m_5 dados por $\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < F_L, -, > 0$, ou $\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < F_L, -, < 0$, ou $\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > F_L, +, > 0$, ou $\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > F_L, +, < 0$, existe somente uma escolha possível para m_1 . O mesmo para m_2 assumindo **RR** ou **RV**, m_3, m_4 e m_5 dados por $\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > F_L, -, > 0$, ou $\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > F_L, -, < 0$, ou $\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < F_L, +, > 0$, ou $\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < F_L, +, < 0$. Isso reduz o número de combinações para 512. Para os outros casos sem pontos de dobra, para cada escolha dos parâmetros m_2, m_3, m_4 e m_5 existem duas escolhas possíveis para m_1 . Assim podemos reduzir o número de combinações para 112, como desejado.

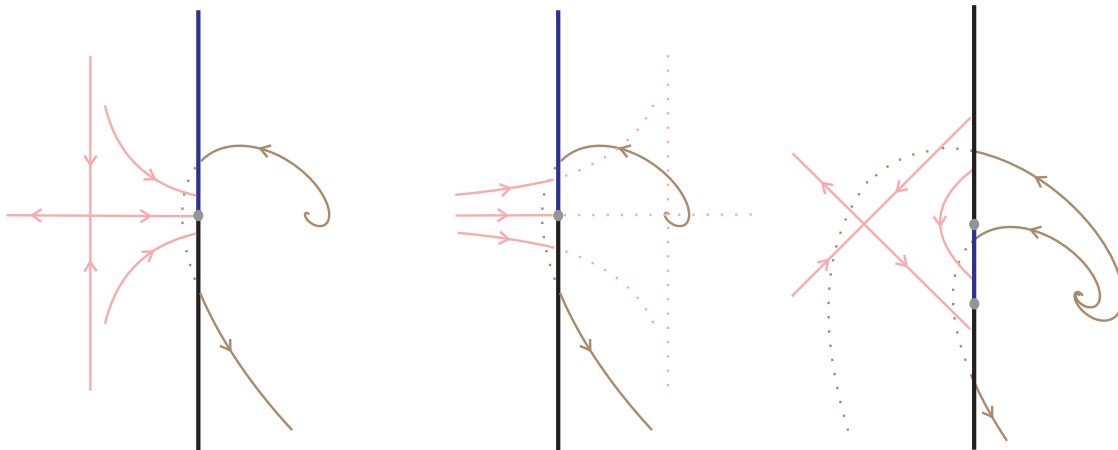


Figura 3.2: Linhas 1, 6 e 11 da Tabela 3.2.

□

Com ferramentas similares usadas na prova do Lema 2, provamos o seguinte lema.

Lema 3. *Se o campo de vetores (2.3) é do tipo foco-sela, então a cardinalidade do conjunto \mathcal{P}_2 é 112.*

Prova do Teorema 5-(b). Os 224 casos dados nos Lemas 2 e 3 podem ser reduzidos a 112 configurações, considerando que os retratos de fase correspondente ao caso sela-foco são equivalentes aos do caso foco-sela pelo item (ii) da relação R_2 (use $f_3(x, y) = (-x, -y)$). Sem perda de generalidade, consideramos o caso sela-foco. As 112 configurações correspondentes ao caso sela-foco dadas no Lema 2 podem ser reduzidas a 56 considerando o item (i) da relação R_2 (veja Tabela 3.2). Além disso, as linhas 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 41, 40, 44, 46, 45, 47, 49, 48, 52, 54, 53, 37, 38, 42, 43, 50, 51, 55 e 56 são equivalentes as 28 primeiras linhas da Tabela 3.2 respectivamente, pelo item (ii) da relação R_2 (use $f_1(x, y) = (x, -y)$).

□

SELA-FOCO						
1	SC	RR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma \neq \emptyset$	$n_4 = -1$	$m_5 > 0$
2	CE	RR	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
3	SC	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
4	CE	RV	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
5	CE	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
6	SC	VR	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
7	CE	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
8	SC	VV	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
9	CC	RR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
10	CEC	RR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
11	CSC	RR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
12	CC	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
13	CEC	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
14	CSC	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
15	CC	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
16	CEC	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$n_4 = -1$	$m_5 > 0$
17	CSC	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
18	CC	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
19	CEC	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
20	CSC	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
21	ES	RR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$n_4 = +1$	$m_5 > 0$
22	ECS	RR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
23	SE	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
24	SCE	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$n_4 = -1$	$m_5 > 0$
25	SE	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
26	SCE	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
27	SE	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
28	SCE	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$

29	CS	RR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
30	EC	RR	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
31	CS	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
32	EC	RV	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
33	EC	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
34	CS	VR	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
35	EC	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
36	CS	VV	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma = \emptyset$	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma \neq \emptyset$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
37	SE	RR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
38	SCE	RR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = -1$	$m_5 > 0$
39	CC	RR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
40	CSC	RR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
41	CEC	RR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$n_5 > 0$
42	ES	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$n_5 > 0$
43	ECS	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
44	CC	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
45	CSC	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
46	CEC	RV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
47	CC	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
48	CSC	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
49	CEC	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
50	ES	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
51	ECS	VR	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
52	CC	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
53	CSC	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
54	CEC	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
55	EC	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$
56	ECS	VV	$\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$	$\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$	$m_4 = +1$	$m_5 > 0$

Tabela 3.2: Possíveis configurações para o caso sela-foco usando o item (i) da relação R_2 . As linhas 1–28 representam as configurações do Teorema 5-(b). As linhas destacadas representam as configurações que podem ter poli-trajetórias fechadas de deslize.

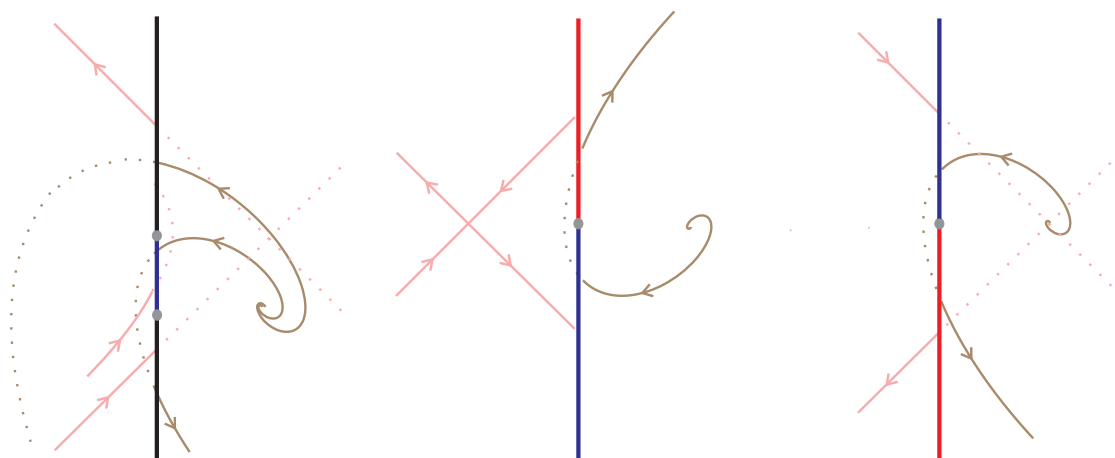


Figura 3.3: Linhas 17, 21 e 25 da Tabela 3.2.

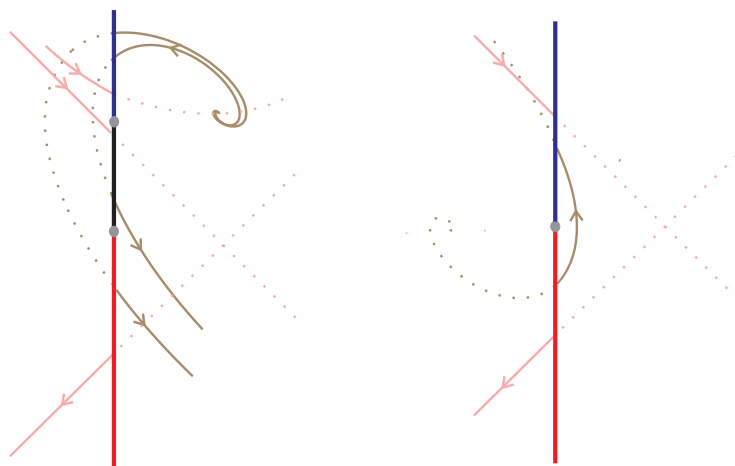


Figura 3.4: Linhas 26 e 27 da Tabela 3.2.

3.3.3 Prova do Teorema 5-(c)

Combinando as possíveis escolhas para os parâmetros s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 e s_6 , temos 2496 configurações possíveis. Novamente, nem todas são realizáveis para o caso foco-foco. Veja o lema a seguir.

Lema 4. *Se o campo de vetores (2.3) é do tipo foco-foco, então a cardinalidade do conjunto \mathcal{P}_3 é 160, i.é., o conjunto \mathcal{P}_3 tem 160 configurações foco-foco. Essas configurações estão listadas na Tabela 3.3.*

Demonstração. Considere os seguintes itens.

- (i) Temos que F tem pelo menos um ponto de dobra. Isso reduz o número de configurações para 2304.
- (ii) Para os casos com somente um ponto de dobra, para cada escolha dos parâmetros s_2, s_3, s_4, s_5 e s_6 , existe somente uma escolha possível para s_1 . Isso reduz o número de configurações para 1792.
- (iii) Para as configurações com dois pontos de dobra, para os parâmetros s_2 assumindo **RR**, **RV**, **VR** ou **VV**, e s_3, s_4, s_5 e s_6 dados por $+1, > 0, -, > 0$, ou $+1, < 0, -, > 0$, ou $-1, > 0, +, > 0$, ou $-1, < 0, +, > 0$, ou $-1, > 0, +, < 0$, ou $-1, < 0, +, < 0$, ou $+1, < 0, -, < 0$, ou $+1, > 0, -, < 0$, temos somente uma escolha possível para s_1 . Isso reduz o número de configurações para 960. Para os outros casos com dois pontos de dobra, para cada escolha dos parâmetros s_2, s_3, s_4, s_5 e s_6 existem duas possibilidades para o parâmetro s_1 . Assim, podemos reduzir o número de combinações para 160, como desejado.

□

Prova do Teorema 5-(c). As 160 configurações dadas no Lema 4, podem ser reduzidas a 80 configurações considerando o item (i) da relação R_3 (veja Tabela 3.3). As configurações correspondentes as linhas 49, 51, 50, 55, 57, 56, 58, 59, 60, 41, 42, 47, 48, 45, 46, 69, 70, 72, 74, 73, 78, 80, 61, 62, 63, 64, 67, 68, 52, 54, 53, 43, 44, 71, 79, 75, 76, 77, 65 e 66 são relacionadas com as primeiras 40 linhas da Tabela 3.3 pela relação R_3 . Além disso,

FOCO-FOCO						
1	CC	RR	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
2	CEC	RR	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
3	CSC	RR	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
4	CC	RV	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
5	CEC	RV	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
6	CSC	RV	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
7	CC	VV	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
8	CSC	VV	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
9	CEC	VV	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
10	SE	RR	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
11	SCE	RR	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
12	SE	RV	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
13	SCE	RV	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
14	SE	VV	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
15	SCE	VV	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
16	CC	RR	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
17	CEC	RR	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
18	CC	RV	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
19	CSC	RV	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
20	CEC	RV	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
21	CC	VV	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
22	CSC	VV	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
23	SE	RR	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
24	SCE	RR	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
25	SE	RV	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
26	SCE	RV	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
27	SE	VV	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
28	SCE	VV	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$

29	CC	VR	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
30	CEC	VR	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
31	CSC	VR	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
32	SE	VR	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
33	SCE	VR	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
34	CSC	RR	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
35	CEC	VV	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
36	CC	VR	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
37	CEC	VR	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
38	CSC	VR	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
39	SE	VR	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
40	SCE	VR	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = -1$	$s_4 > 0$
41	ES	RR	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
42	ECS	RR	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
43	ES	RV	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
44	ECS	RV	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
45	ES	VV	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
46	ECS	VV	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
47	ES	VR	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
48	ECS	RV	$s_1 = -1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
49	CC	RR	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
50	CSC	RR	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
51	CEC	RR	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
52	CC	RV	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
53	CSC	RV	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
54	CEC	RV	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
55	CC	VR	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$

56	CSC	VR	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
57	CEC	VR	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
58	CC	VV	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
59	CSC	VV	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
60	CEC	VV	$s_1 = +1$	$s_2 > 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
61	ES	RR	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
62	ECS	RR	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
63	ES	RV	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
64	ECS	RV	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
65	ES	VR	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
66	ECS	VR	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
67	ES	VV	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
68	ECS	VV	$s_1 = -1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
69	CC	RR	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
70	CSC	RR	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
71	CEC	RR	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
72	CC	RV	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
73	CSC	RV	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
74	CEC	RV	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
75	CC	VR	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
76	CSC	VR	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
77	CEC	VR	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
78	CC	VV	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
79	CSC	VV	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$
80	CEC	VV	$s_1 = +1$	$s_2 < 0$	$s_3 = +1$	$s_4 > 0$

Tabela 3.3: Possíveis configurações para o caso foco–foco usando o item (i) da relação R_3 . As linhas 1–28 representam as configurações do Teorema 5-(c). As linhas destacadas representam as configurações que podem ter poli–trajetórias fechadas de deslize.

as configurações correspondentes as linhas 4, 5, 6, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 22, 25 e 26 são relacionadas com as configurações correspondentes as linhas 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 35, 39 e 40 pela relação R_3 , o que reduz o número de configurações para 28, como queríamos.

□

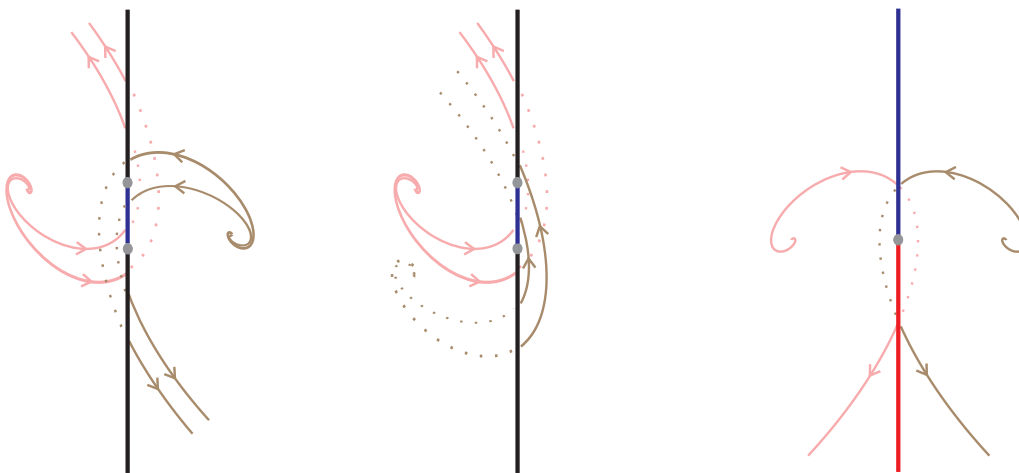


Figura 3.5: Linhas 3, 6 e 10 da Tabela 3.3.

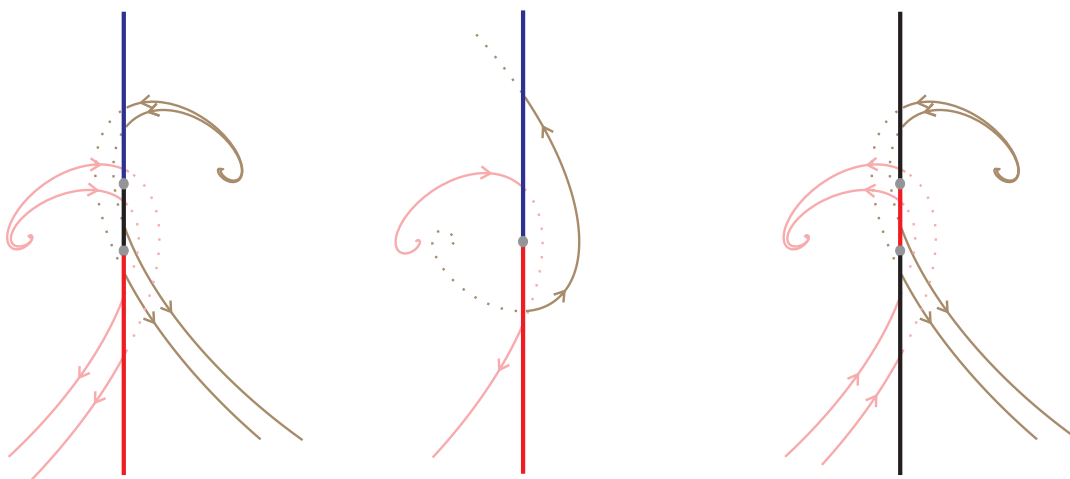


Figura 3.6: Linhas 11, 12 e 17 da Tabela 3.3.

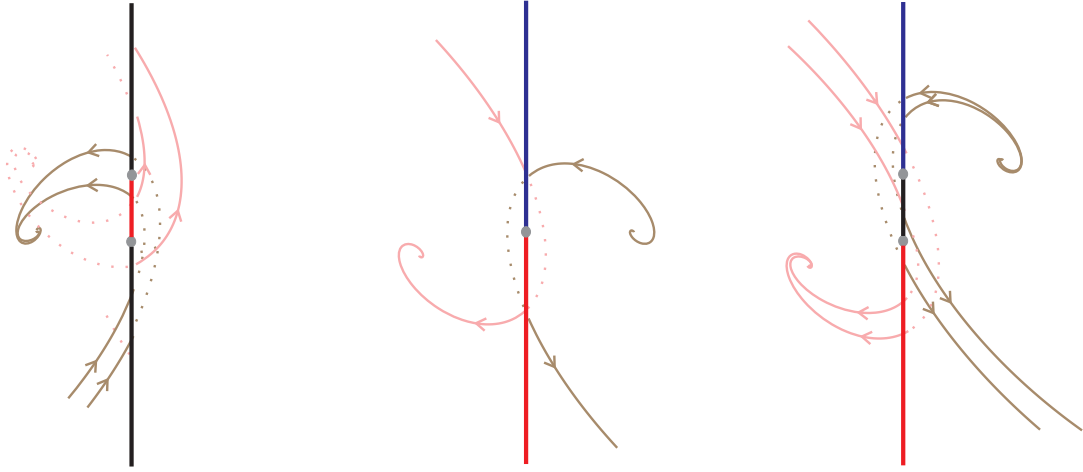


Figura 3.7: Linhas 20, 23 e 24 da Tabela 3.3.

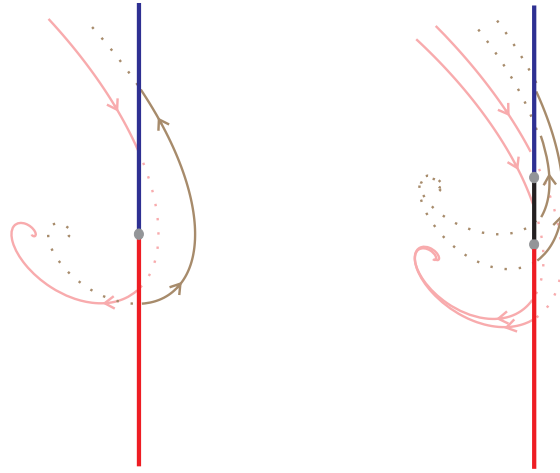


Figura 3.8: Linhas 25 e 26 da Tabela 3.3.

3.3.4 Prova do Teorema 6

Seja F um campo de vetores dado por (2.3), p_0 e p_1 , os pontos de equilíbrio e, φ e ψ os fluxos de F^- e F^+ , respectivamente. Suponha que $\mathbf{W}_L^s = G_1^{-1}(\{0\})$, $\mathbf{W}_L^u = G_2^{-1}(\{0\})$, $\mathbf{W}_R^s = G_3^{-1}(\{0\})$ e $\mathbf{W}_R^u = G_4^{-1}(\{0\})$, onde $G_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 4$, são funções suaves e 0 é um valor regular de G_i .

Considere o seguinte lema.

Lema 5. *Campos de vetores PWL com configurações dadas nas linhas 1, 3, 4, 6, 8-10, 12, 16, 17, 19-22 da Tabela 3.1 não tem poli-trajetórias fechadas de deslize.*

Demonstração. Os campos de vetores correspondentes as configurações dadas nas linhas 1, 3, 4, 6, 8 – 10, 12, 16, 17, 19 – 22 da Tabela 3.1 não possuem poli-trajetórias fechadas de deslize porque eles satisfazem as seguintes propriedades, que impossibilitam um movimento periódico, mais especificamente:

- Para as linhas 1, 8 e 10, $i = 3$ ou 4 temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} G_{i-2}(\varphi(\pm t, p)) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(\pm t, p) \rightarrow p_0, \text{ e} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} G_i(\psi(\pm t, p)) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(\pm t, p) \rightarrow p_1, \text{ } p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e. \end{aligned} \quad (3.1)$$

- Para as linhas 4, 6, 17, 19 e 21 temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} G_1(\varphi(-t, p)) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} G_2(\varphi(t, p)) = 0, \text{ e} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} G_3(\psi(-t, p)) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} G_4(\psi(t, p)) = 0, \text{ } p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e. \end{aligned} \quad (3.2)$$

- Para as linhas 3, 9, $i = 3$ ou 4, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} G_{i-2}(\varphi(\pm t, p)) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(\pm t, p) = p_0 \text{ e,} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} G_i(\psi(\pm t, p)) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(\pm t, p) = p_1 \text{ ou} \\ \psi(\pm t_1, p) \in \Sigma^c, \text{ } t_1 > 0, \text{ } p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e. \end{aligned} \quad (3.3)$$

- Para a linha 12 temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} G_2(\varphi(t, p)) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, p) = p_0 \text{ ou } [\varphi(t_1, p) \in \Sigma^c \text{ e} \\ \psi(t_2, \varphi(t_1, p)) \in \Sigma^c \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t, \varphi(t_1, p)) = p_1 \text{ ou} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} G_4(\psi(t, \varphi(t_1, p))) = 0], \text{ } t_1, t_2 > 0, \text{ } p \in \Sigma^e. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} G_4(\psi(t, p)) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t, p) = p_1 \text{ ou } [\psi(s_1, p) \in \Sigma^c \text{ e} \\ \varphi(s_2, \psi(s_1, p)) \in \Sigma^c \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, \psi(s_1, p)) = p_0 \text{ ou} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} G_2(\varphi(t, \psi(s_1, p))) = 0], \text{ } s_1, s_2 > 0, \text{ } p \in \Sigma^e. \end{aligned} \quad (3.5)$$

- Para a linha 16 temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} G_4(\psi(t, p)) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} G_2(\varphi(t, p)) = 0 \text{ ou} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, p) = p_0 \text{ ou } [\varphi(t_1, p) \in \Sigma^c \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} G_4(\psi(t, \varphi(t_1, p))) = 0], \\ t_1 > 0, \text{ } p \in \Sigma^e. \end{aligned} \quad (3.6)$$

- Para a linha 20 temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} G_2(\varphi(t, p)) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, p) = p_0 \text{ ou } \varphi(t_1, p) \in \Sigma^s, \quad (3.7)$$

$$t_1 > 0, p \in \Sigma^e.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} G_4(\psi(t, p)) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t, p) = p_1 \text{ ou } \psi(s_1, p) \in \Sigma^s \quad (3.8)$$

$$\text{ou } [\psi(s_1, p) \in \Sigma^c \text{ e } \varphi(t, \psi(s_1)) \notin \Sigma^e, \forall t \in \mathbb{R}], s_1 > 0, p \in \Sigma^e.$$

- Para a linha 22 temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} G_4(\psi(t, p)) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} G_2(\varphi(t, p)) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, p) = p_0 \text{ ou}$$

$$\varphi(t_1, p) \in \Sigma^s \text{ ou } [\varphi(t_1, p) \in \Sigma^c \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} G_4(\psi(t, \varphi(t_1, p))) = 0], \quad (3.9)$$

$$t_1 > 0, p \in \Sigma^e.$$

Os tempos t_i, s_i , dados em (3.3)-(3.9) são os tempos de primeiro retorno em Σ para φ ou ψ . \square

Lema 6. *Um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 14 da Tabela 3.1, não possui poli-trajetórias fechadas de deslize.*

Demonstração. Se existe uma poli-trajetória fechada de deslize, então ela é dada pela Figure 3.9 ((A) ou (B)). Sem perda de generalidade, suponhamos que o ponto de dobra

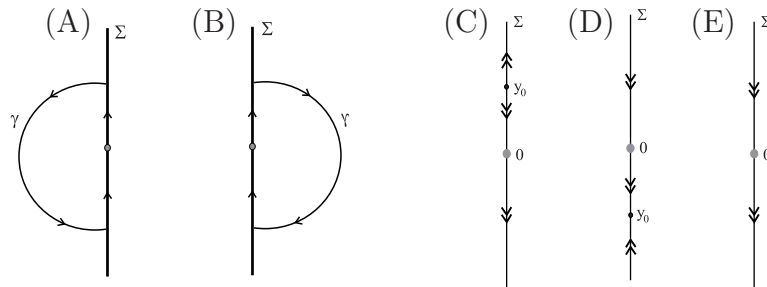


Figura 3.9: As figuras (A) e (B) representam as possíveis poli-trajetórias fechadas de deslize dadas por um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 14 da Tabela 3.1. As figuras (C), (D) e (E) representam os possíveis fluxos em Σ para $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ > 0$, $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ < 0$ e $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ = 0$, respectivamente.

de F^- e F^+ é $(0, 0)$. Assim, $b_1^- = b_1^+ = 0$. Temos que

$$a_{11}^- a_{22}^- - a_{12}^- a_{21}^- < 0, \quad a_{11}^+ a_{22}^+ - a_{12}^+ a_{21}^+ < 0.$$

Os pontos de equilíbrio de F^- e F^+ são dados respectivamente por

$$x^\mp = \frac{a_{12}^\mp b_2^\mp}{a_{11}^\mp a_{22}^\mp - a_{21}^\mp a_{12}^\mp}, \quad y^\mp = \frac{a_{11}^\mp b_2^\mp}{a_{11}^\mp a_{22}^\mp - a_{21}^\mp a_{12}^\mp}$$

e satisfazem $x^- < 0$, $x^+ > 0$. Temos que $a_{12}^+ y < 0$, $a_{12}^- y > 0$, $y < 0$. Assim, $a_{12}^- < 0$, $a_{12}^+ > 0$ e $b_2^-, b_2^+ < 0$. O campo de vetores deslizante é dado por

$$\dot{x} = 0, \quad g(y) = \frac{(a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+) y + a_{12}^+ b_2^- - a_{12}^- b_2^+}{a_{12}^+ - a_{12}^-}, \quad y \neq 0, \quad (3.10)$$

e desde que $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ \neq 0$, ele tem um ponto de equilíbrio dado por $y_0 = \frac{a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^-}{a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+}$.

A derivada de $g(y)$ é dada por $g'(y) = \frac{a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+}{a_{12}^+ - a_{12}^-}$.

(i) Se $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ > 0$ (resp. < 0), então $y_0 > 0$ (resp. < 0) e $g'(y) > 0$ (resp. < 0).

(ii) Se $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ = 0$, então $g(y) < 0$ para todo $y \neq 0$.

Assim o fluxo em Σ é mostrado na Figura 3.9 ((C), (D) e (E)). Em qualquer caso é impossível a existência de uma poli-trajetória fechada de deslize. De fato, considere uma órbita de F^\mp com orientação dada na Figura 3.9 ((A) ou (B)), conectando $y_1, y_2 \in \Sigma$, $y_1 y_2 < 0$ e observe que a orientação não é compatível com os casos na Figura 3.9 ((C), (D) e (E)). \square

Prova do Teorema 6-(a). A prova do item (a) é consequência imediata dos Lemas 5 e 6. \square

Lema 7. *Campos de vetores PWL com configurações dadas nas linhas 2-4, 5, 7, 8, 10, 13, 14, 16, 19, 20, 22, 24, e 28 da Tabela 3.2, não possuem poli-trajetórias fechadas de deslize.*

Demonstração. A prova é similar ao Lema 5. \square

Lema 8. *Um campo de vetores com configuração dada na linha 23 da Tabela 3.2, não possui poli-trajetórias fechadas de deslize.*

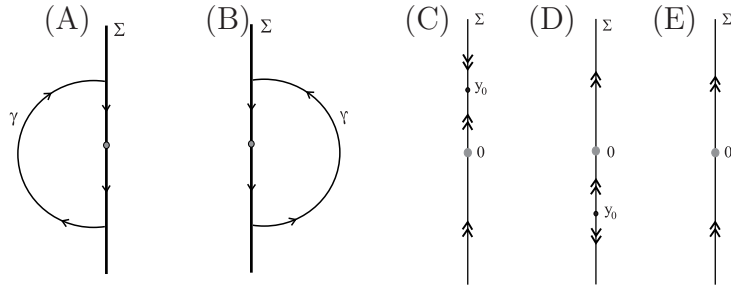


Figura 3.10: As figuras (A) e (B) representam as possíveis poli-trajetórias fechadas de desliz para um campo de vetores PWL com configuração dada pela linha 23 da Tabela 3.2. As figuras (C), (D) e (E) representam os fluxos em Σ para um campo de vetores PWL com configuração dada pela linha 23 da Tabela 3.2, para os itens (i), (ii) e (iii), respectivamente.

Demonstração. Se existe alguma poli-trajetória fechada de desliz, então ela é dada na Figura 3.10. Como no Lema 6, temos $b_1^- = b_1^+ = 0$, $a_{12}^- > 0$, $a_{12}^+ < 0$, $b_2^- > 0$, $b_2^+ > 0$, e o campo de vetores deslizante é dado em (3.10).

(i) Se $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ > 0$, então $y_0 > 0$ e $g'(y) < 0$.

(ii) Se $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ < 0$, então $y_0 < 0$ e $g'(y) > 0$.

(iii) Se $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ = 0$, então $g(y) > 0$ para todo $y \neq 0$.

O fluxo em Σ é dado na Figura 3.10 ((C), (D) e (E)). Em qualquer caso é impossível a existência de uma poli-trajetória fechada de desliz porque a orientação em Σ não é compatível com a orientação na Figura 3.10 ((A) e (B)). \square

Prova do Teorema 6-(b). Obviamente, os campos de vetores PWL com configurações dadas nas linhas 2, 5, 7, 11, 15 e 18 da Tabela 3.1, nas linhas 9, 12, 15 e 18 da Tabela 3.2 e nas linhas 1, 4, 7, 16, 18 e 21 da Tabela 3.3 não possuem poli-trajetórias fechadas de desliz, pois para as configurações correspondentes à essas linhas temos $\Sigma^s \cup \Sigma^e = \emptyset$. Agora, pelos Lemas 7 e 8, segue o resultado. \square

Lema 9. *Campos de vetores PWL com configurações dadas nas linhas 2, 5, 8, 9, 13, 15, 19, 22 e 28 da Tabela 3.3, não possuem poli-trajetórias fechadas de desliz.*

Demonstração. A prova é similar a prova do Lema 5. \square

Lema 10. *Um campo de vetores com configuração dada na linha 14 ou 27 da Tabela 3.3, não possui poli-trajetórias fechadas de deslize.*

Demonstração. A prova é análoga a prova do Lema 8. \square

Prova do Teorema 6-(c). A prova do item (c) é uma consequência imediata dos Lemas 9 e 10. \square

3.4 Prova do Teorema 7.

Nesta seção provamos o Teorema 7. Obtemos condições para que os campos de vetores PWL correspondentes a linha 13 da Tabela 3.1, linhas 1, 6, 11, 17, 21, 25 – 27 da Tabela 3.2 e as linhas 3, 6, 10 – 12, 20, 23 – 26 da Tabela 3.3 tenham ou não poli-trajetórias fechadas de deslize.

Proposição 1. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 13 da tabela 3.1.*

(a) *Se $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- < 0$, então o campo tem uma família de poli-trajetórias fechadas de deslize.*

(b) *Se $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- \geq 0$, então o campo não tem poli-trajetórias fechadas de deslize.*

Demonstração. Se existir alguma poli-trajetória fechada de deslize, então ela é dada na Figura 3.9 (A). Como feito na prova do Lema 6, temos $b_1^- = b_1^+ = 0$, $a_{12}^- < 0$, $a_{12}^+ > 0$, $b_2^- < 0$, $b_2^+ > 0$, e o campo de vetores deslizante, y_0 e $g'(y)$ são os mesmos.

Suponha $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- < 0$ (resp. > 0).

(i) (resp. iv) Se $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ < 0$, então $y_0 > 0$ (resp. < 0) e $g'(y) < 0$.

(ii) (resp. v) Se $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ > 0$, então $y_0 < 0$ (resp. > 0) e $g'(y) > 0$.

(iii) (resp. vi) Se $a_{12}^+a_{22}^- - a_{12}^-a_{22}^+ = 0$, então $g(y) > 0$ (resp. < 0) para todo $y \neq 0$.

Suponha que $a_{12}^-b_2^+ - a_{12}^+b_2^- = 0$.

(vii) (resp. viii) Se $a_{12}^+a_{22}^- - a_{12}^-a_{22}^+ < 0$ (resp. > 0), então $g(y) < 0$ (resp. > 0) para $y > 0$ e $g(y) > 0$ (resp. < 0) para $y < 0$.

Se $a_{12}^+a_{22}^- - a_{12}^-a_{22}^+ = a_{12}^-b_2^+ - a_{12}^+b_2^- = 0$, então o campo de vetores deslizante é identicamente nulo e isso implica a não-existência de poli-trajetórias fechadas de deslize. É possível a existência de uma família de poli-trajetórias de deslize para o item (i) (resp. (ii)), desde que os arcos de F^- encontrem Σ em pontos menores (resp. maiores) que y_0 . Obviamente, para o item (iii) sempre é possível a existência de uma família de poli-trajetórias fechadas de deslize por que a orientação em Σ é a mesma dada na Figura 3.9 (A). Para os itens (iv), (v), (vi), (vii) e (viii) não é possível a existência de poli-trajetórias fechadas de deslize porque a orientação em Σ não é compatível com aquela dada na Figura 3.9 (A). Note que obtemos uma família de poli-trajetórias fechadas de deslize ao invés de poli-trajetórias fechadas de deslize isoladas, porque elas não satisfazem o item (3) da Definição 1. \square

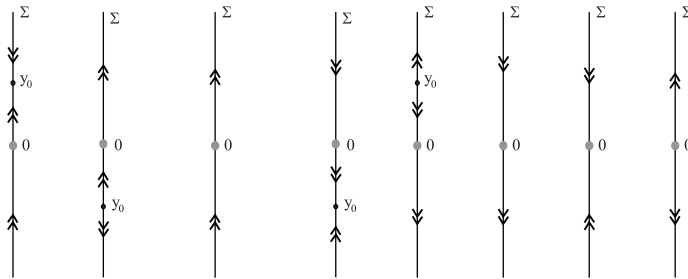


Figura 3.11: Casos correspondentes aos itens (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii) e (viii) dados na Proposição 1, respectivamente.

Argumentos similares são usados para provar as seguintes Proposições 2 – 20.

Proposição 2. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 1 da Tabela 3.2.*

- (a) Se $a_{12}^+b_2^- - a_{22}^+b_1^- \geq 0$, então o campo tem uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.
- (b) Se $a_{12}^+b_2^- - a_{22}^+b_1^- < 0$, então o campo pode ter uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.

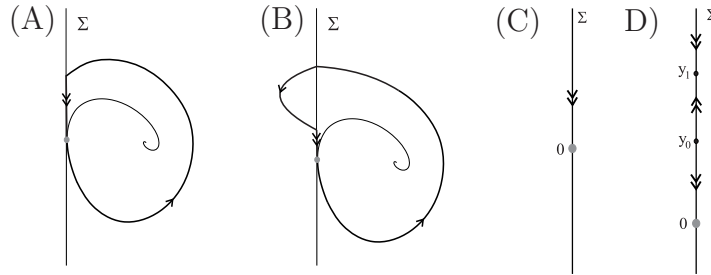


Figura 3.12: As figuras (A), (C) e (D) representam a possível poli-trajetória fechada de deslize para um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 1 da Tabela 3.2 e os fluxos em Σ correspondentes aos itens (a) e (b), respectivamente. As figuras (A) e (B) também representam as possíveis poli-trajetórias fechadas de deslize para um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 11 da Tabela 3.2.

Proposição 3. *Um campo de vetores com configuração dada na linha 6 da Tabela 3.2 pode ter uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*

Se existe uma poli-trajetória fechada de deslize, então ela é dada na Figura 3.12 (A).

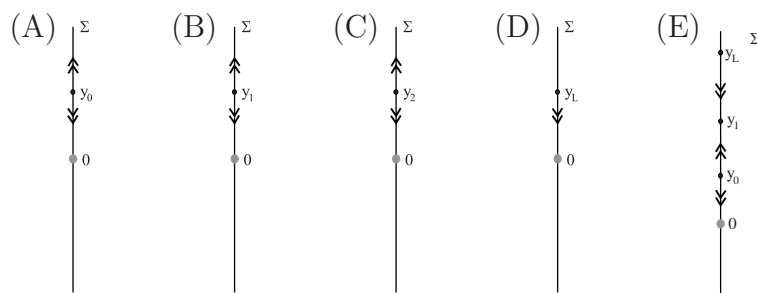


Figura 3.13: As figuras (A), (B) e (C) representam os fluxos em Σ para uma campo de vetores PWL com configuração dada na linha 6 da Tabela 3.2, para $a_{22}^+b_1^- - a_{12}^+b_2^- > 0$, $a_{22}^+b_1^- - a_{12}^+b_2^- < 0$ e $a_{22}^+b_1^- - a_{12}^+b_2^- = 0$, respectivamente. As figuras (D) e (E) representam os fluxos em Σ para um campo de vetores PWL com configuração dada nas linhas 11 e 17 da Tabela 3.2.

Proposição 4. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 11 da Tabela 3.2. Sejam $a = a_{12}^+a_{22}^- - a_{12}^-a_{22}^+$ e $b = a_{12}^+b_2^- - a_{12}^-b_2^+ - a_{22}^+b_1^-$. Se $a \leq 0$ ou $b \geq 0$, então o campo pode ter uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*

Proposição 5. *Um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 17 da Tabela 3.2 pode ter uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*

Se existe uma poli-trajetória fechada de deslize, então ela é dada na Figura 3.12 (A).

Proposição 6. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 21 da Tabela 3.2.*

- (a) *Se $a_{12}^-b_2^+ - a_{12}^+b_2^- < 0$ e $a_{12}^+a_{22}^- - a_{12}^-a_{22}^+ \leq 0$, então o campo tem duas famílias de poli-trajetórias fechadas de deslize e uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*
- (b) *Se $a_{12}^-b_2^+ - a_{12}^+b_2^- < 0$ e $a_{12}^+a_{22}^- - a_{12}^-a_{22}^+ > 0$, então o campo tem duas famílias de poli-trajetórias fechadas de deslize, pode ter mais uma família de poli-trajetórias fechadas de deslize e uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*
- (c) *Se $a_{12}^-b_2^+ - a_{12}^+b_2^- = 0$ e $a_{12}^+a_{22}^- - a_{12}^-a_{22}^+ < 0$, então o campo tem somente uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*
- (d) *If $a_{12}^-b_2^+ - a_{12}^+b_2^- > 0$ e $a_{12}^+a_{22}^- - a_{12}^-a_{22}^+ < 0$, ou $a_{12}^-b_2^+ - a_{12}^+b_2^- > 0$ e $a_{12}^+a_{22}^- - a_{12}^-a_{22}^+ > 0$, ou $a_{12}^-b_2^+ - a_{12}^+b_2^- > 0$ e $a_{12}^+a_{22}^- - a_{12}^-a_{22}^+ = 0$, ou $a_{12}^-b_2^+ - a_{12}^+b_2^- = 0$ e $a_{12}^+a_{22}^- - a_{12}^-a_{22}^+ > 0$, então o campo não tem poli-trajetórias fechadas de deslize.*

Se existir alguma poli-trajetória fechada de deslize, então ela é dada na Figure 3.14 e os fluxos em Σ são dados na Figura 3.11 para cada item da Proposição 1.

Proposição 7. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 25 da Tabela 3.2.*

- (a) *Se $a_{12}^+a_{22}^- - a_{12}^-a_{22}^+ \geq 0$, então o campo tem uma família de poli-trajetórias fechadas de deslize e uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*
- (b) *Se $a_{12}^+a_{22}^- - a_{12}^-a_{22}^+ < 0$, então o campo pode ter uma família de poli-trajetórias fechadas de deslize e uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*

Proposição 8. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 26 da Tabela 3.2. Sejam $a = a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+$ e $b = a_{12}^+ b_2^- - a_{12}^- b_2^+ - a_{22}^+ b_1^-$.*

- (a) *Se $a < 0$ ou, $a \geq 0$ e $b < 0$, então o campo pode ter uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*
- (b) *Para todos os outros sinais de a e b , o campo tem uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*

Se existir alguma poli-trajetória fechada de deslize, então ela é dada na Figura 3.12

(A).

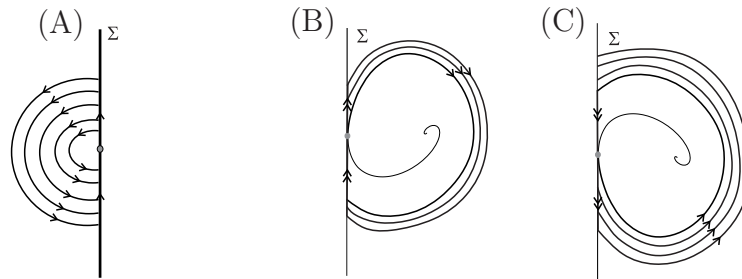


Figura 3.14: As figuras (A) e (B) representam as possíveis poli-trajetórias fechadas de deslize para um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 21 da Tabela 3.2 e a figura (C) representa as possíveis poli-trajetórias fechadas de deslize para um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 25 da Tabela 3.2.

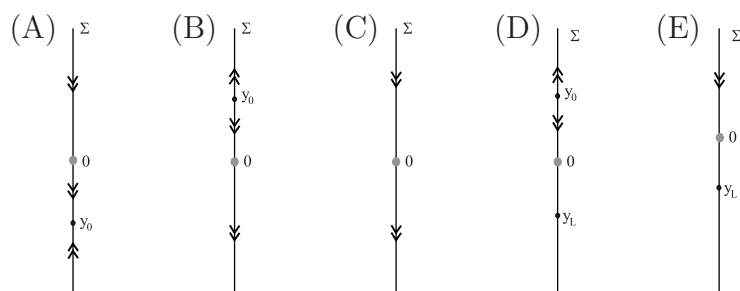


Figura 3.15: As figuras (A), (B) e (C) representam os fluxos em Σ para um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 25 da Tabela 3.2 para $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ > 0$, $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ < 0$ e $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ = 0$, respectivamente. As figuras (D) e (E) representam os fluxos em Σ para a linha 26 da Tabela 3.2 para $a < 0$ e, $a \geq 0$ e $b > 0$, respectivamente.

Proposição 9. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 27 da Tabela 3.2.*

- (a) *Se $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- < 0$, então o campo tem uma família de poli-trajetórias fechadas de deslize.*
- (b) *Se $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- \geq 0$, então o campo não tem poli-trajetórias fechadas de deslize.*

Se existe alguma poli-trajetória fechada de deslize, então ela é dada na Figura 3.10 (B).

Proposição 10. *Considere uma campo de vetores PWL com configuração dada na linha 3 da Tabela 3.3. Sejam $a = a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+$ e $b = a_{12}^+ b_2^- - a_{12}^- b_2^+ - a_{22}^+ b_1^-$.*

- (a) *Se $a < 0$ ou, $a \geq 0$ e $b < 0$, então o campo pode ter uma ou duas poli-trajetórias fechadas de deslize hiperbólicas.*
- (b) *Para todos os outros sinais de a e b , o campo pode ter uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*

O fluxo em Σ é dado na Figura 3.13 ((A) para o item (a) e (D) para o item (b)).

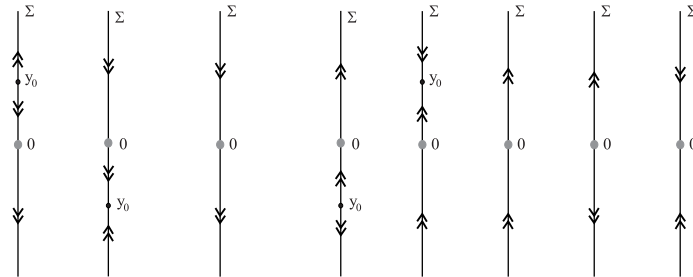


Figura 3.16: Fluxos em Σ para um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 27 da Tabela 3.2. As três primeiras figuras correspondem ao item (a) e as últimas cinco figuras correspondem ao item (b).

Proposição 11. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 6 da Tabela 3.3. Sejam $a = a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+$ e $b = a_{12}^+ b_2^- - a_{12}^- b_2^+ - a_{22}^+ b_1^-$. Se $a \geq 0$ ou $b \geq 0$, então o campo pode ter uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*

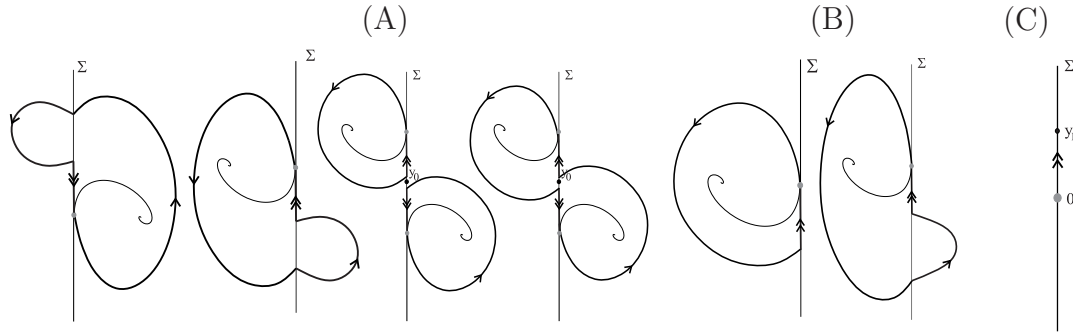


Figura 3.17: As figuras (A) e (B) representam as possíveis poli-trajetórias fechadas de deslize para um campo de vetores PWL com configuração dada nas linhas 3 e 6 da Tabela 3.3. A figura (C) representa o fluxo em Σ para um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 6 da Tabela 3.3.

Proposição 12. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 10 da Tabela 3.3.*

- (a) *Se $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ \geq 0$, então o campo tem duas famílias de poli-trajetórias fechadas de deslize e duas poli-trajetórias fechadas de deslize hiperbólicas.*
- (b) *Se $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ < 0$, então o campo pode ter uma ou duas famílias de poli-trajetórias fechadas de deslize e uma ou duas poli-trajetórias fechadas de deslize hiperbólicas.*

Proposição 13. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 11 da Tabela 3.3. Sejam $a = a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+$ e $b = a_{12}^+ b_2^- - a_{12}^- b_2^+ - a_{22}^+ b_1^-$.*

- (a) *Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então o campo tem uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*
- (b) *Para qualquer outros sinais de a e b , o campo pode ter uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*

Se existir alguma poli-trajetória fechada, então ela é dada na Figura 3.12 (A). O fluxo em Σ correspondente ao item (a) é dado na Figura 3.12 (C) e o fluxo correspondente ao item (b) é dado na Figura 3.12 (D) e Figura 3.13 (A).

Proposição 14. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 12 da Tabela 3.3.*

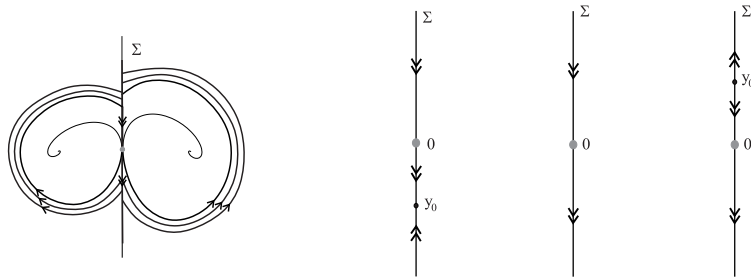


Figura 3.18: Possíveis poli-trajetórias fechadas de desliz para um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 10 da Tabela 3.3 e os fluxos em Σ . A segunda e a terceira figura correspondem ao item (a) e a última corresponde ao item (b).

- (a) Se $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- < 0$ e $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ < 0$, então o campo tem uma família de poli-trajetórias fechadas de desliz e pode ter mais uma família de poli-trajetórias fechadas de desliz e uma poli-trajetória fechada de desliz hiperbólica.
- (b) Se $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- < 0$ e $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ \geq 0$, então o campo tem duas famílias de poli-trajetórias fechadas de desliz e uma poli-trajetória fechada de desliz hiperbólica.
- (c) Se $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- = 0$ e $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ > 0$, então o campo tem somente uma poli-trajetória fechada de desliz hiperbólica.
- (d) Se $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- > 0$, ou $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- = 0$ e $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ < 0$, então o campo não tem poli-trajetórias fechadas de desliz.

Os fluxos em Σ são dados na Figura 3.16.

Proposição 15. Considere uma campo de vetores PWL com configuração dada na linha 17 da Tabela 3.3. Sejam $a = a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+$ e $b = a_{12}^+ b_2^- - a_{12}^- b_2^+ - a_{22}^+ b_1^-$.

- (a) Se $a > 0$, ou $a \leq 0$ e $b < 0$, ou $a < 0$ e $b > 0$, então o campo pode ter uma poli-trajetória fechada de desliz hiperbólica.
- (b) Se $a = 0$ e $b \geq 0$ ou, $a < 0$ e $b = 0$, então o campo não tem poli-trajetórias fechadas de desliz.

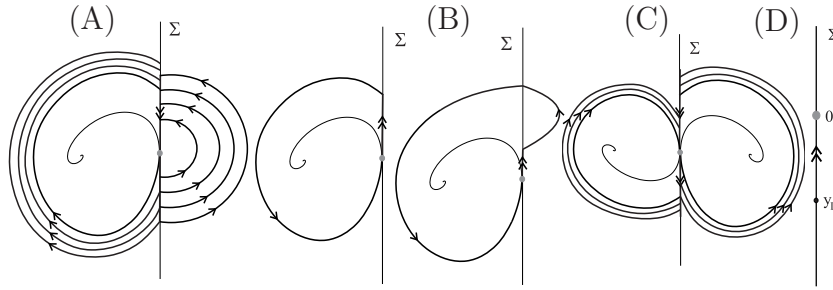


Figura 3.19: As figuras (A), (B) e (C) representam as possíveis poli-trajetórias fechadas de deslize para um campo de vetores PWL com configuração dada nas linhas 12, 20 e 23 da Tabela 3.3. A figura (D) representa o fluxo em Σ para um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 20 da Tabela 3.3.

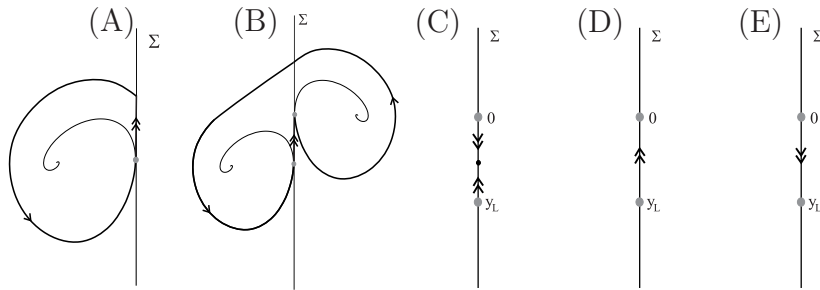


Figura 3.20: As figuras (A) e (B) representam as possíveis poli-trajetórias fechadas de deslize para um campo de vetores com configuração dada na linha 17 da Tabela 3.3. As figuras (C), (D) e (E) representam os fluxos em Σ para uma campo de vetores PWL correspondente a essa linha.

Proposição 16. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 20 da Tabela 3.3. Sejam $a = a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+$ e $b = a_{12}^+ b_2^- - a_{12}^- b_2^+ - a_{22}^+ b_1^-$. Se $a \leq 0$ ou $b \leq 0$, então o campo pode ter uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*

Proposição 17. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 23 da Tabela 3.3.*

- (a) *Se $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ > 0$ ou $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ < 0$, então o campo tem pelo menos uma família de poli-trajetórias fechadas de deslize e uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*
- (b) *Se $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ = 0$, então o campo tem duas famílias de poli-trajetórias fechadas de deslize e duas poli-trajetórias fechadas de deslize hiperbólicas.*

Os fluxos em Σ são dados na Figura 3.15 (A), (B) e (C). As Figuras (A) e (C) correspondem ao item (a) e a Figura (B) corresponde ao item (b).

Proposição 18. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 24 da Tabela 3.3. Seja $a = a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+$.*

- (a) *Se $a > 0$, então o campo tem pelo menos uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*
- (b) *Se $a < 0$, então o campo pode ter uma ou duas poli-trajetórias fechadas de deslize hiperbólicas.*
- (c) *Se $a = 0$, então o campo tem duas poli-trajetórias fechadas de deslize hiperbólicas.*

Proposição 19. *Considere um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 25 da Tabela 3.3.*

- (a) *Se $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- < 0$ e $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ \leq 0$, então o campo tem duas famílias de poli-trajetórias fechadas de deslize e uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*
- (b) *Se $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- < 0$ e $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ > 0$, então o campo tem uma família de poli-trajetórias fechadas de deslize, pode ter mais uma família e uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*
- (c) *Se $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- = 0$ e $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ < 0$, então o campo tem somente uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.*
- (d) *Se $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- > 0$ ou, $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- = 0$ e $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ > 0$, então o campo não tem poli-trajetórias fechadas de deslize.*

Os fluxos em Σ são dados na Figura 3.16. A primeira e a terceira figura correspondem ao item (a), a segunda figura corresponde ao item (b), a sétima figura corresponde ao item (c) e as figuras restantes correspondem ao item (d).

Proposição 20. *Considere um campo de vetores com configuração dada na linha 26 da Tabela 3.3. Sejam $a = a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+$ e $b = a_{12}^+ b_2^- - a_{12}^- b_2^+ - a_{22}^+ b_1^-$.*

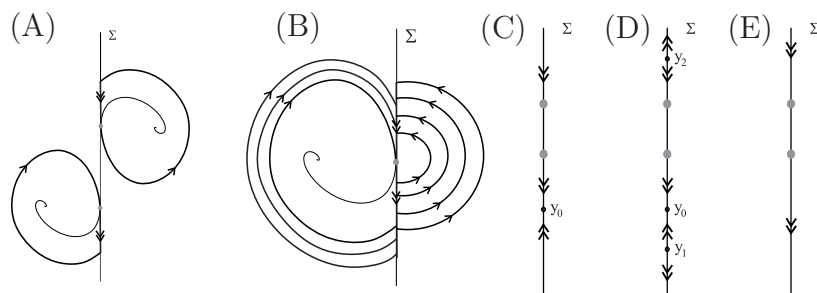


Figura 3.21: As figuras (A) e (B) representam as possíveis poli-trajetórias fechadas de deslize para uma campo de vetores PWL com configuração dada nas linhas 24 e 25 da Tabela 3.3, respectivamente. As figuras (C), (D) e (E) representam os fluxos em Σ para uma campo de vetores PWL com configuração dada na linha 24 da Tabela 3.3, para $a > 0$, $a < 0$ e $a = 0$, respectivamente.

- (a) Se $a > 0$, ou $a < 0$ e $b > 0$, ou $a = 0$ e $b < 0$, então o campo pode ter uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica.
- (b) Se $a < 0$ e $b \leq 0$, ou $a = 0$ e $b > 0$, então o campo tem uma poli-trajetória fechada de deslize.

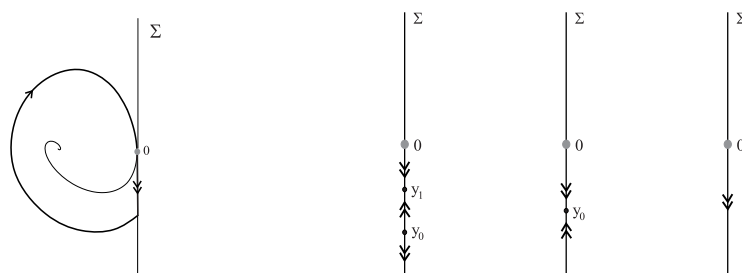


Figura 3.22: Possíveis poli-trajetórias fechadas de deslize para um campo de vetores PWL com configuração dada na linha 26 da Tabela 3.3 e os fluxos em Σ . A segunda e terceira figura correspondem ao item (a) e a última figura corresponde ao item (b).

Prova do Teorema 7. A prova do Teorema 7 é consequência imediata das Proposições 1 – 20.

□

Agora apresentamos dois exemplos nos quais os campos de vetores PWL possuem poli-trajetórias fechadas de deslize.

Exemplo 2. Considere o campo de vetores PWL dado por

$$F(x, y) = \begin{cases} (-y + 1, x + y - 2), & \text{se } x \geq 0, \\ (y + 1, -x - y - 2), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Tal campo corresponde a configuração dada na linha 24 da Tabela 3.3 com $\Sigma^s = \{(0, y) : y > 1\}$, $\Sigma^c = \{(0, y) : -1 < y < 1\}$ e $\Sigma^e = \{(0, y) : y < -1\}$. Existem dois pontos de dobra $(0, -1)$, $(0, 1)$ e $a_{12}^+ = -1$, $a_{12}^- = 1$, $a_{22}^+ = 1$ e $a_{22}^- = -1$. Assim, $a = a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ = 0$. Pela Proposição 18, Existem duas poli-trajetórias fechadas de deslize hiperbólicas. De fato o campo deslizante é dado por $F^\Sigma(y) = (0, -1)$. Assim, o fluxo em Σ é dado na Figura 3.21 (E) e a órbita que tem α -limite $(1, 0)$, tem ω -limite $(1, 0)$, a órbita que tem ω -limite $(-1, 0)$, tem α -limite $(-1, 0)$, como mostrado na Figura 3.21 ((A)).

Exemplo 3. Considere o campo de vetores PWL dado por

$$F(x, y) = \begin{cases} (-y, x + y + 1), & \text{se } x \geq 0, \\ (y, -x - y - 2), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Esse campo corresponde a configuração dada na linha 25 da Tabela 3.3 com $\Sigma^s = \{(0, y) : y > 0\}$ e $\Sigma^e = \{(0, y) : y < 0\}$. Existe um ponto de dobra $(0, 0)$ e $a_{12}^+ = -1$, $a_{12}^- = 1$, $a_{22}^+ = 1$, $a_{22}^- = -1$, $b_2^+ = 1$ e $b_2^- = -2$. Desta forma, $a_{12}^+ a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^+ = 0$ e $a_{12}^- b_2^+ - a_{12}^+ b_2^- = -1 < 0$. Pela Proposição 19, F^- tem uma poli-trajetória fechada de deslize e F^+ tem duas famílias de poli-trajetórias fechadas de deslize. De fato, o campo deslizante é dado por $F^\Sigma(y) = (0, -1/2)$. Assim, o fluxo em Σ é dado na Figura 3.16 (terceira).

3.5 Exemplos Conhecidos de Poli-Trajetoórias de Costura

Nessa seção, apresentamos três exemplos conhecidos de poli-trajetórias fechadas de costura para os casos sela-sela, sela-foco e foco-foco. Esses exemplos foram obtidos recentemente.

Exemplo 4 (J. C. Artés, J. Llibre, J. C. Medrado and M. A. Teixeira, 2011). Em [4] os autores provaram que o campo de vetores (2.3) com

$$\begin{aligned} F^+(x, y) &= \begin{pmatrix} a^+ & 1 + b^+ \\ 1 + c^+ & d^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 - \alpha^+ \\ y - \beta^+ \end{pmatrix}, \\ F^-(x, y) &= \begin{pmatrix} a^- & 1 + b^- \\ 1 + c^- & d^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 - \alpha^- \\ y - \beta^- \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

satisfazendo $0 \leq |a^\pm|, |b^\pm|, |c^\pm|, |d^\pm|, |\alpha^\pm|, |\beta^\pm| \ll 1$, com duas selas reais, tem no máximo 2 poli-trajetórias fechadas de costura hiperbólicas.

Exemplo 5 (J. Llibre, M. A. Teixeira and J. Torregrossa, 2012). Em [44] os autores provaram que o campo de vetores (2.3) com

$$\begin{aligned} F^+(x, y) &= \left(\frac{1 - \delta}{\pi} \log \left(\frac{11(5 - 3\varepsilon)}{14(3\varepsilon + 5)} \right) x + y, -x + \frac{1 - \delta}{\pi} \log \left(\frac{11(5 - 3\varepsilon)}{14(3\varepsilon + 5)} \right) y \right), \\ F^-(x, y) &= \left(\frac{3}{2}(1 + \varepsilon)x + y - \frac{3}{10}, 4x - \frac{3}{2}(1 - \varepsilon)y + \frac{67}{10} \right), \end{aligned}$$

satisfazendo $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$, é do tipo sela-foco e tem 2 poli-trajetórias fechadas de costura.

Exemplo 6 (J. Llibre and E. Ponce, 2011). Em [42] os autores provaram que o sistema

$$\begin{cases} A^+ \mathbf{X}, & \text{se } x \geq 1, \\ A^- \mathbf{X}, & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

onde $\mathbf{X} = (x, y)^T$ com

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{19}{500} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{19}{500} \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad A^- = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ \frac{377}{1000} & -\frac{13}{10} \end{pmatrix}$$

tem 3 poli-trajetórias fechadas de costura.

As configurações dos campos de vetores PWL nos exemplos anteriores são dadas nas Proposições 21, 22 e 23.

Proposição 21. *A configuração do Exemplo 4 é dada na linha 11 (usando o item (i) da relação R_1) ou 12 (usando $f_1(x, y) = (x, -y)$ e o item (ii) da relação R_1) da Tabela 3.1.*

Demonstração. Usando a mudança de coordenadas mostradas em [4], obtemos o seguinte campo de vetores

$$\begin{aligned} F^+(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 - \alpha \\ y \end{pmatrix}, \\ F^-(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esse campo tem uma poli-trajetória fechada de costura e 2 selas reais. Além disso as variedades invariantes determinadas pelos autovalores da parte linear de F^- , F^+ não são paralelas a Σ . Temos que $F_1^-(x, y) = F_1^+(x, y) = y$, assim existe um ponto de dobra $F_L = F_R = (0, 0)$. Um cálculo simples mostra que $\Sigma^c = \{(0, y) : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Assim, os parâmetros n_1 e n_2 são dados por **CC** e **RR**, respectivamente. Pelo fato de que $F^-(0, y), F(0, y) > 0$ para $y > 0$ e $F^-(0, y), F(0, y) < 0$ para $y < 0$, n_3, n_4, n_5 e n_6 são dados respectivamente por $\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$, $\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$, $\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma < \mathbf{F}_R$ e $\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma > \mathbf{F}_R$.

O segundo ciclo limite é obtido adicionando $(\varepsilon^3, 0)$ a F^+ e subtraindo a F^- , com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Os cálculos são análogos e obtemos os mesmos parâmetros n_2, n_3, n_4, n_5 e n_6 . Neste caso a região de escape é dada por

$$\Sigma^e = \{(0, y) : -\varepsilon^3 < y < \varepsilon^3\}.$$

Assim, o parâmetro n_1 é dado por **CEC**. □

Proposição 22. *A configuração do Exemplo 5 é dada na linha 13 da Tabela 3.2 (usando o item (i) da relação R_2).*

Demonstração. Como os autores apresentaram em [44], para $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$ os campo de vetores (2.3), com F^+ e F^- dados no Exemplo 5 tem um foco virtual estável em $(0, 0)$, com autovalores dados por

$$(1 - \delta) \log \left(\frac{11(5 - 3\varepsilon)}{14(3\varepsilon + 5)} \right) \pm i,$$

e tem uma sela real no ponto de equilíbrio

$$\left(\frac{9\varepsilon + 125}{5(9\varepsilon^2 - 25)}, -\frac{3(67\varepsilon + 75)}{5(9\varepsilon^2 - 25)} \right)$$

com autovalores $(3\varepsilon \pm 5)/2$. As separatrizes são dadas pelas retas invariantes $y = x + 14/(5 - 3\varepsilon)$ e $y = -4x - 11/(5 + 3\varepsilon)$. Temos que $F_1^-(0, y) = y - 3/10$ e $F_1^+(0, y) = y$, logo $\Sigma^c = \{(0, y) : y > 3/10 \text{ ou } y < 0\}$, $\Sigma^e = \{(0, y) : 0 < y < 3/10\}$. Assim, os parâmetros m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 e m_6 são dados por **CC**, **RV**, $\mathbf{W}_L^u \cap \Sigma > \mathbf{F}_L$, $\mathbf{W}_L^s \cap \Sigma < \mathbf{F}_L$, $+1$ e < 0 , respectivamente. \square

Proposição 23. *A configuração do Exemplo 6 é dada na linha 20 da Tabela 3.3.*

Demonstração. Temos que $F_1^-(1, y) = 1 - 5y$ e $F_1^+(1, y) = 19/500 - 1/10y$. Portanto $\Sigma^c = \{(1, y) : y < 1/5 \text{ ou } y > 19/50\}$, $\Sigma^e = \{(1, y) : 1/5 < y < 19/50\}$. Claramente $(0, 0)$ é um foco virtual instável para o sistema $\mathbf{X} = \dot{A}^+\mathbf{X}$ e é uma sela real estável para o sistema $\mathbf{X} = \dot{A}^-\mathbf{X}$. De fato, os autovalores de A^- e A^+ são dados por

$$\frac{19}{500} \pm \frac{1}{10}i, \quad -\frac{3}{20} \pm \frac{3}{4}i.$$

Assim, os parâmetros s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 e s_6 são dados respectivamente por **CEC**, **RV**, -1 , < 0 , -1 , > 0 . \square

Capítulo 4

Persistência de Poli–Trajetórias

Fechadas por Perturbação Singular

Nesse capítulo, estudamos os sistemas não-suaves singularmente perturbados. Estudamos a persistência de órbitas periódicas (poli–trajetórias fechadas) hiperbólicas para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno. A seguir, adaptamos as definições da Seção 2.3 para os sistemas não-suaves.

4.1 Sistemas Não–Suaves Singularmente Perturbados

Agora vamos adaptar as definições da Seção 2.3 (variedades críticas, hiperbolicidade normal, etc) para sistemas não-suaves. Os *sistemas não-suaves singularmente perturbados* que consideramos aqui são aqueles dados nas formas S_ε ou S_ε^* . Para $\varepsilon = 0$ em S_ε e S_ε^* , temos os *sistemas reduzidos* dados respectivamente por

$$S_0 : \quad \dot{x} = \begin{cases} F^-(x, y, 0), & \text{se } x_1 \leq 0 \\ F^+(x, y, 0), & \text{se } x_1 \geq 0 \end{cases} \quad 0 = G(x, y, 0).$$
$$S_0^* : \quad 0 = \begin{cases} f^-(x, y, 0), & \text{se } x \leq 0 \\ f^+(x, y, 0), & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \dot{y} = g(x, y, 0).$$

Denote por $\mathcal{M}_\varepsilon = \{(x, y) : G(x, y, \varepsilon) = 0\}$ e $\mathcal{M}_\varepsilon^\mp = \{(x, y) : f^\mp(x, y, \varepsilon) = 0\}$. Os conjuntos \mathcal{M}_0 , \mathcal{M}_0^- e \mathcal{M}_0^+ são chamados de *variedades críticas*. A escala de tempo

$\tau = t/\varepsilon$ transforma os sistemas S_ε e S_ε^* nos sistemas

$$x' = \begin{cases} \varepsilon F^-(x, y, \varepsilon), & \text{se } x_1 \leq 0 \\ \varepsilon F^+(x, y, \varepsilon), & \text{se } x_1 \geq 0 \end{cases} \quad y' = G(x, y, \varepsilon). \quad (4.1)$$

$$x' = \begin{cases} f^-(x, y, \varepsilon), & \text{se } x \leq 0 \\ f^+(x, y, \varepsilon), & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad y' = \varepsilon g(x, y, \varepsilon). \quad (4.2)$$

Dizemos que um compacto $K \subset \mathcal{M}_0$ é *normalmente hiperbólico* se as partes reais dos autovalores de $G_y(x, y, 0)$ são não nulas, para todo $(x, y) \in K$. Os sistemas S_ε e S_ε^* são chamados de *sistemas lentos* e os sistemas (4.1) e (4.2) são chamados de *sistemas rápidos*. Em ambos os casos, para $\varepsilon > 0$, os sistemas lento e rápido tem o mesmo retrato de fase. Para $\varepsilon = 0$ os sistemas (4.1) e (4.2) são chamados *sistemas de camada*. Podemos notar que S_0 está definido em \mathcal{M}_0 que tem uma variedade de descontinuidade $(n - 1)$ -dimensional representada por $\Sigma_r = \Sigma \cap \mathcal{M}_0$ e as regiões de costura, deslize e escape são dadas por $\Sigma_r^c = \Sigma^c \cap \mathcal{M}_0$, $\Sigma_r^s = \Sigma^s \cap \mathcal{M}_0$ e $\Sigma_r^e = \Sigma^e \cap \mathcal{M}_0$. Se nós supormos que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{M}_0 : \quad D_y G(x, y, 0) \neq 0,$$

$$\forall (x, y) \in \mathcal{M}_0^- \cup \mathcal{M}_0^+ : \quad D_x f^\mp(x, y, 0) \neq 0,$$

então $y = \psi(x)$ parametriza localmente \mathcal{M}_0 resolvendo $G(x, y, 0) = 0$ e $x = \xi^\mp(y)$ parametriza localmente $\mathcal{M}_0^- \cup \mathcal{M}_0^+$, resolvendo $f^\mp(x, y, 0) = 0$.

No que se segue, definimos a regularização para os sistemas S_0 , S_0^* , S_ε e S_ε^* . A regularização dos sistemas S_0 e S_0^* são definidas respectivamente por

$$S_{\lambda,0} : \quad \dot{x} = \frac{F^+ + F^-}{2} + \varphi\left(\frac{x_1}{\lambda}\right) \frac{F^+ - F^-}{2}, \quad G = 0,$$

$$S_{\lambda,0}^* : \quad \frac{f^+ + f^-}{2} + \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \frac{f^+ - f^-}{2} = 0, \quad \dot{y} = g,$$

onde φ é uma função transição e as outras funções são avaliadas em $(x, y, 0)$. As regularizações dos sistemas S_ε e S_ε^* são famílias de sistemas a 2 parâmetros $S_{\lambda,\varepsilon}$ e $S_{\lambda,\varepsilon}^*$ definidas respectivamente por

$$S_{\lambda,\varepsilon} : \quad \dot{x} = \frac{F^+ + F^-}{2} + \varphi\left(\frac{x_1}{\lambda}\right) \frac{F^+ - F^-}{2}, \quad \varepsilon \dot{y} = G,$$

$$S_{\lambda,\varepsilon}^* : \quad \varepsilon \dot{x} = \frac{f^+ + f^-}{2} + \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \frac{f^+ - f^-}{2}, \quad \dot{y} = g,$$

onde φ é uma função transição e as outras funções são avaliadas em (x, y, ε) .

Observação 1. *Observamos que o sistema $S_{\lambda,\varepsilon}$ é um problema de perturbação singular suave se considerarmos ε como parâmetro de perturbação. Além disso, é fácil ver que o sistema reduzido ($\varepsilon = 0$) associado ao sistema $S_{\lambda,\varepsilon}$ coincide com a regularização do sistema reduzido S_0 .*

4.2 Principais Resultados para os Sistemas Não-Suaves Singularmente Perturbados

Nessa seção apresentamos os principais resultados para os sistemas não-suaves singularmente perturbados.

A definição de ciclo limite para sistemas suaves é bem conhecida na literatura, veja por exemplo, [48]. Deste modo, a definição de *ciclo limite* para os sistemas regularizados $S_{\lambda,0}$ e $S_{\lambda,\varepsilon}$ é a usual. Dizemos que uma órbita fechada γ de S_0 é um ciclo limite, se ela é uma órbita periódica isolada e não intercepta Σ . Dizemos que γ é um ciclo limite hiperbólico se $\pi'(p) \neq 1$, onde π é a aplicação de primeiro retorno definida em um arco L , com $p \in L \cap \gamma$. Para órbitas periódicas de S_0 que interceptam Σ , damos outra definição. Essas órbitas serão chamadas de *poli-trajetórias fechadas*, veja Definição 1.

Observação 2. *Aqui, restringimos nossa atenção para o sistema S_ε , com $n = 2$. Temos um sistema não-suave em uma variedade bidimensional M_0 . Assim, estendemos naturalmente a definição de poli-trajetória fechada para o sistema reduzido S_0 (veja Figura 1.3).*

Teorema 8. *Fixe $n = 2$. Suponha que S_0 tem uma poli-trajetória fechada hiperbólica de costura ou deslize Γ_0 .*

- (a) *Para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o sistema regularizado $S_{\lambda,0}$ tem um ciclo limite hiperbólico $\Gamma_{\lambda,0}$, tal que $\Gamma_{\lambda,0} \rightarrow \Gamma_0$ quando $\lambda \rightarrow 0$, de acordo com a distância de Hausdorff.*
- (b) *Se Γ_0 é normalmente hiperbólica, então para $\varepsilon, \lambda > 0$ suficientemente pequenos, o sistema regularizado $S_{\lambda,\varepsilon}$ tem um ciclo limite hiperbólico $\Gamma_{\lambda,\varepsilon}$, tal que $\Gamma_{\lambda,\varepsilon} \rightarrow \Gamma_0$, quando $(\lambda, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)$, de acordo com a distância de Hausdorff.*

Teorema 9. *Considere o sistema S_ε^* satisfazendo $h(x, y) = x$, $f^-(0, y, 0) = f^+(0, y, 0)$ e $f^-(0, y, \varepsilon) \neq f^+(0, y, \varepsilon)$, para todo $\varepsilon > 0$. Seja $P = (0, \bar{y})$ um ponto de equilíbrio do sistema reduzido S_0^* em Σ , i.é., $g(0, \bar{y}, 0) = 0$, satisfazendo $f_x^+(0, \bar{y}, 0) + f_x^-(0, \bar{y}, 0) \neq 0$.*

(a) *Se existe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ vizinhança de \bar{y} e $\varepsilon_0 > 0$ pequeno tal que $f^-(0, y, \varepsilon)f^+(0, y, \varepsilon) < 0$ para $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, então existe uma família contínua P_ε tal que*

- P_ε é um ponto de equilíbrio do campo deslizante associado ao sistema S_ε^* ;
- $P_0 = P$;
- P_0 é um ponto de equilíbrio do sistema regularizado $S_{\lambda, 0}^*$;
- o campo deslizante em torno de P_ε é topologicamente equivalente a

$$B(0, \bar{y}, 0) = \begin{pmatrix} g_{y_1}^1(0, \bar{y}, 0) & \dots & g_{y_n}^1(0, \bar{y}, 0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{y_1}^n(0, \bar{y}, 0) & \dots & g_{y_n}^n(0, \bar{y}, 0) \end{pmatrix}.$$

(b) *Existe um $\varepsilon_1 > 0$ pequeno e uma família contínua Q_ε , com $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ tal que*

- $Q_0 = P$;
- Q_ε é um ponto de equilíbrio do sistema regularizado $S_{\lambda, \varepsilon}^*$.

4.2.1 Descontinuidade em g

Agora, adicionamos uma descontinuidade na função g no sistema S_ε^* e supomos que h não depende da variável x . Obtemos assim, o seguinte sistema

$$\varepsilon \dot{x} = \begin{cases} f^-(x, y, \varepsilon), & \text{se } h(y) \leq 0 \\ f^+(x, y, \varepsilon), & \text{se } h(y) \geq 0 \end{cases}, \quad \dot{y} = \begin{cases} g^-(x, y, \varepsilon), & \text{se } h(y) \leq 0 \\ g^+(x, y, \varepsilon), & \text{se } h(y) \geq 0 \end{cases}. \quad (4.3)$$

Suponhamos também que a condição (1.6) é satisfeita para $\varepsilon = 0$ e que $f^\mp(x, y, \varepsilon) = 0$ pode ser resolvido para $x = \xi_\varepsilon^\mp(y)$, localmente, para todo $\varepsilon \geq 0$. Assim, o sistema reduzido torna-se um sistema não-suave, dado por

$$\dot{y} = \begin{cases} g^-(\xi_0^-(y), y, 0), & \text{se } h(y) \leq 0 \\ g^+(\xi_0^+(y), y, 0), & \text{se } h(y) \geq 0 \end{cases}. \quad (4.4)$$

Dizemos que um ponto $p \in \mathcal{M}_0^- \cap \mathcal{M}_0^+ \cap \Sigma$ satisfaz uma *propriedade* \mathcal{P} se existe uma vizinhança V de p , tal que

$$f^-(q, \varepsilon) = f^+(q, \varepsilon) \quad \text{e} \quad f_y^\mp(q) = 0, \quad \forall q \in V \cap \mathcal{M}_\varepsilon^- \cap \mathcal{M}_\varepsilon^+.$$

O próximo teorema fornece um resultado similar ao obtido em [10], mas para perturbações singulares com duas variedades críticas.

Teorema 10. *Seja $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_0$ um ponto de equilíbrio ou uma órbita periódica hiperbólica do sistema reduzido (4.4) com uma variedade estável local W^s de dimensão j^s e uma variedade instável local W^u de dimensão j^u . Suponha que \mathcal{N} satisfaz a propriedade \mathcal{P} . Assim, existe uma família ε -contínua \mathcal{N}_ε tal que*

(i) $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$;

(ii) \mathcal{N}_ε é um ponto de equilíbrio ou uma órbita periódica hiperbólica do campo deslizante associado ao sistema (4.3), com variedade estável local $\mathcal{N}_\varepsilon^s$ de dimensão $(j^s + k^s)$ e com variedade instável local $\mathcal{N}_\varepsilon^u$ de dimensão $(j^u + k^u)$.

4.3 Prova do Teorema 8

Nesta seção provamos o Teorema 8. Para isso, considere o seguinte lema.

Lema 11. *Fixe $n = 2$. Se S_0 tem uma poli-trajetória fechada de costura ou deslize hiperbólica Γ_0 , então para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o sistema regularizado $S_{\lambda,0}$ tem um ciclo limite hiperbólico $\Gamma_{\lambda,0}$, tal que $\Gamma_{\lambda,0} \rightarrow \Gamma_0$ quando $\lambda \rightarrow 0$, de acordo com a distância de Hausdorff.*

Demonstração. Suponha que Γ_0 é uma poli-trajetória fechada de costura. Suponha sem perda de generalidade que ela é formada por duas componentes conexas γ_0 e γ_1 . Sejam $p_0, p_1 \in \Sigma \cap \Gamma_0$, T_0 e T_1 seções transversais a γ_0 e γ_1 em p_0 e p_1 , respectivamente. Denote por $\eta_0 : T_0 \rightarrow T_1$ e $\eta_1 : T_1 \rightarrow T_0$ as aplicações de primeiro retorno definidas pelos fluxos de $F^-(x, \psi(x))$ e $F^+(x, \psi(x))$, respectivamente. Seja $\eta = \eta_1 \circ \eta_0$. Suponha sem perda de generalidade que Γ_0 é atratora, i.é., $\eta'(p_0) < 1$. Tome uma orientação em T_0 e fixe a origem

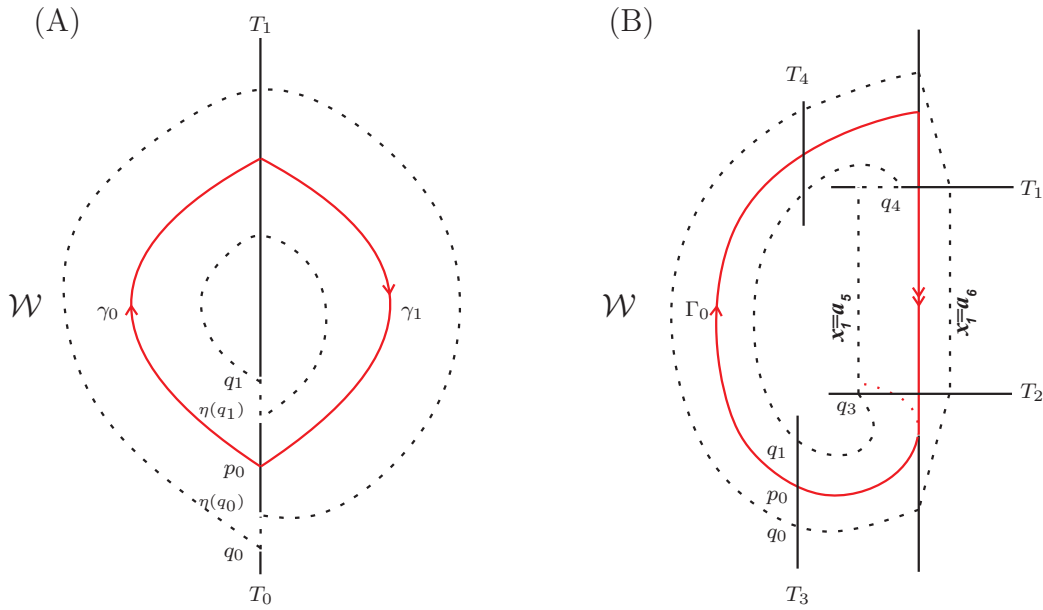


Figura 4.1: As figuras (A) e (B) representam uma poli-trajetória fechada de costura e uma poli-trajetória fechada de deslize e suas respectivas vizinhanças tubulares \mathcal{W} .

em p_0 . Sejam q_0 e q_1 pontos de T_0 tais que $q_0 < p_0 < q_1$. Assim temos $q_0 < \eta(q_0) < 0$ e $0 < \eta(q_1) < q_1$, porque $\eta'(p_0) < 1$. Seja \mathcal{W} a vizinhança tubular de Γ_0 , como mostra Figura 4.1-(A). Note que por construção as poli-trajetórias fechadas que cruzam os arcos $\overline{q_0\eta(q_0)}$ e $\overline{q_1\eta(q_1)}$ entram em \mathcal{W} . Seja λ_0 suficientemente pequeno, tal que $\eta_\lambda(q_0) > q_0$ e $\eta_\lambda(q_1) < q_1$, onde $\eta_\lambda : T_0 \rightarrow T_0$ é a aplicação de primeiro retorno de $S_{\lambda,0}$, com $0 < \lambda < \lambda_0$. Denote por \mathcal{W}_λ a vizinhança formada pelas órbitas de $S_{\lambda,0}$ passando por q_0 e q_1 e pelos arcos $\overline{q_0\eta_\lambda(q_0)}$ e $\overline{q_1\eta_\lambda(q_1)}$ em T_0 . Por construção as órbitas de $S_{\lambda,0}$ entram em \mathcal{W}_λ . Assim o Teorema de Poincaré Bendixson garante a existência de uma órbita periódica $\Gamma_{\lambda,0}$ de $S_{\lambda,0}$, em \mathcal{W}_λ , já que não existe pontos de equilíbrio em \mathcal{W}_λ .

Agora, suponha que Γ_0 é uma poli-trajetória fechada de deslize. Suponha por simplicidade que Γ_0 tem somente um ponto de dobra. Sejam T_1, T_2, T_3 e T_4 seções transversais, como na Figura 4.1-(B). Sejam $p_0 \in \Gamma_0 \cap T_3$ e q_0 e q_1 pontos em T_3 , tais que $q_0 < p_0 < q_1$ e as órbitas de F^- por q_0 e q_1 cruzam T_4 . Podemos tomar q_0 e q_1 suficientemente próximos a p_0 . Assim, a órbita passando por q_0 encontra a região de deslize após cruzar T_4 e a órbita passando por q_1 encontra a região de deslize após cruzar T_1 . Considere o ponto $q_3 = (a_3, b_3)$ em T_2 , obtido da interseção de T_2 com a órbita de F^- que

passa por q_1 . Considere o ponto $q_4 = (a_4, b_4)$ obtido da interseção de T_1 com essa órbita. Tome $a_5 = \min\{a_3, a_4\}$ e $a_6 > 0$ tais que as órbitas de F^- por $x = (x_1, x_2)$ com $x_1 < a_6$, encontra a região de deslize. Considere os pontos $(0, a_7)$ e $(0, a_8)$ obtidos pela interseção da órbita por q_0 e Σ . Considere a vizinhança tubular \mathcal{W} formada pela órbita por q_1 entre T_1 e T_2 , pelo segmento $\overline{(a_3, b_4)(a_4, b_4)}$ em T_1 , pelas linhas $x_1 = a_5$ e $x_1 = a_6$ entre T_1 e T_2 , pela órbita por q_0 limitada por Σ e pelos segmentos $\overline{(0, a_7)(a_6, b_3)}$ e $\overline{(0, a_8)(a_6, b_4)}$. Tome $\lambda_0 > 0$ tal que $-\lambda_0 \geq a_5$ e $\lambda_0 \leq a_6$. Assim, as seções T_3 e T_4 estão fora da zona de regularização e o fluxo do sistema regularizado $S_{\lambda,0}$ entra em \mathcal{W} . Novamente, pelo Teorema de Poincaré–Bendixson, $S_{\lambda,0}$ tem uma órbita periódica $\Gamma_{\lambda,0}$. Podemos provar detalhadamente que a órbita periódica $\Gamma_{\lambda,0}$ é hiperbólica, por exemplo, veja as referências [8, 54]. Fazendo $\lambda \rightarrow 0$, concluímos que $\Gamma_{\lambda,0} \rightarrow \Gamma_0$. \square

Proposição 24. *Se sob as hipóteses do Teorema 8 adicionarmos Γ_0 normalmente hiperbólica, então $\Gamma_{\lambda,0}$ será normalmente hiperbólica, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração. Suponha que Γ_0 é uma poli-trajetória fechada normalmente hiperbólica, i.é., $G_y(x, y, 0) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \Gamma_0$. Assim, existe uma vizinhança tubular \mathcal{V} de Γ_0 tal que $G_y(x, y, 0) \neq 0$. Se for necessário, podemos reduzir o parâmetro λ de modo que o ciclo limite $\Gamma_{\lambda,0}$ pertença a \mathcal{V} e portanto, o resultado segue. \square

Agora, considere o seguinte lema.

Lema 12. *Fixe $n = 2$. Se S_0 tem uma poli-trajetória fechada de costura ou deslize, ou um ciclo limite hiperbólico e normalmente hiperbólico Γ_0 , então para $\varepsilon, \lambda > 0$ suficientemente pequeno, o sistema regularizado $S_{\lambda,\varepsilon}$ tem um ciclo limite hiperbólico $\Gamma_{\lambda,\varepsilon}$, tal que $\Gamma_{\lambda,\varepsilon} \rightarrow \Gamma_0$, quando $(\lambda, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)$, de acordo com a distância de Hausdorff.*

Demonstração. Suponha que S_0 tem um ciclo limite hiperbólico Γ_0 e suponha que ele seja normalmente hiperbólico. Seja $S_{\lambda,0}$ a regularização do sistema S_0 . Podemos escolher $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, tal que Γ_0 não intercepta a zona de regularização. Assim, o ciclo limite hiperbólico $\Gamma_0 := \Gamma_{\lambda,0}$ persiste para a regularização $S_{\lambda,\varepsilon}$ e permanece normalmente hiperbólico. Logo, o Teorema de Fenichel (Teorema A) implica a existência de um ciclo

limite hiperbólico $\Gamma_{\lambda,\varepsilon}$ de $S_{\lambda,\varepsilon}$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, porque $S_{\lambda,\varepsilon}$ é um problema de perturbação singular se olharmos ε como parâmetro de perturbação. Agora, suponha que S_0 tem uma poli-trajetória fechada de costura ou deslize hiperbólica Γ_0 . Pelo Lema 11, $S_{\lambda,0}$ tem um ciclo limite hiperbólico $\Gamma_{\lambda,0}$, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, se Γ_0 é normalmente hiperbólica, então pela Proposição 24 o ciclo limite $\Gamma_{\lambda,0}$ é normalmente hiperbólico, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Novamente, pelo Teorema de Fenichel, $S_{\lambda,\varepsilon}$ tem um ciclo limite hiperbólico $\Gamma_{\lambda,\varepsilon}$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. \square

Prova do Teorema 8. A prova do Teorema 8 segue diretamente da Proposição 24 e dos Lemas 11 e 12. \square

Observação 3. *Apesar de nosso resultado valer para o sistema regularizado $S_{\lambda,\varepsilon}$, ou seja, dado uma órbita periódica do sistema reduzido S_0 , hiperbólica e normalmente hiperbólica, nós provamos que ela persiste para a regularização de S_ε , obtemos um exemplo numérico para o qual a órbita periódica do reduzido persiste para o sistema S_ε , para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Nós conjecturamos que dada uma órbita periódica do sistema reduzido S_0 hiperbólica e normalmente hiperbólica, ela persiste para o sistema S_ε para pequenos valores de $\varepsilon > 0$.*

4.4 Prova dos Teoremas 9 e 10

Nessa seção provaremos os Teoremas 9 e 10. Primeiramente provaremos o Teorema 9.

Prova do Teorema 9.

Prova do item [(a)]. Considere o sistema S_ε^* com $h(x, y) = x$. Suponha que $P = (0, \bar{y})$ é um ponto de equilíbrio do sistema reduzido S_0^* . Podemos checar que P também é um ponto de equilíbrio da regularização $S_{\lambda,0}^*$. Defina

$$F(x, y, 0) := (f^+ + f^-) + \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)(f^+ - f^-),$$

onde as funções do lado direito são avaliadas em $(x, y, 0)$. Temos

$$\begin{aligned} F_x(0, \bar{y}, 0) &= f_x^+(0, \bar{y}, 0) + f_x^-(0, \bar{y}, 0) + \frac{1}{\lambda} \varphi'(0)(f^+(0, \bar{y}, 0) - f^-(0, \bar{y}, 0)) \\ &+ \varphi(0)(f_x^+(0, \bar{y}, 0) - f_x^-(0, \bar{y}, 0)). \end{aligned}$$

Usando o fato que as variedades críticas interceptam Σ nos mesmos pontos, temos

$$F_x(0, \bar{y}, 0) = f_x^+(0, \bar{y}, 0) + f_x^-(0, \bar{y}, 0) \neq 0.$$

Assim, obtemos $x = \zeta(y)$, resolvendo $F(x, y, 0) = 0$, localmente em torno de P . Desse modo, o sistema regularizado $S_{\lambda,0}^*$ torna-se

$$\dot{y} = g(\zeta(y), (y), 0) = (g^1(\zeta(y), (y), 0), \dots, g^n(\zeta(y), (y), 0)). \quad (4.5)$$

A linearização de (4.5) em \bar{y} é dada por

$$\begin{pmatrix} g_x^1(0, \bar{y}, 0)\zeta_{y_1}(\bar{y}) & \dots & g_x^1(0, \bar{y}, 0)\zeta_{y_n}(\bar{y}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_x^n(0, \bar{y}, 0)\zeta_{y_1}(\bar{y}) & \dots & g_x^n(0, \bar{y}, 0)\zeta_{y_n}(\bar{y}) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} g_{y_1}^1(0, \bar{y}, 0) & \dots & g_{y_n}^1(0, \bar{y}, 0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{y_1}^n(0, \bar{y}, 0) & \dots & g_{y_n}^n(0, \bar{y}, 0) \end{pmatrix}}_{B(0, \bar{y}, 0)}.$$

O campo deslizante associado ao sistema S_ε^* , para $\varepsilon > 0$, é dado por $Z^\Sigma = (0, \varepsilon g(0, y, \varepsilon))$ e seus pontos de equilíbrios são dados pelos zeros da função g . Desde que $\det g_y(0, \bar{y}, 0) \neq 0$, temos pelo Teorema da Função Implícita que $y = y(\varepsilon)$, localmente em torno de $(y, \varepsilon) = (\bar{y}, 0)$. Assim, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $g(0, y(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, para $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

Temos que $g_y(0, y(\varepsilon), \varepsilon) = B(0, y(\varepsilon), \varepsilon)$ e por argumentos de continuidade concluímos que, se as partes reais dos autovalores de $B(0, \bar{y}, 0)$ são diferentes de zero, então as partes reais dos autovalores de $B(0, y(\varepsilon), \varepsilon)$ são diferentes de zero.

Prova do item [(b)]. Seja Q um ponto de equilíbrio do sistema reduzido S_0^* . Pelo item (a) do Teorema 9, P é um ponto de equilíbrio do sistema regularizado $S_{\lambda,0}^*$. Desde que $F_x(P) \neq 0$, estamos na hipótese do Teorema 1, se olharmos ε como o parâmetro de perturbação. Assim, segue o resultado. □

Agora, provamos o Teorema 10.

Prova do Teorema 10. Seja p um ponto de equilíbrio do sistema deslizante associado ao sistema reduzido (4.4), satisfazendo a propriedade \mathcal{P} . Primeiramente, temos que o modo de deslize do sistema (4.4) é persistente para o sistema (4.3). De fato, a condição de deslize para o sistema (4.4) no ponto $p = (x_0, y_0) \in \mathcal{M}_0^- \cap \mathcal{M}_0^+ \cap \Sigma$ é

$$\langle g^-(\xi_0^-(y_0), y_0, 0), h'(y) \rangle \langle g^+(\xi_0^+(y_0), y_0, 0), h'(y) \rangle < 0. \quad (4.6)$$

A condição de deslize para o sistema (4.3) no ponto $q \in \Sigma$ é

$$\langle g^-(\xi_\varepsilon^-(y), y, \varepsilon), h'(y) \rangle \langle g^+(\xi_\varepsilon^+(y), y, \varepsilon), h'(y) \rangle < 0. \quad (4.7)$$

Por continuidade a condição (4.6) implica a condição (4.7). O campo deslizante associado ao sistema reduzido (4.4) em p é dado por

$$f^\Sigma = \frac{\langle g^-, h' \rangle g^+ - \langle g^+, h' \rangle g^-}{\langle g^- - g^+, h' \rangle},$$

e o campo deslizante associado ao sistema (4.3) em $q \in V$ é

$$F_\varepsilon^\Sigma = \beta = \left(\frac{\langle g^-, h' \rangle f^+ / \varepsilon - \langle g^+, h' \rangle f^- / \varepsilon}{\langle g^- - g^+, h' \rangle}, \frac{\langle g^-, h' \rangle g^+ - \langle g^+, h' \rangle g^-}{\langle g^- - g^+, h' \rangle} \right).$$

Desde que $f^-(q, \varepsilon) = f^+(q, \varepsilon) = 0$ para $q \in V \cap \mathcal{M}_\varepsilon^- \cap \mathcal{M}_\varepsilon^+$, temos que $\xi^-(y) = \xi^+(y) := \xi(y)$ e o campo anterior torna-se

$$F_\varepsilon^\Sigma = \left(0, \frac{\langle g^-, h' \rangle g^+ - \langle g^+, h' \rangle g^-}{\langle g^- - g^+, h' \rangle} \right).$$

Assim, $F_0^\Sigma = (0, f^\Sigma)$ e p é um ponto de equilíbrio de F_0^Σ . Portanto, o ponto de equilíbrio p persiste para pequenas perturbações de F_0^Σ , i.é, existe uma família p_ε tal que $p_0 = p$. Usando o fato de que p_ε satisfaz a propriedade \mathcal{P} , a linearização de $F_\varepsilon(x, y, \varepsilon)^\Sigma$ em p_ε é

$$\begin{pmatrix} \frac{\langle g^-, h' \rangle f_x^+ - \langle g^+, h' \rangle f_x^-}{\varepsilon \langle g^- - g^+, h' \rangle} & 0 \\ D_x \beta & D_y \beta \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovalores α da linearização acima satisfazem a seguinte equação

$$(D_y \beta(p_\varepsilon) - \alpha) \left(\frac{\langle g^-, h' \rangle f_x^+ - \langle g^+, h' \rangle f_x^-}{\varepsilon \langle g^- - g^+, h' \rangle} - \alpha \right) = 0.$$

Note que $D_y\beta(p_\varepsilon)$ tem j^s autovalores com partes reais negativas e j^u autovalores com partes reais positivas. Assim, p_ε tem uma variedade estável local $\mathcal{N}_\varepsilon^s$ de dimensão $(j^s + k^s)$ e uma variedade instável local $\mathcal{N}_\varepsilon^u$ de dimensão $(j^u + k^u)$.

Agora, seja \mathcal{N} uma órbita periódica hiperbólica $\Gamma_0 : y(t)$ do campo deslizante (4.4). Se T uma seção transversal local a Γ_0 e $\eta : T \rightarrow T$ a aplicação de primeiro retorno local. Seja $p \in T$ o ponto fixo de η correspondente a Γ_0 . Existem variedades estável e instável locais \mathcal{W}^s e \mathcal{W}^u , de dimensões j^s e j^u , respectivamente, de Γ_0 . Fixe $\varepsilon > 0$. Defina $\Gamma_\varepsilon = (x(t), y(t), \varepsilon)$, onde $x(t) = \xi(y(t))$. Γ_ε é uma órbita periódica. De fato,

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \left(\xi'(y(t)), \frac{\langle g^-, h' \rangle g^+ - \langle g^+, h' \rangle g^-}{\langle g^- - g^+, h' \rangle} \right),$$

e temos $\xi'_\varepsilon(y) = -f_x f_y$, porque $f^\mp(x, y, \varepsilon) = 0$. Concluímos usando a propriedade \mathcal{P} que $\xi'_\varepsilon(y) = 0$. Assim, $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = F_\varepsilon^\Sigma(x(t), y(t))$. Agora o comportamento próximo a Γ_ε é descrito pela aplicação de primeiro retorno local $\eta_\varepsilon(x, y) = (\eta(y), f^-/\varepsilon + \xi(y))$ em torno do ponto fixo $(p, \xi(p), \varepsilon)$. Portanto, existem variedades estável e instável locais $\mathcal{N}_\varepsilon^s$ e $\mathcal{N}_\varepsilon^u$ respectivamente, de Γ_ε . □

4.5 Exemplo

Nessa seção, discutimos o exemplo apresentado na Introdução.

O seguinte exemplo mostra com a ajuda do software Maple 16 que dada uma órbita do sistema reduzido S_0 , ela persiste para o sistema S_ε , para pequenos valores de $\varepsilon > 0$.

Exemplo 7. Kowalczyk apresentou em [52] uma classe de sistemas em \mathbb{R}^2 que tem uma poli-trajetória fechada de costura hiperbólica. Essa classe é dada por

$$\dot{x} = \begin{cases} 1, & \text{se } h(x, x_2) \leq 0 \\ -1, & \text{se } h(x, x_2) \geq 0 \end{cases} \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{\alpha}(x - x_2). \quad (4.8)$$

onde $h(x, x_2) = \theta x + (1 - \theta)x_2$, $(x, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ e $\theta < 0$. O ponto $(x_{switch}, x_{2switch}) = ((1 - \theta^{-1})x_{2switch}, x_{2switch})$ onde a órbita periódica cruza de $X^- = (1, \dot{x}_2)$ a $X^+ = (-1, \dot{x}_2)$ é parametrizado por

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{T + 2e^{-T} + e^{-T}T - 2}{1 + e^{-T}}, \quad y_{switch} = \alpha \theta \frac{e^{-T} - 1}{e^{-T} + 1},$$

onde αT é o tempo que a órbita leva em cada lado. Tomando $\alpha = 10^{-2}$ e $\theta = -1$, a linha de descontinuidade é dada por $\Sigma = \{(x, y) : -x_1 + 2y = 0\}$. Gostaríamos que Σ fosse representada pelo eixo y . Assim, fazemos a seguinte mudança de coordenada

$$x_1 = x - 2x_2$$

e obtemos o seguinte sistema que tem uma poli-trajetória fechada de costura hiperbólica

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} 1 + \frac{2}{10^{-2}}(y - x), & \text{se } x \leq 0 \\ -1 + \frac{2}{10^{-2}}(y - x), & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{10^{-2}}(y - x). \quad (4.9)$$

Logo, olhamos esse sistema no espaço tridimensional definido na variedade $\{y = 0\}$ e obtemos o sistema reduzido (1.5) que tem uma poli-trajetória fechada de deslize hiperbólica sobre essa variedade (veja Figura 4.2). Pelo Teorema 8, o sistema regularizado

$$S_{\lambda, \varepsilon} = \left(\frac{2}{10^{-2}}(x_2 - x_1) + \varphi\left(\frac{x_1}{\lambda}\right), \frac{1}{10^{-2}}(x_2 - x_1), \frac{y}{\varepsilon} \right)$$

tem um ciclo limite para pequenos valores de $\lambda, \varepsilon > 0$. O sistema não-suave (1.4) também tem uma órbita periódica para pequenos valores de $\varepsilon > 0$. (veja Figura 4.2–(A)).

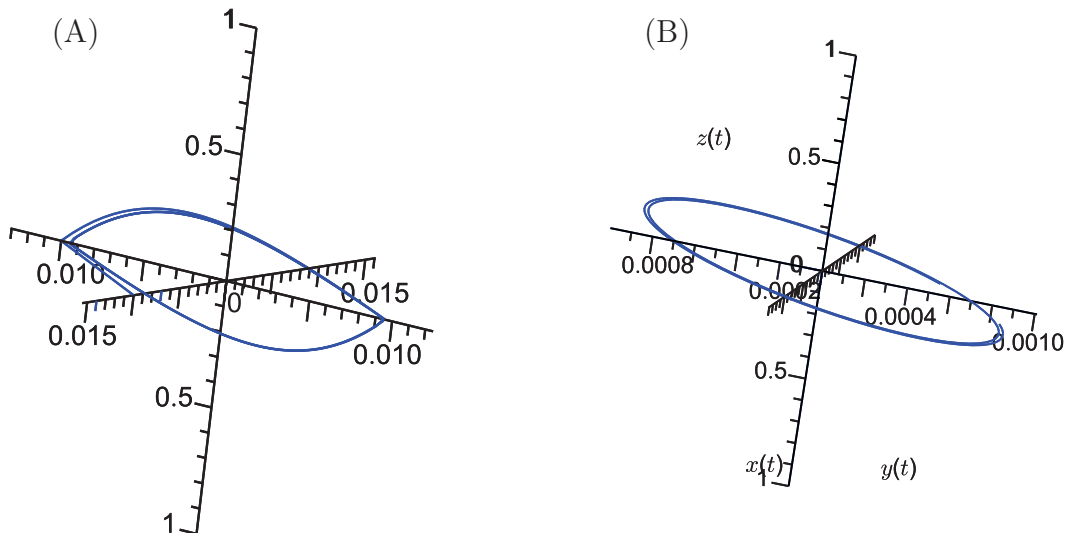


Figura 4.2: As figuras (A) e (B) representam a órbita periódica Γ_ε de S_ε e o ciclo limite $\Gamma_{\lambda, \varepsilon}$ de $S_{\lambda, \varepsilon}$ obtidos no Exemplo 1 com $\lambda = \varepsilon = 0.01$ e $\varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$. Note que o ciclo limite na figura (B) é suave.

Capítulo 5

Ciclos limite para uma Classe de Sistemas Diferenciais Polinomiais Cúbicos Contínuos e Descontínuos

Nesse capítulo, estudamos uma classe de sistemas diferenciais polinomiais de grau 3 em \mathbb{R}^2 , que possui um centro isócrono. Em [13] os autores estudaram algumas classes de sistemas diferenciais polinomiais cúbicos e isócronos. Em particular eles obtiveram a família

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(-1 + 2\alpha x + 2\beta x^2) = P(x, y), \\ \dot{y} &= x + \alpha(y^2 - x^2) + 2\beta xy^2 = Q(x, y),\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta < 0$. Essa família tem uma integral primeira racional de grau 2, veja o sistema (iv) do Teorema 7 em [13], veja também [39, 40]. Uma questão aberta é: *O que acontece com as órbitas periódicas do sistema não perturbado (5.1) quando ele é perturbado dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais contínuos e descontínuos cúbicos?* Mais precisamente, considere o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(-1 + 2\alpha x + 2\beta x^2) + \varepsilon p_1(x, y), \\ \dot{y} &= x + \alpha(y^2 - x^2) + 2\beta xy^2 + \varepsilon q_1(x, y),\end{aligned}\tag{5.2}$$

e o sistema descontínuo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} X_1(x, y) & \text{se } y > 0, \\ X_2(x, y) & \text{se } y < 0, \end{cases}\tag{5.3}$$

onde

$$\begin{aligned} X_1(x, y) &= \begin{pmatrix} y(-1 + 2\alpha x + 2\beta x^2) + \varepsilon p_1(x, y) \\ x + \alpha(y^2 - x^2) + 2\beta xy^2 + \varepsilon q_1(x, y) \end{pmatrix}, \\ X_2(x, y) &= \begin{pmatrix} y(-1 + 2\alpha x + 2\beta x^2) + \varepsilon p_2(x, y) \\ x + \alpha(y^2 - x^2) + 2\beta xy^2 + \varepsilon q_2(x, y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3, \\ q_1(x, y) &= b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^3 + b_7x^2y + b_8xy^2 + b_9y^3, \\ p_2(x, y) &= c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4xy + c_5y^2 + c_6x^3 + c_7x^2y + c_8xy^2 + c_9y^3, \\ q_2(x, y) &= d_1x + d_2y + d_3x^2 + d_4xy + d_5y^2 + d_6x^3 + d_7x^2y + d_8xy^2 + d_9y^3. \end{aligned}$$

Aqui estudaremos o número máximo de ciclos limite dos sistemas (5.2) e (5.3) que pode ser obtido usando a teoria do “averaging” de primeira ordem.

Essencialmente, existem quatro métodos para determinar o número de ciclos limite que bifurcam das órbitas periódicas de um centro. O primeiro método é baseado na aplicação de Poincaré, veja por exemplo [5, 15]. O segundo método usa as integrais de Poincaré-Pontrjagin-Melnikov ou as integrais Abelianas. Esses dois métodos são equivalentes no plano, veja a Seção 6 do Capítulo 4 de [28] e a Seção 5 do Capítulo 6 de [3]. O terceiro método é baseado no fator integrante inverso, veja a Seção 6 de [24] ou [25, 26, 59]. O último método é baseado na teoria do “averaging”, veja por exemplo [6, 51, 58]. De [6] é fácil checar que no plano o método do “averaging” de primeira ordem é equivalente ao método das integrais Abelianas. Além disso, os dois primeiros métodos sempre dão informações sobre o número de órbitas periódicas do sistema não perturbado que tornam ciclos limite após a perturbação. Os últimos dois métodos também podem dar a forma do ciclo limite bifurcado até a ordem do parâmetro de perturbação, veja [25, 26, 37].

Na sequência, enunciaremos nossos principais resultados para o sistema anterior.

Teorema 11. *Para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno, o número de ciclos limite do sistema (5.2), bifurcando das soluções periódicas do centro isócrono (5.1), é no máximo 3, usando a teoria do “averaging” de primeira ordem, e esse número é realizado.*

O Teorema 11 está provado na Seção 5.1.

Teorema 12. *Para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno, o número máximo de ciclos limite do sistema (5.3), bifurcando das soluções periódicas do centro isócrono (5.1), é pelo menos 12, usando a teoria do “averaging” de primeira ordem.*

O Teorema 12 está provado na Seção 5.2.

Na Seção 2.4 apresentamos os resultados básicos que precisamos para provar os Teoremas 11 e 12.

Seja I um intervalo da reta e sejam $f_0, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções. Dizemos que f_0, \dots, f_n são funções *linearmente independentes* se, e somente se,

$$\forall s \in I, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

O próximo resultado é bem conhecido e pode ser encontrado na Proposição 1 de [43].

Proposição 25. *Se f_0, \dots, f_n são linearmente independentes, então existem $s_1, s_2, \dots, s_n \in I$ e $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tal que para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ temos*

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(s_j) = 0.$$

As funções (f_0, f_1, \dots, f_n) definidas em I formam um *sistema de Chebyshev Estendido* ou um sistema-ET em I se, e somente se, qualquer combinação linear não trivial dessas funções tem no máximo n zeros contando suas multiplicidades e este número é alcançado. Dizemos que (f_0, f_1, \dots, f_n) é um *sistema de Chebyshev Estendido Completo* ou um sistema-ECT em I se, e somente se, para qualquer $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, (f_0, f_1, \dots, f_k) forma um sistema-ET. Para provar que (f_0, f_1, \dots, f_k) é um sistema-ECT em I é necessário e suficiente provar que $W(f_0, \dots, f_k)(s) \neq 0$ em I , para $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Denotamos $W(f_0, \dots, f_k)(s)$ o Wronskiano das funções (f_0, \dots, f_k) com respeito a s . Lembramos que a definição de Wronskiano é

$$W(f_0, \dots, f_k)(s) = \begin{vmatrix} f_0(s) & f_1(s) & \cdots & f_k(s) \\ f_0'(s) & f_1'(s) & \cdots & f_k'(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(k)}(s) & f_1^{(k)}(s) & \cdots & f_k^{(k)}(s) \end{vmatrix}.$$

Para mais detalhes sobre sistemas-ECT, veja [33].

5.1 Prova do Teorema 11

Note que o fator integrante

$$\mu(x, y) = -\frac{2}{(-1 + 2\alpha x + 2\beta x^2)^2}$$

e a integral primeira

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 - 2x(\alpha + \beta x)}$$

do sistema (5.1) satisfazem $\mu P = -H_y$ e $\mu Q = H_x$. Assim, μ é o fator integrante correspondente a integral primeira H . A função $\rho : (0, \sqrt{-1/(2\beta)}) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$\rho(R, \varphi) = \frac{R \left(\sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} - \alpha R \cos \varphi \right)}{2\beta R^2 \cos^2 \varphi + 1}$$

satisfaz a hipótese (2.14) do Teorema 4 (p. 28). Veremos depois que $xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0$ nos pontos das órbitas periódicas. Assim, o sistema (2.15) do Teorema 4 para nosso sistema (5.2), torna-se

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \sum_{i=1}^{11} \frac{A_i(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{B(R, \varphi, \alpha, \beta)} R^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.4)$$

onde $a = (a_1, \dots, a_9)$, $b = (b_1, \dots, b_9)$ e

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 \cos^2 \varphi + (a_2 + b_1) \sin \varphi \cos \varphi + b_2 \sin^2 \varphi, \\ A_2 &= \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \left((a_3 - 3\alpha a_1) \cos^3 \varphi + (-3\alpha a_2 + a_4 \right. \\ &\quad \left. - 4\alpha b_1 + b_3) \sin \varphi \cos^2 \varphi + (a_5 + \alpha(a_1 - 4b_2) + b_4) \sin^2 \varphi \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + (\alpha a_2 + b_5) \sin^3 \varphi \right), \\ A_3 &= (5a_1 \alpha^2 - 4a_3 \alpha + a_6 + 10a_1 \beta) \cos^4 \varphi + ((5a_2 + 8b_1) \alpha^2 - (4a_4 \\ &\quad + 5b_3) \alpha + a_7 + 10a_2 \beta + 8\beta b_1 + b_6) \sin \varphi \cos^3 \varphi + ((8b_2 - 3a_1) \alpha^2 \\ &\quad + (a_3 - 4a_5 - 5b_4) \alpha + a_8 + 2a_1 \beta + 8\beta b_2 + b_7) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ &\quad + (-3a_2 \alpha^2 + (a_4 - 5b_5) \alpha + a_9 + 2a_2 \beta + b_8) \sin^3 \varphi \cos \varphi \\ &\quad + (\alpha a_5 + b_9) \sin^4 \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \left((-4a_1\alpha^3 + 8a_3\alpha^2 - 5a_6\alpha - 24a_1\beta\alpha \right. \\
& + 8a_3\beta) \cos^5 \varphi - (4(a_2 + 2b_1)\alpha^3 - 4(2a_4 + 3b_3)\alpha^2 + (5a_7 + 6(4a_2\beta \\
& + 4b_1\beta + b_6)) \alpha - 2\beta(4a_4 + 3b_3)) \sin \varphi \cos^4 \varphi + (4(a_1 - 2b_2)\alpha^3 \\
& - 4(a_3 - 2a_5 - 3b_4)\alpha^2 + (a_6 - 5a_8 - 6(4\beta b_2 + b_7))\alpha + 2\beta(a_3 + 4a_5 \\
& + 3b_4)) \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi + (4a_2\alpha^3 - 4(a_4 - 3b_5)\alpha^2 + (a_7 - 5a_9 \\
& + 6b_8) \alpha + 2\beta(a_4 + 3b_5)) \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi + (-4a_5\alpha^2 + (a_8 - 6b_9)\alpha \\
& + 2a_5\beta) \sin^4 \varphi \cos \varphi + \alpha a_9 \sin^5 \varphi \left. \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5 = & (4a_1\alpha^4 - 12a_3\alpha^3 + 13a_6\alpha^2 + 40a_1\beta\alpha^2 - 32a_3\beta\alpha + 40a_1\beta^2 \\
& + 8a_6\beta) \cos^6 \varphi + (4a_2\alpha^4 + 8b_1\alpha^4 - 12a_4\alpha^3 - 20b_3\alpha^3 + 13a_7\alpha^2 \\
& + 40a_2\beta\alpha^2 + 48\beta b_1\alpha^2 + 18b_6\alpha^2 - 32a_4\beta\alpha - 30\beta b_3\alpha + 40a_2\beta^2 \\
& + 8a_7\beta + 24\beta^2 b_1 + 6\beta b_6) \sin \varphi \cos^5 \varphi + (-4a_1\alpha^4 + 8b_2\alpha^4 + 8a_3\alpha^3 \\
& + 12a_5\alpha^3 - 20b_4\alpha^3 - 5a_6\alpha^2 + 13a_8\alpha^2 - 8a_1\beta\alpha^2 + 48\beta b_2\alpha^2 \\
& + 18b_7\alpha^2 - 2a_3\beta\alpha - 32a_5\beta\alpha - 30\beta b_4\alpha + 16a_1\beta^2 + 2a_6\beta + 8a_8\beta \\
& + 24\beta^2 b_2 + 6\beta b_7) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + (-4a_2\alpha^4 + 8a_4\alpha^3 - 20b_5\alpha^3 \\
& - 5a_7\alpha^2 + 13a_9\alpha^2 - 8a_2\beta\alpha^2 + 18b_8\alpha^2 - 2a_4\beta\alpha - 30\beta b_5\alpha + 16a_2\beta^2 \\
& + 2a_7\beta + 8a_9\beta + 6\beta b_8) \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + (8a_5\alpha^3 - 5a_8\alpha^2 + 18b_9\alpha^2 \\
& - 2a_5\beta\alpha + 2a_8\beta + 6\beta b_9) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi - a_9 (5\alpha^2 - 2\beta) \sin^5 \varphi \cos \varphi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_6 = & 2 \cos^2 \varphi \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \left((4a_3\alpha^4 - 2(5a_6 + 6a_1\beta)\alpha^3 \right. \\
& + 24a_3\beta\alpha^2 - 3\beta(5a_6 + 12a_1\beta)\alpha + 12a_3\beta^2) \cos^5 \varphi + (4(a_4 \\
& + 2b_3)\alpha^4 - 2(5a_7 + 6a_2\beta + 8\beta b_1 + 8b_6)\alpha^3 + 24\beta(a_4 + b_3)\alpha^2 \\
& - 3\beta(5a_7 + 4(3a_2\beta + 2b_1\beta + b_6))\alpha + 6\beta^2(2a_4 + b_3)) \sin \varphi \cos^4 \varphi \\
& - (4(a_3 - a_5 - 2b_4)\alpha^4 - 2(3a_6 - 5a_8 + 2a_1\beta - 8\beta b_2 - 8b_7)\alpha^3 \\
& - 24\beta(a_5 + b_4)\alpha^2 + 3\beta(a_6 + 5a_8 + 4a_1\beta + 8\beta b_2 + 4b_7)\alpha - 6\beta^2(a_3 \\
& + 2a_5 + b_4)) \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi - (4(a_4 - 2b_5)\alpha^4 - 2(3a_7 - 5a_9 + 2a_2\beta \\
& - 8b_8)\alpha^3 - 24\beta b_5\alpha^2 + 3\beta(a_7 + 5a_9 + 4a_2\beta + 4b_8)\alpha \\
& - 6\beta^2(a_4 + b_5) \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi - (4a_5\alpha^4 + (16b_9 - 6a_8)\alpha^3 + 3\beta(a_8 \\
& + 4b_9) \alpha - 6a_5\beta^2) \sin^4 \varphi \cos \varphi + 3 \alpha a_9 (2\alpha^2 - \beta) \sin^5 \varphi \left. \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_7 = & 2 \cos^3 \varphi \left((-4a_3\alpha^5 + 2(7a_6 + 6a_1\beta)\alpha^4 - 36a_3\beta\alpha^3 + 3\beta(13a_6 \right. \\
& + 20a_1\beta)\alpha^2 - 48a_3\beta^2\alpha + 4\beta^2(3a_6 + 10a_1\beta)) \cos^5 \varphi - (4(a_4 \\
& + 2b_3)\alpha^5 - 2(7a_7 + 6a_2\beta + 8\beta b_1 + 12b_6)\alpha^4 + 4\beta(9a_4 + 10b_3)\alpha^3 \\
& - 3\beta(13a_7 + 4(5a_2\beta + 4b_1\beta + 3b_6))\alpha^2 + 6\beta^2(8a_4 + 5b_3)\alpha - 2\beta^2(6a_7 \\
& + 20a_2\beta + 8\beta b_1 + 3b_6)) \sin \varphi \cos^4 \varphi + (4(a_3 - a_5 - 2b_4)\alpha^5 - 2(5a_6 \\
& - 7a_8 + 2a_1\beta - 8\beta b_2 - 12b_7)\alpha^4 + 4\beta(a_3 - 9a_5 - 10b_4)\alpha^3 + 3\beta(a_6 \\
& + 13a_8 + 4a_1\beta + 16\beta b_2 + 12b_7)\alpha^2 - 6\beta^2(3a_3 + 8a_5 + 5b_4)\alpha \\
& + 2\beta^2(3a_6 + 6a_8 + 12a_1\beta + 8\beta b_2 + 3b_7)) \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi + (4(a_4 \\
& - 2b_5)\alpha^5 - 2(5a_7 - 7a_9 + 2a_2\beta - 12b_8)\alpha^4 + 4\beta(a_4 - 10b_5)\alpha^3 \\
& + 3\beta(a_7 + 13a_9 + 4a_2\beta + 12b_8)\alpha^2 - 6\beta^2(3a_4 + 5b_5)\alpha + 6\beta^2(a_7 \\
& + 2a_9 + 4a_2\beta + b_8)) \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi + (4a_5\alpha^5 + (24b_9 - 10a_8)\alpha^4 \\
& + 4a_5\beta\alpha^3 + 3\beta(a_8 + 12b_9)\alpha^2 - 18a_5\beta^2\alpha + 6\beta^2(a_8 \\
& + b_9)) \sin^4 \varphi \cos \varphi - a_9(10\alpha^4 - 3\beta\alpha^2 - 6\beta^2) \sin^5 \varphi), \\
A_8 = & 4 \cos^4 \varphi \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \left((-4a_6\alpha^5 + 8a_3\beta\alpha^4 - 4\beta(5a_6 \right. \\
& + 3a_1\beta)\alpha^3 + 24a_3\beta^2\alpha^2 - 3\beta^2(5a_6 + 8a_1\beta)\alpha + 8a_3\beta^3) \cos^5 \varphi \\
& - (4(a_7 + 2b_6)\alpha^5 - 8\beta(a_4 + b_3)\alpha^4 + 4\beta(5a_7 + 3a_2\beta + 2\beta b_1 \\
& + 4b_6)\alpha^3 - 12\beta^2(2a_4 + b_3)\alpha^2 + \beta^2(15a_7 + 24a_2\beta + 8\beta b_1 + 6b_6)\alpha \\
& - 2\beta^3(4a_4 + b_3)) \sin \varphi \cos^4 \varphi + (4(a_6 - a_8 - 2b_7)\alpha^5 + 8\beta(a_5 \\
& + b_4)\alpha^4 - 4\beta(a_6 + 5a_8 + a_1\beta + 2\beta b_2 + 4b_7)\alpha^3 + 12\beta^2(a_3 + 2a_5 \\
& + b_4)\alpha^2 - \beta^2(9a_6 + 15a_8 + 16a_1\beta + 8\beta b_2 + 6b_7)\alpha + 2\beta^3(3a_3 \\
& + 4a_5 + b_4)) \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi + (4(a_7 - a_9 - 2b_8)\alpha^5 + 8\beta b_5\alpha^4 \\
& - 4\beta(a_7 + 5a_9 + a_2\beta + 4b_8)\alpha^3 + 12\beta^2(a_4 + b_5)\alpha^2 - \beta^2(9a_7 \\
& + 15a_9 + 16a_2\beta + 6b_8)\alpha + 2\beta^3(3a_4 + b_5)) \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi + (4(a_8 \\
& - 2b_9)\alpha^5 - 4\beta(a_8 + 4b_9)\alpha^3 + 12a_5\beta^2\alpha^2 - 3\beta^2(3a_8 + 2b_9)\alpha \\
& + 6a_5\beta^3) \sin^4 \varphi \cos \varphi + \alpha a_9(4\alpha^4 - 4\beta\alpha^2 - 9\beta^2) \sin^5 \varphi), \\
A_9 = & 4 \cos^5 \varphi \left((4a_6\alpha^6 - 8a_3\beta\alpha^5 + 4\beta(7a_6 + 3a_1\beta)\alpha^4 - 36a_3\beta^2\alpha^3 \right. \\
& + \beta^2(39a_6 + 40a_1\beta)\alpha^2 - 32a_3\beta^3\alpha + 4\beta^3(2a_6 + 5a_1\beta)) \cos^5 \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (4(a_7 + 2b_6)\alpha^6 - 8\beta(a_4 + b_3)\alpha^5 + 4\beta(7a_7 + 3a_2\beta + 2\beta b_1 \\
& + 6b_6)\alpha^4 - 4\beta^2(9a_4 + 5b_3)\alpha^3 + \beta^2(39a_7 + 40a_2\beta + 16\beta b_1 + 18b_6)\alpha^2 \\
& - 2\beta^3(16a_4 + 5b_3)\alpha + 2\beta^3(4a_7 + 10a_2\beta + 2\beta b_1 + b_6)) \sin \varphi \cos^4 \varphi \\
& - (4(a_6 - a_8 - 2b_7)\alpha^6 + 8\beta(a_5 + b_4)\alpha^5 - 4\beta(a_6 + 7a_8 + a_1\beta + 2\beta b_2 \\
& + 6b_7)\alpha^4 + 4\beta^2(4a_3 + 9a_5 + 5b_4)\alpha^3 - \beta^2(21a_6 + 39a_8 + 24a_1\beta \\
& + 16\beta b_2 + 18b_7)\alpha^2 + 2\beta^3(11a_3 + 16a_5 + 5b_4)\alpha - 2\beta^3(3a_6 + 4a_8 \\
& + 8a_1\beta + 2\beta b_2 + b_7)) \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi - (4(a_7 - a_9 - 2b_8)\alpha^6 + 8\beta b_5\alpha^5 \\
& - 4\beta(a_7 + 7a_9 + a_2\beta + 6b_8)\alpha^4 + 4\beta^2(4a_4 + 5b_5)\alpha^3 - 3\beta^2(7a_7 + 13a_9 \\
& + 8a_2\beta + 6b_8)\alpha^2 + 2\beta^3(11a_4 + 5b_5)\alpha - 2\beta^3(3a_7 + 4a_9 + 8a_2\beta \\
& + b_8)) \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi - (4(a_8 - 2b_9)\alpha^6 - 4\beta(a_8 + 6b_9)\alpha^4 + 16a_5\beta^2\alpha^3 \\
& - 3\beta^2(7a_8 + 6b_9)\alpha^2 + 22a_5\beta^3\alpha - 2\beta^3(3a_8 + b_9)) \sin^4 \varphi \cos \varphi \\
& - a_9 (4\alpha^6 - 4\beta\alpha^4 - 21\beta^2\alpha^2 - 6\beta^3) \sin^5 \varphi), \\
A_{10} = & 8\beta \cos^6 \varphi \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \left((-4a_6\alpha^5 + 4a_3\beta\alpha^4 - 2\beta(5a_6 \right. \\
& + 2a_1\beta)\alpha^3 + 8a_3\beta^2\alpha^2 - \beta^2(5a_6 + 6a_1\beta)\alpha + 2a_3\beta^3) \cos^3 \varphi - (4a_7\alpha^5 \\
& - 4a_4\beta\alpha^4 + 2\beta(5a_7 + 2a_2\beta)\alpha^3 - 8a_4\beta^2\alpha^2 + \beta^2(5a_7 + 6a_2\beta)\alpha \\
& - 2a_4\beta^3) \sin \varphi \cos^2 \varphi - (4a_8\alpha^5 - 4a_5\beta\alpha^4 + 10a_8\beta\alpha^3 - 8a_5\beta^2\alpha^2 \\
& + 5a_8\beta^2\alpha - 2a_5\beta^3) \sin^2 \varphi \cos \varphi - \alpha a_9 (4\alpha^4 + 10\beta\alpha^2 + 5\beta^2) \sin^3 \varphi), \\
A_{11} = & 8\beta (\alpha^2 + 2\beta) \cos^7 \varphi \left((4a_6\alpha^4 - 4a_3\beta\alpha^3 + 2\beta(3a_6 + 2a_1\beta)\alpha^2 \right. \\
& - 4a_3\beta^2\alpha + \beta^2(a_6 + 2a_1\beta)) \cos^3 \varphi + (4a_7\alpha^4 - 4a_4\beta\alpha^3 + 2\beta(3a_7 \\
& + 2a_2\beta)\alpha^2 - 4a_4\beta^2\alpha + \beta^2(a_7 + 2a_2\beta)) \sin \varphi \cos^2 \varphi + (4a_8\alpha^4 \\
& - 4a_5\beta\alpha^3 + 6a_8\beta\alpha^2 - 4a_5\beta^2\alpha + a_8\beta^2) \sin^2 \varphi \cos \varphi \\
& \left. + a_9 (4\alpha^4 + 6\beta\alpha^2 + \beta^2) \sin^3 \varphi \right), \\
B = & (-2\beta R^2 \cos^2 \varphi - 1) (2(\alpha^2 + \beta) R^2 \cos^2 \varphi \\
& - 2\alpha R \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \cos \varphi + 1)^2 \left((\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi \right. \\
& \left. - \alpha R \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \cos \varphi + 1 \right).
\end{aligned}$$

Para provar que B não se anula temos que mostrar que as equações

$$\begin{aligned} 2(\alpha^2 + \beta) R^2 \cos^2 \varphi &= 2\alpha R \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \cos \varphi + 1, \\ (\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi &= \alpha R \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \cos \varphi + 1, \end{aligned}$$

não tem soluções no intervalo $(0, \sqrt{-1/(2\beta)})$. De fato, elevamos ao quadrado ambos os lados das duas equações anteriores, obtemos respectivamente

$$(2\beta R^2 \cos^2 \varphi + 1)^2 = 0, \quad (2\beta R^2 \cos^2 \varphi + 1) (R^2 (\alpha^2 + 2\beta) \cos^2 \varphi + 1) = 0.$$

Desde que $R \in (0, \sqrt{-1/(2\beta)})$ as duas equações anteriores não tem soluções. Assim, $xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0$ nos pontos das órbitas periódicas do centro (5.1).

Agora, calculamos a função “averaging” $f : (0, \sqrt{-1/2\beta}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(R) = \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{11} \frac{A_i(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{B(R, \varphi, \alpha, \beta)} R^i d\varphi.$$

Calculando a integral anterior, obtemos que $f(R) = N(R)/D(R)$, onde

$$\begin{aligned} N(R) &= \beta(a_6 + 3a_8 + 2a_1\beta + 2\beta b_2 + b_7 - 3b_9)g_0 - 2\beta^2(2a_1\alpha^2 + a_3\alpha \\ &\quad + a_5\alpha + a_6 + a_8 + 2a_1\beta)g_1 + 2\beta(a_8 + b_9)g_2 + (a_6 - a_8 - b_7 \\ &\quad + b_9)g_3, \\ D(R) &= 4\beta^2 R, \quad g_0 = R^2, \quad g_1 = R^4, \quad g_2 = R^2 \sqrt{1 + 2\beta R^2}, \\ g_3 &= 1 - \sqrt{1 + 2\beta R^2}. \end{aligned}$$

Os cálculos anteriores foram verificados com o auxílio do software *Mathematica*. Os zeros da função f correspondem aos zeros da função N . Para encontrar o número máximo de zeros de f , basta provar que (g_0, g_1, g_2, g_3) é um sistema-ECT, ou seja, $W(g_0, \dots, g_k)(R) \neq 0$, para $0 \leq k \leq 3$, onde $W(g_0, \dots, g_k)(R)$ denota os Wronskianos das funções (g_0, \dots, g_k) . Mais precisamente, temos

$$\begin{aligned} W(g_0)(R) &= R^2, \quad W(g_0, g_1) = 2R^5, \quad W(g_0, g_1, g_2)(R) = -\frac{8R^9\beta^2}{(1 + 2\beta R^2)^{3/2}}, \\ W(g_0, \dots, g_3)(R) &= \frac{-192\beta^2 R^6}{(1 + 2\beta R^2)^{7/2}} \left[\sqrt{1 + 2\beta R^2} R^4 \beta^2 + 4\sqrt{1 + 2\beta R^2} \beta R^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{1 + 2\beta R^2} - 4R^4 \beta^2 - 6\beta R^2 - 2 \right]. \end{aligned}$$

Desde que $\beta < 0$ e $R \in (0, \sqrt{-1/(2\beta)})$, os três primeiros Wronskianos não se anulam. Agora, obter os zeros de $W(g_0, \dots, g_3)(R)$ é equivalente a resolver a seguinte equação

$$\sqrt{1 + 2\beta R^2} R^4 \beta^2 + 4\sqrt{1 + 2\beta R^2} \beta R^2 + 2\sqrt{1 + 2\beta R^2} = 4R^4 \beta^2 + 6\beta R^2 + 2.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação anterior e fazendo algumas simplificações, obtemos

$$(1 + 2\beta R^2)R^8 \beta^4 = 0,$$

que é impossível porque $R \in (0, \sqrt{-1/(2\beta)})$. Assim, o Wronskiano $W(g_0, \dots, g_3)(R)$ não se anula em $(0, \sqrt{-1/(2\beta)})$. Portanto, uma vez que (g_0, g_1, g_2, g_3) é um sistema-ECT, f tem no máximo 3 zeros e eles são alcançados.

O sistema (5.4) é analítico e satisfaz as hipóteses do Teorema 2. Portanto, os zeros de f correspondem a órbitas periódicas do sistema perturbado (5.2) e o Teorema 11 está provado.

5.2 Prova do Teorema 12

As funções H , μ e ρ são as mesmas dadas na prova do Teorema 11. Denote $a = (a_1, \dots, a_9)$, $b = (b_1, \dots, b_9)$, $c = (c_1, \dots, c_9)$, $d = (d_1, \dots, d_9)$, $j_1 = (a, b, \alpha, \beta)$ e $j_2 = (c, d, \alpha, \beta)$. Nós transformamos o sistema (5.3) no sistema

$$\frac{dR}{d\varphi} = \begin{cases} \varepsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp_1 - Pq_1)}{2R(Qx - Py)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \text{se } y > 0, \\ \varepsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp_2 - Pq_2)}{2R(Qx - Py)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Como feito na prova do Teorema 11, temos que $R(Qx - Py) \neq 0$. Devemos estudar os zeros da função “averaging” $f : (0, \sqrt{-1/(2\beta)}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(R) = \int_0^\pi \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp_1 - Pq_1)}{2R(Qx - Py)} d\varphi + \int_\pi^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp_2 - Pq_2)}{2R(Qx - Py)} d\varphi.$$

Calculando essas integrais, obtemos

$$f(R) = \sum_{i=0}^{21} f_i B_i,$$

onde

$$f_0 = \frac{1}{R} \left(\sqrt{1 + 2\beta R^2} - 1 \right), \quad f_1 = R\sqrt{1 + 2\beta R^2}, \quad f_2 = R, \quad f_3 = R^3,$$

$$f_i = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}}{1 + 2\beta R^2} R^{2i-8}, & \text{para } i = 4, \dots, 8, \\ \frac{1}{2R} (1 + 2\beta R^2) \log \left(\frac{aR + \sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}}{aR - \sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}} \right)^2, & \text{para } i = 9, \\ \frac{1}{2} R^{2i-19} (1 + 2\beta R^2) \log \left(\frac{aR + \sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}}{aR - \sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}} \right)^2, & \\ \text{para } i = 10, \dots, 13, \\ \frac{1}{R} \sinh^{-1} \left(R\sqrt{\alpha^2 + 2\beta} \right), & \text{para } i = 14, \\ R \sinh^{-1} \left(R\sqrt{\alpha^2 + 2\beta} \right), & \text{para } i = 15, \\ \frac{1}{R} \tanh^{-1} \left(\frac{aR}{\sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}} \right), & \text{para } i = 16, \\ R^{2i-33} \tanh^{-1} \left(\frac{aR}{\sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}} \right), & \text{para } i = 17, \dots, 21 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} B_0 &= C_0(-P_0(j_1) + P_0(j_2)), & B_1 &= C_1(P_1(j_1) - P_1(j_2)), \\ B_2 &= C_2(-P_2(j_1) - P_2(j_2)), & B_3 &= C_3(-P_3(j_1) - P_3(j_2)), \\ B_4 &= C_4(P_4(j_1) - P_4(j_2)), & B_5 &= C_5(-P_5(j_1) + P_5(j_2)), \\ B_6 &= C_6(-P_6(j_1) + P_6(j_2)), & B_7 &= C_7(P_7(j_1) - P_7(j_2)), \\ B_8 &= C_8(-P_8(j_1) + P_8(j_2)), & B_9 &= C_9(P_9(j_1) - P_9(j_2)), \\ B_{10} &= C_{10}(-P_{10}(j_1) + P_{10}(j_2)), & B_{11} &= C_{11}(P_{11}(j_1) - P_{11}(j_2)), \\ B_{12} &= C_{12}(-P_{12}(j_1) + P_{12}(j_2)), & B_{13} &= C_{13}(P_{13}(j_1) - P_{13}(j_2)), \\ B_{14} &= C_{14}(-P_{14}(j_1) + P_{14}(j_2)), & B_{15} &= C_{15}(-P_{15}(j_1) + P_{15}(j_2)), \\ B_{16} &= C_{16}(-P_{16}(j_1) + P_{16}(j_2)), & B_{17} &= C_{17}(P_{17}(j_1) - P_{17}(j_2)), \\ B_{18} &= C_{18}(P_{18}(j_1) - P_{18}(j_2)), & B_{19} &= C_{19}(-P_{19}(j_1) + P_{19}(j_2)), \\ B_{20} &= C_{20}(P_{20}(j_1) - P_{20}(j_2)), & B_{21} &= C_{21}(-P_{21}(j_1) + P_{21}(j_2)), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{\pi}{4\beta^2}, & C_1 &= \frac{\pi}{2\beta}, & C_2 &= \frac{\pi}{4\beta}, \\
C_3 &= \frac{\pi}{2}, & C_4 &= \frac{1}{2\alpha^5\beta(\alpha^2+2\beta)}, & C_5 &= \frac{1}{\alpha^5(\alpha^2+2\beta)}, \\
C_6 &= \frac{2}{\alpha^5}, & C_7 &= \frac{8(\beta-1)\beta}{\alpha^5}, & C_8 &= 2C_7(\alpha^2+2\beta), \\
C_{9,10} &= \frac{1}{4\alpha^8\beta^6}, & C_{11} &= \frac{\alpha^2+2\beta}{2\alpha^8\beta^5}, & C_{12} &= \frac{4(\alpha^2+2\beta)^2}{\alpha^8}, \\
C_{13,21} &= \frac{1}{\alpha^8}, & C_{14} &= \frac{1}{2\beta^2(\alpha^2+2\beta)^{3/2}}, & C_{15} &= \frac{1}{\beta\sqrt{\alpha^2+2\beta}}, \\
C_{16,17} &= \frac{1}{2\alpha^8\beta^6}, & C_{18} &= \frac{1}{\alpha^8\beta^5}, & C_{19} &= \frac{2}{\alpha^8\beta^4}, \\
C_{20} &= \frac{16\beta(\alpha^2+2\beta)}{\alpha^8},
\end{aligned}$$

$$P_0 = c_6 - c_8 - d_7 + d_9,$$

$$P_1 = c_8 - d_9,$$

$$P_2 = 2\beta c_1 + 2\beta d_2 - c_6 + 3c_8 + d_7 - 3d_9,$$

$$P_3 = 2\alpha^2 c_1 + \alpha c_3 + \alpha c_5 + 2\beta c_1 + c_6 + c_8,$$

$$\begin{aligned}
P_4 &= -2\alpha^6\beta c_2 - 2\alpha^6\beta d_1 + \alpha^6 c_7 - \alpha^6 c_9 + \alpha^6 d_6 - \alpha^6 d_8 - 2\alpha^5\beta c_4 \\
&\quad - 2\alpha^5\beta d_3 + 2\alpha^5\beta d_5 - 32\alpha^4\beta^2 c_2 - 32\alpha^4\beta^2 d_1 + 32\alpha^4\beta c_2 + 32\alpha^4\beta d_1 \\
&\quad + 20\alpha^3\beta^2 c_4 + 20\alpha^3\beta^2 d_3 - 20\alpha^3\beta^2 d_5 - 20\alpha^3\beta c_4 - 20\alpha^3\beta d_3 \\
&\quad + 20\alpha^3\beta d_5 - 96\alpha^2\beta^3 c_2 - 96\alpha^2\beta^3 d_1 + 96\alpha^2\beta^2 c_2 - 4\alpha^2\beta^2 c_7 \\
&\quad + 4\alpha^2\beta^2 c_9 + 96\alpha^2\beta^2 d_1 - 4\alpha^2\beta^2 d_6 + 4\alpha^2\beta^2 d_8 + 4\alpha^2\beta c_7 - 4\alpha^2\beta c_9 \\
&\quad + 4\alpha^2\beta d_6 - 4\alpha^2\beta d_8 + 40\alpha\beta^3 c_4 + 40\alpha\beta^3 d_3 - 40\alpha\beta^3 d_5 - 40\alpha\beta^2 c_4 \\
&\quad - 40\alpha\beta^2 d_3 + 40\alpha\beta^2 d_5 - 64\beta^4 c_2 - 64\beta^4 d_1 + 64\beta^3 c_2 - 8\beta^3 c_7 \\
&\quad + 8\beta^3 c_9 + 64\beta^3 d_1 - 8\beta^3 d_6 + 8\beta^3 d_8 + 8\beta^2 c_7 - 8\beta^2 c_9 + 8\beta^2 d_6 \\
&\quad - 8\beta^2 d_8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_5 &= 2\alpha^8 c_2 + \alpha^7 c_4 + 14\alpha^6\beta c_2 + 18\alpha^6\beta d_1 - 8\alpha^6 c_2 - \alpha^6 c_7 + \alpha^6 c_9 \\
&\quad - 16\alpha^6 d_1 - \alpha^6 d_6 + \alpha^6 d_8 - 20\alpha^5\beta c_4 - 38\alpha^5\beta d_3 - 2\alpha^5\beta d_5 + 24\alpha^5 c_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +40\alpha^5 d_3 + 96\alpha^4 \beta^2 c_2 + 128\alpha^4 \beta^2 d_1 - 96\alpha^4 \beta c_2 + 26\alpha^4 \beta c_7 \\
& +10\alpha^4 \beta c_9 - 128\alpha^4 \beta d_1 + 36\alpha^4 \beta d_6 - 26\alpha^4 c_7 - 10\alpha^4 c_9 - 36\alpha^4 d_6 \\
& -112\alpha^3 \beta^2 c_4 - 140\alpha^3 \beta^2 d_3 + 112\alpha^3 \beta c_4 + 140\alpha^3 \beta d_3 + 240\alpha^2 \beta^3 c_2 \\
& +240\alpha^2 \beta^3 d_1 - 240\alpha^2 \beta^2 c_2 + 68\alpha^2 \beta^2 c_7 + 16\alpha^2 \beta^2 c_9 - 240\alpha^2 \beta^2 d_1 \\
& +84\alpha^2 \beta^2 d_6 - 68\alpha^2 \beta c_7 - 16\alpha^2 \beta c_9 - 84\alpha^2 \beta d_6 - 128\alpha \beta^3 c_4 \\
& -120\alpha \beta^3 d_3 + 128\alpha \beta^2 c_4 + 120\alpha \beta^2 d_3 + 160\beta^4 c_2 + 96\beta^4 d_1 \\
& -160\beta^3 c_2 + 32\beta^3 c_7 - 8\beta^3 c_9 - 96\beta^3 d_1 + 24\beta^3 d_6 - 32\beta^2 c_7 + 8\beta^2 c_9 \\
& -24\beta^2 d_6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_6 = & 2\alpha^6 \beta c_2 - 7\alpha^5 \beta c_4 - 16\alpha^5 \beta d_3 + 8\alpha^5 c_4 + 16\alpha^5 d_3 + 24\alpha^4 \beta^2 c_2 \\
& +32\alpha^4 \beta^2 d_1 - 24\alpha^4 \beta c_2 + 28\alpha^4 \beta c_7 - 32\alpha^4 \beta d_1 + 48\alpha^4 \beta d_6 - 28\alpha^4 c_7 \\
& -48\alpha^4 d_6 - 72\alpha^3 \beta^2 c_4 - 80\alpha^3 \beta^2 d_3 + 72\alpha^3 \beta c_4 + 80\alpha^3 \beta d_3 \\
& +120\alpha^2 \beta^3 c_2 + 96\alpha^2 \beta^3 d_1 - 120\alpha^2 \beta^2 c_2 + 78\alpha^2 \beta^2 c_7 - 96\alpha^2 \beta^2 d_1 \\
& +72\alpha^2 \beta^2 d_6 - 78\alpha^2 \beta c_7 - 72\alpha^2 \beta d_6 - 96\alpha \beta^3 c_4 - 60\alpha \beta^3 d_3 \\
& +96\alpha \beta^2 c_4 + 60\alpha \beta^2 d_3 + 80\beta^4 c_2 + 32\beta^4 d_1 - 80\beta^3 c_2 + 24\beta^3 c_7 \\
& -32\beta^3 d_1 + 12\beta^3 d_6 - 24\beta^2 c_7 - 12\beta^2 d_6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_7 = & 4\alpha^6 c_7 - 8\alpha^6 c_9 - 8\alpha^6 d_8 + 8\alpha^5 \beta d_5 - 4\alpha^4 \beta^2 c_2 - 4\alpha^4 \beta c_7 - 24\alpha^4 \beta c_9 \\
& -24\alpha^4 \beta d_8 + 16\alpha^3 \beta^2 c_4 + 20\alpha^3 \beta^2 d_5 - 24\alpha^2 \beta^3 c_2 - 21\alpha^2 \beta^2 c_7 \\
& -18\alpha^2 \beta^2 c_9 - 18\alpha^2 \beta^2 d_8 + 22\alpha \beta^3 c_4 + 10\alpha \beta^3 d_5 - 16\beta^4 c_2 - 6\beta^3 c_7 \\
& -2\beta^3 c_9 - 2\beta^3 d_8,
\end{aligned}$$

$$P_8 = 32(\beta - 1)\beta c_9 (\alpha^2 + 2\beta) (4\alpha^4 + 6\alpha^2 \beta + \beta^2),$$

$$\begin{aligned}
P_9 = & -16\alpha^{17} c_4 - 16\alpha^{17} d_3 + 16\alpha^{17} d_5 + 32\alpha^{16} \beta c_2 + 32\alpha^{16} \beta d_1 + 48\alpha^{16} c_7 \\
& -48\alpha^{16} c_9 + 48\alpha^{16} d_6 - 48\alpha^{16} d_8 - 120\alpha^{15} \beta c_4 - 120\alpha^{15} \beta d_3 \\
& +120\alpha^{15} \beta d_5 + 176\alpha^{14} \beta^2 c_2 + 176\alpha^{14} \beta^2 d_1 + 192\alpha^{14} \beta c_7 - 192\alpha^{14} \beta c_9 \\
& +192\alpha^{14} \beta d_6 - 192\alpha^{14} \beta d_8 - 280\alpha^{13} \beta^2 c_4 - 280\alpha^{13} \beta^2 d_3 \\
& +280\alpha^{13} \beta^2 d_5 + 312\alpha^{12} \beta^3 c_2 + 312\alpha^{12} \beta^3 d_1 + 252\alpha^{12} \beta^2 c_7 \\
& -252\alpha^{12} \beta^2 c_9 + 252\alpha^{12} \beta^2 d_6 - 252\alpha^{12} \beta^2 d_8 - 250\alpha^{11} \beta^3 c_4 \\
& -250\alpha^{11} \beta^3 d_3 + 250\alpha^{11} \beta^3 d_5 + 200\alpha^{10} \beta^4 c_2 + 200\alpha^{10} \beta^4 d_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +120\alpha^{10}\beta^3c_7 - 120\alpha^{10}\beta^3c_9 + 120\alpha^{10}\beta^3d_6 - 120\alpha^{10}\beta^3d_8 \\
& -75\alpha^9\beta^4c_4 - 75\alpha^9\beta^4d_3 + 75\alpha^9\beta^4d_5 + 40\alpha^8\beta^5c_2 + 40\alpha^8\beta^5d_1 \\
& +15\alpha^8\beta^4c_7 - 15\alpha^8\beta^4c_9 + 15\alpha^8\beta^4d_6 - 15\alpha^8\beta^4d_8 + 16\alpha^6\beta^6c_2 \\
& +16\alpha^6\beta^6d_1 - 8\alpha^5\beta^6c_4 - 8\alpha^5\beta^6d_3 + 8\alpha^5\beta^6d_5 + 64\alpha^4\beta^7c_2 \\
& +64\alpha^4\beta^7d_1 - 60\alpha^4\beta^6c_7 + 60\alpha^4\beta^6c_9 - 60\alpha^4\beta^6d_6 + 60\alpha^4\beta^6d_8 \\
& +20\alpha^3\beta^7c_4 + 20\alpha^3\beta^7d_3 - 20\alpha^3\beta^7d_5 + 48\alpha^2\beta^8c_2 + 48\alpha^2\beta^8d_1 \\
& -60\alpha^2\beta^7c_7 + 60\alpha^2\beta^7c_9 - 60\alpha^2\beta^7d_6 + 60\alpha^2\beta^7d_8 + 32\beta^9c_2 + 32\beta^9d_1, \\
P_{10} = & 16\alpha^{18}c_7 - 48\alpha^{18}c_9 - 32\alpha^{18}d_8 + 32\alpha^{17}\beta d_5 - 16\alpha^{16}\beta^2c_2 + 24\alpha^{16}\beta c_7 \\
& -200\alpha^{16}\beta c_9 - 176\alpha^{16}\beta d_8 + 64\alpha^{15}\beta^2c_4 + 160\alpha^{15}\beta^2d_5 - 136\alpha^{14}\beta^3c_2 \\
& -104\alpha^{14}\beta^2c_7 - 248\alpha^{14}\beta^2c_9 - 352\alpha^{14}\beta^2d_8 + 248\alpha^{13}\beta^3c_4 \\
& +280\alpha^{13}\beta^3d_5 - 324\alpha^{12}\beta^4c_2 - 254\alpha^{12}\beta^3c_7 - 54\alpha^{12}\beta^3c_9 \\
& -308\alpha^{12}\beta^3d_8 + 300\alpha^{11}\beta^4c_4 + 200\alpha^{11}\beta^4d_5 - 280\alpha^{10}\beta^5c_2 \\
& -165\alpha^{10}\beta^4c_7 + 55\alpha^{10}\beta^4c_9 - 110\alpha^{10}\beta^4d_8 + 110\alpha^9\beta^5c_4 + 50\alpha^9\beta^5d_5 \\
& -112\alpha^8\beta^6c_2 - 32\alpha^8\beta^6d_1 - 30\alpha^8\beta^5c_7 + 20\alpha^8\beta^5c_9 - 10\alpha^8\beta^5d_8 \\
& +32\alpha^7\beta^6c_4 + 48\alpha^7\beta^6d_3 - 16\alpha^7\beta^6d_5 - 240\alpha^6\beta^7c_2 - 256\alpha^6\beta^7d_1 \\
& +32\alpha^6\beta^6c_7 - 64\alpha^6\beta^6c_9 + 24\alpha^6\beta^6d_6 - 56\alpha^6\beta^6d_8 + 168\alpha^5\beta^7c_4 \\
& +216\alpha^5\beta^7d_3 - 56\alpha^5\beta^7d_5 - 656\alpha^4\beta^8c_2 - 672\alpha^4\beta^8d_1 + 124\alpha^4\beta^7c_7 \\
& -268\alpha^4\beta^7c_9 + 24\alpha^4\beta^7d_6 - 168\alpha^4\beta^7d_8 + 272\alpha^3\beta^8c_4 + 360\alpha^3\beta^8d_3 \\
& -80\alpha^3\beta^8d_5 - 704\alpha^2\beta^9c_2 - 704\alpha^2\beta^9d_1 + 48\alpha^2\beta^8c_7 - 216\alpha^2\beta^8c_9 \\
& -72\alpha^2\beta^8d_6 - 96\alpha^2\beta^8d_8 + 208\alpha\beta^9c_4 + 240\alpha\beta^9d_3 - 80\alpha\beta^9d_5 \\
& -320\beta^{10}c_2 - 256\beta^{10}d_1 - 48\beta^9c_7 + 16\beta^9c_9 - 48\beta^9d_6 + 16\beta^9d_8, \\
P_{11} = & 16\alpha^{16}c_9 + 64\alpha^{14}\beta c_9 + 84\alpha^{12}\beta^2c_9 + 40\alpha^{10}\beta^3c_9 + 5\alpha^8\beta^4c_9 \\
& -16\alpha^7\beta^5c_4 - 32\alpha^7\beta^5d_3 + 48\alpha^6\beta^6c_2 + 64\alpha^6\beta^6d_1 + 72\alpha^6\beta^5c_7 \\
& -24\alpha^6\beta^5c_9 + 96\alpha^6\beta^5d_6 - 32\alpha^6\beta^5d_8 - 176\alpha^5\beta^6c_4 - 224\alpha^5\beta^6d_3 \\
& +32\alpha^5\beta^6d_5 + 320\alpha^4\beta^7c_2 + 320\alpha^4\beta^7d_1 + 252\alpha^4\beta^6c_7 - 28\alpha^4\beta^6c_9 \\
& +336\alpha^4\beta^6d_6 - 96\alpha^4\beta^6d_8 - 416\alpha^3\beta^7c_4 - 440\alpha^3\beta^7d_3 + 80\alpha^3\beta^7d_5 \\
& +544\alpha^2\beta^8c_2 + 448\alpha^2\beta^8d_1 + 276\alpha^2\beta^7c_7 + 312\alpha^2\beta^7d_6 - 72\alpha^2\beta^7d_8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -296\alpha\beta^8c_4 - 240\alpha\beta^8d_3 + 40\alpha\beta^8d_5 + 256\beta^9c_2 + 128\beta^9d_1 \\
& + 72\beta^8c_7 - 16\beta^8c_9 + 48\beta^8d_6 - 8\beta^8d_8, \\
P_{12} = & 4\alpha^6c_7 - 8\alpha^6c_9 - 8\alpha^6d_8 + 8\alpha^5\beta d_5 - 4\alpha^4\beta^2c_2 - 4\alpha^4\beta c_7 - 20\alpha^4\beta c_9 \\
& - 24\alpha^4\beta d_8 + 16\alpha^3\beta^2c_4 + 20\alpha^3\beta^2d_5 - 24\alpha^2\beta^3c_2 - 21\alpha^2\beta^2c_7 \\
& - 12\alpha^2\beta^2c_9 - 18\alpha^2\beta^2d_8 + 22\alpha\beta^3c_4 + 10\alpha\beta^3d_5 - 16\beta^4c_2 - 6\beta^3c_7 \\
& - \beta^3c_9 - 2\beta^3d_8, \\
P_{13} = & 8\beta c_9 (\alpha^2 + 2\beta)^3 (4\alpha^4 + 6\alpha^2\beta + \beta^2), \\
P_{14} = & \alpha^3c_7 - \alpha^3c_9 + \alpha^3d_6 - \alpha^3d_8 - 2\alpha\beta^2c_2 - 2\alpha\beta^2d_1 + 3\alpha\beta c_7 - 3\alpha\beta c_9 \\
& + 3\alpha\beta d_6 - 3\alpha\beta d_8 - 2\beta^2c_4 - 2\beta^2d_3 + 2\beta^2d_5, \\
P_{15} = & \alpha c_7 - 2\alpha c_9 - \alpha d_8 - \beta c_4 + 2\beta d_5, \\
P_{16} = & -16\alpha^{17}c_4 - 16\alpha^{17}d_3 + 16\alpha^{17}d_5 + 32\alpha^{16}\beta c_2 + 32\alpha^{16}\beta d_1 + 48\alpha^{16}c_7 \\
& - 48\alpha^{16}c_9 + 48\alpha^{16}d_6 - 48\alpha^{16}d_8 - 120\alpha^{15}\beta c_4 - 120\alpha^{15}\beta d_3 \\
& + 120\alpha^{15}\beta d_5 + 176\alpha^{14}\beta^2c_2 + 176\alpha^{14}\beta^2d_1 + 192\alpha^{14}\beta c_7 - 192\alpha^{14}\beta c_9 \\
& + 192\alpha^{14}\beta d_6 - 192\alpha^{14}\beta d_8 - 280\alpha^{13}\beta^2c_4 - 280\alpha^{13}\beta^2d_3 + 280\alpha^{13}\beta^2d_5 \\
& + 312\alpha^{12}\beta^3c_2 + 312\alpha^{12}\beta^3d_1 + 252\alpha^{12}\beta^2c_7 - 252\alpha^{12}\beta^2c_9 \\
& + 252\alpha^{12}\beta^2d_6 - 252\alpha^{12}\beta^2d_8 - 250\alpha^{11}\beta^3c_4 - 250\alpha^{11}\beta^3d_3 \\
& + 250\alpha^{11}\beta^3d_5 + 200\alpha^{10}\beta^4c_2 + 200\alpha^{10}\beta^4d_1 + 120\alpha^{10}\beta^3c_7 \\
& - 120\alpha^{10}\beta^3c_9 + 120\alpha^{10}\beta^3d_6 - 120\alpha^{10}\beta^3d_8 - 75\alpha^9\beta^4c_4 - 75\alpha^9\beta^4d_3 \\
& + 75\alpha^9\beta^4d_5 + 40\alpha^8\beta^5c_2 + 40\alpha^8\beta^5d_1 + 14\alpha^8\beta^4c_7 - 14\alpha^8\beta^4c_9 \\
& + 14\alpha^8\beta^4d_6 - 14\alpha^8\beta^4d_8 + 16\alpha^6\beta^6c_2 + 16\alpha^6\beta^6d_1 - 8\alpha^5\beta^6c_4 \\
& - 8\alpha^5\beta^6d_3 + 8\alpha^5\beta^6d_5 + 96\alpha^4\beta^7c_2 + 96\alpha^4\beta^7d_1 - 32\alpha^4\beta^6c_2 \\
& - 60\alpha^4\beta^6c_7 + 60\alpha^4\beta^6c_9 - 32\alpha^4\beta^6d_1 - 60\alpha^4\beta^6d_6 + 60\alpha^4\beta^6d_8 \\
& + 20\alpha^3\beta^6c_4 + 20\alpha^3\beta^6d_3 - 20\alpha^3\beta^6d_5 + 80\alpha^2\beta^8c_2 + 80\alpha^2\beta^8d_1 \\
& - 32\alpha^2\beta^7c_2 - 56\alpha^2\beta^7c_7 + 56\alpha^2\beta^7c_9 - 32\alpha^2\beta^7d_1 - 56\alpha^2\beta^7d_6 \\
& + 56\alpha^2\beta^7d_8 - 4\alpha^2\beta^6c_7 + 4\alpha^2\beta^6c_9 - 4\alpha^2\beta^6d_6 + 4\alpha^2\beta^6d_8 + 32\beta^9c_2 \\
& + 32\beta^9d_1, \\
P_{17} = & 16c_7\alpha^{18} - 48c_9\alpha^{18} - 32d_8\alpha^{18} + 32\beta c_4\alpha^{17} + 32\beta d_3\alpha^{17} - 80\beta^2c_2\alpha^{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -72\beta c_7\alpha^{16} - 104\beta c_9\alpha^{16} - 64\beta^2 d_1\alpha^{16} - 96\beta d_6\alpha^{16} - 80\beta d_8\alpha^{16} \\
& + 304\beta^2 c_4\alpha^{15} + 240\beta^2 d_3\alpha^{15} - 80\beta^2 d_5\alpha^{15} - 488\beta^3 c_2\alpha^{14} \\
& - 488\beta^2 c_7\alpha^{14} + 136\beta^2 c_9\alpha^{14} - 352\beta^3 d_1\alpha^{14} - 384\beta^2 d_6\alpha^{14} \\
& + 32\beta^2 d_8\alpha^{14} + 808\beta^3 c_4\alpha^{13} + 560\beta^3 d_3\alpha^{13} - 280\beta^3 d_5\alpha^{13} \\
& - 948\beta^4 c_2\alpha^{12} - 758\beta^3 c_7\alpha^{12} + 450\beta^3 c_9\alpha^{12} - 624\beta^4 d_1\alpha^{12} \\
& - 504\beta^3 d_6\alpha^{12} + 196\beta^3 d_8\alpha^{12} + 800\beta^4 c_4\alpha^{11} + 500\beta^4 d_3\alpha^{11} \\
& - 300\beta^4 d_5\alpha^{11} - 680\beta^5 c_2\alpha^{10} - 405\beta^4 c_7\alpha^{10} + 295\beta^4 c_9\alpha^{10} \\
& - 400\beta^5 d_1\alpha^{10} - 240\beta^4 d_6\alpha^{10} + 130\beta^4 d_8\alpha^{10} + 260\beta^5 c_4\alpha^9 \\
& + 150\beta^5 d_3\alpha^9 - 100\beta^5 d_5\alpha^9 - 192\beta^6 c_2\alpha^8 - 58\beta^5 c_7\alpha^8 + 46\beta^5 c_9\alpha^8 \\
& - 112\beta^6 d_1\alpha^8 - 30\beta^5 d_6\alpha^8 + 18\beta^5 d_8\alpha^8 + 32\beta^6 c_4\alpha^7 + 48\beta^6 d_3\alpha^7 \\
& - 16\beta^6 d_5\alpha^7 - 288\beta^7 c_2\alpha^6 + 16\beta^6 c_2\alpha^6 + 32\beta^6 c_7\alpha^6 - 64\beta^6 c_9\alpha^6 \\
& - 320\beta^7 d_1\alpha^6 + 32\beta^6 d_1\alpha^6 + 24\beta^6 d_6\alpha^6 - 56\beta^6 d_8\alpha^6 + 232\beta^7 c_4\alpha^5 \\
& - 48\beta^6 c_4\alpha^5 + 312\beta^7 d_3\alpha^5 - 80\beta^6 d_3\alpha^5 - 72\beta^7 d_5\alpha^5 - 944\beta^8 c_2\alpha^4 \\
& + 160\beta^7 c_2\alpha^4 + 192\beta^7 c_7\alpha^4 + 52\beta^6 c_7\alpha^4 - 408\beta^7 c_9\alpha^4 + 20\beta^6 c_9\alpha^4 \\
& - 992\beta^8 d_1\alpha^4 + 192\beta^7 d_1\alpha^4 + 72\beta^7 d_6\alpha^4 + 72\beta^6 d_6\alpha^4 - 288\beta^7 d_8\alpha^4 \\
& + 360\beta^8 c_4\alpha^3 - 128\beta^7 c_4\alpha^3 + 440\beta^8 d_3\alpha^3 - 120\beta^7 d_3\alpha^3 - 40\beta^8 d_5\alpha^3 \\
& - 960\beta^9 c_2\alpha^2 + 160\beta^8 c_2\alpha^2 + 136\beta^8 c_7\alpha^2 + 32\beta^7 c_7\alpha^2 - 328\beta^8 c_9\alpha^2 \\
& - 8\beta^7 c_9\alpha^2 - 896\beta^9 d_1\alpha^2 + 96\beta^8 d_1\alpha^2 + 24\beta^8 d_6\alpha^2 + 24\beta^7 d_6\alpha^2 \\
& - 216\beta^8 d_8\alpha^2 + 208\beta^9 c_4\alpha + 240\beta^9 d_3\alpha - 80\beta^9 d_5\alpha - 384\beta^{10} c_2 \\
& - 48\beta^9 c_7 + 16\beta^9 c_9 - 320\beta^{10} d_1 - 48\beta^9 d_6 + 16\beta^9 d_8, \\
P_{18} = & 16\alpha^{18} c_7 - 64\alpha^{18} c_9 - 32\alpha^{18} d_8 + 32\alpha^{17} \beta d_5 - 16\alpha^{16} \beta^2 c_2 + 24\alpha^{16} \beta c_7 \\
& - 296\alpha^{16} \beta c_9 - 176\alpha^{16} \beta d_8 + 64\alpha^{15} \beta^2 c_4 + 160\alpha^{15} \beta^2 d_5 - 136\alpha^{14} \beta^3 c_2 \\
& - 104\alpha^{14} \beta^2 c_7 - 460\alpha^{14} \beta^2 c_9 - 352\alpha^{14} \beta^2 d_8 + 248\alpha^{13} \beta^3 c_4 \\
& + 280\alpha^{13} \beta^3 d_5 - 324\alpha^{12} \beta^4 c_2 - 254\alpha^{12} \beta^3 c_7 - 262\alpha^{12} \beta^3 c_9 \\
& - 308\alpha^{12} \beta^3 d_8 + 300\alpha^{11} \beta^4 c_4 + 200\alpha^{11} \beta^4 d_5 - 280\alpha^{10} \beta^5 c_2 \\
& - 165\alpha^{10} \beta^4 c_7 - 30\alpha^{10} \beta^4 c_9 - 110\alpha^{10} \beta^4 d_8 + 126\alpha^9 \beta^5 c_4 + 32\alpha^9 \beta^5 d_3 \\
& + 50\alpha^9 \beta^5 d_5 - 160\alpha^8 \beta^6 c_2 - 96\alpha^8 \beta^6 d_1 - 102\alpha^8 \beta^5 c_7 + 32\alpha^8 \beta^5 c_9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -96\alpha^8\beta^5d_6 + 22\alpha^8\beta^5d_8 + 256\alpha^7\beta^6c_4 + 368\alpha^7\beta^6d_3 - 48\alpha^7\beta^6d_5 \\
& -16\alpha^7\beta^5c_4 - 32\alpha^7\beta^5d_3 - 704\alpha^6\beta^7c_2 - 768\alpha^6\beta^7d_1 + 48\alpha^6\beta^6c_2 \\
& -420\alpha^6\beta^6c_7 + 12\alpha^6\beta^6c_9 + 64\alpha^6\beta^6d_1 - 600\alpha^6\beta^6d_6 + 104\alpha^6\beta^6d_8 \\
& +56\alpha^6\beta^5c_7 + 96\alpha^6\beta^5d_6 + 1080\alpha^5\beta^7c_4 + 1264\alpha^5\beta^7d_3 - 200\alpha^5\beta^7d_5 \\
& -144\alpha^5\beta^6c_4 - 160\alpha^5\beta^6d_3 - 2080\alpha^4\beta^8c_2 - 1952\alpha^4\beta^8d_1 \\
& +240\alpha^4\beta^7c_2 - 812\alpha^4\beta^7c_7 - 212\alpha^4\beta^7c_9 + 192\alpha^4\beta^7d_1 - 1104\alpha^4\beta^7d_6 \\
& +96\alpha^4\beta^7d_8 + 156\alpha^4\beta^6c_7 + 144\alpha^4\beta^6d_6 + 1592\alpha^3\beta^8c_4 + 1600\alpha^3\beta^8d_3 \\
& -280\alpha^3\beta^8d_5 - 192\alpha^3\beta^7c_4 - 120\alpha^3\beta^7d_3 - 2208\alpha^2\beta^9c_2 \\
& -1792\alpha^2\beta^9d_1 + 160\alpha^2\beta^8c_2 - 624\alpha^2\beta^8c_7 - 200\alpha^2\beta^8c_9 + 64\alpha^2\beta^8d_1 \\
& -768\alpha^2\beta^8d_6 + 56\alpha^2\beta^8d_8 + 48\alpha^2\beta^7c_7 + 24\alpha^2\beta^7d_6 + 800\alpha\beta^9c_4 \\
& +720\alpha\beta^9d_3 - 160\alpha\beta^9d_5 - 832\beta^{10}c_2 - 512\beta^{10}d_1 - 192\beta^9c_7 + 48\beta^9c_9 \\
& -144\beta^9d_6 + 32\beta^9d_8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{19} = & 16\alpha^{18}c_9 + 96\alpha^{16}\beta c_9 + 212\alpha^{14}\beta^2c_9 + 208\alpha^{12}\beta^3c_9 - 16\alpha^{10}\beta^4c_7 \\
& +117\alpha^{10}\beta^4c_9 + 32\alpha^{10}\beta^4d_8 - 16\alpha^9\beta^5c_4 - 32\alpha^9\beta^5d_3 - 32\alpha^9\beta^5d_5 \\
& +64\alpha^8\beta^6c_2 + 64\alpha^8\beta^6d_1 + 8\alpha^8\beta^5c_7 + 226\alpha^8\beta^5c_9 + 96\alpha^8\beta^5d_6 \\
& +224\alpha^8\beta^5d_8 + 16\alpha^8\beta^4c_7 - 32\alpha^8\beta^4c_9 - 32\alpha^8\beta^4d_8 - 272\alpha^7\beta^6c_4 \\
& -288\alpha^7\beta^6d_3 - 208\alpha^7\beta^6d_5 + 32\alpha^7\beta^5d_5 + 592\alpha^6\beta^7c_2 + 448\alpha^6\beta^7d_1 \\
& -16\alpha^6\beta^6c_2 + 496\alpha^6\beta^6c_7 + 516\alpha^6\beta^6c_9 + 528\alpha^6\beta^6d_6 + 520\alpha^6\beta^6d_8 \\
& -16\alpha^6\beta^5c_7 - 96\alpha^6\beta^5c_9 - 96\alpha^6\beta^5d_8 - 1176\alpha^5\beta^7c_4 - 888\alpha^5\beta^7d_3 \\
& -424\alpha^5\beta^7d_5 + 64\alpha^5\beta^6c_4 + 80\alpha^5\beta^6d_5 + 1792\alpha^4\beta^8c_2 + 1088\alpha^4\beta^8d_1 \\
& -96\alpha^4\beta^7c_2 + 1288\alpha^4\beta^7c_7 + 532\alpha^4\beta^7c_9 + 984\alpha^4\beta^7d_6 + 488\alpha^4\beta^7d_8 \\
& -84\alpha^4\beta^6c_7 - 72\alpha^4\beta^6c_9 - 72\alpha^4\beta^6d_8 - 1824\alpha^3\beta^8c_4 - 1120\alpha^3\beta^8d_3 \\
& -320\alpha^3\beta^8d_5 + 88\alpha^3\beta^7c_4 + 40\alpha^3\beta^7d_5 + 2048\alpha^2\beta^9c_2 + 1024\alpha^2\beta^9d_1 \\
& -64\alpha^2\beta^8c_2 + 1080\alpha^2\beta^8c_7 + 200\alpha^2\beta^8c_9 + 672\alpha^2\beta^8d_6 + 176\alpha^2\beta^8d_8 \\
& -24\alpha^2\beta^7c_7 - 8\alpha^2\beta^7c_9 - 8\alpha^2\beta^7d_8 - 944\alpha\beta^9c_4 - 480\alpha\beta^9d_3 \\
& -80\alpha\beta^9d_5 + 768\beta^{10}c_2 + 256\beta^{10}d_1 + 240\beta^9c_7 - 16\beta^9c_9 + 96\beta^9d_6 \\
& +16\beta^9d_8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{20} &= 4\alpha^8 c_7 - 12\alpha^8 c_9 - 8\alpha^8 d_8 + 8\alpha^7 \beta d_5 - 4\alpha^6 \beta^2 c_2 + 4\alpha^6 \beta c_7 - 62\alpha^6 \beta c_9 \\
&\quad - 40\alpha^6 \beta d_8 + 4\alpha^6 c_9 + 16\alpha^5 \beta^2 c_4 + 36\alpha^5 \beta^2 d_5 - 32\alpha^4 \beta^3 c_2 - 29\alpha^4 \beta^2 c_7 \\
&\quad - 99\alpha^4 \beta^2 c_9 - 66\alpha^4 \beta^2 d_8 + 6\alpha^4 \beta c_9 + 54\alpha^3 \beta^3 c_4 + 50\alpha^3 \beta^3 d_5 \\
&\quad - 64\alpha^2 \beta^4 c_2 - 48\alpha^2 \beta^3 c_7 - 54\alpha^2 \beta^3 c_9 - 38\alpha^2 \beta^3 d_8 + \alpha^2 \beta^2 c_9 \\
&\quad + 44\alpha \beta^4 c_4 + 20\alpha \beta^4 d_5 - 32\beta^5 c_2 - 12\beta^4 c_7 - 6\beta^4 c_9 - 4\beta^4 d_8, \\
P_{21} &= 32\beta^2 c_9 (\alpha^2 + 2\beta)^3 (4\alpha^4 + 6\alpha^2 \beta + \beta^2).
\end{aligned}$$

Afirmamos que pelo menos 15 das funções f_0, \dots, f_{21} são linearmente independentes. Na verdade, expandimos essas funções até a ordem 21, na variável R , em torno de $R = 0$, e obtemos que o posto da matriz dos coeficientes de $1, R, \dots, R^{21}$ das funções f_0, \dots, f_{21} é 15. Assim, a afirmação está provada.

Os coeficientes

$$\begin{aligned}
B_0 &= \frac{\pi}{4\beta^2} ((a_6 - a_8 - b_7 + b_9) + (c_6 - c_8 - d_7 + d_9)), \\
B_1 &= \frac{\pi}{2\beta} ((a_8 - b_9) - (c_8 - d_9)), \\
B_2 &= -\frac{\pi}{4\beta} ((2\beta a_1 + 2\beta b_2 - a_6 + 3a_8 + b_7 - 3b_9) + (2\beta c_1 + 2\beta d_2 - c_6 \\
&\quad + 3c_8 + d_7 - 3d_9)), \\
B_3 &= -\frac{\pi}{2} ((2\alpha^2 a_1 + \alpha a_3 + \alpha a_5 + 2\beta a_1 + a_6 + a_8) + (2\alpha^2 c_1 + \alpha c_3 + \alpha c_5 \\
&\quad + 2\beta c_1 + c_6 + c_8)),
\end{aligned}$$

são mutuamente linearmente independentes e são linearmente independentes com os demais coeficientes, porque em B_0 aparece o parâmetro b_7 que não aparece nos coeficientes B_j para $j = 4, \dots, 21$, em B_1 aparece o parâmetro a_8 que não aparece nos coeficientes B_j para $j = 4, \dots, 21$, em B_2 aparece o parâmetro a_1 que não aparece nos coeficientes B_j para $j = 4, \dots, 21$, e em B_3 aparece o parâmetro a_5 que não aparece nos coeficientes B_j para $j = 4, \dots, 21$. Reescrevemos os coeficientes B_4, \dots, B_{21} na seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} B_4 \\ \vdots \\ B_{21} \end{pmatrix} = Mv,$$

onde $v = (a_2, a_4, a_7, a_9, b_1, b_3, b_5, b_6, b_9, c_2, c_4, c_7, c_9, d_1, d_3, d_5, d_6, d_9)$ e M é uma matriz 18×18 . Devido ao tamanho da matriz M , não explicitaremos ela aqui. Os cálculos foram feitos com o manipulador algébrico *Mathematica*. O posto de M é 9. Assim, existem $4 + 9 = 13$ coeficientes independentes. Portanto, podemos escrever

$$f(R) = \sum_{i=0}^{21} f_i B_i = \sum_{j=0}^{12} \tilde{f}_j \tilde{B}_j. \quad (5.6)$$

Agora vamos checar as hipóteses do Teorema 3. Note que $h(x, y) = y$, $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, e o sistema (5.5) pode ser escrito da seguinte maneira

$$\frac{dR}{d\varphi} = Z(\varphi, R) = \varepsilon F(\varphi, R) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

onde

$$\begin{aligned} F(\varphi, R) &= F_1(\varphi, R) + \text{sign}(h(\varphi, R))F_2(\varphi, R), \\ F_1(\varphi, R) &= \frac{\mu(x^2 + y^2)((Qp_1 - Pq_1) + (Qp_2 - Pq_2))}{4R(Qx - Py)}, \\ F_2(\varphi, R) &= \frac{\mu(x^2 + y^2)((Qp_1 - Pq_1) - (Qp_2 - Pq_2))}{4R(Qx - Py)}, \end{aligned}$$

com $x = \rho(\varphi, R) \cos \varphi$ e $y = \rho(\varphi, R) \sin \varphi$. As hipóteses (i), (ii) e (iii) do Teorema 3 são satisfeitas. De fato, a hipótese (i) é satisfeita porque f é analítica em $R \in (0, \sqrt{-1/(2\beta)})$.

Observamos que um zero simples de uma função de uma variável sempre tem o grau de Brouwer diferente de zero, para mais detalhes, veja [45]. Assim, por (ii) somente precisamos olhar para os zeros simples da função f dada em (5.6).

A função $h(\varphi, R) = \rho(\varphi, R) \sin \varphi$ é igual a zero se, e somente se, $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$. Além disso, podemos checar que $(dh/d\varphi)(0, R) = 0$ se, e somente se,

$$\frac{(2\beta R^2 + 1)(a^2 R^2 + 2bR^2 + 1)}{\sqrt{R^2(\alpha^2 + 2\beta) + 1}} + \alpha R(-2\beta R^2 - 1) = 0.$$

Novamente, elevando ao quadrado ambos os lados da equação obtida passando o segundo membro da igualdade anterior para o lado direito, obtemos após algumas simplificações que $(2\beta R^2 + 1)^3 = 0$, e como antes isso não é possível. De um modo similar pode ser provado que $(dh/d\varphi)(\pi, R) \neq 0$. Assim, a hipótese (iii) é satisfeita.

Desde que as hipóteses do Teorema 3 são satisfeitas, os zeros simples da função (5.6) fornecem soluções 2π -periódicas do sistema (5.5). Finalmente, pela Proposição 25 segue

que a função f dada por (5.6) pode ter pelo menos 12 zeros simples. Assim, o Teorema 12 está provado.

Capítulo 6

Ciclos limite de Sistemas Polinomiais Diferenciais Cúbicos com Integrais Primeiras Racionais de Grau 2

Nesse capítulo, estudamos algumas famílias de sistemas polinomiais de grau 3, com integrais primeiras racionais e de grau 2. A classificação de todos os sistemas diferenciais polinomiais cúbicos tendo um centro na origem e uma integral primeira racional de grau 2 pode ser encontrada em [40]. Agora, resumimos essa classificação em seis famílias de sistemas diferenciais polinomiais cúbicos que denotamos por P_k , para $k = 1, 2, \dots, 6$.

A classe P_1 é representada pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y(\alpha^2 + \beta + 2\alpha x + x^2), \\ \dot{y} &= -2((\alpha^2 + \beta)x + \alpha x^2 - \alpha y^2 - xy^2),\end{aligned}$$

com $\beta < 0$ e $\alpha^2 + \beta \neq 0$.

A classe P_2 é obtida transladando o outro centro de P_1 para a origem. Ela é descrita pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\alpha^{-2}y(\beta^2 - 2\alpha\beta x + \alpha^2(\beta + x^2)), \\ \dot{y} &= -2(\alpha^2 x - \alpha x^2 - \alpha^{-2}\beta y^2 + x(\beta + y^2)).\end{aligned}$$

A classe P_3 é dada pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 + \alpha^2 + 2x + x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= y(-1 - \alpha^2 - 2y + x^2 - y^2),\end{aligned}$$

com $\alpha \neq 0$.

A classe P_4 é representada pelo sistema

$$\dot{x} = y(x^2 + \alpha), \quad \dot{y} = x(y^2 + \beta),$$

com $\alpha\beta < 0$.

A classe P_5 é fornecida pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\beta^2 + \alpha^2 + 2(\beta + \gamma\alpha)x + (\gamma^2 + 1)x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= y(-\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha y + (\gamma^2 + 1)x^2 - y^2),\end{aligned}$$

com $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Se $\alpha = 0$, então $\beta\gamma \neq 0$ e se $\alpha = 1$, então $\beta(\beta\gamma - 1) \neq 0$.

Finalmente, a classe P_6 é obtida tomando $\beta = 0$ em P_1 . Assim, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y(x + \alpha)^2, \\ \dot{y} &= -2(x + \alpha)(\alpha x - y^2),\end{aligned}$$

com $\alpha \neq 0$.

Em [34] os autores estudaram os sistemas diferenciais polinomiais cúbicos tendo uma integral primeira racional de grau 2, cujos retratos de fase correspondem aos retratos de fase P_1 , P_3 e P_4 da Figura 6.1. Esses sistemas foram denotados em [34] por (B), (A) e (C), respectivamente. Eles também provaram que todos os centros desses sistemas são reversíveis e isócronos, veja [34, p. 314]. Seu principal resultado fornece cotas superiores \mathcal{M} para o número máximo de ciclos limite dos sistemas P_1 , P_3 e P_4 quando eles são perturbados dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais de grau 3, usando integrais Abelianas, veja a coluna “cota superior” na Tabela 6.1. Aqui, estudamos o número máximo de ciclos limite \mathcal{N} que bifurcam das órbitas periódicas dos centros P_1 ,

P_2 , P_4 e P_6 , quando eles são perturbados dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais de grau 3, usando a teoria do “averaging” de primeira ordem.

Uma questão natural é: *Quantas soluções periódicas persistem como ciclos limite, quando perturbamos os sistemas P_1 – P_6 dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais cúbicos?*

Mais especificamente, considere os seguintes sistemas

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y(a^2 + b + 2ax + x^2) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= -2((a^2 + b)x + ax^2 - ay^2 - xy^2) + \varepsilon q(x, y),\end{aligned}\tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2a^{-2}y(b^2 - 2abx + a^2(b + x^2)) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= -2(a^2x - ax^2 - a^{-2}by^2 + x(b + y^2)) + \varepsilon q(x, y),\end{aligned}\tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x((1 + s^2) + 2x + x^2 - y^2) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= y(-(1 + s^2) - 2y + x^2 - y^2) + \varepsilon q(x, y),\end{aligned}\tag{6.3}$$

$$\dot{x} = y(x^2 + a) + \varepsilon p(x, y), \quad \dot{y} = x(y^2 + b) + \varepsilon q(x, y),\tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(b^2 + d^2 + 2(b + cd)x + (c^2 + 1)x^2 - y^2) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= y(-b^2 - d^2 - 2dy + (c^2 + 1)x^2 - y^2) + \varepsilon q(x, y),\end{aligned}\tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y(x + a)^2 + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= -2(x + a)(ax - y^2) + \varepsilon q(x, y),\end{aligned}\tag{6.6}$$

onde

$$\begin{aligned}p(x, y) &= a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3, \\ q(x, y) &= b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^3 + b_7x^2y + b_8xy^2 + b_9y^3.\end{aligned}$$

Obviamente, os parâmetros dos sistemas não perturbados (6.1)-(6.6) devem satisfazer as condições dos sistemas P_1 – P_6 .

Calculamos o número \mathcal{N} para as classes P_1 , P_2 , P_4 e P_6 . Na Seção 6.3, explicamos porque não podemos calcular o número \mathcal{N} para as classes P_3 e P_5 .

No que se segue apresentamos nossos principais resultados desse capítulo.

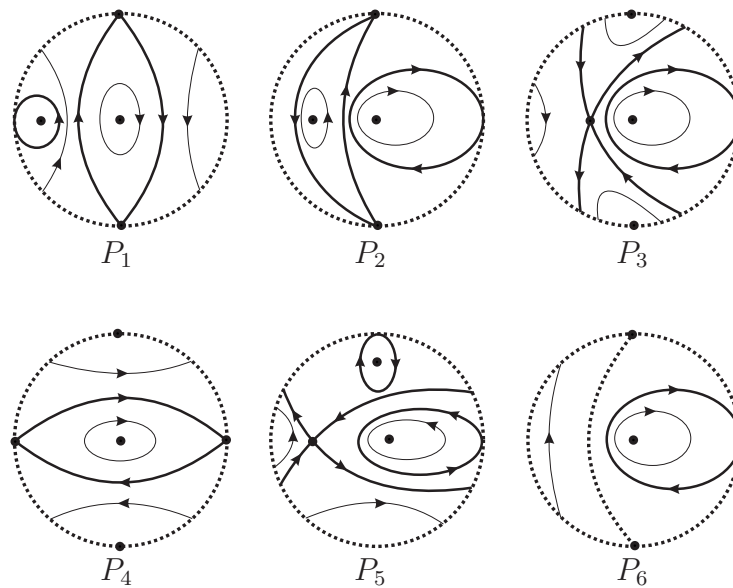


Figura 6.1: Retratos de fase no disco de Poincaré dos sistemas diferenciais polinomiais cúbicos com um centro na origem e integral primeira racional de grau 2.

Teorema 13. *Quando perturbamos os sistemas P_1 , P_4 e P_6 dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais de grau três, o número máximo de ciclos limite que bifurcam, usando a teoria do “averaging” de primeira ordem, é $\mathcal{N} = 3$ e esse número é alcançado.*

O Teorema 13 está provado na Seção 6.1.

Teorema 14. *Quando perturbamos o sistema P_2 dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais de grau três, o número máximo de ciclos limite que bifurcam, usando a teoria do “averaging” de primeira ordem, é $\mathcal{N} = 3$, quando $\alpha^2 + \beta \notin (-1, 0) \cup (0, 1)$, e esse número é alcançado.*

O Teorema 14 está provado na Seção 6.2.

As provas dos Teoremas 13 e 14 foram obtidas com a ajuda dos manipuladores algébricos Mathematica e Maple. Na sequência provamos o Teorema 13. Por comodidade, nas provas dos Teoremas 13 e 14 denotamos $\dot{x} = P(x, y)$ e $\dot{y} = Q(x, y)$ nos sistemas que representam as classes P_k , para $k = 1, \dots, 6$.

Retratos de fase	\mathcal{M}	\mathcal{N}
P_1	4	3
P_2	4	3 se $ \alpha^2 + \beta \geq 1$
P_3	5	?
P_4	4	3
P_5	?	?
P_6	–	3

Tabela 6.1: A segunda coluna representa as cotas superiores \mathcal{M} fornecidas em [34], e a terceira coluna representa o número máximo \mathcal{N} de ciclos limite bifurcando das órbitas periódicas dos sistemas P_k , quando eles são perturbados dentro da classe de todos sistemas diferenciais polinomiais cúbicos, usando a teoria do “averaging” de primeira ordem.

6.1 Prova do Teorema 13

6.1.1 Prova para a Classe P_1

Temos que

$$\mu(x, y) = \frac{1}{(\alpha^2 + 2\alpha x + \beta + x^2)^2},$$

é o fator integrante associado a integral primeira

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(\alpha + x)^2 + \beta}$$

do sistema P_1 , porque eles satisfazem $\mu P = H_y$ e $\mu Q = -H_x$. Resolvendo implicitamente a equação $H(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = R^2$, obtemos a função positiva $\rho : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho = -\frac{R \left(\sqrt{4(\alpha^2 + \beta) - 2\beta R^2 (2 \cos^2 \theta - 1) - 2\beta R^2 + 2\alpha R \cos \theta} \right)}{R^2 (2 \cos^2 \theta - 1) + R^2 - 2}.$$

Após fazer a mudança de variável descrita no Teorema 4, o sistema (6.1) torna-se

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \sum_{i=1}^{11} \frac{A_i(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{Q_1(R, \varphi, \alpha, \beta)} R^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (6.7)$$

onde $a = (a_1, \dots, a_9)$, $b = (b_1, \dots, b_9)$ e

$$\begin{aligned}
A_1 &= -a_1 (\alpha^2 + \beta)^2 \cos^2 \theta - (\alpha^2 + \beta)^2 (a_2 + b_1) \sin \theta \cos \theta \\
&\quad - b_2 (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^2 \theta, \\
A_2 &= \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2 \theta + \beta} \left((-\alpha^2 - \beta) \cos^3 \theta (\alpha^2 a_3 + 3\alpha a_1 + a_3 \beta) \right. \\
&\quad - (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta \cos \theta (\alpha^2 a_5 + \alpha^2 b_4 - \alpha a_1 + 4\alpha b_2 + a_5 \beta + \beta b_4) \\
&\quad - (\alpha^2 + \beta) \sin \theta \cos^2 \theta (\alpha^2 a_4 + \alpha^2 b_3 + 3\alpha a_2 + 4\alpha b_1 + a_4 \beta + \beta b_3) \\
&\quad \left. - (\alpha^2 + \beta) \sin^3 \theta (\alpha^2 b_5 - \alpha a_2 + \beta b_5) \right), \\
A_3 &= -(\alpha^2 + \beta)^2 \sin^4 \theta (\alpha^2 b_9 - \alpha a_5 + \beta b_9) - (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\alpha^4 a_8 \\
&\quad + \alpha^4 b_7 - \alpha^3 a_3 + 4\alpha^3 a_5 + 5\alpha^3 b_4 - 4\alpha^2 a_1 + 2\alpha^2 a_8 \beta + 2\alpha^2 \beta b_7 \\
&\quad + 4\alpha^2 b_2 - \alpha a_3 \beta + 4\alpha a_5 \beta + 5\alpha \beta b_4 - a_1 \beta + a_8 \beta^2 + \beta^2 b_7 - 4\beta b_2) \\
&\quad + (-\alpha^2 - \beta) \cos^4 \theta (\alpha^4 a_6 + 4\alpha^3 a_3 + 2\alpha^2 a_6 \beta + 4\alpha a_3 \beta - 5a_1 \beta \\
&\quad + a_6 \beta^2) - (\alpha^2 + \beta) \sin \theta \cos^3 \theta (\alpha^4 a_7 + \alpha^4 b_6 + 4\alpha^3 a_4 + 5\alpha^3 b_3 \\
&\quad + 2\alpha^2 a_7 \beta + 2\alpha^2 \beta b_6 + 4\alpha^2 b_1 + 4\alpha a_4 \beta + 5\alpha \beta b_3 - 5a_2 \beta + a_7 \beta^2 \\
&\quad + \beta^2 b_6 - 4\beta b_1) - (\alpha^2 + \beta) \sin^3 \theta \cos \theta (\alpha^4 a_9 + \alpha^4 b_8 - \alpha^3 a_4 + 5\alpha^3 b_5 \\
&\quad - 4\alpha^2 a_2 + 2\alpha^2 a_9 \beta + 2\alpha^2 \beta b_8 - \alpha a_4 \beta + 5\alpha \beta b_5 - a_2 \beta + a_9 \beta^2 + \beta^2 b_8), \\
A_4 &= \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2 \theta + \beta} \left(\alpha a_9 (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^5 \theta + (\alpha^2 \right. \\
&\quad \left. + \beta) \sin^4 \theta \cos \theta (\alpha^3 a_8 - 6\alpha^3 b_9 + 5\alpha^2 a_5 + \alpha a_8 \beta - 6\alpha \beta b_9 + a_5 \beta) \right. \\
&\quad \left. + \cos^5 \theta (-5\alpha^5 a_6 - 4\alpha^4 a_3 + 8\alpha^3 a_1 - 10\alpha^3 a_6 \beta + 12\alpha a_1 \beta - 5\alpha a_6 \beta^2 \right. \\
&\quad \left. + 4a_3 \beta^2) + \sin^2 \theta \cos^3 \theta (\alpha^5 a_6 - 5\alpha^5 a_8 - 6\alpha^5 b_7 + 5\alpha^4 a_3 - 4\alpha^4 a_5 \right. \\
&\quad \left. - 9\alpha^4 b_4 + 4\alpha^3 a_1 + 2\alpha^3 a_6 \beta - 10\alpha^3 a_8 \beta - 12\alpha^3 \beta b_7 + 4\alpha^3 b_2 \right. \\
&\quad \left. + 6\alpha^2 a_3 \beta - 6\alpha^2 \beta b_4 + \alpha a_6 \beta^2 - 5\alpha a_8 \beta^2 - 6\alpha \beta^2 b_7 + 12\alpha \beta b_2 + a_3 \beta^2 \right. \\
&\quad \left. + 4a_5 \beta^2 + 3\beta^2 b_4) + \sin^3 \theta \cos^2 \theta (\alpha^5 a_7 - 5\alpha^5 a_9 - 6\alpha^5 b_8 + 5\alpha^4 a_4 \right. \\
&\quad \left. - 9\alpha^4 b_5 + 4\alpha^3 a_2 + 2\alpha^3 a_7 \beta - 10\alpha^3 a_9 \beta - 12\alpha^3 \beta b_8 + 6\alpha^2 a_4 \beta \right. \\
&\quad \left. - 6\alpha^2 \beta b_5 + \alpha a_7 \beta^2 - 5\alpha a_9 \beta^2 - 6\alpha \beta^2 b_8 + a_4 \beta^2 + 3\beta^2 b_5) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \theta \cos^4 \theta \left(-5\alpha^5 a_7 - 6\alpha^5 b_6 - 4\alpha^4 a_4 - 9\alpha^4 b_3 + 8\alpha^3 a_2 \right. \\
& - 10\alpha^3 a_7 \beta - 12\alpha^3 \beta b_6 + 4\alpha^3 b_1 - 6\alpha^2 \beta b_3 + 12\alpha a_2 \beta - 5\alpha a_7 \beta^2 \\
& \left. - 6\alpha \beta^2 b_6 + 12\alpha \beta b_1 + 4a_4 \beta^2 + 3\beta^2 b_3 \right), \\
A_5 = & a_9 (\alpha^2 + \beta)^2 (6\alpha^2 + \beta) \sin^5 \theta \cos \theta + (\alpha^2 + \beta) \sin^4 \theta \cos^2 \theta (6\alpha^4 a_8 \\
& - 15\alpha^4 b_9 + 9\alpha^3 a_5 + 7\alpha^2 a_8 \beta - 12\alpha^2 \beta b_9 + \alpha a_5 \beta + a_8 \beta^2 + 3\beta^2 b_9) \\
& + \sin^2 \theta \cos^4 \theta (6\alpha^6 a_6 - 9\alpha^6 a_8 - 15\alpha^6 b_7 + 9\alpha^5 a_3 + 4\alpha^5 a_5 - 5\alpha^5 b_4 \\
& - 4\alpha^4 a_1 + 13\alpha^4 a_6 \beta - 14\alpha^4 a_8 \beta - 27\alpha^4 \beta b_7 + 10\alpha^4 b_2 + 10\alpha^3 a_3 \beta \\
& + 20\alpha^3 a_5 \beta + 10\alpha^3 \beta b_4 - 12\alpha^2 a_1 \beta + 8\alpha^2 a_6 \beta^2 - \alpha^2 a_8 \beta^2 - 9\alpha^2 \beta^2 b_7 \\
& + 12\alpha^2 \beta b_2 + \alpha a_3 \beta^2 + 16\alpha a_5 \beta^2 + 15\alpha \beta^2 b_4 - 4a_1 \beta^2 + a_6 \beta^3 + 4a_8 \beta^3 \\
& + 3\beta^3 b_7 - 6\beta^2 b_2) + \cos^6 \theta (-9\alpha^6 a_6 + 4\alpha^5 a_3 + 6\alpha^4 a_1 - 14\alpha^4 a_6 \beta \\
& + 20\alpha^3 a_3 \beta - \alpha^2 a_6 \beta^2 + 16\alpha a_3 \beta^2 - 10a_1 \beta^2 + 4a_6 \beta^3) \\
& + \sin^3 \theta \cos^3 \theta (6\alpha^6 a_7 - 9\alpha^6 a_9 - 15\alpha^6 b_8 + 9\alpha^5 a_4 - 5\alpha^5 b_5 - 4\alpha^4 a_2 \\
& + 13\alpha^4 a_7 \beta - 14\alpha^4 a_9 \beta - 27\alpha^4 \beta b_8 + 10\alpha^3 a_4 \beta + 10\alpha^3 \beta b_5 - 12\alpha^2 a_2 \beta \\
& + 8\alpha^2 a_7 \beta^2 - \alpha^2 a_9 \beta^2 - 9\alpha^2 \beta^2 b_8 + \alpha a_4 \beta^2 + 15\alpha \beta^2 b_5 - 4a_2 \beta^2 + a_7 \beta^3 \\
& + 4a_9 \beta^3 + 3\beta^3 b_8) + \sin \theta \cos^5 \theta (-9\alpha^6 a_7 - 15\alpha^6 b_6 + 4\alpha^5 a_4 - 5\alpha^5 b_3 \\
& + 6\alpha^4 a_2 - 14\alpha^4 a_7 \beta - 27\alpha^4 \beta b_6 + 10\alpha^4 b_1 + 20\alpha^3 a_4 \beta + 10\alpha^3 \beta b_3 \\
& - \alpha^2 a_7 \beta^2 - 9\alpha^2 \beta^2 b_6 + 12\alpha^2 \beta b_1 + 16\alpha a_4 \beta^2 + 15\alpha \beta^2 b_3 - 10a_2 \beta^2 \\
& + 4a_7 \beta^3 + 3\beta^3 b_6 - 6\beta^2 b_1), \\
A_6 = & \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2 \theta} + \beta (3\alpha a_9 (\alpha^2 + \beta) (5\alpha^2 + \beta) \sin^5 \theta \cos^2 \theta \\
& + \sin^2 \theta \cos^5 \theta (15\alpha^5 a_6 - 5\alpha^5 a_8 - 20\alpha^5 b_7 + 5\alpha^4 a_3 + 10\alpha^4 a_5 \\
& + 5\alpha^4 b_4 - 10\alpha^3 a_1 + 18\alpha^3 a_6 \beta + 10\alpha^3 a_8 \beta - 8\alpha^3 \beta b_7 + 4\alpha^3 b_2 \\
& - 6\alpha^2 a_3 \beta + 12\alpha^2 a_5 \beta + 18\alpha^2 \beta b_4 - 6\alpha a_1 \beta + 3\alpha a_6 \beta^2 + 15\alpha a_8 \beta^2 \\
& + 12\alpha \beta^2 b_7 - 12\alpha \beta b_2 - 3a_3 \beta^2 - 6a_5 \beta^2 - 3\beta^2 b_4) + \cos^7 \theta (-5\alpha^5 a_6 \\
& + 10\alpha^4 a_3 - 6\alpha^3 a_1 + 10\alpha^3 a_6 \beta + 12\alpha^2 a_3 \beta - 18\alpha a_1 \beta + 15\alpha a_6 \beta^2 \\
& - 6a_3 \beta^2) + \sin^3 \theta \cos^4 \theta (15\alpha^5 a_7 - 5\alpha^5 a_9 - 20\alpha^5 b_8 + 5\alpha^4 a_4 + 5\alpha^4 b_5 \\
& - 10\alpha^3 a_2 + 18\alpha^3 a_7 \beta + 10\alpha^3 a_9 \beta - 8\alpha^3 \beta b_8 - 6\alpha^2 a_4 \beta + 18\alpha^2 \beta b_5 \\
& - 6\alpha a_2 \beta + 3\alpha a_7 \beta^2 + 15\alpha a_9 \beta^2 + 12\alpha \beta^2 b_8 - 3a_4 \beta^2 - 3\beta^2 b_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \theta \cos^6 \theta \left(-5\alpha^5 a_7 - 20\alpha^5 b_6 + 10\alpha^4 a_4 + 5\alpha^4 b_3 - 6\alpha^3 a_2 \right. \\
& + 10\alpha^3 a_7 \beta - 8\alpha^3 \beta b_6 + 4\alpha^3 b_1 + 12\alpha^2 a_4 \beta + 18\alpha^2 \beta b_3 - 18\alpha a_2 \beta \\
& \left. + 15\alpha a_7 \beta^2 + 12\alpha \beta^2 b_6 - 12\alpha \beta b_1 - 6a_4 \beta^2 - 3\beta^2 b_3 \right) \\
& + \sin^4 \theta \cos^3 \theta \left(15\alpha^5 a_8 - 20\alpha^5 b_9 + 5\alpha^4 a_5 + 18\alpha^3 a_8 \beta - 8\alpha^3 \beta b_9 \right. \\
& \left. - 6\alpha^2 a_5 \beta + 3\alpha a_8 \beta^2 + 12\alpha \beta^2 b_9 - 3a_5 \beta^2 \right), \\
A_7 = & a_9 (\alpha^2 + \beta) (20\alpha^4 - 3\alpha^2 \beta - 3\beta^2) \sin^5 \theta \cos^3 \theta + \sin^2 \theta \cos^6 \theta (20\alpha^6 a_6 \\
& + 5\alpha^6 a_8 - 15\alpha^6 b_7 - 5\alpha^5 a_3 + 4\alpha^5 a_5 + 9\alpha^5 b_4 - 4\alpha^4 a_1 + 17\alpha^4 a_6 \beta \\
& + 32\alpha^4 a_8 \beta + 15\alpha^4 \beta b_7 - 4\alpha^4 b_2 - 22\alpha^3 a_3 \beta - 12\alpha^3 a_5 \beta + 10\alpha^3 \beta b_4 \\
& + 6\alpha^2 a_1 \beta - 6\alpha^2 a_6 \beta^2 + 21\alpha^2 a_8 \beta^2 + 27\alpha^2 \beta^2 b_7 - 16\alpha^2 \beta b_2 - 9\alpha a_3 \beta^2 \\
& - 24\alpha a_5 \beta^2 - 15\alpha \beta^2 b_4 + 6a_1 \beta^2 - 3a_6 \beta^3 - 6a_8 \beta^3 - 3\beta^3 b_7 + 4\beta^2 b_2) \\
& + \cos^8 \theta (5\alpha^6 a_6 + 4\alpha^5 a_3 - 8\alpha^4 a_1 + 32\alpha^4 a_6 \beta - 12\alpha^3 a_3 \beta - 10\alpha^2 a_1 \beta \\
& + 21\alpha^2 a_6 \beta^2 - 24\alpha a_3 \beta^2 + 10a_1 \beta^2 - 6a_6 \beta^3) + \sin^3 \theta \cos^5 \theta (20\alpha^6 a_7 \\
& + 5\alpha^6 a_9 - 15\alpha^6 b_8 - 5\alpha^5 a_4 + 9\alpha^5 b_5 - 4\alpha^4 a_2 + 17\alpha^4 a_7 \beta + 32\alpha^4 a_9 \beta \\
& + 15\alpha^4 \beta b_8 - 22\alpha^3 a_4 \beta + 10\alpha^3 \beta b_5 + 6\alpha^2 a_2 \beta - 6\alpha^2 a_7 \beta^2 + 21\alpha^2 a_9 \beta^2 \\
& + 27\alpha^2 \beta^2 b_8 - 9\alpha a_4 \beta^2 - 15\alpha \beta^2 b_5 + 6a_2 \beta^2 - 3a_7 \beta^3 - 6a_9 \beta^3 - 3\beta^3 b_8) \\
& + \sin \theta \cos^7 \theta (5\alpha^6 a_7 - 15\alpha^6 b_6 + 4\alpha^5 a_4 + 9\alpha^5 b_3 - 8\alpha^4 a_2 + 32\alpha^4 a_7 \beta \\
& + 15\alpha^4 \beta b_6 - 4\alpha^4 b_1 - 12\alpha^3 a_4 \beta + 10\alpha^3 \beta b_3 - 10\alpha^2 a_2 \beta + 21\alpha^2 a_7 \beta^2 \\
& + 27\alpha^2 \beta^2 b_6 - 16\alpha^2 \beta b_1 - 24\alpha a_4 \beta^2 - 15\alpha \beta^2 b_3 + 10a_2 \beta^2 - 6a_7 \beta^3 \\
& - 3\beta^3 b_6 + 4\beta^2 b_1) + \sin^4 \theta \cos^4 \theta (20\alpha^6 a_8 - 15\alpha^6 b_9 - 5\alpha^5 a_5 \\
& + 17\alpha^4 a_8 \beta + 15\alpha^4 \beta b_9 - 22\alpha^3 a_5 \beta - 6\alpha^2 a_8 \beta^2 + 27\alpha^2 \beta^2 b_9 - 9\alpha a_5 \beta^2 \\
& - 3a_8 \beta^3 - 3\beta^3 b_9), \\
A_8 = & \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2 \theta + \beta} (\alpha a_9 (15\alpha^4 - 10\alpha^2 \beta - 9\beta^2) \sin^5 \theta \cos^4 \theta \\
& + \sin^2 \theta \cos^7 \theta (15\alpha^5 a_6 + 9\alpha^5 a_8 - 6\alpha^5 b_7 - 9\alpha^4 a_3 - 4\alpha^4 a_5 + 5\alpha^4 b_4 \\
& + 4\alpha^3 a_1 - 10\alpha^3 a_6 \beta + 10\alpha^3 a_8 \beta + 20\alpha^3 \beta b_7 - 4\alpha^3 b_2 - 6\alpha^2 a_3 \beta \\
& - 16\alpha^2 a_5 \beta - 10\alpha^2 \beta b_4 + 8\alpha a_1 \beta - 9\alpha a_6 \beta^2 - 15\alpha a_8 \beta^2 - 6\alpha \beta^2 b_7 \\
& + 4\alpha \beta b_2 + 3a_3 \beta^2 + 4a_5 \beta^2 + \beta^2 b_4) + \cos^9 \theta (9\alpha^5 a_6 - 4\alpha^4 a_3 \\
& + 10\alpha^3 a_6 \beta - 16\alpha^2 a_3 \beta + 12\alpha a_1 \beta - 15\alpha a_6 \beta^2 + 4a_3 \beta^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin^3 \theta \cos^6 \theta (15\alpha^5 a_7 + 9\alpha^5 a_9 - 6\alpha^5 b_8 - 9\alpha^4 a_4 + 5\alpha^4 b_5 + 4\alpha^3 a_2 \\
& - 10\alpha^3 a_7 \beta + 10\alpha^3 a_9 \beta + 20\alpha^3 \beta b_8 - 6\alpha^2 a_4 \beta - 10\alpha^2 \beta b_5 + 8\alpha a_2 \beta \\
& - 9\alpha a_7 \beta^2 - 15\alpha a_9 \beta^2 - 6\alpha \beta^2 b_8 + 3a_4 \beta^2 + \beta^2 b_5) \\
& + \sin \theta \cos^8 \theta (9\alpha^5 a_7 - 6\alpha^5 b_6 - 4\alpha^4 a_4 + 5\alpha^4 b_3 + 10\alpha^3 a_7 \beta \\
& + 20\alpha^3 \beta b_6 - 4\alpha^3 b_1 - 16\alpha^2 a_4 \beta - 10\alpha^2 \beta b_3 + 12\alpha a_2 \beta - 15\alpha a_7 \beta^2 \\
& - 6\alpha \beta^2 b_6 + 4\alpha \beta b_1 + 4a_4 \beta^2 + \beta^2 b_3) + \sin^4 \theta \cos^5 \theta (15\alpha^5 a_8 \\
& - 6\alpha^5 b_9 - 9\alpha^4 a_5 - 10\alpha^3 a_8 \beta + 20\alpha^3 \beta b_9 - 6\alpha^2 a_5 \beta - 9\alpha a_8 \beta^2 \\
& - 6\alpha \beta^2 b_9 + 3a_5 \beta^2), \\
A_9 = & a_9 (6\alpha^6 - 25\alpha^4 \beta - 12\alpha^2 \beta^2 + 3\beta^3) \sin^5 \theta \cos^5 \theta + \sin^2 \theta \cos^8 \theta (6\alpha^6 a_6 \\
& + 5\alpha^6 a_8 - \alpha^6 b_7 - 5\alpha^5 a_3 - 4\alpha^5 a_5 + \alpha^5 b_4 + 4\alpha^4 a_1 - 25\alpha^4 a_6 \beta \\
& - 10\alpha^4 a_8 \beta + 15\alpha^4 \beta b_7 - \alpha^4 b_2 + 6\alpha^3 a_3 \beta - 4\alpha^3 a_5 \beta - 10\alpha^3 \beta b_4 \\
& + 4\alpha^2 a_1 \beta - 12\alpha^2 a_6 \beta^2 - 27\alpha^2 a_8 \beta^2 - 15\alpha^2 \beta^2 b_7 + 6\alpha^2 \beta b_2 + 11\alpha a_3 \beta^2 \\
& + 16\alpha a_5 \beta^2 + 5\alpha \beta^2 b_4 - 4a_1 \beta^2 + 3a_6 \beta^3 + 4a_8 \beta^3 + \beta^3 b_7 - \beta^2 b_2) \\
& + \cos^{10} \theta (5\alpha^6 a_6 - 4\alpha^5 a_3 + 3\alpha^4 a_1 - 10\alpha^4 a_6 \beta - 4\alpha^3 a_3 \beta + 10\alpha^2 a_1 \beta \\
& - 27\alpha^2 a_6 \beta^2 + 16\alpha a_3 \beta^2 - 5a_1 \beta^2 + 4a_6 \beta^3) + \sin^3 \theta \cos^7 \theta (6\alpha^6 a_7 \\
& + 5\alpha^6 a_9 - \alpha^6 b_8 - 5\alpha^5 a_4 + \alpha^5 b_5 + 4\alpha^4 a_2 - 25\alpha^4 a_7 \beta - 10\alpha^4 a_9 \beta \\
& + 15\alpha^4 \beta b_8 + 6\alpha^3 a_4 \beta - 10\alpha^3 \beta b_5 + 4\alpha^2 a_2 \beta - 12\alpha^2 a_7 \beta^2 - 27\alpha^2 a_9 \beta^2 \\
& - 15\alpha^2 \beta^2 b_8 + 11\alpha a_4 \beta^2 + 5\alpha \beta^2 b_5 - 4a_2 \beta^2 + 3a_7 \beta^3 + 4a_9 \beta^3 + \beta^3 b_8) \\
& + \sin \theta \cos^9 \theta (5\alpha^6 a_7 - \alpha^6 b_6 - 4\alpha^5 a_4 + \alpha^5 b_3 + 3\alpha^4 a_2 - 10\alpha^4 a_7 \beta \\
& + 15\alpha^4 \beta b_6 - \alpha^4 b_1 - 4\alpha^3 a_4 \beta - 10\alpha^3 \beta b_3 + 10\alpha^2 a_2 \beta - 27\alpha^2 a_7 \beta^2 \\
& - 15\alpha^2 \beta^2 b_6 + 6\alpha^2 \beta b_1 + 16\alpha a_4 \beta^2 + 5\alpha \beta^2 b_3 - 5a_2 \beta^2 + 4a_7 \beta^3 + \beta^3 b_6 \\
& - \beta^2 b_1) + \sin^4 \theta \cos^6 \theta (6\alpha^6 a_8 - \alpha^6 b_9 - 5\alpha^5 a_5 - 25\alpha^4 a_8 \beta + 15\alpha^4 \beta b_9 \\
& + 6\alpha^3 a_5 \beta - 12\alpha^2 a_8 \beta^2 - 15\alpha^2 \beta^2 b_9 + 11\alpha a_5 \beta^2 + 3a_8 \beta^3 + \beta^3 b_9), \\
A_{10} = & \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2 \theta + \beta} (\alpha a_9 (\alpha^4 - 10\alpha^2 \beta + 5\beta^2) \sin^5 \theta \cos^6 \theta \\
& + \sin^2 \theta \cos^9 \theta (\alpha^5 a_6 + \alpha^5 a_8 - \alpha^4 a_3 - \alpha^4 a_5 + \alpha^3 a_1 - 10\alpha^3 a_6 \beta \\
& - 10\alpha^3 a_8 \beta + 6\alpha^2 a_3 \beta + 6\alpha^2 a_5 \beta - 3\alpha a_1 \beta + 5\alpha a_6 \beta^2 + 5\alpha a_8 \beta^2 - a_3 \beta^2 \\
& - a_5 \beta^2) + \cos^{11} \theta (\alpha^5 a_6 - \alpha^4 a_3 + \alpha^3 a_1 - 10\alpha^3 a_6 \beta + 6\alpha^2 a_3 \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3\alpha a_1\beta + 5\alpha a_6\beta^2 - a_3\beta^2) + \sin^3 \theta \cos^8 \theta (\alpha^5 a_7 + \alpha^5 a_9 - \alpha^4 a_4 \\
& + \alpha^3 a_2 - 10\alpha^3 a_7\beta - 10\alpha^3 a_9\beta + 6\alpha^2 a_4\beta - 3\alpha a_2\beta + 5\alpha a_7\beta^2 + 5\alpha a_9\beta^2 \\
& - a_4\beta^2) + \sin \theta \cos^{10} \theta (\alpha^5 a_7 - \alpha^4 a_4 + \alpha^3 a_2 - 10\alpha^3 a_7\beta + 6\alpha^2 a_4\beta \\
& - 3\alpha a_2\beta + 5\alpha a_7\beta^2 - a_4\beta^2) + \sin^4 \theta \cos^7 \theta (\alpha^5 a_8 - \alpha^4 a_5 - 10\alpha^3 a_8\beta \\
& + 6\alpha^2 a_5\beta + 5\alpha a_8\beta^2 - a_5\beta^2)), \\
A_{11} = & -a_9\beta (5\alpha^4 - 10\alpha^2\beta + \beta^2) \sin^5 \theta \cos^7 \theta - \beta \sin^2 \theta \cos^{10} \theta (5\alpha^4 a_6 \\
& + 5\alpha^4 a_8 - 4\alpha^3 a_3 - 4\alpha^3 a_5 + 3\alpha^2 a_1 - 10\alpha^2 a_6\beta - 10\alpha^2 a_8\beta + 4\alpha a_3\beta \\
& + 4\alpha a_5\beta - a_1\beta + a_6\beta^2 + a_8\beta^2) - \beta \cos^{12} \theta (5\alpha^4 a_6 - 4\alpha^3 a_3 + 3\alpha^2 a_1 \\
& - 10\alpha^2 a_6\beta + 4\alpha a_3\beta - a_1\beta + a_6\beta^2) - \beta \sin^3 \theta \cos^9 \theta (5\alpha^4 a_7 + 5\alpha^4 a_9 \\
& - 4\alpha^3 a_4 + 3\alpha^2 a_2 - 10\alpha^2 a_7\beta - 10\alpha^2 a_9\beta + 4\alpha a_4\beta - a_2\beta + a_7\beta^2 \\
& + a_9\beta^2) - \beta \sin \theta \cos^{11} \theta (5\alpha^4 a_7 - 4\alpha^3 a_4 + 3\alpha^2 a_2 - 10\alpha^2 a_7\beta + 4\alpha a_4\beta \\
& - a_2\beta + a_7\beta^2) - \beta \sin^4 \theta \cos^8 \theta (5\alpha^4 a_8 - 4\alpha^3 a_5 - 10\alpha^2 a_8\beta + 4\alpha a_5\beta \\
& + a_8\beta^2) \\
Q_1 = & 2(R \cos \theta - 1)(R \cos \theta + 1) \left(\alpha R \cos \theta \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2 \theta + \beta} + \alpha^2 \right. \\
& \left. - \beta R^2 \cos^2 \theta + \beta \right) \left(2\alpha R \cos \theta \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2 \theta + \beta} + R^2 (\alpha^2 \right. \\
& \left. - \beta) \cos^2 \theta + \alpha^2 + \beta \right)^2.
\end{aligned}$$

Integrando o lado direito da equação diferencial (6.7), obtemos a função “averaging”
 $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned}
f(R) = & +f_0 \left[\frac{(\alpha^2 a_6 - 3\alpha^2 a_8 - \alpha^2 b_7 + 3\alpha^2 b_9 + a_1 + a_6\beta - 3a_8\beta}{4(\alpha^2 + \beta)} \right. \\
& \left. + \frac{-\beta b_7 + 3\beta b_9 + b_2}{4(\alpha^2 + \beta)} \right] + f_1 \left[\frac{(\alpha^4 a_6 + \alpha^4 a_8 - \alpha^3 a_3 - \alpha^3 a_5 + \alpha^2 a_1}{4(\alpha^2 + \beta)^2} \right. \\
& \left. + \frac{2\alpha^2 a_6\beta + 2\alpha^2 a_8\beta - \alpha a_3\beta - \alpha a_5\beta - a_1\beta + a_6\beta^2 + a_8\beta^2}{4(\alpha^2 + \beta)^2} \right] \\
& + \frac{1}{2} f_2 (a_8 - b_9) + f_3 (a_6 - a_8 - b_7 + b_9),
\end{aligned}$$

onde

$$f_0 = R, \quad f_1 = R^3, \quad f_2 = R\sqrt{1 - R^2} \quad \text{e} \quad f_3 = \sqrt{1 - R^2}/R.$$

Temos que estudar o número de zeros simples da função “averaging” f . Para isso, devemos calcular os Wronskianos $W(f_0, \dots, f_k)$, para $k = 0, \dots, 3$ e provar que eles não se anulam para $R \in (0, 1)$. De fato,

$$W(f_0) = R, \quad W(f_0, f_1) = 2R^3, \quad W(f_0, f_1, f_2) = -\frac{2R^6}{(1-R^2)^{3/2}},$$

$$W(f_0, \dots, f_3) = -\frac{12R^2 (R^4 + 4(\sqrt{1-R^2} - 2)R^2 - 8\sqrt{1-R^2} + 8)}{(R^2 - 1)^3}.$$

Obviamente os três primeiros Wronskianos não se anulam. O Wronskiano $W(f_0, \dots, f_3)$ é igual a zero se, e somente se,

$$R^4 - 8R^2 + 4\sqrt{1-R^2}(R^2 - 2) + 8 = 0.$$

Passando o termo $4\sqrt{1-R^2}(R^2 - 2)$ para o lado direito da igualdade anterior e elevando ao quadrado em ambos os lados, obtemos $R^8 = 0$, que é impossível porque $R \in (0, 1)$. Assim os Wronskianos $W(f_0, \dots, f_k) \neq 0$, para $k = 0, \dots, 3$. Portanto, desde que (f_0, \dots, f_3) é um sistema-ECT, a função “averaging” f tem no máximo 3 zeros simples e eles são realizáveis. Pelo Teorema 2, esses zeros fornecem 3 ciclos limite para o sistema (6.1).

6.1.2 Prova para a Classe P_4

Suponha que $\alpha < 0$ e $\beta > 0$. A função positiva ρ que satisfaz $H(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = R^2$ é $\rho : (0, \sqrt{-\alpha/\beta}) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\rho = \frac{\beta R}{\sqrt{\beta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta (\alpha + \beta R^2)}}.$$

O fator integrante

$$\mu(x, y) = -\frac{2}{(\beta + y^2)^2}$$

corresponde a integral primeira

$$H(x, y) = -\frac{\alpha y^2 - \beta x^2}{\beta(\beta + y^2)}$$

porque eles satisfazem $\mu P = H_y$ e $\mu Q = -H_x$. Transformamos o sistema (6.4) usando o Teorema 4, na seguinte forma padrão do “averaging”

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \sum_{i=1}^7 \frac{B_i(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{Q_2(R, \varphi, \alpha, \beta)} R^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (6.8)$$

onde $a = (a_1, \dots, a_9)$, $b = (b_1, \dots, b_9)$ e

$$\begin{aligned} B_1 &= \alpha^3 b_2 \sin^6 \theta - \alpha^2 \beta (a_1 + 2b_2) \sin^4 \theta \cos^2 \theta + \alpha^2 \sin^5 \theta \cos \theta (\alpha b_1 - a_2 \beta) \\ &\quad + \alpha \beta^2 (2a_1 + b_2) \sin^2 \theta \cos^4 \theta - \beta^2 \sin \theta \cos^5 \theta (a_2 \beta - \alpha b_1), \\ &\quad - 2\alpha \beta \sin^3 \theta \cos^3 \theta (\alpha b_1 - a_2 \beta) - a_1 \beta^3 \cos^6 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \sqrt{-\alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta - \beta R^2 \sin^2 \theta} \left(-\alpha^2 \beta b_5 \sin^5 \theta \right. \\ &\quad - \beta^2 \sin^2 \theta \cos^3 \theta (-\alpha a_3 - \alpha b_4 + a_5 \beta) - \beta^2 \sin \theta \cos^4 \theta (a_4 \beta - \alpha b_3) \\ &\quad + \alpha \beta \sin^3 \theta \cos^2 \theta (-\alpha b_3 + a_4 \beta + \beta b_5) + \alpha \beta \sin^4 \theta \cos \theta (a_5 \beta - \alpha b_4) \\ &\quad \left. - a_3 \beta^3 \cos^5 \theta \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3 &= \beta^2 \sin^3 \theta \cos^3 \theta \left(-\alpha^2 b_6 + \alpha a_7 \beta + \alpha \beta b_8 - 4\alpha b_1 + 2a_2 \beta - a_9 \beta^2 \right) \\ &\quad - \alpha^2 \beta \sin^6 \theta (\beta b_9 - 3b_2) + \beta^3 \sin^2 \theta \cos^4 \theta (\alpha a_6 + \alpha b_7 + 2a_1 - a_8 \beta \\ &\quad + b_2) - \alpha \beta^2 \sin^4 \theta \cos^2 \theta (\alpha b_7 + 2a_1 - a_8 \beta - \beta b_9 + 4b_2) \\ &\quad - \alpha \beta \sin^5 \theta \cos \theta (\alpha \beta b_8 - 3\alpha b_1 + 2a_2 \beta - a_9 \beta^2) - \beta^3 \sin \theta \cos^5 \theta (-\alpha b_6 \\ &\quad + a_7 \beta - b_1) - a_6 \beta^4 \cos^6 \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4 &= \sqrt{-\alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta - \beta R^2 \sin^2 \theta} \left(\beta^2 \sin^3 \theta \cos^2 \theta (-2\alpha b_3 + a_4 \beta \right. \\ &\quad + \beta b_5) + \beta^2 \sin^4 \theta \cos \theta (a_5 \beta - 2\alpha b_4) - 2\alpha \beta^2 b_5 \sin^5 \theta + \beta^3 (a_3 \\ &\quad \left. + b_4) \sin^2 \theta \cos^3 \theta + \beta^3 b_3 \sin \theta \cos^4 \theta \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_5 &= -\beta^3 \sin^4 \theta \cos^2 \theta (2\alpha b_7 + a_1 - a_8 \beta - \beta b_9 + 2b_2) \\ &\quad - \beta^2 \sin^5 \theta \cos \theta (2\alpha \beta b_8 - 3\alpha b_1 + a_2 \beta - a_9 \beta^2) \\ &\quad + \beta^3 \sin^3 \theta \cos^3 \theta (-2\alpha b_6 + a_7 \beta + \beta b_8 - 2b_1) - \alpha \beta^2 \sin^6 \theta (2\beta b_9 - 3b_2) \\ &\quad + \beta^4 (a_6 + b_7) \sin^2 \theta \cos^4 \theta + \beta^4 b_6 \sin \theta \cos^5 \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_6 &= \sqrt{-\alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta - \beta R^2 \sin^2 \theta} \left(-\beta^3 b_3 \sin^3 \theta \cos^2 \theta \right. \\ &\quad \left. - \beta^3 b_4 \sin^4 \theta \cos \theta - \beta^3 b_5 \sin^5 \theta \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_7 &= -\beta^4 b_6 \sin^3 \theta \cos^3 \theta - \beta^4 b_7 \sin^4 \theta \cos^2 \theta - \beta^3 \sin^5 \theta \cos \theta (\beta b_8 - b_1) \\ &\quad - \beta^3 \sin^6 \theta (\beta b_9 - b_2), \end{aligned}$$

$$Q_2 = (\beta \cos^2 \theta - \alpha \sin^2 \theta)^2 (\beta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta (\alpha + \beta R^2))^2.$$

Integrando o lado direito da equação diferencial (6.8), obtemos a função $f : (0, \sqrt{-\alpha/\beta}) \rightarrow$

\mathbb{R} , dada por

$$f = \alpha f_0 \frac{(3\alpha a_6 - 3\alpha b_7 - a_1 + a_8\beta - \beta b_9 - b_2)}{2(-\alpha)^{3/2}\sqrt{\beta}} + f_1 \frac{\sqrt{\beta}(-\alpha b_7 + \beta b_9 - b_2)}{2(-\alpha)^{3/2}} \\ - f_2 \frac{(a_6 - b_7)}{\sqrt{\beta}} + f_3 \frac{(\alpha a_6 - \alpha b_7 + a_8\beta - \beta b_9)}{\beta^{3/2}},$$

onde

$$f_0 = R, \quad f_1 = R^3, \quad f_2 = -R\sqrt{-\alpha - \beta R^2} \quad \text{e} \quad f_3 = \frac{\sqrt{-\alpha} - \sqrt{-\alpha - \beta R^2}}{R}.$$

Temos,

$$W(f_0) = R, \quad W(f_0, f_1) = 2R^3, \quad W(f_0, f_1, f_2) = \frac{2\beta^2 R^6}{(-\alpha - \beta R^2)^{3/2}}, \\ W(f_0, \dots, f_3) = -\frac{12\beta^2 R^2(8\alpha^2 + 8\alpha\beta R^2 + 4\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\alpha - \beta R^2}(2\alpha + \beta R^2) + \beta^2 R^4)}{(\alpha + \beta R^2)^3}$$

Claramente os três primeiros Wronskianos não se anulam. O último Wronskiano é igual a zero se, e somente se,

$$8\alpha^2 + 8\alpha\beta R^2 + \beta^2 R^4 + 4\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\alpha - \beta R^2}(2\alpha + \beta R^2) = 0.$$

Passando o termo $4\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\alpha - \beta R^2}(2\alpha + \beta R^2)$ para o lado direito da igualdade anterior e elevando ambos lados ao quadrado, obtemos $\beta^4 R^8 = 0$. Isso é impossível porque $R \in (0, \sqrt{-\alpha/\beta})$. Assim, os Wronkianos $W(f_0, \dots, f_k)$, para $k = 0, \dots, 3$ não se anulam para $R \in (0, \sqrt{-\alpha/\beta})$. Portanto, desde que (f_0, \dots, f_3) é um sistema-ECT, a “função averaging” f tem no máximo 3 zeros simples e eles são realizáveis. Pelo Teorema 2, esses zeros fornecem 3 ciclos limite para o sistema (6.4). Se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$, então tomamos $\bar{\rho} = -\rho$ e o resultado obtido é análogo.

6.1.3 Prova para a Classe P_6

Novamente o fator integrante

$$\mu(x, y) = \frac{1}{(\alpha + x)^4}$$

corresponde a integral primeira

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(\alpha + x)^2}$$

porque $\mu P = H_y$ e $\mu Q = -H_x$. Resolvendo implicitamente a equação $H(\rho \cos \theta, \rho \cos \theta) = R^2$ obtemos a função positiva $\rho : (0, 1) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\rho = -\frac{2R \left(\sqrt{\alpha^2} + \alpha R \cos \theta \right)}{R^2 (2 \cos^2 \theta - 1) + R^2 - 2}.$$

Transformamos o sistema (6.6) usando o Teorema 4, na seguinte forma padrão do “averaging”

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{N(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{Q_3(R, \varphi, \alpha, \beta)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (6.9)$$

onde $a = (a_1, \dots, a_9)$, $b = (b_1, \dots, b_9)$ e

$$\begin{aligned} N = & R \left(\alpha R \cos \theta + \sqrt{\alpha^2} \right)^2 \left(\alpha a_1 R^6 \cos^8 \theta - \alpha^2 a_3 R^6 \cos^8 \theta + \alpha^3 a_6 R^6 \cos^8 \theta \right. \\ & - \alpha \sqrt{\alpha^2} a_3 R^5 \cos^7 \theta + 2 \left(\alpha^2 \right)^{3/2} a_6 R^5 \cos^7 \theta + \alpha a_2 R^6 \sin \theta \cos^7 \theta \\ & - \alpha^2 a_4 R^6 \sin \theta \cos^7 \theta + \alpha^3 a_7 R^6 \sin \theta \cos^7 \theta - 3 \alpha a_1 R^4 \cos^6 \theta \\ & + 2 \alpha^2 a_3 R^4 \cos^6 \theta + \alpha a_1 R^6 \sin^2 \theta \cos^6 \theta - \alpha^2 a_3 R^6 \sin^2 \theta \cos^6 \theta \\ & - \alpha^2 a_5 R^6 \sin^2 \theta \cos^6 \theta + \alpha^3 a_6 R^6 \sin^2 \theta \cos^6 \theta + \alpha^3 a_8 R^6 \sin^2 \theta \cos^6 \theta \\ & - \alpha \sqrt{\alpha^2} a_4 R^5 \sin \theta \cos^6 \theta + 2 \left(\alpha^2 \right)^{3/2} a_7 R^5 \sin \theta \cos^6 \theta \\ & - \sqrt{\alpha^2} b_1 R^5 \sin \theta \cos^6 \theta + \alpha \sqrt{\alpha^2} b_3 R^5 \sin \theta \cos^6 \theta \\ & - \left(\alpha^2 \right)^{3/2} b_6 R^5 \sin \theta \cos^6 \theta + 2 \alpha \sqrt{\alpha^2} a_3 R^3 \cos^5 \theta - 2 \left(\alpha^2 \right)^{3/2} a_6 R^3 \cos^5 \theta \\ & + \alpha a_2 R^6 \sin^3 \theta \cos^5 \theta - \alpha^2 a_4 R^6 \sin^3 \theta \cos^5 \theta + \alpha^3 a_7 R^6 \sin^3 \theta \cos^5 \theta \\ & + \alpha^3 a_9 R^6 \sin^3 \theta \cos^5 \theta + \sqrt{\alpha^2} a_1 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta - 2 \alpha \sqrt{\alpha^2} a_3 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta \\ & - \alpha \sqrt{\alpha^2} a_5 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta + 3 \left(\alpha^2 \right)^{3/2} a_6 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta \\ & + 2 \left(\alpha^2 \right)^{3/2} a_8 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta - \sqrt{\alpha^2} b_2 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta \\ & + \alpha \sqrt{\alpha^2} b_4 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta - \left(\alpha^2 \right)^{3/2} b_7 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta \\ & - 3 \alpha a_2 R^4 \sin \theta \cos^5 \theta + 2 \alpha^2 a_4 R^4 \sin \theta \cos^5 \theta - \alpha b_1 R^4 \sin \theta \cos^5 \theta \\ & + 2 \alpha^2 b_3 R^4 \sin \theta \cos^5 \theta - 3 \alpha^3 b_6 R^4 \sin \theta \cos^5 \theta - \alpha^2 a_5 R^6 \sin^4 \theta \cos^4 \theta \\ & + \alpha^3 a_8 R^6 \sin^4 \theta \cos^4 \theta + \sqrt{\alpha^2} a_2 R^5 \sin^3 \theta \cos^4 \theta - 2 \alpha \sqrt{\alpha^2} a_4 R^5 \sin^3 \theta \cos^4 \theta \\ & + 3 \left(\alpha^2 \right)^{3/2} a_7 R^5 \sin^3 \theta \cos^4 \theta + 2 \left(\alpha^2 \right)^{3/2} a_9 R^5 \sin^3 \theta \cos^4 \theta \\ & + \alpha \sqrt{\alpha^2} b_5 R^5 \sin^3 \theta \cos^4 \theta - \left(\alpha^2 \right)^{3/2} b_8 R^5 \sin^3 \theta \cos^4 \theta + 3 \alpha a_1 R^2 \cos^4 \theta \\ & - \alpha^2 a_3 R^2 \cos^4 \theta - \alpha^3 a_6 R^2 \cos^4 \theta - 2 \alpha a_1 R^4 \sin^2 \theta \cos^4 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\alpha^2 a_5 R^4 \sin^2 \theta \cos^4 \theta + 3\alpha^3 a_6 R^4 \sin^2 \theta \cos^4 \theta - \alpha b_2 R^4 \sin^2 \theta \cos^4 \theta \\
& +2\alpha^2 b_4 R^4 \sin^2 \theta \cos^4 \theta - 3\alpha^3 b_7 R^4 \sin^2 \theta \cos^4 \theta + 2\alpha \sqrt{\alpha^2} a_4 R^3 \sin \theta \cos^4 \theta \\
& -2(\alpha^2)^{3/2} a_7 R^3 \sin \theta \cos^4 \theta + 2\sqrt{\alpha^2} b_1 R^3 \sin \theta \cos^4 \theta \\
& -3(\alpha^2)^{3/2} b_6 R^3 \sin \theta \cos^4 \theta + \alpha^3 a_9 R^6 \sin^5 \theta \cos^3 \theta \\
& -2\alpha \sqrt{\alpha^2} a_5 R^5 \sin^4 \theta \cos^3 \theta + 3(\alpha^2)^{3/2} a_8 R^5 \sin^4 \theta \cos^3 \theta \\
& -(\alpha^2)^{3/2} b_9 R^5 \sin^4 \theta \cos^3 \theta - 2\alpha a_2 R^4 \sin^3 \theta \cos^3 \theta \\
& +3\alpha^3 a_7 R^4 \sin^3 \theta \cos^3 \theta + 2\alpha^2 b_5 R^4 \sin^3 \theta \cos^3 \theta - 3\alpha^3 b_8 R^4 \sin^3 \theta \cos^3 \theta \\
& -2\sqrt{\alpha^2} a_1 R^3 \sin^2 \theta \cos^3 \theta + 2\alpha \sqrt{\alpha^2} a_3 R^3 \sin^2 \theta \cos^3 \theta \\
& +2\alpha \sqrt{\alpha^2} a_5 R^3 \sin^2 \theta \cos^3 \theta + (\alpha^2)^{3/2} a_6 R^3 \sin^2 \theta \cos^3 \theta \\
& -2(\alpha^2)^{3/2} a_8 R^3 \sin^2 \theta \cos^3 \theta + 2\sqrt{\alpha^2} b_2 R^3 \sin^2 \theta \cos^3 \theta \\
& -3(\alpha^2)^{3/2} b_7 R^3 \sin^2 \theta \cos^3 \theta - \alpha \sqrt{\alpha^2} a_3 R \cos^3 \theta + 3\alpha a_2 R^2 \sin \theta \cos^3 \theta \\
& -\alpha^2 a_4 R^2 \sin \theta \cos^3 \theta - \alpha^3 a_7 R^2 \sin \theta \cos^3 \theta + 2\alpha b_1 R^2 \sin \theta \cos^3 \theta \\
& -2\alpha^2 b_3 R^2 \sin \theta \cos^3 \theta - \alpha^3 b_6 R^2 \sin \theta \cos^3 \theta + 3(\alpha^2)^{3/2} a_9 R^5 \sin^5 \theta \cos^2 \theta \\
& +3\alpha^3 a_8 R^4 \sin^4 \theta \cos^2 \theta - 3\alpha^3 b_9 R^4 \sin^4 \theta \cos^2 \theta - 2\sqrt{\alpha^2} a_2 R^3 \sin^3 \theta \cos^2 \theta \\
& +2\alpha \sqrt{\alpha^2} a_4 R^3 \sin^3 \theta \cos^2 \theta + (\alpha^2)^{3/2} a_7 R^3 \sin^3 \theta \cos^2 \theta \\
& -2(\alpha^2)^{3/2} a_9 R^3 \sin^3 \theta \cos^2 \theta - 3(\alpha^2)^{3/2} b_8 R^3 \sin^3 \theta \cos^2 \theta \\
& +\alpha a_1 R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \alpha^2 a_3 R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \alpha^2 a_5 R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
& -\alpha^3 a_8 R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2\alpha b_2 R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2\alpha^2 b_4 R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
& -\alpha^3 b_7 R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \alpha a_1 \cos^2 \theta - \alpha \sqrt{\alpha^2} a_4 R \sin \theta \cos^2 \theta \\
& -\sqrt{\alpha^2} b_1 R \sin \theta \cos^2 \theta - \alpha \sqrt{\alpha^2} b_3 R \sin \theta \cos^2 \theta + 3\alpha^3 a_9 R^4 \sin^5 \theta \cos \theta \\
& +2\alpha \sqrt{\alpha^2} a_5 R^3 \sin^4 \theta \cos \theta + (\alpha^2)^{3/2} a_8 R^3 \sin^4 \theta \cos \theta \\
& -3(\alpha^2)^{3/2} b_9 R^3 \sin^4 \theta \cos \theta + \alpha a_2 R^2 \sin^3 \theta \cos \theta + \alpha^2 a_4 R^2 \sin^3 \theta \cos \theta \\
& -\alpha^3 a_9 R^2 \sin^3 \theta \cos \theta - 2\alpha^2 b_5 R^2 \sin^3 \theta \cos \theta - \alpha^3 b_8 R^2 \sin^3 \theta \cos \theta \\
& +\sqrt{\alpha^2} a_1 R \sin^2 \theta \cos \theta - \alpha \sqrt{\alpha^2} a_5 R \sin^2 \theta \cos \theta - \sqrt{\alpha^2} b_2 R \sin^2 \theta \cos \theta \\
& -\alpha \sqrt{\alpha^2} b_4 R \sin^2 \theta \cos \theta - \alpha a_2 \sin \theta \cos \theta - \alpha b_1 \sin \theta \cos \theta \\
& +(\alpha^2)^{3/2} a_9 R^3 \sin^5 \theta + \alpha^2 a_5 R^2 \sin^4 \theta - \alpha^3 b_9 R^2 \sin^4 \theta + \sqrt{\alpha^2} a_2 R \sin^3 \theta \\
& -\alpha \sqrt{\alpha^2} b_5 R \sin^3 \theta - \alpha b_2 \sin^2 \theta),
\end{aligned}$$

$$Q_3 = 2\alpha(R \cos \theta - 1)(R \cos \theta + 1) \left(\sqrt{\alpha^2 R \cos \theta + \alpha} \right)^4.$$

Integrando o lado direito da equação diferencial (6.9), obtemos a função “averaging” $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} f(R) = & f_0 \left[\frac{(\alpha^2 a_6 - 3\alpha^2 a_8 + \frac{-\alpha^2 b_7 b_9 + 3\alpha^2 + a_1 + b_2}{4\alpha^2})}{4\alpha^2} \right] \\ & + f_1 \frac{(\alpha^2 a_6 + \alpha^2 a_8 - \alpha a_3 - \alpha a_5 + a_1)}{4\alpha^2} + \frac{1}{2} f_2 (a_8 - b_9) \\ & + f_3 \frac{(a_6 - a_8 - b_7 + b_9)}{2}, \end{aligned}$$

onde

$$f_0 = R, \quad f_1 = R^3, \quad f_2 = R\sqrt{1 - R^2} \quad \text{e} \quad (\sqrt{1 - R^2} - 1)/R.$$

Temos que

$$\begin{aligned} W(f_0) = R, \quad W(f_0, f_1) = 2R^3, \quad W(f_0, f_1, f_2) = -\frac{2R^6}{(1 - R^2)^{3/2}}, \\ W(f_0, \dots, f_3) = -12R^2 \frac{(R^4 - 8R^2 + 8 + 4\sqrt{1 - R^2}(R^2 - 2))}{(R^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Os três primeiros Wronskianos não se anulam para $R \in (0, 1)$. O último Wronskiano é igual a zero se, e somente se,

$$R^4 - 8R^2 + 8 + 4\sqrt{1 - R^2}(R^2 - 2) = 0.$$

Passando o termo $4\sqrt{1 - R^2}(R^2 - 2)$ para o lado direito da equação anterior e elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos $R^8 = 0$. Isso é impossível porque $R \in (0, 1)$. Assim, os Wronskianos $W(f_0, \dots, f_k)$, $k = 0, \dots, 3$ não se anulam para $R \in (0, 1)$. Portanto, desde que (f_0, \dots, f_3) é um sistema-ECT, a função “averaging” f tem no máximo 3 zeros simples e eles são realizáveis. Pelo Teorema 2, esses zeros fornecem 3 ciclos limite para o sistema (6.6).

6.2 Prova do Teorema 14

Primeiramente, suponhamos que $\alpha^2 + \beta < 0$. Como antes, obtemos a função positiva $\rho : (0, \sqrt{-\alpha^2/\beta}) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho = \frac{\beta^2 R (\alpha^2 + \beta)}{\alpha\beta^2 R \cos \theta - \sqrt{\alpha^2 \beta^2 (\beta (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta - \alpha^2 \cos^2 \theta (\alpha^2 + \beta R^2 + \beta))}},$$

resolvendo implicitamente a equação $H(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = R^2$. O fator integrante

$$\mu(x, y) = \frac{\alpha^4}{(\alpha^2(\beta + x^2) - 2\alpha\beta x + \beta^2)^2}$$

corresponde a integral primeira

$$H(x, y) = \frac{\alpha^2\beta y^2 - \alpha^4 x^2}{\beta(\alpha^2(\beta + x^2) - 2\alpha\beta x + \beta^2)}$$

porque eles satisfazem $\mu P = H_y$ e $\mu Q = -H_x$. Usando o Teorema 4, o sistema 6.2 torna-se

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \sum_{i=1}^5 \frac{C_i(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{Q_4(R, \varphi, \alpha, \beta)} R^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (6.10)$$

onde $a = (a_1, \dots, a_9)$, $b = (b_1, \dots, b_9)$ e

$$\begin{aligned} C_1 &= (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^2 \theta \cos^6 \theta (\alpha^2 a_1 - 2a_1\beta - \beta b_2) + \alpha^8 \beta^2 (\alpha^2 \\ &\quad + \beta)^2 \sin \theta \cos^7 \theta (\alpha^2 a_2 - \beta b_1) - \alpha^6 \beta^3 (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^4 \theta \cos^4 \theta (2\alpha^2 a_1 \\ &\quad + \alpha^2 b_2 - a_1\beta - 2\beta b_2) + \alpha^6 \beta^2 (\alpha^2 - 2\beta) (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^3 \theta \cos^5 \theta (\alpha^2 a_2 \\ &\quad - \beta b_1) + \alpha^4 \beta^4 (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^6 \theta \cos^2 \theta (\alpha^2 a_1 + 2\alpha^2 b_2 - \beta b_2) \\ &\quad + \alpha^4 \beta^4 (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^7 \theta \cos \theta (\alpha^2 a_2 - \beta b_1) - \alpha^4 \beta^3 (2\alpha^2 - \beta) (\alpha^2 \\ &\quad + \beta)^2 \sin^5 \theta \cos^3 \theta (\alpha^2 a_2 - \beta b_1) - \alpha^4 \beta^5 b_2 (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^8 \theta, \\ C_2 &= \sqrt{\alpha^2 \beta^2 (\beta (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta - \alpha^2 \cos^2 \theta (\alpha^2 + \beta R^2 + \beta))} (\alpha^2 \beta^4 (\alpha^2 \\ &\quad + \beta) \sin^7 \theta (\alpha^2 b_5 + \alpha a_2 + \beta b_5) + \alpha^6 \beta^2 (\alpha^2 + \beta) \cos^7 \theta (\alpha^2 a_3 + 3\alpha a_1 \\ &\quad + a_3\beta) - \alpha^2 \beta^3 (\alpha^2 + \beta) \sin^6 \theta \cos \theta (\alpha^4 a_5 + \alpha^2 a_5\beta - \alpha^2 \beta b_4 - \alpha a_1\beta \\ &\quad - 2\alpha\beta b_2 - \beta^2 b_4) + \alpha^4 \beta^2 (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta \cos^5 \theta (\alpha^4 a_3 + \alpha^4 a_5 \\ &\quad + 3\alpha^3 a_1 + \alpha^2 a_5\beta - \alpha^2 \beta b_4 - 4\alpha a_1\beta - 2\alpha\beta b_2 - a_3\beta^2 - \beta^2 b_4) \\ &\quad + \alpha^4 \beta^2 (\alpha^2 + \beta) \sin \theta \cos^6 \theta (\alpha^4 a_4 + 3\alpha^3 a_2 + \alpha^2 a_4\beta - \alpha^2 \beta b_3 \\ &\quad - 2\alpha\beta b_1 - \beta^2 b_3) - \alpha^2 \beta^3 (\alpha^2 + \beta) \sin^5 \theta \cos^2 \theta (\alpha^4 a_4 + \alpha^4 b_5 \\ &\quad + 4\alpha^3 a_2 + \alpha^2 a_4\beta - \alpha^2 \beta b_3 - \alpha a_2\beta - 2\alpha\beta b_1 - \beta^2 b_3 - \beta^2 b_5) \\ &\quad + \alpha^2 \beta^2 (\alpha^2 + \beta) \sin^4 \theta \cos^3 \theta (\alpha^6 a_5 - \alpha^4 a_3\beta - \alpha^4 \beta b_4 - 4\alpha^3 a_1\beta \\ &\quad - 2\alpha^3 \beta b_2 - \alpha^2 a_3\beta^2 - \alpha^2 a_5\beta^2 + \alpha a_1\beta^2 + 2\alpha\beta^2 b_2 + \beta^3 b_4) \\ &\quad + \alpha^2 \beta^2 (\alpha^2 + \beta) \sin^3 \theta \cos^4 \theta (\alpha^6 a_4 + 3\alpha^5 a_2 - \alpha^4 \beta b_3 - \alpha^4 \beta b_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4\alpha^3 a_2 \beta - 2\alpha^3 \beta b_1 - \alpha^2 a_4 \beta^2 - \alpha^2 \beta^2 b_5 + 2\alpha \beta^2 b_1 + \beta^3 b_3) , \\
C_3 = & \alpha^6 \beta^3 (\alpha^2 + \beta) (2a_1 \alpha^4 - a_6 \beta \alpha^4 - 2a_3 \beta \alpha^3 - 2a_6 \beta^2 \alpha^2 - 3a_1 \beta \alpha^2 \\
& - 2a_3 \beta^2 \alpha - a_6 \beta^3) \cos^8 \theta + \alpha^4 \beta^3 (\alpha^2 + \beta) (2a_2 \alpha^6 - a_7 \beta \alpha^6 \\
& - 2a_4 \beta \alpha^5 - 2a_7 \beta^2 \alpha^4 - 3a_2 \beta \alpha^4 - \beta b_1 \alpha^4 + \beta^2 b_6 \alpha^4 - 2a_4 \beta^2 \alpha^3 \\
& + \beta^2 b_3 \alpha^3 - a_7 \beta^3 \alpha^2 + \beta^2 b_1 \alpha^2 + 2\beta^3 b_6 \alpha^2 + \beta^3 b_3 \alpha \\
& + \beta^4 b_6) \sin \theta \cos^7 \theta + \alpha^4 \beta^3 (\alpha^2 + \beta) (2a_1 \alpha^6 - a_6 \beta \alpha^6 - a_8 \beta \alpha^6 \\
& - 2a_3 \beta \alpha^5 - 2a_5 \beta \alpha^5 - a_6 \beta^2 \alpha^4 - 2a_8 \beta^2 \alpha^4 - 6a_1 \beta \alpha^4 - \beta b_2 \alpha^4 \\
& + \beta^2 b_7 \alpha^4 + a_3 \beta^2 \alpha^3 - 2a_5 \beta^2 \alpha^3 + \beta^2 b_4 \alpha^3 + a_6 \beta^3 \alpha^2 - a_8 \beta^3 \alpha^2 \\
& + 5a_1 \beta^2 \alpha^2 + \beta^2 b_2 \alpha^2 + 2\beta^3 b_7 \alpha^2 + 3a_3 \beta^3 \alpha + \beta^3 b_4 \alpha + a_6 \beta^4 \\
& + \beta^4 b_7) \sin^2 \theta \cos^6 \theta + \alpha^2 \beta^3 (\alpha^2 + \beta) (2a_2 \alpha^8 - a_7 \beta \alpha^8 - a_9 \beta \alpha^8 \\
& - 2a_4 \beta \alpha^7 - a_7 \beta^2 \alpha^6 - 2a_9 \beta^2 \alpha^6 - 6a_2 \beta \alpha^6 - \beta b_1 \alpha^6 + \beta^2 b_6 \alpha^6 \\
& + \beta^2 b_8 \alpha^6 + a_4 \beta^2 \alpha^5 + \beta^2 b_3 \alpha^5 + \beta^2 b_5 \alpha^5 + a_7 \beta^3 \alpha^4 - a_9 \beta^3 \alpha^4 \\
& + 5a_2 \beta^2 \alpha^4 + 2\beta^2 b_1 \alpha^4 + \beta^3 b_6 \alpha^4 + 2\beta^3 b_8 \alpha^4 + 3a_4 \beta^3 \alpha^3 + \beta^3 b_5 \alpha^3 \\
& + a_7 \beta^4 \alpha^2 - \beta^3 b_1 \alpha^2 - \beta^4 b_6 \alpha^2 + \beta^4 b_8 \alpha^2 - \beta^4 b_3 \alpha - \beta^5 b_6) \sin^3 \theta \cos^5 \theta \\
& - \alpha^2 \beta^4 (\alpha^2 + \beta) (a_8 \alpha^8 + 2a_5 \alpha^7 + 3a_1 \alpha^6 - a_6 \beta \alpha^6 + a_8 \beta \alpha^6 + b_2 \alpha^6 \\
& - \beta b_7 \alpha^6 - \beta b_9 \alpha^6 - 3a_3 \beta \alpha^5 - a_5 \beta \alpha^5 - \beta b_4 \alpha^5 - 2a_6 \beta^2 \alpha^4 - a_8 \beta^2 \alpha^4 \\
& - 6a_1 \beta \alpha^4 - 2\beta b_2 \alpha^4 - \beta^2 b_7 \alpha^4 - 2\beta^2 b_9 \alpha^4 - 2a_3 \beta^2 \alpha^3 - 3a_5 \beta^2 \alpha^3 \\
& - a_6 \beta^3 \alpha^2 - a_8 \beta^3 \alpha^2 + 2a_1 \beta^2 \alpha^2 + \beta^2 b_2 \alpha^2 + \beta^3 b_7 \alpha^2 - \beta^3 b_9 \alpha^2 + a_3 \beta^3 \alpha \\
& + \beta^3 b_4 \alpha + \beta^4 b_7) \sin^4 \theta \cos^4 \theta - \alpha^2 \beta^4 (\alpha^2 + \beta) (a_9 \alpha^8 + 3a_2 \alpha^6 - a_7 \beta \alpha^6 \\
& + a_9 \beta \alpha^6 - \beta b_8 \alpha^6 - 3a_4 \beta \alpha^5 - \beta b_5 \alpha^5 - 2a_7 \beta^2 \alpha^4 - a_9 \beta^2 \alpha^4 - 6a_2 \beta \alpha^4 \\
& - \beta b_1 \alpha^4 + \beta^2 b_6 \alpha^4 - \beta^2 b_8 \alpha^4 - 2a_4 \beta^2 \alpha^3 + \beta^2 b_3 \alpha^3 - a_7 \beta^3 \alpha^2 - a_9 \beta^3 \alpha^2 \\
& + 2a_2 \beta^2 \alpha^2 + \beta^2 b_1 \alpha^2 + 2\beta^3 b_6 \alpha^2 + \beta^3 b_8 \alpha^2 + a_4 \beta^3 \alpha + \beta^3 b_3 \alpha + \beta^3 b_5 \alpha \\
& + \beta^4 b_6 + \beta^4 b_8) \sin^5 \theta \cos^3 \theta + \alpha^2 \beta^5 (\alpha^2 + \beta) (a_8 \alpha^6 + b_9 \alpha^6 + 3a_5 \alpha^5 \\
& + a_1 \alpha^4 + 2a_8 \beta \alpha^4 + b_2 \alpha^4 - \beta b_7 \alpha^4 + \beta b_9 \alpha^4 - a_3 \beta \alpha^3 + 2a_5 \beta \alpha^3 \\
& - \beta b_4 \alpha^3 + a_8 \beta^2 \alpha^2 - 2a_1 \beta \alpha^2 - \beta b_2 \alpha^2 - 2\beta^2 b_7 \alpha^2 - \beta^2 b_9 \alpha^2 - a_3 \beta^2 \alpha \\
& - a_5 \beta^2 \alpha - \beta^2 b_4 \alpha - \beta^3 b_7 - \beta^3 b_9) \sin^6 \theta \cos^2 \theta + \alpha^2 \beta^5 (\alpha^2 + \beta) (a_9 \alpha^6 \\
& + a_2 \alpha^4 + 2a_9 \beta \alpha^4 - \beta b_8 \alpha^4 - a_4 \beta \alpha^3 - \beta b_5 \alpha^3 + a_9 \beta^2 \alpha^2 - 2a_2 \beta \alpha^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\beta^2 b_8 \alpha^2 - a_4 \beta^2 \alpha - \beta^2 b_5 \alpha - \beta^3 b_8) \sin^7 \theta \cos \theta \\
& -\alpha^2 \beta^6 (\alpha^2 + \beta)^2 (b_9 \alpha^2 + a_5 \alpha + \beta b_9) \sin^8 \theta, \\
C_4 = & \sqrt{\alpha^2 \beta^2 (\beta (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta - \alpha^2 \cos^2 \theta (\alpha^2 + \beta R^2 + \beta))} (\alpha a_9 \beta^5 (\alpha^2 \\
& + \beta)^2 \sin^7 \theta - \alpha \beta^4 (\alpha^2 + \beta) \sin^6 \theta \cos \theta (\alpha^3 a_5 - \alpha^2 a_8 \beta - \alpha a_5 \beta - a_8 \beta^2) \\
& - \alpha \beta^4 \sin^5 \theta \cos^2 \theta (\alpha^6 a_9 + \alpha^5 a_4 + 3\alpha^4 a_2 - \alpha^4 a_7 \beta + \alpha^4 a_9 \beta - \alpha^2 a_2 \beta \\
& - 2\alpha^2 a_7 \beta^2 - \alpha^2 a_9 \beta^2 - \alpha a_4 \beta^2 - a_7 \beta^3 - a_9 \beta^3) + \alpha^3 \beta^3 \cos^7 \theta (\alpha^5 a_3 \\
& + 3\alpha^4 a_1 - \alpha^4 a_6 \beta - \alpha^2 a_1 \beta - 2\alpha^2 a_6 \beta^2 - \alpha a_3 \beta^2 - a_6 \beta^3) \\
& + \alpha^3 \beta^3 \sin \theta \cos^6 \theta (\alpha^5 a_4 + 3\alpha^4 a_2 - \alpha^4 a_7 \beta - \alpha^2 a_2 \beta - 2\alpha^2 a_7 \beta^2 \\
& - \alpha a_4 \beta^2 - a_7 \beta^3) + \alpha \beta^3 \sin^2 \theta \cos^5 \theta (\alpha^7 a_3 + \alpha^7 a_5 + 3\alpha^6 a_1 \\
& - \alpha^6 a_6 \beta - \alpha^6 a_8 \beta - \alpha^5 a_3 \beta - 4\alpha^4 a_1 \beta - \alpha^4 a_6 \beta^2 - 2\alpha^4 a_8 \beta^2 - \alpha^3 a_3 \beta^2 \\
& - \alpha^3 a_5 \beta^2 + \alpha^2 a_1 \beta^2 + \alpha^2 a_6 \beta^3 - \alpha^2 a_8 \beta^3 + \alpha a_3 \beta^3 + a_6 \beta^4) \\
& + \alpha \beta^3 \sin^4 \theta \cos^3 \theta (\alpha^7 a_5 - \alpha^6 a_8 \beta - \alpha^5 a_3 \beta - \alpha^5 a_5 \beta - 3\alpha^4 a_1 \beta \\
& + \alpha^4 a_6 \beta^2 - \alpha^4 a_8 \beta^2 - \alpha^3 a_5 \beta^2 + \alpha^2 a_1 \beta^2 + 2\alpha^2 a_6 \beta^3 + \alpha^2 a_8 \beta^3 + \alpha a_3 \beta^3 \\
& + \alpha a_5 \beta^3 + a_6 \beta^4 + a_8 \beta^4) + \alpha \beta^3 \sin^3 \theta \cos^4 \theta (\alpha^7 a_4 + 3\alpha^6 a_2 - \alpha^6 a_7 \beta \\
& - \alpha^6 a_9 \beta - \alpha^5 a_4 \beta - 4\alpha^4 a_2 \beta - \alpha^4 a_7 \beta^2 - 2\alpha^4 a_9 \beta^2 - \alpha^3 a_4 \beta^2 + \alpha^2 a_2 \beta^2 \\
& + \alpha^2 a_7 \beta^3 - \alpha^2 a_9 \beta^3 + \alpha a_4 \beta^3 + a_7 \beta^4)), \\
C_5 = & \alpha^4 \beta^6 (\alpha^2 + \beta) \sin^6 \theta \cos^2 \theta (\alpha^2 a_8 + 2\alpha a_5 + a_8 \beta) + \alpha^4 a_9 \beta^6 (\alpha^2 \\
& + \beta)^2 \sin^7 \theta \cos \theta + \alpha^4 \beta^4 \sin^3 \theta \cos^5 \theta (\alpha^6 a_2 - \alpha^6 a_7 \beta - \alpha^6 a_9 \beta \\
& - 2\alpha^5 a_4 \beta - 4\alpha^4 a_2 \beta - \alpha^4 a_7 \beta^2 - 2\alpha^4 a_9 \beta^2 + 3\alpha^2 a_2 \beta^2 + \alpha^2 a_7 \beta^3 \\
& - \alpha^2 a_9 \beta^3 + 2\alpha a_4 \beta^3 + a_7 \beta^4) + \alpha^6 \beta^4 \cos^8 \theta (\alpha^4 a_1 - \alpha^4 a_6 \beta - 2\alpha^3 a_3 \beta \\
& - 3\alpha^2 a_1 \beta - 2\alpha^2 a_6 \beta^2 - 2\alpha a_3 \beta^2 - a_6 \beta^3) - \alpha^4 \beta^5 \sin^5 \theta \cos^3 \theta (\alpha^6 a_9 \\
& + \alpha^4 a_2 - \alpha^4 a_7 \beta + \alpha^4 a_9 \beta - 2\alpha^3 a_4 \beta - 3\alpha^2 a_2 \beta - 2\alpha^2 a_7 \beta^2 - \alpha^2 a_9 \beta^2 \\
& - 2\alpha a_4 \beta^2 - a_7 \beta^3 - a_9 \beta^3) + \alpha^6 \beta^4 \sin \theta \cos^7 \theta (\alpha^4 a_2 - \alpha^4 a_7 \beta \\
& - 2\alpha^3 a_4 \beta - 3\alpha^2 a_2 \beta - 2\alpha^2 a_7 \beta^2 - 2\alpha a_4 \beta^2 - a_7 \beta^3) \\
& - \alpha^4 \beta^5 \sin^4 \theta \cos^4 \theta (\alpha^6 a_8 + 2\alpha^5 a_5 + \alpha^4 a_1 - \alpha^4 a_6 \beta + \alpha^4 a_8 \beta \\
& - 2\alpha^3 a_3 \beta - 3\alpha^2 a_1 \beta - 2\alpha^2 a_6 \beta^2 - \alpha^2 a_8 \beta^2 - 2\alpha a_3 \beta^2 - 2\alpha a_5 \beta^2 \\
& - a_6 \beta^3 - a_8 \beta^3) + \alpha^4 \beta^4 \sin^2 \theta \cos^6 \theta (\alpha^6 a_1 - \alpha^6 a_6 \beta - \alpha^6 a_8 \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\alpha^5 a_3 \beta - 2\alpha^5 a_5 \beta - 4\alpha^4 a_1 \beta - \alpha^4 a_6 \beta^2 - 2\alpha^4 a_8 \beta^2 - 2\alpha^3 a_5 \beta^2 \\
& + 3\alpha^2 a_1 \beta^2 + \alpha^2 a_6 \beta^3 - \alpha^2 a_8 \beta^3 + 2\alpha a_3 \beta^3 + a_6 \beta^4), \\
Q_4 & = 2(\alpha^2 + \beta)^2 (\alpha^2 \cos^2 \theta - \beta \sin^2 \theta)^3 S (S - \alpha \beta^2 R \cos \theta),
\end{aligned}$$

com

$$S = \sqrt{\alpha^2 \beta^2 (\beta (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta - \alpha^2 \cos^2 \theta (\alpha^2 + \beta R^2 + \beta))}.$$

Integrando o lado direito da equação diferencial (6.10), obtemos a função “averaging”, $f : (0, \sqrt{-\alpha^2/\beta}) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned}
f(R) & = \beta f_0 \left[\frac{(3\alpha^4 a_8 - 3\alpha^4 b_9 + \alpha^2 a_1 + \alpha^2 a_6 \beta + 3\alpha^2 a_8 \beta - \alpha^2 \beta b_7)}{4\alpha(-\beta)^{3/2}(\alpha^2 + \beta)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{-3\alpha^2 \beta b_9 + \alpha^2 b_2 + a_6 \beta^2 - \beta^2 b_7}{4\alpha(-\beta)^{3/2}(\alpha^2 + \beta)} \right] \\
& \quad + \beta^2 f_1 \left[\frac{(\alpha^6 a_8 + \alpha^5 a_5 + \alpha^4 a_1 - \alpha^4 a_6 \beta + 2\alpha^4 a_8 \beta - \alpha^3 a_3 \beta)}{4\alpha^3(-\beta)^{3/2}(\alpha^2 + \beta)^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\alpha^3 a_5 \beta - \alpha^2 a_1 \beta - 2\alpha^2 a_6 \beta^2 + \alpha^2 a_8 \beta^2 - \alpha a_3 \beta^2 - a_6 \beta^3}{4\alpha^3(-\beta)^{3/2}(\alpha^2 + \beta)^2} \right] \\
& \quad - f_2 \frac{\beta(\alpha^2 + \beta)^2 (a_8 - b_9)}{2(-\beta)^{3/2}} + f_3 \frac{(\alpha^2 a_8 - \alpha^2 b_9 + a_6 \beta - \beta b_7)}{2(-\beta)^{3/2}},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
f_0 & = R, \quad f_1 = R^3, \quad f_2 = R\sqrt{\alpha^2 + \beta R^2}, \\
f_3 & = \left(\alpha - (\alpha^2 + \beta)^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta R^2} \right).
\end{aligned}$$

Os Wronskianos $W(f_0, \dots, f_k)$, para $k = 0, \dots, 3$ são dados por

$$\begin{aligned}
W(f_0) & = R, \quad W(f_0, f_1) = 2R^3, \quad W(f_0, f_1, f_2) = -\frac{2\beta^2 R^6}{(\alpha^2 + \beta R^2)^{3/2}}, \\
W(f_0, \dots, f_3) & = -\frac{12\beta^2 R^2}{(\alpha^2 + \beta R^2)^{7/2}} \left((\alpha^2 + \beta)^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta R^2} (8\alpha^4 + 8\alpha^2 \beta R^2 \right. \\
& \quad \left. + \beta^2 R^4) - 4\alpha(\alpha^2 + \beta R^2)(2\alpha^2 + \beta R^2) \right).
\end{aligned}$$

Obviamente, os três primeiros Wronskianos não se anulam porque $R \in (0, \sqrt{-\alpha^2/\beta})$. O último Wronskiano é igual a zero se, e somente se,

$$(\alpha^2 + \beta)^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta R^2} (8\alpha^4 + 8\alpha^2 \beta R^2 + \beta^2 R^4) - 4\alpha(\alpha^2 + \beta R^2)(2\alpha^2 + \beta R^2) = 0.$$

Passando o termo $[(\alpha^2 + \beta)^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta R^2}(8\alpha^4 + 8\alpha^2\beta R^2 + \beta^2 R^4)]$ para o lado direito da equação anterior e elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} & (-\alpha^2 - \beta R^2) (64\alpha^{16} + 128\alpha^{14}\beta R^2 + 256\alpha^{14}\beta + 80\alpha^{12}\beta^2 R^4 \\ & + 512\alpha^{12}\beta^2 R^2 + 384\alpha^{12}\beta^2 + 16\alpha^{10}\beta^3 R^6 + 320\alpha^{10}\beta^3 R^4 + 768\alpha^{10}\beta^3 R^2 \\ & + 256\alpha^{10}\beta^3 + \alpha^8\beta^4 R^8 + 64\alpha^8\beta^4 R^6 + 480\alpha^8\beta^4 R^4 + 512\alpha^8\beta^4 R^2 + 64\alpha^8\beta^4 \\ & - 64\alpha^8 + 4\alpha^6\beta^5 R^8 + 96\alpha^6\beta^5 R^6 + 320\alpha^6\beta^5 R^4 + 128\alpha^6\beta^5 R^2 - 128\alpha^6\beta^5 R^2 \\ & + 6\alpha^4\beta^6 R^8 + 64\alpha^4\beta^6 R^6 + 80\alpha^4\beta^6 R^4 - 80\alpha^4\beta^6 R^4 + 4\alpha^2\beta^7 R^8 + 16\alpha^2\beta^7 R^6 \\ & - 16\alpha^2\beta^3 R^6 + \beta^8 R^8) = 0. \end{aligned}$$

O fator $(-\alpha^2 - \beta R^2)$ não se anula. Fazendo a mudança de variável $h = R^2$, no segundo fator do lado esquerdo da equação anterior, obtemos o polinômio de grau 4

$$\begin{aligned} p(h) = & 64\alpha^{16} + 128\alpha^{14}\beta h + 256\alpha^{14}\beta + 80\alpha^{12}\beta^2 h^2 + 512\alpha^{12}\beta^2 h \\ & + 384\alpha^{12}\beta^2 + 16\alpha^{10}\beta^3 h^3 + 320\alpha^{10}\beta^3 h^2 + 768\alpha^{10}\beta^3 h + 256\alpha^{10}\beta^3 \\ & + 64\alpha^8\beta^4 h^3 + 480\alpha^8\beta^4 h^2 + 512\alpha^8 + \alpha^8\beta^4 h^4 \beta^4 h + 64\alpha^8\beta^4 \\ & - 64\alpha^8 + 4\alpha^6\beta^5 h^4 + 96\alpha^6\beta^5 h^3 + 320\alpha^6\beta^5 h^2 + 128\alpha^6\beta^5 h \\ & - 128\alpha^6\beta h + 6\alpha^4\beta^6 h^4 + 64\alpha^4\beta^6 h^3 + 80\alpha^4\beta^6 h^2 - 80\alpha^4\beta^2 h^2 \\ & + 4\alpha^2\beta^7 h^4 + 16\alpha^2\beta^7 h^3 - 16\alpha^2\beta^3 h^3 + \beta^8 h^4. \end{aligned}$$

Para analisar seu número de zeros, aplicamos o resultado dado em [60]. Reescrevemos esse polinômio como segue

$$p(h) = s_4 + s_3 h + s_2 h^2 + s_1 h^3 + s_0 h^4.$$

Olhamos para as expressões

$$\begin{aligned} D_2 &= 3s_1^2 - 8s_0s_2, \\ D_3 &= 16s_0^2s_2s_4 - 18s_0^2s_3^2 - 6s_0s_1^2s_4 + 14s_0s_1s_2s_3 - 4s_0s_2^3 - 3s_1^3s_3 + s_1^2s_2^2, \\ D_4 &= 256s_0^3s_4^3 - 192s_0^2s_1s_3s_4^2 - 128s_0^2s_2^2s_4^2 + 144s_0^2s_2s_3^2s_4 - 27s_0^2s_3^4 \\ & + 144s_0s_1^2s_2s_4^2 - 6s_0s_1^2s_3^2s_4 - 80s_0s_1s_2^2s_3s_4 + 18s_0s_1s_2s_3^3 + 16s_0s_2^4s_4 \\ & - 4s_0s_2^3s_3^2 - 27s_1^4s_4^2 + 18s_1^3s_2s_3s_4 - 4s_1^3s_3^3 - 4s_1^2s_2^3s_4 + s_1^2s_2^2s_3^2, \\ E_1 &= 8s_0^2s_3 - 4s_0s_1s_2 + s_1^3. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} D_2 &= 128\alpha^4\beta^6(\alpha^2 + \beta - 1)(\alpha^2 + \beta + 1)((\alpha^2 + \beta)^2 + 1)((\alpha^2 + \beta)^4 - 6), \\ D_3 &= 16384\alpha^{12}\beta^{10}(\alpha^2 + \beta - 1)^2(\alpha^2 + \beta + 1)^2((\alpha^2 + \beta)^2 + 1)^2(17(\alpha^2 + \beta)^4 \\ &\quad - 4), \\ D_4 &= 67108864\alpha^{24}\beta^{12}(\alpha^2 + \beta - 1)^3(\alpha^2 + \beta)^4(\alpha^2 + \beta + 1)^3((\alpha^2 + \beta)^2 + 1)^3, \\ E_1 &= -1024\alpha^6\beta^9(\alpha^2 + \beta - 1)(\alpha^2 + \beta + 1)((\alpha^2 + \beta)^2 + 1)(3(\alpha^2 + \beta)^4 - 4). \end{aligned}$$

Relembramos que $\beta < 0$, $\alpha^2 + \beta < 0$ e $R \in (0, \sqrt{-\alpha^2/\beta})$. Assim,

(i) Se $D_4 = 0$, então $D_2 = 0$ e $D_3 = 0$. Isso implica que o polinômio p tem uma raiz real de multiplicidade 4 (veja [60]). Entretanto, $D_4 = 0$ se, e somente se, $\alpha^2 + \beta + 1 = 0$.

Temos que

$$p(0) = 64\alpha^8(\alpha^2 + \beta - 1)(\alpha^2 + \beta + 1)((\alpha^2 + \beta)^2 + 1).$$

Se $\alpha^2 + \beta + 1 = 0$, então $p(0) = 0$. Portanto, $h = 0$ é a raiz real de p de multiplicidade 4. Isso é impossível, porque $R \in (0, \sqrt{-\alpha^2/\beta})$.

(ii) Se $D_4 > 0$, então $\alpha^2 + \beta + 1 < 0$. Assim, $D_2 < 0$ e o polinômio p não tem raízes reais (veja [60]).

(iii) Se $D_4 < 0$, i.e., $-1 < \alpha^2 + \beta < 0$, então o polinômio p tem 2 raízes reais, mas isso não acontece porque $\alpha^2 + \beta \notin (-1, 0)$.

Portanto, o Wronskiano $W(f_0, \dots, f_3)$ não se anula para $R \in (0, \sqrt{-\alpha^2/\beta})$. Assim, desde que (f_0, \dots, f_3) é um sistema-ECT, a função “averaging” f tem no máximo 3 zeros simples e eles são realizáveis. Pelo Teorema 2, esses zeros fornecem 3 ciclos limite para o sistema (6.2).

Se supormos que $\alpha^2 + \beta > 0$, então repetimos os cálculos com a função positiva

$$\bar{\rho} = \frac{\beta^2 R(\alpha^2 + \beta)}{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 (\beta(\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta - \alpha^2 \cos^2 \theta (\alpha^2 + \beta R^2 + \beta))} + \alpha \beta^2 R \cos \theta}$$

e asseguramos que o sistema (6.2) tem no máximo 3 ciclos limite e eles são realizáveis desde que $\alpha^2 + \beta \notin (0, 1)$. Assim, o Teorema 14 está provado.

6.3 Comentários sobre as classes P_3 e P_5

O cálculo do número \mathcal{N} para as classes P_3 e P_5 permanece em aberto. Para a classe P_3 , temos a integral primeira

$$H(x, y) = \frac{\alpha^2 x^2 - 2\alpha^2 xy + \alpha^2 y^2 + x^2 + 2xy + y^2}{4\alpha^2 (\alpha^4 - 2\alpha^2 x - 2\alpha^2 y + \alpha^2 + x^2 + 2xy + y^2)},$$

e seu fator integrante correspondente

$$\mu(x, y) = \frac{1}{((-\alpha^2 + x + y)^2 + \alpha^2)^2}.$$

Repetindo o mesmo processo feito nas provas dos Teoremas 13 e 14, encontramos uma função positiva ρ , dada por

$$\rho = \frac{4R^2 \alpha^4 (\sin \theta + \cos \theta) - 2R\sqrt{S}}{2 \sin \theta \cos \theta ((4R^2 + 1)\alpha^2 - 1) + (4R^2 - 1)\alpha^2 - 1},$$

onde

$$S = \alpha^4 ((2 - 4R^2)\alpha^2 - 2 \sin \theta \cos \theta (4R^2 \alpha^2 + \alpha^4 - 1) + \alpha^4 + 1),$$

e obtemos um sistema na forma padrão do teorema do “averaging”

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \sum_{i=1}^{11} \frac{D_i(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{Q_5(R, \varphi, \alpha, \beta)} R^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (6.11)$$

onde o denominador Q_5 é dado por

$$\begin{aligned} Q_5 = & \alpha^4 ((\alpha^2 - 1) \sin 2\theta - \alpha^2 - 1)^3 (\sin 2\theta ((4R^2 + 1)\alpha^2 - 1) + (4R^2 - 1)\alpha^2 \\ & - 1) ((\alpha^2 - 1) \sin 2\theta ((4R^2 - 1)\alpha^2 - 1) + \alpha^2 (4R^2 (\alpha^2 - 1) + \alpha^2 + 2) \\ & - 4R (\sin \theta \\ & + \cos \theta \sqrt{\alpha^4 (\alpha^2 (-4R^2 + \alpha^2 + 2) - \sin 2\theta (4R^2 \alpha^2 + \alpha^4 - 1) + 1) \\ & + 1})^2 (\sin 2\theta (4R^2 \alpha^2 + \alpha^4 - 1) + 2R \sin \theta) \\ & + \cos \theta) \sqrt{\alpha^4 (\alpha^2 (-4R^2 + \alpha^2 + 2) - \sin 2\theta (4R^2 \alpha^2 + \alpha^4 - 1) + 1) \\ & + (2R\alpha - \alpha^2 - 1)(2R\alpha + \alpha^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Devido a expressão do denominador Q_5 , não podemos calcular a integral para aplicar a teoria do “averaging” para a equação (6.11). O mesmo problema acontece com a classe P_5 .

Apêndice A

Algoritmo no Mathematica para o Sistema 5.2

A seguir, damos explicitamente os comandos no manipulador algébrico Mathematica, usados para colocar a classe de sistemas

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(-1 + 2\alpha x + 2\beta x^2) + \varepsilon p_1(x, y), \\ \dot{y} &= x + \alpha(y^2 - x^2) + 2\beta xy^2 + \varepsilon q_1(x, y),\end{aligned}$$

na forma padrão do “averaging” e para calcular a função média. Essa classe de sistemas foi dada anteriormente no Capítulo 5. Observe que para evitar erros, testamos numericamente os resultados obtidos.

```

xp = P = y(-1 + 2 a x + 2 b x^2);
yp = Q = x + a(y^2 - x^2) + 2 b x y^2;
aa = {x -> r Cos[θ], y -> r Sin[θ]};
rp = Collect[(x xp + y yp)/r /. aa, r, Simplify];
θp = Collect[(x yp - y xp)/r^2 /. aa, r, Simplify];
H = (x^2 + y^2)/(1 - 2 x (a + b x));

μ = 
$$-\frac{2}{(-1 + 2 a x + 2 b x^2)^2}$$
;
Factor[D[H, x] P + D[H, y] Q]
0
Factor[D[P μ, x] + D[Q μ, y]]
0
Simplify[D[H, y]/P]

$$\frac{2}{(-1 + 2 a x + 2 b x^2)^2}$$

Simplify[-D[H, x]/Q]

$$\frac{2}{(-1 + 2 a x + 2 b x^2)^2}$$

p = a1 x + a2 y + a3 x^2 + a4 x y + a5 y^2 + a6 x^3 + a7 x^2 y + a8 x y^2 + a9 y^3;
q = b1 x + b2 y + b3 x^2 + b4 x y + b5 y^2 + b6 x^3 + b7 x^2 y + b8 x y^2 + b9 y^3;
aa = {x -> ρ Cos[θ], y -> ρ Sin[θ]};
Assuming[R > 0, FullSimplify[Solve[(H /. aa) == R^2, ρ]]]
{{ρ -> - (R (2 a R Cos[θ] + √2 √(2 + (a^2 + 2 b) R^2 + (a^2 + 2 b) R^2 Cos[2 θ]))) / (2 (1 + b R^2 + b R^2 Cos[2 θ]))},
 {ρ -> (R (-2 a R Cos[θ] + √2 √(2 + (a^2 + 2 b) R^2 + (a^2 + 2 b) R^2 Cos[2 θ]))) / (2 (1 + b R^2 + b R^2 Cos[2 θ]))}}
ρ = (R (-a R Cos[θ] + √(1 + (a^2 + 2 b) R^2 Cos[θ]^2))) / (1 + 2 b R^2 Cos[θ]^2);
bb = Factor[μ (x^2 + y^2) (Q p - P q) / (2 R (Q x - P y)) /. aa];
num = Collect[Numerator[bb], √(1 + a^2 R^2 Cos[θ]^2 + 2 b R^2 Cos[θ]^2), Factor]
den = Simplify[Denominator[bb]]
Exponent[num /. √(1 + a^2 R^2 Cos[θ]^2 + 2 b R^2 Cos[θ]^2) -> 0, R, List]
{1, 3, 5, 7, 9, 11}
Exponent[Coefficient[num, √(1 + a^2 R^2 Cos[θ]^2 + 2 b R^2 Cos[θ]^2), 1], R, List]
{2, 4, 6, 8, 10}
kk = {a -> 1, b -> 1, a1 -> 1, a2 -> 1, a3 -> 1, a4 -> 1, a5 -> 1, a6 -> 1, a7 -> 1, a8 -> 1,
      a9 -> 1, b1 -> 1, b2 -> 1, b3 -> 1, b4 -> 1, b5 -> 1, b6 -> 1, b7 -> 1, b8 -> 1, b9 -> 1, R -> E};
c0 = Collect[Coefficient[num, R, 0] / √(1 + a^2 R^2 Cos[θ]^2 + 2 b R^2 Cos[θ]^2), {Cos[θ], Sin[θ]}, Factor]

$$\sqrt{1 + a^2 R^2 \cos^2[\theta] + 2 b R^2 \cos[\theta]}$$

c1 = Collect[Coefficient[num, R, 1], {Cos[θ], Sin[θ]}, Factor]

```

2 |

$$c2 = \text{Collect}\left[\text{Coefficient}[\text{num}, R, 2] / \sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}, \{\text{Cos}[\theta], \text{Sin}[\theta]\}, \text{Factor}\right]$$

$$\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}$$

$$c3 = \text{Collect}[\text{Coefficient}[\text{num}, R, 3], \{\text{Cos}[\theta], \text{Sin}[\theta]\}, \text{Factor}]$$

$$c4 = \text{Collect}\left[\text{Coefficient}[\text{num}, R, 4] / \sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}, \{\text{Cos}[\theta], \text{Sin}[\theta]\}, \text{Factor}\right]$$

$$\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}$$

$$c5 = \text{Collect}[\text{Coefficient}[\text{num}, R, 5], \{\text{Cos}[\theta], \text{Sin}[\theta]\}, \text{Factor}]$$

$$c6 = \text{Collect}\left[\text{Coefficient}[\text{num}, R, 6] / \sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}, \{\text{Cos}[\theta], \text{Sin}[\theta]\}, \text{Factor}\right]$$

$$\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}$$

$$c7 = \text{Collect}[\text{Coefficient}[\text{num}, R, 7], \{\text{Cos}[\theta], \text{Sin}[\theta]\}, \text{Factor}]$$

$$c8 = \text{Collect}\left[\text{Coefficient}[\text{num}, R, 8] / \sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}, \{\text{Cos}[\theta], \text{Sin}[\theta]\}, \text{Factor}\right]$$

$$\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}$$

$$c9 = \text{Collect}[\text{Coefficient}[\text{num}, R, 9], \{\text{Cos}[\theta], \text{Sin}[\theta]\}, \text{Factor}]$$

$$c10 = \text{Collect}\left[\text{Coefficient}[\text{num}, R, 10] / \sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}, \{\text{Cos}[\theta], \text{Sin}[\theta]\}, \text{Factor}\right]$$

$$\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}$$

$$c11 = \text{Collect}[\text{Coefficient}[\text{num}, R, 11], \{\text{Cos}[\theta], \text{Sin}[\theta]\}, \text{Factor}]$$

$$f1 = \text{Assuming}[1 + 2 b R^2 \neq 0, \text{Integrate}[c1/\text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}]/(2 \pi)]$$

$$\text{NIntegrate}[c1/\text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}]/(2 \pi)$$

$$-0.156875$$

$$\text{N}[f1 /. \text{kk}]$$

$$-0.156875$$

$$f2 = \text{Assuming}[1 + 2 b R^2 \neq 0, \text{Integrate}[c2/\text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}]/(2 \pi)]$$

$$\text{NIntegrate}[c2/\text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}]/(2 \pi)$$

$$\text{N}[f2 /. \text{kk}]$$

$$f3 = \text{Assuming}[1 + 2 b R^2 \neq 0, \text{Integrate}[c3/\text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}]/(2 \pi)]$$

\$\text{SAborted}\$

$$c3/\text{den}$$

$$f31 = \text{Assuming}[1 + 2 b R^2 \neq 0, \text{Integrate}[-(5 a^2 a1 - 4 a a3 + a6 + 10 a1 b) \text{Cos}[\theta]^4 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}]/(2 \pi)]$$

$$\text{NIntegrate}[-(5 a^2 a1 - 4 a a3 + a6 + 10 a1 b) \text{Cos}[\theta]^4 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}]/(2 \pi)$$

$$0.00667308$$

$$\text{N}[f31 /. \text{kk}]$$

$$0.00667308$$

$$f32 = f34 = 0$$

$$f33 = \text{Assuming}[1 + 2 b R^2 \neq 0, \text{Integrate}[$$

$$-(3 a^2 a1 + a a3 - 4 a a5 + a8 + 2 a1 b + 8 a^2 b2 + 8 b b2 - 5 a b4 + b7) \text{Cos}[\theta]^2 \text{Sin}[\theta]^2 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}]/(2 \pi)]$$

NIntegrate

$$-(-3 a^2 a_1 + a a_3 - 4 a a_5 + a_8 + 2 a_1 b + 8 a^2 b_2 + 8 b b_2 - 5 a b_4 + b_7) \text{Cos}[\theta]^2 \text{Sin}[\theta]^2 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\} / (2 \pi)$$
0.0372344
N[f33 /. kk]
0.0372344
f35 = Assuming $[1 + 2 b R^2 \neq 0, \text{Integrate}[-(a a_5 + b_9) \text{Sin}[\theta]^4 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)]$
NIntegrate $[-(a a_5 + b_9) \text{Sin}[\theta]^4 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$
0.296089
N[f35 /. kk]
0.296089
f3 = -(f31 + f32 + f33 + f34 + f35);
NIntegrate $[c_3 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$
-0.339996
N[f3 /. kk]
-0.339996
c4 / den
f41 = Assuming $[1 + 2 b R^2 \neq 0, \text{Integrate}[-\sqrt{(1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2)}$
 $(-4 a^3 a_1 + 8 a^2 a_3 - 5 a a_6 - 24 a a_1 b + 8 a_3 b) \text{Cos}[\theta]^5 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)]$
NIntegrate $[-\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} (-4 a^3 a_1 + 8 a^2 a_3 - 5 a a_6 - 24 a a_1 b + 8 a_3 b) \text{Cos}[\theta]^5 / \text{den} /. \text{kk},$
 $\{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$
-0.0147707
N[f41 /. kk]
-0.0147707
f42 = f44 = f46 = 0
0
f43 = Assuming $[1 + 2 b R^2 \neq 0,$
 $\text{Integrate}[-\sqrt{(1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2)} (4 a^3 a_1 - 4 a^2 a_3 + 8 a^2 a_5 + a a_6 - 5 a a_8 + 2 a_3 b +$
 $8 a_5 b - 8 a^3 b_2 - 24 a b b_2 + 12 a^2 b_4 + 6 b b_4 - 6 a b_7) \text{Cos}[\theta]^3 \text{Sin}[\theta]^2 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)]$
NIntegrate $[-\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}$
 $(4 a^3 a_1 - 4 a^2 a_3 + 8 a^2 a_5 + a a_6 - 5 a a_8 + 2 a_3 b + 8 a_5 b - 8 a^3 b_2 - 24 a b b_2 + 12 a^2 b_4 + 6 b b_4 - 6 a b_7)$
 $\text{Cos}[\theta]^3 \text{Sin}[\theta]^2 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$
-0.0127711
N[f43 /. kk]
-0.0127711
f45 = Assuming $[1 + 2 b R^2 \neq 0, \text{Integrate}[-\sqrt{(1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2)} (-4 a^2 a_5 + a a_8 + 2 a_5 b - 6 a b_9) \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[\theta]^4 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)]$

```

4 | NIntegrate[
      - $\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} (-4 a^2 a5 + a a8 + 2 a5 b - 6 a b9) \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[\theta]^4 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$ 
    -0.174009
  N[f45 /. kk]
  -0.174009
  f4 = -(f41 + f42 + f43 + f44 + f45 + f46);
  NIntegrate[c4 / den /. kk, {\theta, 0, 2 \pi}] / (2 \pi)
  0.201551
  N[f4 /. kk]
  0.201551
  c5 / den
  f51 = Assuming[1 + 2 b R^2 \neq 0,
    Integrate[-(4 a^4 a1 - 12 a^3 a3 + 13 a^2 a6 + 40 a^2 a1 b - 32 a a3 b + 8 a6 b + 40 a1 b^2) \text{Cos}[\theta]^6 / \text{den}, {\theta, 0, 2 \pi}] / (2 \pi)]
  NIntegrate[
    -(4 a^4 a1 - 12 a^3 a3 + 13 a^2 a6 + 40 a^2 a1 b - 32 a a3 b + 8 a6 b + 40 a1 b^2) \text{Cos}[\theta]^6 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)
  0.0106057
  N[f51 /. kk]
  0.0106057
  f52 = f54 = f56 = 0
  f53 = Assuming[1 + 2 b R^2 \neq 0,
    Integrate[-(4 a^4 a1 + 8 a^3 a3 - 12 a^3 a5 - 5 a^2 a6 + 13 a^2 a8 - 8 a^2 a1 b - 2 a a3 b - 32 a a5 b +
      2 a6 b + 8 a8 b + 16 a1 b^2 + 8 a^4 b2 + 48 a^2 b b2 + 24 b^2 b2 - 20 a^3 b4 -
      30 a b b4 + 18 a^2 b7 + 6 b b7) \text{Cos}[\theta]^4 \text{Sin}[\theta]^2 / \text{den}, {\theta, 0, 2 \pi}] / (2 \pi)]
  NIntegrate[
    -(4 a^4 a1 + 8 a^3 a3 - 12 a^3 a5 - 5 a^2 a6 + 13 a^2 a8 - 8 a^2 a1 b - 2 a a3 b - 32 a a5 b + 2 a6 b + 8 a8 b + 16 a1 b^2 +
      8 a^4 b2 + 48 a^2 b b2 + 24 b^2 b2 - 20 a^3 b4 - 30 a b b4 + 18 a^2 b7 + 6 b b7)
    \text{Cos}[\theta]^4 \text{Sin}[\theta]^2 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)
  0.0145246
  N[f53 /. kk]
  0.0145246
  f55 = Assuming[1 + 2 b R^2 \neq 0,
    Integrate[-(8 a^3 a5 - 5 a^2 a8 - 2 a a5 b + 2 a8 b + 18 a^2 b9 + 6 b b9) \text{Cos}[\theta]^2 \text{Sin}[\theta]^4 / \text{den}, {\theta, 0, 2 \pi}] / (2 \pi)]
  NIntegrate[-(8 a^3 a5 - 5 a^2 a8 - 2 a a5 b + 2 a8 b + 18 a^2 b9 + 6 b b9) \text{Cos}[\theta]^2 \text{Sin}[\theta]^4 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)
  0.101383
  N[f55 /. kk]
  0.101383
  f5 = -(f51 + f52 + f53 + f54 + f55 + f56);
  NIntegrate[c5 / den /. kk, {\theta, 0, 2 \pi}] / (2 \pi)
  -0.126513

```

N[f5 /. kk]

-0.126513

c6 / den

f61 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0, Integrate[-√(1 + a² R² Cos[θ]² + 2 b R² Cos[θ]²)²
(4 a⁴ a³ - 10 a³ a⁶ - 12 a³ a¹ b + 24 a² a³ b - 15 a a⁶ b - 36 a a¹ b² + 12 a³ b²) Cos[θ]⁷ / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]

NIntegrate[-√(1 + a² R² Cos[θ]² + 2 b R² Cos[θ]²)²
(4 a⁴ a³ - 10 a³ a⁶ - 12 a³ a¹ b + 24 a² a³ b - 15 a a⁶ b - 36 a a¹ b² + 12 a³ b²)
Cos[θ]⁷ / den /. kk, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)

-0.0310497

N[f61 /. kk]

-0.0310497

f62 = f64 = f66 = 0

f63 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0,

Integrate[√(1 + a² R² Cos[θ]² + 2 b R² Cos[θ]²)² (4 a⁴ a³ - 4 a⁴ a⁵ - 6 a³ a⁶ + 10 a³ a⁸ - 4 a³ a¹ b -
24 a² a⁵ b + 3 a a⁶ b + 15 a a⁸ b + 12 a a¹ b² - 6 a³ b² - 12 a⁵ b² + 16 a³ b b² + 24 a b² b² -
8 a⁴ b⁴ - 24 a² b b⁴ - 6 b² b⁴ + 16 a³ b⁷ + 12 a b b⁷) Cos[θ]⁵ Sin[θ]² / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]

NIntegrate[

√(1 + a² R² Cos[θ]² + 2 b R² Cos[θ]²)² (4 a⁴ a³ - 4 a⁴ a⁵ - 6 a³ a⁶ + 10 a³ a⁸ - 4 a³ a¹ b - 24 a² a⁵ b + 3 a a⁶ b +
15 a a⁸ b + 12 a a¹ b² - 6 a³ b² - 12 a⁵ b² + 16 a³ b b² + 24 a b² b² - 8 a⁴ b⁴ -
24 a² b b⁴ - 6 b² b⁴ + 16 a³ b⁷ + 12 a b b⁷) Cos[θ]⁵ Sin[θ]² / den /. kk, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)

-0.0143429

N[f63 /. kk]

-0.0143429

f65 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0, Integrate[√(1 + a² R² Cos[θ]² + 2 b R² Cos[θ]²)²
(4 a⁴ a⁵ - 6 a³ a⁸ + 3 a a⁸ b - 6 a⁵ b² + 16 a³ b⁹ + 12 a b b⁹) Cos[θ]³ Sin[θ]⁴ / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]

f651 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0, Integrate[√(1 + a² R² Cos[θ]² + 2 b R² Cos[θ]²)²
(4 a⁴ a⁵ - 6 a³ a⁸ + 3 a a⁸ b - 6 a⁵ b² + 16 a³ b⁹ + 12 a b b⁹) Cos[θ]³ / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]

NIntegrate[√(1 + a² R² Cos[θ]² + 2 b R² Cos[θ]²)²
(4 a⁴ a⁵ - 6 a³ a⁸ + 3 a a⁸ b - 6 a⁵ b² + 16 a³ b⁹ + 12 a b b⁹) Cos[θ]³ / den /. kk, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)

(4 a⁴ a⁵ - 6 a³ a⁸ + 3 a a⁸ b - 6 a⁵ b² + 16 a³ b⁹ + 12 a b b⁹) Cos[θ]³ / den /. kk, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)

-0.137879

N[f651 /. kk]

-0.137879

f652 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0, Integrate[-√(1 + a² R² Cos[θ]² + 2 b R² Cos[θ]²)²
(4 a⁴ a⁵ - 6 a³ a⁸ + 3 a a⁸ b - 6 a⁵ b² + 16 a³ b⁹ + 12 a b b⁹)² Cos[θ]⁵ / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]

(4 a⁴ a⁵ - 6 a³ a⁸ + 3 a a⁸ b - 6 a⁵ b² + 16 a³ b⁹ + 12 a b b⁹)² Cos[θ]⁵ / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]

6 |

NIntegrate $\left[-\sqrt{1+a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2+2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} \right.$
 $\left.(4 a^4 a^5-6 a^3 a^8+3 a a^8 b-6 a^5 b^2+16 a^3 b^9+12 a b b^9) 2 \text{Cos}[\theta]^5 / \text{den} /. \text{kk},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$

0.0799355

N[f652 /. kk]

0.0799355

f653 = Assuming $\left[1+2 b R^2 \neq 0,\right.$ **Integrate** $\left[\sqrt{1+a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2+2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} \right.$
 $\left.(4 a^4 a^5-6 a^3 a^8+3 a a^8 b-6 a^5 b^2+16 a^3 b^9+12 a b b^9) \text{Cos}[\theta]^7 / \text{den},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$

NIntegrate $\left[\sqrt{1+a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2+2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} \right.$
 $\left.(4 a^4 a^5-6 a^3 a^8+3 a a^8 b-6 a^5 b^2+16 a^3 b^9+12 a b b^9) \text{Cos}[\theta]^7 / \text{den} /. \text{kk},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$

-0.0216407

N[f653 /. kk]

-0.0216407

f65 = f651 + f652 + f653;**f6 = -(f61 + f62 + f63 + f64 + f65 + f66);****NIntegrate**[c6 / den /. kk, {θ, 0, 2π}]/(2π)

0.124977

N[f6 /. kk]

0.124977

c7 / den

f71 = Assuming $\left[1+2 b R^2 \neq 0,\right.$ **Integrate** $\left[2\left(4 a^5 a^3-14 a^4 a^6-12 a^4 a^1 b+36 a^3 a^3 b-39 a^2 a^6 b-60 a^2 a^1 b^2+48 a a^3 b^2-12 a^6 b^2-40 a^1 b^3\right) \right.$
 $\left.\text{Cos}[\theta]^8 / \text{den},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$

NIntegrate $\left[2\left(4 a^5 a^3-14 a^4 a^6-12 a^4 a^1 b+36 a^3 a^3 b-39 a^2 a^6 b-60 a^2 a^1 b^2+48 a a^3 b^2-12 a^6 b^2-40 a^1 b^3\right) \right.$
 $\left.\text{Cos}[\theta]^8 / \text{den} /. \text{kk},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$

0.0171799

N[f71 /. kk]

0.0171799

f72 = f74 = f76 = 0

f73 = Assuming $\left[1+2 b R^2 \neq 0,\right.$ **Integrate** $\left[-2\left(4 a^5 a^3-4 a^5 a^5-10 a^4 a^6+14 a^4 a^8-4 a^4 a^1 b+4 a^3 a^3 b-36 a^3 a^5 b+3 a^2 a^6 b+39 a^2 a^8 b+\right.\right.$
 $\left.\left.12 a^2 a^1 b^2-18 a a^3 b^2-48 a a^5 b^2+6 a^6 b^2+12 a^8 b^2+24 a^1 b^3+16 a^4 b b^2+48 a^2 b^2 b^2+16 b^3 b^2-8 a^5 b^4-40 a^3 b b^4-30 a b^2 b^4+24 a^4 b^7+36 a^2 b b^7+6 b^2 b^7\right) \text{Cos}[\theta]^6 \text{Sin}[\theta]^2 / \text{den},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$

SAborted

f731 = Assuming $\left[1+2 b R^2 \neq 0,\right.$ **Integrate** $\left[-2\left(4 a^5 a^3-4 a^5 a^5-10 a^4 a^6+14 a^4 a^8-4 a^4 a^1 b+4 a^3 a^3 b-36 a^3 a^5 b+3 a^2 a^6 b+39 a^2 a^8 b+\right.\right.$
 $\left.\left.12 a^2 a^1 b^2-18 a a^3 b^2-48 a a^5 b^2+6 a^6 b^2+12 a^8 b^2+24 a^1 b^3+16 a^4 b b^2+48 a^2 b^2 b^2+16 b^3 b^2-8 a^5 b^4-40 a^3 b b^4-30 a b^2 b^4+24 a^4 b^7+36 a^2 b b^7+6 b^2 b^7\right) \text{Cos}[\theta]^6 / \text{den},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$

```

NIntegrate[
  -2 (4 a^5 a3 - 4 a^5 a5 - 10 a^4 a6 + 14 a^4 a8 - 4 a^4 a1 b + 4 a^3 a3 b - 36 a^3 a5 b + 3 a^2 a6 b + 39 a^2 a8 b + 12 a^2 a1 b^2 -
    18 a a3 b^2 - 48 a a5 b^2 + 6 a6 b^2 + 12 a8 b^2 + 24 a1 b^3 + 16 a^4 b b2 + 48 a^2 b^2 b2 + 16 b^3 b2 - 8 a^5 b4 -
    40 a^3 b b4 - 30 a b^2 b4 + 24 a^4 b7 + 36 a^2 b b7 + 6 b^2 b7) Cos[θ]^6 / den /. kk, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)
0.02295
N[f731 /. kk]
0.02295
f732 = Assuming[1 + 2 b R^2 ≠ 0,
  Integrate[2 (4 a^5 a3 - 4 a^5 a5 - 10 a^4 a6 + 14 a^4 a8 - 4 a^4 a1 b + 4 a^3 a3 b - 36 a^3 a5 b + 3 a^2 a6 b + 39 a^2 a8 b +
    12 a^2 a1 b^2 - 18 a a3 b^2 - 48 a a5 b^2 + 6 a6 b^2 + 12 a8 b^2 + 24 a1 b^3 + 16 a^4 b b2 + 48 a^2 b^2 b2 + 16 b^3 b2 -
    8 a^5 b4 - 40 a^3 b b4 - 30 a b^2 b4 + 24 a^4 b7 + 36 a^2 b b7 + 6 b^2 b7) Cos[θ]^8 / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]
NIntegrate[
  2 (4 a^5 a3 - 4 a^5 a5 - 10 a^4 a6 + 14 a^4 a8 - 4 a^4 a1 b + 4 a^3 a3 b - 36 a^3 a5 b + 3 a^2 a6 b + 39 a^2 a8 b + 12 a^2 a1 b^2 -
    18 a a3 b^2 - 48 a a5 b^2 + 6 a6 b^2 + 12 a8 b^2 + 24 a1 b^3 + 16 a^4 b b2 + 48 a^2 b^2 b2 + 16 b^3 b2 - 8 a^5 b4 -
    40 a^3 b b4 - 30 a b^2 b4 + 24 a^4 b7 + 36 a^2 b b7 + 6 b^2 b7) Cos[θ]^8 / den /. kk, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)
-0.0127402
N[f732 /. kk]
-0.0127402
f73 = f731 + f732;
f75 = Assuming[1 + 2 b R^2 ≠ 0,
  Integrate[2 (4 a^5 a5 - 10 a^4 a8 + 4 a^3 a5 b + 3 a^2 a8 b - 18 a a5 b^2 + 6 a8 b^2 + 24 a^4 b9 + 36 a^2 b b9 + 6 b^2 b9)
    Cos[θ]^4 Sin[θ]^4 / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]
f751 = Assuming[1 + 2 b R^2 ≠ 0,
  Integrate[-2 (4 a^5 a5 - 10 a^4 a8 + 4 a^3 a5 b + 3 a^2 a8 b - 18 a a5 b^2 + 6 a8 b^2 + 24 a^4 b9 + 36 a^2 b b9 + 6 b^2 b9)
    Cos[θ]^4 / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]
NIntegrate[
  -2 (4 a^5 a5 - 10 a^4 a8 + 4 a^3 a5 b + 3 a^2 a8 b - 18 a a5 b^2 + 6 a8 b^2 + 24 a^4 b9 + 36 a^2 b b9 + 6 b^2 b9) Cos[θ]^4 / den /.
    kk, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)
0.0611699
N[f751 /. kk]
0.0611699
f752 = Assuming[1 + 2 b R^2 ≠ 0,
  Integrate[4 (4 a^5 a5 - 10 a^4 a8 + 4 a^3 a5 b + 3 a^2 a8 b - 18 a a5 b^2 + 6 a8 b^2 + 24 a^4 b9 + 36 a^2 b b9 + 6 b^2 b9)
    Cos[θ]^6 / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]
NIntegrate[
  4 (4 a^5 a5 - 10 a^4 a8 + 4 a^3 a5 b + 3 a^2 a8 b - 18 a a5 b^2 + 6 a8 b^2 + 24 a^4 b9 + 36 a^2 b b9 + 6 b^2 b9) Cos[θ]^6 / den /. kk,
    {θ, 0, 2 π}] / (2 π)
-0.03825
N[f752 /. kk]
-0.03825
f753 = Assuming[1 + 2 b R^2 ≠ 0,
  Integrate[-2 (4 a^5 a5 - 10 a^4 a8 + 4 a^3 a5 b + 3 a^2 a8 b - 18 a a5 b^2 + 6 a8 b^2 + 24 a^4 b9 + 36 a^2 b b9 + 6 b^2 b9)
    Cos[θ]^8 / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]

```

```

8 | NIntegrate[
      -2 (4 a^5 a5 - 10 a^4 a8 + 4 a^3 a5 b + 3 a^2 a8 b - 18 a a5 b^2 + 6 a8 b^2 + 24 a^4 b9 + 36 a^2 b b9 + 6 b^2 b9) Cos[θ]^8 / den /.
      kk, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)
0.0106168
N[f753 /. kk]
0.0106168
f75 = f751 + f752 + f753;
NIntegrate[-2 (4 a^5 a5 - 10 a^4 a8 + 4 a^3 a5 b + 3 a^2 a8 b - 18 a a5 b^2 + 6 a8 b^2 + 24 a^4 b9 + 36 a^2 b b9 + 6 b^2 b9)
      Cos[θ]^4 Sin[θ]^4 / den /. kk, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)
0.0335367
N[f75 /. kk]
0.0335367
f7 = -(f71 + f72 + f73 + f74 + f75 + f76);
NIntegrate[c7/den /. kk, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)
-0.0609265
N[f7 /. kk]
-0.0609265
c8/den
f81 = Assuming[1 + 2 b R^2 ≠ 0,
      Integrate[√(1 + a^2 R^2 Cos[θ]^2 + 2 b R^2 Cos[θ]^2) 4 (4 a^5 a6 - 8 a^4 a3 b + 20 a^3 a6 b + 12 a^3 a1 b^2 -
      24 a^2 a3 b^2 + 15 a a6 b^2 + 24 a a1 b^3 - 8 a3 b^3) Cos[θ]^9 / den, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)]
NIntegrate[√(1 + a^2 R^2 Cos[θ]^2 + 2 b R^2 Cos[θ]^2) 4
      (4 a^5 a6 - 8 a^4 a3 b + 20 a^3 a6 b + 12 a^3 a1 b^2 - 24 a^2 a3 b^2 + 15 a a6 b^2 + 24 a a1 b^3 - 8 a3 b^3)
      Cos[θ]^9 / den /. kk, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)
-0.0470058
N[f81 /. kk]
-0.0470058

f82 = f84 = f86 = 0
f83 = Assuming[1 + 2 b R^2 ≠ 0,
      Integrate[-√(1 + a^2 R^2 Cos[θ]^2 + 2 b R^2 Cos[θ]^2) 4 (4 a^5 a6 - 4 a^5 a8 + 8 a^4 a5 b - 4 a^3 a6 b - 20 a^3 a8 b - 4 a^3 a1 b^2 +
      12 a^2 a3 b^2 + 24 a^2 a5 b^2 - 9 a a6 b^2 - 15 a a8 b^2 - 16 a a1 b^3 + 6 a3 b^3 + 8 a5 b^3 - 8 a^3 b^2 b2 - 8 a b^3 b2 +
      8 a^4 b b4 + 12 a^2 b^2 b4 + 2 b^3 b4 - 8 a^5 b7 - 16 a^3 b b7 - 6 a b^2 b7) Cos[θ]^7 Sin[θ]^2 / den, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)]
SAborted
f831 = Assuming[1 + 2 b R^2 ≠ 0,
      Integrate[-√(1 + a^2 R^2 Cos[θ]^2 + 2 b R^2 Cos[θ]^2) 4 (4 a^5 a6 - 4 a^5 a8 + 8 a^4 a5 b - 4 a^3 a6 b - 20 a^3 a8 b - 4 a^3 a1 b^2 +
      12 a^2 a3 b^2 + 24 a^2 a5 b^2 - 9 a a6 b^2 - 15 a a8 b^2 - 16 a a1 b^3 + 6 a3 b^3 + 8 a5 b^3 - 8 a^3 b^2 b2 - 8 a b^3 b2 +
      8 a^4 b b4 + 12 a^2 b^2 b4 + 2 b^3 b4 - 8 a^5 b7 - 16 a^3 b b7 - 6 a b^2 b7) Cos[θ]^7 / den, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)]

```

$$\text{NIntegrate}\left[-\sqrt{1+a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2+2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} \cdot 4\right. \\ \left.(4 a^5 a_6-4 a^5 a_8+8 a^4 a_5 b-4 a^3 a_6 b-20 a^3 a_8 b-4 a^3 a_1 b^2+12 a^2 a_3 b^2+24 a^2 a_5 b^2-9 a a_6 b^2-15 a a_8 b^2-16 a a_1 b^3+6 a_3 b^3+8 a_5 b^3-8 a^3 b^2 b_2-8 a b^3 b_2+8 a^4 b b_4+12 a^2 b^2 b_4+2 b^3 b_4-8 a^5 b_7-16 a^3 b b_7-6 a b^2 b_7) \text{Cos}[\theta]^7 / \text{den} /. \text{kk},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$$

-0.0639813

N[f831 /. kk]

-0.0639813

f832 = Assuming[1 + 2 b R^2 ≠ 0,

$$\text{Integrate}\left[\sqrt{1+a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2+2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} \cdot 4\right. \\ \left.(4 a^5 a_6-4 a^5 a_8+8 a^4 a_5 b-4 a^3 a_6 b-20 a^3 a_8 b-4 a^3 a_1 b^2+12 a^2 a_3 b^2+24 a^2 a_5 b^2-9 a a_6 b^2-15 a a_8 b^2-16 a a_1 b^3+6 a_3 b^3+8 a_5 b^3-8 a^3 b^2 b_2-8 a b^3 b_2+8 a^4 b b_4+12 a^2 b^2 b_4+2 b^3 b_4-8 a^5 b_7-16 a^3 b b_7-6 a b^2 b_7) \text{Cos}[\theta]^9 / \text{den},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$$

$$\text{NIntegrate}\left[\sqrt{1+a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2+2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} \cdot 4\right. \\ \left.(4 a^5 a_6-4 a^5 a_8+8 a^4 a_5 b-4 a^3 a_6 b-20 a^3 a_8 b-4 a^3 a_1 b^2+12 a^2 a_3 b^2+24 a^2 a_5 b^2-9 a a_6 b^2-15 a a_8 b^2-16 a a_1 b^3+6 a_3 b^3+8 a_5 b^3-8 a^3 b^2 b_2-8 a b^3 b_2+8 a^4 b b_4+12 a^2 b^2 b_4+2 b^3 b_4-8 a^5 b_7-16 a^3 b b_7-6 a b^2 b_7) \text{Cos}[\theta]^9 / \text{den} /. \text{kk},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$$

0.0456627

N[f832 /. kk]

0.0456627

f83 = f831 + f832;

$$\text{NIntegrate}\left[-\sqrt{1+a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2+2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} \cdot 4\right. \\ \left.(4 a^5 a_6-4 a^5 a_8+8 a^4 a_5 b-4 a^3 a_6 b-20 a^3 a_8 b-4 a^3 a_1 b^2+12 a^2 a_3 b^2+24 a^2 a_5 b^2-9 a a_6 b^2-15 a a_8 b^2-16 a a_1 b^3+6 a_3 b^3+8 a_5 b^3-8 a^3 b^2 b_2-8 a b^3 b_2+8 a^4 b b_4+12 a^2 b^2 b_4+2 b^3 b_4-8 a^5 b_7-16 a^3 b b_7-6 a b^2 b_7) \text{Cos}[\theta]^7 \text{Sin}[\theta]^2 / \text{den} /. \text{kk},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$$

-0.0183185

N[f83 /. kk]

-0.0183185

f85 = Assuming[1 + 2 b R^2 ≠ 0,

$$\text{Integrate}\left[-\sqrt{(1+a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2+2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2)} \cdot 4\right. \\ \left.(4 a^5 a_8-4 a^3 a_8 b+12 a^2 a_5 b^2-9 a a_8 b^2+6 a_5 b^3-8 a^5 b_9-16 a^3 b b_9-6 a b^2 b_9) \text{Cos}[\theta]^5 \text{Sin}[\theta]^4 / \text{den},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$$

f851 = Assuming[1 + 2 b R^2 ≠ 0,

$$\text{Integrate}\left[-\sqrt{(1+a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2+2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2)} \cdot 4\right. \\ \left.(4 a^5 a_8-4 a^3 a_8 b+12 a^2 a_5 b^2-9 a a_8 b^2+6 a_5 b^3-8 a^5 b_9-16 a^3 b b_9-6 a b^2 b_9) \text{Cos}[\theta]^5 / \text{den},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$$

$$\text{NIntegrate}\left[-\sqrt{1+a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2+2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} \cdot 4\right. \\ \left.(4 a^5 a_8-4 a^3 a_8 b+12 a^2 a_5 b^2-9 a a_8 b^2+6 a_5 b^3-8 a^5 b_9-16 a^3 b b_9-6 a b^2 b_9) \text{Cos}[\theta]^5 / \text{den} /. \text{kk},\{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$$

-0.0729846

N[f851 /. kk]

-0.0729846

10 |

f852 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0,

$$\text{Integrate}\left[2 \sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} \cdot 4 (4 a^5 a_8 - 4 a^3 a_8 b + 12 a^2 a_5 b^2 - 9 a a_8 b^2 + 6 a_5 b^3 - 8 a^5 b_9 - 16 a^3 b b_9 - 6 a b^2 b_9) \text{Cos}[\theta]^7 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$$

NIntegrate[2 $\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}$ · 4

$$(4 a^5 a_8 - 4 a^3 a_8 b + 12 a^2 a_5 b^2 - 9 a a_8 b^2 + 6 a_5 b^3 - 8 a^5 b_9 - 16 a^3 b b_9 - 6 a b^2 b_9) \text{Cos}[\theta]^7 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$$

0.0790357

N[f852 /. kk]

0.0790357

f853 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0,

$$\text{Integrate}\left[-\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} \cdot 4 (4 a^5 a_8 - 4 a^3 a_8 b + 12 a^2 a_5 b^2 - 9 a a_8 b^2 + 6 a_5 b^3 - 8 a^5 b_9 - 16 a^3 b b_9 - 6 a b^2 b_9) \text{Cos}[\theta]^9 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$$

NIntegrate[- $\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}$ · 4

$$(4 a^5 a_8 - 4 a^3 a_8 b + 12 a^2 a_5 b^2 - 9 a a_8 b^2 + 6 a_5 b^3 - 8 a^5 b_9 - 16 a^3 b b_9 - 6 a b^2 b_9) \text{Cos}[\theta]^9 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$$

-0.0282035

N[f853 /. kk]

-0.0282035

f85 = f851 + f852 + f853;

NIntegrate[- $\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2}$ · 4

$$(4 a^5 a_8 - 4 a^3 a_8 b + 12 a^2 a_5 b^2 - 9 a a_8 b^2 + 6 a_5 b^3 - 8 a^5 b_9 - 16 a^3 b b_9 - 6 a b^2 b_9) \text{Cos}[\theta]^5 \text{Sin}[\theta]^4 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$$

-0.0221524

N[f85 /. kk]

-0.0221524

f8 = -(f81 + f82 + f83 + f84 + f85 + f86);

NIntegrate[c8 / den /. kk, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)

0.0874767

N[f8 /. kk]

0.0874767

c9 / den

f91 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0,

$$\text{Integrate}\left[-4 (4 a^6 a_6 - 8 a^5 a_3 b + 28 a^4 a_6 b + 12 a^4 a_1 b^2 - 36 a^3 a_3 b^2 + 39 a^2 a_6 b^2 + 40 a^2 a_1 b^3 - 32 a a_3 b^3 + 8 a_6 b^3 + 20 a_1 b^4) \text{Cos}[\theta]^{10} / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$$

NIntegrate[-4 (4 a⁶ a₆ - 8 a⁵ a₃ b + 28 a⁴ a₆ b + 12 a⁴ a₁ b² - 36 a³ a₃ b² + 39 a² a₆ b² +

$$40 a^2 a_1 b^3 - 32 a a_3 b^3 + 8 a_6 b^3 + 20 a_1 b^4) \text{Cos}[\theta]^{10} / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$$

0.0208302

N[f91 /. kk]

0.0208302

f92 = f94 = f96 = 0

f93 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0,

Integrate[-4 (4 a⁶ a6 - 4 a⁶ a8 + 8 a⁵ a5 b - 4 a⁴ a6 b - 28 a⁴ a8 b - 4 a⁴ a1 b² + 16 a³ a3 b² +
36 a³ a5 b² - 21 a² a6 b² - 39 a² a8 b² - 24 a² a1 b³ + 22 a a3 b³ + 32 a a5 b³ - 6 a6 b³ -
8 a8 b³ - 16 a1 b⁴ - 8 a⁴ b² b2 - 16 a² b³ b2 - 4 b⁴ b2 + 8 a⁵ b b4 + 20 a³ b² b4 + 10 a b³ b4 -
8 a⁶ b7 - 24 a⁴ b b7 - 18 a² b² b7 - 2 b³ b7) Cos[θ]⁸ Sin[θ]² / den, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)]

f931 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0,

Integrate[-4 (4 a⁶ a6 - 4 a⁶ a8 + 8 a⁵ a5 b - 4 a⁴ a6 b - 28 a⁴ a8 b - 4 a⁴ a1 b² + 16 a³ a3 b² +
36 a³ a5 b² - 21 a² a6 b² - 39 a² a8 b² - 24 a² a1 b³ + 22 a a3 b³ + 32 a a5 b³ - 6 a6 b³ -
8 a8 b³ - 16 a1 b⁴ - 8 a⁴ b² b2 - 16 a² b³ b2 - 4 b⁴ b2 + 8 a⁵ b b4 + 20 a³ b² b4 +
10 a b³ b4 - 8 a⁶ b7 - 24 a⁴ b b7 - 18 a² b² b7 - 2 b³ b7) Cos[θ]⁸ / den, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)]

NIntegrate[-4 (4 a⁶ a6 - 4 a⁶ a8 + 8 a⁵ a5 b - 4 a⁴ a6 b - 28 a⁴ a8 b - 4 a⁴ a1 b² +
16 a³ a3 b² + 36 a³ a5 b² - 21 a² a6 b² - 39 a² a8 b² - 24 a² a1 b³ + 22 a a3 b³ + 32 a a5 b³ -
6 a6 b³ - 8 a8 b³ - 16 a1 b⁴ - 8 a⁴ b² b2 - 16 a² b³ b2 - 4 b⁴ b2 + 8 a⁵ b b4 + 20 a³ b² b4 +
10 a b³ b4 - 8 a⁶ b7 - 24 a⁴ b b7 - 18 a² b² b7 - 2 b³ b7) Cos[θ]⁸ / den /. kk, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)]

-0.0301131

N[f931 /. kk]

-0.0301131

f932 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0,

Integrate[4 (4 a⁶ a6 - 4 a⁶ a8 + 8 a⁵ a5 b - 4 a⁴ a6 b - 28 a⁴ a8 b - 4 a⁴ a1 b² + 16 a³ a3 b² +
36 a³ a5 b² - 21 a² a6 b² - 39 a² a8 b² - 24 a² a1 b³ + 22 a a3 b³ + 32 a a5 b³ - 6 a6 b³ -
8 a8 b³ - 16 a1 b⁴ - 8 a⁴ b² b2 - 16 a² b³ b2 - 4 b⁴ b2 + 8 a⁵ b b4 + 20 a³ b² b4 +
10 a b³ b4 - 8 a⁶ b7 - 24 a⁴ b b7 - 18 a² b² b7 - 2 b³ b7) Cos[θ]¹⁰ / den, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)]

NIntegrate[4 (4 a⁶ a6 - 4 a⁶ a8 + 8 a⁵ a5 b - 4 a⁴ a6 b - 28 a⁴ a8 b - 4 a⁴ a1 b² +
16 a³ a3 b² + 36 a³ a5 b² - 21 a² a6 b² - 39 a² a8 b² - 24 a² a1 b³ + 22 a a3 b³ + 32 a a5 b³ -
6 a6 b³ - 8 a8 b³ - 16 a1 b⁴ - 8 a⁴ b² b2 - 16 a² b³ b2 - 4 b⁴ b2 + 8 a⁵ b b4 + 20 a³ b² b4 +
10 a b³ b4 - 8 a⁶ b7 - 24 a⁴ b b7 - 18 a² b² b7 - 2 b³ b7) Cos[θ]¹⁰ / den /. kk, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)]

0.0216634

N[f932 /. kk]

0.0216634

f93 = -(f931 + f932);

f95 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0,

Integrate[4 (4 a⁶ a8 - 4 a⁴ a8 b + 16 a³ a5 b² - 21 a² a8 b² + 22 a a5 b³ - 6 a8 b³ - 8 a⁶ b9 -
24 a⁴ b b9 - 18 a² b² b9 - 2 b³ b9) Cos[θ]⁶ Sin[θ]⁴ / den, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)]

f951 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0,

Integrate[4 (4 a⁶ a8 - 4 a⁴ a8 b + 16 a³ a5 b² - 21 a² a8 b² + 22 a a5 b³ - 6 a8 b³ - 8 a⁶ b9 -
24 a⁴ b b9 - 18 a² b² b9 - 2 b³ b9) Cos[θ]⁶ / den, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)]

NIntegrate[

4 (4 a⁶ a8 - 4 a⁴ a8 b + 16 a³ a5 b² - 21 a² a8 b² + 22 a a5 b³ - 6 a8 b³ - 8 a⁶ b9 - 24 a⁴ b b9 - 18 a² b² b9 - 2 b³ b9)
Cos[θ]⁶ / den /. kk, {θ, 0, 2 π}]/(2 π)]

0.0285136

N[f951 /. kk]

0.0285136

12 |

f952 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0 ,

$$\text{Integrate}\left[-8(4 a^6 a 8 - 4 a^4 a 8 b + 16 a^3 a 5 b^2 - 21 a^2 a 8 b^2 + 22 a a 5 b^3 - 6 a 8 b^3 - 8 a^6 b 9 - 24 a^4 b b 9 - 18 a^2 b^2 b 9 - 2 b^3 b 9) \text{Cos}[\theta]^8 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$$

NIntegrate[

$$-8(4 a^6 a 8 - 4 a^4 a 8 b + 16 a^3 a 5 b^2 - 21 a^2 a 8 b^2 + 22 a a 5 b^3 - 6 a 8 b^3 - 8 a^6 b 9 - 24 a^4 b b 9 - 18 a^2 b^2 b 9 - 2 b^3 b 9) \text{Cos}[\theta]^8 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$$

-0.0316574

N[f952 /. kk]

-0.0316574

f953 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0 ,

$$\text{Integrate}\left[4(4 a^6 a 8 - 4 a^4 a 8 b + 16 a^3 a 5 b^2 - 21 a^2 a 8 b^2 + 22 a a 5 b^3 - 6 a 8 b^3 - 8 a^6 b 9 - 24 a^4 b b 9 - 18 a^2 b^2 b 9 - 2 b^3 b 9) \text{Cos}[\theta]^{10} / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$$

NIntegrate[

$$4(4 a^6 a 8 - 4 a^4 a 8 b + 16 a^3 a 5 b^2 - 21 a^2 a 8 b^2 + 22 a a 5 b^3 - 6 a 8 b^3 - 8 a^6 b 9 - 24 a^4 b b 9 - 18 a^2 b^2 b 9 - 2 b^3 b 9) \text{Cos}[\theta]^{10} / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$$

0.0113872

N[f953 /. kk]

0.0113872

f95 = f951 + f952 + f953;

NIntegrate[

$$4(4 a^6 a 8 - 4 a^4 a 8 b + 16 a^3 a 5 b^2 - 21 a^2 a 8 b^2 + 22 a a 5 b^3 - 6 a 8 b^3 - 8 a^6 b 9 - 24 a^4 b b 9 - 18 a^2 b^2 b 9 - 2 b^3 b 9) \text{Cos}[\theta]^6 \text{Sin}[\theta]^4 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$$

0.0082434

N[f95 /. kk]

0.0082434

f9 = -(f91 + f92 + f93 + f94 + f95 + f96);

NIntegrate[c9 / den /. kk, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)

-0.0375233

N[f9 /. kk]

-0.0375233

c10 / den

f101 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0 ,

$$\text{Integrate}\left[\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} 8 b (4 a^5 a 6 - 4 a^4 a 3 b + 10 a^3 a 6 b + 4 a^3 a 1 b^2 - 8 a^2 a 3 b^2 + 5 a a 6 b^2 + 6 a a 1 b^3 - 2 a 3 b^3) \text{Cos}[\theta]^{11} / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}\right] / (2 \pi)$$

NIntegrate[$\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} 8 b$

$$(4 a^5 a 6 - 4 a^4 a 3 b + 10 a^3 a 6 b + 4 a^3 a 1 b^2 - 8 a^2 a 3 b^2 + 5 a a 6 b^2 + 6 a a 1 b^3 - 2 a 3 b^3)$$

$$\text{Cos}[\theta]^{11} / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$$

-0.0324711

N[f101 /. kk]

-0.0324711

f102 = f104 = f106 = 0

f103 = Assuming[$1 + 2 b R^2 \neq 0$, Integrate[$\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} 8 b$
 $(4 a^5 a_6 + 4 a^5 a_8 - 4 a^4 a_3 b - 4 a^4 a_5 b + 10 a^3 a_6 b + 10 a^3 a_8 b + 4 a^3 a_1 b^2 - 8 a^2 a_3 b^2 - 8 a^2 a_5 b^2 +$
 $5 a a_6 b^2 + 5 a a_8 b^2 + 6 a a_1 b^3 - 2 a_3 b^3 - 2 a_5 b^3) \text{Cos}[\theta]^9 \text{Sin}[\theta]^2 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$]

f1031 = Assuming[$1 + 2 b R^2 \neq 0$, Integrate[$\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} 8 b$
 $(4 a^5 a_6 + 4 a^5 a_8 - 4 a^4 a_3 b - 4 a^4 a_5 b + 10 a^3 a_6 b + 10 a^3 a_8 b + 4 a^3 a_1 b^2 - 8 a^2 a_3 b^2 -$
 $8 a^2 a_5 b^2 + 5 a a_6 b^2 + 5 a a_8 b^2 + 6 a a_1 b^3 - 2 a_3 b^3 - 2 a_5 b^3) \text{Cos}[\theta]^9 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$]

NIntegrate[$\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} 8 b$
 $(4 a^5 a_6 + 4 a^5 a_8 - 4 a^4 a_3 b - 4 a^4 a_5 b + 10 a^3 a_6 b + 10 a^3 a_8 b + 4 a^3 a_1 b^2 - 8 a^2 a_3 b^2 - 8 a^2 a_5 b^2 +$
 $5 a a_6 b^2 + 5 a a_8 b^2 + 6 a a_1 b^3 - 2 a_3 b^3 - 2 a_5 b^3) \text{Cos}[\theta]^9 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$

-0.0537209

N[f1031 /. kk]

-0.0537209

f1032 = Assuming[$1 + 2 b R^2 \neq 0$, Integrate[$-\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} 8 b$
 $(4 a^5 a_6 + 4 a^5 a_8 - 4 a^4 a_3 b - 4 a^4 a_5 b + 10 a^3 a_6 b + 10 a^3 a_8 b + 4 a^3 a_1 b^2 - 8 a^2 a_3 b^2 -$
 $8 a^2 a_5 b^2 + 5 a a_6 b^2 + 5 a a_8 b^2 + 6 a a_1 b^3 - 2 a_3 b^3 - 2 a_5 b^3) \text{Cos}[\theta]^{11} / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$]

NIntegrate[$-\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} 8 b$
 $(4 a^5 a_6 + 4 a^5 a_8 - 4 a^4 a_3 b - 4 a^4 a_5 b + 10 a^3 a_6 b + 10 a^3 a_8 b + 4 a^3 a_1 b^2 - 8 a^2 a_3 b^2 - 8 a^2 a_5 b^2 +$
 $5 a a_6 b^2 + 5 a a_8 b^2 + 6 a a_1 b^3 - 2 a_3 b^3 - 2 a_5 b^3) \text{Cos}[\theta]^{11} / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$

0.0432948

N[f1032 /. kk]

0.0432948

f103 = f1031 + f1032;

f105 = Assuming[$1 + 2 b R^2 \neq 0$, Integrate[$\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} 8 b$
 $(4 a^5 a_8 - 4 a^4 a_5 b + 10 a^3 a_8 b - 8 a^2 a_5 b^2 + 5 a a_8 b^2 - 2 a_5 b^3) \text{Cos}[\theta]^7 \text{Sin}[\theta]^4 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$]

f1051 = Assuming[$1 + 2 b R^2 \neq 0$, Integrate[$\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} 8 b$
 $(4 a^5 a_8 - 4 a^4 a_5 b + 10 a^3 a_8 b - 8 a^2 a_5 b^2 + 5 a a_8 b^2 - 2 a_5 b^3) \text{Cos}[\theta]^7 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$]

NIntegrate[$\sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} 8 b$
 $(4 a^5 a_8 - 4 a^4 a_5 b + 10 a^3 a_8 b - 8 a^2 a_5 b^2 + 5 a a_8 b^2 - 2 a_5 b^3) \text{Cos}[\theta]^7 / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$

-0.018818

N[f1051 /. kk]

-0.018818

f1052 = Assuming[$1 + 2 b R^2 \neq 0$, Integrate[$-2 \sqrt{1 + a^2 R^2 \text{Cos}[\theta]^2 + 2 b R^2 \text{Cos}[\theta]^2} 8 b$
 $(4 a^5 a_8 - 4 a^4 a_5 b + 10 a^3 a_8 b - 8 a^2 a_5 b^2 + 5 a a_8 b^2 - 2 a_5 b^3) \text{Cos}[\theta]^9 / \text{den}, \{\theta, 0, 2 \pi\}] / (2 \pi)$]

14 |

$$\text{NIntegrate}\left[-2\sqrt{1+a^2R^2\text{Cos}[\theta]^2+2bR^2\text{Cos}[\theta]^2}8b\right. \\ \left.(4a^5a^8-4a^4a^5b+10a^3a^8b-8a^2a^5b^2+5a^8b^2-2a^5b^3)\text{Cos}[\theta]^9/\text{den}/.\text{kk},\{\theta,0,2\pi\}\right]/(2\pi)$$

0.0268604

N[f1052 /. kk]

0.0268604

$$\text{f1053} = \text{Assuming}\left[1+2bR^2\neq 0,\text{Integrate}\left[\sqrt{1+a^2R^2\text{Cos}[\theta]^2+2bR^2\text{Cos}[\theta]^2}8b\right. \right. \\ \left. \left.(4a^5a^8-4a^4a^5b+10a^3a^8b-8a^2a^5b^2+5a^8b^2-2a^5b^3)\text{Cos}[\theta]^{11}/\text{den},\{\theta,0,2\pi\}\right]\right]/(2\pi)$$

$$\text{NIntegrate}\left[\sqrt{1+a^2R^2\text{Cos}[\theta]^2+2bR^2\text{Cos}[\theta]^2}8b\right. \\ \left.(4a^5a^8-4a^4a^5b+10a^3a^8b-8a^2a^5b^2+5a^8b^2-2a^5b^3)\text{Cos}[\theta]^{11}/\text{den}/.\text{kk},\{\theta,0,2\pi\}\right]/(2\pi)$$

-0.0108237

N[f1053 /. kk]

-0.0108237

f105 = f1051 + f1052 + f1053;

f10 = -(f101 + f102 + f103 + f104 + f105 + f106);

NIntegrate[c10 / den /. kk, {θ, 0, 2π}]/(2π)

0.0456785

N[f10 /. kk]

0.0456785

c11 / den

$$\text{f111} = \text{Assuming}\left[1+2bR^2\neq 0,\text{Integrate}\left[-8b(a^2+2b)\right. \right. \\ \left. \left.(4a^4a^6-4a^3a^3b+6a^2a^6b+4a^2a^1b^2-4a^3a^3b^2+a^6b^2+2a^1b^3)\text{Cos}[\theta]^{12}/\text{den},\{\theta,0,2\pi\}\right]\right]/(2\pi)$$

$$\text{NIntegrate}\left[-8b(a^2+2b)(4a^4a^6-4a^3a^3b+6a^2a^6b+4a^2a^1b^2-4a^3a^3b^2+a^6b^2+2a^1b^3)\text{Cos}[\theta]^{12}/\text{den}/.\text{kk}, \right. \\ \left. \{\theta,0,2\pi\}\right]/(2\pi)$$

0.0121242

N[f111 /. kk]

0.0121242

f112 = f114 = f116 = 0

0

$$\text{f113} = \text{Assuming}\left[1+2bR^2\neq 0,\right. \\ \left.\text{Integrate}\left[-8b(a^2+2b)(4a^4a^6+4a^4a^8-4a^3a^3b-4a^3a^5b+6a^2a^6b+6a^2a^8b+4a^2a^1b^2- \right. \right. \\ \left. \left. 4a^3a^3b^2-4a^5b^2+a^6b^2+a^8b^2+2a^1b^3)\text{Cos}[\theta]^{10}\text{Sin}[\theta]^2/\text{den},\{\theta,0,2\pi\}\right]\right]/(2\pi)$$

f1131 = Assuming[1 + 2 b R^2 ≠ 0 ,

$$\text{Integrate}\left[-8b(a^2+2b)(4a^4a^6+4a^4a^8-4a^3a^3b-4a^3a^5b+6a^2a^6b+6a^2a^8b+ \right. \\ \left. 4a^2a^1b^2-4a^3a^3b^2-4a^5b^2+a^6b^2+a^8b^2+2a^1b^3)\text{Cos}[\theta]^{10}/\text{den},\{\theta,0,2\pi\}\right]/(2\pi)$$

NIntegrate

$$-8 b (a^2 + 2 b) (4 a^4 a_6 + 4 a^4 a_8 - 4 a^3 a_3 b - 4 a^3 a_5 b + 6 a^2 a_6 b + 6 a^2 a_8 b + 4 a^2 a_1 b^2 - 4 a a_3 b^2 - 4 a a_5 b^2 + a_6 b^2 + a_8 b^2 + 2 a_1 b^3) \text{Cos}[\theta]^{10} / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\} / (2 \pi)$$
0.019997
N[f1131 /. kk]
0.019997
f1132 =
Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0, **Integrate**[8 b (a² + 2 b) (4 a⁴ a₆ + 4 a⁴ a₈ - 4 a³ a₃ b - 4 a³ a₅ b + 6 a² a₆ b + 6 a² a₈ b + 4 a² a₁ b² - 4 a a₃ b² - 4 a a₅ b² + 4 a² a₁ b² - 4 a a₃ b² - 4 a a₅ b² + a₆ b² + a₈ b² + 2 a₁ b³) Cos[θ]¹² / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)
NIntegrate

$$8 b (a^2 + 2 b) (4 a^4 a_6 + 4 a^4 a_8 - 4 a^3 a_3 b - 4 a^3 a_5 b + 6 a^2 a_6 b + 6 a^2 a_8 b + 4 a^2 a_1 b^2 - 4 a a_3 b^2 - 4 a a_5 b^2 + a_6 b^2 + a_8 b^2 + 2 a_1 b^3) \text{Cos}[\theta]^{12} / \text{den} /. \text{kk}, \{\theta, 0, 2 \pi\} / (2 \pi)$$
-0.0161656
N[f1132 /. kk]
-0.0161656
f113 = f1131 + f1132;
f115 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0,
Integrate[-8 b (a² + 2 b) (4 a⁴ a₈ - 4 a³ a₅ b + 6 a² a₈ b - 4 a a₅ b² + a₈ b²) Cos[θ]⁸ Sin[θ]⁴ / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]
f1151 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0,
Integrate[-8 b (a² + 2 b) (4 a⁴ a₈ - 4 a³ a₅ b + 6 a² a₈ b - 4 a a₅ b² + a₈ b²) Cos[θ]⁸ / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]
NIntegrate[-8 b (a² + 2 b) (4 a⁴ a₈ - 4 a³ a₅ b + 6 a² a₈ b - 4 a a₅ b² + a₈ b²) Cos[θ]⁸ / den /. kk, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)
0.00694918
N[f1151 /. kk]
0.00694918
f1152 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0,
Integrate[16 b (a² + 2 b) (4 a⁴ a₈ - 4 a³ a₅ b + 6 a² a₈ b - 4 a a₅ b² + a₈ b²) Cos[θ]¹⁰ / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]
NIntegrate[16 b (a² + 2 b) (4 a⁴ a₈ - 4 a³ a₅ b + 6 a² a₈ b - 4 a a₅ b² + a₈ b²) Cos[θ]¹⁰ / den /. kk, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)
-0.00999848
N[f1152 /. kk]
-0.00999848
f1153 = Assuming[1 + 2 b R² ≠ 0,
Integrate[-8 b (a² + 2 b) (4 a⁴ a₈ - 4 a³ a₅ b + 6 a² a₈ b - 4 a a₅ b² + a₈ b²) Cos[θ]¹² / den, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)]
NIntegrate[-8 b (a² + 2 b) (4 a⁴ a₈ - 4 a³ a₅ b + 6 a² a₈ b - 4 a a₅ b² + a₈ b²) Cos[θ]¹² / den /. kk, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)
0.00404139
N[f1153 /. kk]
0.00404139
f115 = f1151 + f1152 + f1153;
f11 = -(f111 + f112 + f113 + f114 + f115 + f116);
NIntegrate[c11 / den /. kk, {θ, 0, 2 π}] / (2 π)
-0.0169477

16 |

N[f11 /. kk]

-0.0169477

f = f1 R + f2 R^2 + f3 R^3 + f4 R^4 + f5 R^5 + f6 R^6 + f7 R^7 + f8 R^8 + f9 R^9 + f10 R^10 + f11 R^11;

NIntegrate[num/den /. kk, {θ, 0, 2π}]/(2π)

-83.0604

N[f /. kk]

-83.0604

S = Factor[f]

num = Numerator[Factor[S]]

den = Denominator[Factor[S]]

num = Collect[Expand[num/den], (1 + 2 b R^2)^{1/2}, Factor]

$$A = -\frac{1}{4 b^2 R} \sqrt{1 + 2 b R^2} (a6 - a8 - b7 + b9 - 2 a8 b R^2 - 2 b b9 R^2) -$$

$$\frac{1}{4 b^2 R} (-a6 + a8 + b7 - b9 - a6 b R^2 - 3 a8 b R^2 - 2 a1 b^2 R^2 - 2 b^2 b2 R^2 - b b7 R^2 +$$

$$3 b b9 R^2 + 4 a^2 a1 b^2 R^4 + 2 a a3 b^2 R^4 + 2 a a5 b^2 R^4 + 2 a6 b^2 R^4 + 2 a8 b^2 R^4 + 4 a1 b^3 R^4)$$

num = Numerator[Factor[A]]

den = Denominator[Factor[A]]

num = Collect[Expand[num], \sqrt{1 + 2 b R^2}, Factor]

⋮

$$\text{num} = a6 - a8 - b7 + b9 + \text{Factor}[a6 b R^2 + 3 a8 b R^2 + 2 a1 b^2 R^2 + 2 b^2 b2 R^2 + b b7 R^2 - 3 b b9 R^2] +$$

$$\text{Factor}[-4 a^2 a1 b^2 R^4 - 2 a a3 b^2 R^4 - 2 a a5 b^2 R^4 - 2 a6 b^2 R^4 - 2 a8 b^2 R^4 - 4 a1 b^3 R^4] +$$

$$\sqrt{1 + 2 b R^2} (-a6 + a8 + b7 - b9 + \text{Factor}[2 a8 b R^2 + 2 b b9 R^2])$$

$$a6 - a8 - b7 + b9 + b(a6 + 3 a8 + 2 a1 b + 2 b b2 + b7 - 3 b9) R^2 -$$

$$2 b^2 (2 a^2 a1 + a a3 + a a5 + a6 + a8 + 2 a1 b) R^4 + \sqrt{1 + 2 b R^2} (-a6 + a8 + b7 - b9 + 2 b(a8 + b9) R^2)$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Andronov, *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris **189** (1929), 559–561.
- [2] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Maïer, *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*, Halsted Press [A division of John Wiley & Sons], New York-Toronto, Ont., 1973, Translated from the Russian.
- [3] V.I. Arnold and Y.S. Ilyashenko, *Dynamical Systems I. Ordinary differential equations*, Encyclopedia Math. Sci., vol 1, Springer, Berlin, 1988.
- [4] J. C. Artés, J. Llibre, J. C. Medrado and M. A. Teixeira, *Piecewise linear differential systems with two real saddles*, Prepublications del Dept. de Matemàtiques de la UAB, **37**, (2011).
- [5] T.R. Blows and L.M. Perko, *Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems*, SIAM Rev. **36** (1994), 341–376.
- [6] A. Buică and J. Llibre, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, Bull. Sci. Math. **128** (2004), 7–22.
- [7] C.A. Buzzi, P.R. da Silva and M.A. Teixeira. *A Singular approach to discontinuous vector fields on the plane*, J. Diff. Equations **231** (2006), 633–655.
- [8] C. A. Buzzi, T. de Carvalho and P. R. da Silva *Closed poly-trajectories and Poincaré index of non-smooth vector fields on the plane*, Journal of Dynamical and Control Systems **19** (2013).

-
- [9] P.T. Cardin, P.R. da Silva and M.A. Teixeira, *Geometric Singular Perturbation Theory for Non-Smooth Dynamical Dystems*, Publicacions Matemàtiques, (Print) (2013).
- [10] P.T. Cardin, P.R. da Silva and M.A. Teixeira, *On Singularly Perturbed Filippov Systems*, European Journal of Applied Mathematics (Print) (2013), 1-22.
- [11] P.T. Cardin, P.R. da Silva and M.A. Teixeira, *Three time scale singular perturbation problems and non-smooth dynamical systems*, Quarterly of Applied Mathematics (Print) (2013).
- [12] J. Chavarriga, *Integrable systems in the plane with a center type linear*, Applicationes Mathematicae **22** (1996), 285–309.
- [13] J. Chavarriga and I. Garcia, *Isochronous centers of cubic reversible systems*, Dynamical Systems, Plasmas and Gravitation (Orléans la Source, 1997), 255–268, Lecture Notes in Phis. **518**, Springer, Berlin, 1999.
- [14] J. Chavarriga and M. Sabatini, *A survey of isochronous centers*, Qual. Theory of Dyn. Syst. **1** (1999), 1–70.
- [15] C. Chicone and M. Jacobs, *Bifurcation of limit cycles from quadratic isochrones*, J. Differential Equations **91** (1991), 268–326.
- [16] C. Christopher and C. Li, *Limit cycles in differential equations*, Birkhauser, Boston, 2007.
- [17] P. R. da Silva and M. A. Teixeira, *Regularization and singular perturbation techniques for non-smooth systems*, Physica. D, Nonlinear Phenomena, **241**, 1948-1955, (2012)
- [18] T. de Carvalho and D. J. Tonon, *Generic Bifurcations of Planar Filippov Systems via Geometric Singular Perturbations*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin, **18**, (2011), 861-881.
- [19] B. Deng, *Food Chain Chaos due to Junction-Fold Point*, Chaos, **11(3)**, 514-525 (2001).

-
- [20] B. Deng and G. Hines, *Food Chain Chaos Due to Shilnikov's orbit*, Chaos, **12(3)**, 533-538 (2002).
- [21] M. di Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys and P. Kowalczyk, *Piecewise-smooth dynamical systems* Appl. Math. Sci. Series vol 163 (London: Springer) (2008).
- [22] N. Fenichel, *Geometric Singular Perturbation Theory for Ordinary Differential Equations*, Journal of Differential Equations, **31**, 53-98 (1979).
- [23] E. Freire, E. Ponce, F. Torres *Canonical discontinuous planar piecewise linear systems*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., **11**, 181-211 (2012).
- [24] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano, *On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles*, Nonlinearity **9** (1996), 501–516.
- [25] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano, *On the shape of limit cycles that bifurcate from Hamiltonian centers*, Nonlinear Anal. **43** (2000), 523–537.
- [26] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano, *On the shape of limit cycles that bifurcate from non-Hamiltonian centers*, Nonlinear Anal. **43** (2001), 837–859.
- [27] J. Giné, *Higher order limit cycle bifurcations from non-degenerate centers.*, Appl. Math. Comput. **218** (2012), no. 17, 8853–8860.
- [28] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Applied Mathematical Sciences, vol. 42, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [29] P. Glendinning and P. Kowalczyk, *Boundary-Equilibrium Bifurcations in Piecewise-Smooth Slow-Fast Systems*, Chaos **21**, 11 pages (2011).
- [30] G. Hek, *Geometric Singular Perturbation Theory in Biological Practice*, J. Mathematical Biology, **60**, 347-386 (2010).
- [31] C. Hilbert, *Mathematische probleme*, Lecture, Second Internat. Congr. Math. (Paris, 1900), *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.* (1900), 253-297; English transl.,

-
- Bull. Amer. Math. Soc.* **8** (1902), 437-479; *Bull. (New Series) Amer. Math. Soc.* **37** (2000), 407-436.
- [32] S. Huan and X. Yang, *On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems*, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, (2012).
- [33] J. Karlin and W.J. Studden, *T-Systems: With applications in analysis and statistics*, *Pure Appl. Math.*, Interscience Publishers, New York, London, Sidney, (1966).
- [34] C. Li, W. Li, J. Llibre, and Z. Zhang, *Linear estimation of the number of zeros of abelian integrals for some cubic isochronous centers*, *J. Differential Equations* **180** (2002), 307–333.
- [35] A. Liénard, *Etude des oscillations entretenues*, *Revue Générale de l'Electricité* **23** (1928), 901–912.
- [36] M.F.S Lima and J. Llibre, *Limit cycles and invariant cylinders for a class of continuous and discontinuous vector field in dimension $2n$* , *Appl. Math. Comput.* **217** (2011), no. 24, 9985–9996.
- [37] J. Llibre, *Averaging theory and limit cycles for quadratic systems*, *Rad. Mat.* **11** (2002/3), 215–228.
- [38] J. Llibre, P. R. da Silva and M. A. Teixeira, *Sliding Vector Fields via Slow–Fast Systems*, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin* **15** (2008), 851–869.
- [39] J. Llibre, A. Mahdi and J. Roé, *The geometry of the real planar polynomial differential systems having their orbits embedded in conics*, *Dynamical Systems* **3** (2011), 287–321.
- [40] J. Llibre, A. Mahdi and N. Vulpe, *Phase portraits and invariant straight lines of cubic polynomial vector fields having a quadratic rational first integral*, *Rocky Mountain J. of Math.* **41** (2011), 1585–1629.

-
- [41] J. Llibre, D.D. Novaes and M.A. Teixeira, *Averaging methods for studying the periodic orbits of discontinuous differential systems*, <http://arxiv.org/pdf/1205.4211.pdf>.
- [42] J. Llibre and E. Ponce *Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms, **3**, (2012).
- [43] J. Llibre and G. Świrszcz, *On the limit cycles of polynomial vector fields*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Serie A **18** (2011), 203–214.
- [44] J. Llibre, M. A. Teixeira and J. Torregrossa, *On the maximum number of limit cycles of discontinuous piecewise Linear differential systems with a straight line of separation*, Preprint.
- [45] N.G. Lloyd, *Degree theory*, Cambridge University Press, 1978.
- [46] W.S. Loud, *Behavior of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers*, Contributions to Differential Equations **3** (1964), 21-36.
- [47] S. Muratori and S. Rinaldi, *Low and High-Frequency oscillations in three dimensional food chain systems*, SIAM J. Appl. Math., **52**, 1688-1706 (1992).
- [48] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems* 3^o ed. Texts in Applied Mathematics (London: Springer) **7** (2000).
- [49] H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I, II*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **7** (1881), 375–422.
- [50] L.S. Pontrjagin, *Über Autoschwingungssysteme, die den hamiltonschen nahe liegen*, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion **6** (1934), 25–28.
- [51] J.A. Sanders, F. Verhulst and J. Murdock, *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, Applied Mathematical Sci., vol. 59, Springer, New York, 2007.
- [52] J. Sieber and P. Kowalczyk, *Small-scale Instabilities in Dynamical Systems with Sliding*, Phisica D. Nonlinear Phenomena **239**, 44-57 (2009).

-
- [53] S. Smale, *Mathematical problems for next century*, Math. Intelligencer **20** (1998), no. 2, 7–15.
- [54] J. Sotomayor and A. L. F. Machado, *Structurally stable discontinuous vector fields in the plane*, Qualitative Theory of Dynamical Systems **3**, 227-250 (2002).
- [55] J. Sotomayor and M. A. Teixeira, *Regularization of Discontinuous Vector Fields*, International Conference of Differential Equations, Lisboa 207-223, (1996).
- [56] P. Szmolyan, *Transversal Heteroclinic and Homoclinic Orbits in Singular Perturbation Problems*, Journal of Differential Equations **92** , 252-281, (1990).
- [57] van der Pol, *On relaxation-oscillations*, Philosophical Magazine **2** , 978–992, (1926).
- [58] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Universitext, Springer, 1991.
- [59] M. Viano, J. Llibre and H. Giacomini, *Arbitrary order bifurcations for perturbed Hamiltonian planar systems via the reciprocal of an integrating factor*, Nonlinear Anal. **48** (2002), 117–136.
- [60] L. Yang, *Recent advances on determining the number of real roots of parametric polynomials*, J. Symbolic Computation **28** (1999), 225–242.
- [61] Y. Yanqian, *Theory of limit cycles*, vol. 66, Transl. Math. Monogr., American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [62] W. Yusen and C. Zang, *Bifurcation of limit cycles and pseudo-isochronous center at degenerate singular point in a septic system*, Appl. Math. Comput. **218** (2012), no. 17, 8513–8525.